

الصف الثاني عشر متقدم

2025/2024

الوحدة الثالثة التفاضل

1-3 المماسات والسرعة المتجهة

2-3 الاشتقاق

3-3 حساب المشتقات : قاعدة القوى

4-3 قاعدة الضرب والقسمة

5-3 قاعدة السلسلة

6-3 مشتقات الدوال المثلثية

7-3 اشتقاق الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

8-3 الاشتقاق الضمني والدوال المثلثية المعكوسة

10-3 نظرية القيمة المتوسطة

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

ملاحظة : سيتم ترتيب الدرس الأول والثاني بطريقة عرض مختلفة عن الكتاب ولكن سيكون نفس المحتوى في النهاية

يمكن ايجاد مشتقة دالة عند نقطة من خلال التعريف او القواعد
تعريف المشتقة

يسمى ميل المنحنى عند النقطة $x = a$ بمشتقة الدالة عند تلك النقطة ويرمز لها بالرمز $f'(a)$ حيث:

التعريف الاساسي
للمشتقة عند نقطة

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

التعريف البديل للمشتقة
عند نقطة

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ويمكن استخدام التعريف البديل:

والتعريف الرياضي لمشتقة الدالة f هي الدالة f' حيث:

التعريف الاساسي للمشتقة
كدالة

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

التعريف البديل للمشتقة
كدالة

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(x) - f(z)}{x - z}$$

تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = a$ اذا كانت النهاية موجودة بشرط ان تكون الدالة متصلة عند تلك النقطة

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+ch) - f(a)}{h} = c f'(a)$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

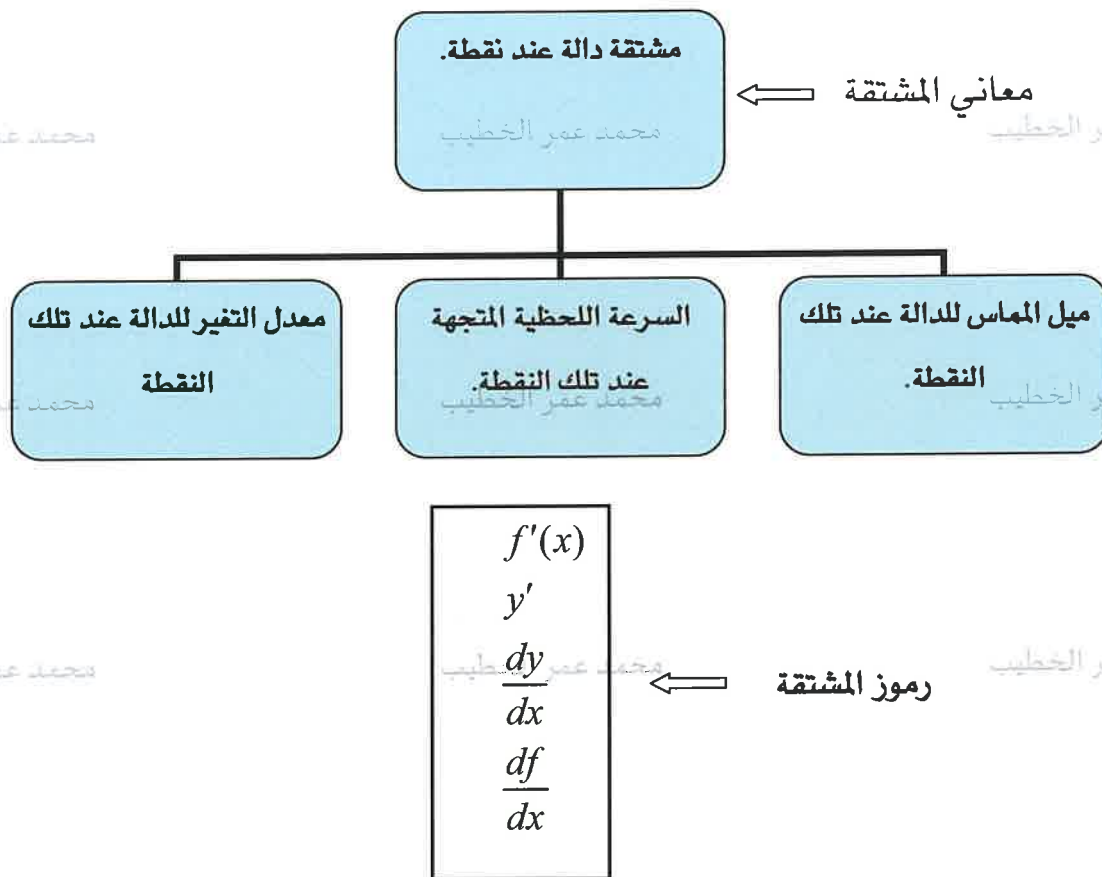
ملاحظات

اذا كانت $s(t)$ تمثل دالة الموقع لجسم يتحرك على خط مستقيم فان السرعة اللحظية المتجهة

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

عند الزمن $t = a$ تعطى بالعلاقة

والقيمة المطلقة للسرعة المتجهة هي السرعة



إذا كانت: $f(x) = x^2 - 4x$ فاوجد $f'(3)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x - (-3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{x-3}$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow f'(3) = 2$$

بيان المشتقة عند نقطة

يفضل استخدام
التعريف لبيان

(1) إذا كانت: $f(x) = \sqrt{x}$ فاوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(2) إذا كانت: $f(x) = \frac{2}{x}$ فاوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x+h} - \frac{2}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2x - 2(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x - 2x - 2h}{hx(x+h)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}x(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{x(x+h)} \\ &= \frac{-2}{x \cdot x} \\ &= \frac{-2}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

(3) إذا كانت: $f(x) = \frac{x}{x-1}$ فاوجد $f'(0)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x-1} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(0) = -1$$

(1) إذا كانت: $f(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$ فاوجد $f'(0)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} \sin x - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$= (0)(1) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

(2) إذا كانت: $f(x) = \cos x$ فاوجد $f'(0)$ باستخدام تعريف المشتقة .

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \times \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x + 1}$$

$$= (-1)(0)$$

$$= 0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

(3) إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 1$ فاوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 1 - (3x^2 + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) + 1 - 3x^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 1 - 3x^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} \Rightarrow f'(x) = 6x$$

(1) إذا كانت $f(x) = \frac{3}{x+1}$ فاوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x+h+1} - \frac{3}{x+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3(x+1) - 3(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{3x} + \cancel{3} - \cancel{3x} - 3h - \cancel{3}}{(x+h+1)(x+1)} \cdot \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{(x+h+1)(x+1)} \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$= \frac{-3}{(x+1)(x+1)}$$

$$= \frac{-3}{(x+1)^2}$$

(2) إذا كانت $f(x) = x^3 + x$ فاوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h) - (x^3 + x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + \cancel{x} + h - \cancel{x^3} - \cancel{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2 + 1)}{\cancel{h}} = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1$$

x	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	2.0	2.6	3.0	3.4	4.0

(3) قدر قيمة $f'(1)$ من البيانات التالية

$$f'(1) = m = \frac{f(1.5) - f(0.5)}{1.5 - 0.5} = \frac{3.4 - 2.6}{1.5 - 0.5} = 0.8$$

إذا كان: $f(2) = -3$, $f'(2) = -5$, $f'(3) = 4$, $f'(5) = 7$ فاوجد

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3) = 4$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5f(3+h) - 5f(3)}{2h} = \frac{5}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{5}{2} f'(3) = 10$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+4h) - f(3)}{h} = 4 f'(3) = 4(4) = 16$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-h) - f(5)}{h} = -f'(5) = -7$$

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -f'(2) = 5$$

$$(6) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} = 2f'(3) = 2(4) = 8$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2}) = f'(2) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x} + \sqrt{2}) = -5(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = -10\sqrt{2}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - f^2(2)}{x^2 - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \cdot \frac{f(x) + f(2)}{x + 2}$$

$$= f'(2) \cdot \frac{f(2) + f(2)}{2 + 2}$$

$$= -5 \cdot \frac{-3 - 3}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

تكون الدالة المتصلة : $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة الداخلية a

إذا كانت المشتقة على يمين النقطة a وهي $f'(a^+)$ والمشتقة على يسار النقطة a وهي $f'(a^-)$

متساويتان

$$f'(a^+) = f'(a^-) \quad \text{اي ان :}$$

حيث

$$D_+ f(a) = f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$D_- f(a) = f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ملاحظة : أولاً نبحث اتصال الدالة عند $x = 0$

فإذا كانت غير متصلة فإنها غير قابلة للاشتقاق أما إذا

كانت الدالة متصلة فإننا نبحت اشتقاق الدالة عند

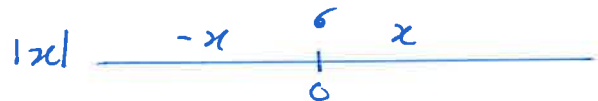
النقطة من الجهتين ويمكن أن تكون الدالة قابلة أو

غير قابلة للاشتقاق عند النقطة

$$f(x) = |x|$$

(1) إذا كانت

فأوجد $f'(0)$ باستخدام تعريف المشتقة



$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

الاتصال

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \text{الدالة متصلة عند } x=0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

بما أن $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ فإن $f'(0)$ غير موجود

$$\begin{array}{r} 2x+1 \quad 5 \\ \hline x \quad 0 \quad 5 \end{array}$$

$$(2) \text{ هل الدالة } f(x) = \begin{cases} 5 & x \geq 0 \\ 2x+1 & x < 0 \end{cases} \text{ لها مشتقة عند } x=0$$

الدالة $f(x)$ غير متصلة عند $x=0$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ،
 ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$

ملاحظة : أولاً نبحث اتصال الدالة عند $x = 1$
 فإذا كانت غير متصلة فإنها غير قابلة للاشتقاق
 أما إذا كانت متصلة فإننا نبحث الاشتقاق

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases} \quad (1) \text{ إذا كانت:}$$

فأوجد $f'(1)$ باستخدام تعريف المشتقة

الدالة متصلة عند $x = 1$

$$\begin{array}{c} x^2 + 1 \\ 2x \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

$$D_- f(1) = f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1}$$

$$= 2$$

$$D_+ f(1) = f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$f'(1^-) = f'(1^+) = 2 \Rightarrow f'(1) = 2 \text{ موجودة}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases} \quad (2) \text{ إذا كانت:}$$

فأثبت باستخدام تعريف المشتقة أن $f'(0)$ غير موجودة.

الدالة متصلة عند $x = 0$

$$\begin{array}{c} x^2 \\ 2x \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x} = 2$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow f'(0) \text{ غير موجودة}$$

فأوجد $f'(0)$ باستخدام تعريف المشتقة.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases} \quad (3) \text{ إذا كانت:}$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0$$

الدالة متصلة عند $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

محمد عمر الخطيب
(1) إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فاثبت ان

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+ch) - f(a)}{h} = c f'(a)$$

الاثبات :
نفرض أن

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+ch) - f(a)}{h}$$

$$k = ch \Rightarrow h = k/c$$

$$h \rightarrow 0$$

$$k \rightarrow 0$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a+k) - f(a)}{k/c}$$

$$= c \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a+k) - f(a)}{k} = c f'(a) \quad \#$$

(2) إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند $x = a$ حيث $a \neq 0$ فاثبت ان

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x)]^2 - [f(a)]^2}{x^2 - a^2} = \frac{1}{a} f(a) f'(a)$$

$$= f'(a) \cdot \frac{f(a) + f(a)}{a + a}$$

$$= f'(a) \cdot \frac{2f(a)}{2a}$$

$$= \frac{1}{a} f'(a) \cdot f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x)]^2 - [f(a)]^2}{x^2 - a^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{f(x) + f(a)}{x + a}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot f(a) \cdot f'(a) \quad \#$$

(3) إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقية حيث : * يوجد أكثر من

طريقة كل السؤال

$$f(x+h) = x^2 h + 3x h^2 + f(x)$$

و h هو مقدار التغير في x فاوجد : $f'(2)$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^2 h + 3(2) h^2 + f(2) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + 6h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4+6h)}{h} = 4$$

$$\Rightarrow f'(2) = 4 \quad \#$$

يمكن تاجيل حل الصفحة
الى بعد قواعد الاشتقاق

تطبيقات على المشتقة باستخدام التعريف

(أ) اوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $(1, -3)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$\begin{aligned} m = f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x - (-3)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} \\ = -2 \end{aligned}$$

(ب) اوجد معادلة المماس عند النقطة $(1, -3)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 3 = -2(x - 1)$$

$$y + 3 = -2x + 2 \Rightarrow y = -2x - 1$$

نقطة (1, -3) ميل $m = -2$

(2) يسقط جسم بشكل رأسي من ارتفاع برج ويحدد ارتفاعه عن الارض في اي زمن بالعلاقة

$$h(t) = 256 - 16t^2 \quad \text{حيث } t \text{ بالثواني و } h \text{ بالقدم}$$

$$h(1) = 256 - 16 = 240 \text{ ft}$$

(أ) اوجد ارتفاع الجسم عند الزمن $t = 1$

(ب) اوجد السرعة المتجهة المتوسطة اول ثلاث ثواني

$$V_{\text{avg}} = \frac{h(3) - h(0)}{3 - 0} = \frac{112 - 256}{3} = -48 \text{ ft/s}$$

(ج) اوجد السرعة المتجهة للجسم عند الزمن $t = 3$

$$\begin{aligned} V(3) = h'(3) &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{h(t) - h(3)}{t - 3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{256 - 16t^2 - 112}{t - 3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{144 - 16t^2}{t - 3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{16(9 - t^2)}{t - 3} \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{16(3-t)(3+t)}{t-3}$$

$$= -16(3+3)$$

$$= -96 \text{ ft/s}$$

إشارة السرعة سالبة
لأن الجسم هابط

الاتصال والاشتقاق

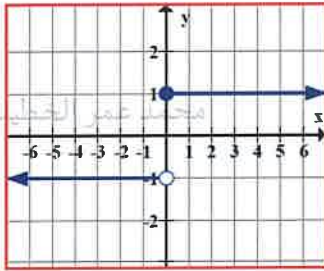
(1) اذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فان الدالة $f(x)$ تكون متصلة عند $x = a$

(2) اذا كانت الدالة $f(x)$ غير متصلة عند $x = a$ فانها تكون غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$

(3) اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = a$ فان الدالة $f(x)$

اما ان تكون قابلة للاشتقاق عند $x = a$ او غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$

الحالات التي تكون مشتقة الدالة $f(x)$ غير موجودة عند نقطة



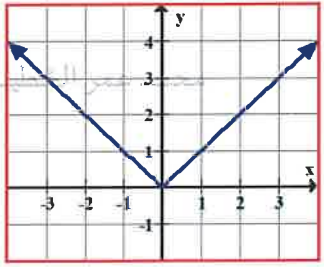
عدم الاتصال

(1) فجوة

(2) قفزة

(3) لانهائي (خطوط التقارب الرأسية)

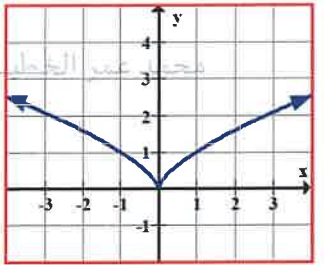
(4) تذبذبي



رأس مدبب (ركن)

يجب ان تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة

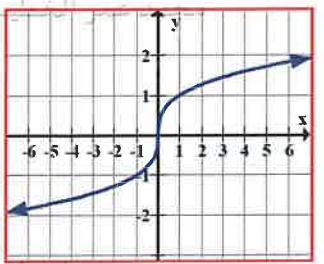
المشتقة من اليمين لا تساوي المشتقة من اليسار وكلاهما اعداد حقيقية



رأس مدبب (ناب)

