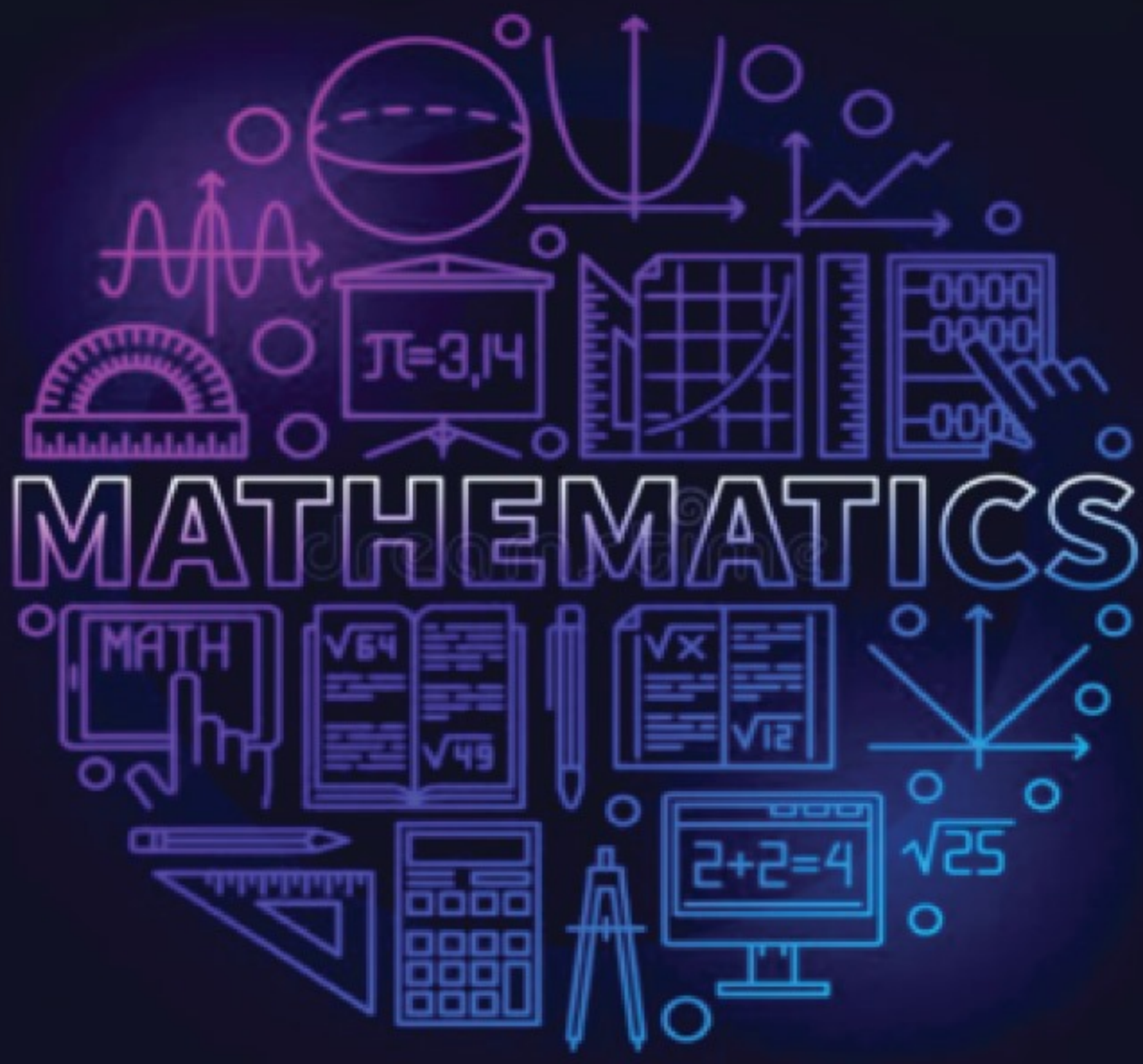
الصف الثانى عشر المتقدم

الفصل الدراسى الثالث

أ.اسلام صلاح 0544556284



2024

الرياضيات

لغة الارقام ...بوابة العلم

12 ADVANCED term 3

2023-2024

unit 6

applications of the definite integral

lesson 6-2

Volume: Slicing , Disks and Washers

MR ESLAM SALAH

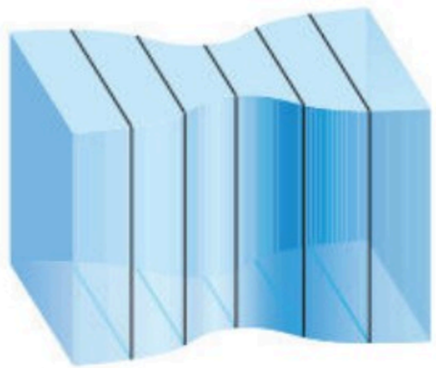
0544556284 اضغط

grade12ADV

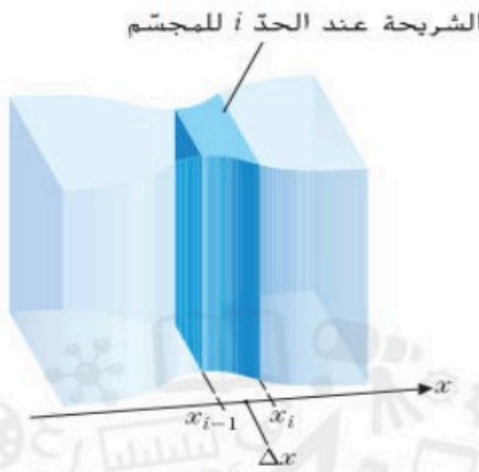
الأحجام بالتقطيع

Volumes by Slicing

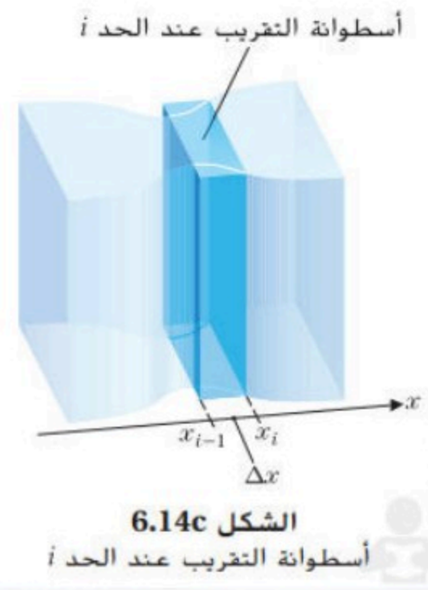
eslam salah



الشكل 6.14a
قطعة مجسّم



الشكل 6.14b
الشريحة عند الحد i للمجسّم



الشكل 6.14c
أسطوانة التقريب عند الحد i

يكون الحجم V_i للشريحة عند الحد i هو تقريبًا حجم الأسطوانة الواقعة بطول الفترة $[x_{i-1}, x_i]$، مع مساحة مقطع عرضي ثابتة $A(c_i)$ (انظر الشكل 6.14c). بحيث يكون

$$V_i \approx \underbrace{A(c_i)}_{\text{مساحة مقطع عرضي}} \underbrace{\Delta x}_{\text{العرض}}$$

بتكرار هذه العملية لكلٍ من الـ n شرائح، نجد أنّ الحجم الكلي V للمجسّم هو تقريبًا

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x$$

لاحظ أنّه كلما زادت الشرائح، ينبغي أن يتحسّن تقريب الحجم ونحصل على الحجم الدقيق بحساب النهاية

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x$$

بافتراض وجود النهاية. يجب عليك التعرّف على هذه النهاية على أنّها تكامل محدود

$$\boldsymbol{V = \int_a^b A(x)\,dx.}$$

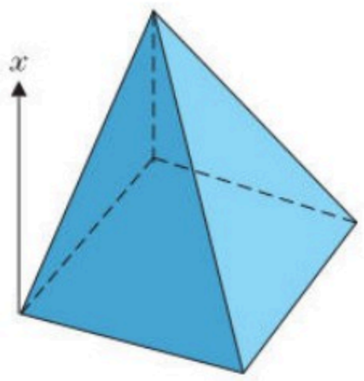
eslam salah

Q1

EXAMPLE 2.1 Computing Volume from Cross-Sectional Areas

The Pyramid Arena in Memphis has a square base of side approximately 180 m and a height of approximately 100 m. Find the volume of the pyramid with these measurements.

