

حل تمارين الدرس 3-7 (اشتقاق لدوال الأسية ودوال اللوغاريتمية)

تمرين (1) ص 195 أوجد مشتقة: $f(x) = x^3 \cdot e^x$ قاعدة مشتقة الضرب

$$f'(x) = (x^3)' e^x + (x^3)(e^x)'$$

$$= 3x^2 \cdot e^x + (x^3)(e^x)$$

(معامل مشترك $e^x \cdot x^2$) $= e^x \cdot x^2 (3 + x)$

تمرين (3) : $f(t) = t + 2^t$

$[a^t]' = a^t \cdot \ln a$

المطلوب $f'(t) = 1 + (2^t) \ln 2$

تمرين (2) $f(x) = e^{2x} \cdot \cos 4x$

قاعدة مشتقة ضرب $f'(x) = (e^{2x})' \cos 4x + (e^{2x})(\cos 4x)'$

$$= 2e^{2x} \cdot \cos 4x + e^{2x}(-4 \sin 4x)$$

(معامل مشترك $2e^{2x}$) $= 2e^{2x} [\cos 4x - 2 \sin 4x]$

تمرين (4) $f(t) = t(4)^{3t}$

$[a^{f(x)}]' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$

↓ مشتقة الأس
الدالة نفسها
→ $\ln a$
↑ الأساس

$$f'(t) = 1 \cdot (4^{3t}) + t (4^{3t})'$$

$$= 4^{3t} + t [(3t)' 4^{3t} \cdot \ln 4]$$

$$= 4^{3t} + 3t \times 4^{3t} \times \ln 4$$

(معامل مشترك 4^{3t}) $= 4^{3t} [1 + 3t \cdot \ln 4]$

$[e^{f(x)}]' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

تمرين (5) $f(x) = 2e^{4x+1}$

$$f'(x) = 2 [(4x+1)' e^{4x+1}]$$

$$= 2 [4 e^{4x+1}] = 8e^{4x+1}$$

$f(x) = e^{-x}$

← $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

$$f'(x) = (-x)' e^{-x}$$

$$= -1 e^{-x} = -e^{-x}$$

$f(x) = 3^{-x^2}$

← التسهيل

$h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$

$$f'(x) = (-x^2)' (3^{-x^2}) (\ln 3)$$

$$= -2x (3^{-x^2}) \ln 3$$

معامل $-2x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} \cdot \ln 3$

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} \quad \text{مثال}$$

$$f'(x) = 2x \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} \ln 4$$

$$h(x) = 4^{-x^2}$$

$$h'(x) = (-x^2)' (4^{-x^2}) \ln 4$$

$$= -2x (4^{-x^2}) \ln 4$$

تمرين (8) ص 195

المحول u →

$$f(u) = e^{u^2+4u}$$

$$f'(u) = (u^2+4u)' e^{u^2+4u}$$

$$= (2u+4) e^{u^2+4u}$$

تمرين (9)

المحول u →

$$f(u) = 3 \cdot e^{\tan u}$$

$$f'(u) = 3 \times (\tan u)' (e^{\tan u})$$

$$= 3 (\sec^2 u) (e^{\tan u})$$

تمرين (10)

المحول w →

$$f(w) = \frac{e^{4w}}{w^2}$$

$$f'(w) = \frac{(e^{4w})' \times w - (e^{4w}) (w^2)'}{w^4}$$

$$= \frac{4 \cdot e^{4w} \times w - e^{4w} \times 2}{w^4} = \frac{e^{4w} (4w - 2)}{w^4}$$

تمرين (11)

المحول w →

$$f(w) = \frac{w}{e^{6w}}$$

$$f'(w) = \frac{(w)' (e^{6w}) - w (e^{6w})'}{(e^{6w})^2}$$

$$= \frac{1 \cdot e^{6w} - w (6e^{6w})}{(e^{6w})^2}$$

$$= \frac{e^{6w} (1 - 6w)}{(e^{6w})^2} = \frac{1-6w}{e^{6w}}$$

تمرين (12)

عند اشتراك البسط

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$f(x) = \ln 2x$$

$$f'(x) = \frac{(2x)'}{2x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

تمرين (13)

$$f(x) = \ln \sqrt{8x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{8x})'}{\sqrt{8x}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sqrt{8}}{\sqrt{8x}}$$

تمرين (14)

$$= \frac{1}{2\sqrt{8x}} = \frac{1}{2\sqrt{8} \sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{2} \sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{2x}}$$

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مَرْنِي (15) ص 195 $f(t) = \ln(t^3 + 3t)$

$$f'(t) = \frac{(t^3 + 3t)'}{t^3 + 3t} = \frac{3t^2 + 3}{t^3 + 3t}$$

قاعدة الضرب $f(t) = t^3 \cdot \ln t$

مَرْنِي (16)

$$f'(t) = (3t^2) \cdot (\ln t) + (t^3) \times \frac{1}{t} = 3t^2 \ln t + t^2$$

$g(x) = \ln(\cos x)$

مَرْنِي (17)

$$g'(x) = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

قاعدة مشتقة الضرب

$g(x) = \cos x \cdot \ln(x^2 + 1)$

مَرْنِي (18)

$$g'(x) = (\sin x)(\ln(x^2 + 1)) + \cos x \left[\frac{2x}{x^2 + 1} \right] = -\sin x \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \cos x}{x^2 + 1}$$