يجب ان تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة

المشتقة من اليمين لا تساوي المشتقة من اليسار احدهما ملائمة والاخرى سالبة ملائمة او واحدة ملائمة والاخرى عدد حقيقي



مماس رأسي

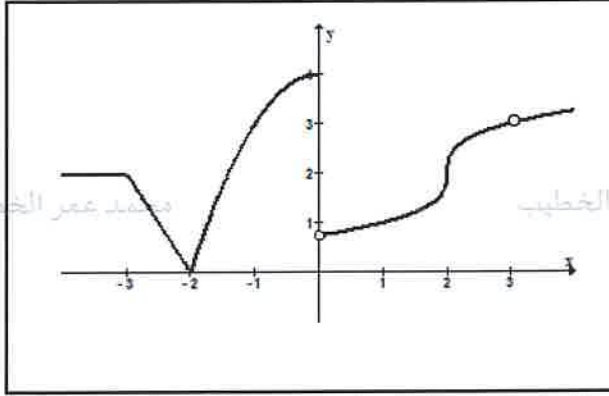
يجب ان تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة

يجب ان تكون النهاية من اليسار واليمين

للمشتقة (الميل)

اما كلاهما ملائمة او سالبة ملائمة

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ للإجابة عن الأسئلة التالية:

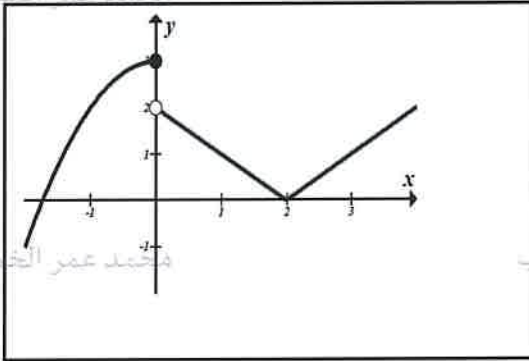


مجموعة قيم x التي تكون عندها:
 $f'(x)$ غير موجودة مع بيان السبب

x	-3	-2	0	2	3
السبب	لا توجد	لا توجد	عدم اتصال	حساس رأس	عدم اتصال

الفترة غير موجودة

(2) اعتمد على الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ للإجابة عن الأسئلة التالية :



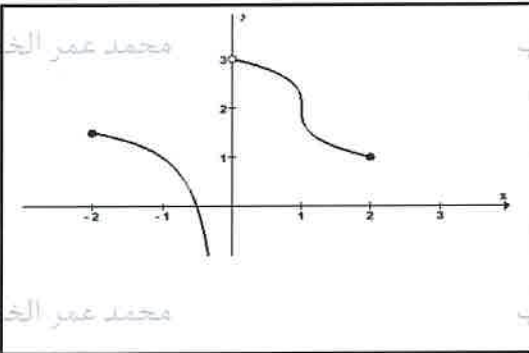
(أ) الفترة التي تكون عليها الدالة متصلة .

$$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

(ب) الفترة التي تكون عليها الدالة قابلة للاشتقاق

$$(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$$

(3) اعتمد على الرسم البياني التالي الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ للإجابة عن الأسئلة التالية :



(أ) الفترة التي تكون عليها الدالة متصلة .

$$[-2, 0) \cup (0, 2]$$

(ب) الفترة التي تكون عليها الدالة قابلة للاشتقاق

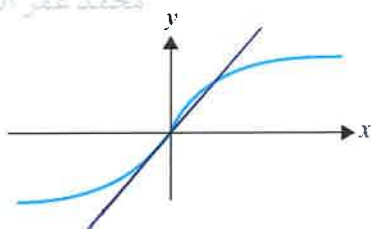
$$(-2, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$$

ملاحظة : كتابنا لم يناقش قابلية الاشتقاق عند
 أطراف الفترة المغلقة في حين بعض الكتب تجعلها
 موجودة والبعض الآخر غير موجودة
 وهي غير مهمة في كتابنا

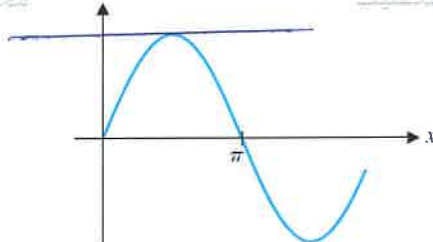
العلاقة بين الرسوم البيانية للدالة ووبيان مشتقاتها

(1) ارسم المماس للدالة عند النقطة المحددة ان امكن

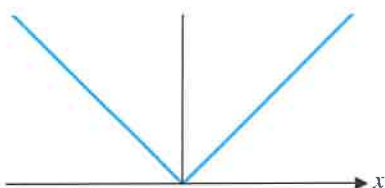
(ب) $y = \tan^{-1} x$ عند $x = 0$



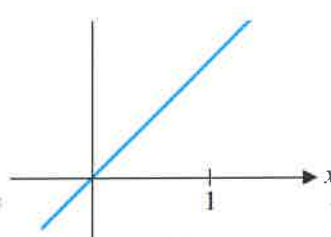
(أ) $y = \sin x$ عند $x = \frac{\pi}{2}$



(د) $y = |x|$ عند $x = 0$



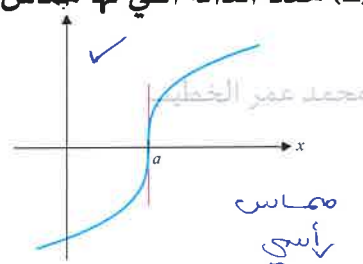
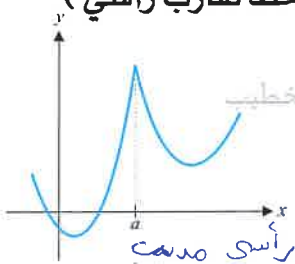
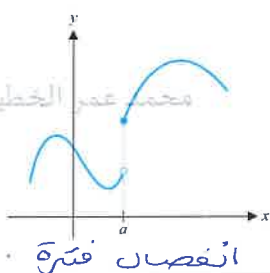
(ج) $y = x$ عند $x = 0$



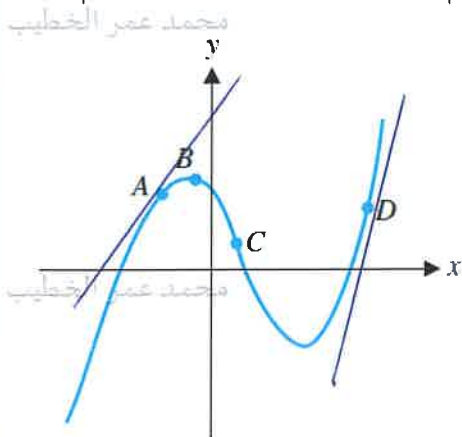
لا يمكن رسم مماس عند $x = 0$

(المماس) نفس الخط المستقيم

(2) حدد الدالة التي لها مماس رأسي عند $x = a$ (ليس خط تقارب رأسي)



(3) اعتمد على الشكل المجاور في الاجابة عن الاسئلة التالية : (استخدم الحروف الموجودة على الرسم)



(أ) عند اي النقاط يكون ميل المماس للدالة موجب A , D

(ب) عند اي النقاط يكون ميل المماس للدالة سالب B , C

(ج) عند اي نقطة يكون ميل المماس للدالة اكبر D

(د) عند اي نقطة يكون ميل المماس للدالة اصغر C

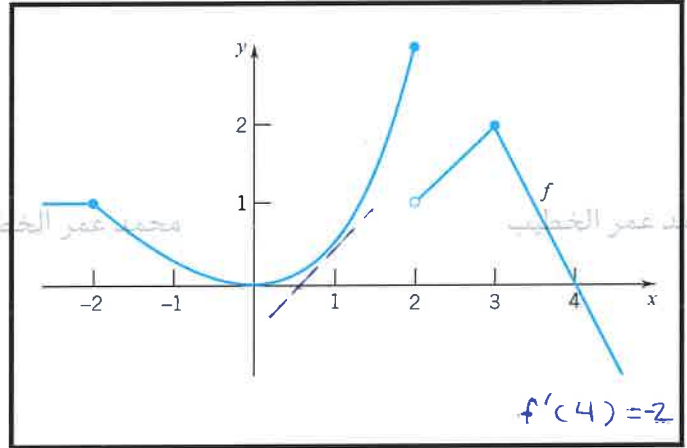
(هـ) رتب الحروف حسب قيمة الميل من الاصغر الى الأكبر (ترتيب تصاعدي)

→ C , B , A , D

اولاً التمثيل البياني للدالة $f'(x)$ من بيان الدالة $f(x)$

$$f(x) \Rightarrow f'(x)$$

اعتمد على الشكل المجاور للإجابة عن الاسئلة التالية



ملاحظة:
مشتقة دالة عند نقطة من الرسم
يساوي
ميل المماس للدالة عند تلك النقطة

$$(1) f'(0) = 0$$

$$(2) f'(3^-) = 1$$

$$(3) f'(3^+) = -2$$

$$(4) f'(3) \text{ غ. م.}$$

$$(5) f'(-2^-) = 0$$

$$(6) f'(-2) \text{ غ. م.}$$

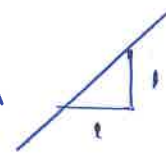
$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$$

$$(8) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+2h) - f(4)}{h} = 2 f'(4) = 2(-2) = -4$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{[f(x)]^2 - [f(4)]^2}{x^2 - 4^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \cdot \frac{f(x) + f(4)}{x + 4} = f'(4) \cdot \frac{f(4) + f(4)}{8} = 2 \cdot \frac{0+0}{8} = 0$$

$$(10) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = m = \frac{1}{1} = 1$$

تقدير الميل

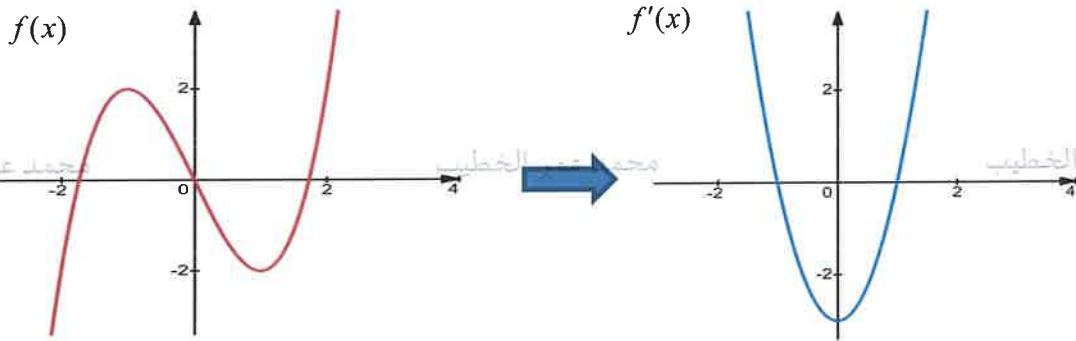


ملاحظات مهمة : على العلاقة بين الرسوم البيانية للدالة ومشتقاتها

(1) مشتقة دالة كثير الحدود من الدرجة n هي دالة كثيرة من الدرجة $n-1$ والعكس صحيح

(2) المماس الافقي في بيان الدالة $f(x)$ يقابله عند نفس النقطة مقطع مع المحور x في بيان الدالة $f'(x)$

(عدد المماسات الافقية في بيان الدالة $f(x)$ يساوي عدد المقاطع السينية في بيان الدالة $f'(x)$)



(3) اذا كانت الدالة $f(x)$ متزايدة (↗) فان اشارة الدالة $f'(x)$ تكون موجبة

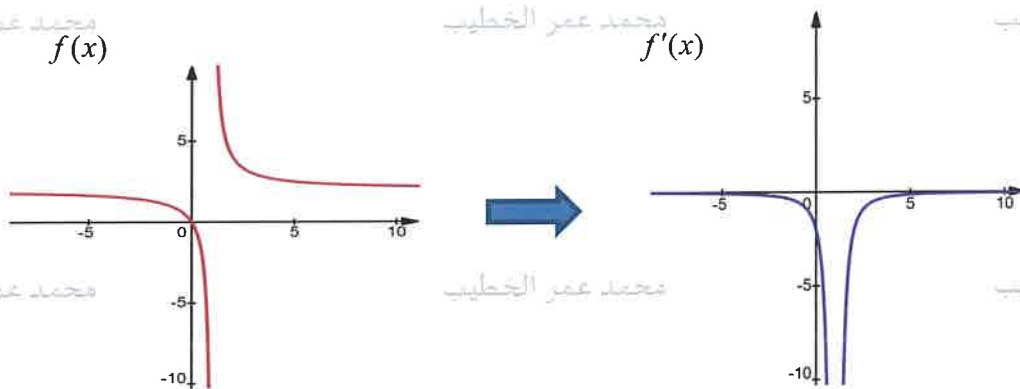
(الدالة $f(x)$ المتزايدة يكون التمثيل البياني لمشتقتها $f'(x)$ فوق محور السينات) والعكس صحيح

(4) اذا كانت الدالة $f(x)$ متناقصة (↘) فان اشارة الدالة $f'(x)$ تكون سالبة

(الدالة $f(x)$ المتناقصة يكون التمثيل البياني لمشتقتها $f'(x)$ تحت محور السينات) والعكس صحيح

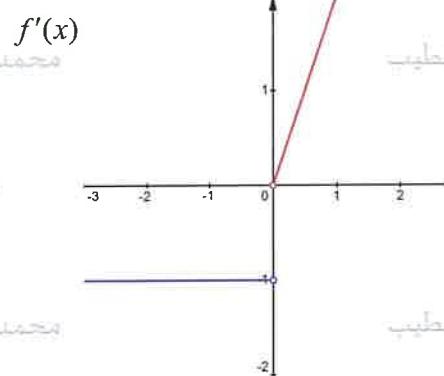
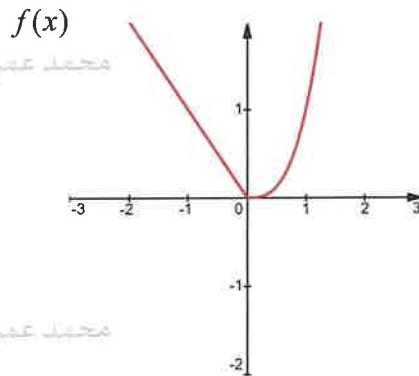
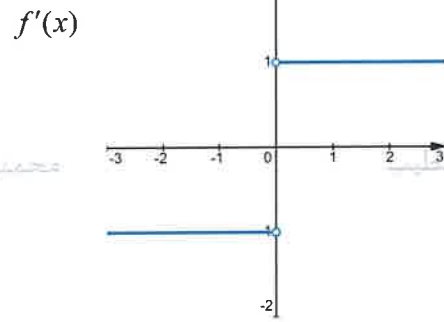
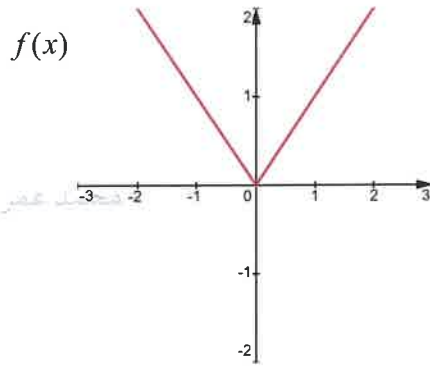
(5) مشتقة الدالة الزوجية هي دالة فردية والعكس صحيح

(6) اذا كان للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي $x=k$ فان للدالة $f'(x)$ نفس خط التقارب الرأسي $x=k$