للهرم في ممفيس قاعدة مربعة يبلغ طول ضلعها 180 وارتفاعها 100 تقريبًا. جد حجم الهرم باستخدام هذه القياسات.



هرم

eslam salah

Q 2

EXAMPLE 2.3 Computing the Volume of a Dome

Suppose that a dome has circular cross sections, with outline $y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$, for $-45 \le x \le 45$. (In units of centimeters, this gives dimensions of a dome model similar to the Capitol Dome in Figure 6.13b.) A graph is shown in Figure 6.15. Find the volume of the dome.

على فرض أنّ للقبّة مقاطع عرضية دائرية، لها رسم تخطيطي يُعطى بالعلاقة $y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$، لكل $-45 \le x \le 45$. (بالسنتيمترات، يعطي هذا الأمر أبعادًا مشابهة لقبة المبنى في الشكل جـــد حجم القبة.

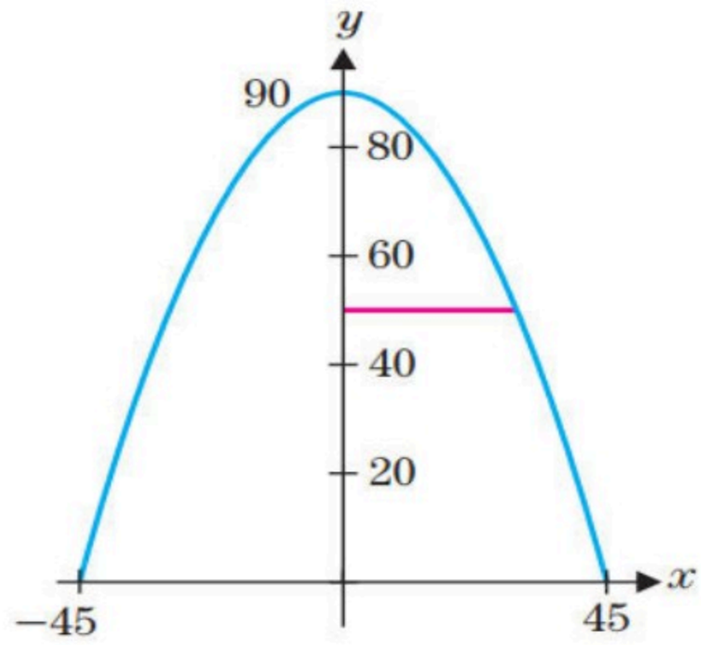


FIGURE 6.15
$y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$

eslam salah

2024

Find the volume of the solid with cross sectional area A(x).

Q3

اوجد حجم المجسم الذي مساحة مقطعة العرضي **A(x)**

1. $A(x) = x + 2, -1 \leq x \leq 3$

Q4

2. $A(x) = 10e^{0.01x}, 0 \leq x \leq 10$

2024

eslam salah

Q5

3. $A(x) = \pi(4 - x)^2, 0 \leq x \leq 2$

Q6

4. $A(x) = 2(x + 1)^2, 1 \leq x \leq 4$

eslam salah

2024

Q7

5. (a) The great pyramid at Gizeh is 152 meters high, rising from a square base of side 230 meters. Compute its volume using integration.

5. (a) يبلغ ارتفاع الهرم الأكبر في الجيزة 152 m. و يرتفع من قاعدة مربعة طول ضلعها 230 m. احسب حجمه باستخدام التكامل.

Q8 Find the volume of a pyramid of height 160 feet that has a square base of side 300 feet.

أوجد حجم هرم ارتفاعه 160 ft بقاعدة مربعة طول ضلعها 300 ft

2024

eslam salah

Q 9

A church steeple is 30 ft tall with square cross sections. The square at the base has side 3 ft, the square at the top has side 6 in and the side varies linearly in between. Compute the volume

7. يبلغ طول قبة كنيسة 30 ft بمقاطع عرضية مربعة. طول ضلع المربع الموجود في القاعد 3 ft. و طول ضلع المربع في الجزء العلوي 6 in و يتغيّر الضلع خطيًا بينهما. احسب الحجم.

Q10

The outline of a dome is given by $y = 60 - \frac{x^2}{60}$ for $-60 \le x \le 60$ (units of meters), with circular cross sections perpendicular to the y-axis. Find its volume

9. يتم إعطاء الرسم التخطيطي لقبة $y = 60 - \frac{x^2}{60}$ لكل $-60 \le x \le 60$ (بالأمتار). بمقاطع عرضية دائرية متعامدة على المحور y. جـــد حجمه.

eslam salah

Q11

A pottery jar has circular cross sections of radius

$4 + \sin\frac{x}{2}$ cm **for** $0 \le x \le 2\pi$**.compute its volume**

11. لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 + \sin\frac{x}{2}$ سنتيمتر لكل $0 \le x \le 2\pi$. احسب حجمه.

Q12

A pottery jar has circular cross sections of radius

$4 - \sin\frac{x}{2}$ cm **for** $0 \le x \le 2\pi$**. compute its volume.**

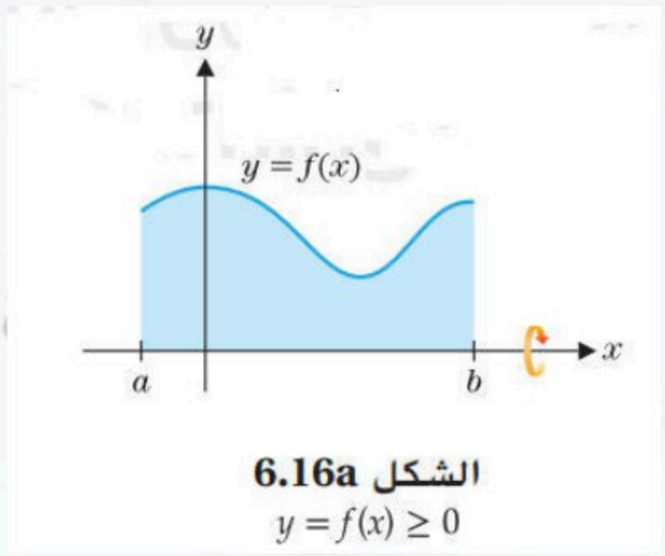
12. لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 - \sin\frac{x}{2}$ سنتيمتر لكل $0 \le x \le 2\pi$. احسب حجمه.

