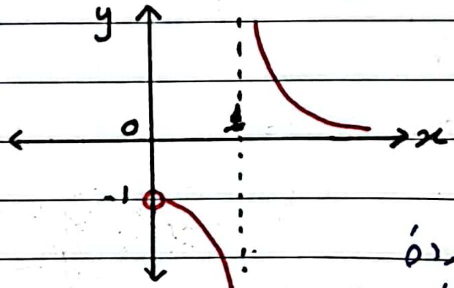
حل تمارين الدرس (3-4) القيم العظمى والصغرى ص257

تمرين ① ص257 استخدام الرسم البياني لتحديد مكان القيم القصوى المطلقة (إن وجدت) للدالة $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ في الفترات

a $(0,1)\cup(1,\infty)$

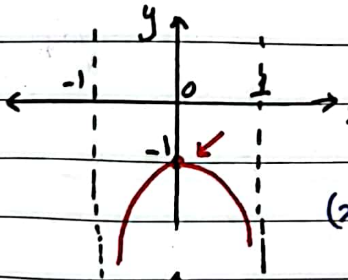


وكأننا سنقتطع جزء من الرسم ضمن هذه الفترة

لاحظ عند $(0,-1)$ توجد قيمة قصوى مطلقة لكن 0 ليست ضمن الفترة المحددة

لا توجد قيم قصوى ضمن الجزء المحدد $(0,1)\cup(1,\infty)$

b $(-1,1)$



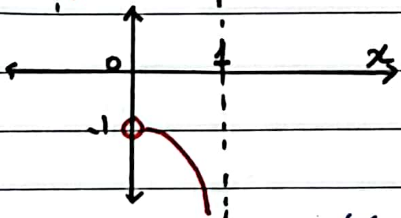
سنقتطع جزء الرسم ضمن هذه الفترة

عند $x=0$ نقطة حرجة وحيدة

وتوجد قيمة قصوى مطلقة هي -1 (عند $x=0$)

عظمى

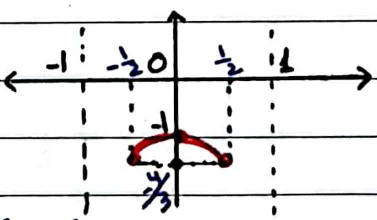
c $(0,1)$ سنقتطع الجزء المناسب من الرسم البياني لهذه الفترة



لا توجد هنا قيم قصوى مطلقة

(لاحظ $x=0$ خارج الفترة المحددة)

d $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$



لاحظ الجزء المقتطع من الرسم البياني

ولاحظ الفترة مغلقة من الطرفين

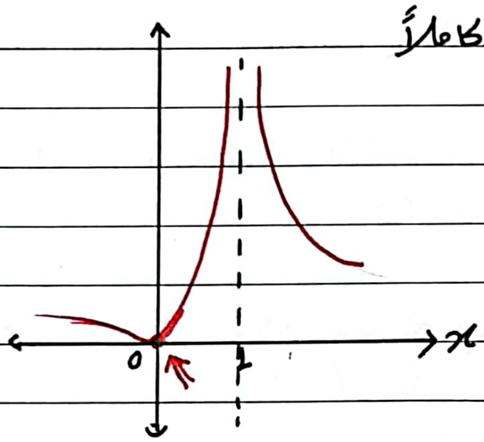
توجد قيمة قصوى مطلقة (عظمى) هي -1 عند $x=0$ (أعلى قيمة -1)

وتوجد قيمة قصوى مطلقة (صغرى) هي $-\frac{4}{3}$ عند $x=\frac{1}{2}$ وعند $x=-\frac{1}{2}$

أدنى قيمة

$$f(\tfrac{1}{2})=f(-\tfrac{1}{2})=\frac{1}{(\mp\frac{1}{2})^2-1}=\frac{-4}{3}$$

تمرين ② ص 257 $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}$ مطلوب تحديد مكان القيم القصوى المطلقة في الفترات



a) $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ وهذا يشمل الرسم كاملاً

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)^2-x^2[2(x-1)\times 1]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2-2x+1)-2x^2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{\cancel{2x^3}-4x^2+2x-\cancel{2x^3}+2x^2}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{-2x^2+2x}{(x-1)^4}=\frac{-2x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)^4}\,(x-1)^3}$$

$$=\frac{-2x}{(x-1)^3}$$

وعندما $f'(x)=0$ يكون البسط $-2x=0 \Leftarrow x=0$

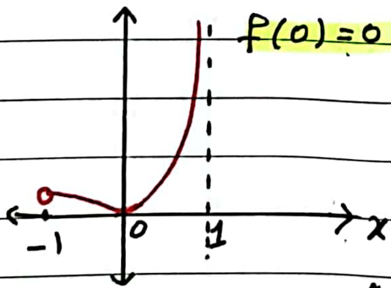
توجد قيمة $x=0$ نقطة حرجة و للدالة قيمة صغرى مطلقة عند $x=0$

وهي: $f(0)=\frac{0}{(0-1)^2}=0$

ولا توجد قيمة عظمى مطلقة للدالة

b) $(-1,1)$ لاحظ الفترة مفتوحة

ووجدنا: $f'(x)=\frac{-2x}{(x-1)^3}$ وعندما $f'(x)=0$ وجدنا $x=0$

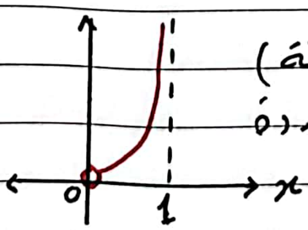


وتوجد هنا قيمة صغرى مطلقة عند $x=0$ وهي $f(0)=0$

ولا توجد قيمة عظمى مطلقة

و لاحظ الجزء المحدد بالرسم في هذه الفترة

c) $(0,1)$ لاحظ الفترة مفتوحة

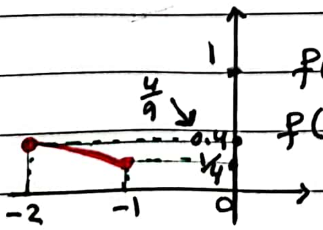


فقد يكون الحد الأدنى عند $x=0$ (محذوفة)

لا توجد قيم قصوى في الفترة المحددة

لاحظ الجزء المحدد بالرسم

d) $[-2,-1]$



I لو لاحظنا الجزء المحدد بالرسم (بعد التكبير ضمن هذه الفترة)

لوجدنا قيمة عظمى عند $x=-2$ وهي $f(-2)=\frac{(-2)^2}{(-2-1)^2}=\frac{4}{9}$

ووجدنا قيمة صغرى عند $x=-1$ وهي: $f(-1)=\frac{1}{4}$

II بأسلوب آخر: لاحظ: $f'(x)=\frac{-2x}{(x-1)^3}$

وقبل الاختصار كان: $f'(x)\ \frac{-2x(x-1)}{(x-1)^4}<0$ في الفترة $[-2,-1]$

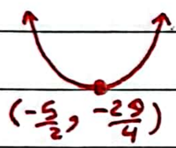
أي أن الدالة متناقصة في هذه الفترة وبالتالي في بداية الفترة -2 تكون القيمة الأكبر و في نهاية الفترة -1 تكون القيمة الأصغر (الرسم ←) نازل

تمرين ③ ص 258 $f(x)=(x^2+5x-1)$ المطلوب: إيجاد كل الأعداد الحرجة جبرياً
واستخدام نوع التمثيل البياني لتحديد هل العدد الحرج
يمثل قيمة محلية عظمى / صغرى أو لا يمثل

a $f(x)=x^2+5x-1$

- نشتق: $f'(x)=2x+5$ معرفة دائماً على مجال f (R)
- نبحث متى يكون $f'(x)=0 \Rightarrow 2x+5=0$

$\rightarrow x=\frac{-5}{2}$ عدد حرج

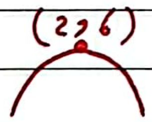


- ونعلم التمثيل البياني لهذه الدالة التربيعية قطع مكافئ
مفتوح للأعلى $(a=1>0)$ فيكون لدينا قيمة صغرى محلية (ومطلقة)
عند $x=\frac{-5}{2}$ وهي: $f(-\frac{5}{2})=(\frac{-5}{2})^2+5(\frac{-5}{2})-1=$
$=\frac{-29}{4}=-7.25$

b $f(x)=-x^2+4x+2$

- نشتق $f'(x)=-2x+4$ معرفة دائماً على مجال f وهو R
- نبحث متى يكون: $f'(x)=0 \Rightarrow -2x+4=0 \Rightarrow x=2$

$x=2$ عدد حرج



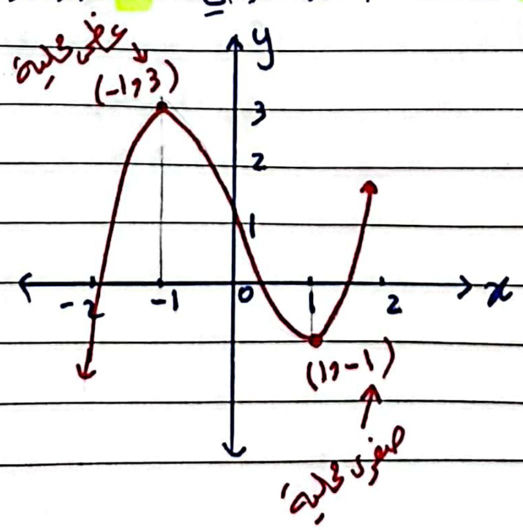
- ونعلم أن التمثيل البياني للدالة f التربيعية هو قطع مكافئ
مفتوح للأسفل $(a=-1<0)$ فيكون لدينا قيمة عظمى محلية
عند $x=2$ وهي: $f(2)=-(2)^2+4(2)+2=6$