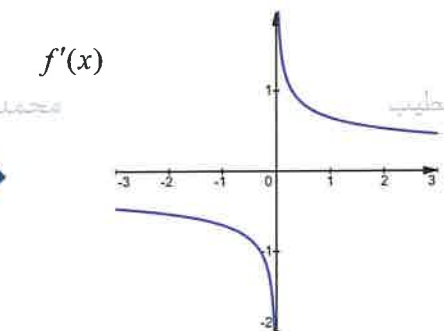
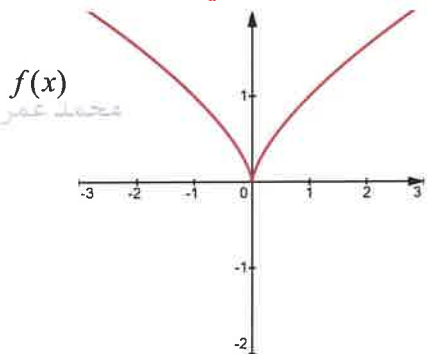


(7) اذا كان للدالة $f(x)$ خط تقارب افقي $y=l$ فان للدالة $f'(x)$ خط تقارب افقي $y=0$ والعكس صحيح

(8) إذا كان للدالة $f(x)$ ركن عند نقطة فان للدالة $f'(x)$ نقطة انفصال قفزة

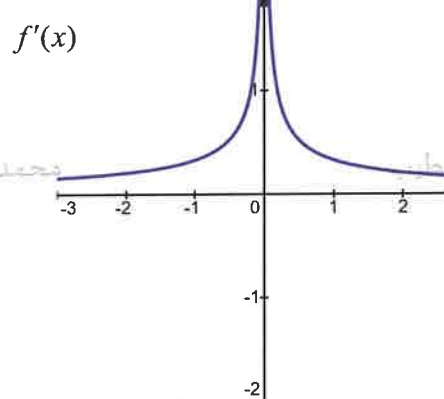
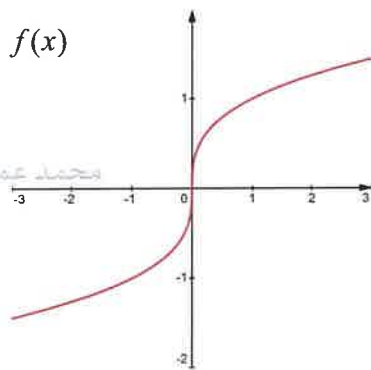


(9) إذا كان للدالة $f(x)$ ناب عند نقطة فان للدالة $f'(x)$ نقطة انفصال لانهائي في جهتين مختلفتين

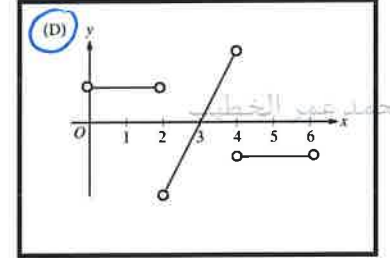
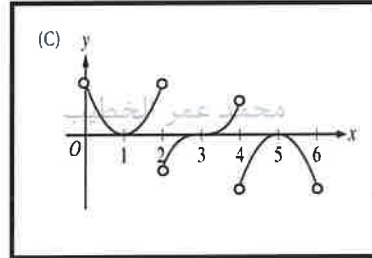
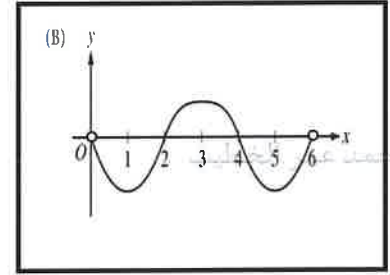
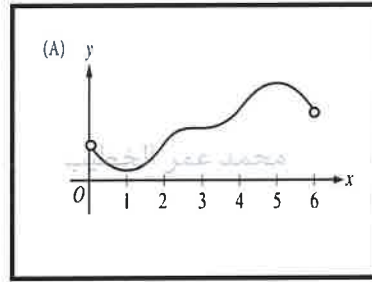
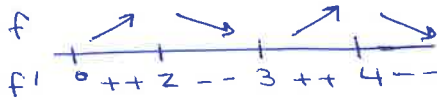
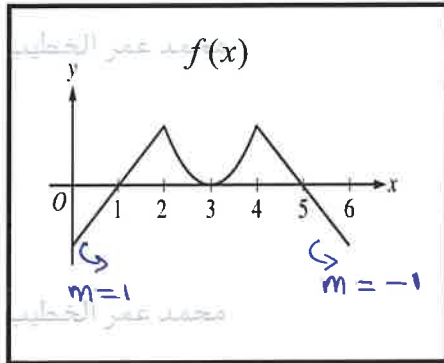


(10) إذا كان للدالة $f(x)$ مماس رأسي عند نقطة فان للدالة $f'(x)$ نقطة انفصال لانهائي في نفس

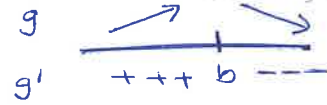
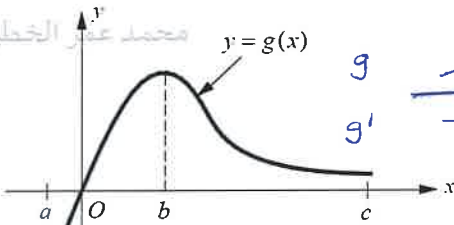
الجهة



(1) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$ اي من الاشكال التالية ممكن ان يكون لبيان الدالة $f'(x)$



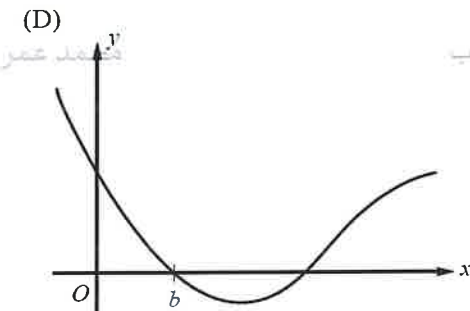
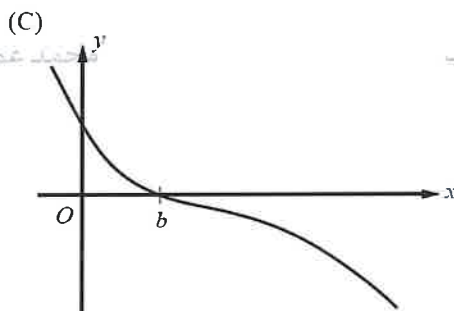
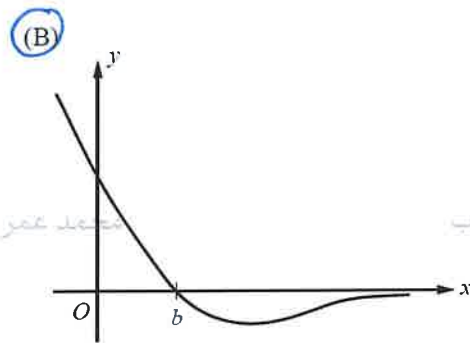
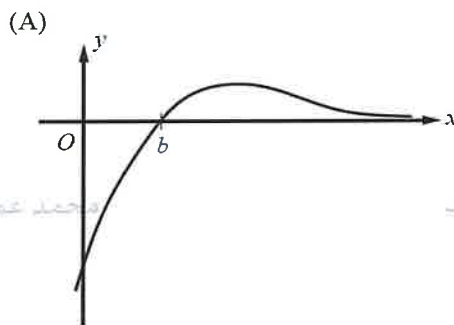
(2) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $g(x)$



لها خط تقارب افقي

لها مماس افقي عند $x=b$

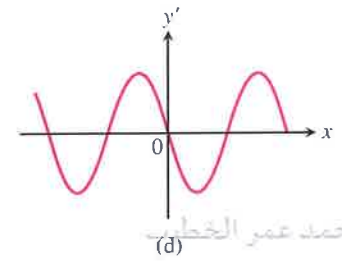
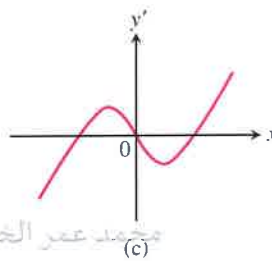
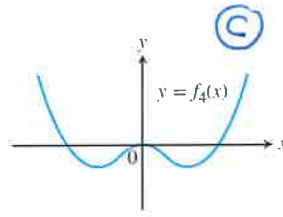
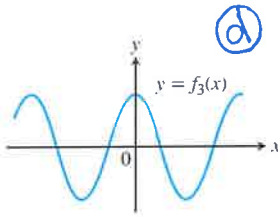
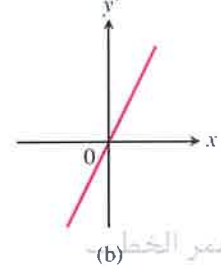
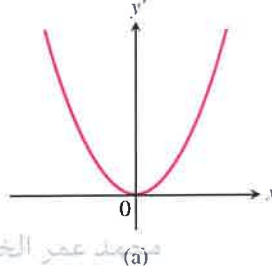
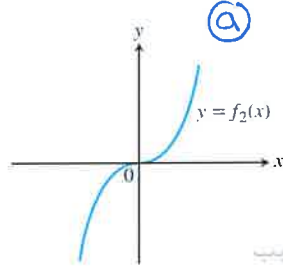
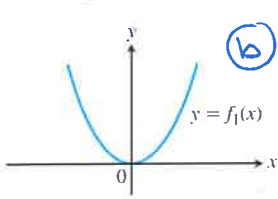
اي من الاشكال التالية يمكن ان يمثل بيان الدالة $g'(x)$



(1) صل بين كل رسم بياني يمثل الدالة $f(x)$ من المجموعة A بالرسم البياني الذي يمثل مشتقتها $f'(x)$ من المجموعة B.

A f

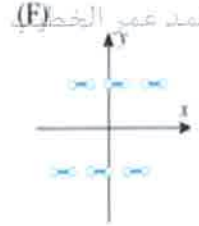
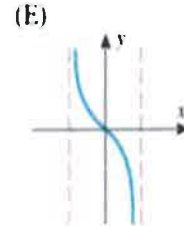
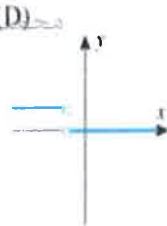
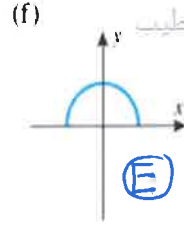
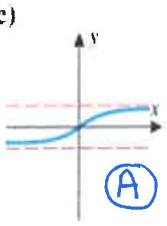
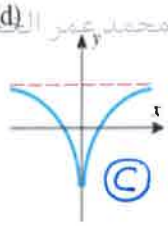
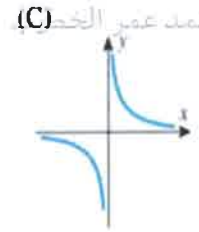
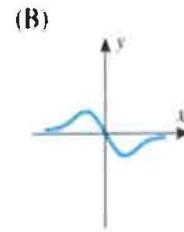
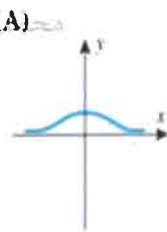
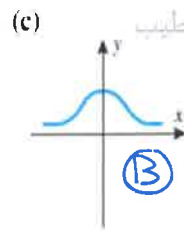
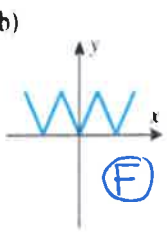
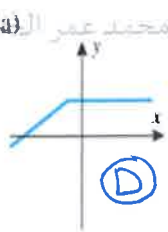
B f'



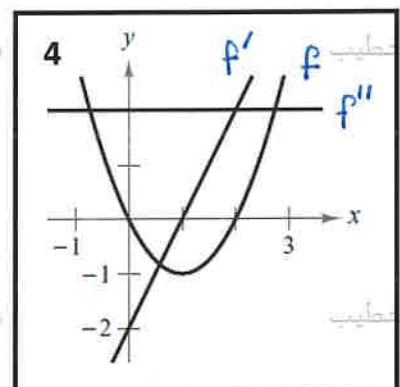
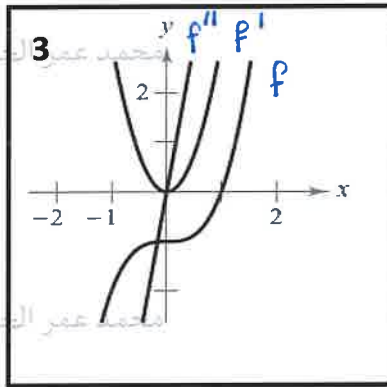
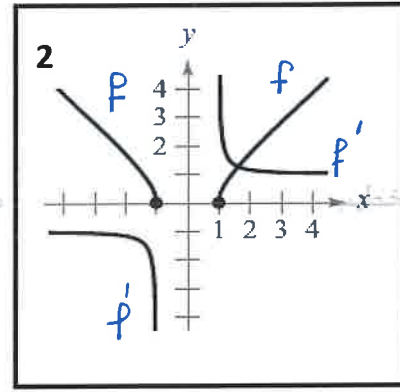
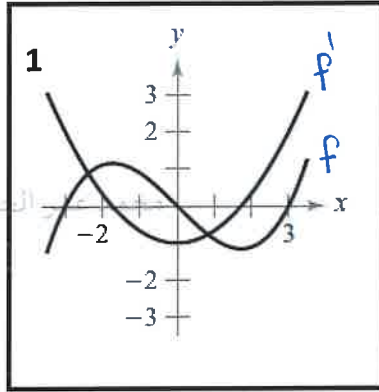
(2) صل بين كل رسم بياني يمثل الدالة $f(x)$ من المجموعة A بالرسم البياني الذي يمثل مشتقتها $f'(x)$ من المجموعة B.