2024

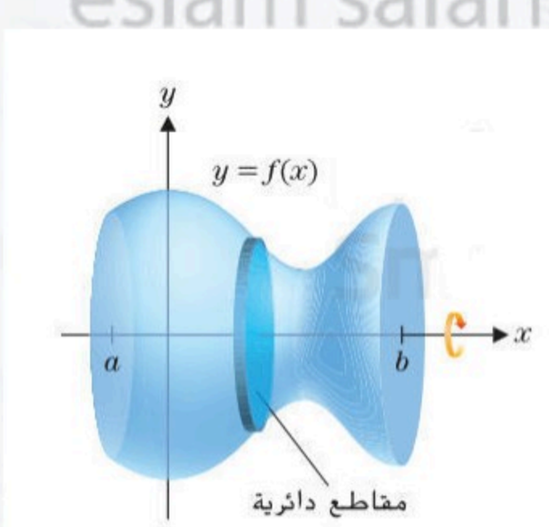
eslam salah

طريقة الأقراص

The Method of Disks

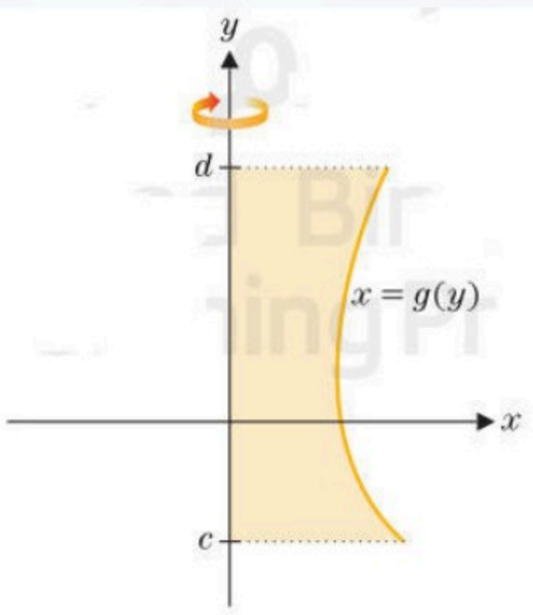


الشكل 6.16a
$y = f(x) \geq 0$

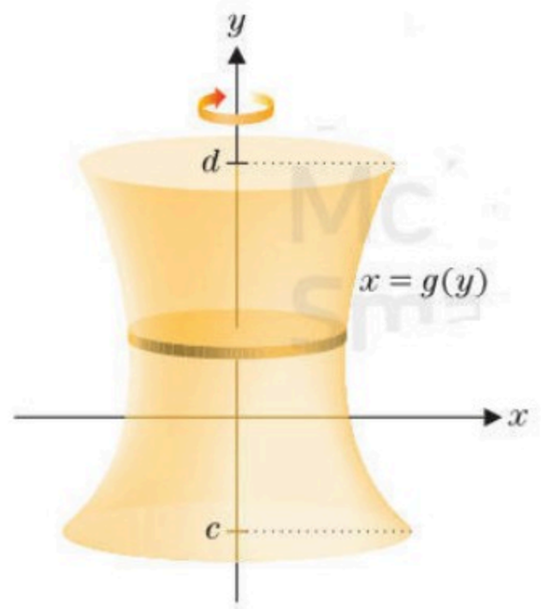


الشكل 6.16b
المجسّم الناتج عن الدوران

$$V = \int_a^b \underbrace{\pi[f(x)]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي} = \pi r^2}\, dx.$$



الشكل 6.18a
الدوران حول المحور y



الشكل 6.18b
المجسّم الناتج عن الدوران

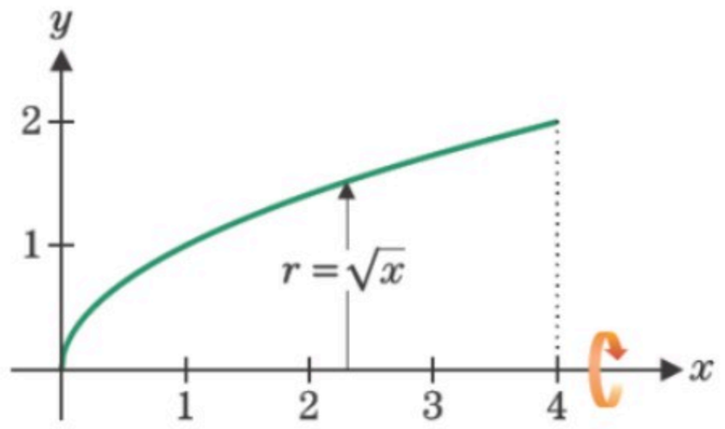
$$V = \int_c^d \underbrace{\pi[g(y)]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي} = \pi r^2}\, dy.$$

eslam salah

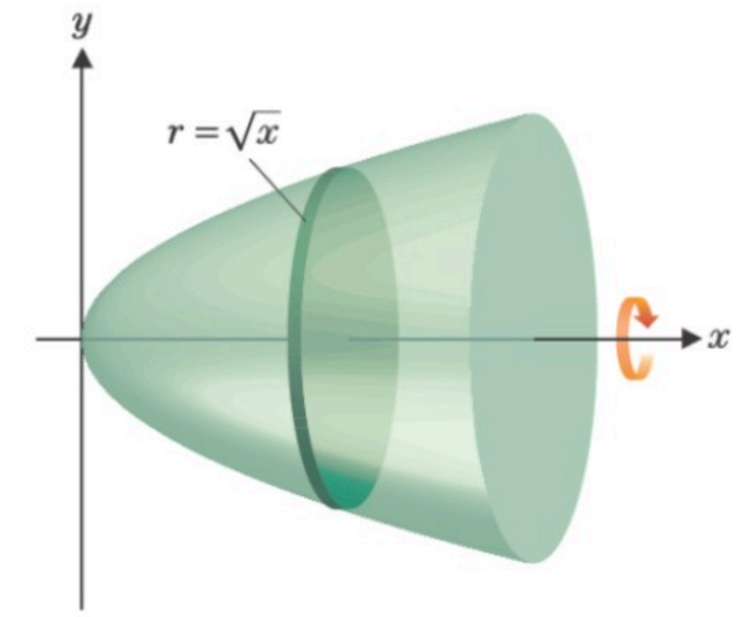
Q13 **Revolve the region under the curve $y = \sqrt{x}$ on the interval [0, 4] about the $x - axis$ and find the volume of the resulting solid of revolution**

مثال 2.4 استخدام طريقة الأقراص لحساب الحجم

قم بدوران المنطقة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ على الفترة $[0, 4]$ حول المحور x وجـــد حجم المجسّم الناتج عن الدوران.



