مراجعة الوحدة الرابعة

الفصل الدراسي الثاني

ثاني عشر متقدم

2023/2024

Mr. Ali Abdalla

يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار الجزء المستقيم من النهر، الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة. يتوفر 96 ft من السياج. جد القيمة العظمى للمساحة المحاطة بالسياج وأبعاد السياج المناظر لهذه المساحة.

A three-sided fence is to be built next to a straight section of river, which forms the fourth side of a rectangular region. There is 96 feet of fencing available. Find the maximum enclosed area and the dimensions of the corresponding enclosure.

$96 - 2x = 0$; $x = 48$; $[0, 48]$

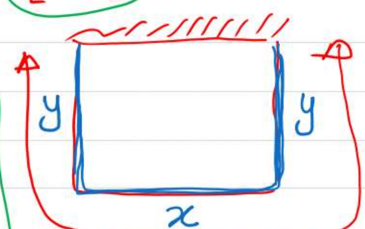
$2x + y = 96 \Rightarrow y = 96 - 2x$ ①

$A = xy \Rightarrow A = x(96 - 2x)$

$\Rightarrow A = 96x - 2x^2$

$\Rightarrow \frac{dA}{dx} = 96 - 4x$

$A' = 0$, $A' = \square$, $A' =$



$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 96 - 4x = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = 24}$

$y = 96 - 2(24) = 48$

$A = 24(48)$

قيمة عظمى للمساحة عند $x = 24$

A': $+$ | $-$; 0 ⑩ 24 ㉕

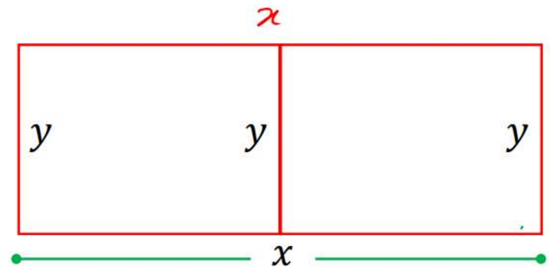
$A'' = -4$

$x = 24 \Rightarrow A'' < 0$ [Max Area]

3

A two-pen corral is to be built. The outline of the corral forms two identical adjoining rectangles. If there is 120 ft of fencing available, what dimensions of the corral will maximize the enclosed area?

يجب بناء إسطبل مكون من حظيرتين. يشكل مخطط الإسطبل مستطيلين متطابقين متجاورين. إذا كان هناك 120 ft من السياج متوفر، فما هي الأبعاد التي سيضيفها الإسطبل إلى المساحة المحاطة بالسياج؟



$P = 2x + 3y \quad \Rightarrow \boxed{2x + 3y = 120}$ $\quad y = 40 - \frac{2}{3}x$

The area of the corral is:

$\boxed{A = xy} \Rightarrow A = x\left(40 - \frac{2}{3}x\right) = 40x - \frac{2}{3}x^2$

$\boxed{A' = \cancel{4}0 - \frac{4}{3}x}$ to maximize the area

$A' = 0 \quad \Rightarrow \quad 40 - \frac{4}{3}x = 0 \quad \Rightarrow \frac{4}{3}x = 40 \quad \Rightarrow \quad x = 30$

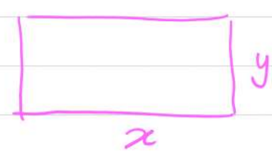
Use second derivative test : $A'' = -\frac{4}{3} < 0$ then at $x = 30$ maximum area

Then $y = 40 - \frac{2}{3}(30) = 20$ So, the dimension are $30\ ft \times 20\ ft$

4

بَيِّن أن المستطيل ذي المساحة العظمى الذي محيطه قيمة ثابتة P يشكل مربع دائماً

Show that the rectangle of maximum area for a given perimeter P is always a square.



$P = 2x + 2y \Rightarrow 2y = P - 2x$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}P - x}$

$A = xy = x\left(\frac{1}{2}P - x\right) = \boxed{\frac{1}{2}P}x - x^2$

$\Rightarrow A' = \frac{1}{2}P - 2x \Rightarrow A' = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}P - 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{1}{2}P$

$\boxed{x = \frac{1}{4}P}$

$A'' = -2$

at $x = \frac{1}{4}P \Rightarrow A'' = -2 < 0$

at $x = \frac{1}{4}P$ Max Area

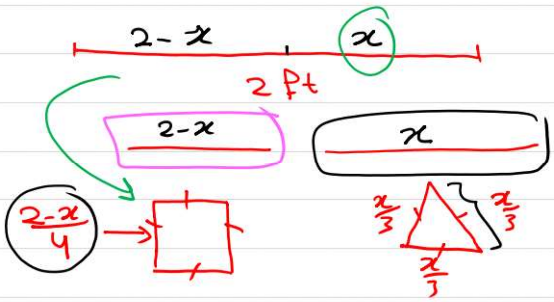
$y = \frac{1}{2}P - \frac{1}{4}P = \frac{1}{4}P$

$\boxed{x = y = \frac{1}{4}P}$ square

5

قطعة من السلك بطول 2 قدم ، تم قصها إلى قطعتين ، قطعه تم ثنيها على شكل مربع والأخرى على شكل مثلث متساوي الأضلاع. أين يجب قطع السلك بحيث تكون المساحة الإجمالية المحاطة بكليهما هي الحد الأدنى والحد الأقصى؟

A 2 feet piece of wire is cut into two pieces and one piece is bent into a square and the other is bent into an equilateral triangle. Where, if anywhere, should the wire be cut so that the total area enclosed by both is minimum and maximum?



$A_{Squar} = \left(\frac{2-x}{4}\right)^2$

$A_t = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^2$

$\Rightarrow A = \frac{(2-x)^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{x^2}{9}$

$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{16}(2-x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}x^2}$

$x = 2 \,,\; x = 0$

$[0, 2]$

$A' = \frac{1}{8}(2-x)(-1) + \frac{\sqrt{3}}{18}x$

$\boxed{A' = 0}$ $\quad -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{18}x \Rightarrow \boxed{x = 1.13}$

$A(0) = \frac{1}{4} = 0.25$

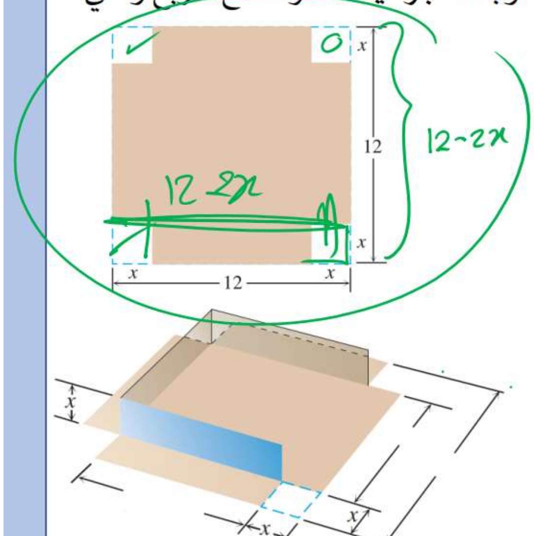
$A(1.13) = 0.219$

$\boxed{A(2) = \frac{\sqrt{3}}{9} = 0.19}$

6

An open-top box is to be made by cutting small congruent squares from the corners of a 12-in.-by-12-in. sheet of tin and bending up the sides. How large should the squares cut from the corners be to make the box hold as much as possible? Find the dimensions of the box with the maximum volume.

