

Exponential and Logarithmic Functions

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Lesson 3 – 2 Logarithmic Functions

الدرس 3 – 2 الدوال اللوغاريتمية

- I. إيجاد قيم التعبيرات التي تتضمن لوغاريتمات.
- II. تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً وتحليلها.

نواتج التعلم

اللوغاريتم الطبيعي	اللوغاريتم العادي	اللوغاريتم	الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس b
Natural logarithm	Common logarithm	Logarithm	Logarithmic function with base b

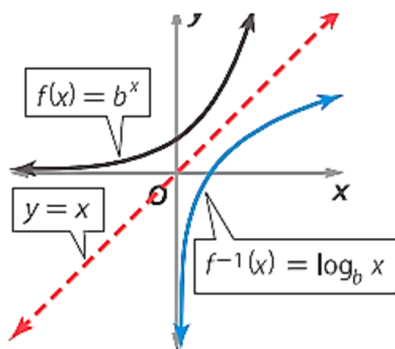
المفردات الجديدة

ألف ألف
Alef Education

36

35

الدروس:



أولاً: الدوال والتعبيرات اللوغاريتمية

يطلق على معكوس الدالة الأسية $f(x) = b^x$ دالة لوغاريتمية ذات الأساس b

ويرمز لها بـ $\log_b x$ وتقرأ $\log b$ للأساس b

هذا يعني أنه إذا كانت $b > 0$ و $b \neq 1$ و $f(x) = b^x$ فإن $f^{-1}(x) = \log_b x$

الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس b:

هي الدالة على الصيغة $f(x) = \log_b x$ حيث $b > 0$ و $b \neq 1$ و $x > 0$

المفهوم الأساسي الربط بين التعبيرين اللوغاريتمي والأسّي

إذا كان $b > 0$ و $b \neq 1$ و $x > 0$ فإن

الشكل الأسّي

الشكل اللوغاريتمي

$$b^y = x$$

فقط في حالة أن

$$\log_b x = y$$

الأساس b

الأس y

اللوغاريتم: الأس أو القوة والتي يجب أن يرفع لها عدد أساس حتى يساوي عدداً معيناً.

تذكر أن اللوغاريتم هو أس.

تمارين صفحة 178 و 179

مثال (1) إيجاد قيمة اللوغاريتمات

جد قيمة كل لوغاريتم مما يلي

1A)	$\log_8 512$	1)	$\log_2 8$
2A)	$\log_9 81$	2)	$\log_{10} 10$
1C)	$\log_2 \frac{1}{32}$	3)	$\log_6 \frac{1}{36}$
1D)	$\log_{16} \sqrt{2}$	6)	$\log_2 2^3$

المفهوم الأساسي الخصائص الأساسية للوغاريتمات

خواص اللوغاريتمات

إذا كانت $b > 0$, $b \neq 1$, و x عددًا حقيقيًا، فإن كلاً من العبارات التالية تكون صحيحة.

$$\log_b 1 = 0 \text{ لأن } b^0 = 1 \quad \checkmark$$

$$\log_b b = 1 \text{ لأن } b^1 = b \quad \checkmark$$

$$\log_b b^x = x \text{ لأن الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية عكسيتان.} \quad \checkmark$$

$$b^{\log_b x} = x \text{ لأن الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية عكسيتان.} \quad \checkmark$$

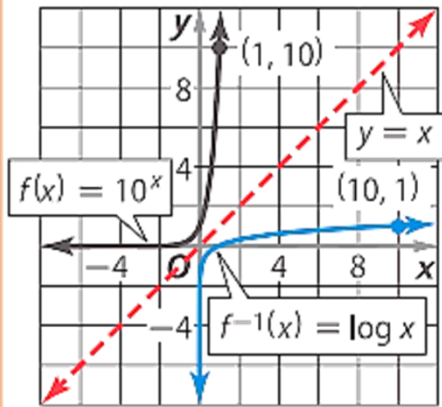
مثال (2) تطبيق خصائص اللوغاريتمات

جد قيمة كل لوغاريتم مما يلي

7)	$\log_{\sqrt{9}} 81$	)	$\log_3 27$
10)	$\log_x x^2$	)	$\log_{0.1} 0.1$
2B)	$3^{\log_3 1}$	4)	$4^{\log_4 1}$

اللُّوغاريتمُ العاديُّ هو اللُّوغاريتمُ ذو الأساس 10. اللُّوغاريتماتُ العاديةُ تُكتَبُ على الشَّكلِ $\log x = \log_{10} x$.