$y = \sqrt{x}$



المجسّم الناتج عن الدوران

eslam salah

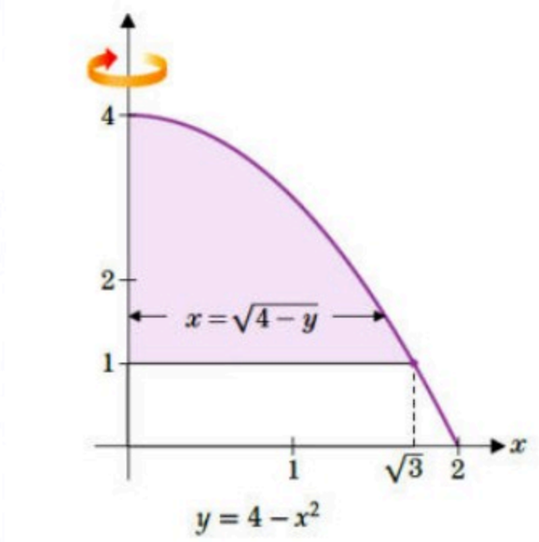
2024

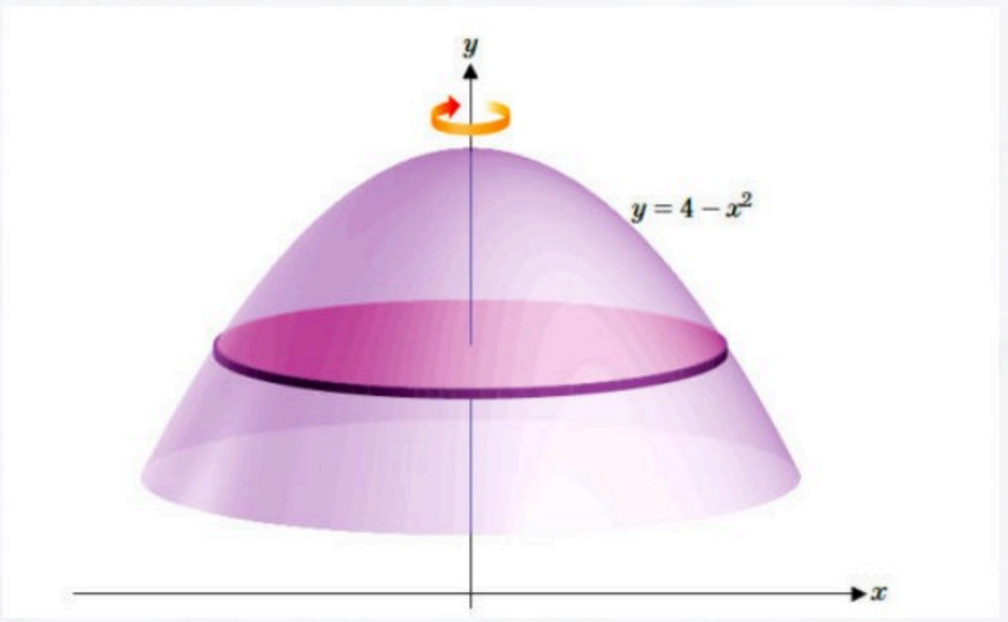
Q14

Find the volume of the solid resulting from revolving the region bounded by the curves $y = 4 - x^2$ and $y = 1$ from $x = 0$ to $x = \sqrt{3}$ about the $y-axis$

مثال 2.5 استخدام طريقة الأقراص مع y كمتغيّر مستقل

جد حجم المجسّم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 1$ من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{3}$ حول المحور y.