يجب بناء صندوق مفتوح من الأعلى بأخذ لوح من الورق المقوى مساحته 12 in في 12 in وقص مربعات متساوية المساحة كل منها من كل زاوية وطي الجوانب. أوجد أكبر قيمة لطول ضلع المربع والتي تحقق القيمة العظمى لحجم الصندوق ثم اوجد أبعاد هذا الصندوق.



12×12 $\quad \boxed{m \times n}$

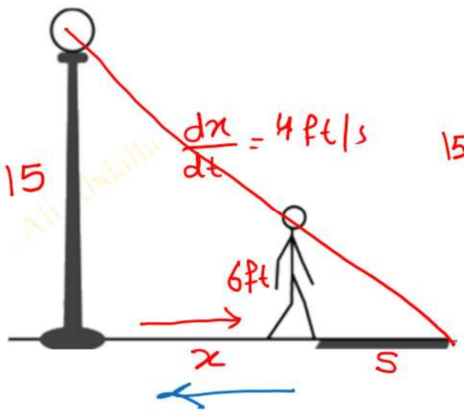
العاد السجل

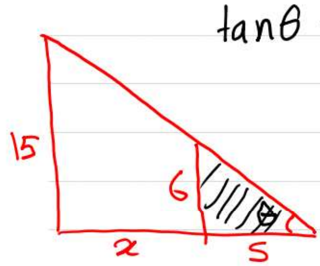
$12-2x, \; 12-2x, \; x$

$V = (12-2x)(12-2x)(x)$

7

A person whose height is 6 feet is walking away from the base of a streetlight along a straight path at a rate of 4 feet per second. If the height of the streetlight is 15 feet, what is the rate at which the person's shadow is lengthening?





$$\tan\theta = \boxed{\frac{6}{S} = \frac{15}{x+S}}$$

$$15S = 6x + 6S$$
$$15S - 6S = 6x$$
$$9S = 6x$$
$$S = \frac{2}{3}x$$

drive respect to time.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2}{3}\boxed{\frac{dx}{dt}}$$
$$= \frac{2}{3}(4)$$
$$= \frac{8}{3} \text{ ft/sec}$$

A. 1.5 ft/sec　　**C.** 3.75 ft/sec

B. 2.667 ft/sec　　**D.** 6 ft/sec

8

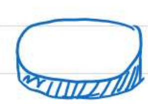
A storm at sea has damaged an oil rig. Oil spills from the rupture at the constant rate of 6 m^3/min, forming a slick that is roughly circular in shape and 0.0025 meters thick.

ألحقت عاصفة في البحر أضرارا ً بمنصة نفطية.
ينسكب الزيت من الجزء الذي انكسر بمعدل ثابت
يبلغ 6 متر مكعب لكل دقيقة، مكونا بقعة دائرية
الشكل تقريبا وسمكها 0.0025 متر.

$$\frac{dV}{dt} = 6 \text{ ft}^3/\text{min}$$

A. How fast is the radius of the slick increasing when the radius is 35 meters?

ما مدى سرعة زيادة نصف قطر البقعة عندما يكون نصف القطر 35 مترا؟



$$V = \pi r^2 h = 0.0025\pi r^2$$

$$V'(t) = \boxed{\frac{dV}{dt}} = 0.005\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$6 = 0.005\pi(35)\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{6}{0.005\pi(35)}$$

9

A storm at sea has damaged an oil rig. Oil spills from the rupture at the constant rate of 6 m^3/min, forming a slick that is roughly circular in shape and 0.0025 meters thick.

ألحقت عاصفة في البحر أضرارا ً بمنصة نفطية.
ينسكب الزيت من الجزء الذي انكسر بمعدل ثابت
يبلغ 6 متر مكعب لكل دقيقة، مكونا بقعة دائرية
الشكل تقريبا وسمكها 0.0025 متر.

B. What is the total volume of oil that spilled onto the sea at the moment the radius of the slick is increasing at a rate of 0.2 m/min?

ما هو الحجم الكلي للنفط الذي انسكب على البحر في الوقت الذي يزداد فيه نصف قطر البقعة بمعدل 0.2م/ دقيقة؟

$$\frac{dV}{dt} = 0.005\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$6 = 0.005\pi r \cdot (0.2) \Rightarrow r = \frac{6}{(0.005)(0.2)\pi} = --$$

$$V = 0.0025\pi r^2 =$$

10

Suppose a forest fire spreads in a circle with radius changing at a rate of 5 feet per minute. When the radius reaches 200 feet, at what rate is the area of the burning region increasing?

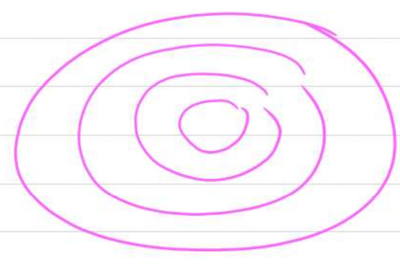
على فرض أن حريق غابات ينتشر في دائرة بنصف
قطر يتغير بمعدل 5 قدم لكل دقيقة، عندما يصل
نصف القطر إلى 200 قدم ، فما هو معدل تزايد
مساحة المنطقة المحترقة؟

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$= 2\pi (200)(5)$$

$$= 2000\pi \quad ft^2/min$$



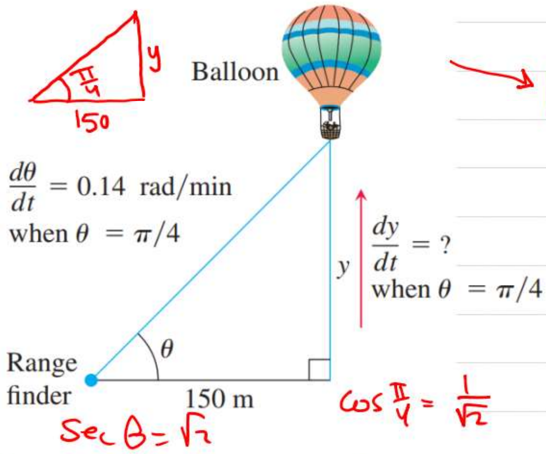
$$\frac{dr}{dt} = 5 ft/min$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = ?} \qquad r = 200 ft$$

11

A hot air balloon rising straight up from a level field is tracked by a range finder 150 m from the lift off point. At the moment the range finder's elevation angle is $\frac{\pi}{4}$, the angle is increasing at the rate of 0.14 rad/min. How fast is the balloon rising at that moment?

يتم تعقب منطاد الهواء الساخن الذي يرتفع بشكل مستقيم من حقل مستوي بواسطة جهاز تحديد المدى على بعد 150 متراً من نقطة الانطلاق . عندما تكون زاوية ارتفاع مكتشف النطاق $\frac{\pi}{4}$ ، تتزايد الزاوية بمعدل 0.14 راديان / دقيقة. ما مدى سرعة ارتفاع البالون في تلك اللحظة؟



$$\tan \overset{45}{\theta} = \frac{y}{150}$$

$$\sec^2\theta \, \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{150} \frac{dy}{dt}$$

$$(\sqrt{2})^2 (0.14) = \frac{1}{150} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = 150(2)(0.14)$$

$$= \quad m/min$$

حل آخر

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{150} y\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(\frac{1}{150}\right)\frac{dy}{dt}}{1 + \left(\frac{y}{150}\right)^2}$$

$$0.14 = \frac{1}{150[1+1]} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.14(150)(2)$$

12

The radius of a spherical ball is decreasing at a constant rate of 3 cm per second. Find, in cubic centimeters per second, the rate of change of the volume of the ball when the radius is 5 cm

يتناقص نصف قطر كرة كروية بمعدل ثابت مقداره 3 سم لكل ثانية، أوجد بالسنتيمتر المكعب لكل ثانية معدل تغير حجم الكرة عندما يكون نصف قطرها 5 سم

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = -3 \text{ cm/Sec}$$

$$r = 5$$

$$= 4\pi (5)^2 (-3)$$

$$= -300\pi \quad cm^3/Sec$$

A) -150π B) -300π

C) 150π D) 300π

13

The radius of a circle is increasing at a constant rate of 0.2 meters per second. What is the rate of increase in the area of the circle at the instant when the circumference of the circle is 20π meters?

