1- مقدمة في المتجهات

الدرس | اختبر نفسك

2- المتجهات في المستوى الإحداثي

الدرس | اختبر نفسك

3- الضرب الداخلي

الدرس | اختبر نفسك

4- المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

الدرس | اختبر نفسك

5- الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

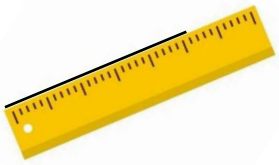
الدرس | اختبر نفسك

أسئلة تحصيلي

الكميات الفيزيائية

كمية قياسية (عددية)

هي كمية لها مقدار فقط وليس لها اتجاه.



طول قطعة مستقيمة 5 cm

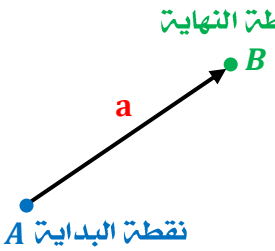
كمية متجهة

هي كمية لها مقدار و اتجاه .

يسير قارب بسرعة 15 m/h
في اتجاه الجنوب الغربي .

المتجهات

المتجه:



قطعة مستقيمة لها اتجاه أو سهم لها نقطة بداية A ولها نقطة نهاية B

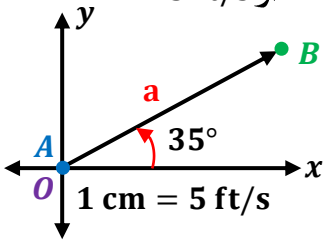
يرمز للمتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو $\mathbf{a}$

طول المتجه:

طول القطعة المستقيمة التي تمثله ويرمز لطول المتجه a بالرمز $|\mathbf{a}|$

مثلًا : إذا كان مقياس الرسم $1\text{ cm} = 5\text{ ft/s}$ فإن الطول يساوي 2.6×5 أو 13 ft/s

الوضع القياسي للمتجه:

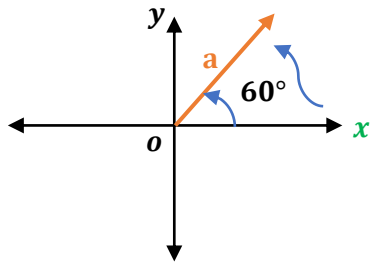
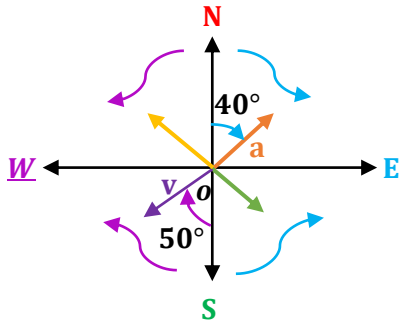
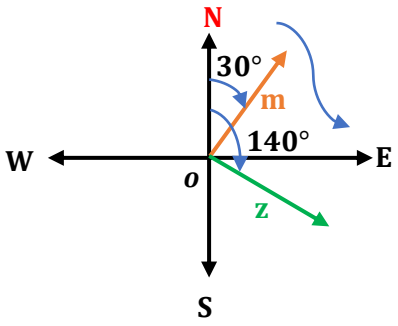


إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل.

اتجاه المتجه:

- الاتجاه الأفقي .
- الاتجاه الربعي.
- الاتجاه الحقيقي .

تمثيل المتجه هندسيًا

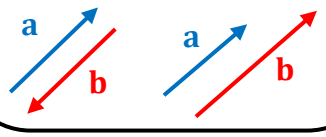
النوع	خصائصه	الرسم
الاتجاه الأفقي	يستعمل المحور الأفقي الزاوية التي يصنعها مع محور x الموجب ويكون عكس عقارب الساعة . مثال : $\vec{a}$ بزاوية قياسها $60°$ مع الاتجاه الأفقي	
الاتجاه الربعي (فاي) φ	يستعمل المحور الرأسي y إما شمالًا N أو جنوبًا S يكون قياس الزاوية بين $0°$ و $90°$ شرق أو غرب المحور الرأسي وتكتب الزاوية بين حرفين مثال : $\vec{a}$ باتجاه N 40° E $\vec{v}$ باتجاه S 50° W	
الاتجاه الحقيقي	يبدأ من الشمال N ويكون مع عقارب الساعة وتكتب الزاوية بثلاثة أرقام مثال : $\vec{m}$ باتجاه 030° $\vec{z}$ باتجاه 140° إذا كان قياس الزاوية ثلاث أرقام تكتب كما هي .	

أنواع المتجهات

المتجهات المتوازية

$a \parallel b$

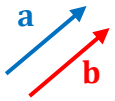
لها الاتجاه نفسه أو اتجاهان متعاكسان وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه.



المتجهات المتساوية

$a = b$

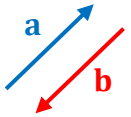
لها الاتجاه نفسه والطول نفسه .



المتجهان المتعاكسان

$a = -b$

لهما الطول نفسه واتجاهان متعاكسان.



المحصلة: هي المتجه الناتج من جمع متجهين أو أكثر .

محصلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه

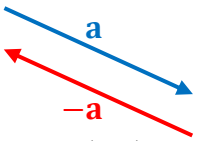
هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات ، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه .

محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين

هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا .

محصلة ناتج جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه

هو المتجه الصفري ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو 0 وطوله صفر وليس له اتجاه .



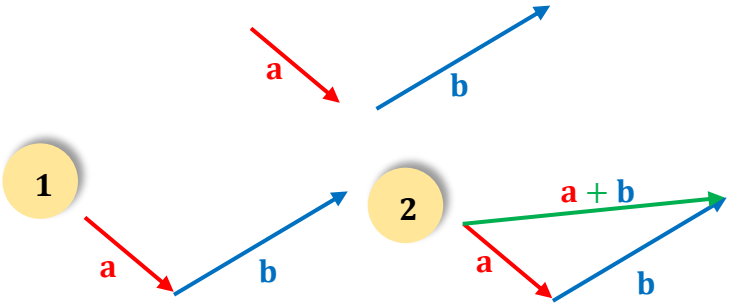
$$a + (-a) = 0$$

إيجاد المحصلة هندسيًا

قاعدة المثلث

طريقته:

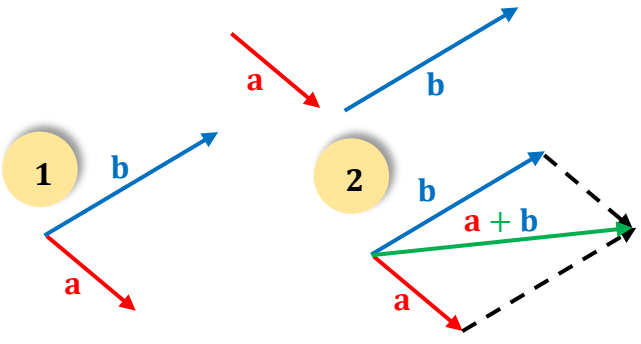
- تلتقي نقطة نهاية المتجه a مع نقطة بداية المتجه b
- المحصلة هي المتجه المرسوم من نقطة بداية المتجه a إلى نهاية المتجه b



قاعدة متوازي الأضلاع

طريقته:

- تلتقي نقطة بداية المتجه a مع نقطة بداية المتجه b
- نكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه a, b
- المحصلة هي المتجه الذي يمثل قطر متوازي الأضلاع الذي بدايته نقطة التقاء بداية المتجهين.



العمليات على المتجهات

$|k|$ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k

$|v|$ طول المتجه v

ضرب متجه في عدد حقيقي

إذا ضرب المتجه v في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه k v هو : $|k|\,|v|$

ويتحدد اتجاهه بإشارة k

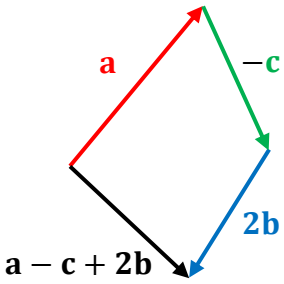
إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه kv هو اتجاه v نفسه .

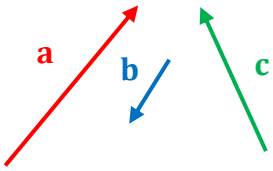
إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه kv هو عكس اتجاه v.

مثال

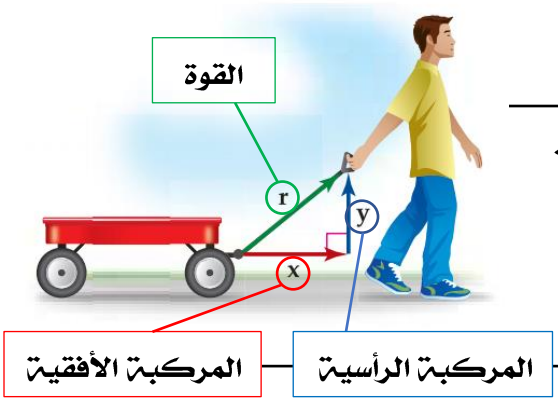
ارسم المتجه التالي :

$a - c + 2b$





المركبات المتعامدة



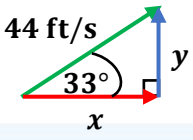
هي مركبتان متعامدتان واحدة أفقية والأخرى رأسية .

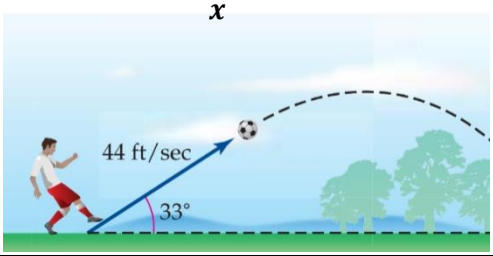
مقدار المركبة الأفقية $|x| = r\cos\theta$

مقدار المركبة الرأسية $|y| = r\sin\theta$

مثال

يركل لاعبٌ كرة قدمٍ من سطح الأرض بسرعة مقدارها $44\ ft/s$ ، وبزاوية $33°$ مع سطح الأرض.





