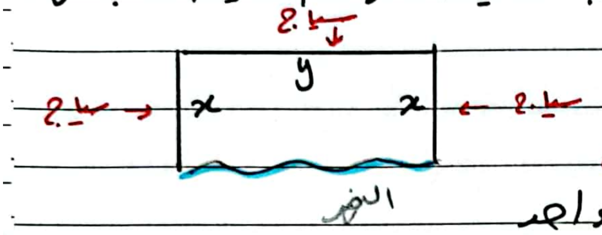
حل تمارين الدرس (6-4) القيم المثلى ص 296

تمرين ① ص 296 السياج يحيط بثلاث جوانب من مستطيل

(الجانب الرابع هو النهر) (ومعطى مساحة المستطيل $1800m^2$ = الطول × العرض)

المطلوب القيمة الصغرى للمحيط وإيجاد الأبعاد المناسبة

الدالة هي دالة المحيط والمطلوب القيمة الصغرى المحلية المناسبة لها



محيط المستطيل = 2(الطول + العرض)

لكن هنا المحيط يشمل ثلاث أضلاع (طول السور)

دالة المحيط $f = x + y + x = 2x + y$

دالة بمتحولين المفروض أن نكتبها بدلالة متحول واحد

نبحث عن علاقة تربط بين x و y (طول وعرض المستطيل) : ($x>0$ و $y>0$)

هو أعطانا المساحة 1800 $\Leftarrow x \cdot y = 1800$

$y = \frac{1800}{x}$ (نعوض في f)

نبحث عن قيمة صغرى لهذه الدالة $f(x) = 2x + \frac{1800}{x}$

$$f'(x) = 2 + \frac{0 - 1800 \times 1}{x^2} = 2 - \frac{1800}{x^2}$$

وعندما $f' = 0 \Leftarrow$

$$2 - \frac{1800}{x^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{1800}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1800}{2} = 900$$

نجذر الطرفين $x = \mp\sqrt{900} = \mp 30$

السالب مرفوض (لا يوجد طول سالب) سيكون أحد بعدي المستطيل $x = 30$

والبعد الثاني $y = \frac{1800}{x} = \frac{1800}{30} = 60$

سنتأكد أن هذه القيم تعطي للمحيط قيمة صغرى محلية

بدراسة إشارة f'' (اختبار المشتقة الثانية)

$$f''(x) = 0 - \frac{0 - 1800(2x)}{x^4} = \frac{3600x}{x^4} = \frac{3600}{x^3}$$

$$f''(30) = \frac{3600}{(30)^2} = 4 > 0$$

قيمة صغرى محلية للدالة المحيط عند $x = 30$

أو: بملاحظة إشارة f' (تزايد وتناقص f)

جرب $x=10 \Rightarrow f'(10) < 0$ ، جرب $x=40$ ، $f'(40) > 0$

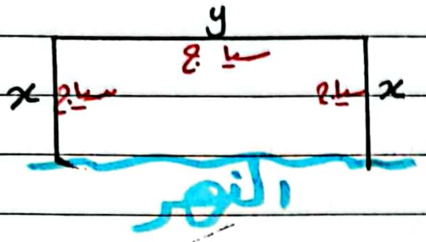
x	0		30	
إشارة f'		− −	0	+ +
f		↘		↗

قيمة صغرى ↓ محلية عند $x = 30$

ويكون المحيط (طول السياج) : $2x + y$

$2(30) + 60 = 120\ m$

تمرين 2 ص 296 مطلوب سياج له ثلاث جوانب من مستطيل
الجانب الرابع لا يوجد سياج (يشكله النهر)
طول السياج 96 m (لاحظ الشكل)



المطلوب القيمة العظمى للمساحة المحاطة
الدالة f هي دالة المساحة للمستطيل
والمطلوب قيمة عظمى محلية لها

$f = x\cdot y$ (مساحة مستطيل = الطول × العرض)

دالة بمتحولين يجب أن تكون بمتحول واحد نبحث علاقة تربط بينهما (معطى طول)

طول السياج (3 جوانب) $= x+y+x = 2x+y = 96$

$y = 96-2x$

نعوض في f: $f(x) = x(96-2x)$

$= 96x-2x^2$ (سنبحث عن قيمة عظمى)

$f'(x) = 96-4x \Rightarrow 69-4x=0 \Rightarrow x=\frac{96}{4}=24$

من اختبار المشتقة الثانية سنتحقق أنها نقطة قيمة عظمى

$f''(x) = -4 < 0$ $\Rightarrow f''(24)<0$ دوماً

وعندها ستكون أبعاد المستطيل: $x=24$ / $y=96-2(24)=48$

وعندها المساحة تعطي أكبر قيمة لها وهي $24\times48=1152m^2$

تمرين 3 ص 296 سنرسم مستطيلين متطابقين متجاورين (شكل اسطبل)
طول القطع للسياج جميعاً: 120 m متوفر
مطلوب أكبر مساحة للاسطبل (الأبعاد مطلوبة التي يمكن إحاطتها بالاسطبل)
الدالة f هي دالة المساحة للاسطبل
والمطلوب القيمة العظمى لها

المساحة = مجموع مساحتي المستطيلين
$f = x\cdot y$ مستطيل كبير مساحته

نبحث عن علاقة تربط بين x و y من خلال طول السور وطول الجزء الفاصل بين المستطيلين

$x+y+x+y+x = 3x+2y=120 \Rightarrow y=\frac{120-3x}{2}$

$f(x) = x\cdot y = x\left(\frac{120-3x}{2}\right) = \frac{120x-3x^2}{2} = 60x-\frac{3}{2}x^2$

$f'(x) = 60-\frac{3}{\cancel{2}}(\cancel{2}x) = 60-3x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 60-3x=0 \Rightarrow 60=3x \Rightarrow x=\frac{60}{3}=20$

وستكون $y=\frac{120-3(20)}{2}=30$

سنتأكد أن $x=20$ نقطة قيمة عظمى للدالة f

يتبع في الصفحة التالية

تابع تمرين ③ ص 296

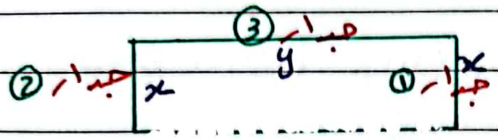
اختبار المشتقة الثانية: $f''(x) = -3 < 0$ ↓

$x=20$ تعطي قيمة عظمى محلية (دوماً $f''(20)<0$)

وستكون القيمة العظمى للمساحة:

