

الوحدة الثانية
11 متقدم +12 عام
الدوال الأسية
واللورغاثيمية

عبدالله السباعي

واتس

-971509739404

00201006359657

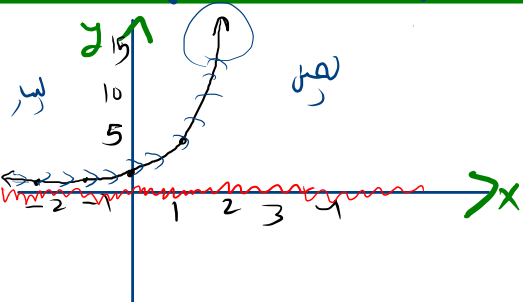
الدوال الأسية 2-1

$y = a(b)^{x-h} + k$
 a : ارتفاع
 h : صول محور
 k : y -
 h : x -

مثل كل دالة بيانيًا وحلليها. وضح المجال والهيدي والتقاطعات وخطوط التقارب والسلوك الطرفي، وفترات تزايد أو تناقص الدالة. (المثال 1)

1. $f(x) = 2^{-x}$

2. $r(x) = 5^x$

التفصيل						الدالة	
x	-2	-1	0	1	2	المجال	
y	0.04	0.2	1	5	25	المدى	
						$y > k$ أو $y < k$ $a +$ أو $a -$ $x = 0 \Rightarrow y = 5^0 = 1$ $y = 1$ أو $y = 0$	نقاط تقاطع
						التقارب	
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$						سلوك طرفي	
تزايد (من $-\infty$ إلى ∞)						تزايد أو تناقص	

$y = 5^x$
 $b > 1$

نقطة

$y = (\frac{1}{5})^x$

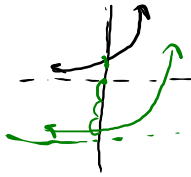
نقطة

$y = 5^x$
 $\Rightarrow$

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x)$ لوصف التحويل الذي يؤدي إلى رسم $g(x)$. ثم ارسم تمثيلي $f(x)$ و $g(x)$ البيانيين. (المثالان 2 و 3)

11. $f(x) = 4^x$; $g(x) = 4^x - 3$ انقل 3

12. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}$ انقل 4



13. $f(x) = 3^x$; $g(x) = -2(3^x)$ انعكاس حول المحور x،

14. $f(x) = 2^x$; $g(x) = 2^{x-2} + 5$ انقل 2 إلى اليمين،

15. $f(x) = 10^x$; $g(x) = 10^{-x} + 3$

16. $f(x) = e^x$; $g(x) = e^{2x}$

17. $f(x) = e^x$; $g(x) = e^{x+2} - 1$ انقل 2 إلى اليسار،

$e \approx 2.7$

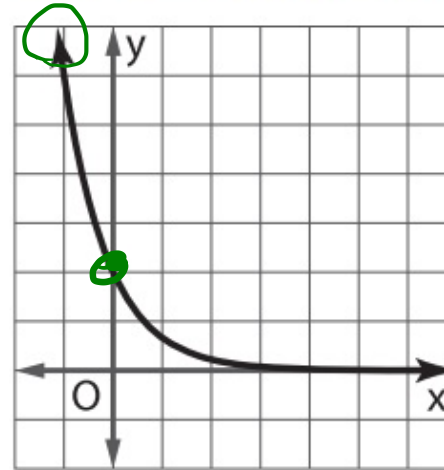
مراجعة ما معادلة الدالة؟

F $y = 2(3)^x$

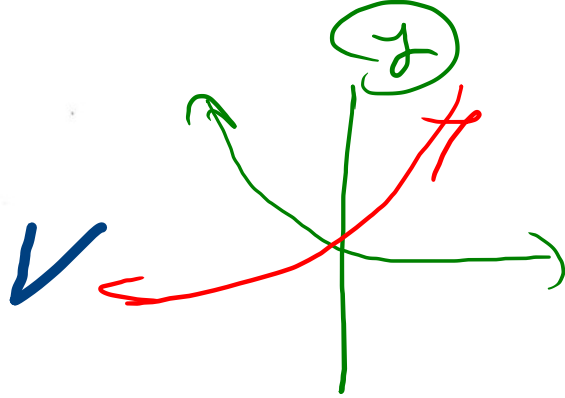
G $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x \Leftrightarrow \frac{1}{3} < 1$ ✓