يزداد نصف قطر الدائرة بمعدل ثابت مقداره 0.2 متر لكل ثانية. ما معدل الزيادة في مساحة الدائرة في اللحظة التي يكون فيها محيط الدائرة 20π متر؟

$$\frac{dr}{dt} = 0.2 \text{ m/sec}$$

$$\boxed{2\pi r = 20\pi}$$

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$= 20\pi (0.2)$$

$$= 4\pi \text{ m}^2/\text{sec}$$

A) $0.04\,\pi$ m²/sec
B) $0.4\,\pi$ m²/sec
C) $4\,\pi$ m²/sec
D) $20\,\pi$ m²/sec
E) $100\,\pi$ m²/sec

14

يسكب الرمل في كومة مخروطية مع ارتفاع الكومة يساوي قطر الكومة .إذا سكب الرمل بمعدل ثابت مقداره 5 m³/s، فما معدل زيادة ارتفاع الكومة عندما يكون ارتفاعها 2 متر؟

Sand is poured into a conical pile with the height of the pile equaling the diameter of the pile. If the sand is poured at a constant rate of 5 m³/s, at what rate is the height of the pile increasing when the height is 2 meters?

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h$$

$$V = \frac{1}{12}\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$5 = \frac{1}{\cancel{4}}\pi \cancel{(2)^2} \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{5}{\pi} \text{ m/sec}$$

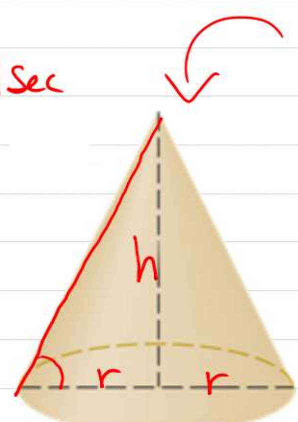
$$\frac{dV}{dt} = 5 \text{ m}^3/\text{sec}$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$h = 2$$

$$\boxed{h = 2r}$$

$$\frac{h}{2} = r$$



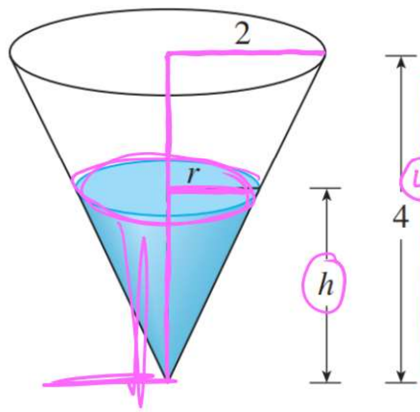
15

A water tank has the shape of an inverted circular cone with base radius 2 m and height 4 m. If water is being pumped into the tank at a rate of 2 m^3/min, find the rate at which the water level is rising when the water is 3 m deep.

خزان ماء مخروطي قائم رأسه لأسفل ، طول نصف قطر قاعدته 2 متر وارتفاعه 4 متراً .
اذا بدأ صب الماء فيه بمعدل 2 متر مكعب لكل دقيقة .
أوجد معدل ارتفاع الماء في الخزان عنما يكون عمق الماء 3 متراً.

$\frac{dV}{dt} = 2 \ m^3/min \qquad \frac{dh}{dt} = ?$

$\boxed{h = 3m}$. ارتفاع الماء h



$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \Rightarrow \boxed{h = 2r} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3$

$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$

$2 = \frac{1}{4}\pi (9) \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{8}{9\pi} \ m/min$

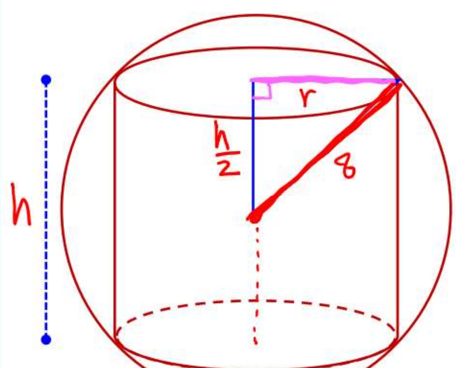
16

Find the volume of the largest right circular cylinder that can be inscribed in a sphere of radius 8m.

أوجد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها 8 أمتار.

$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 8^2 \Rightarrow r^2 + \frac{1}{4}h^2 = 64$

$\boxed{r^2} = 64 - \frac{1}{4}h^2$



$V = \pi \boxed{r^2} h$

$= \pi\left(64 - \frac{1}{4}h^2\right)h$

$= 64\pi h - \frac{1}{4}\pi h^3$

$\frac{dV}{dh} = 64\pi - \frac{3}{4}\pi h^2$

$\frac{dV}{dh} = 0$

$64\cancel{\pi} = \frac{3}{4}\cancel{\pi} h^2$

$h^2 = \frac{64 \times 4}{3}$

$\boxed{h = \frac{16}{\sqrt{3}}} =$

$r^2 = \_\_$

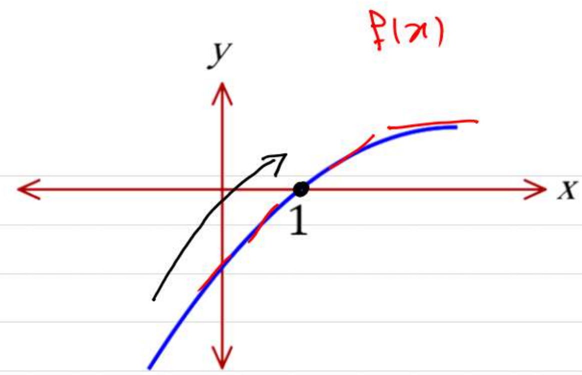
$V' \longleftrightarrow \frac{16}{\sqrt{3}}$

$V'' = -\frac{3}{2}\pi h$

$\boxed{V''} = -\frac{3}{2}\pi\left(\frac{16}{\sqrt{3}}\right) \boxed{< 0}$ Max

17

If the graph of a twice-differentiable function f is shown in the right figure. which of the following is true



A. $f(1) < f'(1) < f''(1)$

B. $f(1) < f''(1) < f'(1)$

C. $f'(1) < f(1) < f''(1)$

D. $f''(1) < f(1) < f'(1)$

E. $f''(1) < f'(1) < f(1)$

$f''(1) < 0$ $(-)$

$f(1) = 0$

$f'(1) > 0$ $(+)$

$f''(1) < f(1) < f'(1)$

18

Suppose that the mass of the first x meters of a thin rod is given by $f(x) = \sqrt{2x}$. Compute the linear density at $x = 2$

$\rho(x) = f'(x)$

$= \dfrac{2}{2\sqrt{2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

$\rho(2) = \dfrac{1}{\sqrt{2(2)}} = \dfrac{1}{2}$

19

The cost of manufacturing x items is given by $C(x) = 0.02x^2 + 20x + 1800$.