$f(20) = 20 \times 30 = 600\ m^2$

تمرين ④ ص 296



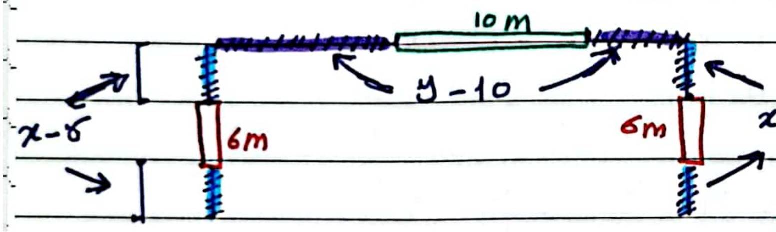
صالة مستطيلة مبدئياً (بعداها x,y) لها ثلاث جوانب فقط

في الجدارين المتقابلين ① و ② باب طوله 6 (سينقص طول كل منهما 6)

في الجدار ③ باب طوله 10m (سينقص طول هذا الجدار 10)

مساحة الصالة $= 800\ m^2$ الطول×العرض $x.y = 800$

لنرسم الجدران وما تبقى منها



طول ما تبقى من الجدار:

طول الجدار: $(x-6)+(x-6)+(y-10)$

طول الجدار يستخدم $f(x)$ دالة

المطلوب القيمة الصغرى المحلية لها

دالة بمجهولين $f(x) = 2x + y - 22$

نبحث عن العلاقة بينهما: $x.y=800$

$y = \frac{800}{x}$

$f(x) = 2x + \frac{800}{x} - 22$

$f'(x) = 2 + \frac{0-800(1)}{x^2} - 0 = 2 - \frac{800}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{800}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 400$ → $x = +\sqrt{400} = 20$ ، $x = -\sqrt{400} = -20$ (مرفوض الطول لا يكون سالب)

سنحدد هل تعطي قيمة عظمى أم صغرى:

اختبار المشتقة الثانية: $f''(x) = 0 - \frac{0-800(2x)}{x^4} = \frac{1600}{x^3}$

$f''(20) = \frac{1600}{20^3} > 0$ ↑ ($x=20$ تعطي قيمة صغرى محلية لـ f)

فيكون

$x = 20$

$y = \frac{800}{20} = 40$

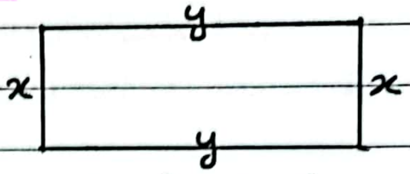
بعدي الصالة

طول الجدار $f(20) = 2(20) + \frac{800}{20} - 22 = 58$

أصغر طول ممكن

تمرين (5) ص 296 مستطيل محيطه ثابت P

المطلوب بيان عند القيمة العظمى للدالة المساحة (سيكون الطول = العرض يتحول لمربع)



المحيط ثابت P: $2x+2y=P$

$2y=P-2x \Rightarrow y=\frac{P}{2}-\frac{2x}{2}$

$y=\frac{P}{2}-x$ (لاحظ $\frac{P}{2}$ ثابت)

لنكتب دالة المساحة $f(x)=x\cdot y$ المطلوب قيمة عظمى لها

$f(x)=x\left[\frac{P}{2}-x\right]=\frac{P}{2}x-x^2$

$f'(x)=\frac{P}{2}-2x$

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{P}{2}-2x=0 \Rightarrow \frac{P}{2}=2x \to x=\frac{P}{4}$ (ثابت)

لنحدد هل تنتج عندها قيمة عظمى للمساحة؟:

$f''(x)=0-2<0$ دوماً

عند: $x=\frac{P}{4}$ قيمة صغرى للدالة

وسيكون البعد الثاني للمستطيل: $y=\frac{P}{2}-x$

$=\frac{P}{2}-\frac{P}{4}=\frac{2P}{4}-\frac{P}{4}=\frac{P}{4}$ $\quad x=y$

وبالتالي سيصبح المستطيل مربعاً وهو المطلوب

تمرين (6) مستطيل مساحته ثابتة A (لنفرض بعداه: x, y)

المطلوب بيان عند القيمة الصغرى للمحيط (سيكون الطول = العرض يتحول لمربع)

دالة المحيط: $f(x)$ متى يكون لها قيمة صغرى ←

$f(x)=2x+2y$

نبحث عن علاقة بين x و y

معطى المساحة ثابتة A: $(x\cdot y=A) \Rightarrow y=\frac{A}{x}$

سنبحث عن القيمة الصغرى $f(x)=2x+2\frac{A}{x}$

$f'(x)=2+2\left(\frac{0-A(1)}{x^2}\right)=2-\frac{2A}{x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2-\frac{2A}{x^2}=0 \Rightarrow 2=\frac{2A}{x^2} \Rightarrow x^2=A$ ، $x=\sqrt{A}$ ، $x=-\sqrt{A}$ مرفوض

نحدد نوع الغاية باختبار المشتقة الثانية:

$f''(x)=0-\frac{0-(2A)(2x)}{x^4}=\frac{4Ax}{x^4}=\frac{4A}{x^3}$

$f''(\sqrt{A})=\frac{4A}{(\sqrt{A})^3}>0$ دوماً

$x=\sqrt{A}$ تعطي قيمة صغرى للمحيط

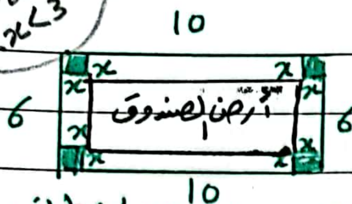
ويكون البعد الآخر للمستطيل $y=\frac{A}{x}=\frac{A}{\sqrt{A}}=\frac{\sqrt{A}\sqrt{A}}{\sqrt{A}}=\sqrt{A}$

لاحظ عندها $x=y=\sqrt{A}$

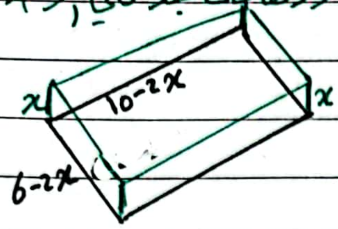
سيصبح المستطيل مربعاً وهو المطلوب

المجال: $3 > x$
$6-2x > 0 \Rightarrow 5 > x$
$10-2x > 0$
$0 < x < 3$

تمرين (7) ص 296 لوح ورق أبعاده 6 ، 10
قصت من زواياه مربعات طول ضلعها x
تثنى الأطراف ليتشكل الصندوق



قاعدته بعداها: $10-2x$ و $6-2x$ والارتفاع بعد ثني الأطراف x
لاحظ الصورة



مطلوب x لنحصل على قيمة عظمى للحجم
(مطلوب قيمة عظمى محلية) طول × عرض × ارتفاع $= f(x)$ دالة الحجم

$f(x) = (10-2x)(6-2x).x$

نفك الأقواس $= (60-20x-12x+4x^2)x$

$= (60-32x+4x^2).x = 60x-32x^2+4x^3$

$f'(x) = 60-64x+12x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2-64x+60=0 \nearrow x = \frac{8-\sqrt{19}}{3} \approx 1.214$