تمرين ④ **a** $f(x)=x^3-3x+1$

$f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f'=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \rightarrow x=1,\ x=-1$ } أعداد حرجة

توجد قيم قصوى محلية عند كل من $x=1$ و $x=-1$

ولو لاحظنا الرسم البياني للدالة التكعيبية هذه
لوجدنا قيمة عظمى محلية عند $x=-1$ وهي: $f(-1)=(-1)^3-3(-1)+1=3$
وقيمة صغرى محلية عند $x=1$ وهي $f(1)=(1)^3-3(1)+1=-1$



(لا توجد قيم قصوى مطلقة)

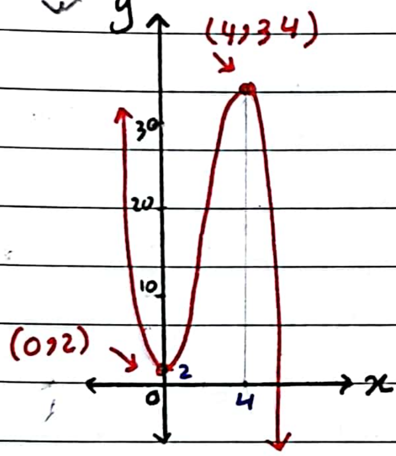
b في الصفحة التالية

تمرين ④ ص 258 $\boxed{b}$ $f(x)=-x^3+6x^2+2$

$f'(x)=-3x^2-12x$

يوجد خطأ في دليل المعلم هنا

$f'(x)=0 \Rightarrow -3x^2+12x=0 \longrightarrow x=0$ ، $x=+4$ قيم حرجة



توجد قيم قصوى محلية عند 0 و 4

قيمة صغرى محلية $f(0)=-(0)^3+6(0)+2=2$

قيمة عظمى محلية $f(-4)=-(+4)^3+6(+4)^2+2=34$

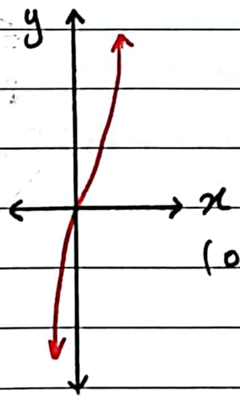
وبملاحظة الرسم البياني للدالة f التكعيبية وخواصها

نجد تحقق ذلك

تمرين ⑤ ص 258

$\boxed{a}$ $f(x)=x^3-3x^2+6x$

(ممكن الحل بالآلة) $f'(x)=3x^2-6x+6=0$



هذه المعادلة ليس لها حلول حقيقية

وبالتالي لا توجد نقط حرجة (ولا صغرى ولا عظمى للقيم القصوى)

(لاحظ الرسم البياني يمتد متزايد من اليسار إلى اليمين)

(والطرف الأيمن يرتفع بلا نهاية و الطرف الأيسر يتناقص بلا نهاية)

$\boxed{b}$ $f(x)=-x^3+3x^2-3x$

$f'(x)=-3x^2+6x-3$

$f'=0 \Rightarrow -3x^2+6x-3=0$

هذه المعادلة .. لها حلول حقيقية (حل واحد فقط وهو $x=1$) رقم حرج

لا توجد قيم قصوى لا صغرى ولا عظمى

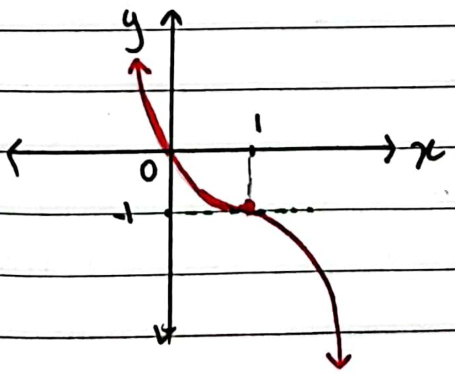
لأن $f(x)$ دالة تكعيبية ويعتبر $x=1$ حل مضاعف للمعادلة $f'=0$

$-3x^2+6x-3=0 \Rightarrow -3(x^2-2x+1)=0$

$-3(x-1)^2=0$ وعند $x=1$ يكون حل مضاعف (جذر مكرر)

يوجد مماس أفقي لكن لا يشمل قيم قصوى محلية

(لاحظ في الرسم تحول المماس إلى قاطع للرسم)



تمرين (6) ص 258

a) $f(x)=x^4-2x^2+1$

$f'(x)=4x^3-4x$

$4x^3-4x=0 \Rightarrow x=1,\ x=-1,\ x=0$ نقاط حرجة

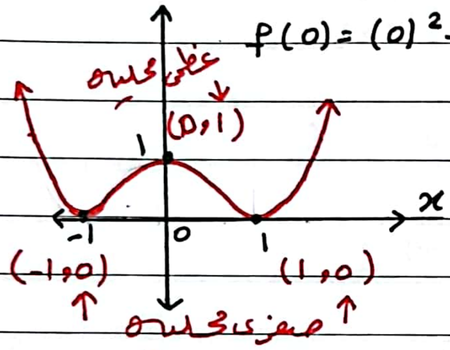
$f(1)=(1)^4-2(1)^2+1=0$

$f(-1)=(-1)^4-2(-1)^2+1=0$

توجد قيمة محلية صغرى هي 0 عند كل من 1 و -1

$f(0)=(0)^2-2(0)+1=1$: توجد قيمة عظمى محلية 1 عند (0)

لاحظ الرسم البياني المجاور ←



b) $f(x)=x^4-3x^3+2$

$f'(x)=4x^3-9x^2$

$4x^3-9x=0 \Rightarrow x^2(4x-9)=0$

إما $x^2=0 \rightarrow x=0$ (جذر مضاعف) لا يعطي قيمة قصوى محلية

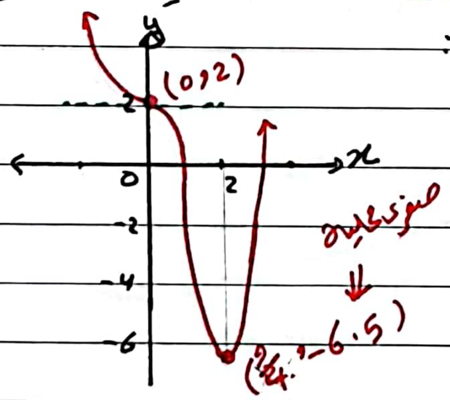
أو $4x-9=0 \rightarrow x=\frac{9}{4}$ جذر يعطي قيمة قصوى محلية صغرى

عند $x=0$ نقطة حرجة (ولا توجد قيم قصوى) المماس الأفقي تحول لقاطع (الرسم)

عند $x=\frac{9}{4}$ توجد قيمة صغرى محلية هي:

$f(\frac{9}{4})=4(\frac{9}{4})^3-9(\frac{9}{4})^2\approx -6.5$

لاحظ الرسم البياني



تمرين (7) $f(x)=x^4-3x^3+2$

فكرة نفس التمرين السابق b

تمرين (8) $f(x)=x^4+6x^2-2$

$f'(x)=4x^3+12x=0 \rightarrow x=0$ (حرجة)

(الحلول الأخرى ليست حقيقية)

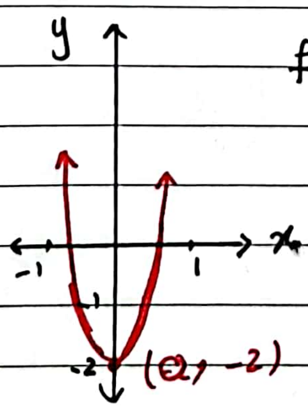
وحسب معلوماتنا السابقة عن شكل البياني لهذه الدالة من الدرجة الرابعة نجد طرفيها يتجهان للأعلى بلا تناه

لا توجد قيم عظمى محلية

توجد قيمة صغرى محلية عند $x=0$ وهي:

$f(0)=(0)^4+6(0)-2=-2$

لاحظ الرسم البياني



تمرين ⑨ ص 258 $f(x)=x^{\frac{3}{4}}-4x^{\frac{1}{4}}$

نلاحظ: $x^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x}$ وبالتالي $x\geq 0$ (المجال)

نشتق:

$$f'(x)=\frac{3}{4}(x)^{\frac{3}{4}-1}-4\left(\frac{1}{4}\right)x^{\frac{1}{4}-1}$$

$$=\frac{3}{4}(x)^{-\frac{1}{4}}-(x)^{-\frac{3}{4}}$$

يمكن التحويل لأس موجب وكتابة: $f'(x)=\dfrac{3}{4(x)^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{1}{(x)^{\frac{3}{4}}}$

وبالتالي $x\neq 0$

وعندما $x=0$ عدد حرج

وعندما $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{3}{4}}=0$ (يمكن حل هذه المعادلة بالآلة)

ويمكن حل المعادلة يدوياً: بطرق متنوعة منها التخلص من الأس السالب

$$\left[\frac{3}{4}(x)^{-\frac{1}{4}}\right]^{-4}=\left[(x)^{-\frac{3}{4}}\right]^{-4}$$

(بضرب الأسين المتراكبين)

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=\frac{x^{3}}{x}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}=x^{2}\Rightarrow\frac{256}{81}=x^{2}$$