(A)Find the marginal cost function. المستعر الأول

(B)Compare the marginal cost at $x = 20$ to the actual cost of producing the 20^{th} item.

قيمة تصنيع x من منتج تعطى بالمعادلة $C(x) = 0.02x^2 + 20x + 1800$

أـ أوجد دالة التكلفة الحدية. (ب) قارن التكلفة الحدية عندما $x = 20$ بالتكلفة الفعلية لإنتاج 20 منتج .

(A) $C'(x) = 0.04x + 20$

(B) $C'(20) = 0.04(20) + 20$
$= 20.8$

actual cost $= C(20) - C(19)$
$=$

تمارين

$C(19) =$

$C(20) =$

20

If $f(x) = ax^2 + bx + c$ passing through $(0, 3)$ and local maximum value at $(2, 7)$, find the value of a , b and c?

Max $(2,7)$

$f'(2) = 0$

$2ax + b = f'(x)$

$\boxed{4a + b = 0}$ ①

$f(2) = 7$

$\boxed{4a + 2b + c = 7}$ ②

$4a + 2b + 3 = 7$

$4a + 2b = 4$

$\boxed{2a + b = 2}$

$\boxed{a = -1}$ $\boxed{b = 4}$

Passing $(0, 3)$

$f(0) = 3$

$0 + 0 + C = 3 \Rightarrow \boxed{C = 3}$

21

Suppose that $f(p) = 100p(20-p)$ is the demand for an item at price p (in Dirhams) with $p < 20$. Find the range of prices for which the demand is elastic ($E < -1$).

على فرض أن $f(p) = 100p(20-p)$ هو طلب منتج معين بسعر (بالدراهم) بـ $p < 20$.
أوجد مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرناً ($E < -1$).

دالة مرونة الطلب

$$E = \frac{p}{f(p)} \cdot f'(p)$$

$$= \frac{\cancel{p}}{\cancel{100}\cancel{p}(20-p)} \cdot \cancel{200}^{\,2}(10-p)$$

$$E = \frac{20-2p}{\boxed{20-p}} < -1, \quad p < 20$$

$$20 - 2p < -20 + p$$

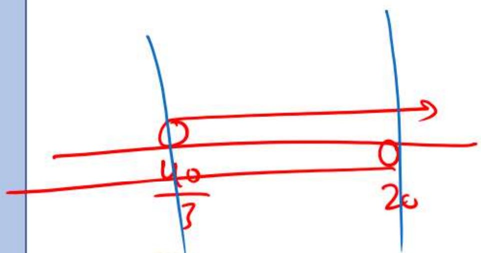
$$-2p - p < -20 - 20$$

$$\frac{-3p}{-3} < \frac{-40}{-3} \Rightarrow \boxed{p > \frac{40}{3}}, \quad p < 20$$

$f(p) = 2000p - 100p^2$

$f'(p) = 2000 - 200p$

$= 200(10 - p)$



A. $p > \frac{40}{3}$

B. $p < 20$

C. $\frac{40}{3} < p < 20$

D. $10 < p < 20$

22

Find the production level that minimizes the average cost.

أوجد مستوى الإنتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

$$C(x) = 10e^{0.02x}$$

$$f(x) = \overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}, \quad x > 0$$

$$f(x) = \frac{10e^{0.02x}}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\boxed{10e^{0.02x}}(0.02)\cdot x - 1 \cdot \boxed{10e^{0.02x}}}{x^2}$$

موجب دائما

$$= \frac{10e^{0.02x}\left[0.02x - 1\right]}{x^2}$$

موجب دائما

$\boxed{f'(x) = 0}$

$0.02x - 1 = 0$

$\boxed{x = 50}$

f': 0 | $-$ (10) | $\boxed{0}$ at 50 | $+$ (60)

at $x = 50$

Min Average cost

أقل متوسط للتكلفة

23

Suppose that the charge in an electrical circuit is $Q(t) = e^t(3\cos 2t + \sin 2t)$ coulombs. Find the current at $t = 1$

على فرض أن الشحنة في الدارة الكهربائية $Q(t) = e^t(3\cos 2t + \sin 2t)$ كولوم. أوجد التيار عندما $t = 1$

$$I(t) = Q'(t)$$

$$= e^t[3\cos 2t + \sin 2t] + e^t[3(-2\sin 2t) + 2\cos 2t]$$

$$= e^t[3\cos 2t + \sin 2t - 6\sin 2t + 2\cos 2t]$$

$$I(t) = e^t[5\cos 2t - 5\sin 2t]$$

at $t = 1$ $\quad I(1) = e^1[5\cos 2 - 5\sin 2]$

Rad

24

Suppose that a population grows according to the logistic equation $p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)]$ Find the population at which the population growth rate is a maximum.

على فرض أن النمو السكاني وفقا للمعادلة اللوجستية هو $p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)]$ أوجد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو إلى القيمة العظمى

$$f(P) = 2P(7 - 2P) = 14P - 2P^2$$

$$f'(P) = 14 - 4P$$

$f'(p) = 0 \quad \Rightarrow 14 - 4P = 0 \Rightarrow \boxed{P = \frac{7}{2}} = 3.5$

$$f''(P) = -4 < 0$$

at $P = 7/2$ Max rate of growth

25

In an adiabatic chemical process, there is no net change in heat, so pressure and volume are related by an equation of the form $PV^{1.4}=c$, for some positive constant c. **Find** and interpret $\frac{dV}{dP}$

في عملية كيميائية ثابتة الحرارة، لا يوجد تغير صاف في الحرارة ، لذلك الضغط والحجم مرتبطان بمعادلة في الشكل $PV^{1.4}=c$ لبعض الثابت الموجب c. أوجد وفسّر $\frac{dV}{dP}$.

$PV^{1.4} = c \Rightarrow V^{1.4} = \frac{c}{P}$

$1.4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

$\left(V^{7/5}\right)^{5/7} = \left(\frac{c}{P}\right)^{5/7} \Rightarrow V = c^{5/7} \cdot P^{-5/7}$

$\frac{dV}{dP} = c^{5/7} \cdot (-5/7)\, P^{-12/7} = \frac{-5\, c^{5/7}}{7\, P^{12/7}}$ $\quad -\frac{5}{7}-1$

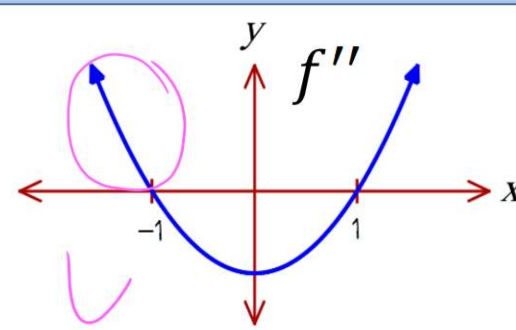
الحجم يقل مع زيادة الضغط

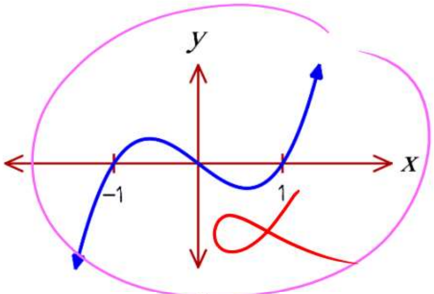
The power required for a bird to fly at speed v is proportional to $P=\frac{1}{v}+cv^3$, for some positive constant c. **Find** v to minimize the power.

