توقعات نصار فاينال

عمل / أ . أحمد نصار

((مذكره مجانية ... المرجع: الكتاب المدرسى وكراسة التمارين وزارة التربية والتعليم الكويتية))

تجميع لأهم أفكار المسائل المتوقعة و الأكثر تكرارا فى أختبارت السنوات السابقة

الاختبار الفاينال 8 مسائل مقالى

الوحدة الأولى (التكامل):

3 مسائل مقالى.

الوحدة الثانية (تطبيقات التكامل):

2 مسائل مقالى.

الوحدة الثالثة (القطوع):

2 مسائل مقالى.

الوحدة الرابعة (الأحصاء):

1 سؤال مقالى.

مسائل الموضوعى من كراسه التمارين بنفس الارقام

(1)

a

أثبت أن $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 3x^2 + 5$
ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية

$$F(x) = x^3 + 5x + 3$$

$$F'(x) = 3x^2 + 5 = f(x)$$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

الصورة العامة للمشتقة العكسية هي

$$H(x) = x^3 + 5x + C$$ حيث c ثابت

b

$$\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}\,dx$$

$$\int \frac{x(x^3 - 27)}{x(x-3)}\,dx = \int \frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}}\,dx$$

$$= \int (x^2 + 3x + 9)\,dx$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + c$$

(2)

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx = \int \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}[(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}+1]}{\cancel{\sqrt[3]{x}+1}}\,dx =$$

$$\int[(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}+1]\,dx = \int(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)\,dx =$$

$$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+x+C$$

$$= \frac{3}{5}\,x\,\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{4}\,x\,\sqrt[3]{x}+x+C$$

(3)

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$$

$$= \int \frac{(x-1)}{\sqrt{x}+1}\times\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}\,dx$$

$$= \int \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(x-1)}\,dx$$

$$= \int(\sqrt{x}-1)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+c$$

(4)

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$$

الحل :

بفرض $u = x^2 + 4x - 1$

$$du = (2x+4)dx \qquad , \qquad \frac{1}{2}du = (x+2)dx$$

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx = \int u^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\,du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\,u^{\frac{4}{3}}\right] + C$$

$$\therefore \int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx = \frac{3}{8}(x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}} + C$$

(5)

أوجد :

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$$

$$\int \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+2)^3}\,dx =$$

$$= \int 5\,x^{\frac{-1}{2}}\,(x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3}\,dx = 5\int (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3}\,x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

نفرض أن $u = x^{\frac{1}{2}} + 2$ تفاضل $du = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\,dx$

$$2\,du = x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$5\int (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3}\,x^{\frac{-1}{2}}dx = 5\int u^{-3}.\,2\,du = 10\int u^{-3}\,du$$

$$= 10.\frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{-5}{u^2} + C = \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$$

(6)

$$\int x(2x-1)^3\,dx$$

الحل:

$$u=2x-1 \Rightarrow du=2dx \Rightarrow \frac{du}{2}=dx$$

$$u=2x-1 \Rightarrow 2x=u+1 \Rightarrow x=\frac{u+1}{2}$$

$$\int x(2x-1)^3\,dx=\int\left(\frac{u+1}{2}\right)u^3\frac{du}{2}=\frac{1}{4}\int(u^4+u^3)du$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{u^5}{5}+\frac{u^4}{4}+C\right)=\frac{1}{20}(2x-1)^5+\frac{1}{16}(2x-1)^4+C$$

(7)

$$\int x \sec^2(x^2 + 2)\, dx$$

الحل:

$$u = x^2 + 2 \Longrightarrow du = 2xdx \Longrightarrow \frac{1}{2}du = xdx$$

$$\int xsec^2(x^2 + 2)dx = \int sec^2u\left(\frac{1}{2}du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int sec^2u\, du = \frac{1}{2}tan\, u + C = \frac{1}{2}tan\,(x^2 + 2) + C$$

(8)

$$\int \csc^5 x\ \cot x\, dx$$

الحل:

$$u = \csc x \Rightarrow du = -\csc x \cot x\, dx \Rightarrow -du = \csc x \cot x\, dx$$

$$\int \csc^5 x . \cot x\, dx = \int \csc^4 x . \csc x . \cot x\, dx = \int u^4(-du)$$

$$= -\int u^4\, du = -\frac{u^5}{5} + C = -\frac{1}{5}\csc^5 x + C$$

(9)

$$\int \cot x \, dx$$

الحل:

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$u = \sin x \Longrightarrow du = \cos x \, dx$$

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

(10)

$$\int \cos^3(2x-3) \cdot \sin(2x-3) \, dx$$

$$= \int u^3 \frac{du}{-2}$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} + C = \frac{-1}{8}(\cos(2x-3))^4 + C$$

$$u = \cos(2x-3)$$

$$du = -2\sin(2x-3) \, dx$$

$$\frac{du}{-2} = \sin(2x-3) \, dx$$

(11)

$$\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8} dt$$

نفرض أن $u = t^3 - 3t^2 + 8 \longrightarrow du = (3t^2 - 6t)\ dt$

$$\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8} dx = \int \frac{1}{u} du = ln\,|u| + C$$

$$= ln\left|t^3 - 3t^2 + 8\right| + C$$

$$\int \frac{x^3 + 4}{x} dx$$

$$= \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{4}{x}\right) dx$$

$$= \int \left(x^2 + \frac{4}{x}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 4\ ln\ |x| + C$$

(12)

أوجد: $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}\,dx$

الحل

$I = \int e^{x^3-6x} \cdot (x^2-2)\,dx$

$= \int e^u \cdot \frac{1}{3}\,du$

$= \frac{1}{3}e^u + c$

$= \frac{1}{3}e^{x^3-6x} + c$

$u = x^3-6x$

$du = (3x^2-6)\,dx$

$du = 3(x^2-2)\,dx$

$\frac{1}{3}du = (x^2-2)\,dx$

(13)

أوجد: $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

الحل

$I = \int \frac{1}{u}\,du$

$= \ln|u| + c$

$= \ln|e^x+1| + c$

$u = e^x+1$

$du = e^x\,dx$

(14)

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

حلل المقام

$$2x^3-5x^2-3x = x(2x^2-5x-3) = x(2x+1)(x-3)$$

اصفار المقام $\boxed{0}$ $\boxed{-\frac{1}{2}}$ $\boxed{3}$

بالضرب في

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(2x+1)}+\frac{C}{(x-3)} \qquad \boxed{x(2x+1)(x-3)}$$

$$x^2-2 = A(2x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(2x+1) \qquad 1$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$-2 = A(2(0)+1)(0-3)+\cancel{B(0)}+\cancel{C(0)} \qquad A=\frac{2}{3}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=-0.5$

$$(-0.5)^2-2 = \cancel{A(0)}+B(-0.5)(-0.5-3)+\cancel{C(0)} \qquad B=-1$$

بالتعويض في 1 بـ $x=3$

$$(3)^2-2 = \cancel{A(0)}+\cancel{B(0)}+C(3)(2(3)+1) \qquad C=\frac{1}{3}$$

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(2x+1)}+\frac{C}{(x-3)}$$

$A=\frac{2}{3}$

$B=-1$

$C=\frac{1}{3}$

$$\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx = \int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x}+\frac{-1}{2x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x-3}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-3| + C$$

(15)

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx$$

∵ درجة البسط = درجة المقام

∴ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} & 1 \;\leftarrow \text{ناتج القسمة} \\ x^2-4x+4 & x^2-3x+7 \\ & -\;(x^2-4x+4) \\ \hline & x+3 \;\leftarrow \text{الباقي} \end{array}$$

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4} = 1 + \frac{x+3}{(x-2)^2}$$

الحدودية النسبية

$$\frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x-2)^2$ ثم نبسّط

$$x+3 = A_1(x-2) + A_2$$

عوّض عن x بـ 2

$$2+3 = A_1(0) + A_2$$

$$\therefore\; A_2 = 5$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2 = 5$ وإحدى قيم x ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$1+3 = -A_1 + 5$$

$$\therefore\; A_1 = 1$$

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= x + \ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

(16)

$$\int x\cos x\,dx$$

الحل:

$$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \sin x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= x\sin x + \cos x + C$$