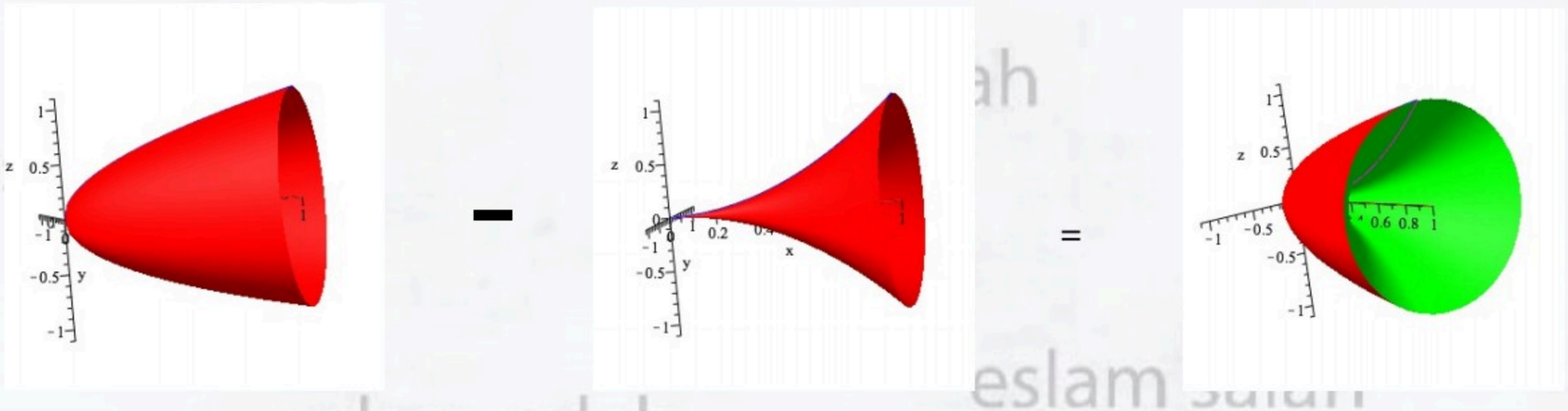


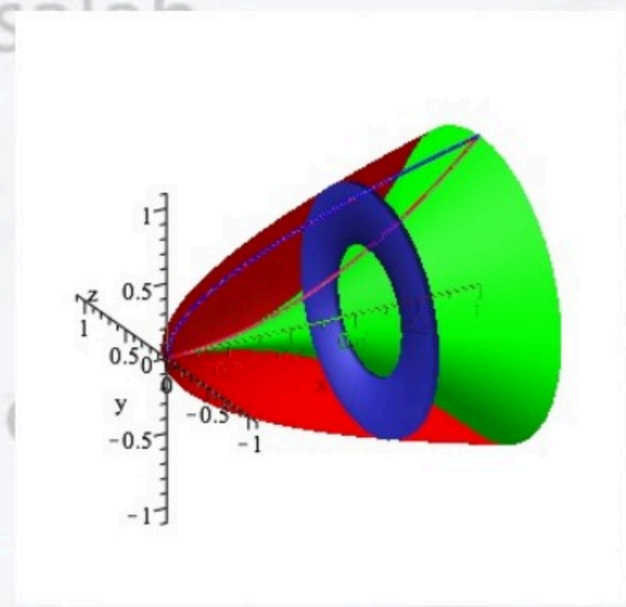


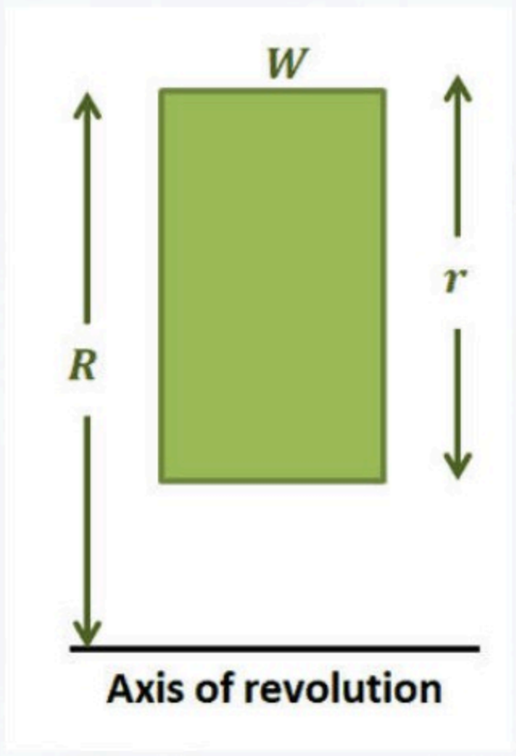
eslam salah

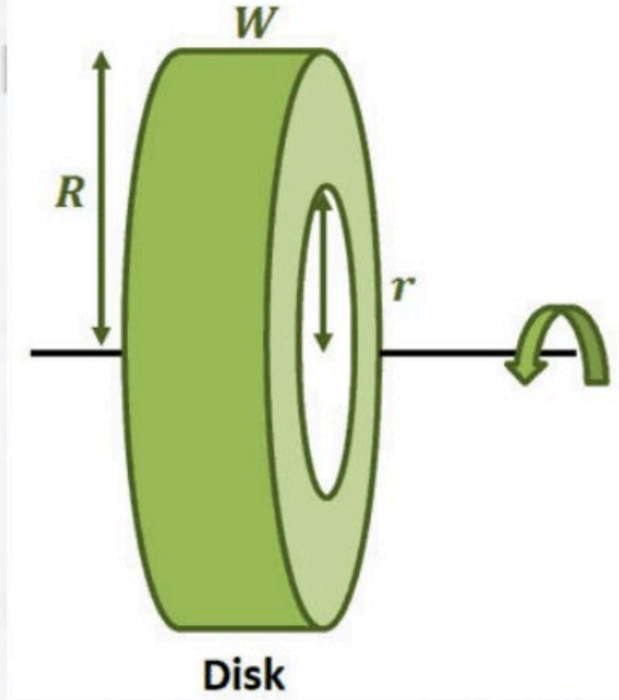
طريقة الحلقات

The Method of Washers



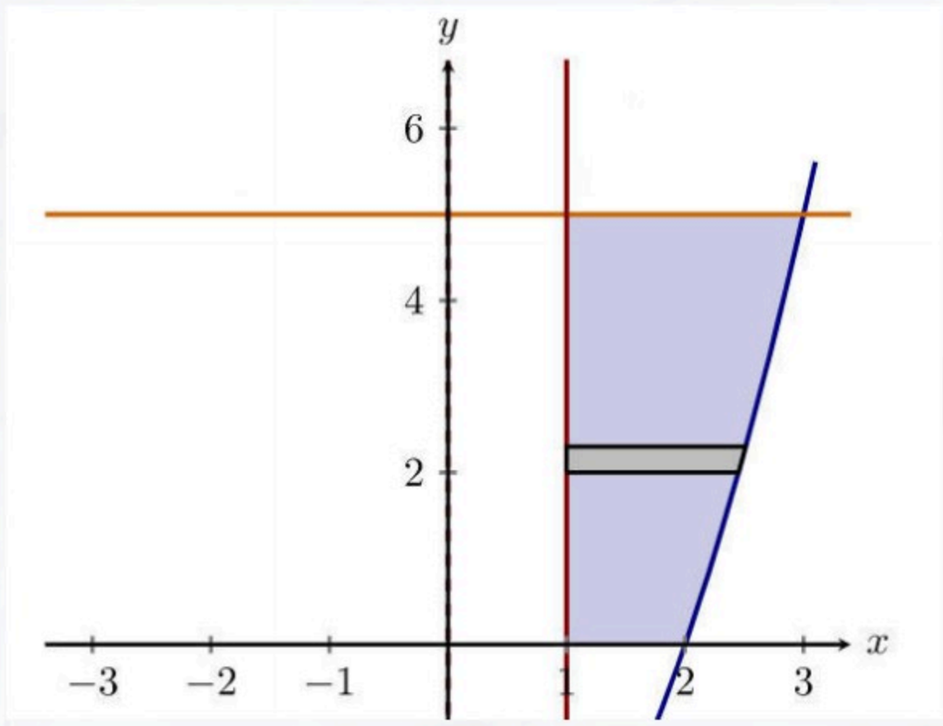


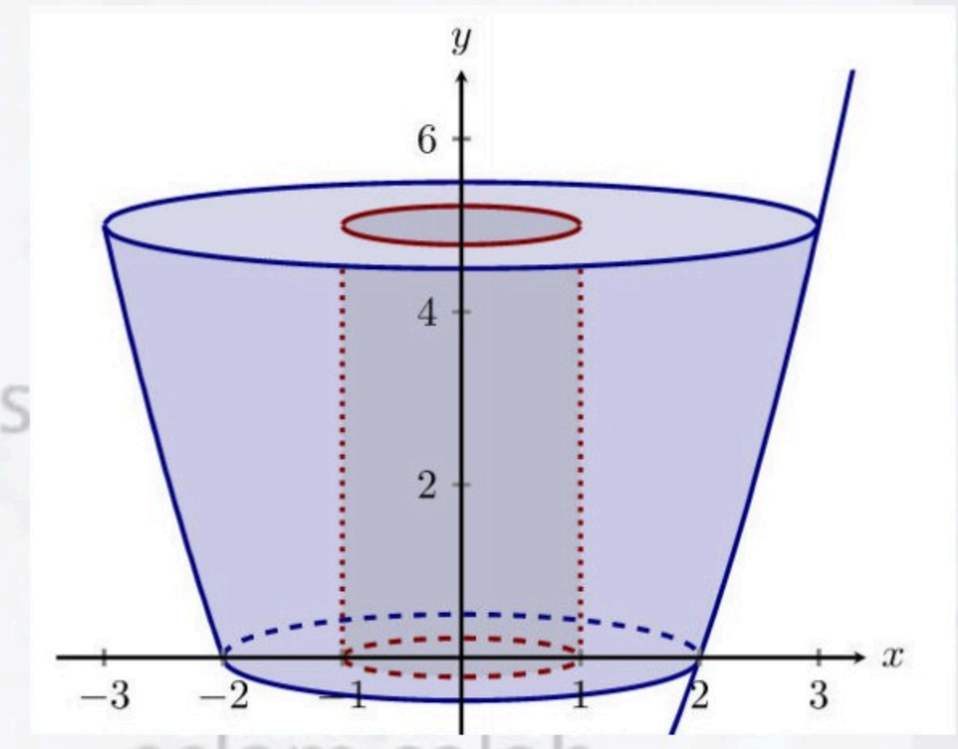




eslam salah

eslam salah





eslam salah
eslam salah

$$A(x) = \pi(\text{outer radius})^2 - \pi(\text{inner radius})^2 = \pi[f(x)^2] - \pi[g(x)]^2.$$

eslam salah

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2 dx = \int_a^b \pi[f(x)^2 - g(x)^2] dx$$

Horizontal Revolution	Vertical Revolution