على سبيلِ المثال: $\log 100 = 2$ لأنَّ $10^2 = 100$



$$10^y = x$$

فقط في حالة أن

$$y = \log x$$

✓ إذا كانت x عددًا حقيقيًا، فإنَّ كلًّا من العبارتين التَّاليتين تكونُ صحيحةً.

$$\log 1 = 0 \quad \text{لأنَّ } 10^0 = 1 \quad \checkmark$$

$$\log b = 1 \quad \text{لأنَّ } 10^1 = b \quad \checkmark$$

$$\log 10^x = x \quad \text{لأنَّ الدَّالةَ الأسِّيَّةَ والدَّالةَ اللُّوغاريتميَّةَ عكسيتان.} \quad \checkmark$$

$$10^{\log x} = x \quad \text{لأنَّ الدَّالةَ الأسِّيَّةَ والدَّالةَ اللُّوغاريتميَّةَ عكسيتان.} \quad \checkmark$$

يمكن حساب قيم اللوغاريتمات العادية باستخدام الخصائص الأساسية المذكورة بالأعلى ويمكن التوصل إلى قيم تقريبية للوغاريتمات العادية للأعداد الحقيقية الموجبة باستخدام LOG في الحاسبة.

مثال (3) اللُّوغاريتمات العادية

جد قيمة كل تعبير مما يلي

3A) $\log 10000$

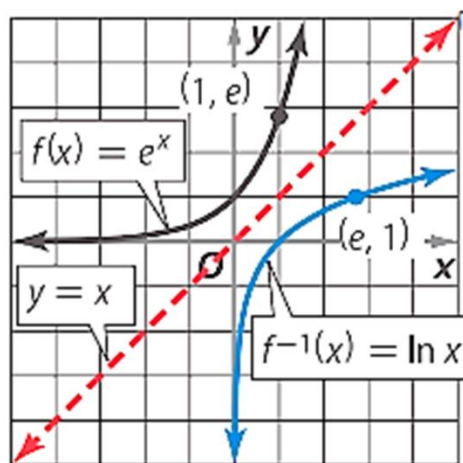
24) $\log 1000$

3B) $\log 0.081$

8) $\log 0.01$

3C) $\log(-0)$

3D) $10^{\log 3}$



اللُّوغاريتمُ الطَّبيعيُّ هو اللُّوغاريتمُ ذو الأساس e .

اللُّوغاريتماتُ الطَّبيعيَّةُ تُكتَبُ على الشَّكْلِ $\ln x = \log_e x$.

على سبيلِ المثالِ: $\ln e = 1$ لأنَّ $e^1 = e$.

$$e^y = x \quad \text{فقط في حالة أن} \quad y = \ln x$$

إذا كانت x عددًا حقيقيًا، فإنَّ كلاً من العبارتين التَّاليتين تكونُ صحيحةً.

$$e^0 = 1. \quad \ln 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$e^1 = e. \quad \ln e = 1 \quad \checkmark$$

$$\ln e^x = x \quad \checkmark \quad \text{لأنَّ الدَّالَّةَ الأسيَّةَ والدَّالَّةَ اللُّوغاريتميَّةَ عكسيَّتانِ.}$$

$$e^{\ln x} = x \quad \checkmark \quad \text{لأنَّ الدَّالَّةَ الأسيَّةَ والدَّالَّةَ اللُّوغاريتميَّةَ عكسيَّتانِ.}$$

ويمكن حساب قيم اللوغاريتمات الطبيعية باستخدام الخصائص الأساسية المذكورة بالأعلى ويمكن التوصل إلى قيم تقريبية للوغاريتمات الطبيعية للأعداد الحقيقية الموجبة باستخدام LN في الحاسبة.