A f

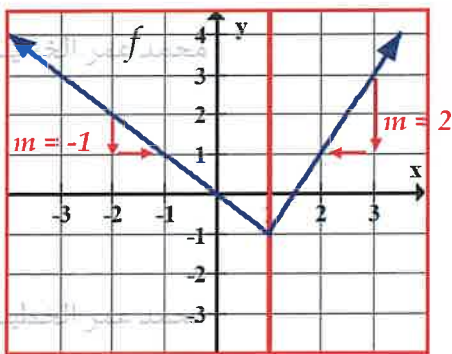
B f'



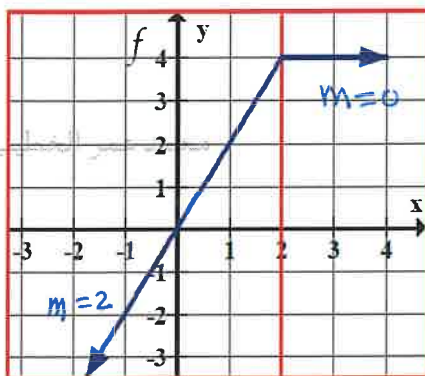
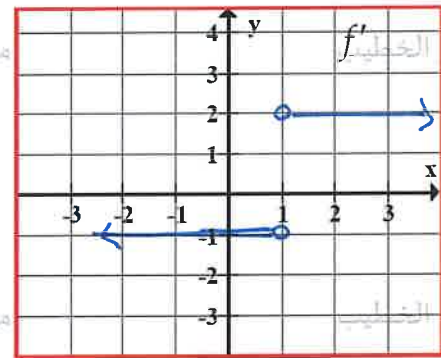
عين الدالة f وعين مشتقاتها في كل شكل من الاشكال التالية



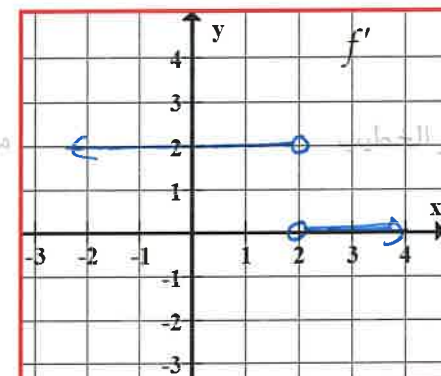
(2) الرسم البياني المجاور يمثل بيان للدالة f ، استقّد من ذلك لرسم بيان الدالة f'



عند
التصان
م.ع
 $f'(1)$

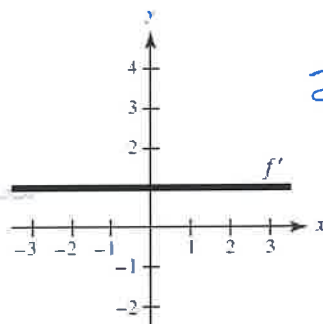
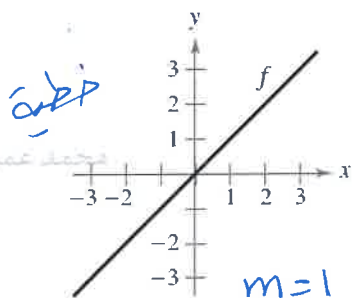


عند
م.ع
 $f'(2)$

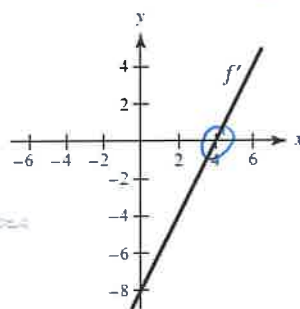
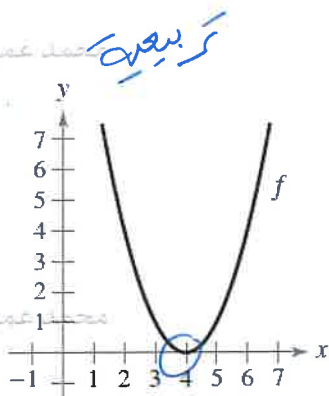


الرسم البياني المجاور يمثل بيان للدالة f ، استقد من ذلك لرسم بيان تقريبي للدالة f'

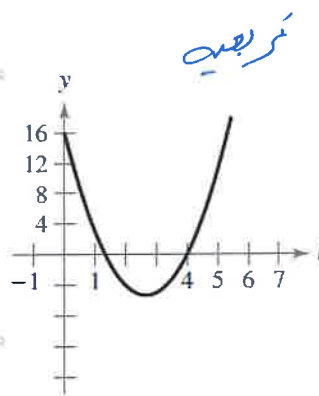
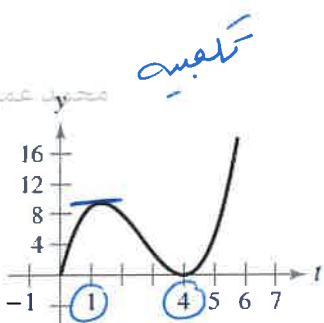
(1)



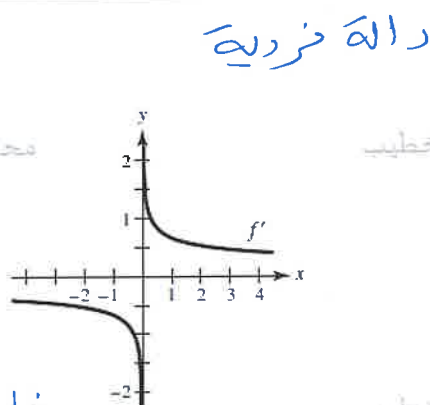
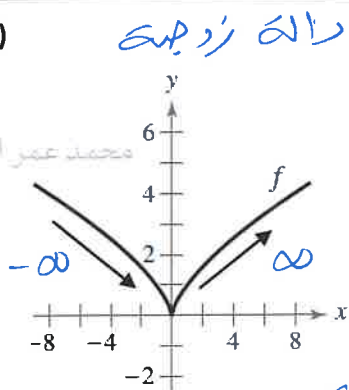
(2)



(3)

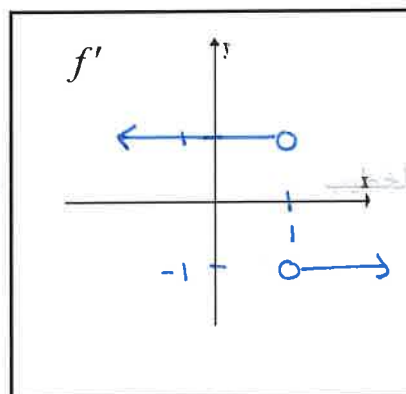
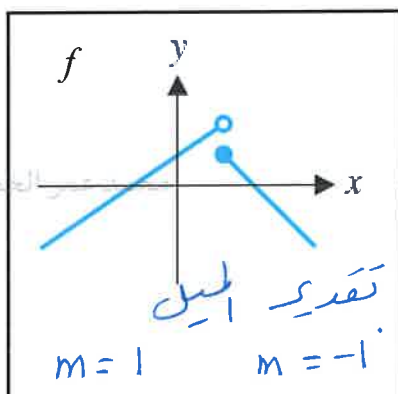


(4)

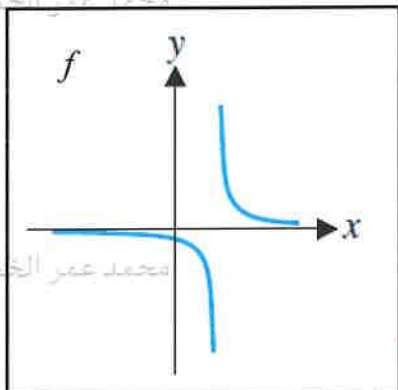


الرسم البياني المجاور يمثل بيان للدالة f . استقد من ذلك لرسم بيان تقريبي للدالة f'

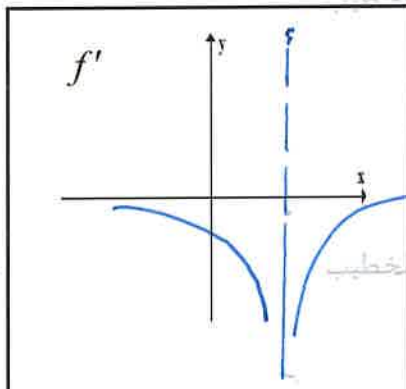
(1)



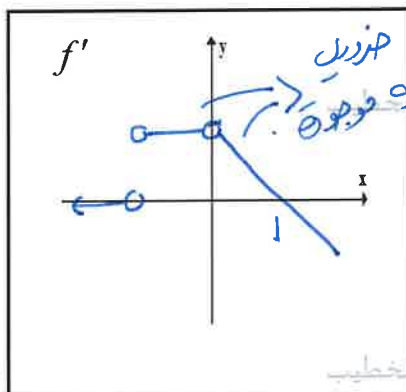
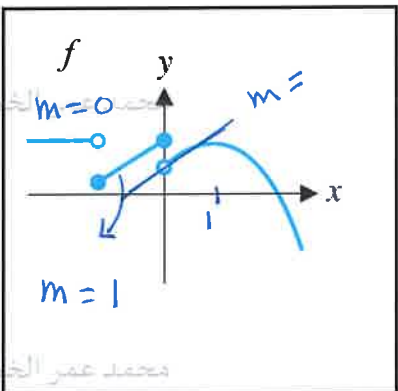
(2)



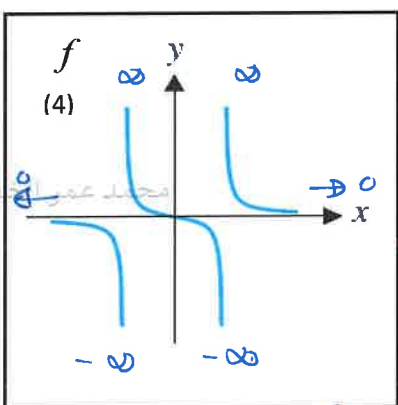
→ (1) محاس رأسي
(2) خط تقارب أفقي



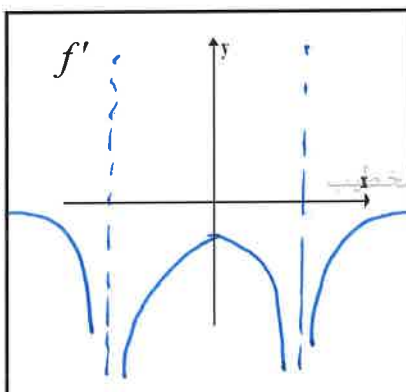
(3)



(4)



(1) خط تقارب رأسي
 $x = \pm 1$

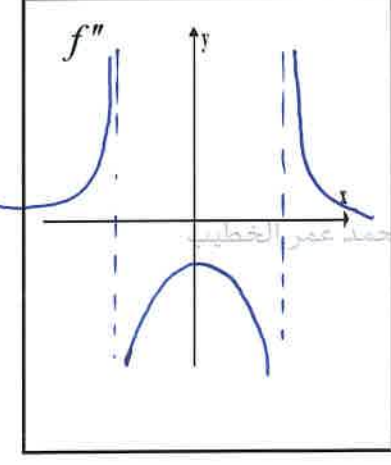
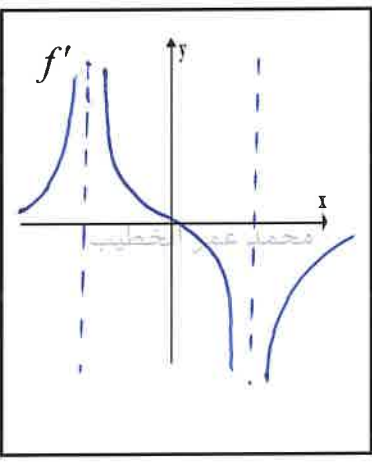
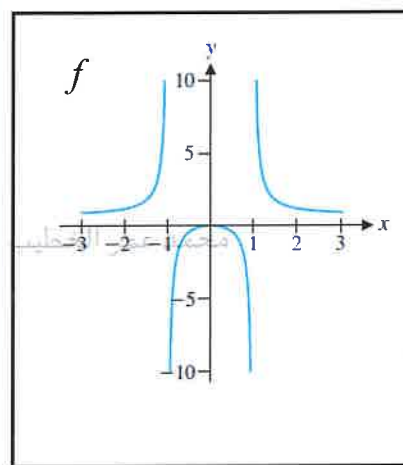
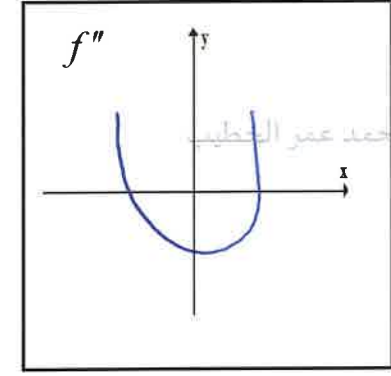
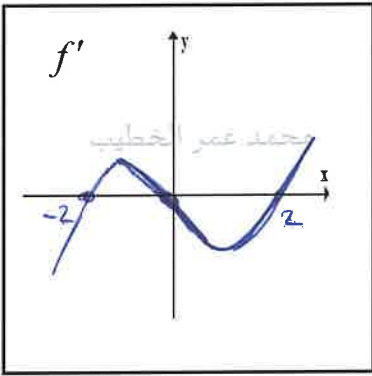
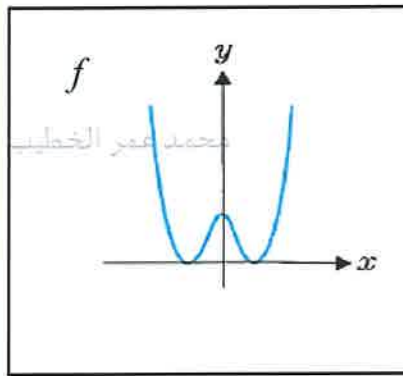
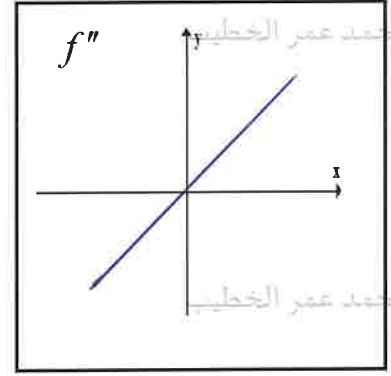
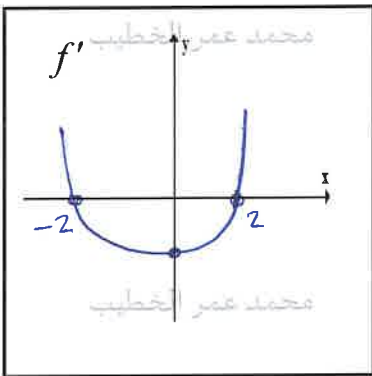
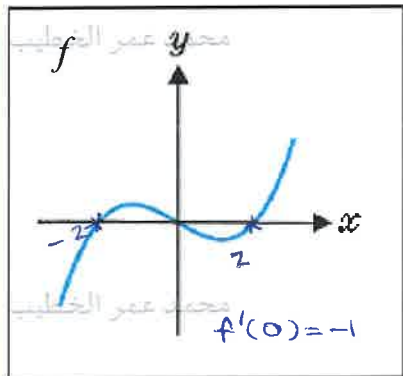
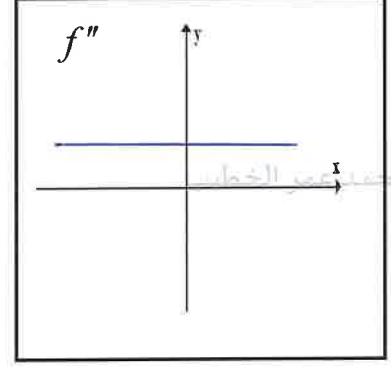
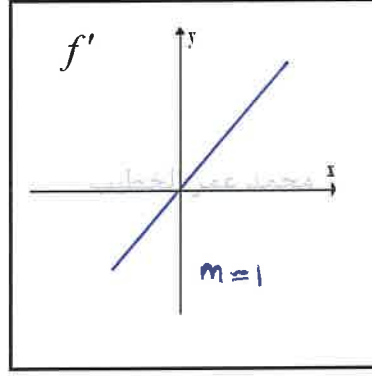
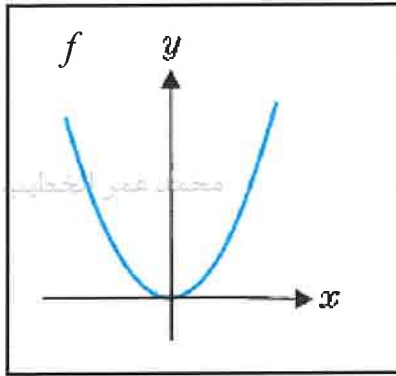


(2) خط تقارب أفقي
 $y = 0$

(3) برام متناقض

تقريباً $f'(0) = -1$

الرسم البياني المجاور يمثل بيان للدالة f . استقد من ذلك لرسم بيان تقريبي للدالة f''



ثانياً التمثيل البياني للدالة $f(x)$ من بيان الدالة $f'(x)$

$$f'(x) \Rightarrow f(x)$$

ملاحظات مهمة :

(1) خط تقارب رأسي

(2) ناب

(3) مماس رأسي

(1) إذا كانت للدالة $f'(x)$ خط تقارب رأسي فإن للدالة $f(x)$ ام

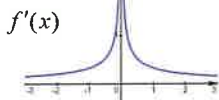
والدالة الاصلية $f(x)$ متصلة

والدالة الاصلية $f(x)$ غير متصلة

إذا كان خط تقارب

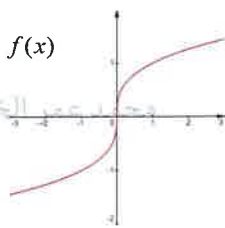
$f'(x)$ في نفس

الاتجاه



فان للدالة $f(x)$

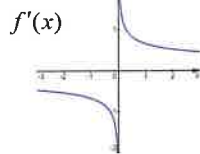
مماس رأسي



إذا كان خط تقارب

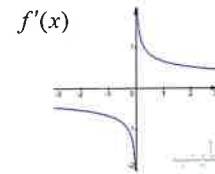
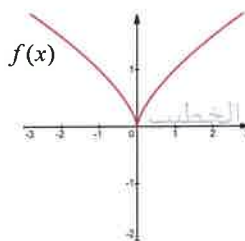
$f'(x)$ في اتجاهين