H $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x$

J $y = 3(2)^x$



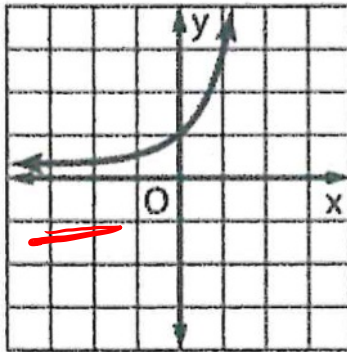
$x=0$
 $y=2$



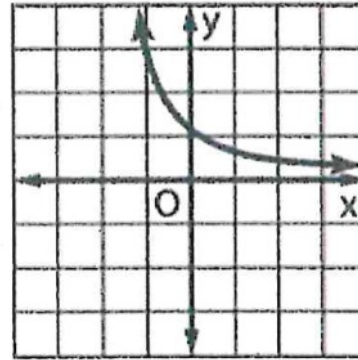
اختر الرسم البياني لـ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$
 $\Rightarrow$ B X

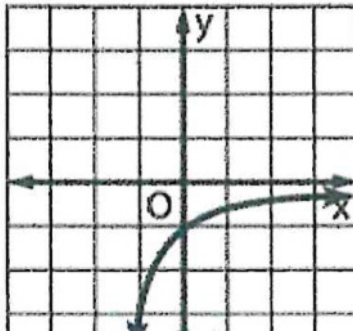
a) ✓
نقد



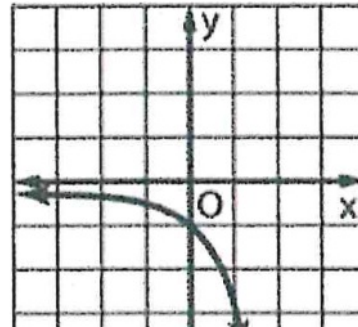
b)



c)



d)



n	مركبة
1	سنوياً
2	كل نصف عام
4	كل ربع عام
12	شهرياً
365	يوميًا
8760	كل ساعة

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = Pe^{rt}$$

25. **المعرفة المالية** حصل أحمد على ميراث بقيمة 20000 AED في عمر 8 أعوام، لكنه لن يتمكن من إجراء المعاملات عليه قبل أن يبلغ 18 عامًا. (المثالان 4 و5)

بنوك

a. إذا تم وضع ميراثه في حساب ادخاري يحقق 4.6% كمربحة مركبة شهريًا، فكم ستبلغ قيمة ميراث أحمد في يوم عيد ميلاده الثامن عشر؟

b. كم ستبلغ قيمة ميراث أحمد إذا تم وضعه في حساب يحقق مربحة مركبة بنسبة 4.2% (باستمرار)؟

$$a) A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 20000 \left(1 + \frac{0.046}{12}\right)^{12 \times 10} =$$

$$b) A = Pe^{rt} = 20000 e^{0.042 \times 10} =$$

31. **الماء** كان استهلاك الماء على مستوى العالم حوالي 294.2 مليون جالون في عام 1950. إذا ارتفع استهلاك الماء بالمعدل المذكور، فضع تقديرًا لمقدار الماء المستخدم في عام 2000 وتوقع المقدار في عام 2050. (مثال 6)

a. 3% سنويًا b. 3.05% باستمرار

$$\frac{2000 - 1950}{50}$$

$$\frac{2000}{50}$$

$$b) N = 294.2 e^{0.0305 \times 50}$$

$$a) N = 294.2 (1 + 0.03)^{50}$$

نمو أو تضائل أسّي

$$N = N_0 (1 + r)^t$$

إذا كان r يمثل معدل نمو، فإن $r > 0$.