[a] $f(x) = \sin(\ln x^2)$

مَرْنِي (19)

$$f'(x) = \cos(\ln x^2) \times (2x) \times \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} \cdot \cos(\ln x^2)$$

[b] $g(t) = \ln(\sin t^2)$

$$g'(t) = \frac{(\sin t^2)'}{(\sin t^2)} = \frac{(\cos t^2) \times 2t}{\sin t^2} = \frac{\cos t^2}{\sin t^2} \times 2t = \cot(t^2) \times 2t$$

قاعدة مشتقة القسمة

[a] $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$

مَرْنِي (20)

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{\ln x})' \cdot x - (\sqrt{\ln x})(x)'}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \times x - (\sqrt{\ln x})(1)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \times x - \sqrt{\ln x}}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \times x - \sqrt{\ln x} \times \frac{2\sqrt{\ln x}}{2\sqrt{\ln x}}}{x^2 \times 2\sqrt{\ln x}}$$

$$= \frac{1 - 2\ln x}{2x^2 \sqrt{\ln x}}$$

[b] في الصفحة التالية (20)

مَرْنِي كَيْتَا

$f(x) = x^{-1} \cdot (\ln x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = -x^{-2}(\ln x)^{\frac{1}{2}} +$

$+ x^{-1} \left(\frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}} \right) \times \frac{1}{x}$

$= -\frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{x^2} + \frac{1}{2x^2 \sqrt{\ln x}}$

مَرْنِي كَيْتَا

$f(x) = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{x}$

ثم الاشتقاق بقاعدة القسمة

$f' = \frac{\frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{x} \times x - (\ln x)^{\frac{1}{2}} \times 1}{x^2}$

$(\ln x)^{\frac{1}{2}} \times 1$

تمرين (21) 195 د [a] $h(x) = e^x \cdot \ln x$

قاعدة مشتقة $f'(x) = (e^x)' (\ln x) + (e^x) (\ln x)'$

[a] $[e^{f(x)}]' = e^{f(x)} \times f'(x)$ [b] $f(x) = (e)^{\ln x}$

$f'(x) = (e^{\ln x})' (\ln x)'$

من خواص $\ln x = x$:
 $e^{\ln x} = x$
 $f(x) = e^{\ln x} = x$
 $f'(x) = 1$
 $f^{-1}(x) = 1$

$f' = x \times \frac{1}{x} \leftarrow (e^{\ln x}) \times \frac{1}{x}$

[a] $h(x) = (2)^{e^x}$

تمرين (22)

$h'(x) = (e^x)' \times (2)^{e^x} \times \ln 2$
 $= e^x \times 2^{e^x} \times \ln 2$

[b] $f(x) = e^{\ln x}$

~~$f'(x) = (\ln x)' \times e^{\ln x}$~~
 ~~$= \frac{1}{x} \times e^{\ln x}$~~

[b] $f(x) = \frac{e^x}{2^x}$

قاعدة مشتقة $f'(x) = (e^x)' \times 2^x - (e^x) (2^x)'$
 $= \frac{e^x \times 2^x - e^x \times 2^x \times \ln 2}{(2^x)^2}$
 $= \frac{e^x \times 2^x (1 - \ln 2)}{2^{2x}}$
 $= \frac{e^x (1 - \ln 2)}{2^x}$

[b] 20 حل

المحول $g(t) = \frac{\ln \sqrt{t}}{t}$

مشتقة قاعدة

$g'(t) = \frac{(\ln \sqrt{t})' (t) - (\ln \sqrt{t}) (t)'}{t^2}$

$= \frac{\frac{(\sqrt{t})'}{\sqrt{t}} (t) - (\ln \sqrt{t}) (1)}{t^2}$

$\frac{1}{2\sqrt{t}} = (\sqrt{t})'$ لا $= \frac{1}{(2\sqrt{t})\sqrt{t}} (t) - \ln \sqrt{t}$

نضرب البسط والمقام بـ 2 $= \frac{1}{2t} (t) - (\ln \sqrt{t}) \times 2$

$= \frac{1 - 2 \ln \sqrt{t}}{2t^2}$

مربی (23) ص 196

a) $f(x) = \ln(\sin x)$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

b) $f(t) = \ln(\sec t + \tan t)$

$$f'(t) = \frac{(\sec t + \tan t)'}{\sec t + \tan t} = \frac{\sec t \cdot \tan t + \sec^2 t}{\sec t + \tan t} = \frac{\sec t (\tan t + \sec t)}{\sec t + \tan t} = \sec t$$