$\searrow x = \frac{8+\sqrt{19}}{3} \approx 4.12$ مرفوضة

نحدد أي منهما تعطي قيمة عظمى للدالة f

$f''(x) = -64+24x$

$f''(1.1214) = -64+24(1.214) < 0$ (عند 1.214 قيمة عظمى)

(عند 4.12 قيمة صغرى للدالة $f''(4.12) = -64+24(4.12) > 0$) ⇐ غير مهم

ملاحظة: القيمة 4.12 مرفوضة أصلاً لأن أبعاد المستطيل ستصبح:

$10-2(4.12) = 1.76$

$6-2(4.12) = -2.24$ (لا يمكن)

وبشكل آخر: مجال الدالة عند قص x من كل طرف:

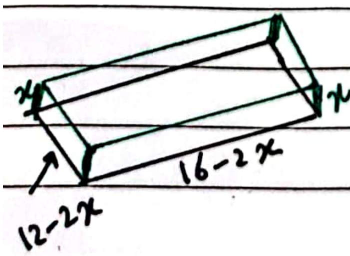
$10-2x > 0 \Rightarrow 10 > 2x \Rightarrow 5 > x$

$6-2x > 0 \Rightarrow 6 > 2x \Rightarrow 3 > x$ المجال $x < 3$

وبالتالي 4.12 مرفوضة

$10-2x > 0 \Rightarrow 5 > x$
$12-2x > 0 \Rightarrow 6 > x$
المجال: $x < 5$
$x > 0$

تمرين (8) لوح ورق مستطيل أبعاده 16 و 12
قصت من زواياه مربعات طول ضلعها x
تثنى الأطراف لتشكل صندوقاً
مطلوب x لنحصل على قيمة عظمى لحجم الصندوق
قاعدة الصندوق مستطيل بعداه: $16-2x$ و $12-2x$ / ارتفاع الصندوق x
مطلوب قيمة عظمى لدالة الحجم: ارتفاع × عرض × طول $= f(x)$



$f(x) = (16-2x)(12-2x).x$

$= (192-32x-24x+4x^2).x = (192-56x+4x^2).x$

$f(x) = 192x-56x^2+4x^3$ مطلوب القيمة العظمى المحلية (المناسبة لمعطيات المسألة)

تابع حل (8) ص 297 وجدنا $f(x)=192x-56x^2+4x^3$

$f'(x)=192-112x+12x^2$

$f'(x)=0 \Rightarrow 192-112x+12x^2=0$ → $x=\frac{14+2\sqrt{13}}{3}\approx 7.07$ ، $x=\frac{14-2\sqrt{13}}{3}\approx 2.27$

السبب المجال $x<5$
سبب آخر: لو عوضنا في $f(x)$ بـ 7.07 لوجدنا $f(7.07)<0$
الحجم سالب مرفوض

القيمة 7.07 مرفوضة لا تناسب معطيات السؤال

اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع النهاية عند $x=2.27$

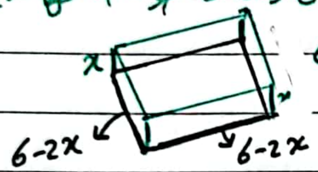
$f''(x)=-112+24x$

$f''(2.27)=-112+24(2.27)\approx -57.52<0$ (↓)

سيكون للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=\frac{14-2\sqrt{13}}{3}\approx 2.27$

تمرين (9) ص 297 قطعة مربعة أبعادها 6 و 6 نقص مربعات طول ضلعها x في الزوايا

وصنع منها بثني الأطراف صندوق حجمه V_1 ←



أخذت المربعات المقصوصة

لصقت مع بعضها لصنع مكعب ليس له غطاء

وليس له قاعدة (جوانب فقط مربعة) صندوق آخر مكعب طول ضلعه x (حجمه V_2)

$6-2x>0$
$6>2x$
$3>x$ ، $x>0$ المجال

a المطلوب القيمة العظمى لأحجام الصناديق $f(x)=V_1+V_2$

مطلوب قيمة عظمى لهذه الدالة $f(x)=[(6-2x)(6-2x)\cdot x]+[x^3]$

x التي تعطي

$f(x)=[(36-24x+4x^2)\cdot x]+x^3$

$=36x-24x^2+4x^3+x^3 = 5x^3-24x^2+36x$

$f'(x)=15x^2-48x+36=0$ → $x_1=2$ ، $x_2=\frac{6}{5}=1.2$ كلاهما مقبول $(x<3)$

$f''(x)=30x-48$

$f''(2)=30(2)-48=12>0$ (↑) (عند $x=2$ قيمة صغرى)

$f''(1.2)=30(1.2)-48=-12<0$ (↓) (عند $x=1.2$ قيمة عظمى لـ f)

b القطعة الأصلية مستطيلة أبعادها 4 و 6 للصندوق الأول أبعاد: $6-2x$ و $4-2x$ و x

$V_1=(6-2x)(4-2x)x=(24-12x-8x+4x^2)x=24x-20x^2+4x^3$

مطلوب قيمة عظمى للدالة $f(x)=V_1+V_2=[24x-20x^2+4x^3]+[x^3]$

$f(x)=5x^3-20x^2+24x \Rightarrow f'(x)=15x^2-40x+24$

$f'(x)=0 \Rightarrow x_1=\frac{20+2\sqrt{10}}{15}\approx 1.755$ ، $x_2=\frac{20-2\sqrt{10}}{15}\approx 0.912$ كلاهما مقبول $(x<2)$

$f''(x)=30x-40 \Rightarrow f''(1.755)=12.65>0$ (↑) ، $f''(0.912)=-12.64<0$ (↓)

عند $x=0.912$ قيمة عظمى محلية ($x=\frac{20-2\sqrt{10}}{15}$)

تمرين (10) ص 297 مطلوب إعادة إيجاد القيمة العظمى للدالة حجم الصندوقين

مقطعة الورق بعداها: $6cm$ و dcm ($d>0$)

ونقتطع x من كل زاوية مربع ليصبح بعدا قاعدة الصندوق: $6-2x$ و $d-2x$

وارتفاعه x وحجمه: $V_1=(6-2x)(d-2x).x$ والثاني حجمه: $V_2=x^3$

ومجموع حجمي الصندوقين $f(x)=V_1+V_2$

مطلوب d التي تعطي قيمة عظمى للدالة: $f(x)=$

$$=(6d-12x-2dx+4x^2).x \quad +x^3$$
$$=6dx-12x^2-2dx^2+4x^3+x^3$$
$$=5x^3+(-12-2d)x^2+6dx$$
$$f'(x)=15x^2+2(-12-2d)x+6d$$
$$=15x^2+(-24-4d)x+6d$$