مختلفين



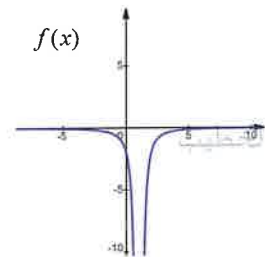
فان للدالة $f(x)$

ناب



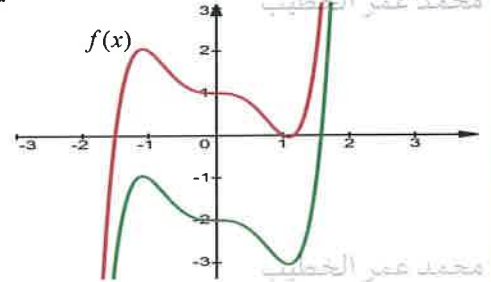
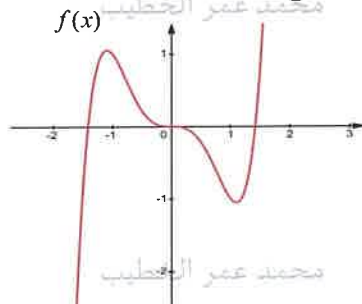
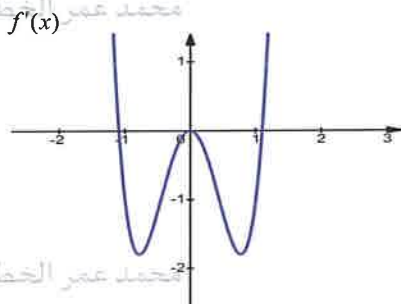
فان للدالة $f(x)$

نفس خط تقارب رأسي

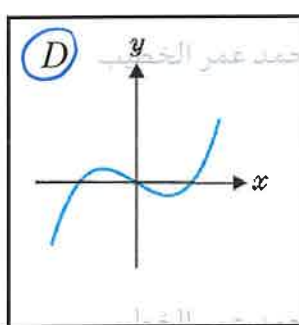
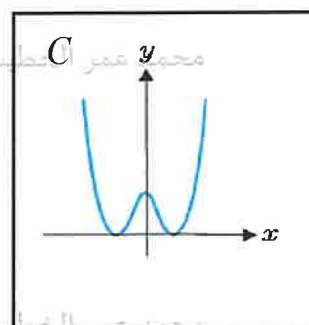
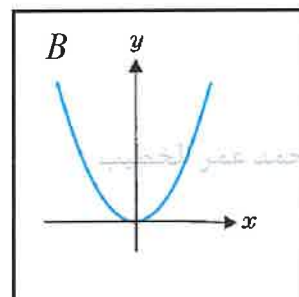
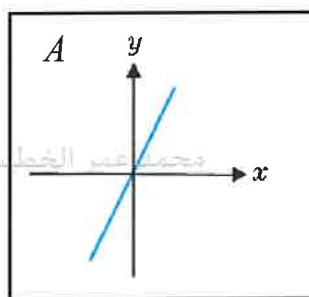
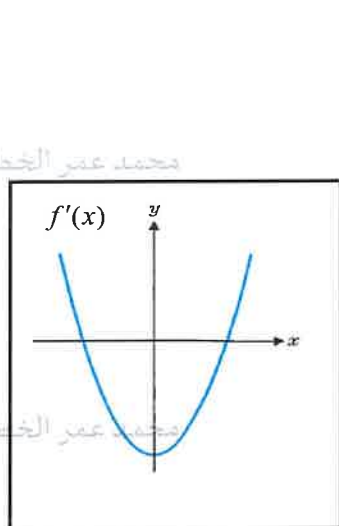


(2) إذا تم رسم التمثيل البياني للدالة $f(x)$ من التمثيل البياني للدالة $f'(x)$ فان اي ازاخة رأسية للتمثيل

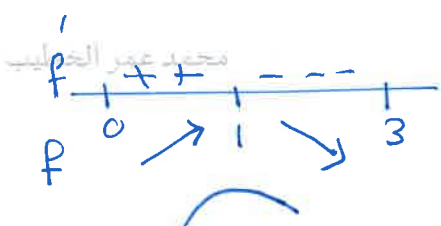
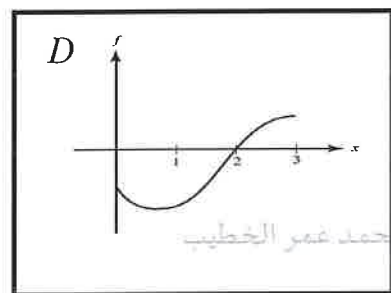
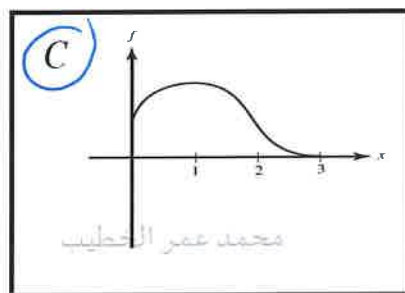
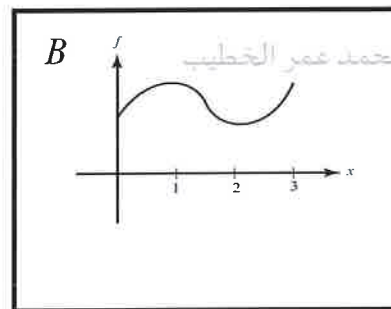
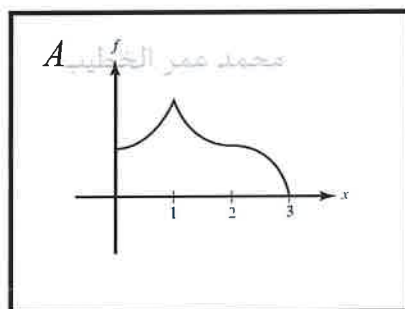
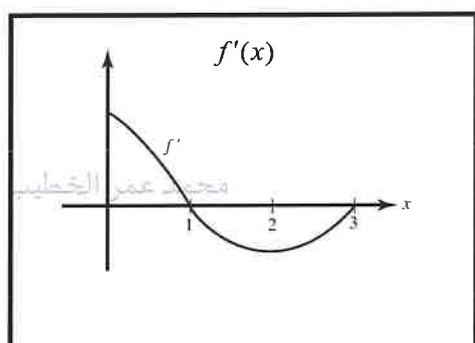
البياني للدالة $f(x)$ يكون تمثيل بياني صحيح



(1) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ أي من الاشكال التالية ممكن ان يكون لبيان الدالة $f(x)$

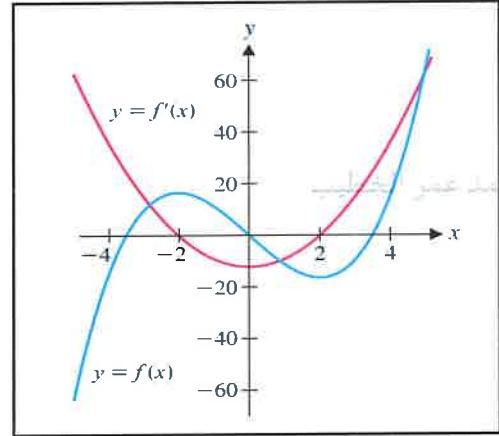
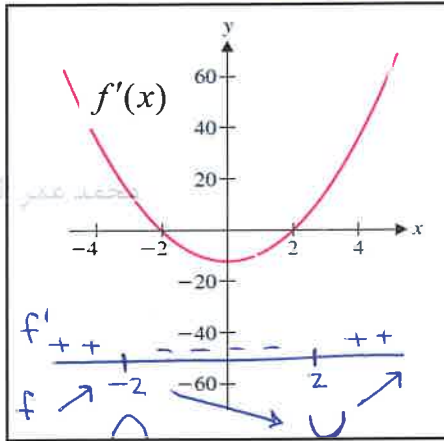


(2) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ أي من الاشكال التالية ممكن ان يكون لبيان الدالة $f(x)$

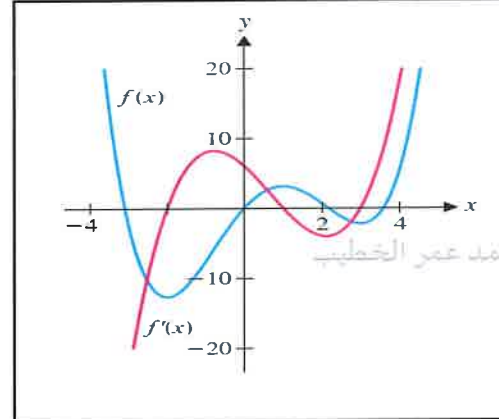
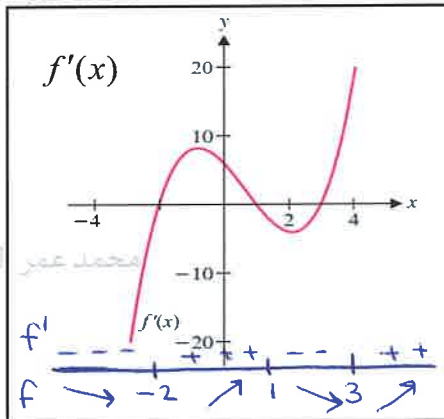


اعتمد على الرسم البياني للدالة f' لرسم صورة تقريبية لبيان الدالة المتصلة f

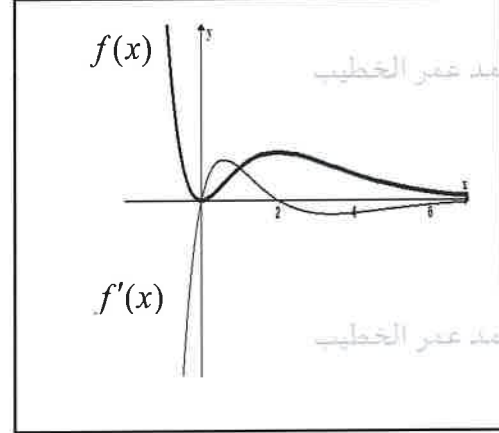
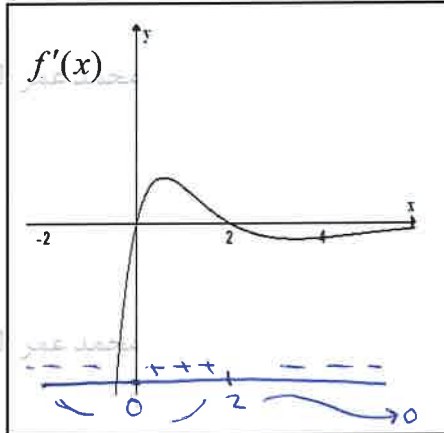
(1)



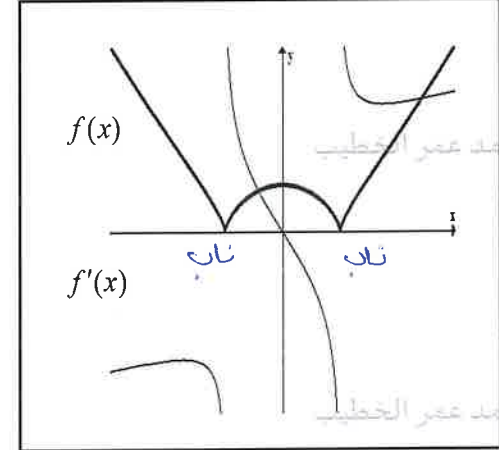
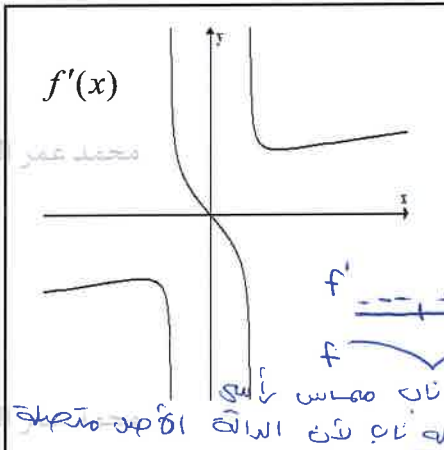
(2)



(3)

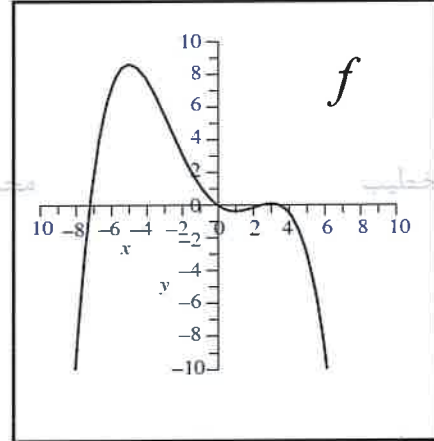
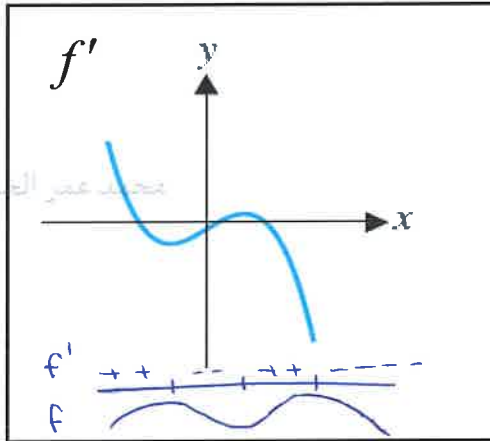


(4)

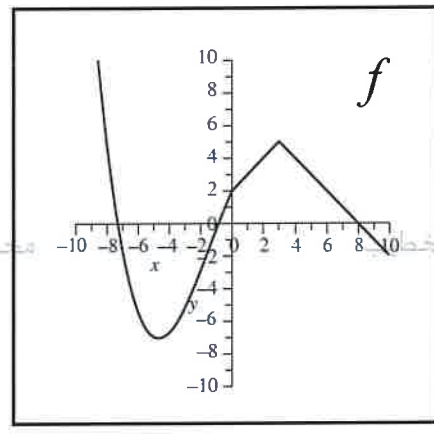
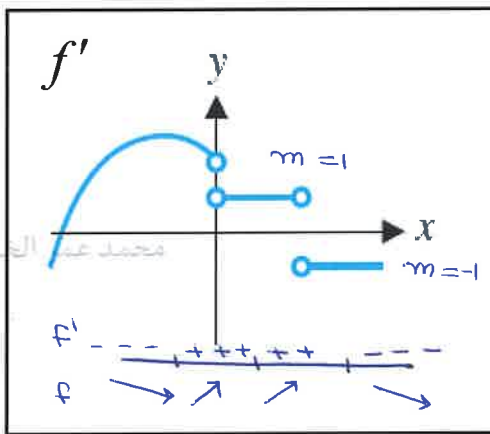