مقدار المركبة الأفقية للسرعة $|x| = r\cos\theta$

$|x| = 44\cos 33° \approx 36.9\ ft/s$

مقدار المركبة الرأسية للسرعة $|y| = r\sin\theta$

$|y| = 44\sin 33° \approx 23.96\ ft/s$

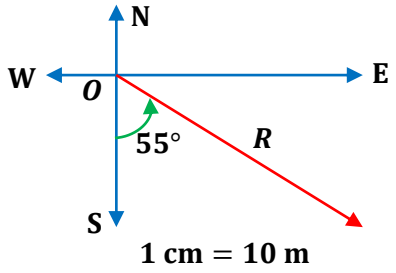
اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 مساحة مربع $20\ m^2$ تسمى هذي الكمية بـ

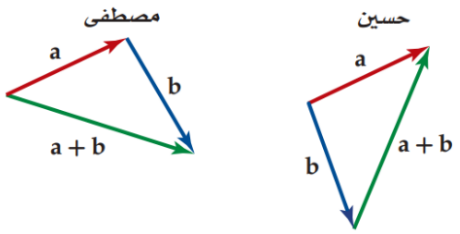
A	كمية قياسية	B	كمية متجهة	C	كمية مركبة	D	كمية قطبية

2 زاوية الاتجاه الربعي في الشكل المقابل تكتب بالصورة :



A	145°	B	S 55°E	C	N 55°E	D	055°

3 حاول كل من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين في الشكل المقابل فكان:



A	مصطفى إجابته صحيحة	B	حسين إجابته صحيحة	C	كلاهما صحيح	D	كلاهما خاطئ

أكمل الفراغات التالية :

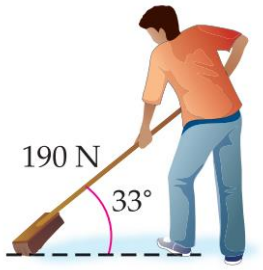
1 مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين 18 N للأمام ثم 20 N للخلف يساوي ..... واتجاهها .....

2 المتجهان اللذان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه هما المتجهان الـ.....

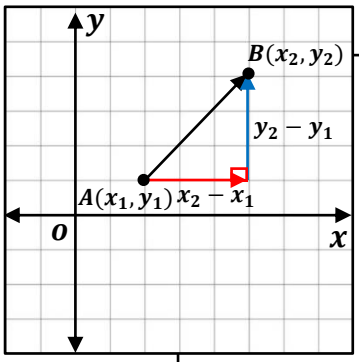
أوجد حل ما يلي:

يدفع حسن مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل.

- أوجد مقدار كل من المركبة الأفقية والراسية؟



الصورة الإحداثية لمتجه



الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1)$

ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle$

مثال :

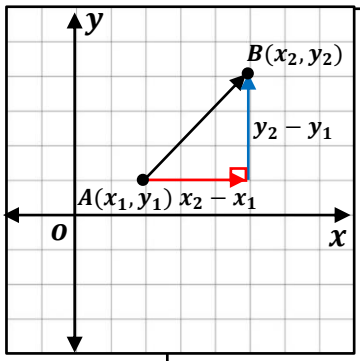
الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-2 , -7)$

ونقطة نهايته $B(6 , 1)$ هي:

$$= \langle 6 - (-2), 1 - (-7) \rangle$$

$$= \langle 8 , 8 \rangle$$

طول المتجه



طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1)$

ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2)$ هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال :

طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-2 , -7)$

ونقطة نهايته $B(6 , 1)$ هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (1 - (-7))^2}$$

$$= \sqrt{128} \approx 11.3$$

إذا كانت الصورة الإحداثية للمتجه هي : $\langle a , b \rangle$ فإن طوله $= \sqrt{a^2 + b^2}$

من مثال : الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB} = \langle 8 , 8 \rangle$ فإن طوله هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(8)^2 + (8)^2} = \sqrt{128} \approx 11.3$$

العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 \rangle$ متجهين و k عدد حقيقياً، فإن :

جمع متجهين	طرح متجهين	ضرب متجه في عدد حقيقي
$\mathbf{a} + \mathbf{b} =$	$\mathbf{a} - \mathbf{b} =$	$k\,\mathbf{a} =$
$\langle a_1 + b_1 , a_2 + b_2 \rangle$	$\langle a_1 - b_1 , a_2 - b_2 \rangle$	$\langle k\,a_1 , k\,a_2 \rangle$

مثال

إذا كان : $\mathbf{a} = \langle 2 , 5 \rangle \ , \mathbf{b} = \langle -3 , 0 \rangle \ , \mathbf{c} = \langle -4 , 1 \rangle$

$$2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$$

$$= 2\langle -4 , 1 \rangle + 4\langle 2 , 5 \rangle - \langle -3 , 0 \rangle$$

$$= \langle -8 , 2 \rangle + \langle 8 , 20 \rangle + \langle 3 , 0 \rangle$$

$$= \langle 3 , 22 \rangle$$

متجه الوحدة

متجه طوله 1 ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$

طريقة إيجاده : قسمه المتجهة على طوله . $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

مثال

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{w} = \langle 6 , -2 \rangle$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$$

$$= \frac{\langle 6 , -2 \rangle}{|\langle 6 , -2 \rangle|}$$

$$= \frac{\langle 6 , -2 \rangle}{\sqrt{6^2 + (-2)^2}}$$

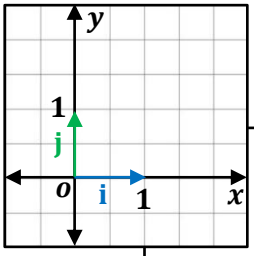
$$= \frac{\langle 6 , -2 \rangle}{\sqrt{40}}$$

$$= \left\langle \frac{6}{\sqrt{40}} , \frac{-2}{\sqrt{40}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{6\sqrt{40}}{40} , \frac{-2\sqrt{40}}{40} \right\rangle$$ ← انطاق المقام

$$= \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10} , \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle$$ ← بالتبسيط

متجها الوحدة القياسيان

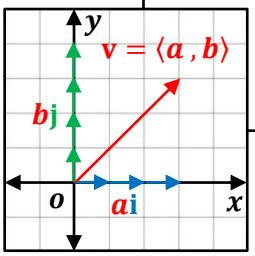


هما متجها الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x والاتجاه الموجب لمحور y

ويرمز لهما بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1 , 0 \rangle , \mathbf{j} = \langle 0 , 1 \rangle$

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a , b \rangle$

بالصورة : $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$



التوافق الخطي

يقصد به كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i} , \mathbf{j}$

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ توافق خطي لمتجهي الوحدة .

ملاحظة

i عدد تخيلي

$\mathbf{i}$ متجه الوحدة

مثال

اكتب المتجه $\overrightarrow{\mathbf{DE}}$ على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $\mathbf{i} , \mathbf{j}$

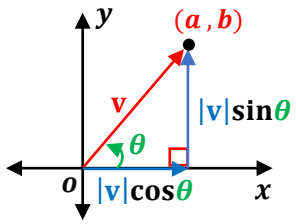
$D(-6 , 0) , E(2 , 5)$

أولًا: نكتب المتجه بالصورة الإحداثية $\overrightarrow{\mathbf{DE}} = \langle 2 - (-6), 5 - 0 \rangle = \langle 8 , 5 \rangle$

ثانيًا: نعيد كتابتها كتوافق خطي $\overrightarrow{\mathbf{DE}} = \langle 8 , 5 \rangle = 8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

إيجاد الصورة الإحداثية

الصورة الإحداثية لمتجه معطى **طوله** و **زاوية** اتجاهه مع الأفقي



طول المتجه $|\mathbf{v}|$ و الزاوية θ

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta \, , |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$$

ويمكن كتابتها كتوافق خطي

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| (\cos\theta)\, \mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin\theta)\, \mathbf{j}$$

مثال

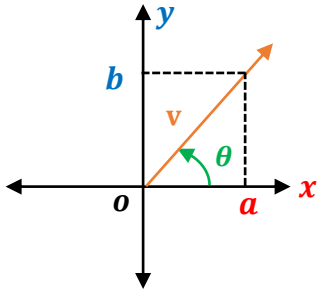
أوجد **الصورة الإحداثية** للمتجه v المعطى

طوله $|\mathbf{v}| = 8$ وزاوية الاتجاه مع الأفقي $\theta = 45°$

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta \, , |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$$

$$\mathbf{v} = \langle 8 \cos 45° \, , 8 \sin 45° \rangle = \langle 4\sqrt{2} \, , 4\sqrt{2} \rangle$$

زوايا الاتجاه للمتجهات



زاوية اتجاه المتجه مع الاتجاه الأفقي (**الموجب لمحور** x)

إذا كان المتجه $\mathbf{v} = \langle a \, , b \rangle$ وذلك بحل المعادلة : $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

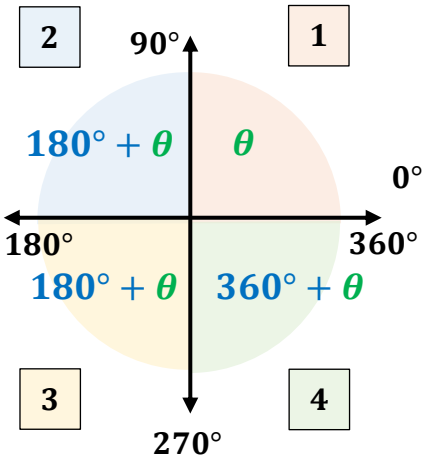
لإيجاد الزاوية

1 نحدد **الربع** الذي تقع فيه الزاوية :

- إذا كانت $\tan\theta$ موجبة فإن الزاوية θ تقع في **الربع** الأول أو **الربع** الثالث.
- إذا كانت $\tan\theta$ سالبة فإن الزاوية θ تقع في **الربع** الثاني أو **الربع** الرابع.

لتحديد الربع بشكل أدق نستعمل قيمتي a و b حيث تؤخذ a من محور x وتؤخذ b من محور y .