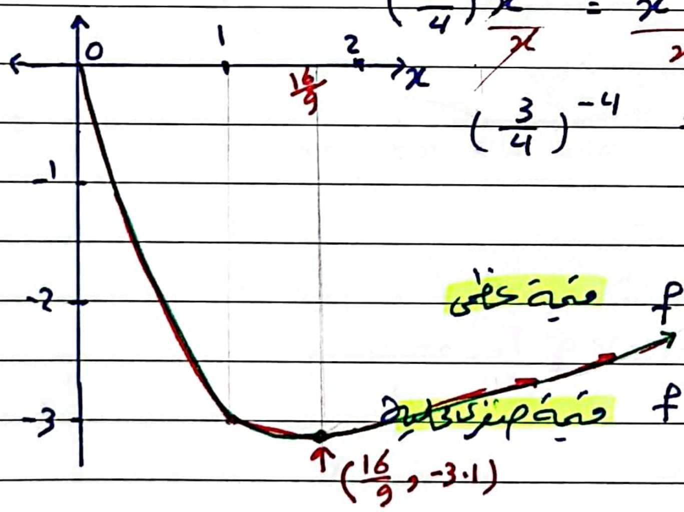
$x=\frac{16}{9}$ عدد حرج

$x=-\frac{16}{9}$ مرفوض

وبملاحظة الرسم البياني

و: $f(0)=(0)^{\frac{3}{4}}-4(0)^{\frac{1}{4}}=0$ قيمة عظمى

$f\left(\frac{16}{9}\right)=\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{3}{4}}-4\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{4}}\approx -3.1$ قيمة صغرى مطلقة



تمرين ⑩ $f(x)=\left(x^{\frac{2}{5}}-3x^{\frac{1}{5}}\right)^{2}$

؟ x يمكن أن تكون موجبة أو سالبة لأن المقام في الأس هو عدد فردي المجال R

نشتق:

$$f'(x)=2\left(x^{\frac{2}{5}}-3x^{\frac{1}{5}}\right)\times\left[\frac{2}{5}(x)^{-\frac{3}{5}}-3\left(\frac{1}{5}\right)x^{-\frac{4}{5}}\right]$$

$$=2\left(x^{\frac{2}{5}}-3x^{\frac{1}{5}}\right)\left[\frac{2}{5(x)^{\frac{3}{5}}}-\frac{3}{5(x)^{\frac{4}{5}}}\right]$$

ونلاحظ $x\neq 0$ وبالتالي $x=0$ قيمة حرجة

وعندما $f'(x)=0$ فإن أحد القوسين في f' يساوي الصفر

إما: $x^{\frac{2}{5}}-3x^{\frac{1}{5}}=0$ (يمكن الحل بالآلة للمعادلة)

أو يدوياً: $(x)^{\frac{2}{5}}=3(x)^{\frac{1}{5}}$ نرفع الطرفين للأس 5

$\left[x^{\frac{2}{5}}\right]^{5}=x^{\frac{2}{5}\times 5}=x^{2}$

$\left[x^{\frac{1}{5}}\right]^{5}=x^{\frac{1}{5}\times 1}=x^{1}$

$$\frac{x^{2}}{x}=3^{5}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\Rightarrow x=3^{5}$$ قيمة حرجة

يتبع ←

تابع حل تمرين (10) ص 253

أو: العقوص الثاني = 0 أي:

(ممكن الحل بالآلة)

$$\frac{2}{5}(x)^{\frac{-3}{5}} - \frac{3}{5}(x)^{\frac{-4}{5}} = 0$$

نحل المعادلة يدوياً (نضع أس 5 للطرفين)

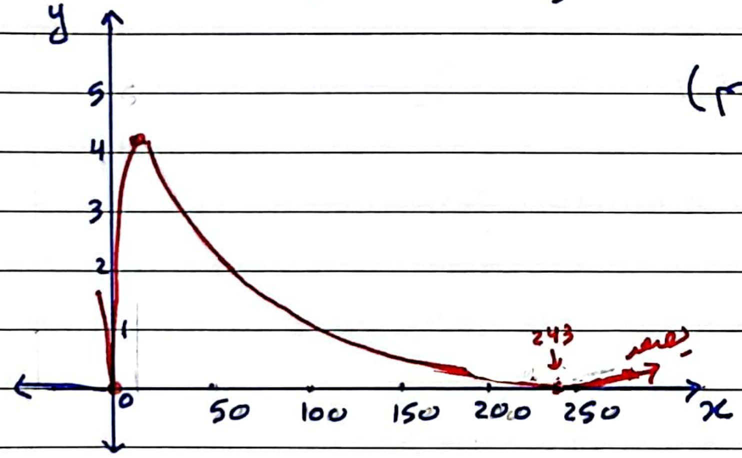
$$\left[\frac{2}{5}(x)^{-\frac{3}{5}}\right]^5 = \left[\frac{3}{5}(x)^{\frac{-4}{5}}\right]^5$$

نقسم على x^{-4} (أو نضرب بـ x^4)

$$\left(\frac{2}{5}\right)^5 \frac{x^{-3}}{x^{-4}} = \left(\frac{3}{5}\right)^5 \frac{\cancel{x^{-4}}}{\cancel{x^{-4}}}$$

قيمة حرجة

$$\left(\frac{2}{5}\right)^5 x = \left(\frac{3}{5}\right)^5 \rightarrow x = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^5}{\left(\frac{2}{5}\right)^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$



ملاحظة: الرسم البياني (باستخدام برامج الرسم)

وقيم $f(x)$ عند النقط الحرجة:

صغرى محلية $f(0) = 0$

صغرى محلية $f(3^5) = f(243) \approx 0$

عظمى محلية $f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^5\right) \approx 4.0625$

$f(7.6)$

تمرين (11) ص 258 $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ ، $[0, 2\pi]$

(مشتقة ضرب) $f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x(-\sin x)$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

وعندما $f' = 0 \Leftarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$\cos x^2 = \sin^2 x \rightarrow \cos x = \sin x$

$\rightarrow \cos x = -\sin x$

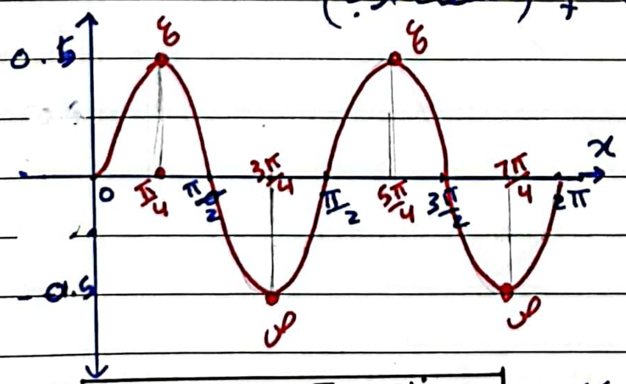
وضمن دورة كاملة $[0, 2\pi]$ يتساوى

$\sin x$ مع $\cos x$ (بالقيمة المطلقة)

في منتصف كل ربع والحلول هي (ضمن دورة محددة)

$\frac{\pi}{4}$ ، $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ، $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ ، $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

قيم حرجة $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$



ملاحظة: يمكن كتابة الدالة بالشكل:

$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ ضمن دورتين $[0, 4\pi]$

$f'(x) = \cancel{\frac{1}{2}} \times \cancel{2} \cos 2x$

$f' = 0 \rightarrow \cos 2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$2x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$

$2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ قيمة محلية عظمى

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = +\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ قيمة محلية صغرى

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

تمرين 12 ص258 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ (المجدفترة)

$f'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$

عندما: $f'(x)=0$: $\sqrt{3}\cos x-\sin x=0$

$\frac{\sqrt{3}\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}=\frac{\sin x}{\cos x}$ $(\cos x\neq 0)$

$\sqrt{3}=\tan x$

حلول هذه المعادلة: $x=\frac{\pi}{3}+n\pi$ (n عدد صحيح) ← وهي قيم حرجة غير محدودة عددها

لاحظ ضمن دورة أولى: $[0,2\pi]$

الشكل البياني للدالة يعطي قيمة عظمى عند:

$n=0 \rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ $\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\right)$ زوجي

ويعطي قيمة صغرى عند:

$n=1 \rightarrow x=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$: $\left(f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-2\right)$ فردي

وقيمة عظمى عند:

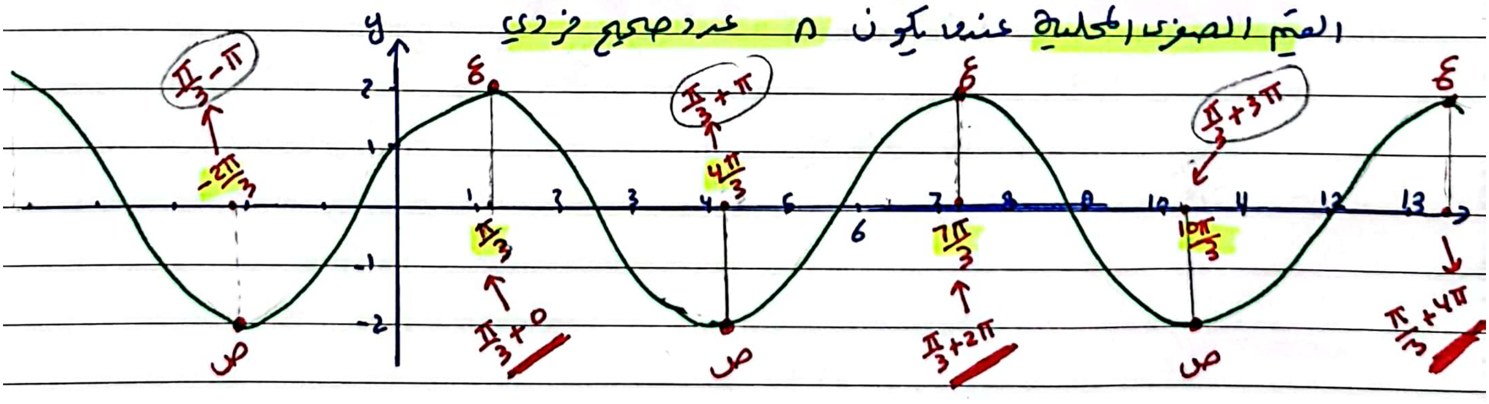
$n=2 \rightarrow x=\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$: $\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\right)$ زوجي

وقيمة صغرى عند:

$n=3 \rightarrow x=\frac{\pi}{3}+3\pi=\frac{10\pi}{3}$: $\left(f\left(\frac{10\pi}{3}\right)=-2\right)$ فردي

القيم العظمى المحلية عندما يكون n عدد صحيح زوجي

القيم الصغرى المحلية عندما يكون n عدد صحيح فردي



تمرين 13 $f(x)=\frac{x^2-2}{x+2}$ معرفة بشرط $x\neq -2$

$f'(x)=\frac{2x(x+2)-(x^2-2)(1)}{(x+2)^2}$ (مشتقة قسمة)

$=\frac{2x^2+4x-x^2+2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+2}{(x+2)^2}$

وعندما $f'=0$ سيكون البسط: $x^2+4x+2=0$ (نحل بالآلة أو بالقانون)

$\Rightarrow$ $x=-2+\sqrt{2}\approx -0.6$ قيم حرجة

$x=-2-\sqrt{2}\approx -3.4$

تابع حل تمرين (13) ص 258

القيم الحرجة: $-2-\sqrt{2}$ ، $-2+\sqrt{2}$ (-3.4 ، -0.6)

صغرى محلية $f(-2+\sqrt{2}) = -4+2\sqrt{2} \approx -1.17$

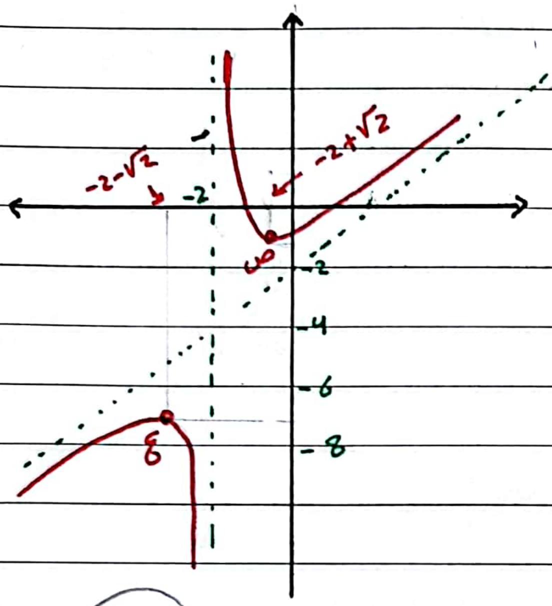
عظمى محلية $f(-2-\sqrt{2}) = -4-2\sqrt{2} \approx -6.83$

لاحظ التمثيل البياني

(حيث $x=-2$ خط مقارب رأسي)

ويوجد خط مقارب مائل ($y=x-2$)

(ناتج قسمة البسط على المقام)



تمرين (14) ص 258

$f(x)=\frac{x^2-x+4}{x-1}$ $(x\neq 1)$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+4)(1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x-\cancel{x}+1-x^2+\cancel{x}-4}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

عندما $f'=0$ يكون: $x^2-2x-3=0$

قيمة عظمى محلية إما $x=-1 \to f(-1)=-3$

قيمة صغرى محلية أو $x=3 \to f(3)=5$

لم؟

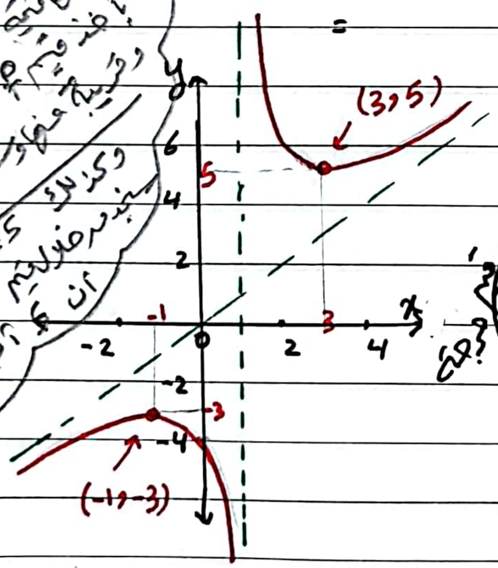
لاحظ التمثيل البياني

$x\neq 1$ ويكون $x=1$ مقارب رأسي

ويوجد مقارب مائل $y=x$

علل تحديد $f(-1)=-3$ إحداثية عظمى محلية؟ ج: قيم f عند مجاورة -1 وقريبة منها تبعد عن -3 أكبرها

وكذلك $f(3)=5$ ستبعد صغرى لأن قيم f قريبة من 3 أن f أصغرها



تمرين (15) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ (أمكن كتابته بالشكل: $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$)

$f'(x)=\frac{1}{2}(e^x+(-1)e^{-x})$

$=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

عندما $f'=0 \Leftarrow e^x-e^{-x}=0$

$e^x=e^{-x} \to e^x=\frac{1}{e^x}$

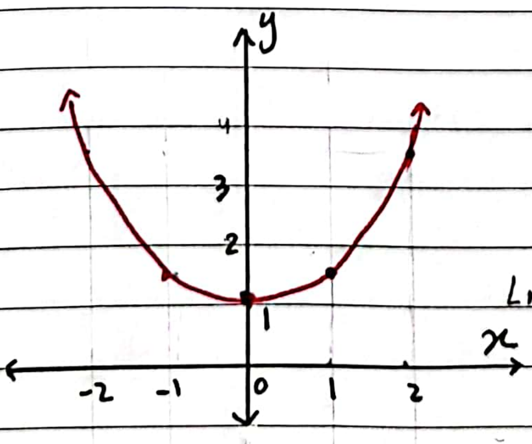
بإجراء الضرب التقاطعي $e^x \cdot e^x=1$

$e^{2x}=1 \to$

(بأخذ ln للطرفين) $\ln e^{2x}=\ln 1 \Rightarrow 2x=0$

حرجة $x=0$

قيمة صغرى محلية $f(0)=\frac{1}{2}(e^0-e^{-0})=1$



لاحظ الرسم البياني لـ $f(x)$ (ممكن للرسم اختيار جدول للقيم)

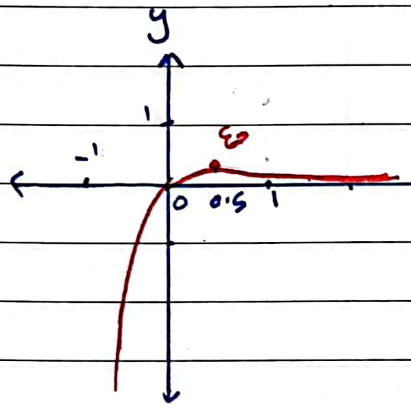
x	-2	-1	0	1
y	3.8	1.4	1	1.4

تمرين 16 ص 258 $f(x) = x \cdot e^{-2x}$ (ممكن كتابته بالشكل: $\frac{x}{e^{2x}}$)

(مشتقة ضرب دالتين) $f'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x(-2e^{-2x})$

$= e^{-2x} - 2x e^{-2x}$

$= e^{-2x}(1-2x)$



وعندما $f' = 0$: إما $e^{-2x} = 0$ غير ممكن

أو $1 - 2x = 0$

حرجة $x = \frac{1}{2}$

قيمة عظمى محلية $f(\frac{1}{2}) = 0.18$

لاحظ الشكل البياني للدالة (باستخدام برامج رسم)

تمرين 17 $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} + 4x^{-\frac{2}{3}}$ (معرف حيث $x \neq 0$: $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(x)^{\frac{2}{3}}}$)

$f'(x) = \frac{4}{3}(x)^{\frac{4}{3}-1} + 4(\frac{1}{3})(x)^{\frac{1}{3}-1} + 4(\frac{-2}{3})(x)^{-\frac{2}{3}-1}$

$= \frac{4}{3}(x)^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}(x)^{-\frac{2}{3}} - \frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}}$ *

بإخراج عامل مشترك $\frac{4}{3}$ و $(x)^{-\frac{5}{3}}$

$f' = \frac{4}{3}(x)^{-\frac{5}{3}}[x^2 + x - 2]$

$= \frac{4}{3} \times \frac{1}{(x)^{\frac{5}{3}}}(x-1)(x+2) = 0$

عند إخراج العامل المشترك نقسم كل حد عليه

$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}}} = (x)^{\frac{1}{3}-(-\frac{5}{3})} = x^2$

$\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{5}{3}}} = (x)^{-\frac{2}{3}-(-\frac{5}{3})} = x$

$\frac{8/3}{4/3} = 2$

لاحظ عندما $f' = 0$ فقط عندما:

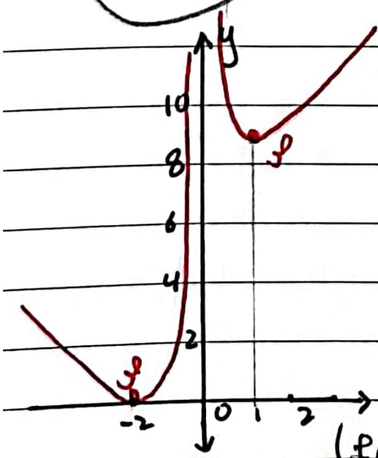
$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

أو $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

أعداد حرجة

$f(1) = (1)^{\frac{4}{3}} + 4(1)^{\frac{1}{3}} + 4(1)^{-\frac{2}{3}} = 9$ قيمة صغرى

$f(-2) = (-2)^{\frac{4}{3}} + 4(-2)^{\frac{1}{3}} + 4(-2)^{-\frac{2}{3}} = 0$ محلية



ملاحظات: ① الرسم يوضح أنها القيم صغرى محلية

② لو لم يتمكن الطالب من الرسم يلاحظ قيم

لـ $f(x)$ عند x قريبة من (مثلاً 0.5 ومثلاً 1.5)

سيجد $f(1)$ أصغر من من $f(0.5)$ و $f(1.5)$

وكذلك لقيم قريبة من -2 (مثلاً $f(-2.1)$ ومثلاً $f(-1.9)$)