$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \ dx$	$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 - [g(y)]^2 \ dy$

eslam salah

$$V = V_{\text{outer}} - V_{\text{inner}}$$

eslam salah
eslam salah

$$V = \int_a^b \pi \left(r_o^2 - r_i^2 \right) dx$$

Q15

Let R be the region bounded by the graphs of $x = 0$, $y = \frac{1}{4}x^2$ *and* $y = 1$.

Computethe volume of the solid formed by revolving R about (a) ***the y − axis***

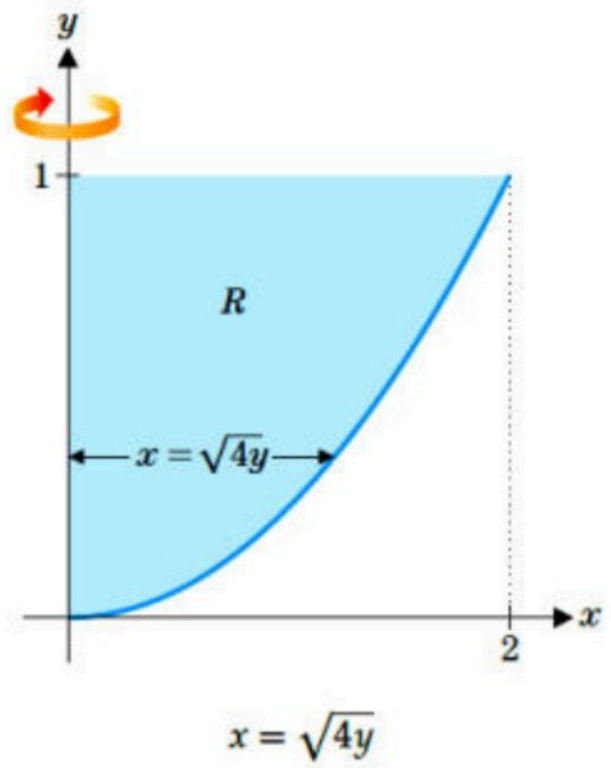
(b) ***the x − axis***

(c) ***the line y = 2***

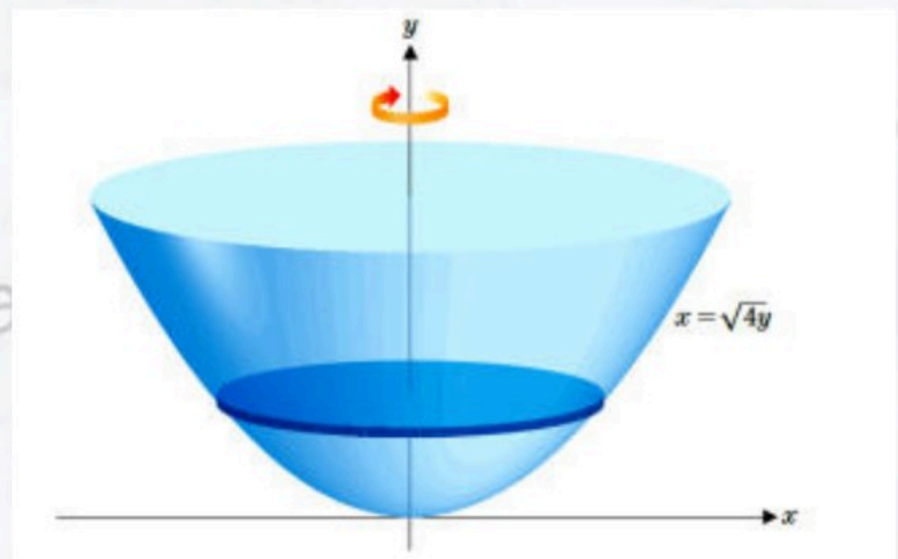
مثال 2.6 حساب أحجام المجسّمات المجوفة وغير المجوفة

لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = \frac{1}{4}x^2, x = 0$ و $y = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول (a) المحور y و(b) المحور x و(c) المستقيم $y = 2$.

(a) ***the y − axis***



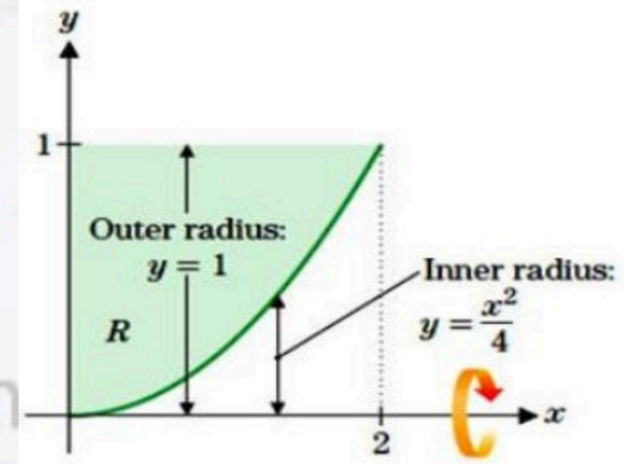
$x = \sqrt{4y}$

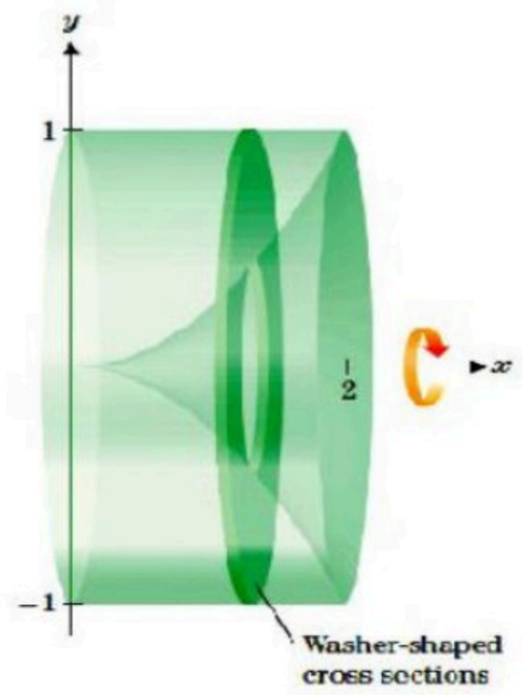


eslam salah

Q16

(b) ***the x − axis***

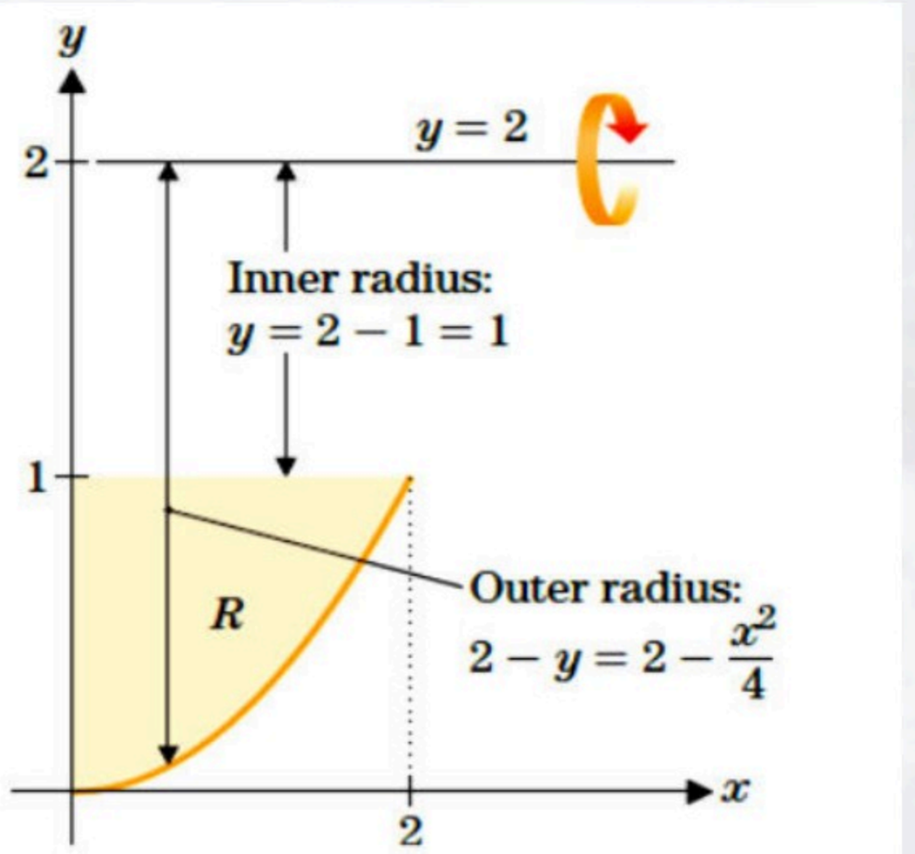


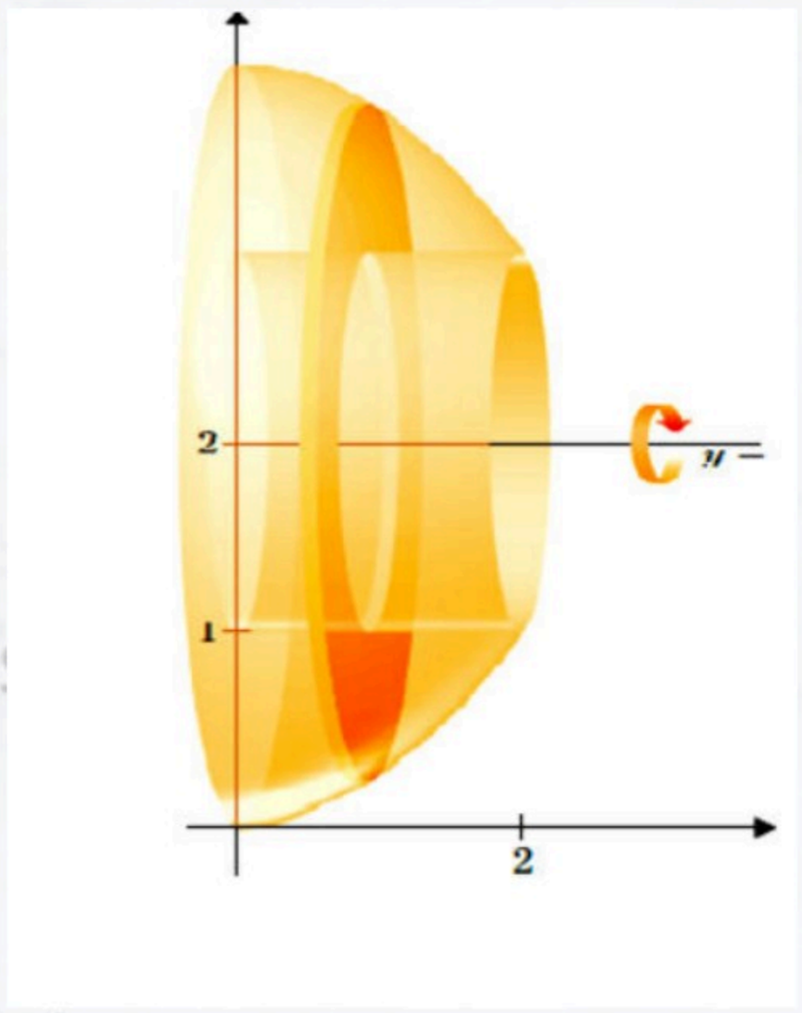


eslam salah

Q17

(c) ***the line*** $y = 2$





eslam salah

Q18 **Let R be the region bounded by $y = 4 - x^2$ and y = 0. Find the volume of the solids obtained by revolving R about each of the following:**

(a) the y– axis

(b) the line y= −3

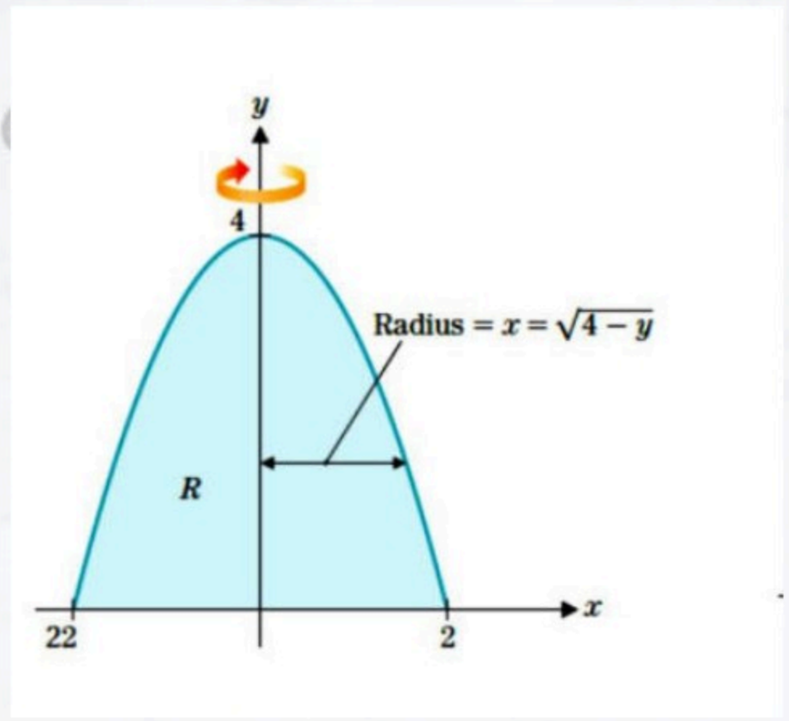
(c) the line y = 7

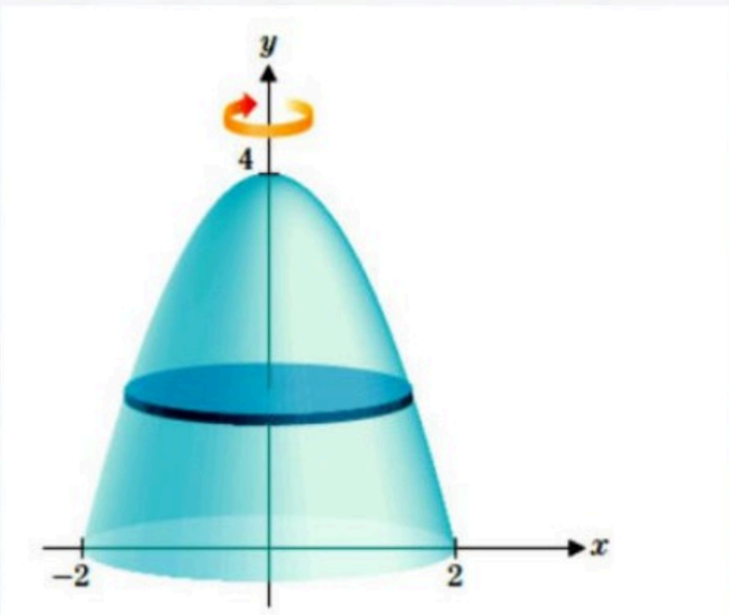
(d) the line x = 3

مثال 2.7 دوران منطقة حول مستقيمات مختلفة

لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x^2$ و $y = 0$. جـــد أحجام المجسّمات التي تم الحصول عليها من دوران R حول كل من التالي: (a) المحور y و (b) المستقيم $y = -3$ و (c) المستقيم $y = 7$ و (d) المستقيم $x = 3$.