مثال (4) اللُّوغاريتمات الطبيعية

جد قيمة كل تعبير مما يلي

4A) $\ln 32$

4B) $e^{\ln 4}$

4C) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$

4D) $-\ln 9$

12) $\ln e^{-14}$

13) $3 \ln e^4$

20) $\ln\left(\frac{1}{e^{12}}\right)$

19) $\ln(-6)$

16) $4 \ln(7 - \sqrt{2})$

23) $\frac{7}{\ln e}$

20) $\frac{\ln 2}{\ln 7}$

ثانياً: التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

يمكنك استخدام العلاقة المعكوسة بين الدالتين الأسية واللوغاريتمية للتمثيل البياني للدوال بصيغة

مثال (5) التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

مثل كل دالة بيانيًا وحللها وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع خطوط التقارب والسلوك الطرفي، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

5A)	$h(x) = \log_2 x$	$a =$	$h =$
	الأساس $b =$	$k =$	
		المجال	
		المدى	
		المقطع من المحور x	
		خط التقارب	
		الاتصال	
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	السلوك الطرفي	
	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$		
		متناقصة	
		متزايدة	



28)	$f(x) = \log_4 x$	$a =$	$h =$
	الأساس $b =$	$k =$	
		المجال	
		المدى	
		المقطع من المحور x	
		خط التقارب	
		الاتصال	
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	السلوك الطرفي	
	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$		
		متناقصة	
		متزايدة	

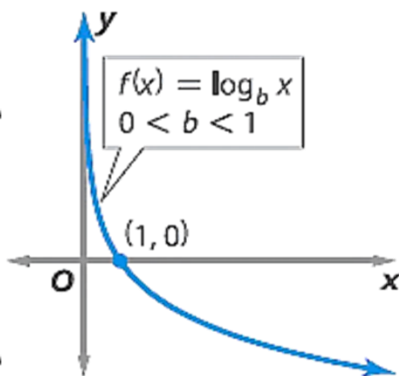


مثال (5) التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

مثل كل دالة بيانيًا وحللها وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع خطوط التقارب والسلوك الطرفي، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

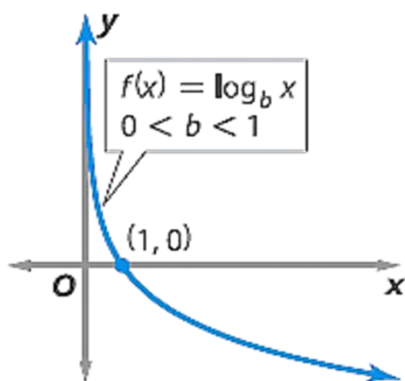
5B)	$j(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$	$a =$	$h =$
	الأساس $b =$	$k =$	
المجال			
المدى			
المقطع من المحور x			
خط التقارب			
الاتصال			
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$			
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$			
السلوك الطرفي			
متناقصة			
متزايدة			

التضاؤل اللوغاريتمي



31)	$j(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$	$a =$	$h =$
	الأساس $b =$	$k =$	
المجال			
المدى			
المقطع من المحور x			
خط التقارب			
الاتصال			
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$			
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$			
السلوك الطرفي			
متناقصة			
متزايدة			

التضاؤل اللوغاريتمي



الدالة اللوغاريتمية

$$f(x) = \log_b x , , , , f(x) = \log x , , , , f(x) = \ln x$$

بعد التحويلات لها الصيغة

$$g(x) = a \cdot \log_b(x - h) + k$$

$$g(x) = a \cdot \log(x - h) + k$$

$$g(x) = a \cdot \ln(x - h) + k$$

العدد k إزاحة رأسية بمقدار k وحدة للأعلى أو الأسفلالعدد h (عكس الإشارة) إزاحة أفقية بمقدار h وحدة لليمين أو اليسارالعدد a مضروب بـ x : $a < 0$ انعكاس حول المحور الرأسي y $a > 1$ انكماش أفقي معاملته $\frac{1}{a}$ $0 < a < 1$ توسع أفقي معاملته $\frac{1}{a}$ العدد a مضروب بالدالة الأسية: $a < 0$ انعكاس حول المحور الأفقي x $0 < a < 1$ انكماش رأسي معاملته a $a > 1$ توسع رأسي معاملته a