المجال:
- $6-2x>0$, $x<3$
- $d-2x>0$, $x<\frac{d}{2}$
- $x>0$

وللحصول على قيمة عظمى سيوجد حل للمعادلة $f'(x)=0$

للمعادلة: $15x^2+(-24-4d)x+6d=0$ حل

وهذه معادلة من الدرجة الثانية وشرط وجود حل لها أن يكون المميز $\Delta\geq 0$ $a=15/b=-24-4d/c=6d$

حل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تحكم قانون $x=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\Delta=b^2-4ac$ المميز

$$\Delta=b^2-4ac=(-24-4d)^2-4(15)(6d)>0$$

لو قمنا بفك الأقواس $\Delta=(-24)^2+2(-24)(-4d)+(-4d)^2-360d>0$

$$\Delta=276+192d+16d^2-360d>0$$

يجب أن يكون: $\Delta=16d^2+168d+276>0$

وهذا محقق دائماً حيث $d>0$ وسنحصل على قيم حقيقية لـ x تعطي قيمة عظمى للدالة

تمرين (11) مطلوب أقرب نقطة (x,y) من المنحني $y=x^2$ ⇐ مطلوب نقطة (x,x^2) الأقرب لنقطة $(0,1)$

البعد بين نقطتين: $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

مطلوب قيمة صغرى للدالة البعد (المسافة) $f(x)=\sqrt{(x-0)^2+(x^2-1)^2}$

$$=\sqrt{x^2+x^4-2x^2+1}=\sqrt{x^4-x^2+1}$$

نلاحظ المقام موجب دوماً

$$f'(x)=\frac{4x^3-2x}{2\sqrt{x^4-x^2+1}}=\frac{\cancel{2}(2x^3-x)}{\cancel{2}\sqrt{x^4-x^2+1}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x^3-x=0 \Rightarrow \left(x_1=0\ /\ x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\ /\ x_3=\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$$

ممكن تحديد القيمة العظمى والصغرى باختبار المشتقة الثانية

أو بدراسة إشارة f' (وتحديد تزايد وتناقص f)

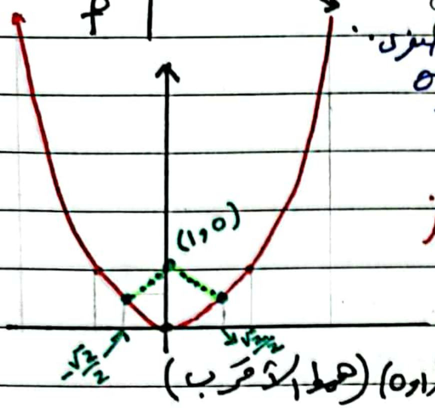
حيث لـ f' ثلاثة أصفار (0 و 0.707 و -0.707)

يتبع في الصفحة التالية

تابع تمرين (11) ص 297

$x=-1$ جرب في $f`(-1)<0$ — $x=-0.5$ جرب — $x=0.5$ جرب

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
إشارة $f`$		$--$	0	$++$	0	$--$	0	$+++$	
f		↘	قيمة صغرى محلية	↗		↘	قيمة صغرى محلية	↗	



أقرب النقاط المنحنى للنقطة $(0,1)$

نقطتان $x=\frac{\sqrt{2}}{2} \to y=\frac{1}{2}$

(أصغر قيمة ←) $x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \to y=\frac{1}{2}$

ملاحظة: لو رسمنا الشكل بدقة

لاحظ النقطتان و بعد كل منهما عن $(0,1)$ (هما الأقرب)

ولاحظ: $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}\approx 0.71$

تمرين (12) مطلوب نقطة من المنحنى $y=x^2$ والأقرب للنقطة $\underset{x_2,y_2}{(3,4)}$

$(x,x^2)=\underset{x_1,y_1}{(x,y)}$

أي قيمة صغرى للدالة المسافة

$f(x)=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-4)^2}$

$=\sqrt{x^2-6x+9+x^4-8x^2+16}=\sqrt{x^4-7x^2-6x+25}$

$f`(x)=\dfrac{4x^3-14x-6}{2\sqrt{x^4-7x^2-6x+25}}$ لاحظ المقام $\neq 0$ موجب

$f`(x)=0 \Rightarrow 4x^3-14x-6=0 \to x_1\approx 2.057$

$\to x_2\approx -0.456$

$\to x_3\approx -1.601$

$f``(-1.601)>0$ $f``(-0.456)<0$ $f``(2.057)>0$

نحدد أيها نقطة قيمة صغرى (إما باختبار المشتقة الثانية: الوقت لاشتقاق طويل)

أو بدراسة إشارة $f`$ وتحديد تزايد وتناقص الدالة

$x=-2$ جرب $f`(-2)<0$ — $x=-1$ جرب $f`(-1)>0$ — $x=0$ جرب $f`(0)<0$ — $x=3$ جرب

x	$-\infty$		-1.601		-0.456		2.057		$+\infty$
إشارة $f`$		$--$	0	$++$	0	$--$	0	$++$	
f		↘	4.820 قيمة صغرى محلية	↗	5.131 قيمة عظمى محلية	↘	0.971 قيمة صغرى محلية	↗	

أصغر قيمة محلية هي $f(2.057)\approx 4.231$ $= y=x^2=(2.057)^2$

النقطة المطلوبة $(2.057, 4.231)$

تمرين (13) ص 297 المطلوب نقطة (x,y) من منحنى $y=\cos x$ أي مطلوب نقطة $(x,\cos x)$ الأقرب للنقطة $(0,0)$

المطلوب قيمة صغرى للدالة المسافة بين النقطتين:

$$f(x)=\sqrt{(x-0)^2+(\cos x-0)^2}=\sqrt{x^2+\cos^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{2x+2\cdot\cos x\cdot(-\sin x)}{2\sqrt{x^2+\cos^2 x}}=\frac{\cancel{2}(x-\cos x\cdot\sin x)}{\cancel{2}\sqrt{x^2+\cos^2 x}}$$

المقام موجب $\neq 0$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x-\cos x\cdot\sin x=0$$

$$x=\cos x\cdot\sin x \quad \text{(}\text{ممكن حل المعادلة بالآلة}\text{)}$$

هذا يتحقق عندما $x=0$

وأصغر قيمة للدالة: $f(0)=y=\cos 0=1$

يمكن ملاحظة ذلك إما من اختبار المشتقة الثانية (الحل طويل قليلاً) سنجد: $f''(0)>0$

أو بدراسة اشارة f' قبل (0) وبعد (0) (إشارة المشتقة الأولى تكفي)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة f'		$- -$	0	$+ +$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$f'(-1)<0$ ، $f'(1)>0$

صغرى محلية

النقطة المطلوبة $(0,1)$

تمرين (14) المطلوب نقطة (x,y) من منحنى $y=\cos x$ أي نقطة $(x,\cos x)$ الأقرب للنقطة $(1,1)$