2 نحدد قيمة الزاوية θ وذلك عن طريق $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$



الزاوية المطلوبة مع الاتجاه الأفقي

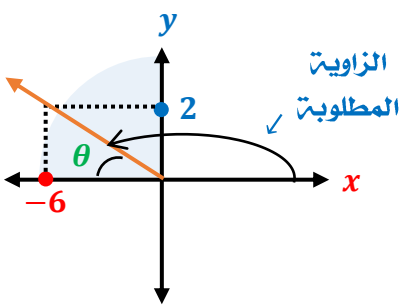
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الأول تبقى كما هي (موجبة)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثاني تكون (سالبة)
  ولإيجادها نضيف $180°$ (لأنها ستكون أقل من $180°$)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثالث تكون (موجبة)
  ولإيجادها نضيف $180°$ (لأنها ستكون أكبر من $180°$)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الرابع تكون (سالبة)
  ولإيجادها نضيف $360°$ (لأنها ستكون أقل من $360°$)

مثال

أوجد زاوية المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور x :

$-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

$a = -6 \ , b = 2$



$\tan\theta = \frac{b}{a}$

$\tan\theta = \frac{2}{-6}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{2}{-6}$

$\theta = -18.4°$

θ تقع في الربع الثاني

$180° + \theta$

$= 180 - 18.4$

$= 161.6°$

تطبيقات العمليات على المتجهات

إيجاد محصلة سرعة الحركة

1. نوجد متجه السرعة الأول وغالبًا يكون متجه أفقي $\mathbf{v}_1 = \langle a , 0 \rangle$

2. نوجد الصورة الإحداثية لمتجه السرعة الثاني والذي مقداره $\mathbf{v}_2$ وزاوية اتجاهه θ

$$\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2| \cos\theta \ , |\mathbf{v}_2| \sin\theta \rangle$$

3. نوجد مجموع المتجهين $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \langle a , b \rangle$

4. نوجد محصلة السرعتين باستخدام قانون طول المتجه

$$\mathbf{v} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

إيجاد اتجاه الحركة

1. بعد إيجاد مجموع المتجهين $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \langle a , b \rangle$

2. $$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 الصورة الاحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(2,-7)$ ونقطة نهايته $B(-6,9)$ هي :

A	B	C	D
$\langle -8,-16\rangle$	$\langle -8,16\rangle$	$\langle 8,16\rangle$	$\langle 16,8\rangle$

2 إذا كان $h=\langle -6\ ,2\rangle, g=\langle -3\ ,-5\rangle, f=\langle 8\ ,0\rangle$ فإن $2f+g-3h$ تساوي :

A	B	C	D
$\langle -31\ ,11\rangle$	$\langle -31\ ,-11\rangle$	$\langle 31\ ,-11\rangle$	$\langle 30\ ,12\rangle$

3 عند كتابة $\overrightarrow{DE}$ الذي نقطة بدايته $D(4,-1)$ ونقطة نهايته $E(5,-7)$ على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $i\ ,j$ تصبح :

A	B	C	D
$i-6j$	$i-5j$	$i-j$	$i+6j$

4 الصورة الإحداثية للمتجه v الذي طوله $|v|=16$ وزاوية اتجاهه $\theta=330°$ مع الاتجاه الموجب للمحور x هي:

A	B	C	D
$\langle 8\sqrt{3},6\rangle$	$\langle 8\sqrt{3},8\rangle$	$\langle \sqrt{3},-8\rangle$	$\langle 8\sqrt{3},-8\rangle$

أكمل الفراغات التالية :

1 طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-3,1)$ ونقطة نهايته $B(4,5)$ يساوي .....

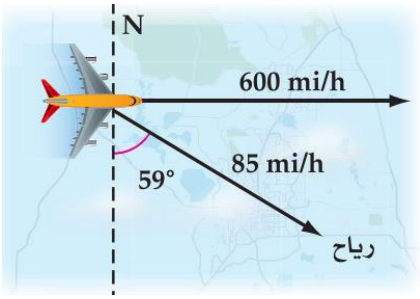
2 متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه المتجه $v=\langle 1,7\rangle$ هو .....

3 زاوية اتجاه المتجه $-4i-3j$ مع الاتجاه الموجب للمحور x تساوي .....

أوجد حل ما يلي:

تطير طائرة جهة الشرق بسرعة مقدارها 600 mi/h وتهب الرياح بسرعة مقدارها 85 mi/h باتجاه S 59° E

- أوجد محصلة سرعة الطائرة.
- أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة



الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 \rangle$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ ⟵ الناتج يكون عدداً وليس متجهًا

المتجهان متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

يساوي صفر

المتجهان غير متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

لا يساوي صفر

مثال

$\mathbf{u} = \langle -2 , -3 \rangle , \mathbf{v} = \langle 9 , -6 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2(9) + (-3)(-6)$

$= 0$

$\mathbf{u} = \langle 3 , -2 \rangle , \mathbf{v} = \langle -5 , 1 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-5) + (-2)(1)$

$= -17$

خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w}$ متجهات

وكان k عدد حقيقي

1 — **الخاصية الإبدالية**

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

2 — **خاصية الضرب في عدد حقيقي**

$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) =$

$k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$

3 — **خاصية التوزيع**

$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) =$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

4 — **خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري**

$0 \cdot \mathbf{u} = 0$

العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{u}|^2$$

5

مثال

استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه $\mathbf{c}=\langle -1\,,-7\rangle$

بما أن : $|c|^2=c\cdot c$ فإن : $|\mathbf{c}|=\sqrt{\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}$

$$|\mathbf{c}|=\sqrt{(-1,-7)\cdot(-1,-7)}$$

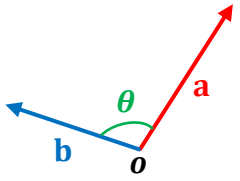
$$|\mathbf{c}|=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2}=\sqrt{50}=7.07$$

الزاوية بين المتجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}\,,\mathbf{b}$ فإن :

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$

$$\theta=\cos^{-1}\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$



إذا كانت الزاوية بين المتجهين $90°$ فإنهما متعامدان .

إذا كانت الزاوية بين المتجهين $0°$ أو $180°$ فإنهما متوازيان .

مثال

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}\,,\mathbf{v}$:

$\mathbf{u}=\langle -5\,,-2\rangle\,,\mathbf{v}=\langle 4\,,4\rangle$

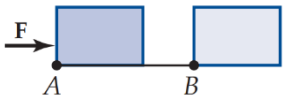
$$\theta=\cos^{-1}\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|}$$

$$\theta=\cos^{-1}\frac{-5(4)+(-2)4}{\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}\sqrt{4^2+4^2}}$$

$$\theta=\cos^{-1}\frac{-28}{\sqrt{29}\sqrt{32}}$$

$$\theta=\cos^{-1}\frac{-28}{4\sqrt{58}}=156.8°$$

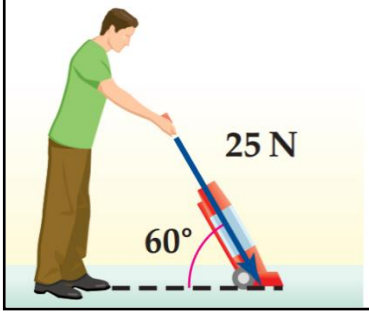
الشغل



مقدار القوة المؤثرة في جسم لتحركيه مضروبًا في المسافة المتجهة التي تحركها .

$$W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$$

مثال



يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25 N ، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60° ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m

$$W = F.\overrightarrow{AB}$$

1 الصورة الإحداثية للقوة المتجه F بدلالة مقدار القوة ، وزاوية الاتجاه هي :

$$\mathbf{F} = \langle 25\cos 60° , 25\sin 60° \rangle$$

$$\mathbf{F} = \langle 12.5 , 21.6 \rangle$$

2 الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي :

$$\overrightarrow{AB} = \langle 6 , 0 \rangle$$

3

$$W = F.\overrightarrow{AB}$$

$$W = \langle 12.5 , 21.6 \rangle \cdot \langle 6 , 0 \rangle$$

$$W = 75 + 0 = 75 \text{ J}$$

وحدات الشغل في النظام المتري نيوتن- متر أو جول

طريقة أخرى مختصرة

$$W = d\,.F.\cos\theta$$

$$d = 6 \ , \quad F = 25 \ , \quad \theta = 60°$$

$$W = 6\,(25)\cos 60°$$

$$W = 75 \text{ J}$$

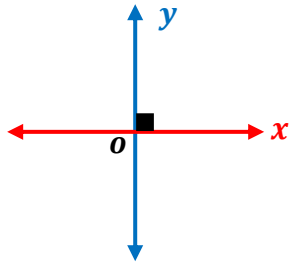
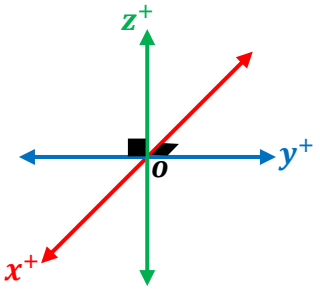
اختبر نفسك

	اختر الإجابة الصحيحة :						
1	حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $u = \langle 4, -4\rangle, v = \langle 7, 5\rangle$ هو :						
	A	8	B	10	C	-8	D	6
2	طول المتجه $r = \langle -9, -4\rangle$ هو :						
	A	9.8	B	8.9	C	8.5	D	5.8
3	المتجهان $u = 11i + 7j , v = -7i + 11j$:						
	A	متوازيان	B	متساويان	C	متعامدان	D	متعاكسان
	أكمل الفراغات التالية :						
1	الزاوية θ بين المتجهين $u = \langle 7, 10\rangle , v = \langle 4, -4\rangle$ تساوي تقريبًا						
2	المتجه الذي يعامد المتجه $\langle 7, -4\rangle$ هو						
	أوجد حل ما يلي:						

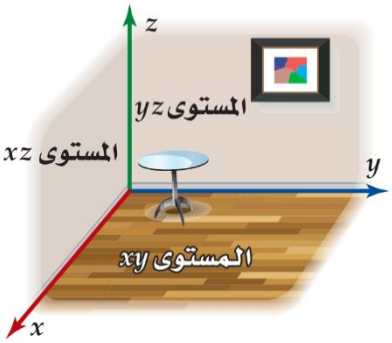
يدفع طارق برميلًا على أرض مستوية مسافة 1.5m بقوة مقدارها 534 N بزاوية $25°$.

- أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق وقرب الناتج الى أقرب عدد صحيح .

الفرق بين نظام المستوى الإحداثي و نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد

المستوى الإحداثي	نوع النظام	المستوى الثلاثي الأبعاد
2	عدد المحاور	3
يتشكل بواسطة خطي أعداد متعامدين هما المحور x والمحور y	المحاور	يتشكل بواسطة ثلاثة خطوط متعامدة هي المحور x والمحور y والمحور z
يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل $(0,0)$	نقطة التقاطع	تتقاطع في نقطة تسمى نقطة الأصل $(0,0,0)$
مستويان تقسم المستوى إلى أربع مناطق يسمى كل منها الربع .	شكلها	ثلاث مستويات تقسم الفضاء إلى ثماني مناطق يسمى كل منها الثمن .
تحديد وتعيين نقاط في المستوى .	يسمح هذا النظام بـ	تحديد وتعيين نقاط في الفضاء.
(x,y)	الإحداثيات	(x,y,z)
	التمثيل البياني	

الثمن



الشكل المجاور يمثل الثمن في الفضاء الثلاثي الأبعاد

وهو الجزء الظاهر من الغرفة .