سيجد أنها أصغر من $f(-2)$ وبالتالي $f(-2)$ قيمة صغرى محلية

③ حل المعادلة: * عند $f' = 0$ ممكن بالآلة أو يدوياً (نضرب بها بـ $x^{\frac{5}{3}} \neq 0$)

$\frac{4}{3}(x)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}(x)^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}} - \frac{8}{3}(x)^{-\frac{5}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}} = 0$

ومن خواص جمع الأسس : $\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x^1 - \frac{8}{3}x^0 = 0 \Rightarrow$ بالآلة $x = 1, x = -2$

تمرين (18) ص 258 $f(x)=x^{\frac{7}{3}}-28x^{\frac{1}{3}}$ (المجال R)

$f'(x)=\frac{7}{3}(x)^{\frac{7}{3}-1}-28(\frac{1}{3})x^{\frac{1}{3}-1}$

$=\frac{7}{3}(x)^{\frac{4}{3}}-\frac{28}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

لوجود $x^{-\frac{2}{3}}$ نشترط $x\neq0$ ← $\frac{1}{(x)^{\frac{2}{3}}}$

$x=0$ حرجة (تكون f' غير معرفة عندها)

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{7}{3}(x)^{\frac{4}{3}}-\frac{28}{3}(x)^{-\frac{2}{3}}=0$

ممكن حل هذه المعادلة بالآلة وممكن حلها يدوياً (نضرب طرفي المعادلة ب $3\cdot x^{\frac{2}{3}}$)

$\frac{7}{\cancel{3}}(x)^{\frac{4}{3}}\times\cancel{3}\cdot x^{\frac{2}{3}}-\frac{28}{\cancel{3}}(x)^{-\frac{2}{3}}\times\cancel{3}x^{\frac{2}{3}}=0$

$7(x)^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}-28(x)^{-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=0$

$7x^2-28\underbrace{x^0}_{1}=0$

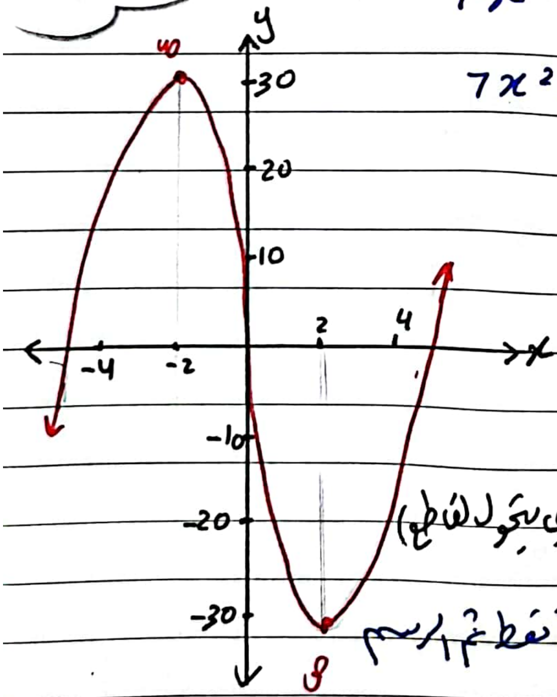
يمكن الحل بإخراج عامل مشترك $0\neq3x^{-\frac{2}{3}}$ وقسمة كل حد عليه

$7x^2=28 \Rightarrow x^2=4$

$x=2$

$x=-2$

قيم حرجة



$f(2)=(2)^{\frac{7}{3}}-28(2)^{\frac{1}{3}}\approx-30.2$ صغرى محلية

$f(-2)=(-2)^{\frac{7}{3}}-28(-2)^{\frac{1}{3}}\approx30.2$ عظمى محلية

$f(0)=0$ يكون $f'(0)$ غير معرف

لا تمثل عظمى ولا صغرى (مماس رأسي يتحول للأعلى)

لاحظ الرسم البياني

(باستخدام برامج الرسم أو بأخذ جدول لعدة نقاط ثم الرسم)

تمرين (19) $f(x)=2x\sqrt{x+1}$

معرفة عندما $x+1\geq0$ أي: $x\geq-1$

في $[-1,\infty)$

مشتقة ضرب $f'(x)=2\cdot\sqrt{x+1}+\cancel{2}x\times\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x+1}}$

$=2\sqrt{x+1}+\frac{x}{\sqrt{x+1}}$

لو: وحدنا المقامات:

$f'=\frac{(2\sqrt{x+1})\times(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}+\frac{x}{\sqrt{x+1}}$

$=\frac{2(x+1)+x}{\sqrt{x+1}}=\frac{2x+2+x}{\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$

تابع تمرين (19) ص 258 $f(x)=2x\sqrt{x+1}$

وجدنا: $f'(x)=\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}$ معرفة بشرط $x>-1$

عندما $f'=0$: $3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-2}{3}\approx -0.7$

وهي (نقطة حرجة)

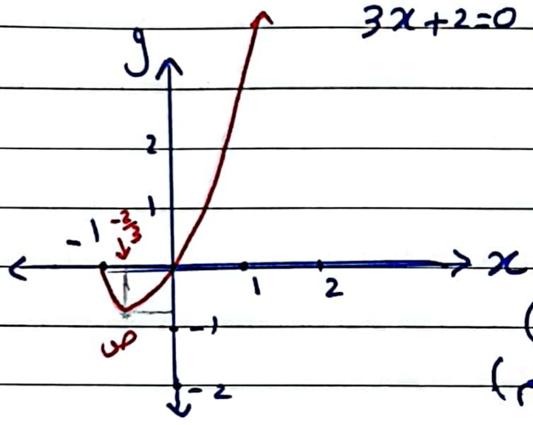
$$f\left(\frac{-2}{3}\right)=2\left(\frac{-2}{3}\right)\sqrt{\frac{-2}{3}+1}=\frac{-4\sqrt{3}}{9}\approx -0.77$$

قيمة صغرى محلية

(وهي بنفس الوقت قيمة صغرى مطلقة)

لاحظ الرسم البياني (باستخدام برامج الرسم)

أو باختيار عدد من النقاط من المجال ثم الرسم)



تمرين (20) ص 258 $f(x)=x/\sqrt{x^2+1}$ معرفة على R حيث $x^2+1>0$ دائماً

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ (قسمة)

$$f'(x)=\frac{1\left(\sqrt{x^2+1}\right)-x\times\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

نضرب البسط والمقام ب $\sqrt{x^2+1}$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{x^2}{\cancel{\sqrt{x^2+1}}}\times\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}\right)}}{(x^2+1)\times\left(\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^1(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

لاحظ هنا أن البسط لا يساوي الصفر أبداً وبالتالي $f'(x)\neq 0$

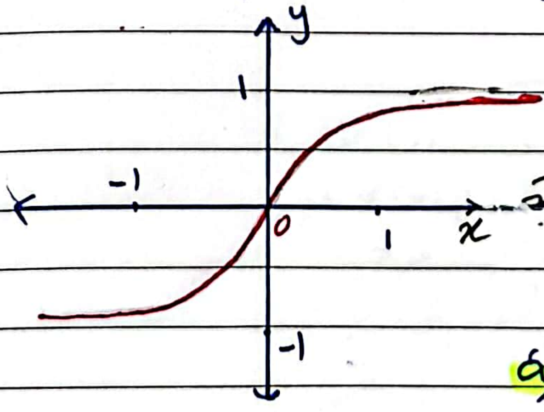
لا توجد نقاط حرجة

والرسم البياني يؤكد ذلك

عند $x=0$ قاطع

وعند $x=1$ و $x=-1$ خطوط تقارب أفقية

ممكن الرسم باستخدام برامج الرسم



لا توجد قيم صغرى محلية ولا عظمى محلية

تمرين (21) ص 258 $f(x)=|x^2-1|$

(مجالها R)

تذكر تعريف المطلق:

$|x| = \begin{cases} x & ; x\ge 0 \\ -x & ; x<0 \end{cases}$

تذكر:

$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & ; x^2-1\ge 0 \\ -(x^2-1) & ; x^2-1<0 \end{cases}$

وعند دراسة إشارة (x^2-1) نجد:

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\mp 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
إشارة x^2-1	$+\,+$	0	$-\,-$	0	$+\,+\,+$
$\lvert x^2-1\rvert =$	(x^2-1)	0	$-(x^2-1)$	0	(x^2-1)
$(\lvert x^2-1\rvert)'$	$2x$		$-2x$		$2x$

$f(x) = \begin{cases} (x^2-1) & : x\le -1 \text{ أو } x\ge 1 \\ -(x^2-1) & : -1<x<+1 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x<-1 \text{ أو } x>1 \\ -2x & : -1<x<+1 \end{cases}$

• نلاحظ الجزء الأول $(x\le -1$ أو $x\ge 1)$

عندما المشتقة: $f'(x)=2x=0$

$\Rightarrow x=0$ (خارج الفترة)

• ونلاحظ عندما $-1<x<+1$

المشتقة: $f'(x)=-2x=0$

$\Rightarrow x=0$ (ضمن الفترة)

وبالتالي: $x=0$ قيمة حرجة

أما عند الأطراف $x=\mp 1$ المشتقة غير معرفة

لأن: $x\to -1^- : x<-1 \Rightarrow f'\to 2(-1)=-2$

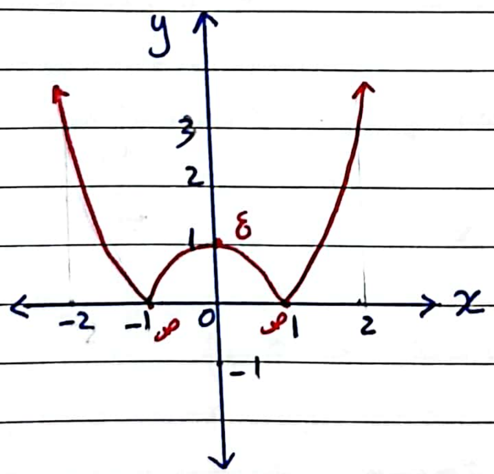
$x\to -1^+ : x>-1 \Rightarrow f'\to -2(-1)=2$

