

مخطط ذهني للنهايات

حساب النهايات • الصف الثاني عشر علمي

حساب النهايات

Calculation of Limits

3 قاعدة القوة والجذر

الفكرة: $\lim \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{\lim f}$ ، $\lim f^n = (\lim f)^n$
الجذر الزوجي: تحقق أن نهاية ما تحت الجذر أكبر من صفر

1 $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 5}$

$2\sqrt{5}$

2 $\lim_{x \rightarrow 4} (x + \sqrt{x})^4$

1296

3 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$

$-\frac{2}{3}$

4 الدالة متعددة القاعدة

الفكرة: احسب النهاية من اليمين ومن اليسار عند نقطة التحوّل وقارن بينهما

1 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x < 2 \\ x - 1 & x > 2 \end{cases}$

1

أوجد $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

2 $g(x) = \begin{cases} x^3 + x & x > 1 \\ \frac{x}{x^2 + 1} & x \leq 1 \end{cases}$

غير موجودة

أوجد $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

كيف أبدأ أي مسألة؟

① عوّض مباشرة بـ $x = c$

عدد حقيقي $\Leftarrow$ هذا هو الناتج ✓

$\frac{0}{0}$ $\Leftarrow$ حلّل واختصر، أو اضرب في المرافق، أو اقسم قسمة تركيبية

مطلق $\Leftarrow$ نعيد التعريف ونحسب النهاية يميناً ويساراً

النهاية من اليمين $\neq$ النهاية من

اليسار $\Leftarrow$ النهاية غير موجودة

⚠ لا تنسَ شرط الجذر التربيعي: نهاية ما تحت الجذر أكبر من صفر

1 قواعد النهايات بمعلومية نهايات

الفكرة: ورّع النهاية على الدوال ثم عوّض بالقيم المعطاة

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$

1 $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$

4

2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8f(x) \cdot g(x)}{f(x) + g(x)}$

-42

2 التعويض المباشر

الفكرة: دالة حدودية، أو دالة نسبية نهاية مقامها لا تساوي صفرًا $\Leftarrow$ نعوّض مباشرة

1 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$

-15

2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

5



مخطط ذهني للنهايات

حساب النهايات • الصف الثاني عشر علمي

حساب النهايات Calculation of Limits

7 $\frac{0}{0}$ بالضرب في المرافق

الفكرة: اضرب البسط والمقام في مرافق المقدار الذي فيه الجذر

مرافق $\sqrt{a} - b$ هو $\sqrt{a} + b$
 $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b) = a - b^2$

$$① \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x}$$

$\frac{1}{3}$

$$② \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{3 - \sqrt{x}}$$

-6

8 $\frac{0}{0}$ بالقسمة التركيبية

الفكرة: c صفر للبسط $\Leftarrow$ اقسم على $(x - c)$ قسمة تركيبية ثم عوّض في الناتج

$$① \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

11

$$② \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$$

-67

تذكّر

اكتب $\lim$ في كل سطر حتى لحظة التعويض

تحقق دائماً أن نهاية المقام لا تساوي صفراً

c صفر للحدودية $\Leftarrow (x - c)$ عامل من عواملها

5 القيمة المطلقة

الفكرة: نعيد التعريف بدون رمز القيمة المطلقة ثم نحسب النهاية يميناً ويساراً

$$|x - a| = \begin{cases} x - a & x \geq a \\ -(x - a) & x < a \end{cases}$$

$$① \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1} \quad (\text{يمين 1، يسار -1})$$

غير موجودة

$$② f(x) = x^2 - |x + 2| \quad \text{أوجد } \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

4

6 $\frac{0}{0}$ بالتحليل والاختصار

الفكرة: حلّل البسط والمقام واختصر العامل الصغري $(x - c)$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \quad \text{مكعبان}$$

القوس الأول نفس الإشارة • الحد الأوسط عكس الإشارة

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{فرق بين مربعين}$$

$$① \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$\frac{1}{4}$

$$② \lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x + 4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$$

$\frac{6}{7}$

$$③ \lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x + 2| - 7}{x^2 - 25} \quad (|x + 2| = x + 2; 5: \text{قرب})$$

$\frac{1}{10}$

$$④ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 + x)^3 - 8}{x}$$

12

$$⑤ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

3



مخطط ذهني للنهايات

الصيغ غير المعيّنة • نهايات الدوال المثلثية • الصف الثاني عشر علمي

صيغ غير
معيّنة
Indeterminate
Forms

1 تعويض مباشر

الفكرة: نهاية المقام $\cos x \rightarrow 1 \neq 0$ نعوض مباشرة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{\cos x} = -3$$

2 التفكير إلى $\frac{\sin x}{x}$

الفكرة: حلّ المقام أو اقسام البسط والمقام على x لتكوين $\frac{\sin x}{x}$ أو $\frac{\tan x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \tan x} = \frac{1}{2}$$

3 توزيع البسط على المقام

الفكرة: اقسام كل حد في البسط على المقام ثم وّزع النهاية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + \sin x}{x} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan x - 3 \sin x}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x + x^2 \cos x}{5x} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x} = -\frac{1}{3}$$

4 مرافق $1 - \cos x$

الفكرة: اضرب في $1 + \cos x$ لأن $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} = -2$$

مفاتيح الصيغ غير المعيّنة

$\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ قسم على أكبر قوة في المقام

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

القاعدة: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} a x^n$

n زوجي $\Rightarrow \infty$ بإشارة a

n فردي $\Rightarrow +\infty$ ، نفس إشارة a

n فردي $\Rightarrow -\infty$ ، عكس إشارة a

مفاتيح الدوال المثلثية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\tan 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin 0 = 0$$

(بالراديان)

الدوال
المثلثية
Trigonometric
Limits

1 نهاية حدودية عند ∞

الفكرة: نأخذ الحد ذا الأس الأكبر فقط:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x + 1) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2 + 2x - 4) = -\infty$$

2 نهاية حدودية نسبية

الفكرة: قارن الدرجتين: $0 < n < m, \frac{a_n}{b_m} \Rightarrow n = m$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{4x^3 - 2x + 3} = 0$$

3 أوجد قيمة الثابتين a و b

الفكرة: النهاية عدد لا يساوي صفراً $\Rightarrow$ الدرجتان متساويتان $\Rightarrow$ معامل الأس الأكبر الزائد يساوي صفراً

إذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$$

$$a = 0, b = -1$$

4 قسمة حدودية وجذر

الفكرة: أخرج x^2 من الجذر: $\sqrt{x^2} = |x|$

عند $|x| = x : +\infty$ • عند $|x| = -x : -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x+1} \text{ (الجذر في البسط)} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}} \text{ (الجذر في المقام)} = -3$$