إذا كان r يمثل معدل تضائل، فإن $r < 0$.

نمو أو تضائل أسّي مستمر

$$N = N_0 e^{kt}$$

إذا كان k يمثل معدل نمو مستمر، فإن $k > 0$.

إذا كان k يمثل معدل تضائل مستمر، فإن $k < 0$.

البنزين كتب جمال معادلة أسية لتمثيل تكلفة البنزين. وقد توصل إلى متوسط تكلفة لتر البنزين على مدار عامين واستخدم هذه البيانات في نموذج التمثيلي. (المثال 7)

متوسط التكلفة لكل لتر من البنزين	
التكلفة (AED)	العام
1.19	1990
3.91	2011

$r = ?$

a. إذا كان متوسط تكلفة البنزين يتزايد بمعدل أسي، فحدد معدل الزيادة. اكتب معادلة أسية لتمثيل هذا الموقف.

b. استخدم نموذجك التمثيلي في توقع تكلفة لتر البنزين في عامي 2015 و 2017.

c. متى سيتجاوز متوسط تكلفة لتر البنزين 7 AED؟

Activator 1

$$N = N_0 (1+r)^t$$

$$3.91 = 1.19 (1+r)^{21}$$

Shift
Solve

$$\sqrt[21]{\frac{3.91}{1.19}} = 1+r$$

$$r = \sqrt[21]{\frac{3.91}{1.19}} - 1 \approx 0.0583$$

$$N = 1.19 (1 + 0.0583)^t$$

عام 2015 $t = 25$
عام 2017 $t = 27$

$$7 = 1.19 (1 + 0.0583)^t$$

$$t = 31.27$$

في عام 32 أو 31

في 2022

الدوال اللوغاريتمية

السابق

مثّلت الدوال
اللوغاريتمية بيانياً
وحللتها. (الدرس 1-2)

الحالي

- 1 إيجاد قيم التعابير التي
تتضمن لوغاريتمات.
- 2 تمثيل الدوال
اللوغاريتمية بيانياً
وتحليلها.

لماذا؟

يتم قياس مستوى كثافة الصوت بوحدة الديسيبل.
ويبلغ قياس الهمسة 20 ديسيلاً والمحادثة العادية
60 ديسيلاً والمكنسة الكهربائية 80 ديسيلاً. ويبلغ
أقصى حد لصوت الموسيقى التي يتم تشغيلها من خلال
سماعة 100 ديسيبل. ويعطي مقياس الديسيبل مثالاً على
المقياس اللوغاريتمي.



الدوال اللوغاريتمية

2-2

إذا كان x عددًا حقيقيًا، فحينها تكون العبارات التالية صحيحة.

$$\ln \Leftrightarrow e$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{خصائص} \\ \text{المعكوس} \end{array} \right. \quad \ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x, x > 0$$

إذا كان x عددًا حقيقيًا، فإن العبارات التالية صحيحة.

$$\log 1 = 0$$

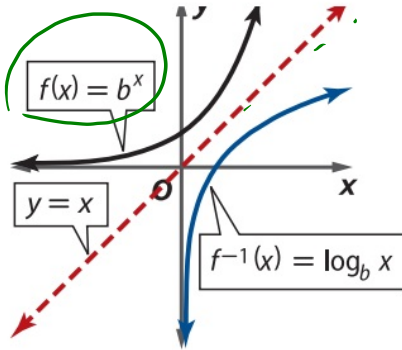
$$\log 10 = 1$$

$$\log 10^x = x$$

$$10^{\log x} = x, x > 0$$

خصائص المعكوس

$$\ln \Rightarrow \log_e$$



يطلق على معكوس $f(x) = b^x$ **دالة لوغاريتمية ذات الأساس b** . ويُرمز لها بـ $\log_b x$ وتُقرأ أساس $\log b$ لـ x . هذا يعني أنه إذا كانت $b > 0$ و $b \neq 1$ و $f(x) = b^x$

فإن $f^{-1}(x) = \log_b x$. كما يظهر في التمثيل البياني لهاتين الدالتين. لاحظ أن التمثيلات البيانية تمثل انعكاسًا لبعضها البعض حول المستقيم $y = x$.