وكذلك:

$x\to 1^- : x<1 \Rightarrow f'\to -2(1)=-2$

$x\to 1^+ : x>1 \to f'\to 2(1)=2$

وبالتالي: $x=\mp 1$ نقط حرجة



وبملاحظة الرسم البياني للدالة:

نجد: $f(0)=|0^2-1|=1$ قيمة عظمى محلية

$f(1)=|(1)^2-1|=0$

$f(-1)=|(-1)^2-1|=0$

قيمة صغرى محلية (ومطلقة أيضاً)

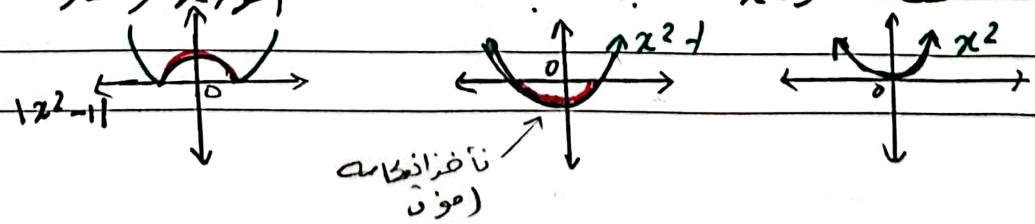
ملاحظة للرسم: يمكن باستخدام برامج الرسم

ويمكن بأخذ بعض القيم وتحديد نقط من المجال ثم الرسم

ويمكن تذكر بيان: x^2 ثم بيان x^2-1 (إزاحة للأسفل 1)

ولأخذ مطلق: $|x^2-1|$ يجب أن يكون موجب وبالتالي الجزء الموجود

تحت المحور x سنبدله بانعكاسه حول المحور x (معلومات سابقة)



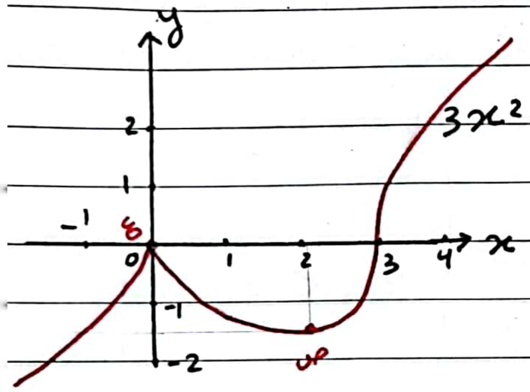
(المجال R) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ 258 ص (22) تمرين

$$=(x^3-3x^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x^3-3x^2)^{\frac{1}{3}-1}(x^3-3x^2)'$$

$$=\frac{1}{3}(x^3-3x^2)^{-\frac{2}{3}}(3x^2-6x)$$

$$=\frac{3x^2-6x}{3(x^3-3x^2)^{\frac{2}{3}}}$$



وعندما $f'=0$ يكون البسط: $3x^2-6x=0$

$\Rightarrow x(3x-6)=0 \longrightarrow x=0$ إما

قيم حرجة: أو: $3x-6=0 \rightarrow x=2$

وبملاحظة الرسم البياني للدالة

$f(0)=\sqrt[3]{(0)^3-3(0)^2}=0$ قيمة عظمى محلية

$f(2)=\sqrt[3]{(2)^3-3(2)^2}\simeq -1.59$ قيمة صغرى محلية

لاحظ نقطة انفصال عند $x=0$
$x\to 0^- \Rightarrow f(x)\to -1$
$x\to 0^+ \Rightarrow f(x)\to 3$
قفزة

$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & , x<0 \\ x^2-4x+3 & , x\geq 0\end{cases}$ 258 ص (23) تمرين

$f'(x)=2x+2$: $x<0$ عندما I

$2x+2=0 \Rightarrow x=-1$ (قيمة حرجة)

$f'(x)=2x-4$: $x\geq 0$ عندما: II

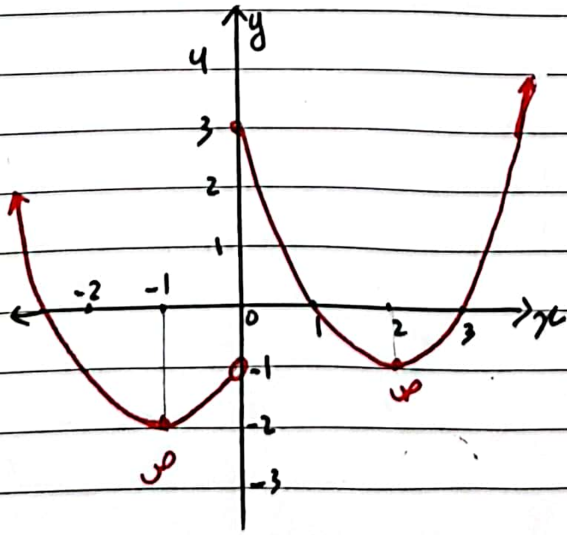
$2x-4=0 \Rightarrow x=2$ (قيمة حرجة)

وبملاحظة الانفصال عند $x=0$ (تكون غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$)

$(x<0) : x\to 0^- \rightarrow f'(0)\rightarrow 2(0)+2=2$
$(x>0) \quad x\to 0^+ \rightarrow f'(0)\rightarrow 2(0)-4=-4$
f' غير معرفة عند $x=0$

وبالتالي $x=0$ نقطة حرجة

وبملاحظة الرسم البياني للدالة:



$f(-1)=(-1)^2+2(-1)-1=-2$ قيمة صغرى محلية

$f(2)=2^2-4(2)+3=-1$ قيمة صغرى محلية

تمرين (24) ص 258

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & : -\pi<x<\pi \\ -\tan x & : |x|\geq\pi\end{cases}$$

• نتوقع وجود انفصال عند π

$x\to\pi^-: \sin\pi=0$

$x\to\pi^+: -\tan\pi=0$) لا يوجد

• تذكر: $\sin x$ معرفة على R

• وتذكر: $-\tan x$ معرفة بشرط $x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$

أي: عندما: $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}+\pi$ ، $\frac{\pi}{2}+2\pi$ ، $\frac{\pi}{2}-\pi$ ، $\frac{\pi}{2}-2\pi$ ، ...

أي: $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{2}$ ، ... ، $\frac{-\pi}{2}$ ، $\frac{-5\pi}{2}$ ، ...

تكون $-\tan x$ غير معرفة (خطوط تقارب رأسية)

• ومن تعريف المطلق:

$$|x|=\begin{cases}x & : x\geq0\\ -x & : x<0\end{cases}$$

ملاحظات إضافية غير ضرورية

$$|x|>\pi \Rightarrow \begin{cases}x>\pi & : x\geq0\\ -x<\pi & : x<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>\pi & : x>0\\ x<-\pi & : x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\tan x=\begin{cases}-\tan x & : x>\pi\\ -\tan(-x) & : x<-\pi\end{cases}=\begin{cases}-\tan x & : x>\pi\\ \tan x & : x<-\pi\end{cases}$$

وعندما $x>\pi$ خطوط التقارب: $x=\frac{3\pi}{2}$ ، $x=\frac{5\pi}{2}$ ، .... رأسية

$x<-\pi$ خطوط التقارب: $x=\frac{-3\pi}{2}$ ، $x=\frac{-5\pi}{2}$ ، ... رأسية

نشتق:

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x & : -\pi<x<\pi\\ -\sec^2 x & : |x|\geq\pi\end{cases}$$

I $-\pi<x<\pi$ عندما: $f'=0$ سيكون $\cos x=0$ وهذا فقط عندما $x=\frac{\pi}{2}$ (ضمن الفترة المحددة: قيم حرجة)

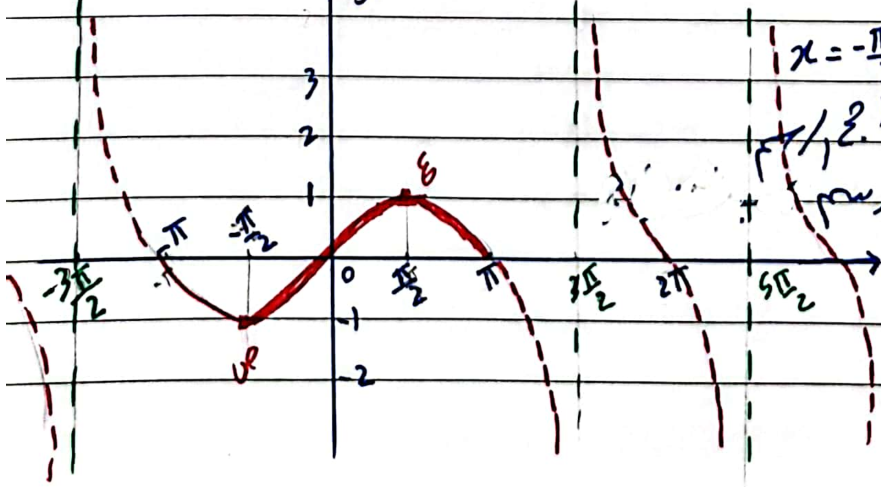
II أي $|x|\geq\pi$ أي: $x>\pi$ أو $x<-\pi$: عندما: $f'=0$ سيكون: $-\sec^2x=0$

$-\sec^2 x = -\frac{1}{\cos^2 x}\neq 0$ (البسط $1\neq0$)