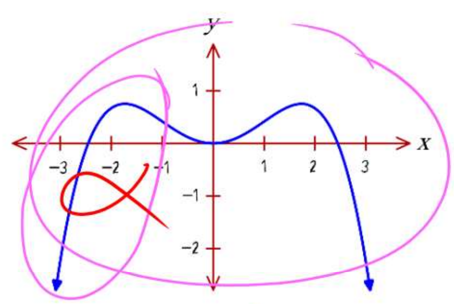
الطاقة اللازمة لطائر لكي يطير بسرعة v تتناسب مع $P=\frac{1}{v}+cv^3$ للثابت الموجب c . أوجـد v التي تحقق القيمة الصغرى للطاقة

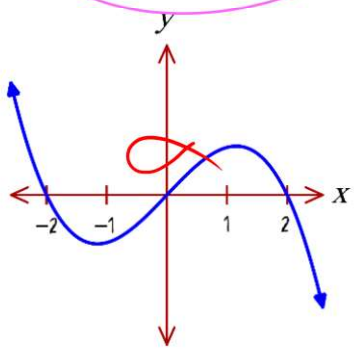
26

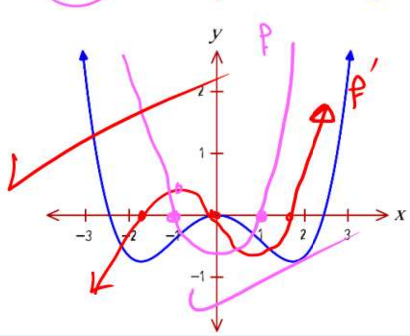
The graph of f'' is shown in the right figure.
Which of the following could be the graph of f ?









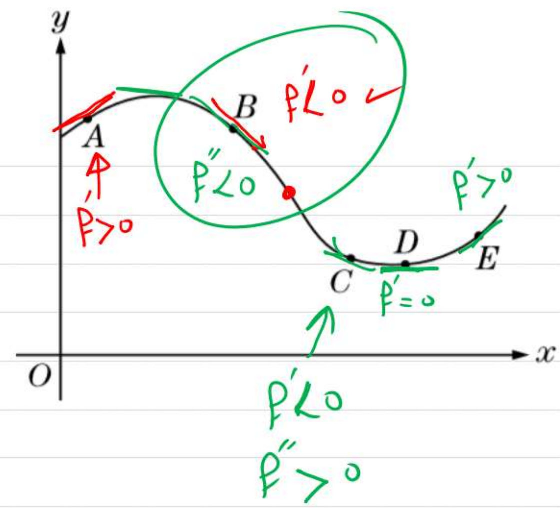


27

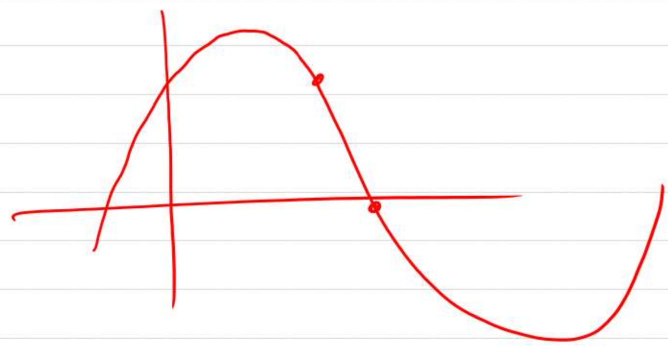
At which of the five points on the graph in the figure at the right are $\frac{dy}{dx}$ $f'(x)$ and $\frac{d^2y}{dx^2}$ $f''(x)$ both negative?

A. A **C.** C **E.** E

B. B **D.** D



$\boxed{\begin{matrix} f'<0 \\ f''<0 \end{matrix}}$



28

Critical numbers

$x = \pm 1$

Extrema:

local Max at $x = -1$ $(-1, 4)$

local Min at $x = 1$ $(1, 0)$

Increasing:

$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Decreasing:

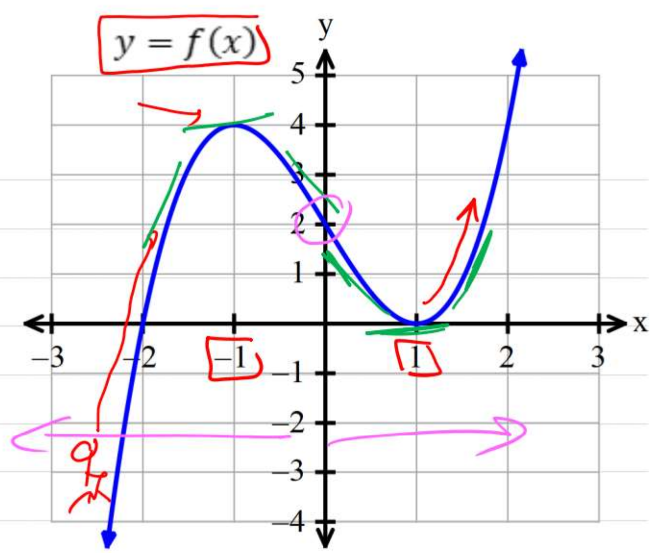
$(-1, 1)$

Concave up: $(0, \infty)$

Concave down: $(-\infty, 0)$

Inflection point: at $x = 0$

$(0, 2)$



النقاط الحرجة عند القيم العظمى والصغرى

Critical numbers

$x = -2, \quad x = 1$

f': $-$ | -2 | $+$ | 1 | $+$

Extrema:

Local Min at $\boxed{x = -2}$

Increasing:

$(-2, \infty)$

Decreasing:

$(-\infty, -2)$

Concave up:

$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Concave down:

$(-1, 1)$

Inflection point:

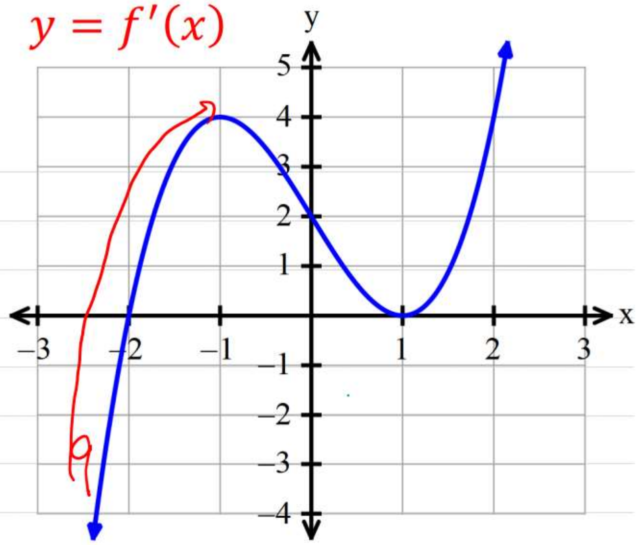
at $x = \pm 1$

f' increasing $\Rightarrow$ Concave up

f' decreasing $\Rightarrow$ Concave down

$\boxed{-1}$ $\boxed{1}$

$y = f'(x)$



الاعداد الحرجة : التقاطع مع محور x
او عدم اتصال قفزة . فجوة
لا نهائي

Let g be the function given by $g(x) = x^2 e^{kx}$ where k is a constant.

For what value of k does g have a critical point at $x = \frac{2}{3}$?