(17)

$$\int 4xe^{-5x}\,dx$$

الحل :

$$u = 4x \qquad dv = e^{-5x}dx$$
$$du = 4dx \qquad v = -\frac{1}{5}e^{-5x}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$\int 4xe^{-5x}\,dx = 4x\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right) - \int -\frac{4}{5}e^{-5x}dx$$
$$= -\frac{4}{5}x\,e^{-5x} - \frac{4}{25}e^{-5x} + C$$

(18)

$$\int \ln x \; dx$$

الحل :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$$

$$\int \ln x \; dx = x \ln x - \int x.\frac{1}{x}dx$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln(x) - x + C$$

(19)

$$\int x^2 \sin x \; dx$$

الحل :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$u = x^2 \qquad dv = \sin x \, dx$$

$$du = 2xdx \qquad v = -\cos x$$

$$\int x^2 \sin x \; dx = -x^2 \cos x + \int 2x\cos x \, dx$$

$$u = 2x \qquad dv = \cos x \, dx$$

$$du = 2 \, dx \qquad v = \sin x$$

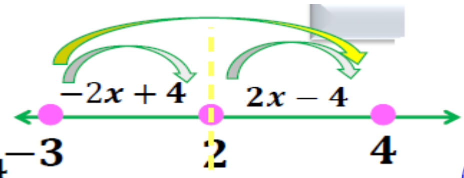
$$\int 2x\cos x \; dx = 2x\sin x \; - \int 2 \sin x \, dx$$

$$= 2x\sin x + 2\cos x + C$$

$$\therefore \int x^2 \sin x \; dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

(20)

$$\int_{-3}^{4} |2x-4|\,dx$$



$$2x-4=0$$
$$2x=4$$
$$x=2$$

$$\int_{-3}^{2} |2x-4| \quad dx + \int_{2}^{4} |2x-4| \quad dx =$$

$$\int_{-3}^{2} (-2x+4) \quad dx + \int_{2}^{4} (2x-4) \quad dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^2}{2}+4x\right]_{-3}^{2} + \left[\frac{2x^2}{2}-4x\right]_{2}^{4} =$$

$$= \left[-x^2+4x\right]_{-3}^{2} + \left[x^2-4x\right]_{2}^{4} =$$

$$[-(2)^2+4(2)] - [-(-3)^2+4(-3)] + [4^2-4(4)] - [2^2-4(2)]$$

$$= 29$$

(21)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{3}^{5} (x^2+x)dx \geqslant 0$

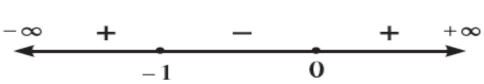
الحل:

بفرض $f(x) = x^2+x$

وهي دالة متصلة على $[3,5]$

نضع

$$x^2+x=0$$
$$x(x+1)=0$$



$f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in (-\infty,-1] \cup [0,\infty)$

$\because \quad [3,5] \subseteq [0,\infty)$

$\therefore \quad x^2+x \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [3,5]$

$\int_{3}^{5} (x^2+x)dx \geqslant 0$

(22)

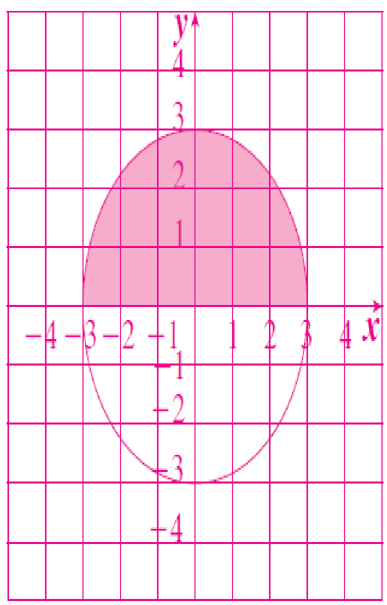
$y=\sqrt{9-x^2}\ \therefore\ y^2=9-x^2\ \therefore\ y^2+x^2=9$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 وحدات.

والدالة $y=\sqrt{9-x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة.