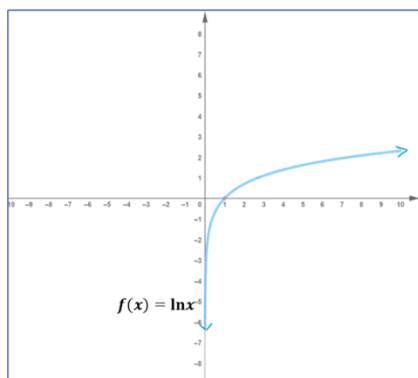
يمكن تطبيق نفس الأساليب المستخدمة في تحويل التمثيلات البيانية للدوال الأسية على التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية.

مثال (6) التحويلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x)$ لوصف التحويل الذي ينتج عن كل دالة.

6A)

$$f(x) = \ln x , , , , a(x) = \ln(x - 6)$$

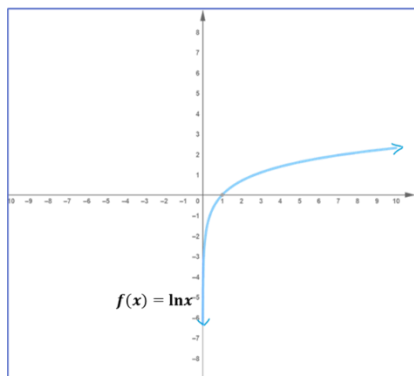


	$a =$	التحويلات
	$h =$	
	$k =$	
	المجال	
	المدى	
	خط التقارب	

مثال (6) التحولات البيانية للدوال اللوغاريتمية

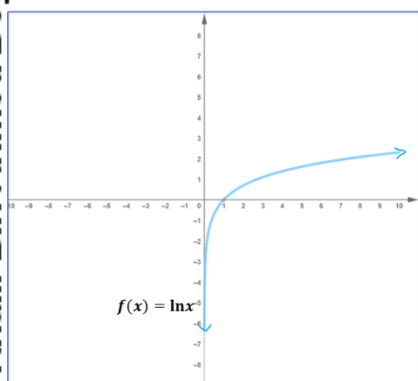
استخدم التمثيل البياني لـ $f(x)$ لوصف التحويل الذي ينتج عن كل دالة.

6A) $f(x) = \ln x$, , , , , $a(x) = \ln(x - 6)$



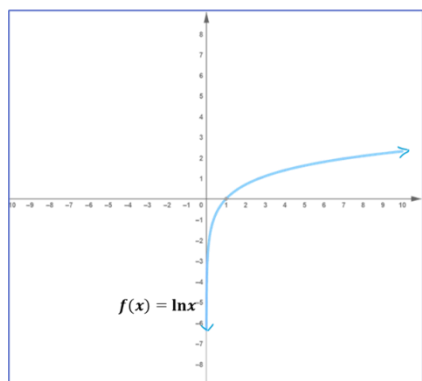
التحويلات	$a =$
	$h =$
	$k =$
المجال	
المدى	
خط التقارب	

34) $f(x) = \log_2 x$, , , , , $g(x) = \log_2(x + 4)$



التحويلات	$a =$
	$h =$
	$k =$
المجال	
المدى	
خط التقارب	

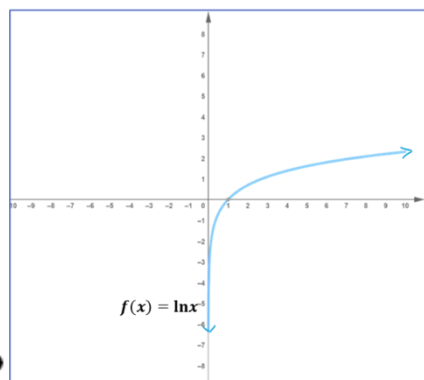
6B) $f(x) = \ln x$, , , , , $b(x) = 0.5 \ln x - 2$