يقدم تعريف المعكوس هذا ربطًا مفيدًا بين المعادلات الأسية واللوغاريتمية.

$$\boxed{3^x} \quad \longleftrightarrow \quad \log_3 \boxed{x}$$

جد قيمة كل تعبير مما يلي. (الأمثلة من 1 إلى 4)

2x1x?

$$\textcircled{1} \log_2 \textcircled{8} \Rightarrow \log_2 2^{\textcircled{3}}$$

$$3 \times \log_2 2^2$$

$$\boxed{3}$$

$$\textcircled{3} \log_6 6^{\boxed{-2}}$$

$$-2 \times \log_6 6$$

$$=-2$$

$$1. \log_2 8$$

$$3. \log_6 \frac{1}{36}$$

$$5. \log_{11} 121$$

$$7. \log_{\sqrt{9}} 81$$

$$9. \log 42$$

$$11. \log 5275$$

$$\textcircled{13} 3 \ln e^4 \quad 3 \times 4 = 12$$

$$15. \log_{36} \sqrt[5]{6}$$

$$6^2$$

$$2. \log_{10} 10$$

$$4. 4^{\log_4 1}$$

$$6. \log_2 2^3 \Rightarrow 3 \log_2 2^2$$

$$\boxed{3}$$

$$8. \log 0.01$$

$$10. \log_x x^2$$

$$12. \ln e^{-14} = -14$$

$$14. \ln (5 - \sqrt{6})$$

$$16. 4 \ln (7 - \sqrt{2})$$

مثّل كل دالة بيانيًا وحلّها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع
خطوط التقارب والسلوك الطرفي، وفترات تزايد أو تناقص
الدالة. (مثال 5)

(4) (1/4) (1)

28. $f(x) = \log_4 x$

30. $h(x) = \log_8 x$

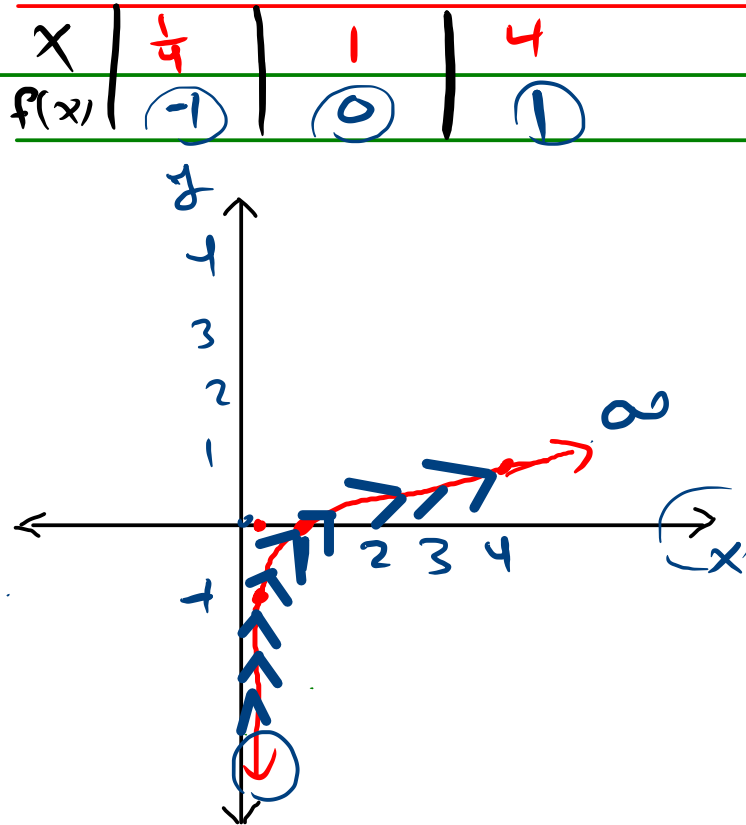
32. $m(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