استخدم التمثيل البياني الموضح للدالة f' لرسم تمثيل بياني معقول للدالة المتصلة f

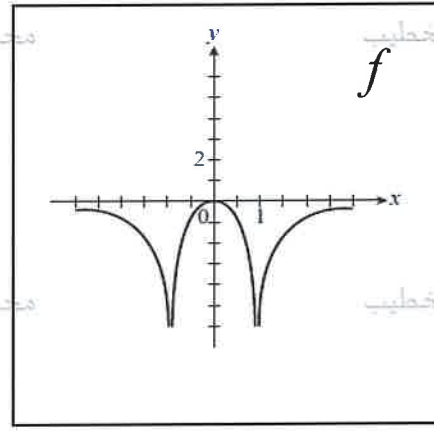
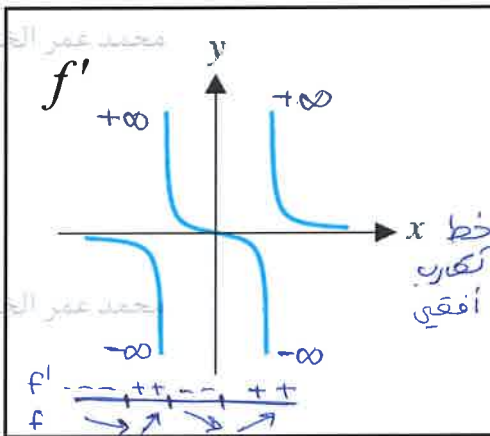
(1)



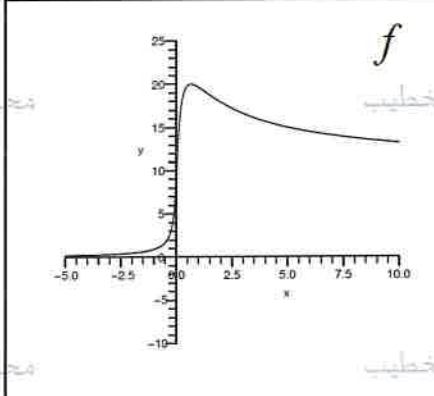
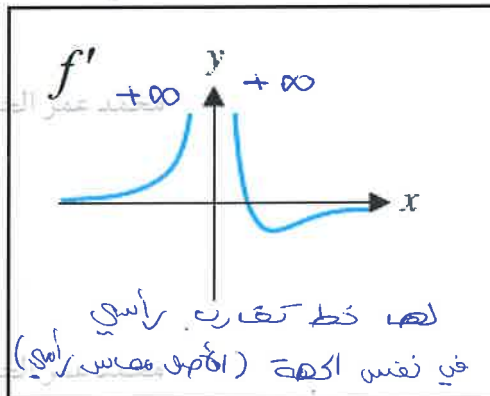
(2)



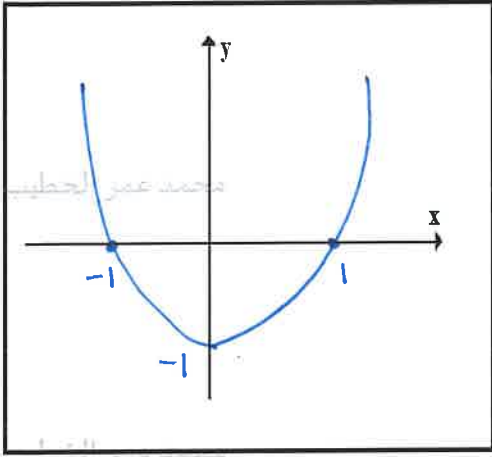
(3)



(4)



(1) ارسم التمثيل البياني المجاور للدالة f التي تحقق الخواص التالية

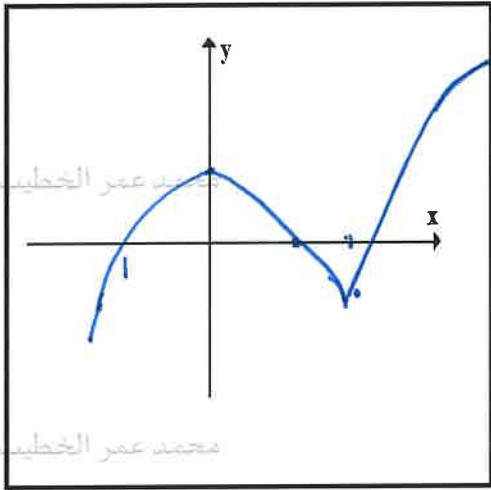


$$f'(x) = 2x$$

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 0, \quad f(-1) = 0$$

(2) ارسم التمثيل البياني المجاور للدالة f

التي تحقق الخواص التالية



$$f(3) = 3, \quad f(1) = 0, \quad f(0) = 1$$

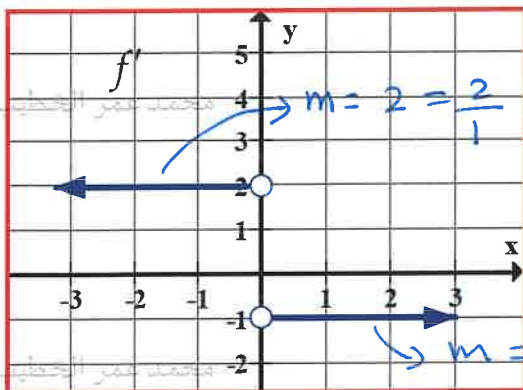
$$f'(3) = 4, \quad f'(1) = -1, \quad f'(0) = 0$$

غير موجودة $f'(2)$

يوجد زوايا أخرى محتملة.

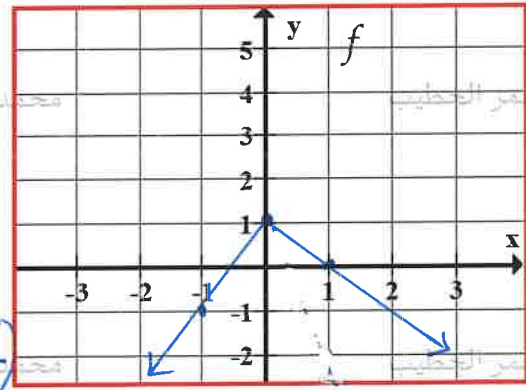
(3) ارسم صورة تقريبية للرسم البياني للدالة المتصلة f والتي لها الخواص الآتية:

$f(0) = 1$ والتمثيل البياني للدالة f' (مشتقة الدالة) f كما هو بالشكل

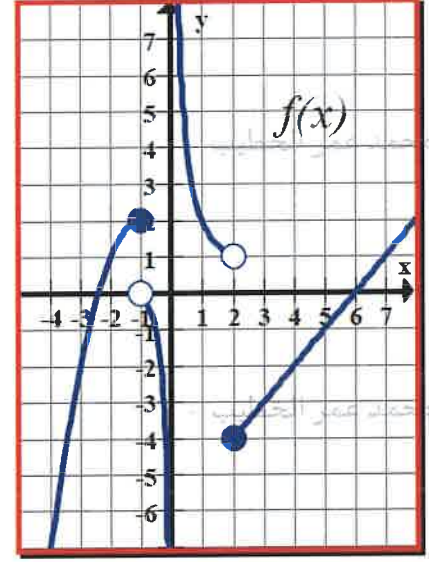
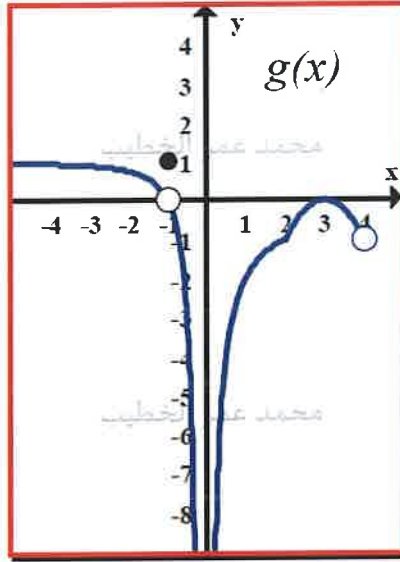
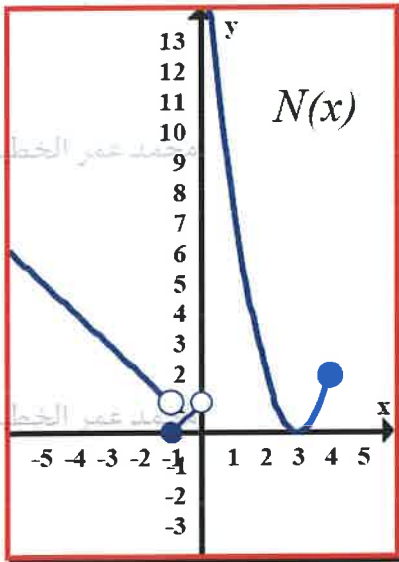


$$m = 2 = \frac{2}{1}$$

$$m = -1 = \frac{-1}{1}$$



الرسومات البيانية التالية تمثل كل من الدوال: $f(x)$ و $g(x)$ و $N(x)$



اكمل الجدول التالي بوضع (نعم) او (لا)

$N(x)$	$g(x)$	$f(x)$	
نعم	نعم	نعم	متصلة عند $x=1$
نعم	نعم	نعم	لها انفصال لا نهائي عند $x=0$
نعم	نعم	نعم	قابلة للإشتقاق عند $x=-2$
نعم	نعم	لا	معدل التغير عند $x=3$ يساوي صفراً
نعم	نعم	لا	تكون فقط النهاية لجهة اليسار موجودة عند $x=4$
لا	نعم	لا	لها انفصال يمكن التخلص منه عند $x=-1$

الدالة التي تحقق جميع ما سبق هي: $g(x)$

ملاحظة : سيتم ترتيب الدرس الثالث والرابع بطريقة عرض مختلفة عن الكتاب حيث سيكون في الدرس الثالث من الملزمة قواعد الاشتقاق الموجودة في الدرس الثالث والرابع من الكتاب وتكون تطبيقات الدرس الثالث والرابع من الكتاب في الدرس الرابع من الملزمة

قواعد الاشتقاق

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

$$\frac{d}{dx}ax = a$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

القواعد الخاصة

$$(1) \frac{d}{dx}[c \times f(x)] = c \times f'(x)$$

$$(2) \frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(3) \frac{d}{dx}[f(x) \times g(x)] = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

$$(4) \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$(5) \frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$(6) \frac{d}{dx}\left[\frac{a}{f(x)}\right] = \frac{-a \times f'(x)}{[f(x)]^2}$$

القواعد العامة

قاعدة الضرب ← مشتقة الأول في الثاني + الأول في مشتقة الثاني

قاعدة القسمة ← مشتقة البسط في المقام - البسط في مشتقة المقام على مربع المقام

قاعدة الجذر التربيعي ← مشتقة ما تحت الجذر على 2 في الجذر

قاعدة ثابت على دالة ← سالب الثابت في مشتقة المقام على مربع المقام

أوجد $\frac{dy}{dx}$ ثم في كل مما يأتي:

$$(1) \quad y = 2x^7 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 14x^6$$

$$(2) \quad y = -3x \Rightarrow y' = -3$$

$$(3) \quad y = 5^2 \Rightarrow y' = 0$$

ثابت

$$(4) \quad y = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x \Rightarrow y' = \frac{1}{2}$$

$$(5) \quad y = \frac{4}{x} \Rightarrow y' = \frac{-4(1)}{x^2} = \frac{-4}{x^2}$$

$$(6) \quad y = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3} \Rightarrow y' = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$$

$$(7) \quad y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(8) \quad y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$(9) \quad y = x^\pi = y' = \pi x^{\pi-1}$$

$$(10) \quad y = e^2 \Rightarrow y' = 0$$

ثابت

$$(11) \quad y = \cos \pi \Rightarrow y' = 0$$

ثابت

$$(12) \quad y = x\sqrt{x} = x \cdot x^{1/2} = x^{3/2}$$

$$y' = \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

أوجد المشتقة في كل مما يأتي:

$$(1) y = 2x^3 + 7x - 3\pi$$

$$y' = 6x^2 + 7$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(2) y = x^5 - x^e + 6$$

$$y' = 5x^4 - e x^{e-1}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(3) y = -5x^4 - 2x^{-3} + 4x^{\frac{5}{4}} - \cos \frac{\pi}{4}$$

$$y' = -20x^3 + 6x^{-4} + 4 \cdot \frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}} - 0$$

$$= -20x^3 + 6x^{-4} + 5x^{\frac{1}{4}}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(4) y = 3x^2 - \frac{3}{x^3} + \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 3x^2 - 3x^{-3} + \sqrt{x} - \frac{1}{2}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y' = 6x + 9x^{-4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 6x + \frac{9}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(5) y = \frac{1}{2t} - \frac{4}{t^2} + \sqrt{t^3} = \frac{1}{2\sqrt{t}} - 4t^{-2} + t^{3/2}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{t^2} + 8t^{-3} + \frac{3}{2} t^{1/2}$$

$$= \frac{-1}{2t^2} + \frac{8}{t^3} + \frac{3}{2} \sqrt{t}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) $f(t) = 3t^3 - 2\sqrt{t}$

$$f'(t) = 9t^2 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = 9t^2 - \frac{1}{\sqrt{t}}$$

(2) $f(s) = 5\sqrt{s} - 4s^2 + 3$

$$f'(s) = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{s}} - 8s = \frac{5}{2\sqrt{s}} - 8s$$

(3) $f(w) = \frac{3}{w} - 8w + 1$

$$f'(w) = \frac{-3}{w^2} - 8$$

(4) $f(y) = \frac{2}{y^4} - y^3 + 2$

$$f'(y) = -8y^{-5} - 3y^2 = \frac{-8}{y^5} - 3y^2$$

(5) $f(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{x}} - 2x + \pi$

$$f'(x) = \frac{-10}{3} x^{-4/3} - 2 = \frac{-10}{3\sqrt[3]{x^4}} - 2$$

(6) $f(x) = 12x - x^2 - \frac{10}{\sqrt[3]{x^2}} = 12x - x^2 - 10x^{-2/3}$

$$f'(x) = 12 - 2x + \frac{20}{3} x^{-5/3}$$

$$= 12 - 2x + \frac{20}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

(1) $f(s) = 2s^{3/2} - 3s^{-1/3}$

$$f'(s) = 3s^{1/2} + s^{-4/3}$$

(2) $f(t) = 3t^\pi - 2t^{1.3}$

$$f'(t) = 3\pi t^{\pi-1} - 2.6 t^{0.3}$$

(3) $f(x) = x(3x^2 - \sqrt{x})$

$$f(x) = 3x^2 - x^{3/2}$$

$$f'(x) = 6x - \frac{3}{2}x^{1/2}$$

أو باستخدام قاعدة الضرب

$$f'(x) = 1 \cdot (3x^2 - \sqrt{x}) + x(6x - \frac{1}{2\sqrt{x}})$$

(4) $f(x) = \frac{3x^2 - 3x + 1}{2x} = \frac{3x^2}{2x} - \frac{3x}{2x} + \frac{1}{2x}$

$$= \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

(5) $f(x) = \frac{4x^2 - x + 3}{\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}}$

$$= 4x^{3/2} - x^{1/2} + 3x^{-1/2}$$

$$f'(x) = 6x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{-3/2}$$

(6) $f(x) = (x+1)(3x^2 - 4)$

$$f'(x) = (1)(3x^2 - 4) + (x+1)(6x)$$

قاعدة الضرب

أو التبسيط

ثم الاشتقاق

أوجد $f'(x)$ ثم اوجد $f'(0)$ في كل مما يأتي:

(1) $f(x) = (x+5)(1-x^5)$

قاعدة الضرب .