مربی (24)

a) $f(x) = \sqrt[3]{e^{2x} \cdot x^3}$

$$= (e^{2x} \cdot x^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} (e^{2x} \cdot x^3)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (e^{2x} \cdot x^3)'$$

$$= \frac{1}{3} (e^{2x} \cdot x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot [(e^{2x})' x^3 + (e^{2x})(x^3)']$$

$$= \frac{1}{3} (e^{2x} \cdot x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot [(2 \cdot e^{2x}) x^3 + e^{2x} (3x^2)]$$

$$= \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot x^3 + 3x^2 \cdot e^{2x}}{3 (e^{2x} \cdot x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{e^{2x} \cdot x^2 (2x + 3)}{3 (e^{2x} \cdot x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{3(e^{2x})^{\frac{2}{3}} \cdot (x^3)^{\frac{2}{3}}}{3} \leftarrow \text{القسمة}$$

$$= 3 e^{\frac{4x}{3}} + x^{2 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$\text{محال استكمال الإجابة}$$

$$= \frac{e^{2x} \cdot x^2 (2x + 3)}{3 e^{\frac{4x}{3}} \cdot x^2}$$

انتهى

لكن محال

$$\frac{e^{2x}}{e^{\frac{4x}{3}}} = e^{2x - \frac{4x}{3}} = e^{\frac{2x}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} e^{\frac{2x}{3}} (2x + 3)$$

b) $f(w) = \sqrt[3]{e^{2w} + w^3} = (e^{2w} + w^3)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(w) = \frac{1}{3} (e^{2w} + w^3)^{\frac{1}{3}-1} (e^{2w} + w^3)'$$

$$= \frac{1}{3} (e^{2w} + w^3)^{-\frac{2}{3}} (2e^{2w} + 3w^2)$$

تمرین (25) ص 196 $f(x) = 3e^{x^2}$ مطلوب معادله مماس مماسی عند $x=1$

نقطه مماس: $x_1=1 \rightarrow y_1 = 3e^{(1)^2} = 3e$

$$f'(x) = 3(x^2)' e^{x^2} = 3(2x)e^{x^2} = 6xe^{x^2}$$

مماسی $m = f'(1) = 6(1)e^{(1)^2} = 6e$

معادله مماسی $y = m(x - x_1) + y_1$

$$y = 6e(x - 1) + 3e$$

$$y = 6ex - 6e + 3e \rightarrow y = 6ex - 3e$$

تمرین (26) $f(x) = (3)^{x^e}$ مطلوب معادله مماسی عند $x=1$ $[a^{f(x)}]' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$

$x_1=1 \rightarrow y_1 = (3)^{1^e} = 3^1 = 3$

$$f'(x) = (x^e)' (3)^{x^e} \cdot \ln 3 = e x^{e-1} (3)^{x^e} \cdot \ln 3$$

$$m = f'(1) = e(1)^{e-1} (3)^{1^e} \cdot \ln 3 = (3e \ln 3) \rightarrow \approx 8.96$$

معادله مماسی $y = m(x - x_1) + y_1$

$$y = 3e \ln 3 (x - 1) + 3$$

≈ 8.96

تمرین (27) $f(x) = x^2 \ln x$ مطلوب معادله مماسی عند $x=1$

$x_1=1 \rightarrow y_1 = (1)^2 \ln 1 = 0$

$$f'(x) = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)'$$

$$= 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$$

$m = f'(1) = 2(1) \ln 1 + 1 = 1$

معادله مماسی $y = m(x - x_1) + y_1 \rightarrow y = 1(x - 1) + 0$

$$y = x - 1$$

تمرین (28) $f(x) = 2 \ln x^3$ مطلوب معادله مماسی عند $x=1$

$x_1=1 \rightarrow y_1 = 2 \ln (1)^3 = 0$

$$f'(x) = 2 \left(\frac{(x^3)'}{x^3} \right) = 2 \left(\frac{3x^2}{x^3} \right) = \frac{6}{x}$$

$m = f'(1) = \frac{6}{1} = 6$

معادله مماسی

$y = m(x - x_1) + y_1 \rightarrow y = 6(x - 1) + 0$

$$y = 6x - 6$$

تمرين (29) ص 196 $f(x) = xe^{-2x}$ مطلوب قيم x التي يكون عندها المحاك أفقي

لكون المحاك أفقياً إذا كان ميله $0 =$

أي متى يكون $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'(e^{-2x}) + x(e^{-2x})' \\ &= 1 \cdot e^{-2x} + x[-2e^{-2x}] \\ &= e^{-2x} + x[-2e^{-2x}] \\ &= e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{aligned}$$

نحل المعادلة: $0 = e^{-2x} - 2xe^{-2x}$ عوضاً

$$e^{-2x}(1 - 2x) = 0$$

أو $1 - 2x = 0$ أو $e^{-2x} = 0$ وهذا غير ممكن

$$1 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{e^{2x}} \neq 0\right)$$

تمرين (30) ص 196 $f(x) = xe^{-3x}$ مطلوب قيم x التي يكون المحاك عندها أفقياً؟

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-3x} + x(-3e^{-3x}) \\ &= e^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{aligned}$$

مطلوب متى يكون $0 = e^{-3x} - 3xe^{-3x}$ عوضاً

$$e^{-3x}(1 - 3x) = 0$$

أو $1 - 3x = 0 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$ أو $e^{-3x} = 0$ غير ممكن

$$\left(\frac{1}{e^{3x}} \neq 0\right)$$

تمرين (30) $f(x) = x^2 e^{-2x}$ متى يكون المحاك أفقي؟

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x)e^{-2x} + x^2(-2e^{-2x}) \\ &= 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} \end{aligned}$$