التحويلات	$a =$
	$h =$
	$k =$
المجال	
المدى	
خط التقارب	

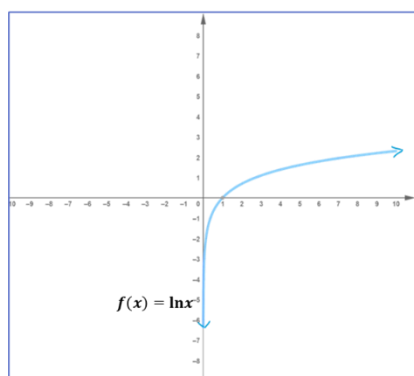
استخدم التمثيل البياني لـ $f(x)$ لوصف التحويل الذي ينتج عن كل دالة.

39) $f(x) = \ln x$, , , , , $g(x) = 3\ln x + 1$



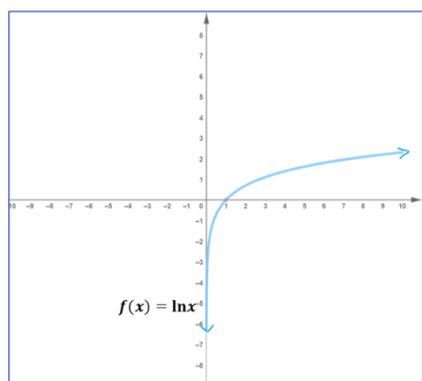
	$a =$	التحويلات
	$h =$	
	$k =$	
	المجال	
	المدى	
	خط التقارب	

6C) $f(x) = \ln x$, , , , , $c(x) = \ln(x + 4) + 3$



	$a =$	التحويلات
	$h =$	
	$k =$	
	المجال	
	المدى	
	خط التقارب	

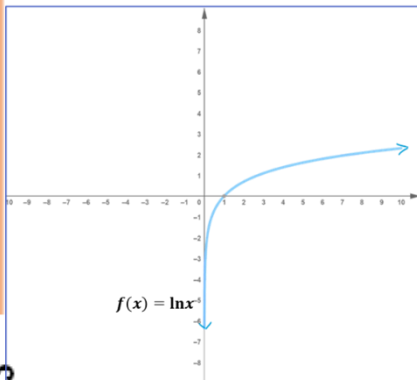
40) $f(x) = \log x$, , , , , $g(x) = -2\log x + 5$



		التحويلات
	$a =$	
	$h =$	
	$k =$	
	المجال	
	المدى	
	خط التقارب	

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x)$ لوصف التحويل الذي ينتج عن كل دالة.

41) $f(x) = \ln x$, , , , , $g(x) = \ln(-x)$



التحويلات	$a =$
	$h =$
	$k =$
المجال	
المدى	
خط التقارب	

يمكن استخدام اللوغاريتمات في الحسابات العلمية مثل درجة الحموضة الرقم الهيدروجيني) ومستوى كثافة الصوت.

مثال (7) من الحياة اليومية استخدام دوال لوغاريتمية

تمرين موجه 7

التقنية يمكن تمثيل عدد الأجهزة المصابة بفيروس حاسب آلي معين من خلال $c(x) = 6.8 + 20.1 \log d$ حيث d هو عدد

الأيام التي مرت منذ تعرض الجهاز الأول للإصابة.

(a) كم عدد الأجهزة المصابة تقريبا في اليوم 12؟

(b) كم عدد الأجهزة الإضافية التي تعرضت للإصابة في اليوم 30 بالمقارنة باليوم 12؟

(c) في أي يوم تقريبا سيبلغ عدد الأجهزة المصابة 75؟

27. الذاكرة

خضع الطلاب في فصل السيدة خديجة لاختبار في الدوال الأسية في نهاية الفصل ثم خضعوا للاختبار مرة أخرى كل شهر لتحديد مقدار المعلومات الذي احتفظوا به. يمكن تمثيل متوسط درجات الاختبار بالدالة $f(x) = 85.9 - 9\log x$ ، حيث x عدد الأشهر منذ أول اختبار. ماذا كان متوسط درجة الاختبار بعد 3 أشهر

حدد المجال والمدى والتقاطع مع المحور الأفقي x وخط التقارب الرأسي لكل دالة.