$\therefore$ مساحة المنطقة المظللة تساوي: $\therefore \int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$

$=\frac{1}{2}\pi(3)^2=\frac{9}{2}\pi$



(23)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \; dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x \; dx$$

عندما $x = 0 \quad \Leftarrow \quad u = \tan(0) = 0$

عندما $x = \frac{\pi}{4} \quad \Leftarrow \quad u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \; dx = \int_0^1 u \; du$$

$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

(24)

بأستخدام الكسور الجزئيه:

$$\boxed{\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\,dx}$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$5x-1 = A(x+3) + B(x-1)$$

عوض عن $\xrightarrow{x=1}$ $4 = 4A \xrightarrow{\text{ينتج}} A = 1$

عوض عن $\xrightarrow{x=-3}$ $-16 = -4B \xrightarrow{\text{ينتج}} B = 4$

$$= \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{(x-1)} + \frac{4}{(x+3)} \right) dx$$

$$= [\ln|x-1|]_{-2}^{0} + 4ln[|x+3|]_{-2}^{0}$$

$$= 3\ln 3$$

(25)

الحل : نوجد قيم x بحيث :

$$f(x)=x^3-9x \quad , \quad [-2\,,\,1]$$

$$f(x)=0$$

$$x^3-9x=0$$

$$x(x^2-9)=0$$

$$x(x-3)(x+3)=0$$

$$x=0 \qquad x=3 \qquad x=-3$$

$$0\in(-2,1) \qquad 3\notin(-2,1) \qquad -3\notin(-2,1)$$

$$A=\left|\int_{-2}^{0} f(x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1} f(x)dx\right|$$

$$A=\left|\int_{-2}^{0}(x^3-9x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x^3-9x)dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9}{2}x^2\right]_{-2}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right|$$

$$=\left|\left[\frac{(0)^4}{4}-\frac{9}{2}(0)^2\right]-\left[\frac{(-2)^4}{4}-\frac{9}{2}(-2)^2\right]\right|+\left|\left[\frac{(1)^4}{4}-\frac{9}{2}(1)^2\right]-\left[\frac{(0)^4}{4}-\frac{9}{2}(0)^2\right]\right|=\frac{73}{4}\text{ square units}$$

---

(26)

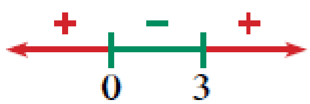
أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

الحل:

نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 3 \quad \text{أو} \quad x = 0$$

نبحث هل $f(x) \leqslant 0$ أو $f(x) \geqslant 0$ في $[0\,,3]$



$$\because \quad f(x) \leqslant 0 \qquad \forall\, x \in [0\,,3]$$

$\therefore$ المساحة:

$$A = -\int_0^3 f(x)\,dx$$
$$= -\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$= -\left[\left(9 - \frac{27}{2}\right) - (0)\right]$$
$$= -\left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$= \frac{9}{2} \quad \text{units square}$$

ملاحظه:

يمكن حل السؤال بطريقه المطلق دون الاحتياج لخطوه اختبار الداله موجبه ولا سالبه.

(27)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي: $f(x)=x^2+1 \quad , \quad g(x)=-x^2+9$

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين نضع $f(x)=g(x)$

$$x^2+1=-x^2+9$$

$$2x^2=8$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

يكون التكامل من $x=-2$ إلى $x=2$ ومساحة المنطقة هي:

$$A=\left|\int_{-2}^{2}(f(x)-g(x))dx\right|$$

$$=\left|\int_{-2}^{2}(x^2+1+x^2-9)dx\right|=\left|\int_{-2}^{2}(2x^2-8)dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{2x^3}{3}-8x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$=\left|\left[\frac{2(2)^3}{3}-8(2)\right]-\left[\frac{2(-2)^3}{3}-8(-2)\right]\right|$$

$$=\frac{64}{3}$$ (وحدة مربعة)

(28)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f:
$f(x)=\sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1,5]$.