مطلوب قيمة صغرى للدالة:

$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+(\cos x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-1)'\cdot(1)+2(\cos x-1)'(-\sin x-0)}{2\sqrt{(x-1)^2+(\cos x-1)^2}}$$

$$=\frac{\cancel{2}\left[(x-1)+(-\cos x\cdot\sin x-\sin x)\right]}{\cancel{2}\sqrt{(x-1)^2+(\cos x-1)^2}}$$

$$=\frac{x-1-\cos x\cdot\sin x-\sin x}{\sqrt{(x-1)^2+(\cos x-1)^2}} \quad \text{(}\text{لاحظ المقام موجب } \neq 0\text{)}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x-1-\cos x\sin x-\sin x=0$$

(نحل هذه المعادلة بالآلة الحاسبة) سنجد $x=0.789781$

وعندها توجد قيمة صغرى محلية: $f(0.789781)=0.363$

تحدد باستخدام اختبار المشتقة الثانية $f''(0.789781)>0$

أو بملاحظة إشارة f' قبل وبعد هذه القيمة وتحديد تزايد وتناقص f (كما في التمارين السابقة)

$f(0.789781)=\cos(0.789781)=0.704 \Rightarrow$ النقطة المطلوبة $(0.789781, 0.704)$

$\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$
$\sqrt{2}\times$

ص 297

تمرين (15) مطلوب أولاً في تمرين 11 ① ميل المستقيم المار بالنقطة المعطاة $(0,1)$ والنقطة التي وجدناها $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ و $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$

② ثم بيان أن هذا المستقيم يعامد المماس عند النقطة المحددة

-1 ميل المستقيم: أولاً $(0,1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) \Rightarrow m_1 = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ميل المماس للمنحني $y=x^2$ عند النقطة $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ يساوي $y'(\frac{\sqrt{2}}{2})$

$y' = 2x \Rightarrow y'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} = m_2$

-2 (شرط التعامد $m_1 \cdot m_2 = -1$) $m_1 \times m_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = -1$

نعم متعامدان.

-1 ميل المستقيم: ثانياً $(0,1)\ (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) \Rightarrow m_1 = \frac{\frac{1}{2}-1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

وميل المماس للمنحني $y=x^2$ عند النقطة $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ يساوي $y'(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$y' = 2x \Rightarrow y'(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} = m_2$

-2 (شرط التعامد $m_1 \cdot m_2 = -1$) $m_1 \times m_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times -\sqrt{2} = -1$

نعم متعامدان

مطلوب ثانياً من تمرين 12 ميل المستقيم المار بالنقطة المعطاة $(3,4)$ والنقطة التي وجدناها $(2.057, 4.231)$

ثم بيان أن هذا المستقيم يعامد المماس عند النقطة المحددة

-1 ميل المستقيم: $(3,4)\ (2.057, 4.231) \Rightarrow m_1 = \frac{4.231-4}{2.057-3} = -0.245$

ميل المماس للمنحني $y=x^2$ عند النقطة $(2.057, 4.231)$ يساوي: $y'(2.057)$

$y' = 2x \Rightarrow y'(2.057) = 2(2.057) = 4.114$

-2 (شرط التعامد $m_1 \cdot m_2 = -1$):

$m_1 \cdot m_2 = -0.245 \times 4.114 \approx -1.007$

≈ -1 نعم متعامدان

(لاحظ الأعداد كلها مقربة للنقط والناتج الضرب تجاوزاً)

ص 291

تمرين (16) مطلوب أولاً من مثال 7.3 ميل المستقيم المار بالنقطة المعطاة $(3,9)$ والنقطة التي وجدت بالحل وهي $(1,8)$

ثم بيان أن هذا المستقيم يعامد المماس عند النقطة المحددة

-1 ميل المستقيم: $(3,9), (1,8) \Rightarrow m_1 = \frac{8-9}{1-3} = \frac{1}{2}$

للتوضيح الصفحة التالية

ميل المماس للمنحني $y=9-x^2$ عند نقطة $(1,8)$ يساوي $y'(1)$

تابع حل تمرين (16) ص 297

ميل المماس: $y=9-x^2 \rightarrow y' = -2x \rightarrow y'(1)=m_2=-2(1)=-2$

شرط التعامد: $m_1 \cdot m_2=-1$

نعم متعامدان $m_1 \times m_2 = \frac{1}{2} \times -2 = -1$

ومطلوب ثانياً من مثال 7.4 ص 292

ميل المستقيم المار بالنقطة المعطاة في السؤال (5,11)

والنقطة التي وجدناها بالحل (0.79728, 8.364)

ثم بيان أن هذا المستقيم يعامد المماس عند النقطة المطلوبة؟

1- ميل المستقيم: $(5,11), (0.79728, 8.364) \Rightarrow m_1 = \frac{8.364-11}{0.79728-5}$

$m_1 = 0.6272$

ميل المماس بالمنحنى $y=9-x^2$ يساوي قيمة المشتقة عند النقطة

$y' = -2x^2$

$y'(0.79728) = -2(0.79728) = -1.59456 = m_2$

شرط التعامد: $m_1 \cdot m_2 = -1$

$0.6272 \times -1.59456 \approx -1.0001$

نعم متعامدان ≈ -1 (اعتمدنا التقريب خلال مراحل الحل)

تمرين (17) ص 297 السعة لعلبة 12 ليتر (هذا حجم باللتر (أوضحه بأسئلة)

يحول إلى in^3: بالضرب: 1.80469

مطلوب أبعاد للعلبة لتحقيق أصغر قيمة للمادة المستخدمة (المادة تستخدم لصنع $\underbrace{\text{جوانب العلبة}}$ و $\underbrace{\text{غطاء وأسفل العلبة}}$).

المساحة الجانبية: $2\pi rh$ ، للمساحة دائرتين: $2\pi r^2 = 2(\pi r^2)$

والمتة والقاع (غطاء وأسفل) للعلبة ضعف كل الجوانب

$\Rightarrow 2(2\pi r^2) = 4\pi r^2$?