محمد عمر الخطيب $f'(x) = (1)(1-x^5) + (x+5)(-5x^4)$ محمد عمر الخطيب

$$f'(0) = 1 + 5(0) = 1$$

(2) $f(x) = (x^2+5)(x^2-5)$

$$f'(x) = (2x)(x^2-5) + (x^2+5)(2x)$$

محمد عمر الخطيب $f'(0) = 0$

(3) $f(x) = x(x+1)(2x-5) = (x^2+x)(2x-5)$

$$f'(x) = (2x+1)(2x-5) + (x^2+x)(2)$$

$$f'(0) = (1)(-5) + 0$$

$$= -5$$

السؤال السابق: $f'(x) = 1(x+1)(2x-5) + x(1)(2x-5) + x(x+1)(2)$ ممكن حل

(4) $f(x) = (x^2+1)^2 = (x^2+1)(x^2+1)$

$$f'(x) = (2x)(x^2+1) + (x^2+1)(2x)$$

$$f'(x) = 4x(x^2+1)$$

محمد عمر الخطيب $f'(0) = 0$

أوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ ثم اوجد $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x+3) - (x^2-4)(1)}{(x+3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} = \frac{2(4) - (-3)}{4^2} = \frac{11}{16}$$

(2) $y = \frac{6x}{\sqrt{x+1}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6(\sqrt{x+1}) - 6x\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)}{(\sqrt{x+1})^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} = \frac{6(2) - 6\left(\frac{1}{2}\right)}{4} = \frac{9}{4}$$

(3) $y = \frac{3}{x^2 + 1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

(4) $y = (x+3)\frac{x^2-1}{x^2+5x}$

قاعدة الضرب مع القسمة

$$\frac{dy}{dx} = (1) \left[\frac{x^2-1}{x^2+5x} \right] + (x+3) \left[\frac{2x(x^2+5x) - (x^2-1)(2x+5)}{(x^2+5x)^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} = \frac{4}{3}$$

اشتقاق الدوال المعرفه بأكثر من قاعدة (الدوال المتفرعة)

ملاحظة: قبل دراسة اشتقاق الدالة عند

نقطة يجب دراسة الاتصال عند هذه

النقطة وتأكد ان الدالة متصلة عندها

$$(1) \text{ لتكن: } f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , x \geq 1 \\ 3x & , x < 1 \end{cases}$$

(أ) هل الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = 1$

(ب) هل الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

(ج) اوجد $f'(x)$

$$\begin{array}{r} f \\ \hline 3x \quad | \quad x^3 + 1 \\ \hline \leftarrow 3 \quad | \quad 2 \rightarrow \\ f' \\ \hline 3 \quad | \quad 3x^2 \\ \hline \leftarrow 3 \quad | \quad 2 \rightarrow \end{array}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x > 1 \\ 3 & x < 1 \end{cases}$$

(2) لتكن: $g(x) = |2x - 6|$

(أ) هل الدالة $g(x)$ متصلة عند $x = 3$

(ب) ابحث قابلية الاشتقاق للدالة $g(x)$ عند $x = 3$

(ج) اوجد $g'(x)$

$$\begin{array}{r} f \\ \hline -(2x-6) \quad | \quad 2x-6 \\ \hline \leftarrow 3 \quad | \quad 2 \rightarrow \\ f' \\ \hline -2 \quad | \quad 2 \\ \hline \leftarrow -2 \quad | \quad 2 \rightarrow \end{array}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & x > 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$$

$$(3) \text{ لتكن: } g(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , x \geq 1 \\ 3x - 1 & , x < 1 \end{cases}$$

اوجد $g'(x)$

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x > 1 \\ 3 & x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} g \\ \hline 3x-1 \quad | \quad x^3+1 \\ \hline \leftarrow 3 \quad | \quad 2 \rightarrow \\ g' \\ \hline 3 \quad | \quad 3x^2 \\ \hline \leftarrow 3 \quad | \quad 2 \rightarrow \end{array}$$

$$(a) f'(1) = 3$$

$$(b) f'(0.5) = 3$$

$$(c) f'(2.4) = 0$$

ملاحظة: مشتقة دالة الصحيح عند نقطة

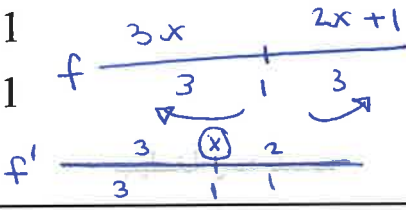
(1) اذا كانت ناتج التعويض ما بداخل الصحيح عدد

صحيح فان المشتقة غير موجودة

(2) اذا كانت ناتج التعويض ما بداخل الصحيح عدد

كسر فان المشتقة موجودة وتساوي صفر

$$(1) f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \geq 1 \\ 3x & , x < 1 \end{cases}$$



$$x=1$$

لايجاد النقاط التي عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق نبحث عند

(1) نقاط التفرع (يمكن)

(2) اصفار مقام الدالة (اكيد)

(3) اصفار مقام المشتقة (اكيد)

$$(2) f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$x=1$$

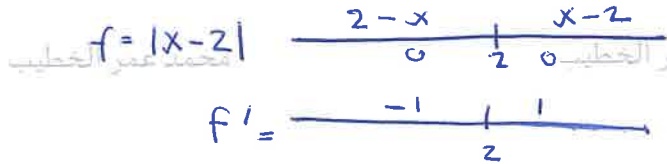
$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

$$x=0$$

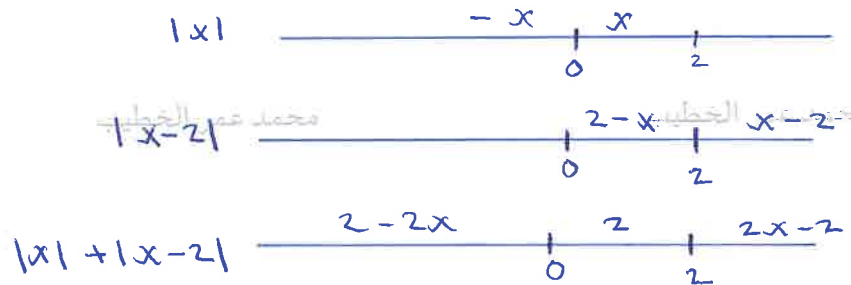
$$(4) f(x) = |x-2|$$

$$x=2$$



$$(5) f(x) = |x| + |x-2|$$

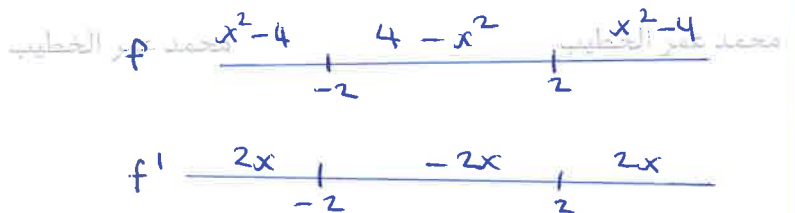
$$x=0, x=2$$



$$(6) f(x) = |x^2 - 4|$$

$$x=2, x=-2$$

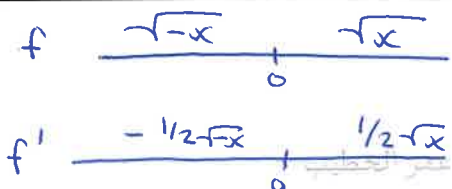
يمكن حلها بالرسم (أسهل)



من خواص المطلق .. لا يوجد نقاط

$$(8) f(x) = \sqrt{|x|}$$

$$x=0$$



بفرض ان الدوال $f(x), g(x)$ ومشتقاتهما لهما القيم التالية عند $x = 2$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
2	1	3	5	-4

أوجد :

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$

فسر إجابتك

$$= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = f(2) + g(2) = 1 + 5 = 6$$

لأن الدالة f و g قابلة للاشتقاق فهي متصلة.

(2) $\frac{d}{dx} (3f(x) + \frac{1}{4}g(x)) \quad x=2$

$$= 3f'(2) + \frac{1}{4}g'(2)$$

$$= 3(3) + \frac{1}{4}(4)$$

$$= 8$$

(3) $\frac{d}{dx} (f(x) \times g(x)) \quad x=2$

$$= f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2)$$

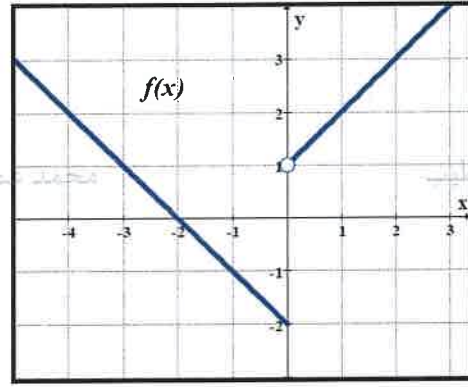
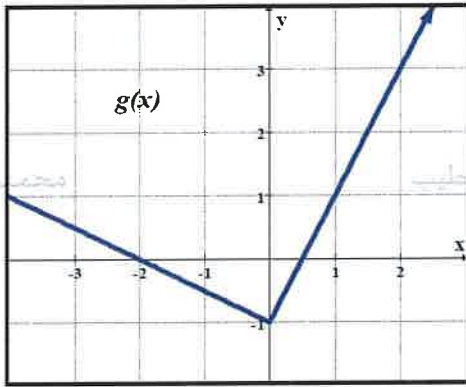
$$= (3)(5) + (1)(-4) = 11$$

(4) $\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right)(x) \quad x=2$

$$= \frac{f'(2) \cdot g(2) - f(2) \cdot g'(2)}{[g(2)]^2}$$

$$= \frac{3(5) - (1)(-4)}{5^2} = \frac{19}{25}$$

المشتقة من الرسم هي الميل



اوجد

(1) $\frac{d}{dx} [2g(x) - 3f(x)]$ عند $x = -2$

$= 2g'(-2) - 3f'(-2)$

$= 2(-\frac{1}{2}) - 3(-1) = 2$

المشتقات موجودة

عند $x = -2$

لذلك يمكن تطبيق

قواعد الاشتقاق

(2) $\frac{d}{dx} [f(x) \times g(x)]$ عند $x = 1$

$= f'(1) \cdot g(1) + f(1) \cdot g'(1)$

$= (1) \cdot (1) + (2)(2) = 5$

(3) $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ عند $x = 2$

$= \frac{f'(2) \cdot g(2) - f(2) \cdot g'(2)}{[g(2)]^2}$

$= \frac{(1)(3) - (3)(2)}{3^2} = -\frac{1}{3}$

المشتقات ذات الرتب العليا

رمز المشتقة والمشتقات العليا

الرتبة	المشتقة	تفاضل ليبنز
1	$y' = f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$
2	$y'' = f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
3	$y''' = f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
4	$y^{(4)} = f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$

المشتقات العليا هي أي مشتقة للدالة بعد المشتقة الأولى مثل المشتقة الثانية أو الثالثة ...

وتكون المشتقة الثانية هي مشتقة المشتقة وهكذا

(1) إذا كانت: $y = x^4 - 3x^2 + 5$ فاوجد: $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$y' = 4x^3 - 6x$$

$$y'' = 12x^2 - 6$$

(2) إذا كانت: $f(x) = x^5 - 6x^3 + 2x + 8$ فاوجد:

$$(a) f^{(4)}(x) = 120x$$

$$f'(x) = 5x^4 - 18x^2 + 2$$

$$f''(x) = 20x^3 - 36x$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 36$$

$$f^{(4)}(x) = 120x$$

$$f^{(5)}(x) = 120$$

⋮

$$f^{(10)}(x) = 0$$

$$(b) f^{(10)}(x) = 0$$

(1) اوجد صيغة عامة لـ $f^{(n)}(x)$ (المشتقة ذات الرتبة n) للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{(1)(2)}{x^3}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = \frac{-(1)(2)(3)}{x^4}$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5} = \frac{(1)(2)(3)(4)}{x^5}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{-5!}{x^6}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

(2) إذا كانت: $f(x) = x g(x)$ اوجد $f^{(n)}(x)$ (المشتقة ذات الرتبة n).

$$f'(x) = 1 \cdot g(x) + x g'(x) = g(x) + x g'(x)$$

$$f''(x) = g'(x) + 1 \cdot g(x) + x \cdot g''(x) = 2g'(x) + x g''(x)$$

$$f'''(x) = 2g''(x) + 1g''(x) + x g'''(x) = 3g''(x) + x g'''(x)$$

$$f^{(n)}(x) = n g^{(n-1)}(x) + x g^{(n)}(x)$$

(3) إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة لاشتقاق عند $x=a$ فأثبت ان الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=a$

حتى نشب أن الدالة متصلة
يجب أن يكون $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot 0$$

$$= 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

ايجاد الثوابت للدوال القابلة للاشتقاق

(1) اوجد كل من a, b التي تجعل $f'(1)$ موجودة حيث

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x < 1 \\ ax + b & x \geq 1 \end{cases}$$

الاتصال

$$f \quad \begin{array}{c} x^2 + 2x \\ | \\ ax + b \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$3 = a + b$$

الاشتقاق

$$f' \quad \begin{array}{c} 2x + 2 \\ | \\ a \end{array}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+)$$

$$2(1) + 2 = a$$

$$4 = a$$

$$a = 4$$

$$\Rightarrow b = -1$$

(2) اوجد كل من m, k التي تجعل الدالة $f(x) = \begin{cases} mx^2 - 2 & x < 1 \\ k\sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

الاتصال

$$f \quad \begin{array}{c} mx^2 - 2 \\ | \\ k\sqrt{x} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$m - 2 = k \quad \text{--- (1)}$$

الاشتقاق

$$f' \quad \begin{array}{c} 2mx \\ | \\ \frac{k}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+)$$

$$2m(1) = \frac{k}{2\sqrt{1}}$$

$$2m = \frac{k}{2} \Rightarrow 4m = k \quad \text{--- (2)}$$

$$\Rightarrow m - 2 = 4m$$

$$m = -2/3 \Rightarrow k = -8/3$$

$$f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < 1 \\ ax^2 + bx, & x \geq 1 \end{cases}$$

(1) اوجد كل من a, b التي تجعل $f'(1)$ موجودة حيث

الاتصال

$$f \quad \begin{array}{c} 3-x \\ | \\ ax^2+bx \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$2 = a + b$$

$$a + b = 2 \quad \text{--- (1)}$$

الاشتقاق

$$f' \quad \begin{array}{c} -1 \\ | \\ 2ax+b \end{array}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+)$$

$$-1 = 2a(1) + b$$

$$2a + b = -1 \quad \text{--- (2)}$$

من (1) و (2) نكافئ

$$\begin{array}{r} 2a + b = -1 \\ a + b = 2 \quad \text{بالطرح} \\ \hline a = -3 \end{array}$$

$$\Rightarrow b = 5$$

(2) اوجد كل من a, b التي تجعل $f'(0)$ موجودة حيث

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ a(x+b)^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

الاتصال

$$\begin{array}{c} x+2 \\ | \\ a(x+b)^2 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$2 = ab^2 \quad \text{--- (1)}$$

الاشتقاق

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ a(2x+2b) \end{array}$$

$$f'(0^-) = f'(0^+)$$

$$1 = a(2b)$$

$$1 = 2ab \quad \text{--- (2)}$$

من (1) و (2) نكافئ

$$\frac{ab^2}{2ab} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

(1) إذا كانت $f(x) = x^5 - 5x$ فاوجد

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 5(2)^4 - 5 = 75 \quad \text{,,} \quad f'(x) = 5x^4 - 5$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f'(2)}{x - 2} = f''(2) = 20(2)^3 = 160 \quad \text{,,} \quad f''(x) = 20x^3$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 - 5x - 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1) = 5(-1)^4 = 0$$

$$\hookrightarrow f(-1) = -4$$

(2) إذا كانت $f(x) = x^3 - ax$ حيث $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 22$ فاوجد قيمة الثابت a

$$f'(x) = 3x^2 - a$$

$$f'(3) = 22$$

$$3(3)^2 - a = 22$$

$$27 - a = 22$$

$$-a = 22 - 27 \Rightarrow \boxed{a = 5}$$

(3) إذا كانت $f(x) = x^4 + bx^2 + 3$ حيث $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f'(2)}{x - 2} = 10$ فاوجد قيمة الثابت b

$$f''(2) = 10$$

$$12(2)^2 + 2b = 10$$

$$48 + 2b = 10$$

$$2b = -38$$

$$\boxed{b = -19}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2bx$$

$$f''(x) = 12x^2 + 2b$$

(4) أوجد كثيرة حدود من الدرجة الثانية $f(x) = ax^2 + bx + c$ والتي تحقق

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$f(0) = -2, f'(0) = 2, f''(0) = 3$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f''(x) = 2a$$

$$f''(0) = 3$$

$$f'(0) = 2$$

$$b = 2$$

$$f(0) = -2$$

$$c = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 2$$

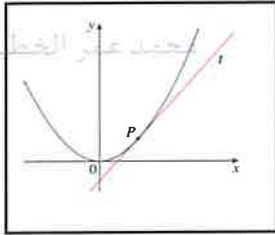
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الوحدة الثالثة: التفاضل /// الدرس الرابع : قواعد الضرب والقسمة (التطبيقات)