الحل :

$$V=\pi\int_1^5 (f(x))^2dx$$

$$=\pi\int_1^5 (\sqrt{x-1})^2dx$$

$$=\pi\int_1^5 (x-1)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^5$$

$$=\pi\left(\left[\frac{(5)^2}{2}-(5)\right]-\left[\frac{(1)^2}{2}-(1)\right]\right)$$

$$=8\pi \quad cubic\ units$$

(29)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين $f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$: g

الحل:

المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين

نجد التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 = \sqrt{x} \qquad (x \geqslant 0)$$

بتربيع الطرفين

$$x^4 = x$$
$$x^4 - x = 0$$
$$x(x^3 - 1) = 0$$
$$x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

نحصل على: $x = 0 \ , \ x = 1$

وبالنسبة إلى المعادلة $x^2 + x + 1 = 0$

نوجد المميز Δ :

$$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 \ , \ -3 < 0$$

$\therefore$ المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ فيكون التكامل على $[0,1]$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0,1)$ ولتكن $x = \frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \quad , \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\therefore \ g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج عن الدوران: $V = \pi \int_0^1 [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx$

$$V = \pi \int_0^1 \left[(\sqrt{(x)})^2 - (x^2)^2\right] dx$$
$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$$
$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0)\right]$$
$$= \frac{3}{10}\pi \quad \text{units cube}$$

(30)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$
في الفترة $[2,5]$

الحل

$$f'(x) = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(9+3x)^{\frac{1}{2}}(3)$$

$$= (9+3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_2^5 \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_2^5 \sqrt{1+9+3x}\, dx = \int_2^5 \sqrt{10+3x}\, dx$$

$$= \int_2^5 (10+3x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_2^5 3(10+3x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left[(10+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5$$

$$= \left(\frac{2}{9}\right)\left[(25)^{\frac{3}{2}} - (16)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{122}{9}\ units$$

(31)

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $3x^2 + x$ ويمر بالنقطة $(2, 2)$

الحل :

$$f'(x) = 3x^2 + x$$

$$f(x) = \int (3x^2 + x)dx$$

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$= x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $(2,2)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$2 = (2)^3 + \frac{(2)^2}{2} + C$$

$$2 = 8 + 2 + C$$

$$C = -8$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

$$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 8$$

(32)

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه $(x\,,\,y)$ يساوي $\sqrt{5-4x}$ فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5\,,3)$

الحل : ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)}$ $\qquad f'(x) \neq 0$

$$\frac{-1}{f'(x)} = \sqrt{5-4x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{5-4x}}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{\sqrt{5-4x}}dx$$

$$= -\int (5-4x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int -4(5-4x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4} \times [\frac{2}{1}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + C]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \frac{1}{4}C$$

تابع للحل :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \frac{1}{4}C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $A(-5{,}3)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$3 = \frac{1}{2}\sqrt{5-4(-5)} + \frac{1}{4}C$$

$$3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}C$$

$$C = 2$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \frac{1}{2}$$

(33)

حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$y' - 2xy = 0$$

الحل:

$$y' - 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$ $\qquad y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$ فصل المتغيرات

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$ كامل الطرفين $\int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$

$$\ln|y| = x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot e^C$$ $\qquad \ln y = x \Rightarrow y = e^x$

$$y = \pm e^C \cdot e^{x^2}$$

$$y = ke^{x^2}$$ $\qquad \pm e^C = k$

(34)

المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ تكون حلولها: $y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$

a حلّ المعادلة: $2y' + y = 1$

b أوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

الحل:

اكتب المعادلة على الشكل $y' = ay + b$

a $2y' + y = 1$

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

طبّق القاعدة

$$y = k\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

عوّض x, y بقيمتيهما

b $k\,e^{\frac{1}{2}} + 1 = 2$

$$k = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} + 1$$

(35)

أوجد معادلة المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و بؤرته $F(-4,0)$

الحل

الرأس نقطة الأصل

$\because$ البؤرة $F(-4,0)$ تنتمي إلى الجزء السالب من محور السينات

$p=-4$ ، معادلة الدليل : $x = 4$ (مستقيم رأسي)

محور تماثل القطع هو محور السينات (فتحة القطع لليسار)

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

معادلة القطع المكافئ هي : $y^2 = -16x$

(36)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله $y = 1$

الحل

معادلة الدليل $y = 1$ (مستقيم أفقي)

و الدليل متعامد مع خط التماثل

خط التماثل رأسي $(y - axis)$

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

معادلة الدليل هي على الصورة $y = -p$

$$y = 1 \Rightarrow \quad p = -1$$

المعادلة $x^2 = 4py$

$$x^2 = 4(-1)y$$

$$x^2 = -4y$$

(37)

إذا كانت: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد :

(a) رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

(b) البؤرتين.