لكون المحاك أفقياً: $f' = 0 \Leftrightarrow 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} = 0$ عوضاً

$$e^{-2x}(2x - 2x^2) = 0$$

أو $2x - 2x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ أو $e^{-2x} = 0$ لا يمكن

$$\text{أو } x = 1$$

$f(x) = x^2 e^{-3x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(e^{-3x}) + x^2[-3e^{-3x}] \\ &= 2xe^{-3x} - 3x^2e^{-3x} \\ &= e^{-3x}(2x - 3x^2) \end{aligned}$$

عندما $f' = 0$: المحاك أفقي: $2x - 3x^2 = 0$ أو $e^{-3x} = 0$ لا يمكن

$$\begin{aligned} &\rightarrow x = 0 \\ &\rightarrow x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

تمرين (31) ص 196

نموذج $u(t) = 100 \times 3^t$ قيمة الاستثمار في زمن t
المطلوب النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير

المطلوب $\left(\frac{u'(t)}{u(t)} \times 100 \right) \%$

$u'(t) = 100 (1) 3^t \ln 3 = 100 \times 3^t \ln 3$

المطلوب $\left(\frac{100 \times 3^t \times \ln 3}{100 \times 3^t} \right) \times 100 = (\ln 3) \times 100 \approx 110\%$

تمرين (32)

$u(t) = 100 \times 4^t$

$u'(t) = 100 (1) 4^t \ln 4 = 100 \times 4^t \ln 4$

المطلوب $\left(\frac{100 \times 4^t \ln 4}{100 \times 4^t} \right) \times 100 = \ln 4 \times 100 = 138.6\%$

تمرين (33)

$u(t) = 40 e^{0.4t}$

$u'(t) = 40 (0.4) e^{0.4t} = 16 e^{0.4t}$

المطلوب $\frac{u'(t)}{u(t)} \times 100 = \frac{16 e^{0.4t}}{40 e^{0.4t}} \times 100 = 40\%$

تمرين (34)

$u(t) = 60 e^{-0.2t}$

$u'(t) = 60 (-0.2) e^{-0.2t} = -12 e^{-0.2t}$

المطلوب $\frac{u'(t)}{u(t)} \times 100 = \frac{-12 e^{-0.2t}}{60 e^{-0.2t}} \times 100 = -20\%$

تمرين (35)

يبدأ التكاثر للبكتريا بالمقد 200 (في ساعة 0) في اليوم t
القانون $(P(t) = A b^t)$

$P(t) = 200 (3)^t \rightarrow P'(t) = 200 \times 3^t \times \ln 3$

$\frac{P'(t)}{P(t)} \times 100 = \left(\frac{200 \times 3^t \times \ln 3}{200 (3)^t} \right) \times 100 = \ln 3 \times 100 \approx 109.8\%$

110%

تمرين (36)

يبدأ التكاثر بالمقد 500 كل أربع ساعات (في يوم 0) قانون التكاثر: $P(t) = A b^t$

$P(t) = 500 (2)^{\frac{t}{4}} \rightarrow P'(t) = 500 \left(\frac{1}{4} \right) (2)^{\frac{t}{4}} \times \ln 2$

$\frac{P'(t)}{P(t)} \times 100 = \frac{500 \left(\frac{1}{4} \right) (2)^{\frac{t}{4}} \ln 2}{500 (2)^{\frac{t}{4}}} \times 100 = \frac{1}{4} (\ln 2) \times 100 = 17.3\%$

النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير $\left(\frac{u'(t)}{u(t)} \times 100 \right) \%$

علينا ملاحظة $\left[\ln u(t) \right] = \ln \left(\frac{u'(t)}{u(t)} \right)$ لا تستخدم كثيرًا

$[a^{f(x)}]' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$

تمرين (37) ص 196 $C(t) = \frac{6}{2e^{-8t} + 1}$ تركيز مادة بعد t (ثانية)

المطلوب ① $C'(t) > 0$ (يمكن كتابته: $C(t) = 6(2e^{-8t} + 1)^{-1}$)

$$\begin{aligned} C'(t) &= 6(-1)(2e^{-8t} + 1)^{-1-1} (2e^{-8t} + 1)' \\ &= (-6)(e^{-8t} + 1)^{-2} (2 \times -8 \times e^{-8t} + 0) \\ &= +96(e^{-8t} + 1)^{-2} (e^{-8t}) \end{aligned}$$

السطح موجب $\rightarrow 96 \cdot e^{-8t}$

المقام موجب $\rightarrow (e^{-8t} + 1)^2 \Rightarrow C'(t) > 0$

② استخدام سابق للتأكيد أنه التركيز لا يتخطى 6 أبداً

أي مهما تقيد الزمن $t \rightarrow \infty$ فإنه $f(t) \rightarrow 6$ ينتهي لـ 6 (لا يصل لـ 6)

يقرب منها (أي لا يتخطاها)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6}{2e^{-8t} + 1} = \frac{6}{2(0) + 1} = 6$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-8t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{8t}} \rightarrow \frac{1}{\infty} \rightarrow 0$$

تمرين (38) ص 196 $C(t) = \frac{10}{9e^{-10t} + 2}$ تركيز مادة بعد t (ثانية)