(ترجمة غير دقيقة غير واضح)

(هي متغيرين r و h) المساحة الكلية $C = 4\pi r^2 + 2\pi rh$

لكن الحجم المعطى: 12 ليتر $= 12 \times 1.80469 = 21.65628\ in^3$

ونعلم قانون حجم اسطوانة: $V = \pi r^2 h$

نعوض في C: $21.65628 = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{21.65628}{\pi r^2}$

$C = 4\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{21.65628}{\pi r^2}\right)$

$C = 4\pi r^2 + 43.31256\ r^{-1}$

يتبع في الصفحة التالية

سنبحث عن قيمة صغرى محلية لهذه الدالة (المتحول r) $f(r)$

التكلفة لا معنى لها بالسؤال

تابع حل تمرين (17) ص297 وجدنا:

المتحول r

$f(r)$: $C = 4\pi r^2 + 43.31256 r^{-1}$

$C' = 4\pi(2r) + 43.31256(-1 r^{-2})$

$= 8\pi r - 43.31256 r^{-2}$; $C' = 0 \Rightarrow 8\pi r = 43.31256 r^{-2}$

ضرب تقاطعي $\frac{8\pi r}{1} = \frac{43.31256}{r^2} \rightarrow \frac{8\pi r^3}{8\pi} = \frac{43.31256}{8\pi}$

$r = \sqrt[3]{\frac{43.31256}{8\pi}} \approx 1.1989$

ممكن تحديد أنها نقطة قيمة صغرى محلية باختبار المشتقة الثانية

$C''(r) = 8\pi - 43.31256(-2r^{-3})$

$C''(1.1989) = 8\pi - 43.31256[-2(1.1989)^{-3}] \approx 174 > 0$ ⇑

توجد قيمة صغرى محلية عند $r = 1.1989$

وهذه القيمة هي $C(1.1989) = 4\pi(1.1989)^2 + 43.31256(1.1989)^{-1}$

≈ 54.189

ويكون ارتفاع العلبة: $h = \frac{21.65628}{\pi r^2} = \frac{21.65628}{\pi(1.1989)^2} \approx 4.7957$

تمرين (18) عقب تمرين 17 المطلوب التحقق أن نصف القطر 1.156 يحقق القيمة الصغرى لـ C (إذا كان سمك المعدن لقاعي أكبر من سمك الجوانب ب 2.23 مرة)

مطلوب أبعاد العلبة لتحقيق أصغر مواد تستخدم لصنع:

$\underbrace{\text{جوانب العلبة}}$ و $\underbrace{\text{غطاء وأرضية العلبة}}$

المساحة الجانبية $2\pi r h$ — مساحة دائرتين $2(\pi r^2) = 2\pi r^2$

القمة والقاع للعلبة بسمك 2.23 من الجوانب

$\Rightarrow 2.23(2\pi r^2) = 4.46\pi r^2$

$C = 4.46\pi r^2 + 2\pi r h$ (يوجد متحولين r و h)

لكن معطى الحجم: 12 ليتر وجدنا أنه يعادل: $21.65628\ in^3$

$V = \pi r^2 h \Rightarrow 21.65628 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{21.65628}{\pi r^2}$

نعوض في C: $C = 4.46\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{21.65628}{\pi r^2}\right) = 4.46\pi r^2 + 43.3125 r^{-1}$

$C' = (4.46\pi)(2r) + 43.3125(-1 r^{-2}) = 8.92r - 43.3125 r^{-2} = 0$

$C' = 0 \Rightarrow 8.92r = 43.3125 r^{-2} \Rightarrow \frac{8.92r}{1} = \frac{43.3125}{r^2}$ ضرب تقاطعي

$8.92r^3 = 43.3125 \Rightarrow r^3 = \frac{43.3125}{8.92}$

$r = \sqrt[3]{\frac{43.3125}{8.92}} = 1.156$ (تحقق قيمة صغرى لـ C)

$C''(r) = 8.92 - 43.3125(-2r^{-3}) \Rightarrow C''(1.156) = 8.92 - 43.3125[-2(1.156)^{-3}] > 0$

⇑ تعطي قيمة صغرى باختبار المشتقة الثانية

التكاليف لا يعني لها بالسؤال

المتحول r

تابع حل تمرين (17) ص297

وجدنا: $P(r):\ C=4\pi r^2+43.31256r^{-1}$

$C'=4\pi(2r)+43.31256(-1r^{-2})$

$=8\pi r-43.31256r^{-2}$; $C'=0\Rightarrow 8\pi r=43.31256r^{-2}$

ضرب تقاطعي $\frac{8\pi r}{1}=\frac{43.31256}{r^2}\rightarrow \frac{8\pi r^3}{8\pi}=\frac{43.31256}{8\pi}$

$r=\sqrt[3]{\frac{43.31256}{8\pi}}\approx 1.1989$

ممكن تحديد أنها نقطة قيمة صغرى محلية باختبار المشتقة الثانية

$C''(r)=8\pi-43.31256(-2r^{-3})$

$C''(1.1989)=8\pi-43.31256[-2(1.1989)^{-3}]\approx 174>0$ (↑)

توجد قيمة صغرى محلية عند $r=1.1989$

وهذه القيمة هي $C(1.1989)=4\pi(1.1989)^2+43.31256(1.1989)^{-1}$

≈ 54.189

ويكون ارتفاع العلبة: $h=\frac{21.65628}{\pi r^2}=\frac{21.65628}{\pi(1.1989)^2}\approx 4.7957$

تمرين (18) عقب تمرين 17 المطلوب التحقق أن نصف القطر 1.156 يحقق القيمة الصغرى لـ C (إذا كان سمك المعدن للقاع أكبر من سمك الجوانب ب 2.23 مرة)

مطلوب أبعاد العلبة لتحقيق أصغر مواد تستخدم للصنع:

$\underbrace{\text{جوانب العلبة}}$ و $\underbrace{\text{غطاء وأرضل العلبة}}$

المساحة الجانبية $2\pi rh$

$2\pi r^2=2(\pi r^2)$ مساحة دائرتين

القمة والقاع للعلبة بسمك 2.23 من الجوانب

$\Rightarrow 2.23(2\pi r^2)=4.46\pi r^2$

$C=4.46\pi r^2+2\pi rh$ (يوجد متحولين r و h)

لكن معطى الحجم: 12 ليتر وجدنا أنه يعادل: $21.65628\ in^3$

$V=\pi r^2h\Rightarrow 21.65628=\pi r^2h\Rightarrow h=\frac{21.65628}{\pi r^2}$

نعوض في C: $C=4.46\pi r^2+2\pi r\left(\frac{21.65628}{\pi r^2}\right)=4.46\pi r^2+43.3125r^{-1}$

$C'=(4.46\pi)(2r)+43.3125(-1r^{-2})=8.92r-43.3125r^{-2}=0$

$C'=0\Rightarrow 8.92r=43.3125r^{-2}\Rightarrow \frac{8.92r}{1}=\frac{43.3125}{r^2}$ ضرب تقاطعي

$8.92r^3=43.3125\Rightarrow r^3=\frac{43.3125}{8.92}$

$r=\sqrt[3]{\frac{43.3125}{8.92}}=1.156$ (تحقق قيمة صغرى لـ C)

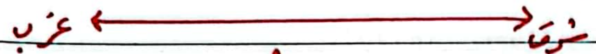
$C''(r)=8.92-43.3125(-2r^{-3})\Rightarrow C''(1.156)=8.92-43.3125[-2(1.156)^{-3}]>0$