(c) معادلتي دليلي القطع.

(d) طول كل من المحورين ثم ارسم شكلا تقريبيا للقطع.

الحل:

(a) معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ومن معادلة القطع الناقص نجد أن :

$$a^2=9 \Rightarrow a=3$$

$$b^2=4 \Rightarrow b=2$$

والمحور الاكبر ينطبق علي محور الصادات

رأسا القطع الناقص هما : $A_1(0,-3)\ ,\ A_2\ (0,3)$

طرفا المحور الاصغر هما : $B_1(-2,0)\ ,\ B_2(2,0\ )$

(b) البؤرتين:

$$C^2=a^2-b^2 \quad \Rightarrow C^2=9-4=5$$

$$C=\sqrt{5}$$

$$F_1(0,-\sqrt{5}\ )\ ,\ F_2(0,\sqrt{5}\ )$$

(c) معادلة الدليلين:

$$y=-\frac{a^2}{c} \quad , \quad y=\frac{a^2}{c}$$

$$y=\frac{9}{\sqrt{5}} \quad , \quad y=\frac{-9}{\sqrt{5}}$$

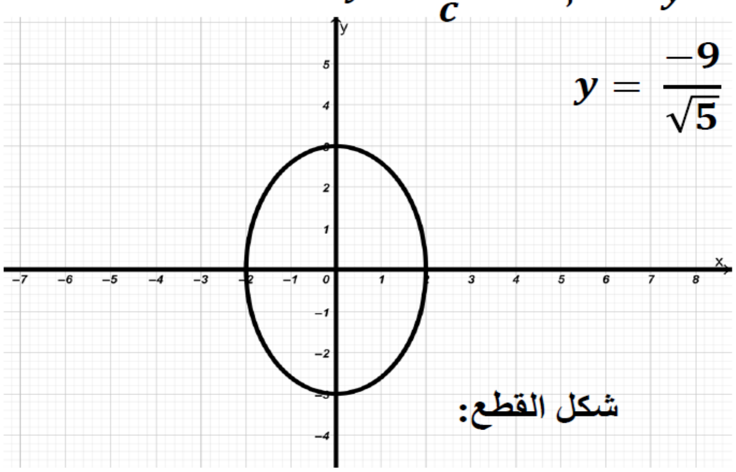
(d) طول المحور الاكبر:

$2a = 6$

طول المحور الأصغر:

$2b = 4$

شكل القطع:



-

(38)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(-2,0),F_2(2,0)$ وطول محوره الاكبر 6 . ثم ارسم شكلا تقريبيا لهذا القطع.

الحل:

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون معادلة القطع علي الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ وتكون $c=2$

$\because$ طول المحور الاكبر = 6

$$\therefore\ 2a=6 \Rightarrow a=3 \Rightarrow a^2=9$$

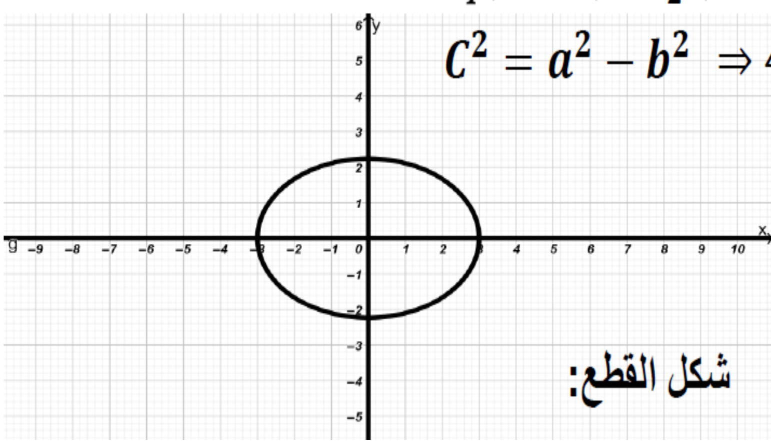
$\therefore$ طرفا المحور الاكبر هما : $A_1(-3,0)\ ,A_2\ (3,0)$

$$C^2=a^2-b^2 \ \Rightarrow 4=9-b^2 \Rightarrow b^2=5$$

$\therefore$معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

شكل القطع:



(39)

إذا كانت: -$9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد فأوجد :

١- رأسي القطع الزائد.