29. $g(x) = \log_5 x$

31. $j(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

33. $n(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

1/8 8 1



$x > 0$	المجال
كل اعداد ايجابية	المدى
نقاط التقاطع $x=0 \Rightarrow \log_4(0)$ غير معرف $y=0 \Rightarrow 0 = \log_4(x) \Rightarrow x=1$	نقاط التقاطع
تقارب $\Rightarrow x=0$	التقارب
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	سلوك طرفي
تزايد (0, ∞)	تزايد أو تناقص

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x)$ لوصف التحول الذي يؤدي إلى تمثيل $g(x)$ البياني. ثم ارسم تمثيلي $f(x)$ و $g(x)$ البيانيين. (مثال 6)

الأمثلة

34. $f(x) = \log_2 x; g(x) = \log_2 (x + 4)$

لبار ٤ خطوات

35. $f(x) = \log_3 x; g(x) = \log_3 (x - 1)$

بصين خطوة

36. $f(x) = \log x; g(x) = \log 2x$

انكماش أفقي بمعدل $\frac{1}{2}$

37. $f(x) = \ln x; g(x) = 0.5 \ln x$

انكماش رأسي بمعدل 0.5

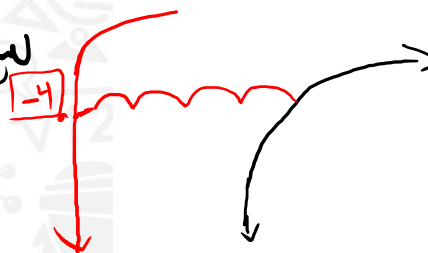
38. $f(x) = \log x; g(x) = -\log (x - 2)$

انعكاس حول محور x ،
خطوات ٢

39. $f(x) = \ln x; g(x) = 3 \ln (x) + 1$

40. $f(x) = \log x; g(x) = -2 \log x + 5$

41. $f(x) = \ln x; g(x) = \ln (-x)$



42. **الاستثمار** يمكن التوصل إلى معدل النمو السنوي لاستثمار ما باستخدام $r = \frac{1}{t} \ln \frac{P}{P_0}$ ، حيث r معدل النمو السنوي، و t الوقت بالسنوات، و P القيمة الحالية، و P_0 الاستثمار الأصلي. بدأ استثمار بمبلغ AED 10,000 في عام 2002 وبلغت قيمته AED 15,000 في 2009. ماذا كان متوسط معدل النمو السنوي لهذا الاستثمار؟ (مثال 7)

$$r = \frac{1}{7} \ln \left(\frac{15000}{10000} \right)$$

$$\begin{aligned} P_0 &= 10000 \\ P &= 15000 \\ t &= 7 \end{aligned}$$

$$r = 0.058 \checkmark$$

$$9\% \ 5.8\% \checkmark$$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

$$\textcircled{1} \quad x^a = x^b \Rightarrow a=b$$

$$\textcircled{2} \quad a^b \Leftrightarrow \log$$

$$\textcircled{3} \quad \ln \Rightarrow e$$

$$\textcircled{4} \quad \cancel{\log} x = \cancel{\log} y$$

ركز يابطل مفتاح الحل

a

$$\textcircled{25}^{\frac{x}{3}} = \underline{5}^{x-4}$$

$$\cancel{5}^{2(\frac{x}{3})} = \cancel{5}^{x-4}$$

$$\Rightarrow 2(\frac{x}{3}) = x-4$$

$$\boxed{x = 12}$$

b

$$\underset{-}{8}^x - \underset{+1}{1} = \underset{+1}{3.4}$$

$$\underline{8^x} = \underline{4.4}$$

(x)