الثلاثي المرتب

وهو شكل كتابة النقطة في الفضاء (x,y,z) حيث أنها أعداد حقيقية .

مثال : $(2,4,-6)$

تعيين نقطة في الفضاء

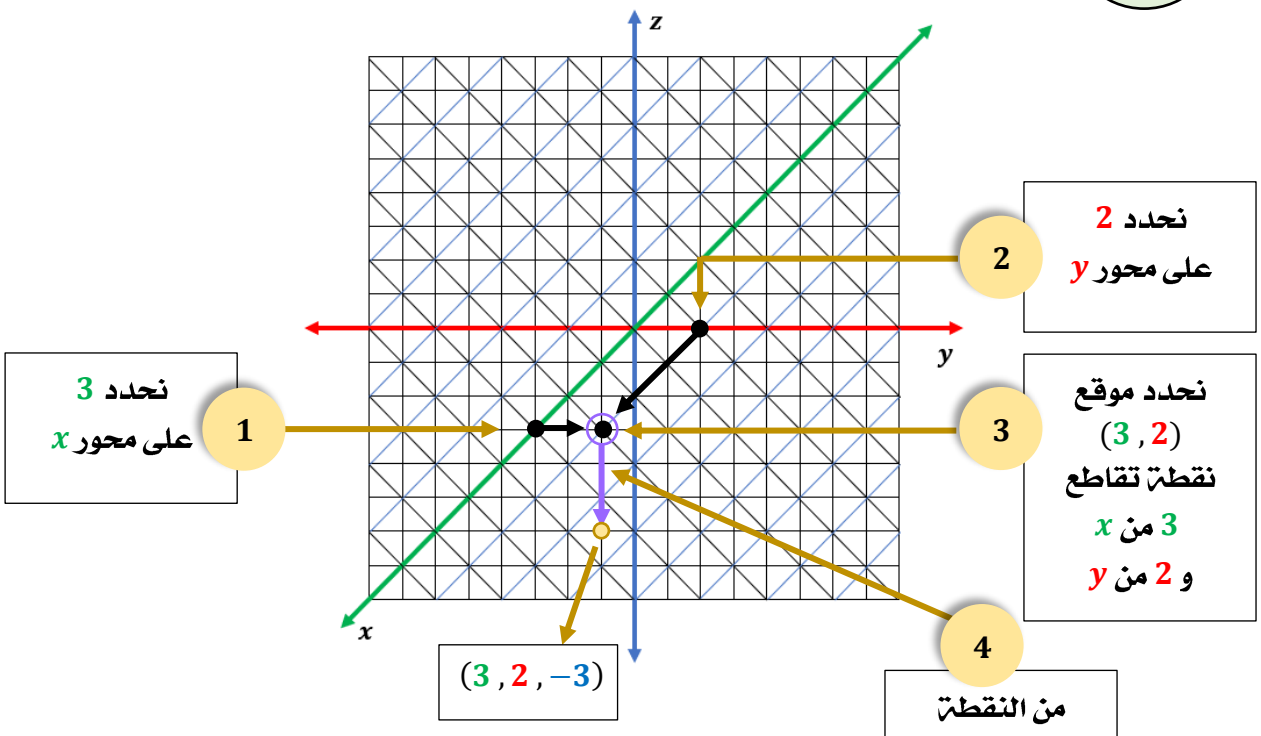
لتكن النقطة (x, y, z)

1 عين النقطة (x, y) في المستوى xy

2 تحرك لأعلى إذا كانت قيمة z موجبة أو إلى أسفل إذا كانت قيمة z سالبة باتجاه موازي لمحور z

مثال

عين النقطة $(3, 2, -3)$ في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :



المسافة بين نقطتين في الفضاء

يشبه قانون المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي

$A(x_1 , y_1 , z_1) , B(x_2 , y_2 , z_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

نقطة المنتصف في الفضاء

يشبه قانون نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي

$A(x_1 , y_1 , z_1) , B(x_2 , y_2 , z_2)$

نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2} , \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

المتجهات في الفضاء

تشبه المتجهات في المستوى الإحداثي

المتجه في الوضع القياسي $\mathbf{v} = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$

المتجه الصفري $\mathbf{0} = \langle 0 , 0 , 0 \rangle$

متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية :

$\mathbf{i} = \langle 1 , 0 , 0 \rangle , \mathbf{j} = \langle 0 , 1 , 0 \rangle , \mathbf{k} = \langle 0 , 0 , 1 \rangle$

يمكن التعبير عن المتجه v على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة i , j , k :

$$\mathbf{v} = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}$$

تعيين متجه في الفضاء

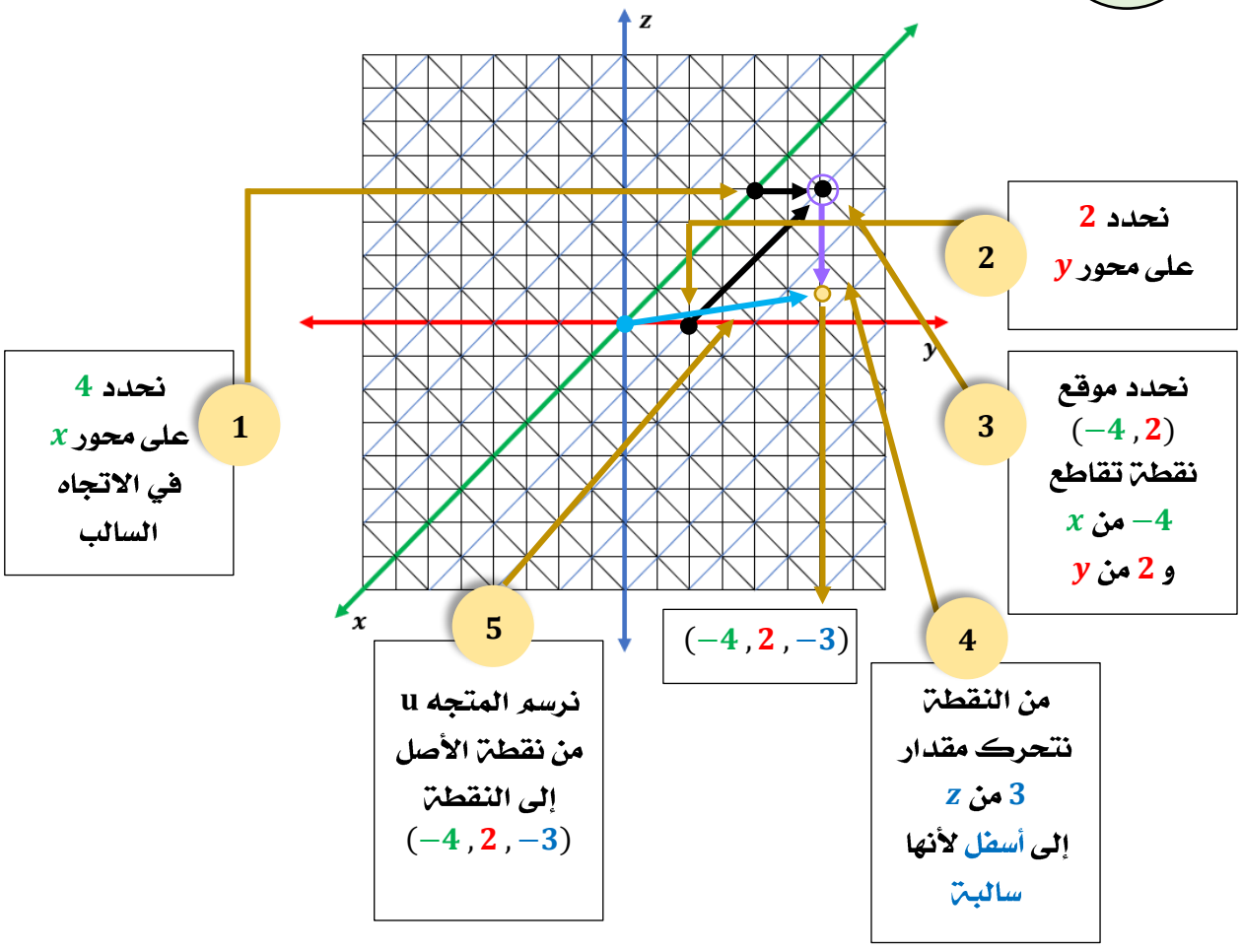
ليكن المتجه $\mathbf{v} = \langle x , y , z \rangle$

1 عين النقطة (x , y , z) بالطريقة السابقة.

2 المتجه v بيانيًا وذلك بأن تكون نقطة الأصل هي نقطة البداية والنقطة (x , y , z) هي نقطة النهاية.

مثال

عين المتجه $\mathbf{u} = \langle -4 , 2 , -3 \rangle$ في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :



العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 , b_3 \rangle$ متجهين و k عدد حقيقياً، فإن :

خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1 , a_2 - b_2 , a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجه في عدد حقيقي $k\,\mathbf{a} = \langle ka_1 , ka_2 , ka_3 \rangle$

التعبير عن المتجهات في الفضاء يشبه المستوى الإحداثي

الصورة الإحداثية لمتجه في الفضاء

الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1 , z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2 , z_2)$ هي:

$$\langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \rangle$$

طول المتجه في الفضاء

طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1 , z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2 , z_2)$ هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

متجه الوحدة في الفضاء

متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو :

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

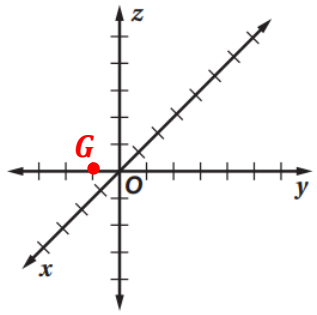
1 طول القطعة المستقيمة التي نقطة بدايتها $(-4, 10, 4)$ ونقطة نهايتها $(1, 0, 9)$ تساوي :

A		B		C		D	
10.75		12.25		13.25		10	

2 إذا كانت $M(3,4,5), N(\frac{7}{2}, 1, 2)$ وكانت N منتصف $\overline{MP}$ فإن إحداثيات النقطة P هي :

A		B		C		D	
$(3,4,5)$		$(\frac{7}{2}, 1, 2)$		$(4, -2, -1)$		$(4, 1, -1)$	

3 إحداثيات النقطة G في المستوى الثلاثي الأبعاد هي:



A		B		C		D	
$(0, -1, 5)$		$(-3, -3, -2)$		$(0, 1, 0)$		$(3, 2, 1)$	

أكمل الفراغات التالية :

1 إذا كانت $A(3, 5, 1)$ نقطة بداية القطعة المستقيمة و$B(0, 0, -9)$ نقطة النهاية فإن متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو : .....