٢- البؤرتين.

٣- معادلتي دليلي القطع.

٤- طول كل من المحورين

٥- معادلة كلا من الخطين التقاربين ثم ارسم شكلا تخطيطيا للقطع.

الحل:

$$9y^2 - 25x^2 = 225 \xrightarrow{\div 225} \frac{9y^2}{225} - \frac{25x^2}{225} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

ومن معادلة القطع الزائد نجد أن :

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \quad , \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$C^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow C^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow C = \sqrt{34}$$

والمحور القاطع ينطبق علي محور الصادت

(1) رأسا القطع الزائد هما : $A_1(0, -5), A_2(0,5)$

(2) البؤرتين: $F_1(0, -\sqrt{34}), F_2(0, \sqrt{34})$

(3) معادلتا الدليلين:

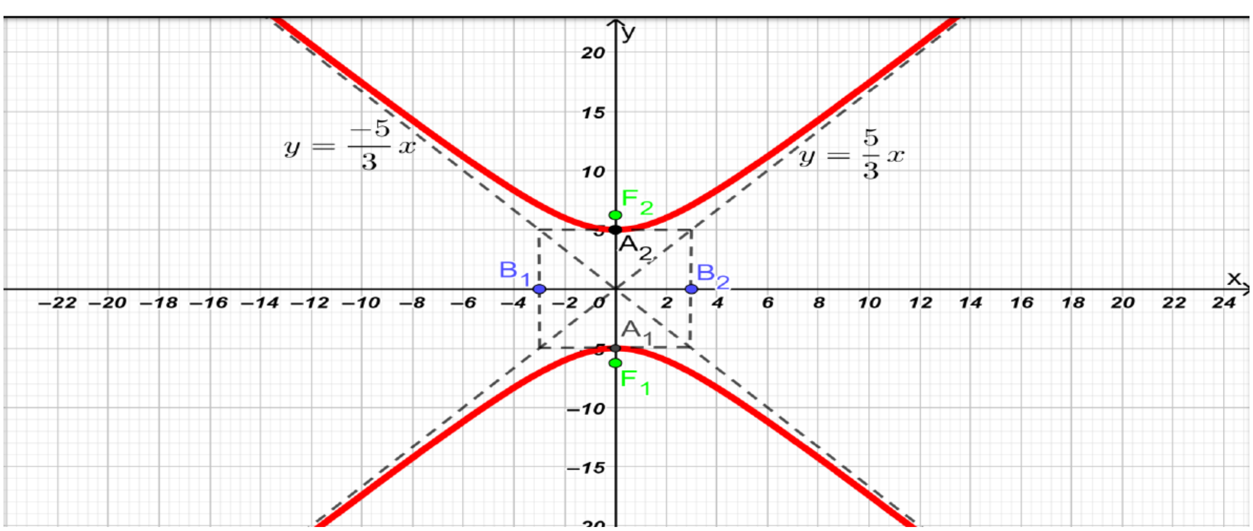
$$y = \frac{a^2}{c} \quad , \quad y = -\frac{a^2}{c} \Rightarrow y = \frac{-25}{\sqrt{34}} \quad , \quad y = \frac{25}{\sqrt{34}}$$

(4) طول المحور القاطع يساوي $2a$: $2a = 2 \times 5 = 10$

طول المحور المرافق يساوي $2b$: $2b = 2 \times 3 = 6$

(5) معادلتا كل من الخطين المقاربين :

$$y = \pm \frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm \frac{5}{3}x$$



(40)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4,0),F_2(4,0)$ ورأساه $A_1(-2,0),A_2(2,0)$ ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين وارسم شكلا تقريبيا لهذا القطع.