المطلوب ① $C'(t) > 0$ لنشتق الدالة باستخدام قاعدة البسط

$$C'(t) = \frac{0(\text{المقام}) - (10)(9e^{-10t} + 2)'}{(9e^{-10t} + 2)^2}$$

$$= \frac{-10(9 \times -10 \times e^{-10t} + 0)}{(9e^{-10t} + 2)^2} = \frac{900e^{-10t}}{(9e^{-10t} + 2)^2}$$

$C'(t) > 0$ موجب

② استخدام سابق للتأكيد على أن التركيز لا يتخطى 5 أبداً

أي مهما تقيد الزمن $t \rightarrow \infty$ فإنه $f(t) \rightarrow 5$ ينتهي لـ 5

يقرب منها ولا يتخطاها

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10}{9e^{-10t} + 2}$$

$$e^{-10t} = \frac{1}{e^{10t}} \Rightarrow \frac{10}{9(0) + 2} = 5$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{10t} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^{10t}} \rightarrow 0$$

المقام يكبر بلا نهاية
الكسر يقترب من 0

تمرين (39) م 196 $f(x) = x \sin x$ استخدام تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة

$$[Ln(f(x))] = \frac{d}{dx} Ln f(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)}$$

نأخذ Ln الطرفين:

$$Ln f(x) = Ln(x \sin x)$$

$$Ln(f(x)) = \sin x \cdot Ln x$$

نشتق الطرفين (نسبة مشتقة الطرف)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\sin x)' Ln x + \sin x (Ln x)'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x \cos x \cdot Ln x + (\sin x) \left(\frac{1}{x}\right)}{x \sin x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x \cos x \cdot Ln x + \sin x}{x}$$

$$f'(x) = f(x) \times \frac{x \cos x \cdot Ln x + \sin x}{x}$$

$$f'(x) = x \sin x \left(\frac{x \cos x \cdot Ln x + \sin x}{x} \right)$$

ملاحظة:
لاستنتاج دالة مشتقة
الأساسية x والاساسية
نأخذ Ln الطرفين
نشتق الطرفين ونقسم
نضرب f' بالطرف f

تمرين (40) $f(x) = x^{4-x^2}$

نأخذ Ln الطرفين:

$$Ln(f(x)) = Ln(x^{4-x^2})$$

$$Ln f(x) = (4-x^2) Ln x$$

نشتق الطرفين (نسبة مشتقة الطرف)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (4-x^2)' Ln x + (4-x^2) (Ln x)'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -2x Ln x + (4-x^2) \times \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \left[-2Ln x + (4-x^2) \times \frac{1}{x} \right]$$

$$f'(x) = Ln(x^{4-x^2}) \left[-2Ln x + (4-x^2) \times \frac{1}{x} \right]$$

تمرين (41) $f(x) = (\sin x)^x$

نأخذ Ln الطرفين (نسبة مشتقة الطرف)

$$Ln f(x) = Ln(\sin x)^x$$

$$Ln f(x) = x Ln(\sin x)$$

نشتق الطرفين (نسبة مشتقة الطرف)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (x)' Ln(\sin x) + x (Ln \sin x)'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 Ln(\sin x) + x \left(\frac{(\sin x)'}{\sin x} \right)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = Ln(\sin x) + x \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) \rightarrow \cot x$$

$$f'(x) = (\sin x)^x [Ln(\sin x) + x \cot x]$$

تمرین (42) ص 196 $f(x) = (x^2)^{4x}$ (معادن کتابچه) $f(x) = x^{8x}$

نأخذ $\ln$ الطرفين

$$\ln(f(x)) = 8x \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 8(\ln x) + (8x) \times \frac{1}{x} \quad \text{نشق الطرفين}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 8(\ln x) + 8 \rightarrow f'(x) = f(x)[8\ln x + 8]$$

$$f(x) = (x^{8x}) [8\ln x + 8]$$

تمرین (43) $f(x) = x^{\ln x}$

$$\ln(f(x)) = \ln(x^{\ln x})$$

$$\ln(f(x)) = (\ln x)(\ln x)$$

$$\ln(f(x)) = [\ln x]^2$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2[\ln x]' [\ln x]^0 \quad \text{نشق الطرفين}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2[\ln x] \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{2\ln x}{x} \right) \rightarrow f'(x) = x^{\ln x} \left(\frac{2\ln x}{x} \right)$$

$$= 2(x)^{\ln x - 1} \cdot \ln x \quad \text{معادن نبيلة}$$

$f(x) = x^{\sqrt{x}}$

تمرین (44)

$$\ln f(x) = \ln x^{\sqrt{x}}$$

نأخذ $\ln$ الطرفين

$$\ln f(x) = \sqrt{x} \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\sqrt{x})' \ln x + (\sqrt{x})(\ln x)' \quad \text{نشق الطرفين}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(\ln x) + 1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} \times \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} \\ \text{أو} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = f(x) \times \frac{1 + \ln x}{2\sqrt{x}} \\ = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{1 + \ln x}{2\sqrt{x}} \right)$$

تمرين (45) ص 196 ① $f(x) = \ln x$ مطلوب متى يكون المحاك عند $x=a$ صيغ من نقطة الأصل

نقطة التماس $x_1=a \rightarrow y_1=\ln a$ وفي $(a, \ln a)$

ميل المحاك: $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow m = f'(a) = \frac{1}{a}$