43)	$y = \log(x + 7)$	$a =$ $h =$ $k =$	45)	$y = \ln(x - 3)$	$a =$ $h =$ $k =$
			المجال		
			المدى		
			المقطع من المحور x		
			خط التقارب		
44)	$y = \log x - 1$	$a =$ $h =$ $k =$	46)	$y = \ln\left(x + \frac{1}{4}\right) - 3$	$a =$ $h =$ $k =$
			المجال		
			المدى		
			المقطع من المحور x		
			خط التقارب		

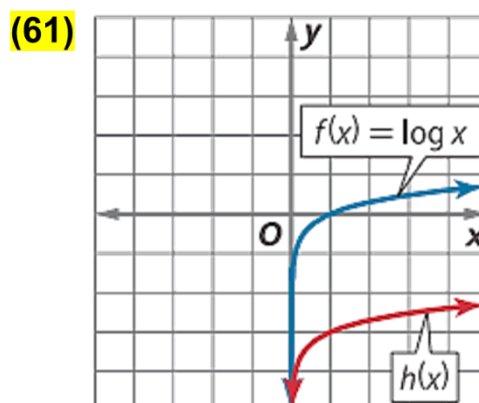
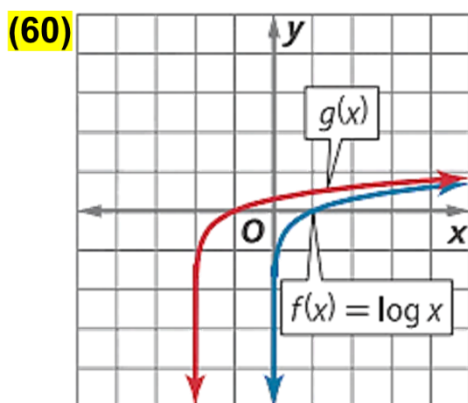
(53) أوجد معكوس الدالة $y = \log x - 6$.

(48) أوجد معكوس الدالة $y = \log 2x$.

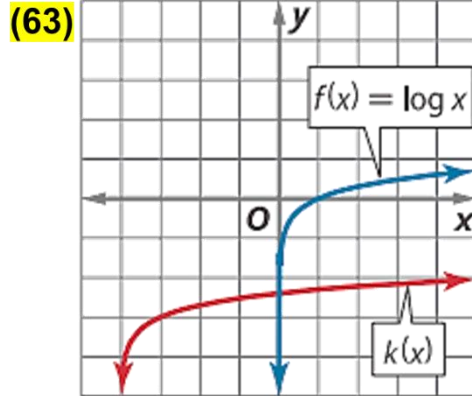
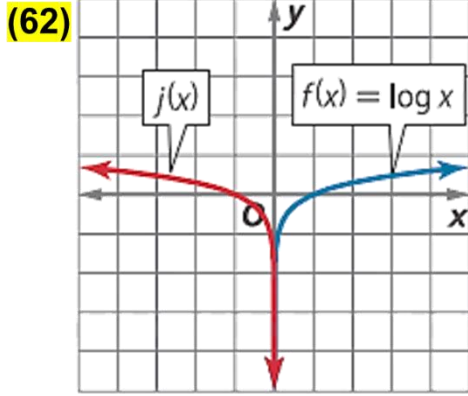
(54) أوجد معكوس الدالة $y = 0.25e^{x+2}$.

(49) أوجد معكوس الدالة $y = 4e^{2x}$.

استخدم التمثيل البياني الأصلي $f(x) = \log x$ للتوصل إلى المعادلة الخاصة بكل دالة.



استخدم التمثيل البياني الأصلي $f(x) = \log x$ للتوصل إلى المعادلة الخاصة بكل دالة.



The End
Thank
you