الحل:

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

احدي البؤرتين $F_2(4,0)$ ومنها تكون $C = 4$

احدي الرأسين $A_2(2,0)$ ومنها تكون $a = 2$

ولكن

$$C^2=a^2+b^2 \Rightarrow 4^2=2^2+b^2$$

$$b^2=16-4=12 \quad \Rightarrow b=2\sqrt{3}$$

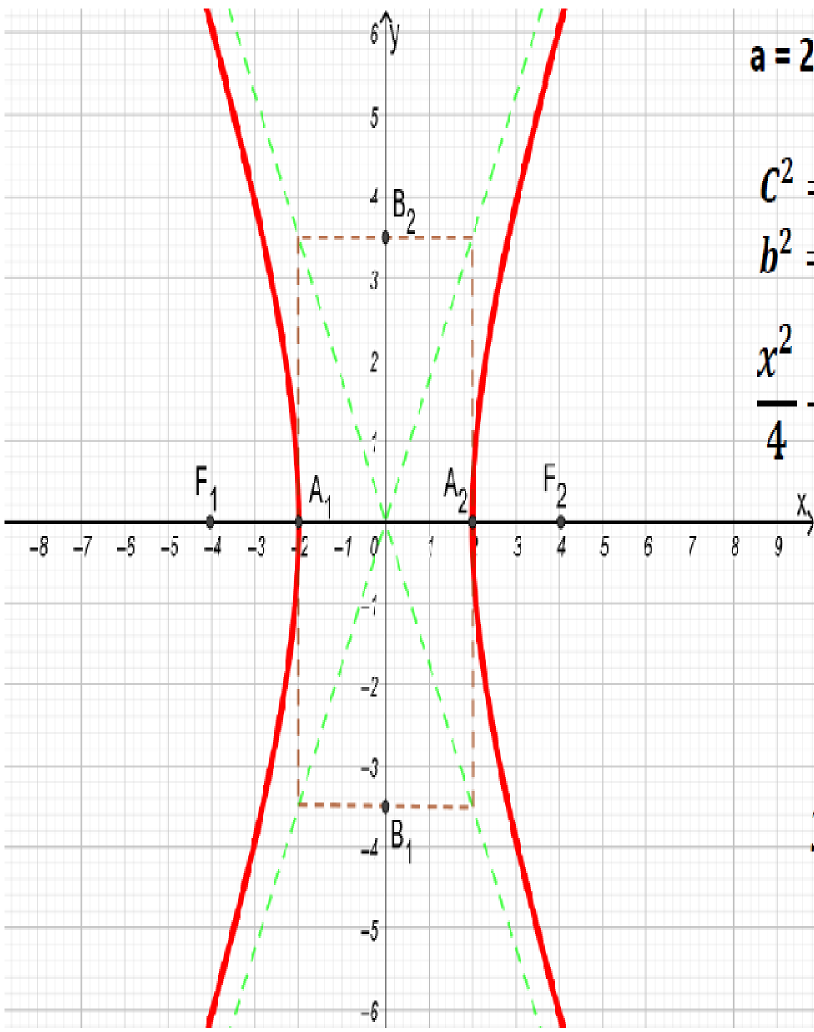
معادلة القطع الزائد هي: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

معادلة كل من الخطين المقاربين :

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

$$y=\pm\frac{\sqrt{12}}{2}x \Rightarrow y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$y=\pm\sqrt{3}$$



(41)

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.

اختلافه المركزي $(e = 2)$ ومعادلة أحد دليليه: $x = 1$

$\because\ e = 2\ ,\ 2 > 1$

$\therefore$ القطع هو قطع زائد

$\because$ معادلة أحد دليليه $x = 1$

$\therefore$ المحور القاطع (الأساسي) ينطبق على محور السينات ومركزه $(0, 0)$

معادلة الدليل هي:

$$x = \frac{a^2}{c}$$

$$1 = \frac{a^2}{c}$$

$$c = a^2 \qquad (1)$$

$$\because\ e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore\ 2 = \frac{c}{a}$$

$$c = 2a \qquad (2)$$

بحل المعادلتين $(1)\ ,\ (2)$

$$a^2 = 2a$$

$$a(a-2) = 0$$

$\therefore\ a = 0$ مرفوضة أو $a = 2$ قيمة مقبولة

$$\therefore\ e = a = 2$$

$$c = (2)^2 = 4$$

$$\because\ c^2 = a^2 + b^2$$

$$\because\ c^2 = a^2 + b^2$$

$$16 = 4 + b^2 \implies b^2 = 12$$

$\because$ معادلة القطع هي:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$