معادلة المحاك: $y = m(x - x_1) + y_1$

$$(0,0) \in \sqrt{f} \Rightarrow 0 = \frac{1}{a}(0-a) + \ln a$$

$$0 = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a}a + \ln a \rightarrow 0 = -1 + \ln a$$

$$\Rightarrow 1 = \ln a$$

حول المعادلة: $p = e^1 = a$

② $f(x) = e^x$ مطلوب متى a بحيث يكون المحاك عند $x=a$ صيغ من نقطة الأصل

نقطة التماس: $x_1=a \rightarrow y_1=e^a$

ميل المحاك: $f'(x) = e^x \rightarrow m = e^a$

معادلة المحاك: $y = m(x - x_1) + y_1$

$$y = e^a(x - a) + e^a$$

$$(0,0) \in \sqrt{f} \Rightarrow 0 = e^a(0-a) + e^a$$

$$0 = -a \cdot e^a + e^a$$

$$+ a \frac{e^a}{e^a} = \frac{e^a}{e^a} \Rightarrow a = 1$$

الحالة ①: وجبت ميل المحاك: $m = \frac{1}{a}$ ووجدنا $a = e$ على $\frac{1}{e}$

الحالة ②: وجبت ميل المحاك: $m = e^a$ ووجدنا $a = 1$ على $e^1 = e$

تمرين (46) ① قد وجدنا $\frac{d}{dx} a^x = x \cdot \ln a$ عند $a=3$ وتكراراً لتابع $\ln 3$

منقطة $f(x) = a^x$

$$f(x) = a^x \rightarrow \frac{d}{dx} a^x = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^{x+h}) - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^x \cdot a^h) - a^x}{h} \rightarrow \text{عامل مشترك } a^x$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^x)(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

حيث $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ (يعمل a^x معادلة ثابتة: ليس فيه h)

وعند $a=3$ نجد في التقدير 7.1 أن التابع سيكون: $\ln 3 \cdot a^x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} = \ln 3$$

ضع جدول لقيم $\frac{3^h - 1}{h}$ حيث $h \rightarrow 0$ وسنجد أنها تتقارب إلى $\ln 3$

يتبع في الصفحة التالية

تأرجع ص 46 عددية سنجب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h}$ (حيث $3 = a$)

h	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.00001	0.0001	0.001	0.01
$\frac{3^h - 1}{h}$	1.0925995	1.098009	1.0985519		1.098618	1.0986726	1.0992159	1.1046691
	$(\frac{3^h - 1}{h}) \rightarrow 1.09861$				$1.09861 \leftarrow (\frac{3^h - 1}{h})$			

يكون $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} = 1.09861$

وبالتالي $\ln 3 \approx 1.09861$ باستخدام تقريبات

وبالتالي: $\frac{d}{dx} 3^x = 3^x \cdot \ln 3$

في الجذر الثاني عددية سنجب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ (حيث $a = \frac{1}{3}$)

h	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.00001	0.0001	0.001	0.01
$\frac{(\frac{1}{3})^h - 1}{h}$	-1.104669	-1.099215	-1.0986726		-1.0986062	-1.0985519	-1.098009	-1.0925995
	$(\frac{(\frac{1}{3})^h - 1}{h}) \rightarrow -1.0986$				$-1.0986 \leftarrow (\frac{(\frac{1}{3})^h - 1}{h})$			

لوحظنا النتيجة مع $\ln(\frac{1}{3}) \approx -1.09861$ (بديهي النتيجة تقريباً)

وبالتالي: $\frac{d}{dx} (\frac{1}{3})^x = (\frac{1}{3})^x \cdot \ln(\frac{1}{3})$ (استعملنا النتيجة السابقة)

عزني (47) وعزني (48) تستخدم الحاسبة اليدوية (غير موفرة عند الطلاب)

عزني (49) مطلوب a, b, c ليكن $f(0)=1$

$f'(0)=1$

$f''(0)=1$

$f(x) = \frac{a+bx}{1+cx}$

$f(0) = \frac{a+b(0)}{1+c(0)} = a$

$f(0)=1 \Rightarrow a=1$

نشتق أول مرة $f'(x) = \frac{(1+bx)'(1+cx) - (1+bx)(1+c)'}{(1+cx)^2}$

$= \frac{b(1+cx) - (1+bx)c}{(1+cx)^2} = \frac{b+bcx-c-bcx}{(1+cx)^2} = \frac{b-c}{(1+cx)^2}$

$f'(0)=1 \Rightarrow 1 = \frac{b-c}{(1+c \cdot 0)^2} \Rightarrow \frac{b-c}{1} = 1 \Rightarrow b-c=1$ ①

نشتق ثانية: $f''(x) = \frac{(b-c)'(1+cx)^2 - (b-c)(1+cx)'}{(1+cx)^4}$

$= \frac{0 - (b-c) \cdot 2(1+cx)'(c)}{(1+cx)^4} = \frac{-2c(b-c)}{(1+cx)^3}$ (معطى $f''(0)=1$)

$1 = \frac{-2c(b-c)}{(1+c \cdot 0)^3} \Rightarrow \frac{-2c(b-c)}{1} = 1 \Rightarrow -2bc + 2c^2 = 1$ ②