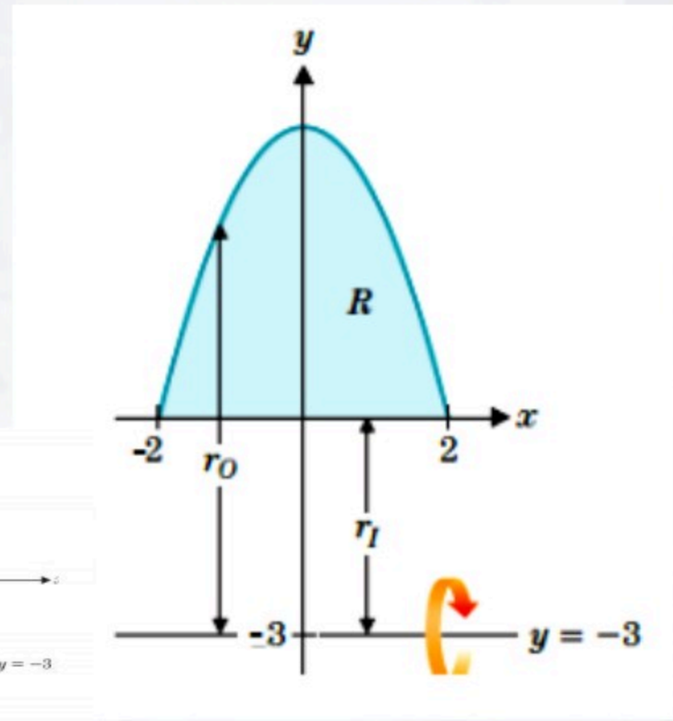
(a) the y– axis

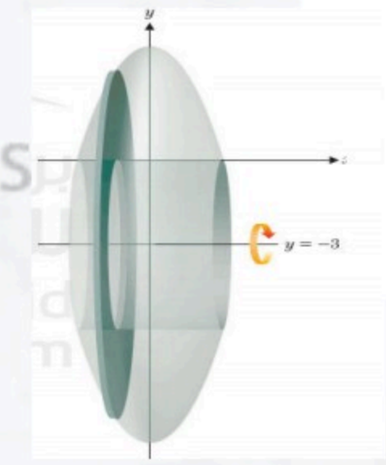




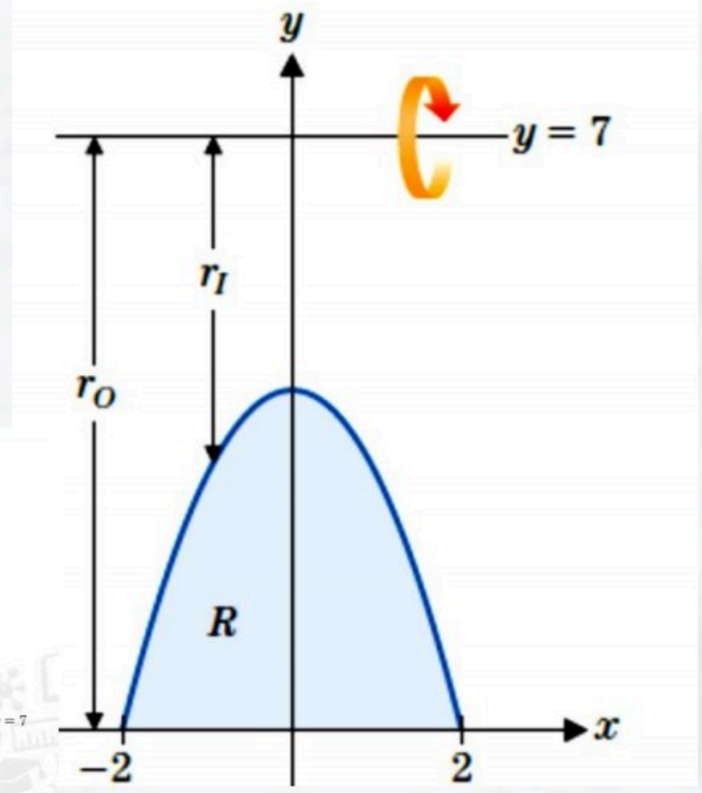
eslam salah

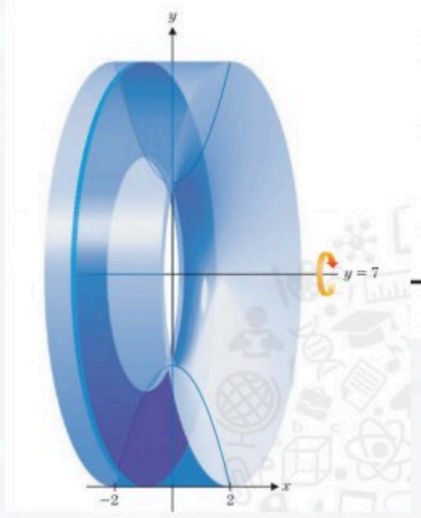
Q19 (b) ***the line*** $y = -3$



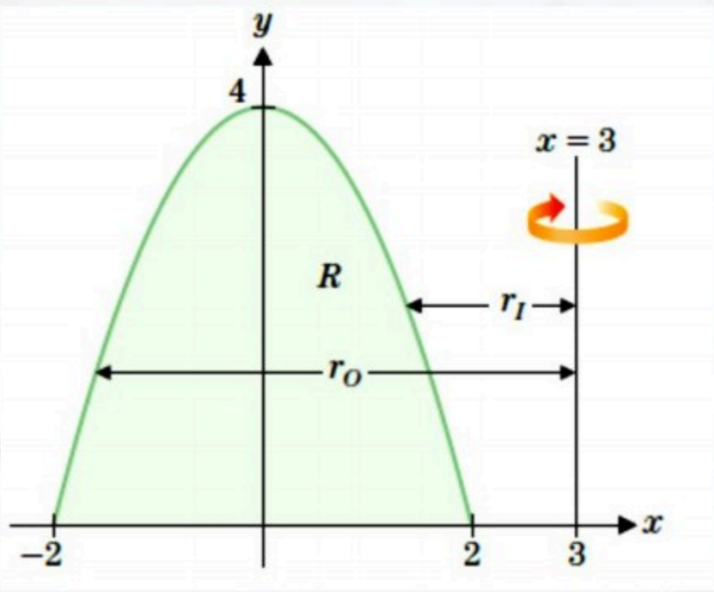


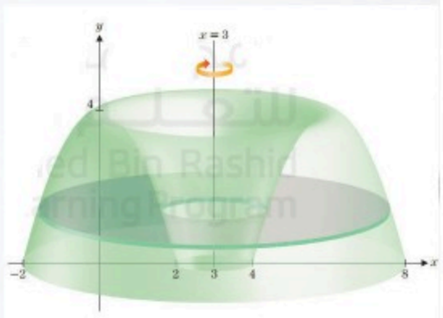
Q20 (c) ***the line*** $y = 7$





Q21 (d) ***the line*** $x = 3$

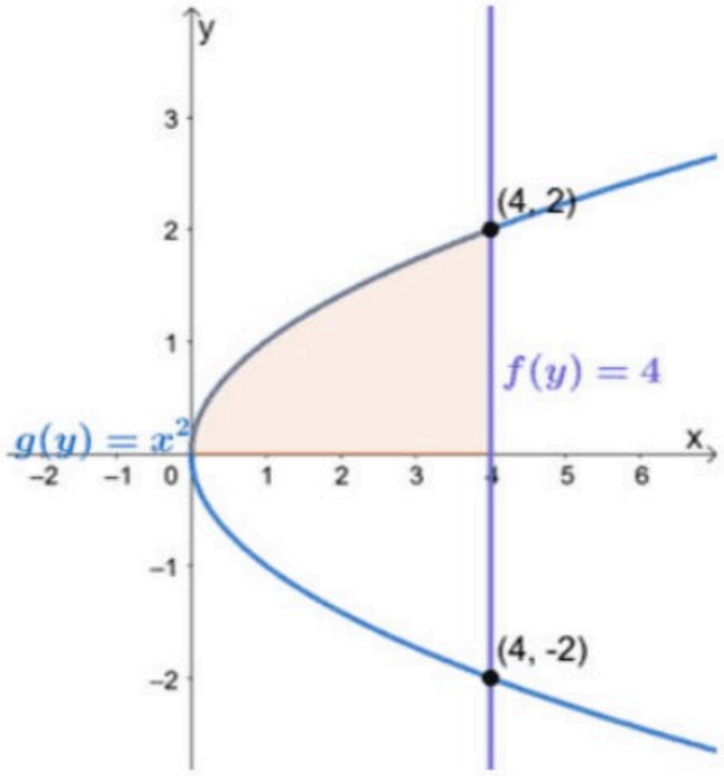


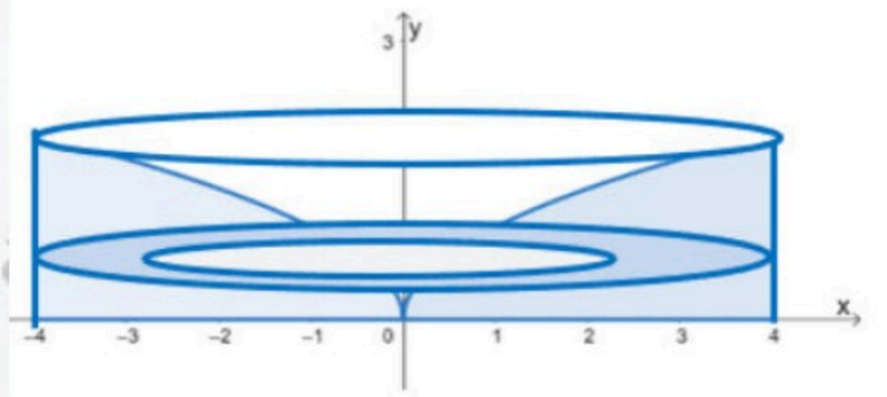


eslam salah

Q22 **find the volume of the solid formed by rotating the region bounded by $y = \sqrt{x}$ and $x = 4$ about the $y-axis$**

اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين $y = \sqrt{x}$ و $x = 4$ حول المحور y





eslam salah

Q23 Region bounded by $y = \sec x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$ and $x = \pi/4$ about (a) $y = 2$; (b) the x-axis

المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sec x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$ و $x = \pi/4$ حول (a) $y = 2$؛ (b) المحور x

eslam salah