$$\log 8 = \log 4.4$$

$$\frac{x \cdot \log 8}{\log 8} = \frac{\log 4.4}{\log 8}$$

$$x = \frac{\log 4.4}{\log 8}$$

c

$$\underset{\cdot}{7}^{2x+1} = \underset{\cdot}{3}^{x+3}$$

$$\log \textcircled{7}^{2x+1} = \log 3^{x+3}$$

$$(2x+1) \log 7 = (x+3)(\log 3)$$

$$2 \cdot \log 7 \cdot x + \log 7 = \log(3) \cdot x + 3 \cdot \log 3$$

$$\underline{2 \log 7 \cdot (x)} - \log(3) \cdot (x) = 3 \cdot \log(3) - \log(7)$$

$$\frac{(2 \log 7 - \log(3)) \cdot x}{2 \log(7) - \log(3)} = \frac{3 \cdot \log(3) - \log(7)}{2 \log(7) - \log(3)}$$

$$\log \Rightarrow 1^1$$

$$\frac{2}{-2} + 3 \log 3d = \frac{5}{-2}$$

$$\frac{2}{\frac{2}{3}} \log(3d) = \frac{2}{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \log(3d) = 1$$

(10)
↓

$$3d = 10$$

$$\frac{2}{\frac{2}{3}} d = \frac{10}{\frac{2}{3}}$$

$$d = 10$$

$$(-9)^2 + 11 = 92$$

$$\log_8 (x^2 + 11) = \log_8 92$$

$$\Rightarrow x^2 + 11 = 92$$

$$\Rightarrow x^2 + 11 - 92 = 0$$

$$|x^2 - 81| = 0$$

Meny 4922 a=1
b=0
c=-1

$$x = 9$$

$$x = -9$$

✓

✓

✓

$$\log_{11} 3x = \log_{11} (x+5) - \log_{11} 2$$

$$\log_{11} 3x = \log_{11} \frac{x+5}{2}$$

$$\frac{3x}{1} = \frac{x+5}{2}$$

$$2 \cdot 3x = x+5$$

$$x = 1$$

✓

~~ln~~

~~ln~~

$$e^{2x} + 5 = 16$$

~~-5~~ ~~-5~~

$$e^{2x} = 11$$

$$\ln e^{2x} = \ln 11$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{\ln 11}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{\ln 11}{2}}$$

$$14 + 20 \ln 7x = 54$$

~~-14~~ ~~-14~~

$$\frac{20}{20} \ln 7x = \frac{40}{20}$$

$$\ln 7x = 2$$

$$e^{\ln 7x} = e^2$$

$$7x = e^2$$
$$\frac{7x}{7} = \frac{e^2}{7}$$

$$\ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln 63$$

$$\ln(x)(x+2) = \ln 63$$

$$x^2 + 2x = 63$$

$$x^2 + 2x - 63 = 0$$

$$(x-7)(x+9) = 0$$

$$\boxed{x=7}$$

$$\boxed{x=-9}$$

✓

no so so
 $\ln(-9)$
error

$$\log x = 3 - \log(100x + 900)$$

$$\log x + \log(100x + 900) = 3$$

$$\log(x)(100x + 900) = 3$$

$$\log 100x^2 + 900x = 3$$

$$100x^2 + 900x - 1000 = 0$$

$$\checkmark x = 1$$

$$\cancel{x = -10}$$

$$e^{2x} - 15e^x + 56 = 0$$

$$u^2 - 15u + 56 = 0 \quad e^x = u$$

$$(u - 8)(u - 7) = 0$$

$$u = 8$$

$$u = 7$$

$$e^x = 8$$

$$e^x = 7$$

$$x = \ln 8$$

$$x = \ln 7$$