(↑) نقطة قيمة صغرى باختبار المشتقة الثانية

تمرين صعب قليلاً على بعض الطلاب

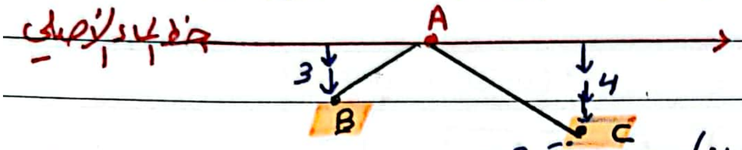
تمرين (19) ص 297 سنوضح الرسم على خطوات

① خط الماء الأصلي :



② سنختار عليه نقطة A

③ سنوصل من هذه النقطة إلى نقطتين لا تقعان على الخط هما مثلاً B ، C



④ B نقطة مشروع التطوير الأول أسفل خط الماء الأصلي (جنوب) مسافة 3

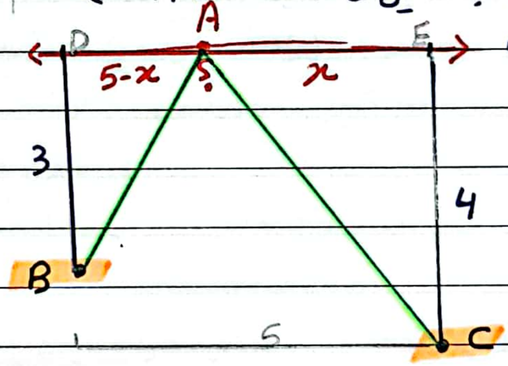
⑤ C نقطة مشروع التطوير الثاني أسفل خط الماء الأصلي (جنوب) مسافة 4

⑥ C تبعد (عن مشروع التطوير الأول C) شرقاً (يمين) مسافة 5

(المسافة الأفقية من B إلى C) = 5

⑦ الخط الجديد يصل من A إلى C ومن A إلى B

الشكل النهائي



$(0 \le x \le 5)$

الخط الجديد يتألف من جزئين بعد تحديد مكان الوصلة A نحصل وطوله هو طول القطعتين AC و AB المطلوب القيمة الصغرى له

لاحظ $DE = 5$ (المسافة الأفقية)

ولا نعلم موقع A بين D و E ($AE = x$ نفرض)

من المثلث القائم الأول ADB : $AB = \sqrt{(3)^2 + (5-x)^2}$ فيثاغورث

من المثلث القائم الثاني AEC : $AC = \sqrt{(4)^2 + (x)^2}$ فيثاغورث

$$f(x) = \sqrt{3^2 + (5-x)^2} + \sqrt{4^2 + x^2}$$

$$= \sqrt{9 + (5-x)^2} + \sqrt{16 + x^2}$$

$$f'(x) = \frac{0 + \cancel{2}(5-x)(-1)}{\cancel{2}\sqrt{9+(5-x)^2}} + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{16+x^2}} = \frac{-5+x}{\sqrt{9+(5-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-5+x}{\sqrt{9+(5-x)^2}} = \frac{-x}{\sqrt{16+x^2}}$$

نربع الطرفين أسهل

(أو نحل المعادلة بالآلة الحاسبة)

$$\frac{(x-5)^2}{9+(5-x)^2} = \frac{x^2}{16+x^2} \Rightarrow (16+x^2)(x-5)^2 = x^2\left[9+(5-x)^2\right]$$

$$16(x-5)^2 + \cancel{x^2(x-5)^2} = 9x^2 + \cancel{x^2(5-x)^2}$$

$$16(x-5)^2 = 9x^2 \xrightarrow{\text{نجذر}} 4(x-5) = \pm 3x$$

إما $4x - 20 = 3x \Rightarrow x = 20$ مرفوض $(0 \le x \le 5)$

أو $4x - 20 = -3x \Rightarrow x = \frac{20}{7} \approx 2.857$

يتبع في الصفحة التالية

عمل الطلاب أرسم والحل
تمرين 20 صعب قليلاً

تابع حل 19 ص 297 وجدنا $f(x)=\sqrt{9+(5-x)^2}+\sqrt{16+x^2}$ (هنا $0\le x\le 5$)

ووجدنا: $f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{20}{7}\approx 2.857$

سنبحث عن x التي تعطي أصغر قيمة لطول الخط (أي للدالة $f(x)$ ضمن مجالها)

$$f(0)=\sqrt{9+(5-0)^2}+\sqrt{16+0^2}=9.831$$

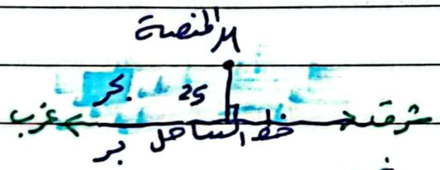
$$f(5)=\sqrt{9+(5-5)^2}+\sqrt{16+5^2}=9.403$$

$$f\left(\tfrac{20}{7}\right)=\sqrt{9+\left(5-\tfrac{20}{7}\right)^2}+\sqrt{16+\left(\tfrac{20}{7}\right)^2}\approx 8.602$$

الأصغر

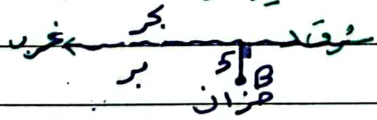
وبالتالي موقع A (وهو مسافة (A عن E)) سيكون $\frac{20}{7}$ ميلاً غرب مكان التطوير الثاني C (لاحظ E و C على خط رأسي واحد)

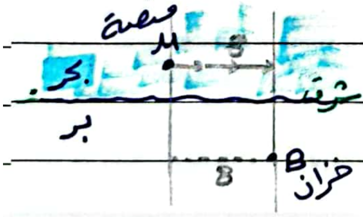
تمرين (20) ص 297 سنرسم الشكل على خطوات



منصة نفط تبعد عن (خط البحر والبر) الساحل 25 كيلومتر

الخزان يبعد 5 كيلومتر من البر

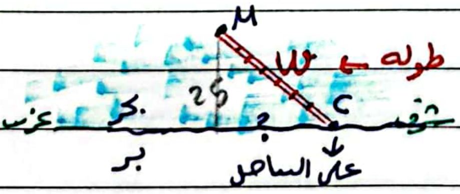




الخزان يقع على بعد 8 كيلومتر شرق المنصة ⇐ ارسم

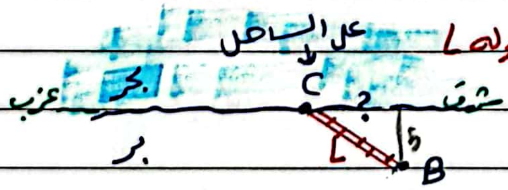
مد أنابيب من المنصة لنقطة على الساحل (مستقيم) في البحر ⇐ طوله w