حل المعادلتين ① و ② لنجد b و c

تابع حل تمرين (9) ص 196

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \quad b-c=1 \\ \text{II} \quad -2bc+2c=1 \end{array} \right\} \text{وجدنا } a=1 \text{ لييجاد } b \text{ و } c \text{ كل المعادلتين}$$

من I نجد: $b=1+c$ نفوض في II

$$-2c(1+c)+2c^2=1 \quad \text{الخصم بالقولين}$$

$$-2c-2c^2+2c^2=1$$

$$-2c=1 \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$$

$$\text{I} \Rightarrow b=1+c = 1+(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = b$$

$$f(x) = \frac{a+bx}{1+cx} = \frac{1+\frac{1}{2}x}{1+(-\frac{1}{2})x}$$

وسيكون:

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$$

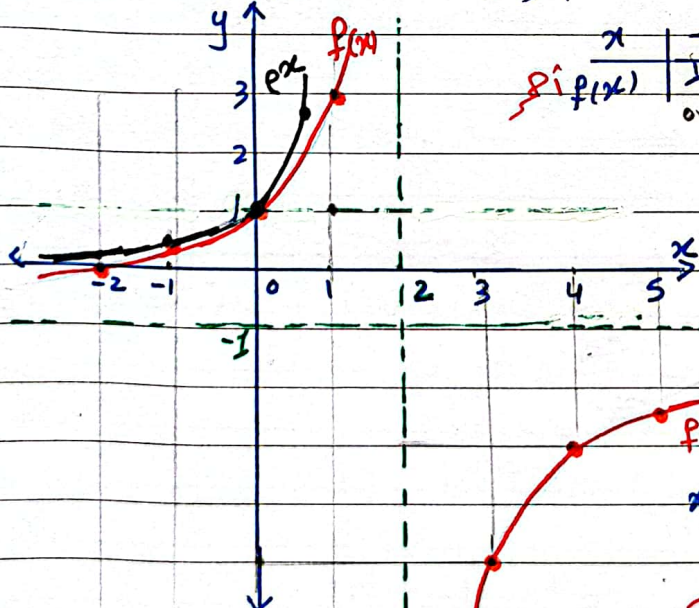
لنوضيها البسط والمقام في لكل حد

$$f(x) = \frac{2+x}{2-x}$$

لنرسم $f(x)$ نلاحظ أنها دالة نسبية معرفة عندما $x \neq 2$ (ويكون $x=2$ مقارب رأسي

ودرجة البسط = درجة المقام $\Rightarrow y = \frac{1}{-1} = -1$ مقارب أفقي

وعلى الاستقامة نكتب ارضائية للرسم (بألفاظ صينية $x > 2$ ثم $x < 2$)



x	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	1/3	1	3	∞	-5	-3	-2.3

أما الشكل البياني: $g(x) = e^x$

ممنوع صفر في المقام ويمكن

الاستقامة نقطة للرسم

x	-2	-1	0	1
e ^x	0.1	0.36	1	2.7

$y = e^x$ له خط مقارب $y=0$ ولا يمر بالمحور x

ملاحظة: تبعد بداية السؤال عن دافعة

لوصف معنى (تقريب بادي) الواردة أول السؤال: لقم $f(x)$ بتطابق مع e^x عندما $x \rightarrow 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \\ f'(x) \\ f''(x) \end{array} \right\} \text{تطابق} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{2+x}{2-x} \rightarrow f(0) = 1 \\ e^0 = 1 \end{array} \right\} \text{ونجد}$$

$$f'(x) = \frac{b-c}{(1-cx)^2} = \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})}{(1-(-\frac{1}{2})x)^2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-2c(b-c)}{(1+cx)^3} = \frac{-2(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2}))}{(1+(-\frac{1}{2})x)^3} \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) \\ f''(x) \end{array} \right\} \text{تطابق} \quad e^0 = 1 \text{ ونجد}$$

لاحظنا سابقاً c/b $\frac{1/2}{-1/2} = -1$

تمرين (50) $p(x) = a + bx + cx^2$ 196 م مطلوب إيجاد a و b و c يكون فيها

$(e^0 = a + b(0) + (0)^2 \Rightarrow 1 = a) \leftarrow p(0)$ يطابق e^0
 $(e^0 = b + 2cx \Rightarrow 1 = b) \leftarrow p'(0)$ يطابق e^0
 $(e^0 = 2c \Rightarrow 1 = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}) \leftarrow p''(0)$ يطابق e^0

نتيجة ونقولان $x=0$

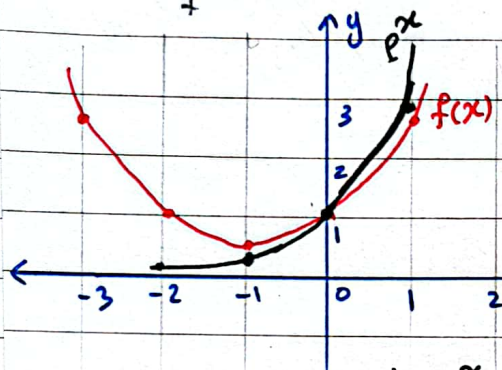
$a=1$ و $b=1$ و $c=\frac{1}{2}$
 أصبح: $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