وبالتالي ضمن الفترات: $|x|\geq\pi$ لا توجد قيم حرجة

عظمى محلية $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1$

صغرى محلية $x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(-\frac{\pi}{2})=\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$



للرسم البياني يمكن استخدام برنامج الرسم أو نأخذ نقط ونلاحظ جزئي الرسم حسب قاعدتي f (المتصل للقاعدة الأولى والمتقطع القاعدة الثانية)

X

تمرين (25) ص 258 $f(x)=x^3-3x+1$ المطلوب القيم القصوى المطلقة ضمن الفترات

$\boxed{a}$ $[0,2]$ الدالة متصلة على هذه الفترة (نستعين بنظرية 3.3)

والملاحظة التابعة لها 3.4 ص 255 (حيث الدالة متصلة على فترة مغلقة)

• نوجد الأعداد الحرجة $f'(x)=3x^2-3$

قيم حرجة $3x^2-3=0 \to 3x^2=3 \to x^2=1 \to x=\mp1$

• نوجد: $f(+1)=(1)^3-3(1)+1=-1$

(-1) خارج الفترة $\cancel{f(-1)=(-1)^3-3(-1)+1=3}$ غير مطلوبة

• نوجد قيم الدالة عند أطراف الفترة:

$f(0)=0^3-3(0)+1=1$

$f(2)=2^3-3(2)+1=3$

• القيمة العظمى المطلقة: $f(2)=3$

القيمة الصغرى المطلقة $f(1)=-1$

$\boxed{b}$ $[-3,2]$ • وجدنا (ضمن الفترة) $f'(x)=0 \to x=\mp1$

• نوجد: $f(1)=-1$

$f(-1)=3$

• نوجد قيم الدالة عند الأطراف: $f(2)=3$

$f(-3)=-17$

• القيمة العظمى المطلقة $f(-1)=3$ وكذلك $f(2)$

القيمة الصغرى المطلقة: $f(-3)=-17$

تمرين (26) $f(x)=x^4-8x^2+2$ مطلوب قيم قصوى مطلقة (لاحظ الدالة متصلة على فترة مغلقة معطاة)

$\boxed{a}$ $[-3,1]$

• $f'(x)=4x^3-16x=0 \Rightarrow x=0$

$x=2$ (خارج الفترة)

$x=-2$

• $f(0)=0^4-8(0)^2+2=2$ / $f(-2)=-14$

للأطراف • $f(1)=1^4-8(1)^2+2=-5$

$f(-3)=(-3)^4-8(-3)^2+2=11$

• القيمة العظمى المطلقة: $f(-3)=11$

القيمة الصغرى المطلقة: $f(-2)=-14$

$\boxed{b}$ $[-1,3]$ • $f'=0 \to x=0$ / أو 2 / أو (-2) خارج الفترة

• $f(0)=2$

$f(2)=-14 \to$ صغرى مطلقة

• $f(-1)=-5$

$f(3)=11 \to$ عظمى مطلقة

تمرين (27) ص 258 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ مطلوب القيم القصوى في الفترة.

a $[-4,-2]$ الدالة متصلة على هذه الفترة المغلقة إذاً لها قيم قصوى مطلقة

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x)^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}(x)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3(x)^{\frac{1}{3}}}$$

$f'(x)\neq 0$ حيث البسط $2\neq 0$ ، ونلاحظ هنا f' غير معرفة عندما $x=0$ (نقطة حرجة)
(لا توجد نقط حرجة) وهي خارج الفترة المحددة أصلاً

صغرى مطلقة $f(-2)=(-2)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(-2)^2}=\sqrt[3]{4}\approx 1.59$ بالأطراف

عظمى مطلقة : $f(-4)=(-4)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(-4)^2}=\sqrt[3]{16}\approx 2.52$

b $[-1,3]$ وجدنا $f'=0$ عندما $x=0$ (ضمن الفترة) نقطة حرجة

• $f(0)=(0)^{\frac{2}{3}}=0$

بالأطراف • $\to f(-1)=(-1)^{\frac{2}{3}}=1$ قيمة صغرى مطلقة

$\to f(3)=(3)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{9}\approx 2.1$ قيمة عظمى مطلقة

تمرين (28) $f(x)=\sin x+\cos x$

a $[0,2\pi]$ دالة متصلة على هذه الفترة المغلقة (دورة كاملة)

$f'(x)=\cos x+(-\sin x)=0\Rightarrow$

$\cos x-\sin x=0\to\cos x=\sin x$

ممكن الحل بالآلة أو عمل مخطط دائرة الوحدة

تساوى $\sin x$ مع $\cos x$ في منتصف الربع الأول والثالث

(ضمن دورة واحدة) حل 2 : $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ حرجة

ممكن حل المعادلة بشكل $\frac{\cos x}{\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}$
$1=\tan x$
بالربع الأول $x=\frac{\pi}{4}$
بالربع الثالث $x=\pi+\frac{\pi}{4}$

• $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ قيمة عظمى مطلقة

$x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}\Rightarrow f(\frac{5\pi}{4})=-\sqrt{2}$ قيمة صغرى مطلقة

بالأطراف • $\to f(0)=\sin 0+\cos 0=1$

$\to f(2\pi)=\sin 2\pi+\cos 2\pi=1$

b $[\frac{\pi}{2},\pi]$

لاحظ عندما $f'=0$ وجدنا $x=\frac{\pi}{4}$ أو $x=\frac{5\pi}{4}$ كلاهما خارج الفترة
(لا توجد نقط حرجة)
نكتفي بالأطراف.

$f(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=1$ قيمة عظمى مطلقة

$f(\pi)=\sin\pi+\cos\pi=-1$ قيمة صغرى مطلقة

تمرين (29) ص 258 $f(x)=e^{-x^2}$ المطلوب القيم القصوى المطلقة في:

a $[0,2]$

$$f'(x)=(-x^2)'e^{-x^2}=-2x\,e^{-x^2}$$

$f'(x)=0 \rightarrow -2x=0$ (لاحظ $e^{-x^2}=\frac{1}{e^{x^2}}\neq 0$)

$x=0$ حرجة

$f(0)=e^{-0^2}=1$ قيمة عظمى مطلقة

$f(2)=e^{-(2)^2}=e^{-4}\approx 0.02$ قيمة صغرى مطلقة

b $[-3,2]$

وجدنا $f'(x)=0$ عندما $x=0$ ضمن الفترة (حرجة)

$f(0)=e^{-(0)^2}=1$ قيمة عظمى مطلقة

بالأطراف $f(-3)=e^{-(-3)^2}=e^{-9}\approx 1.2\times10^{-4}\approx 0.00012$

$f(2)=e^{-4}\approx 0.02$ قيمة صغرى مطلقة

تمرين (30) $f(x)=x^2.e^{-4x}$ مطلوب القيم القصوى المطلقة في:

a $[-2,0]$

مشتقة ضرب $f'(x)=2x.e^{-4x}+x^2(-4e^{-4x})$

$=2xe^{-4x}-4x^2e^{-4x}$

$=e^{-4x}(2x-4x^2)$ (لاحظ $e^{-4x}\neq 0$)

$f'=0$ عندما $\Rightarrow 2x-4x^2=0 \longrightarrow$ إما $x=0$ (حرجة)

$\rightarrow x=\frac{1}{2}$ (خارج الفترة)

$f(0)=(0)^2e^{-4(0)}=0$ قيمة صغرى مطلقة

$f(-2)=(-2)^2e^{-4(-2)}=4e^8$ قيمة عظمى مطلقة

b $[0,4]$

قيم حرجة

وجدنا $f'=0$ عندما يساوي $x=0$ من ضمن الفترة أو $x=\frac{1}{2}$ من الفترة

$f(0)=0$ قيمة عظمى مطلقة

$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2e^{-4(\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}e^{-2}\approx 0.033$

$f(4)=(4)^2e^{-4(4)}=16e^{-16}\approx 1.8\times10^{-6}$

قيمة صغرى مطلقة

تمرين (31) ص 258 $f(x)=\frac{3x^2}{x-3}$ مطلوب قيم قصوى مطلقة في

a $[-2,2]$ الدالة متصلة على هذه الفترة ← معرفة عندما $x\neq 3$

(مشتقة قسمة) $f'(x)=\frac{6x(x-3)-(3x^2)(1)}{(x-3)^2}=\frac{6x^2-18x-3x^2}{(x-3)^2}$

$f'(x)=\frac{3x^2-18x}{(x-3)^2}=0 \Rightarrow$ البسط $3x^2-18x=0$

$\Rightarrow x=0$ و $x=6$ قيم حرجة

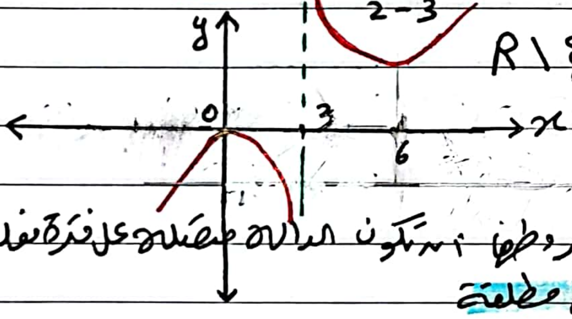
خارج الفترة

• $f(0)=\frac{3(0)^2}{0-3}=0$ (قيمة عظمى مطلقة)

للأطراف • $f(-2)=\frac{3(-2)^2}{-2-3}=\frac{-12}{5}\approx -2.4$

$f(2)=\frac{3(2)^2}{2-3}=-12$ (قيمة صغرى مطلقة)

b $[2,8]$ مجال الدالة $R\setminus\{3\}$



هذه دالة ليست متصلة على الفترة

لا يمكن تطبيق النظرية 3.3 ومن شروطها أن تكون الدالة متصلة على فترة مغلقة

لا توجد قيم صغرى مطلقة أو عظمى مطلقة

(يمكنك ملاحظة الشكل البياني للدالة)