A. -3

B. $-\frac{3}{2}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. 0

$g'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

$g'(x) = 2x e^{kx} + kx^2 e^{kx}$

$e^{\frac{2}{3}k}\left(2\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 k\right) = 0$

$\frac{4}{3} + \frac{4}{9}k = 0$

$\frac{4}{9}k = -\frac{4}{3}$

$\boxed{k = -3}$

Find all critical numbers جـد كل الأعداد الحرجة

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$$

$(-\infty, \infty)$

$f'(x) = 0$

الاعداد الحرجة $\in$ المجال

Domain

Find all critical numbers جـد كل الأعداد الحرجة

$$f(x) = x^{3/4} - 4x^{1/4}$$

$\sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt[4]{x}$

$\boxed{x \geq 0}$

$f'(x) = \frac{3}{4} x^{-1/4} - x^{-3/4}$

$\frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} - x^{-3/4} = 0$

$\frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} - (x^{-\frac{1}{4}})^3 = 0$

$t = x^{-\frac{1}{4}}$

$\frac{3}{4} t - t^3 = 0$

$x^{-\frac{1}{4}} = 0 \quad \boxed{\frac{1}{x^4} = 0}$

$t(\frac{3}{4} - t^2) = 0 \Rightarrow \cancel{t = 0}$, $t^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{t = \cancel{\pm}\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$x^{-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(x^{\frac{1}{4}})^4 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4$

$x = \frac{16}{9}$

33

Find all critical numbers

I, II   0, 2π

The function $f(x) = \sin x + \cos x$, $\boxed{0 \le x \le \pi}$ has a local maximum at $x =$

$f'(x) = \cos x - \sin x$ $f'(x) = 0$

$\cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x$

$\Rightarrow \tan x = 1$ ← (+) (I)

$x = \tan^{-1}(1) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

x I, III

0   $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$ π

A. π

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

34

Determine the extrema of the function   حدد القيم القصوى للدالة

$$f(x) = x^2 e^{-3x}$$

$(-\infty, \infty)$

$f'(x) = 2x e^{-3x} + x^2 \cdot (-3e^{-3x})$

$= e^{-3x}[2x - 3x^2]$ $f'(x) = 0$

$2x - 3x^2 = 0$, $x(2 - 3x) = 0$

$\boxed{x = 0}$, $\boxed{x = \frac{2}{3}}$

$f(\frac{2}{3}) =$

$f(0) =$

f': − | + | −

(−1)   0   (0.5) $\frac{2}{3}$ (1)

0.667

local Max at $\boxed{x = \frac{2}{3}}$

local Min at $\boxed{x = 0}$

35

Determine the extrema of the function حدد القيم القصوى للدالة

$$f(x) = 2x\sqrt{x+1}$$

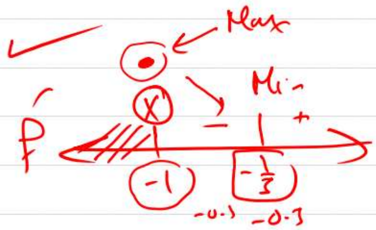
$\boxed{x \geq -1}$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{x+1}}{1} + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{2(x+1) + x}{\sqrt{x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{x+1}} \leftarrow$$

$f'(x) = 0 \qquad 3x + 1 = 0 \qquad \boxed{x = -\frac{1}{3}}$ ✓

$f'(x)$ undefined $\qquad x + 1 = 0 \qquad \boxed{x = -1}$



36

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المعطاه في الفترة المشار إليها

The absolute maximum value of $f(x) = x^3 - 3x^2 + 12$ on the closed interval $[-2, 4]$ occurs at $x =$

A. 4 **B.** 2

C. 0 **D.** -2

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$3x^2 - 6x = 0 \qquad 3x(x-2) = 0$

$x = 0, \quad x = 2$

$\in [-2, 4] \qquad \in [-2, 4]$

$f(-2) =$

$f(0) =$

$f(2) =$

$f(4) =$

في أي فترة تكون الدالة المعطاه تكون تزايديه.

The function f is given by $f(x) = x^4 + x^2 - 2$. On which of the following intervals is f increasing?

A. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$ **B.** $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

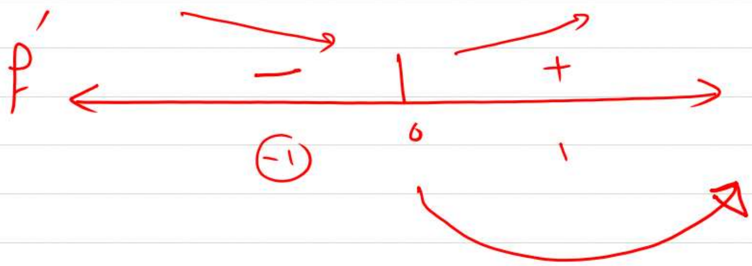
C. $(0, \infty)$ **D.** $(-\infty, 0)$

$f'(x) = 4x^3 + 2x$

$2x(x^2+1) = 0$

$\boxed{2x = 0}$

$\boxed{x = 0}$



في أي فترة تكون الدالة المعطاه في حالة تقعر لأعلى.

The graph of $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$ is concave up on

A. $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ **C.** $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

B. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ **D.** $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

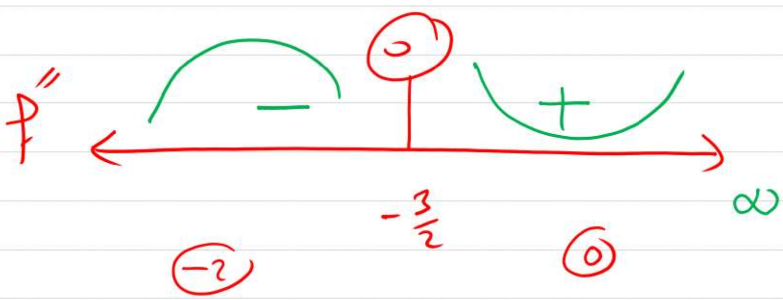
$f'(x) = 6x^2 + 18x$

$\boxed{f''(x) = 12x + 18}$

$12x + 18 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$

-1.5



أي مما يلي هي الاعداد الحرجة للدالة:

The critical point of $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ at ……….

A. $x = \pm 1$

B. $x = \pm 2,\ x = \pm 1$

C. $x = 0,\ x = \pm 1$

D. $x = 0$

Domain
$x^2 - 1 \neq 0$
$\boxed{x \neq \pm 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - (x^2-4)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3} + 8x}{(x^2-1)^2}$$