الرسم بيان $f(x)$ دالة تربيعية
 يمكن الاستعانة بجدول قيم (أو برنامج / اسم

x	-3	-2	-1	0	1
f(x)	2.5	1	0.5	1	2.5

رئيس

(يمكن مقارنة بالرسم في التمرين السابق e^x (أسود)



تمرين (51) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ← نحسب لقيمات عشوائية
 المعادلات: $f'(x) = 0$ ← نحسب لقيمة تغير القيمة المحللة في

المعادلة: $f'(x) = 0$ ← نحسب لقيمة تغير القيمة المحللة في

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow f'(x) = (-\frac{x^2}{2})' e^{-\frac{x^2}{2}} = (-\frac{1}{2}x \cdot 2x) e^{-\frac{x^2}{2}} = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f''(x) = (-x)' e^{-\frac{x^2}{2}} + (-x)(e^{-\frac{x^2}{2}})' = -1 e^{-\frac{x^2}{2}} - x x (-x) e^{-\frac{x^2}{2}} = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} (-1 + x^2)$

غير صفر $e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ ($\frac{1}{(e)^{\frac{x^2}{2}}} \neq 0$)

أو $-1 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{\text{أو}} x = 1$
 $\xrightarrow{\text{أو}} x = -1$

تمرين (52) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{8}}$ مطلوب حلول $f''(x) = 0$

$f'(x) = (-\frac{x^2}{8})' e^{-\frac{x^2}{8}} = (-\frac{1}{8}x \cdot 2x) e^{-\frac{x^2}{8}} = -\frac{1}{4}x e^{-\frac{x^2}{8}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4} e^{-\frac{x^2}{8}} + (-\frac{1}{4}x) [-\frac{1}{4}x e^{-\frac{x^2}{8}}] = -\frac{1}{4} e^{-\frac{x^2}{8}} + \frac{1}{16}x^2 e^{-\frac{x^2}{8}} = e^{-\frac{x^2}{8}} [-\frac{1}{4} + \frac{1}{16}x^2] = 0$

$(\frac{1}{16}x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = +2 \text{ أو } x = -2)$

لا يوجد حلول $e^{-\frac{x^2}{8}} = 0$ (لأن الأضراس (أقل أو أكثر)

تمرین (53) ص 196
 مطلوب است که آیا در $x=0$ حاصل $f'(x)=0$ است
 تابع $f(x) = (e)^{\frac{-(x-m)^2}{2c^2}}$ و c, m ثوابت

لازمه اول: ثابت

$$f'(x) = \left[\frac{-(x-m)^2}{2c^2} \right]' \cdot x(e)^{\frac{-(x-m)^2}{2c^2}} \rightarrow$$

$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{1}{h(x)} g(x)$

$$= \frac{-1}{2c^2} [(x-m)^2]' \cdot x(e)^{\frac{-(x-m)^2}{2c^2}}$$

$$= \frac{-1}{2c^2} [2(x-m)(1)] \cdot x(e)^{\frac{-(x-m)^2}{2c^2}} = \frac{-1}{c^2} (x-m) x(e)^{\frac{-(x-m)^2}{2c^2}}$$

ثابت دوم: $f''(x)$

$$f''(x) = \left[\frac{-1}{c^2} (x-m) \right]' \cdot x(e)^{\frac{-(x-m)^2}{2c^2}} + \frac{-1}{c^2} (x-m) \left[x(e)^{\frac{-(x-m)^2}{2c^2}} \right]'$$

$$= \left[\frac{-1}{c^2} \cdot 1 \right] \cdot x(e)^{\frac{-(x-m)^2}{2c^2}} + \frac{-1}{c^2} (x-m) \left[\frac{-1}{c^2} (x-m) x(e)^{\frac{-(x-m)^2}{2c^2}} \right]$$

$$= \frac{-1}{c^2} \cdot (e)^{\frac{-(x-m)^2}{2c^2}} + \frac{1}{c^4} (x-m)^2 \cdot (e)^{\frac{-(x-m)^2}{2c^2}}$$

$$= \left(\frac{-1}{c^2} (e)^{\frac{-(x-m)^2}{2c^2}} \right) \left(-1 + \frac{1}{c^2} (x-m)^2 \right)$$

علاوه بر این، آیا می‌توانیم آن را صفر کنیم؟

$$\Rightarrow -1 + \frac{1}{c^2} (x-m)^2 = 0$$

$$\frac{1}{c^2} (x-m)^2 = 1$$

$$(x-m)^2 = c^2$$

پس:

$$x-m=c \Rightarrow x=m+c$$

$$x-m=-c \Rightarrow x=m-c$$

تمرین (54) در تمرینات قبلی: $f'(x)=0$

و بعداً در تمرینات قبلی: $f'(x) = \frac{-1}{c^2} (x-m) \cdot (e)^{\frac{-(x-m)^2}{2c^2}}$

و معادله صفر می‌شود $f'(x)=0$ یعنی

پس لا بد از این است

$$\Rightarrow \left(\frac{-1}{c^2} \right) (x-m) = 0 \Rightarrow x-m=0$$

$$x=m$$

پس لا بد از این است (ثابت)