والتكلفة 50 ألف لكل ~~ميل~~ km



ثم أنابيب من النقطة C على الساحل (مستقيم) طوله L في البر إلى نقطة الخزان B

والتكلفة 20 ألف لكل كيلومتر



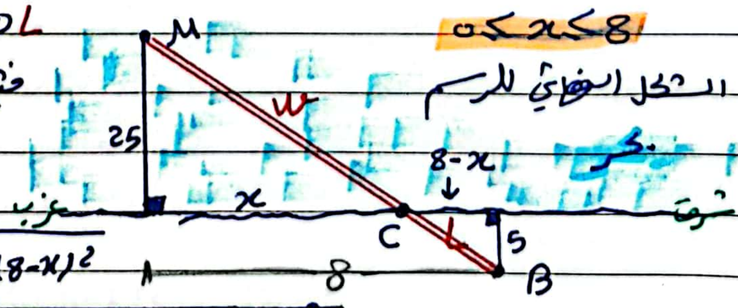
المطلوب كيف سنختار C على خط الساحل لنحقق قيمة صغرى للتكلفة

دالة التكلفة = (طول الخط في البحر) $50\times$ + (طول الخط في البر) $20\times$

$f(x)=50w+20L$

$0\le x\le 8$

الشكل النهائي للرسم



$w=\sqrt{(25)^2+x^2}$ فيثاغورث

$L=\sqrt{(5)^2+(8-x)^2}$

$$f(x)=50\sqrt{(25)^2+x^2}+20\sqrt{5^2+(8-x)^2}$$

$$=50\sqrt{625+x^2}+20\sqrt{25+64-16x+x^2}$$

$$=50\sqrt{625+x^2}+20\sqrt{x^2-16x+89}$$

يتبع في الصفحة التالية

تمرين ٢١ صعب قليلاً على الطلاب ١١ كم وجل

تابع تمرين (20) ص 297

$f(x) = 50\sqrt{625+x^2} + 20\sqrt{x^2-16x+89}$

$f'(x) = 50\times\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{625+x^2}} + \cancel{20}^{10}\times\frac{2x-16}{\cancel{2}\sqrt{x^2-16x+89}}$

$= \frac{50x}{\sqrt{625+x^2}} + \frac{20x-160}{\sqrt{x^2-16x+89}}$

نحل المعادلة بالآلة الحاسبة عندما $f'=0$

$50x$

ويمكن بتربيع الطرفين ثم نأخذ الضرب التقاطعي

$\frac{(-50x)^2}{625+x^2} = \frac{(20x-160)^2}{x^2-16x+89} \Rightarrow$

وهكذا حتى نجد الحل: $x=5.108987$

وهي ضمن مجالها: $0\le x\le 8$

$f(0)=50\sqrt{625+0^2}+20\sqrt{0^2-16(0)+89} \approx 1438.7$

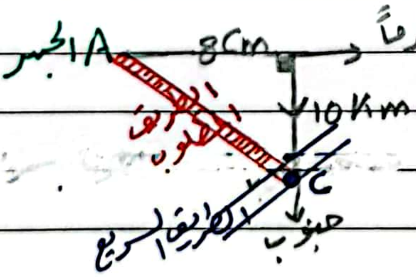
$f(8)=50\sqrt{625+8^2}+20\sqrt{8^2-16(8)+89} \approx 1412.4$

$f(5.108987)=50\sqrt{625+5.108987^2}+20\sqrt{5.108987^2-16(5.108987)+89}$

≈ 1391.3 التكلفة الأصغر

سيكون الموقع المناسب لنقطة C على الساحل مسافة $x=5.108987$ شرق المنصة M

تمرين (21) ص 297



نرسم الشكل على خطوات

عندنا جسر A وطريق سريع يبعد عنه 8Km شرقاً ثم 10 كيلومتر جنوباً

الـ 10 كيلومتر باتجاه الجنوب أول 4Km مستنقعات

سعر الطريق (الأحمر) المطلوب إنشاؤه منها

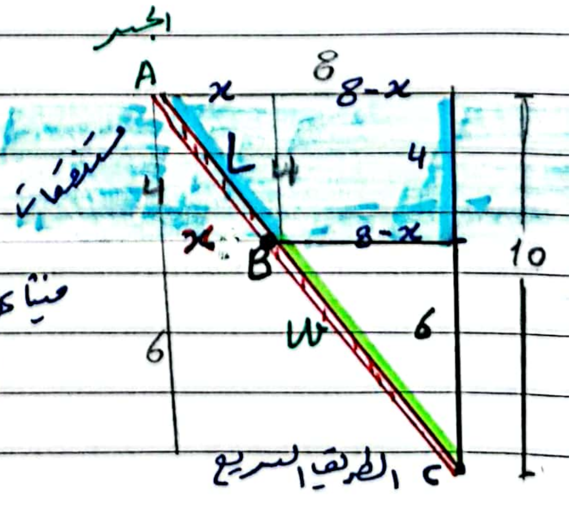
مطلوب تحديد مكان النقطة B التي سيمر منها الطريق المطلوب إنشاؤه من المستنقعات

الجزء الأول من الطريق في المستنقعات طوله L

والجزء الثاني من الطريق أراضي جافة طوله W

التكلفة: $f(x) = 5L + 2W$

المطلوب حدد مكان B ليكون $f(x)$ قيمة صغرى



فيثاغورث ← $f(x)=5\sqrt{4^2+x^2}+2\sqrt{6^2+(8-x)^2}$

$f(x)=5\sqrt{16+x^2}+2\sqrt{x^2-16x+100}$

يتبع

يتبع في الصفحة التالية

تابع تمرين (21) ص 297

$$f(x) = 5\sqrt{16+x^2} + 2\sqrt{x^2-16x+100}$$

$$f'(x) = 5 \times \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{16+x^2}} + \cancel{2} \times \frac{2x-16}{\cancel{2}\sqrt{x^2-16x+100}}$$

$$= \frac{5x}{\sqrt{16+x^2}} + \frac{2x-16}{\sqrt{x^2-16x+100}} = 0 \quad \text{عندما } f'(x)=0$$

(نحل المعادلة بالآلة الحاسبة)

أو نربع الطرفين ثم بالضرب التقاطعي

$$\frac{(2x-16)^2}{(\sqrt{x^2-16x+100})^2} = \frac{(-5x)^2}{(\sqrt{16+x^2})^2}$$

وباستكمال هذه الخطوات نحصل: $x = 1.2529$ $(0 \leq x \leq 8)$

وبالتعويض في $f(x)$ (أول سطر) نحصل بالتقريب:

$f(0) = 40$

$f(8) = 56.7214$

$f(1.2529) = 39.0162$: القيمة الأصغر

سيكون موقع B باتجاه اليمين مسافة 1.2529 ليعطي أصغر تكلفة (الشرق)