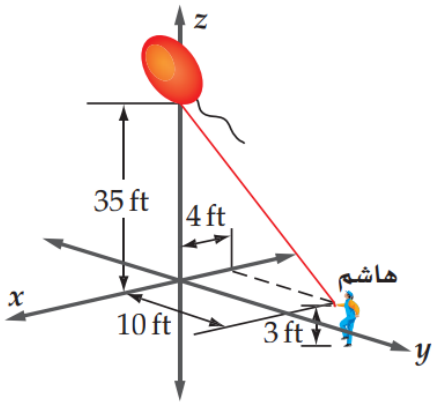
2 إذا كان $a = \langle -5, -4, 3 \rangle, b = \langle 6, -2, -7 \rangle, c = \langle -2, 2, 4 \rangle$ ، فإن $6a - 7b + 8c$ تساوي .....

أوجد حل ما يلي:

تطوع هاشم لحمل بالون كدليل في استعراض رياضي .

إذا كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الارض ويمسك هاشم بالحبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض كما في الشكل أدناه .

- أوجد طول الحبل إلى أقرب قدم.



الضرب الداخلي في الفضاء

الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 , b_3 \rangle$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ ⟵ الناتج يكون عددًا وليس متجهًا

المتجهان متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

يساوي صفر

المتجهان غير متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

لا يساوي صفر

مثال

$\mathbf{u} = \langle 3 , -5 , 4 \rangle , \mathbf{v} = \langle 5 , 7, 5 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(5) + (-5)7 + 4(5)$

$= 0$

$\mathbf{u} = \langle 4 , -2 , -3 \rangle , \mathbf{v} = \langle 1 , 3, -2 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4(1) + (-2)3 + (-3)(-2)$

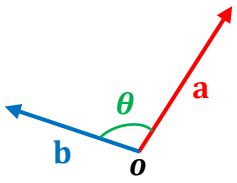
$= 4$

الزاوية بين المتجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a} , \mathbf{b}$ فإن :

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$



مثال

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u} , \mathbf{v}$:

$\mathbf{u} = \langle -4 , 2 , 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle 4 , 0 , 3 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-4(4) + 2(0) + 1(3)}{\sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (1)^2}\ \sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (3)^2}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-13}{\sqrt{21}\ \sqrt{25}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-13}{5\sqrt{21}} = 124.6°$$

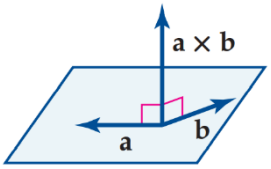
الضرب الاتجاهي

الضرب الاتجاهي لمتجهين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ هو متجه وليس عدداً

ويرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ($\times$ تقرأ cross)

ويكون المتجه الناتج عموديًا على المستوى الذي يحوي المتجهين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في النظام ثلاثي الأبعاد فقط.



الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان : $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$

فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ هو المتجه :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

يكون الضرب الاتجاهي $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عموديًا على كلًا من المتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$

إذا كان حاصل الضرب الداخلي لـ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ مع كلًا من المتجهين يساوي صفرًا.

مثال

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$: $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

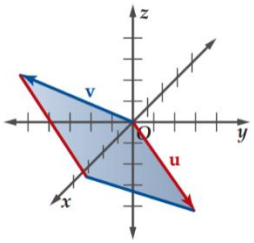
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2(4) - (-1)(1))\mathbf{i} - (4(4) - (-1)(5))\mathbf{j} + (4(1) - 2(5))\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (8 + 1)\mathbf{i} - (16 + 5)\mathbf{j} + (4 - 10)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 9\,\mathbf{i} - 21\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}$$

تطبيقات هندسية للضرب الاتجاهي



مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه u , v ضلعان متجاوران

هو طول $u \times v$ أي مقدار المتجه $|u \times v|$

مثال

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه :

$u = -6i - 2j + 3k$, $v = 4i + 3j + k$ ضلعان متجاوران.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

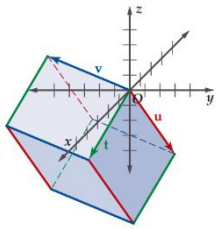
$$u \times v = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} k$$

$$u \times v = -11\,i + 18\,j - 10\,k$$

$$|u \times v| = \sqrt{(-11)^2 + (18)^2 + (-10)^2}$$

$$|u \times v| = \sqrt{545} = 23.3$$

مساحة متوازي الأضلاع تساوي 23.3 وحدة مربعة



متوازي السطوح : هو مجسم ثلاثي الأبعاد في الفضاء ، له ستة أوجهٍ ، كل منها على شكل متوازي أضلاع .

حجم متوازي السطوح : هو القيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي .

إذا كان : $t = t_1 i + t_2 j + t_3 k$, $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$, $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$

الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات t , u , v :

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مثال

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه :

$t = 2j - 5k$, $u = -6i - 2j + 3k$, $v = 4i + 3j + k$ أحرف متجاورة .

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} (0) - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} (2) + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} (-5)$$

$$t \cdot (u \times v) = -10\,(0) + 18(2) + (-10)(-5)$$

$$t \cdot (u \times v) = 36 + 50 = 86$$

حجم متوازي السطوح يساوي 86 وحدة مكعبة

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}=\langle 5,0,-4\rangle, \mathbf{v}=\langle 6,-1,4\rangle$ هو :

A		B		C		D	
-14		-12		12		14	

2 مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}=\langle -9,1,2\rangle, \mathbf{v}=\langle 6,-5,3\rangle$ حيث ان $\mathbf{u},\mathbf{v}$ ضلعان متجاوران :

A		B		C		D	
$13\sqrt{19}$		$13\sqrt{16}$		$13\sqrt{15}$		$\sqrt{19}$	

3 إذا كان $\mathbf{u}=\langle 3,2,-2\rangle, \mathbf{v}=\langle -4,4,5\rangle$ فإن $\mathbf{u}.(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ تساوي :

A		B		C		D	
غير ممكن		2		1		0	

أكمل الفراغات التالية :

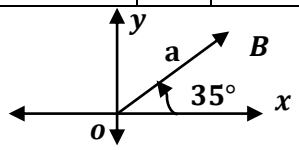
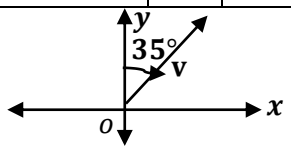
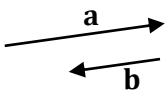
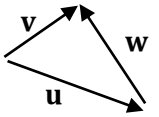
1 الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}=\langle -1,3,5\rangle, \mathbf{v}=\langle -2,-6,-3\rangle$ هو .....

2 حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t},\mathbf{u},\mathbf{v}$ أحرف متجاورة وحيث $\mathbf{v}=\langle -9,5,-4\rangle$ $\mathbf{u}=\langle 4,-6,3\rangle, \mathbf{t}=\langle 2,-3,-1\rangle$ يساوي .....

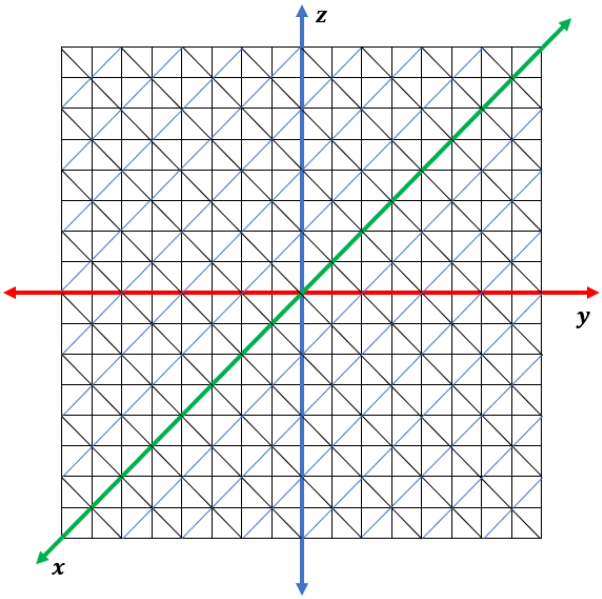
أوجد حل ما يلي:

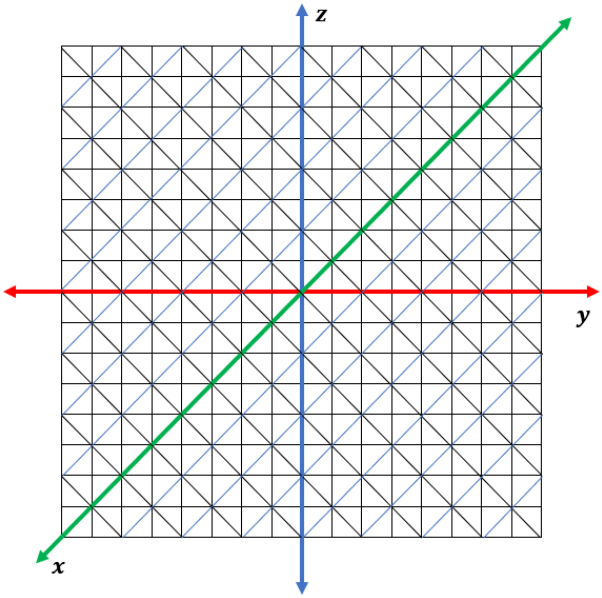
إذا كان $\mathbf{u}=\langle 6,-5,1\rangle, \mathbf{v}=\langle -8,-9,5\rangle$

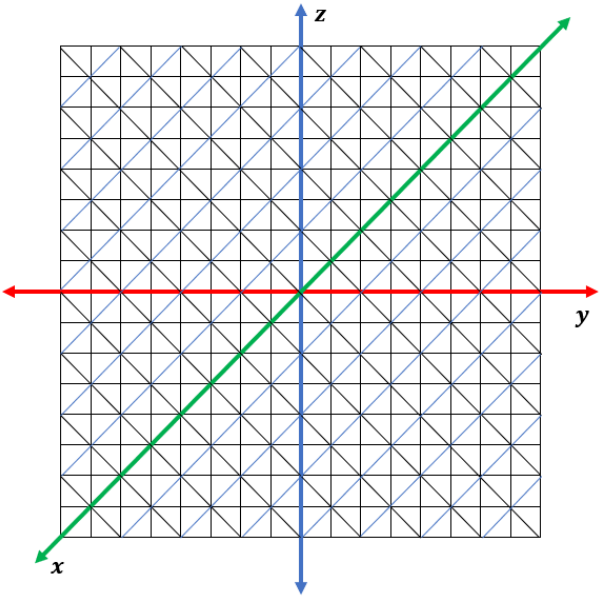
- أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة .

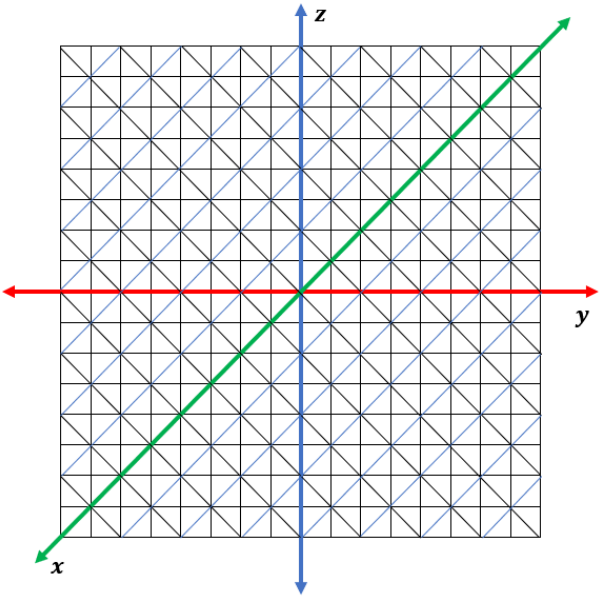
اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
1	أي الكميات التالية كمية متجهة ؟						
	A	الزمن	B	المسافة	C	الإزاحة	D	الكتلة
2	في الشكل : قياس زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه .. 						
	A	35°	B	035°	C	055°	D	090°
3	في الشكل المجاور : الاتجاه الربعي للمتجه .... 						
	A	N 35° E	B	N 55° E	C	W 55° S	D	N 35° W
4	إذا كان اتجاه متجه 120° ، فإن اتجاهه الربعي						
	A	N 30° W	B	N 30° E	C	N 60° W	D	N 60° E
5	إذا كان اتجاه متجه 180° ، فإن قياس زاوية اتجاهه الحقيقي ...						
	A	90°	B	180°	C	270°	D	300°
6	إذا كان قياس زاوية الاتجاه الحقيقي لمتجه 155° ، فإن اتجاهه الربعي ..						
	A	N 55° E	B	S 25° E	C	W 55° S	D	N 35° E
7	في الشكل المجاور : أي الخيارات التالية تمثل العلاقة بين المتجهين a , b 						
	A	متوازيان	B	متساويان	C	a معكوس لـ b	D	متطابقان
8	في الشكل المجاور : المتجه الذي يمثل محصلة المتجهين الآخرين هو ..... 						
	A	v	B	u	C	w	D	w + v
9	تسير باخرة بزاوية قيمتها 60° مع الأفقي وبسرعة 100 k m/h ، ما مقدار المركبة الأفقية لسرعة الباخرة ؟						
	A	50 km/h	B	$50\sqrt{3}$ km /h	C	200 km/h	D	$200\sqrt{3}$ km/h
10	أي المتجهات التالية طوله 6 وحدات؟						
	A	$\langle 2 , 4\rangle$	B	$\langle \sqrt{5} , 1\rangle$	C	$\langle 3\sqrt{3} , 3\rangle$	D	$\langle 2 , \sqrt{3}\rangle$
11	إذا كان لدينا المتجهين $A = \langle 5 , -3\rangle, B = \langle 1 , 4\rangle$ فإن : $2A - B$						
	A	$\langle 9 , -10\rangle$	B	$\langle 6 , 1\rangle$	C	$\langle 4 , -7\rangle$	D	$\langle -3 , 11\rangle$
12	متجه الوحدة u باتجاه المتجه $v = \langle 3 , -4\rangle$ يساوي ...						
	A	$\langle -1 , 0\rangle$	B	$\langle 1 , -1\rangle$	C	$\langle -\frac{3}{5} , \frac{4}{5}\rangle$	D	$\langle \frac{3}{5} , \frac{-4}{5}\rangle$

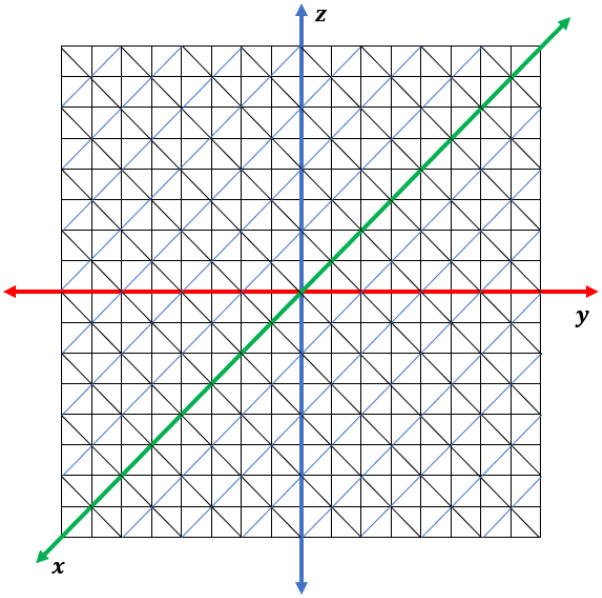
اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
13	المتجه $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 2j$ بالصورة الإحداثية يساوي ..						
	A	$\langle 5 , 2 \rangle$	B	$\langle 2 , 5 \rangle$	C	$\langle 5 , -2 \rangle$	D	$\langle -2 , 5 \rangle$
14	ما الصورة الإحداثية لمتجه v طوله 14 وزاوية اتجاهه مع الأفقي $210°$						
	A	$\langle 7 , 7\sqrt{3} \rangle$	B	$\langle -7\sqrt{3} , -7 \rangle$	C	$\langle -7\sqrt{3} , 7 \rangle$	D	$\langle 14 , 210 \rangle$
15	إذا كان $\mathbf{v} = \langle 5 , 7 \rangle , \mathbf{u} = \langle 3 , -2 \rangle$ فإن : $\mathbf{u} . \mathbf{v}$ يساوي						
	A	-14	B	-1	C	1	D	15
16	إذا كان المتجهان $\mathbf{v} = \langle 3 , k \rangle , \mathbf{u} = \langle 1 , -2 \rangle$ متعامدين فما قيمة k ؟						
	A	-2	B	$-\frac{3}{2}$	C	$\frac{3}{2}$	D	2
17	ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle 3 , 3 \rangle , \langle 2 , 0 \rangle$						
	A	$30°$	B	$45°$	C	$120°$	D	$135°$
18	أي مما يلي يمثل المتجه $\overrightarrow{AB}$ ، إذا كان $A(3 , 4 , -4) , B(-5 , 2 , 1)$ ؟						
	A	$\langle -8 , -2 , 5 \rangle$	B	$\langle 8 , -2 , -3 \rangle$	C	$\langle 8 , 2 , -3 \rangle$	D	$\langle -8 , -2 , -3 \rangle$
19	طول المتجه $w = 5\mathbf{i} + 3j - \sqrt{2}k$ يساوي						
	A	$8 - \sqrt{2}$	B	6	C	$8 + \sqrt{2}$	D	$4\sqrt{2}$
20	إذا كان $\mathbf{v} = \langle -2 , -1 , 3 \rangle , \mathbf{u} = \langle b , -3 , 1 \rangle$ ، فما قيمة b التي تجعل المتجهين $\mathbf{u} , \mathbf{v}$ متعامدين ؟						
	A	-6	B	-3	C	3	D	6
21	بعد عدة دقائق من إطلاق بالونين يحويان هواءً ساخنًا في الهواء كانت إحداثيات البالونين هي $B(-30 , 15 , 10) , A(20 , 25 , 30)$. أوجد المسافة بين البالونين في تلك اللحظة.						
	A	$10\sqrt{30}$	B	$30\sqrt{10}$	C	300	D	3000
22	أوجد $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$						
	A	$2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	B	$-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$	C	$2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	D	$-2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
23	إذا كان $\mathbf{v} = \langle 2 , 0 , -1 \rangle , \mathbf{u} = \langle 1 , -2 , 0 \rangle$ متجهين ، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يساوي						
	A	$2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	B	$-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$	C	$2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	D	$-2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
24	متوازي أضلاع فيه $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ، ضلعان متجاوران ، ما مساحته بالوحدات المربعة ؟						
	A	13	B	21	C	$\sqrt{186}$	D	$\sqrt{458}$
25	حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. أحرف متجاورة يساوي ..... وحدة تكعيبية .						
	A	31	B	62	C	73	D	86