تمرين (32) $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$ دالة مجالها R

a $[0,1]$ الدالة متصلة على هذه الفترة المغلقة

$f'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$

(قيمة حرجة $x=0$) $2x=0\to x=0 \Leftarrow f'=0$

تذكر $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(f(x))=\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

صغرى مطلقة $f(0)=\tan^{-1}(0^2)=0$

عظمى مطلقة $f(1)=\tan^{-1}(1^2)=\frac{\pi}{4}$ (≈ 0.78 من الفترة)

b $[-3,4]$ الدالة متصلة على هذه الفترة المغلقة

ووجدنا عندما $f'=0$ تكون $x=0$ من الفترة

• $f(0)=0$ قيمة صغرى مطلقة

للأطراف → • $f(-3)=1.46$

→ $f(4)=1.51$ قيمة عظمى مطلقة

تمرين (33) ص 258 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ المطلوب القيم القصوى المطلقة في:

لاحظ المقام $x^2+1 \neq 0$

[a] $[0, 2]$ بما أن الدالة R فهي معرفة ومتصلة على هذه الفترة المغلقة

(مشتقة قسمة) $f'(x) = \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

وعندما $f'=0$ سيكون: $-x^2+1=0 \to x=1$ ، $x=-1$ (±1 قيم حرجة)

خارج الفترة

$f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} = 0.5$ قيمة عظمى مطلقة

$f(0) = \frac{0}{0^2+1} = 0$: قيمة صغرى مطلقة

$f(2) = \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5} = 0.4$

[b] $[-3, 3]$ الدالة متصلة على هذه الفترة المغلقة

وجدنا $f'=0$ عندما $x = \mp 1$ (حرجة) كلاهما ضمن الفترة

$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2} = -0.5$ قيمة صغرى مطلقة

$f(1) = \frac{1}{2} = 0.5$ قيمة عظمى مطلقة

بالأطراف $f(-3) = \frac{-3}{(-3)^2+1} = \frac{-3}{10} = -0.3$

$f(3) = \frac{3}{(3)^2+1} = \frac{3}{10} = 0.3$

تمرين (34) $f(x) = \frac{3x}{x^2+16}$ دالة معرفة ومتصلة على R (لاحظ $x^2+16 \neq 0$)

[a] $[0, 2]$

$f'(x) = \frac{3(x^2+16) - 3x(2x)}{(x^2+16)^2} = \frac{3x^2+48-6x^2}{(x^2+16)^2} = \frac{-3x^2+48}{(x^2+16)^2}$

$f'(x)=0 \Leftarrow -3x^2+48=0$ إما $x=4$ أو $x=-4$ قيم حرجة

للفترة $[0, 2]$ القيمتان ∓ 4 خارج الفترة نكتفي بالأطراف

($f(0) = 0$ قيمة صغرى مطلقة) ($f(2) = \frac{3(2)}{2^2+16} = \frac{3}{10}$ عظمى مطلقة)

[b] $[0, 6]$ الدالة متصلة على هذه الفترة المغلقة

ووجدنا $f'=0$ عندما $x = \mp 4$ (-4 خارج الفترة)

$f(0) = 0$ قيمة صغرى مطلقة

$f(6) = \frac{3(6)}{6^2+16} = \frac{9}{26} \approx 0.346$

$f(4) = \frac{3(4)}{4^2+16} = \frac{3}{8} = 0.375$ قيمة عظمى مطلقة

تمرين 35 ص 258 $f(x)=x^4-3x^2+2x+1$ مطلوب تقدير القيم القصوى المطلقة

$\boxed{a}$ $[-1,1]$ الدالة معرفة ومتصلة على هذه الفترة المغلقة

$f'(x)=4x^3-6x+2$

يمكن الحل بالآلة الحاسبة $f'(x)=0 \to 4x^3-6x+2=0$

خارج الفترة ← $x_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\approx -1.366$

$x_2=1$ قيم حرجة

$x_3=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\approx 0.3660$

$f(-1)=(-1)^4-3(-1)^2+2(-1)+1=-3$ قيمة صغرى مطلقة

$f(1)=(1)^4-3(1)^2+2(1)+1=1$

$f(0.366)=(0.366)^4-3(0.366)^2+2(0.366)+1\approx 1.3481$ قيمة عظمى مطلقة (تقريباً)

$\boxed{b}$ $[-3,2]$ الدالة متصلة على هذه الفترة المغلقة

وجدنا سابقا $f'=0$: $x_1=-1.366$ / $x_2=1$ / $x_3=0.366$ كلها ضمن الفترة $[-3,2]$

$f(-1.366)=(-1.366)^4+3(-1.366)^2+2(-1.366)+1\approx -3.8481$ قيمة صغرى مطلقة

$f(1)=1$

$f(0.366)=1.3481$

$f(-3)=(-3)^4-3(-3)^2+2(-3)+1=49$ قيمة عظمى مطلقة

$f(2)=9$

تمرين 36 $f(x)=x^6-3x^4-2x+1$

$\boxed{a}$ $[-1,1]$ الدالة متصلة على هذه الفترة المغلقة

$f'(x)=6x^5-12x^3-2$ نحل هذه المعادلة بالآلة الحاسبة

ونجد الحلول: $x_1=-1.3673$ / $x_2=-0.586$ / $x_3=1.4522$ نقاط حرجة

في الفترة $[-1,1]$ فقط -0.586

$f(-1)=(-1)^6-3(-1)^4-2(-1)+1=1$

$f(1)=(1)^6-3(1)^4-2(1)+1=-3$ قيمة صغرى مطلقة

$f(-0.586)=1.8587$ قيمة عظمى مطلقة

$\boxed{b}$ $[-2,2]$ النقط الحرجة كلها ضمن الفترة

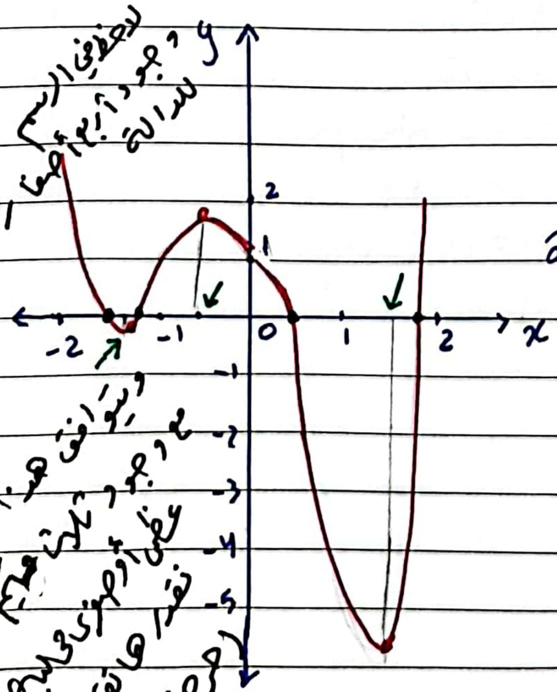
$f(-2)=(-2)^6-3(-2)^4-2(-2)+1=21$ عظمى مطلقة

$f(2)=13$

$f(-1.3673)=-0.2165$

$f(-0.586)=1.8587$

$f(1.4522)=-5.8675$ صغرى مطلقة



لاحظ في الرسم وجود أصفار للدالة

ويتوافق هذا مع وجود ثلاث قيم عظمى والصغرى نقاطها قيم حرجة

تمرين (37) ص 258 $f(x) = x\sin x + 3$ مطلوب قيم قصوى مطلقة في :

[a] $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ الدالة متصلة على هذه الفترة المغلقة

$f'(x) = (1)\sin x + x(\cos x) + 0$

$\sin x + x\cos x = 0 \quad : f' = 0$

نحل المعادلة باستخدام الآلة نجد قيم حرجة :

$x_3 = 4.9132$ / $x_2 = 2.0288$ / $x_1 = 0$

في الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ أي تقريباً $[-1.571, 1.571]$ فقط $x_1 = 0$ ضمن الفترة

$f(0) = 0\sin 0 + 3 = 3$ قيمة صغرى مطلقة

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + 3 = 3 + \frac{\pi}{2} \approx 4.5708$

$f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{-\pi}{2}\sin(\frac{-\pi}{2}) + 3 = 3 + \frac{\pi}{2} = 4.5708$

قيمة عظمى مطلقة

[b] $[0, 2\pi]$ ضمن هذه الفترة النقط الحرجة كلها

$2\pi \approx 6.28$

$f(0) = 3$

$f(2\pi) = 2\pi\sin(2\pi) + 3 = 3$

$f(2.0288) = 2.0288\sin(2.0288) + 3 \approx 4.8197$ عظمى مطلقة

$f(4.9132) = 4.9132\sin(4.9132) + 3 \approx -1.8145$ صغرى مطلقة

تمرين (38) $f(x) = x^2 + e^x$ مطلوب قيم قصوى مطلقة في

$f'(x) = 2x + e^x$

عندما $f' = 2x + e^x = 0$ لها حل وحيد $x = -0.3517$ قيمة حرجة

[a] في $[0, 1]$ القيمة الحرجة خارج الفترة نكتفي بالأطراف

$f(0) = 0^2 + e^0 = 1$ صغرى مطلقة

$f(1) = (1)^2 + e^1 = e + 1 \approx 3.7183$ عظمى مطلقة

[b] $[-2, 2]$ لاحظ النقطة الحرجة -0.3517 ضمن الفترة

$f(-0.3517) = (-0.3517)^2 + e^{-0.3517} \approx 0.8272$ صغرى مطلقة

وجدنا $f(-2) = (-2)^2 + e^{-2} \approx 4.1353$

$f(2) = (2)^2 + e^2 \approx 11.3891$ عظمى مطلقة