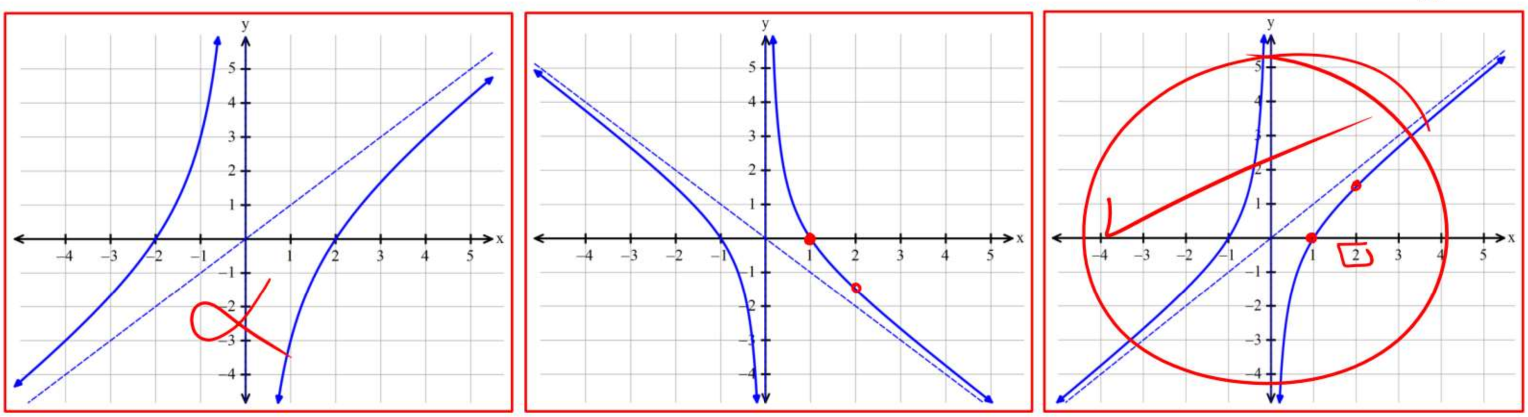
$$= \frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0$
$\boxed{x = 0}$

$f'(x)$ undefined
$x^2 - 1 = 0$ $\boxed{x = \pm 1}$

أي مما يلي يمثل التمثيل البياني للدالة المعطاة.

Which of the following graph represent the graph of $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$



$\dfrac{1^2-1}{1} = 0$

$\dfrac{4-1}{2} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

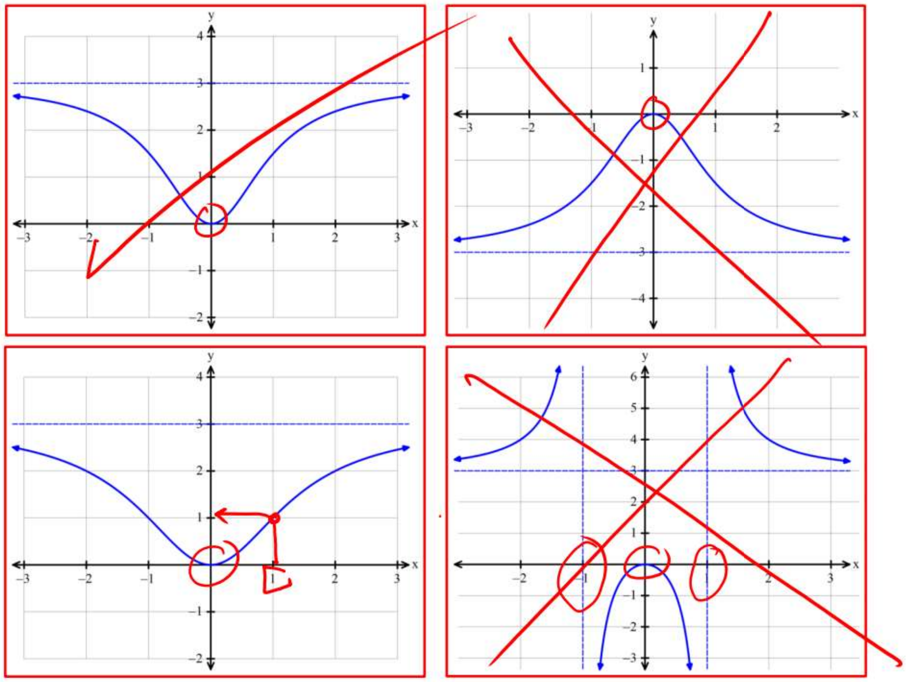
41

أي مما يلي يمثل التمثيل البياني للدالة المعطاة.

Which of the following graph represent the graph of $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+1}$

$f(1) = \dfrac{3(1)^2}{1^2+1}$

$= \dfrac{3}{2}$



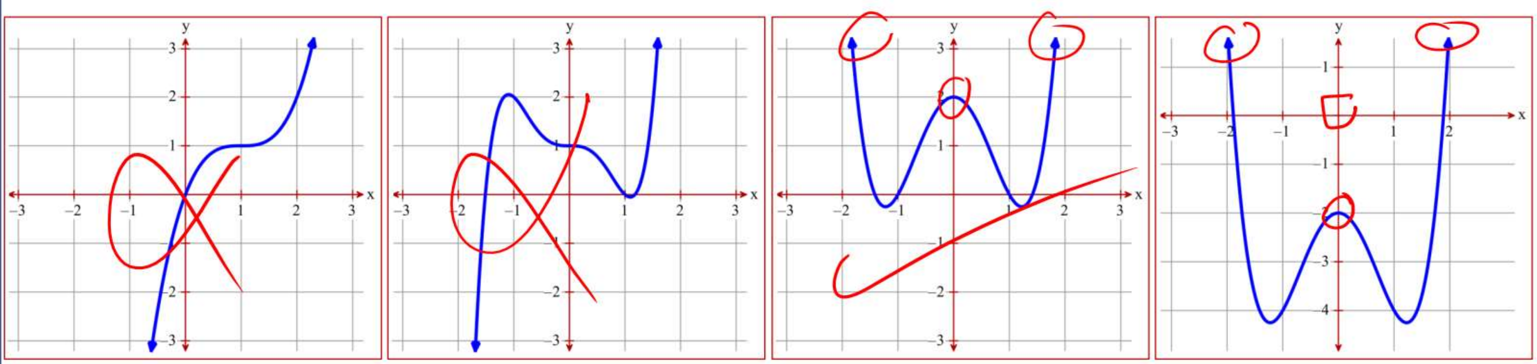
42

أي مما يلي يمثل التمثيل البياني للدالة المعطاة.

Which of the following graph represent the graph of :

$$f(x) = x^4 - 3x + 2$$

$f(0) = 2$



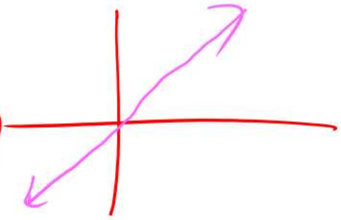
أي مما يلي يمثل التمثيل البياني للدالة المعطاة.

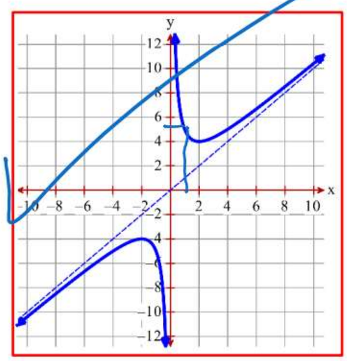
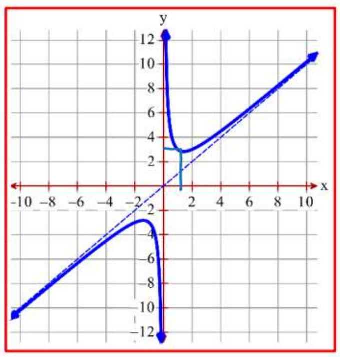
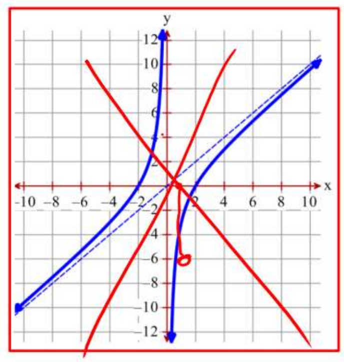
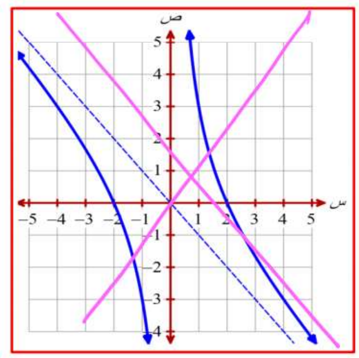
Which of the following graph represent the graph of :