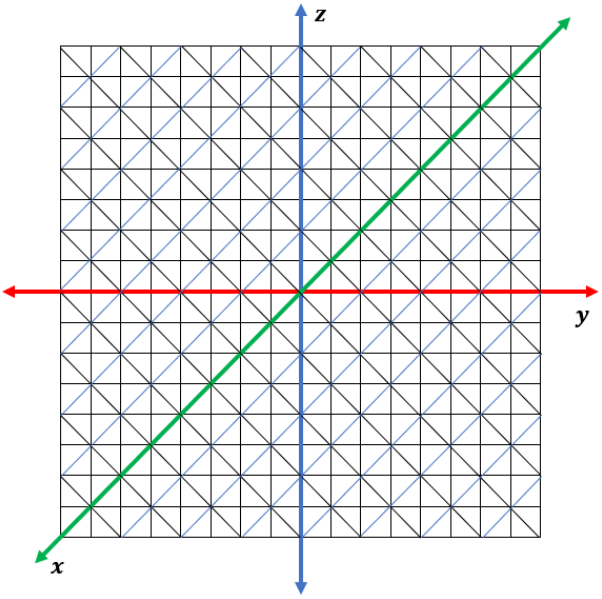

z
y
x

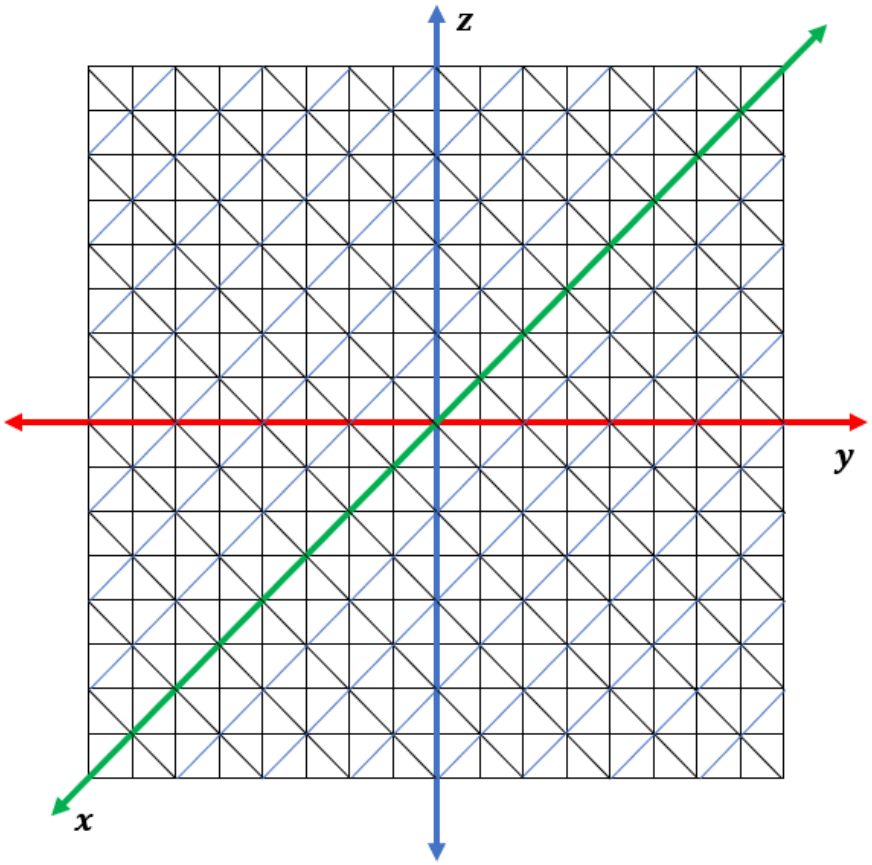

z
y
x

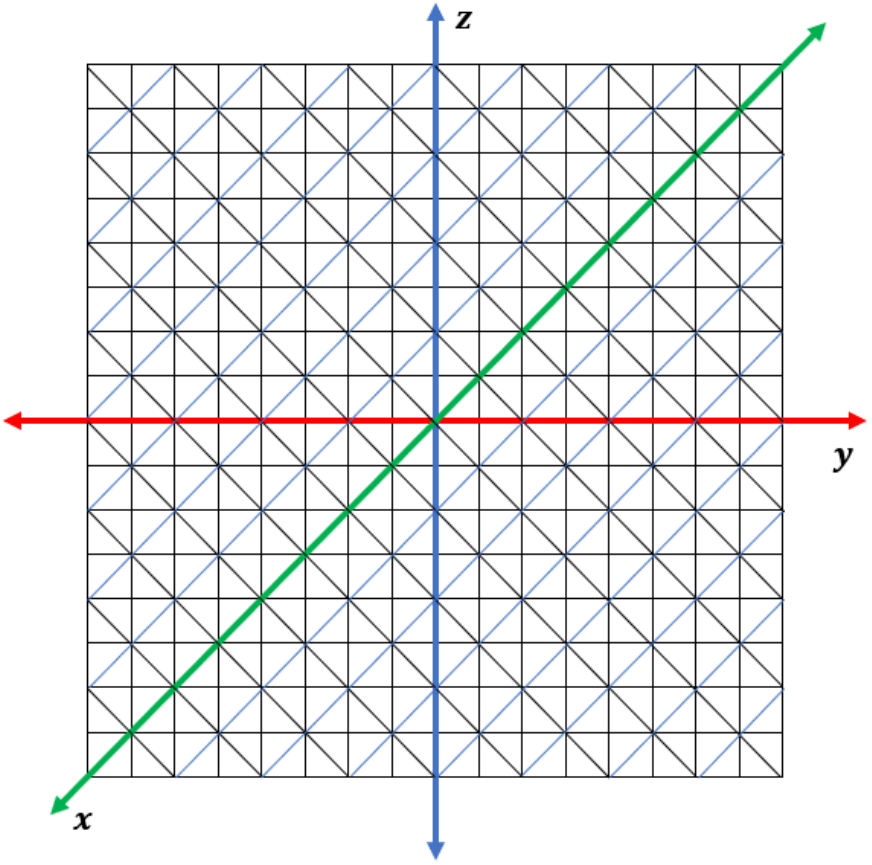

z
y
x


z
y
x


z
y
x


z
y
x


z
y
x


z
y
x

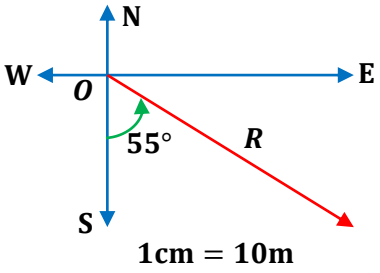
اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 مساحة مربع $20\ m^2$ تسمى هذي الكمية بـ

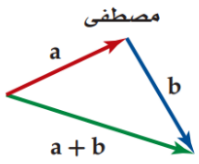
A	B	C	D
كمية قياسية	كمية متجهة	كمية مركبة	كمية قطبية

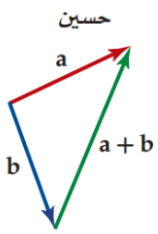
2 زاوية الاتجاه الربعي في الشكل المقابل تكتب بالصورة :



A	B	C	D
145°	S 55°E	N 55°E	055°

3 حاول كل من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين في الشكل المقابل فكان:





A	B	C	D
مصطفى إجابته صحيحة	حسين إجابته صحيحة	كلاهما صحيح	كلاهما خاطئ

أكمل الفراغات التالية :

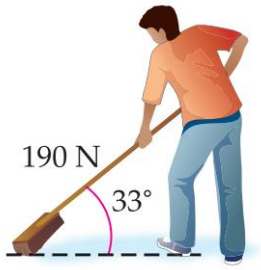
1 مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين 18 N للأمام ثم 20 N للخلف يساوي 2 واتجاهها للخلف

2 المتجهان اللذان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه هما المتجهان الـ متساويان

أوجد حل ما يلي:

يدفع حسن مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل.

- أوجد مقدار كل من المركبة الأفقية والراسية؟



مقدار المركبة الأفقية $\approx$ 159.3 N

مقدار المركبة الرأسية $\approx$ 103.5 N

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 الصورة الاحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(2,-7)$ ونقطة نهايته $B(-6,9)$ هي :

A	B	C	D
$\langle -8,-16\rangle$	$\langle -8,16\rangle$	$\langle 8,16\rangle$	$\langle 16,8\rangle$

2 إذا كان $h=\langle -6\,,2\rangle, g=\langle -3\,,-5\rangle, f=\langle 8\,,0\rangle$ فإن $2f+g-3h$ تساوي :

A	B	C	D
$\langle -31\,,11\rangle$	$\langle -31\,,-11\rangle$	$\langle 31\,,-11\rangle$	$\langle 30\,,12\rangle$

3 عند كتابة $\overrightarrow{DE}$ الذي نقطة بدايته $D(4,-1)$ ونقطة نهايته $E(5,-7)$ على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $i\,,j$ تصبح :

A	B	C	D
$i-6j$	$i-5j$	$i-j$	$i+6j$

4 الصورة الإحداثية للمتجه v الذي طوله $|v|=16$ وزاوية اتجاهه $\theta=330°$ مع الاتجاه الموجب للمحور x هي:

A	B	C	D
$\langle 8\sqrt{3},6\rangle$	$\langle 8\sqrt{3},8\rangle$	$\langle \sqrt{3},-8\rangle$	$\langle 8\sqrt{3},-8\rangle$

أكمل الفراغات التالية :

1 طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-3,1)$ ونقطة نهايته $B(4,5)$ يساوي $\sqrt{65}\approx 8.1$

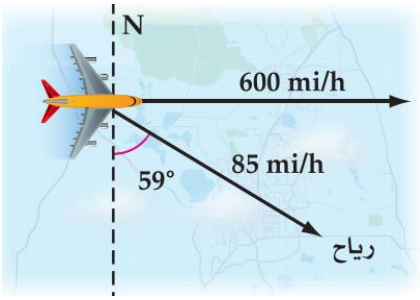
2 متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه المتجه $v=\langle 1,7\rangle$ هو $u=\langle \frac{\sqrt{2}}{10},\frac{7\sqrt{2}}{10}\rangle$

3 زاوية اتجاه المتجه $-4i-3j$ مع الاتجاه الموجب للمحور x تساوي $216.9°$ تقريبًا

أوجد حل ما يلي:

تطير طائرة جهة الشرق بسرعة مقدارها 600 mi/h وتهب الرياح بسرعة مقدارها 85 mi/h باتجاه S 59° E

- أوجد محصلة سرعة الطائرة.
- أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة



محصلة سرعة الطائرة : 674 mi/h

زاوية اتجاه مسار الطائرة : S 86° E

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :							
1	حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $u = \langle 4, -4 \rangle, v = \langle 7, 5 \rangle$ هو :						
	A	8	B	10	C	-8	D	6
2	طول المتجه $r = \langle -9, -4 \rangle$ هو :						
	A	9.8	B	8.9	C	8.5	D	5.8
3	المتجهان $u = 11i + 7j , v = -7i + 11j$:						
	A	متوازيان	B	متساويان	C	متعامدان	D	متعاكسان
أكمل الفراغات التالية :							
1	الزاوية θ بين المتجهين $u = \langle 7, 10 \rangle , v = \langle 4, -4 \rangle$ تساوي تقريبًا $100°$						
2	المتجه الذي يعامد المتجه $\langle 7, -4 \rangle$ هو $\langle 8, 14 \rangle$ وهناك إجابات أخرى صحيحة.						

أوجد حل ما يلي:

يدفع طارق برميلًا على أرض مستوية مسافة 1.5m بقوة مقدارها 534 N بزاوية $25°$.

- أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق وقرب الناتج الى أقرب عدد صحيح .

الشغل يساوي 726 J

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

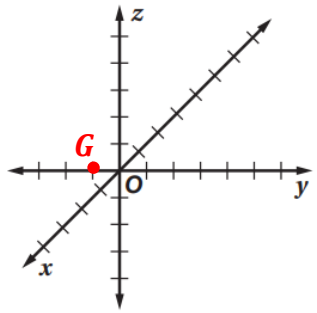
1 طول القطعة المستقيمة التي نقطة بدايتها $(-4, 10, 4)$ ونقطة نهايتها $(1, 0, 9)$ تساوي :

A		B		C		D	
10.75		12.25		13.25		10	

2 إذا كانت $M(3,4,5), N(\frac{7}{2}, 1, 2)$ وكانت N منتصف $\overline{MP}$ فإن إحداثيات النقطة P هي :

A		B		C		D	
$(3,4,5)$		$(\frac{7}{2}, 1, 2)$		$(4, -2, -1)$		$(4, 1, -1)$	

3 إحداثيات النقطة G في المستوى الثلاثي الأبعاد هي:



A		B		C		D	
$(0, -1, 5)$		$(-3, -3, -2)$		$(0, 1, 0)$		$(3, 2, 1)$	

أكمل الفراغات التالية :

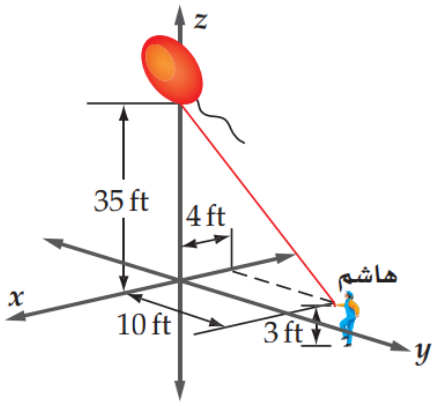
1 إذا كانت $A(3, 5, 1)$ نقطة بداية القطعة المستقيمة و$B(0, 0, -9)$ نقطة النهاية فإن متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو : $\mathbf{u} = \langle \frac{-3\sqrt{134}}{134}, \frac{-5\sqrt{134}}{134}, \frac{-5\sqrt{134}}{67} \rangle$

2 إذا كان $a = \langle -5, -4, 3 \rangle, b = \langle 6, -2, -7 \rangle, c = \langle -2, 2, 4 \rangle$ ، فإن $6a - 7b + 8c$ تساوي $\langle 88, 6, 99 \rangle$

أوجد حل ما يلي:

تطوع هاشم لحمل بالون كدليل في استعراض رياضي .
إذا كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الارض ويمسك هاشم بالحبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض كما في الشكل أدناه .

- أوجد طول الحبل إلى أقرب قدم.



طول الحبل يساوي 34 ft

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}=\langle 5,0,-4\rangle, \mathbf{v}=\langle 6,-1,4\rangle$ هو :

A	-14	B	-12	C	12	D	14

2 مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}=\langle -9,1,2\rangle, \mathbf{v}=\langle 6,-5,3\rangle$ حيث ان $\mathbf{u},\mathbf{v}$ ضلعان متجاوران :

A	$13\sqrt{19}$	B	$13\sqrt{16}$	C	$13\sqrt{15}$	D	$\sqrt{19}$

3 إذا كان $\mathbf{u}=\langle 3,2,-2\rangle, \mathbf{v}=\langle -4,4,5\rangle$ فإن $\mathbf{u}.(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ تساوي :

A	غير ممكن	B	2	C	1	D	0

أكمل الفراغات التالية :

1 الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}=\langle -1,3,5\rangle, \mathbf{v}=\langle -2,-6,-3\rangle$ هو $\langle 21\ ,\ 7\ ,\ 0\rangle$

2 حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t},\mathbf{u},\mathbf{v}$ أحرف متجاورة وحيث $\mathbf{v}=\langle -9,5,-4\rangle$
$\mathbf{t}=\langle 2,-3,-1\rangle, \mathbf{u}=\langle 4,-6,3\rangle$ يساوي 85 وحدة مكعبة

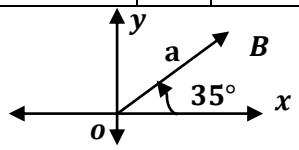
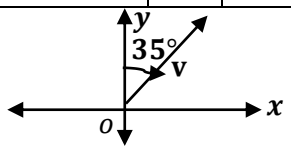
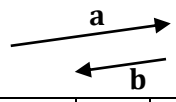
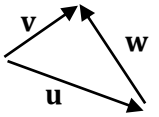
أوجد حل ما يلي:

إذا كان $\mathbf{u}=\langle 6,-5,1\rangle, \mathbf{v}=\langle -8,-9,5\rangle$

- أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}\ ,\mathbf{v}$ ، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة .

قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}\ ,\mathbf{v}$ تساوي تقريبًا $88.9°$

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

1	أي الكميات التالية كمية متجهة ؟							
	A	الزمن	B	المسافة	C	الإزاحة	D	الكتلة
2	في الشكل : قياس زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه .. 							
	A	35°	B	035°	C	055°	D	090°
3	في الشكل المجاور : الاتجاه الربعي للمتجه .... 							
	A	N 35° E	B	N 55° E	C	W 55° S	D	N 35° W
4	إذا كان اتجاه متجه 120° ، فإن اتجاهه الربعي							
	A	N 30° W	B	N 30° E	C	N 60° W	D	N 60° E
5	إذا كان اتجاه متجه 180° ، فإن قياس زاوية اتجاهه الحقيقي ...							
	A	90°	B	180°	C	270°	D	300°
6	إذا كان قياس زاوية الاتجاه الحقيقي لمتجه 155° ، فإن اتجاهه الربعي ..							
	A	N 55° E	B	S 25° E	C	W 55° S	D	N 35° E
7	في الشكل المجاور : أي الخيارات التالية تمثل العلاقة بين المتجهين a , b 							
	A	متوازيان	B	متساويان	C	a معكوس لـ b	D	متطابقان
8	في الشكل المجاور : المتجه الذي يمثل محصلة المتجهين الآخرين هو ..... 							
	A	v	B	u	C	w	D	w + v
9	تسير باخرة بزاوية قيمتها 60° مع الأفقي وبسرعة 100 k m/h ، ما مقدار المركبة الأفقية لسرعة الباخرة ؟							
	A	50 km/h	B	$50\sqrt{3}$ km /h	C	200 km/h	D	$200\sqrt{3}$ km/h
10	أي المتجهات التالية طوله 6 وحدات؟							
	A	$\langle 2 , 4\rangle$	B	$\langle \sqrt{5} , 1\rangle$	C	$\langle 3\sqrt{3} , 3\rangle$	D	$\langle 2 , \sqrt{3}\rangle$
11	إذا كان لدينا المتجهين $A = \langle 5 , -3\rangle, B = \langle 1 , 4\rangle$ فإن : $2A - B$							
	A	$\langle 9 , -10\rangle$	B	$\langle 6 , 1\rangle$	C	$\langle 4 , -7\rangle$	D	$\langle -3 , 11\rangle$
12	متجه الوحدة u باتجاه المتجه $v = \langle 3 , -4\rangle$ يساوي ...							
	A	$\langle -1 , 0\rangle$	B	$\langle 1 , -1\rangle$	C	$\langle -\frac{3}{5} , \frac{4}{5}\rangle$	D	$\langle \frac{3}{5} , \frac{-4}{5}\rangle$

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
13	المتجه $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 2j$ بالصورة الإحداثية يساوي ..						
	A	$\langle 5 , 2 \rangle$	B	$\langle 2 , 5 \rangle$	C	$\langle 5 , -2 \rangle$	D	$\langle -2 , 5 \rangle$
14	ما الصورة الإحداثية لمتجه v طوله 14 وزاوية اتجاهه مع الأفقي $210°$						
	A	$\langle 7 , 7\sqrt{3} \rangle$	B	$\langle -7\sqrt{3} , -7 \rangle$	C	$\langle -7\sqrt{3} , 7 \rangle$	D	$\langle 14 , 210 \rangle$
15	إذا كان $\mathbf{u} = \langle 3 , -2 \rangle , \mathbf{v} = \langle 5 , 7 \rangle$ فإن : $\mathbf{u} . \mathbf{v}$ يساوي						
	A	-14	B	-1	C	1	D	15
16	إذا كان المتجهان $\mathbf{u} = \langle 1 , -2 \rangle , \mathbf{v} = \langle 3 , k \rangle$ متعامدين فما قيمة k ؟						
	A	-2	B	$-\frac{3}{2}$	C	$\frac{3}{2}$	D	2
17	ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle 3 , 3 \rangle , \langle 2 , 0 \rangle$						
	A	$30°$	B	$45°$	C	$120°$	D	$135°$
18	أي مما يلي يمثل المتجه $\overrightarrow{AB}$ ، إذا كان $B(-5 , 2 , 1) , A(3 , 4 , -4)$ ؟						
	A	$\langle -8 , -2 , 5 \rangle$	B	$\langle 8 , -2 , -3 \rangle$	C	$\langle 8 , 2 , -3 \rangle$	D	$\langle -8 , -2 , -3 \rangle$
19	طول المتجه $w = 5\mathbf{i} + 3j - \sqrt{2}k$ يساوي						
	A	$8 - \sqrt{2}$	B	6	C	$8 + \sqrt{2}$	D	$4\sqrt{2}$
20	إذا كان $\mathbf{u} = \langle b , -3 , 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle -2 , -1 , 3 \rangle$ ، فما قيمة b التي تجعل المتجهين u , v متعامدين ؟						
	A	-6	B	-3	C	3	D	6
21	بعد عدة دقائق من إطلاق بالونين يحويان هواءً ساخنًا في الهواء كانت إحداثيات البالونين هي $B(-30 , 15 , 10) , A(20 , 25 , 30)$. أوجد المسافة بين البالونين في تلك اللحظة.						
	A	$10\sqrt{30}$	B	$30\sqrt{10}$	C	300	D	3000
22	أوجد $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$						
	A	$2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	B	$-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$	C	$2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	D	$-2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
23	إذا كان $\mathbf{u} = \langle 1 , -2 , 0 \rangle , \mathbf{v} = \langle 2 , 0 , -1 \rangle$ متجهين ، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يساوي						
	A	$2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	B	$-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$	C	$2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	D	$-2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
24	متوازي أضلاع فيه $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ، ضلعان متجاوران ، ما مساحته بالوحدات المربعة ؟						
	A	13	B	21	C	$\sqrt{186}$	D	$\sqrt{458}$
25	حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. أحرف متجاورة يساوي ..... وحدة تكعيبية .						
	A	31	B	62	C	73	D	86