$$f(x) = \boxed{x} + \boxed{\frac{4}{x}}$$

$f(1) = 1 + \frac{4}{1}$
$= 5$

slant $\boxed{y = x}$



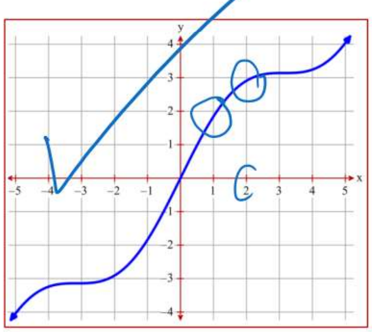
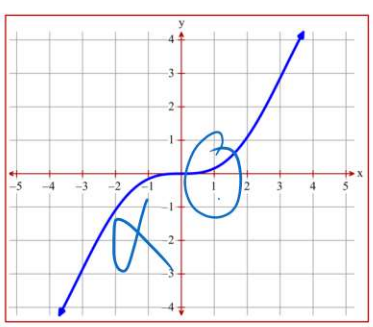
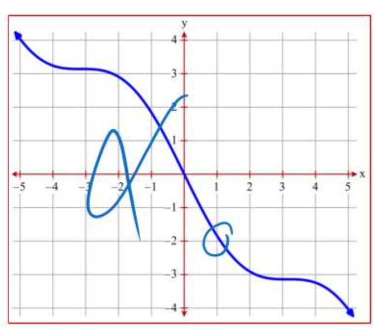
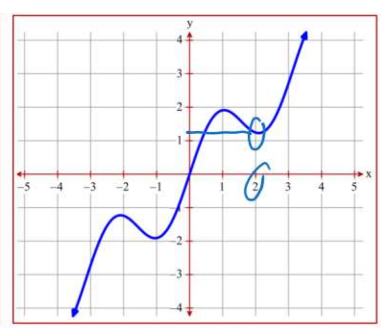





أي مما يلي يمثل التمثيل البياني للدالة المعطاة.

Which of the following graph represent the graph of :

$$f(x) = x + \sin x$$

Rad

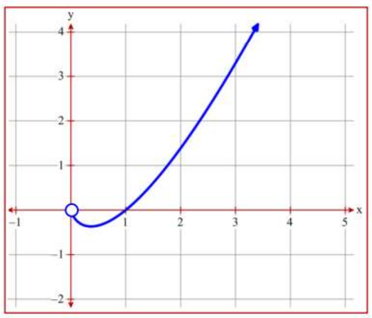





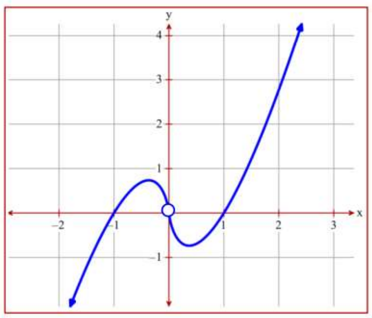
45

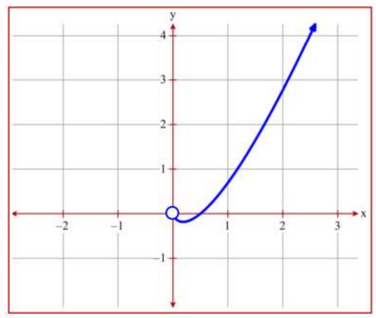
أي مما يلي يمثل التمثيل البياني للدالة المعطاة.

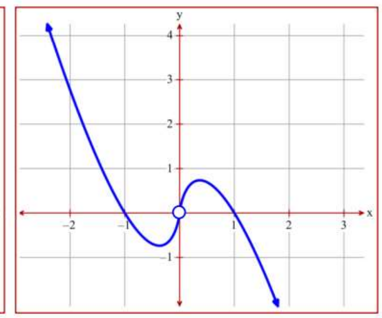
Which of the following graph represent the graph of :

$$f(x) = x \ln x^2$$







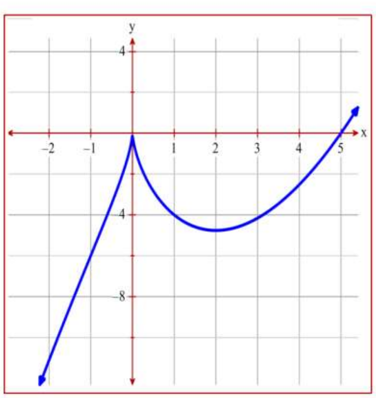


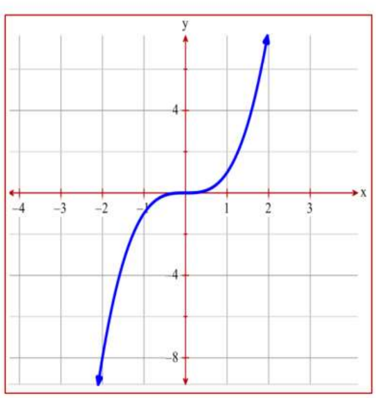
46

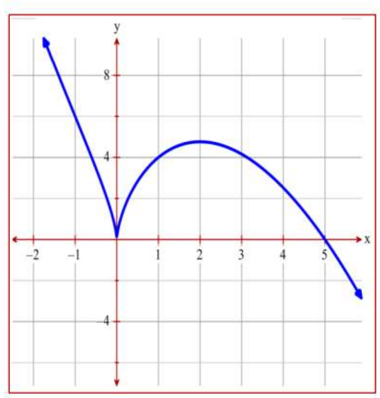
أي مما يلي يمثل التمثيل البياني للدالة المعطاة.

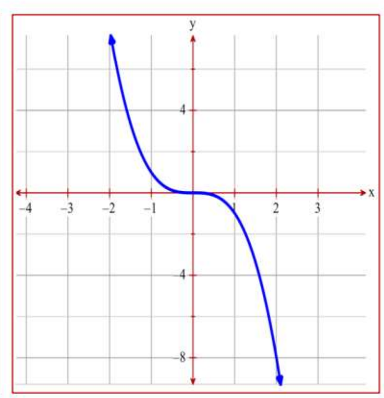
Which of the following graph represent the graph of :

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{400}x$$









47

حدد الفترات التي يكون فيها التمثيل البياني لدالة معطاة مقعراً إلى الأعلى والفترات التي يكون فيها مقعراً إلى الأسفل، وحدد نقاط الانعطاف.

Determine the intervals where the graph of the given function is concave up and concave down and identify inflection points.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$$

$\boxed{x \neq 0}$

$f'(x) = 1 - x^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

f'': $-$ | $\boxed{X}$ | $+$

-1 $\quad$ 0 $\quad$ up

down

$x = 0$ Vertical asy

خط تقارب رأسي

$0 \notin$ Domain

No inflection

48

حدد الفترات التي يكون فيها التمثيل البياني لدالة معطاة مقعراً إلى الأعلى والفترات التي يكون فيها مقعراً إلى الأسفل، وحدد نقاط الانعطاف.

Determine the intervals where the graph of the given function is concave up and concave down and identify inflection points.

$$f(x) = x + 3(1 - x)^{\frac{1}{3}}$$

شكراً لكم