التطبيقات الهندسية (معادلة المماس والعمودي)



(1) معادلة المماس للدالة $f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) هي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = m_t = f'(x_1)$$

حيث

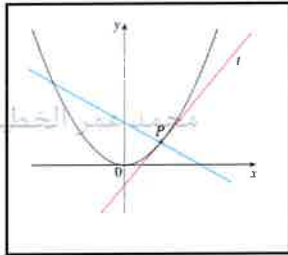
ملاحظة: نقطة التماس هي النقطة التي تقع على منحنى الدالة وعلى المماس ويكون عندها ميل المنحنى وميل المماس متساويان

(2) معادلة العمودي على المماس للدالة $f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) هي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = m_{\perp} = \frac{-1}{m_t}$$

حيث

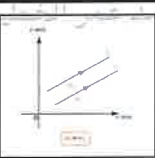
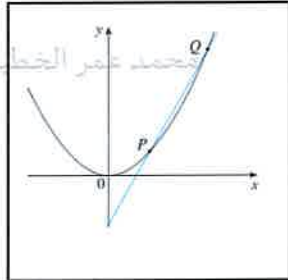


(3) معادلة القاطع التي تمر بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

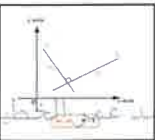
$$m = m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث



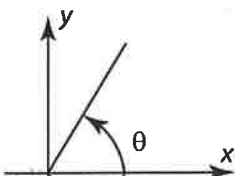
ملاحظة: ليكن ميل المستقيم L_1 هو m_1 وميل المستقيم L_2 هو m_2

(1) إذا كان $m_2 = m_1$ فإن $L_2 \parallel L_1$ (التوازي) والعكس صحيح



(2) إذا كان $m_2 \times m_1 = -1$ فإن $L_2 \perp L_1$ (التعامد) والعكس صحيح

ملاحظة: ميل المماس للدالة عند نقطة يساوي ظل الزاوية الموجبة (الدوران عكس عقارب الساعة) يصنعها المماس مع محور السينات (x)



$$m = \tan \theta$$

إذا كانت الزاوية سالبة اضعف π أو 180°

لتكن: $f(x) = x^2 - 3x$

(1) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $(1, -2)$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$m = f'(1) = 2(1) - 3 = -1$$

(2) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $(1, -2)$

$$m = -1, \quad (1, -2)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = -1(x - 1)$$

$$y + 2 = -x + 1 \Rightarrow y = -x - 1$$

(3) أوجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $(1, -2)$

$$m_t = -1$$

$$m_{\perp} = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-1} = 1$$

$$y + 2 = 1(x - 1)$$

$$y + 2 = x - 1$$

$$y = x - 3$$

(4) أوجد قيم x التي يكون المماس عندها أفقي

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$x = 3/2$$

$$2x - 3 = 0$$

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

(5) أوجد الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع محور السينات عند $x = 1$.

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$\tan \theta = -1 \rightarrow \theta = -45^\circ + 180^\circ$$

$$m = f'(1) = -1$$

$$\theta = 3\pi/4 (135^\circ)$$

يجب أن تكون الزاوية موجبة

(1) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ عند $x=1$

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2+1) - (x+3)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$m = -\frac{3}{2} \quad (1, 2)$$

$$m = f'(1) = \frac{2 - (4)(2)}{(2)^2} = -\frac{3}{2}$$

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1)$$

$$y - 2 = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

(2) أوجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{x-1}$ عند $x=3$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$m_{\perp} = 4 \quad (3, \frac{1}{2})$$

$$m = f'(3) = -\frac{1}{4}$$

$$y - \frac{1}{2} = 4(x - 3)$$

$$y - \frac{1}{2} = 4x - 12$$

$$y = 4x - \frac{23}{2}$$

(3) أوجد الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع محور السينات للدالة $f(x) = \frac{1}{x-1}$ عند $x=3$

$$m = \tan \theta$$

$$\tan \theta = -\frac{1}{4}$$

عن الحوال
البيت

$$\theta = -14^\circ$$

الزاوية الموجبة

$$-14^\circ + 180^\circ = 166^\circ$$

(1) إذا كانت: $f(x) = \frac{1}{x}$ اوجد جميع قيم x التي يكون عندها الميل يساوي $-\frac{1}{4}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

(2) اوجد قيم x التي يكون عندها المماس للدالة: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ أفقيا $m=0$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = m$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$m=0$$

(3) اوجد قيم x التي يكون عندها المماس للدالة: $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ أفقيا

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 2}{x^2}$$

$$f'(x) = m = 0$$

$$\frac{x^3 - 2}{x^2} = 0$$

$$\therefore \text{البسط} = 0$$

$$2x^3 - 2 = 0$$

$$x = \pm 1$$

(4) اوجد قيم x التي يصنع عندها المماس للدالة: $f(x) = x^3 - 2x + 1$ زاوية قياسها 45°

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$f'(x) = m = \tan 45^\circ$$

$$3x^2 - 2 = 1$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

(5) اوجد جميع قيم x والتي يكون المماسان على الدالتين $y = x^3 + 2x + 1$ ،

$$y' = 3x^2 + 2 \rightarrow m_1$$

$$y' = 4x^3 + 3x^2 \rightarrow m_2$$

$$m_1 = m_2 \text{ من التوازي}$$

$$y = x^4 + x^3 + 3 \text{ متوازيين}$$

$$4x^3 + 3x^2 = 3x^2 + 2$$

$$4x^3 - 3x^2 - 3x^2 - 2 = 0$$

$$x^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

(6) اوجد قيمة x التي عندها المستقيم $y = 1 - 3x$ والمماس للمنحنى $y = x^3 + 1$ متعامدين

$$y = 1 - 3x \Rightarrow y' = -3 = m_1$$

$$y = x^3 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 \rightarrow m_2$$

$$m_1 \times m_2 = -1$$

$$3x^2 \cdot (-3) = -1$$

$$x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$$

(1) بفرض ان الدالة $g(x)$ قابلة للاشتقاق حيث $g'(1) = -1, g(1) = 3$

فاوجد معادلة المماس للدالة $h(x)$ عند $x = 1$ حيث $h(x) = x^2 g(x)$

$$h'(x) = 2x \cdot g(x) + x^2 g'(x)$$

$$\begin{aligned} m = h'(1) &= 2g(1) + (1)g'(1) \\ &= 2(3) + 1(-1) \\ &= 5 \end{aligned}$$

معادلة

$$y - 3 = 5(x - 1)$$

$$y = 5x - 2$$

التقريب
 $m = 5$
 $(1, h(1))$
 $(1, g(1))$
 $(1, 3)$

(2) بفرض ان $f(x), g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق حيث

$$g'(1) = -2, g(1) = 1 \text{ و } f'(1) = 3, f(1) = -2$$

فاوجد معادلة المماس للدالة $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ عند $x = 1$ حيث

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$m = h'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - f(1) \cdot g'(1)}{[g(1)]^2}$$

$$= \frac{3(1) - (-2)(-2)}{(1)^2}$$

$$= -1$$

معادلة المماس

$$y - (-2) = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x - 1$$

التقريب
 $(1, h(1))$
 $(1, \frac{f(1)}{g(1)})$
 $(1, \frac{-2}{1})$
 $(1, -2)$

(1) لتكن $f(x) = \frac{1}{x}$ (أ) اوجد معادلة المماس للدالة عند $x=1 \Rightarrow y_1=f(1)=1$ عند $x_1=1$

النقطة (1, 1)

$$m = -1, (1, 1)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

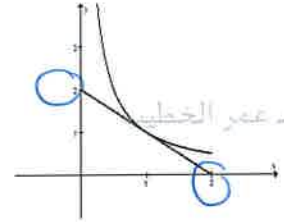
$$y = -x + 2$$

$$m = f'(1) = -1$$

(ب) اوجد مساحة المثلث في الربع الأول والمحصورة بالمماس

نقاط التقاطع بين المماس والمحاور هما 2, -2

$$A = \frac{1}{2}(2)(2) = 2$$



(2) اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = x^2 + 2x$ عند النقطة التي يكون المماس عندها موازياً

للمستقيم الذي معادلته: $y = 4x + 1$

نقطة المماس معروفة

$$m_1 = 4 \text{ ميل المستقيم}$$

ميل المنحنى

$$m_2 = 2x + 2$$

$$m_1 = m_2 \text{ التوازي}$$

$$2x + 2 = 4$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

نقطة المماس

$$(1, 3)$$

معادلة المماس

$$y - 3 = 4(x - 1)$$

$$y = 4x - 1$$

(3) اوجد ميل المماس لكل دالة عند نقطة التقاطع ثم حدد الزاوية المحصورة بين المماسين

$$(a) y = x \quad y' = 1 \quad (b) y = \frac{1}{x^2}$$

$$\hookrightarrow x^{-2} \rightarrow y' = -2x^{-3}$$

* حدد نقطة التقاطع :

$$x = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$m_1 = 1 \rightarrow \tan \theta_1 = 1 \Rightarrow \theta_1 = 45^\circ$$

$$m_2 = -2 \rightarrow \tan \theta_2 = -2 \Rightarrow \theta_2 = 116^\circ$$

الزاوية بين المماسين هما $116^\circ - 45^\circ = 71^\circ$

اوجد نقطة التقاطع

اوجد ميل المماس الأول m_1

واوجد الزاوية الموجبة θ_1

اوجد ميل المماس الثاني m_2

واوجد الزاوية الموجبة θ_2

الزاوية المحصورة هي حاصل طرح

الزاويتين (الأكبر ناقص الأصغر)

(1) إذا كان منحنى الدالة: $y = 2x^3 - kx + 2$ له مماس أفقي عند $x = -1$ فاوجد قيمة k

$$y' = 6x^2 - k$$

$$m = 0$$

$$6(1)^2 - k = 0$$

$$6 - k = 0$$

$$k = 6$$

(2) لتكن $f(x) = \sqrt{x}$ ، اوجد قيمة الثابت b التي تجعل المماس عند $x = 4$ موازياً للوتر (القاطع)

المر بالنقطتين: $(1,1)$, $(b, \sqrt{b})$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ميل المماس عند $x = 4$

$$m_t = f'(4)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

ميل القاطع

$$m_s = \frac{f(b) - f(1)}{b - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{b} - 1}{b - 1}$$

$$\frac{\sqrt{b} - 1}{(\sqrt{b} - 1)(\sqrt{b} + 1)}$$

$$m_t = m_s$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{b} + 1}$$

$$1 + \sqrt{b} = 4$$

$$\sqrt{b} = 3$$

$$b = 9$$

(3) إذا كان المستقيم الذي معادلته: $y = 3x - a$ مماساً لمنحنى الدالة: $f(x) = 2x^2 - x + 1$

فاوجد قيمة الثابت a

نجد نقطة المماس أولاً

ميل المستقيم $y = 3x - a$ هو

$$m_1 = 3$$

ميل المنحنى $f(x) = 2x^2 - x + 1$ هو

$$m_2 = 4x - 1$$

$$m_1 = m_2$$

$$3 = 4x - 1$$

$$1 + 3 = 4x$$

$$x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y_1 = f(1) = 2$$

نقطة المماس هي $(1, 2)$

وصف كقوة معادلة المستقيم

$$2 = 3(1) - a$$

$$a = 1$$

(1) اوجد قيمة (قيم) x التي عندها لا يوجد ميل للمماس على المنحنى $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

(قيم x التي عندها المشتقة غير موجودة)

المشتقة غير موجودة عند $x=1$ ، لطفاً للدالة

$$x=1$$

(2) اوجد قيمة (قيم) x التي عندها لا يوجد ميل للمماس على المنحنى $f(x) = x^{2/3}$

(قيم x التي عندها المشتقة غير موجودة)

$$f(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

$$= \frac{2}{3} x^{1/3}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

المشتقة غير موجودة
عند $x=0$ ، لطفاً للمشتقة

$$x=0$$

(3) اوجد قيمة (قيم) x التي عندها لا يوجد ميل للمماس على المنحنى $f(x) = |x-5|$

المشتقة غير موجودة عند $x=5$

$$f(x) = \frac{x-5}{x-5}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1} = -1$$

* لطفاً، لطفاً

(4) اوجد قيمة (قيم) x التي عندها لا يوجد ميل للمماس على المنحنى $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = 4, x = -1$$

(5) اوجد قيمة (قيم) x التي عندها لا يوجد ميل للمماس للدالة $f(x) = |x+1| + |x-3|$

المشتقة غير موجودة

$$x = -1, 3$$

$$\begin{array}{c|c|c} 3-x & 3-x & x-3 \\ \hline -(x+1) & x+1 & 3 \\ \hline -2x-4 & 4 & 2x-2 \\ \hline -1 & & 3 \end{array}$$

الركن والناب والمماس الرأسي

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$

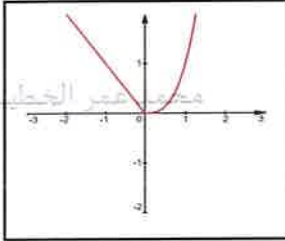
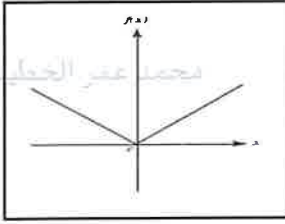
(1) يكون للدالة $f(x)$ ركن عند النقطة $x = c$

إذا كان $f'(c^-) \neq f'(c^+)$ وكلاهما أعداد حقيقية

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{مثال}$$

يوجد ركن عند $x = 0$

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= -1 \\ f'(0^+) &= 1 \end{aligned}$$



(2) يكون للدالة $f(x)$ ناب عند النقطة $x = c$

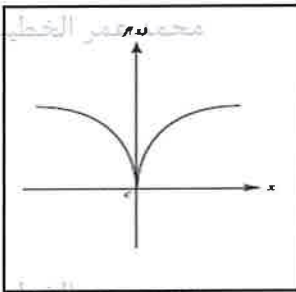
إذا كان $f'(c^-), f'(c^+)$ أحدهما ∞ أو $-\infty$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \implies f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

مثال

يوجد ناب عند $x = 0$

$$\begin{aligned} f'(0^-) &\rightarrow -\infty \\ f'(0^+) &\rightarrow \infty \end{aligned}$$



(3) يكون للدالة $f(x)$ مماس رأسي عند النقطة $x = c$

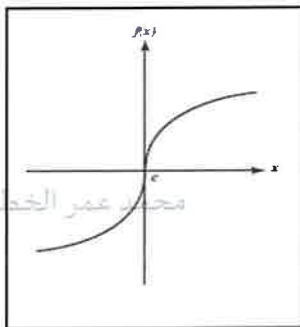
إذا كان $f'(c^-), f'(c^+)$ كلاهما ∞ أو كلاهما $-\infty$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \implies f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

مثال

يوجد مماس رأسي عند $x = 0$

$$\begin{aligned} f'(0^-) &\rightarrow \infty \\ f'(0^+) &\rightarrow \infty \end{aligned}$$



إذا كانت دالة الموقع أو الموقع لجسم يتحرك على خط مستقيم هي $s(t)$

فان

$$(1) \text{ الازاحة خلال الفترة الزمنية } [t_1, t_2] \text{ هي } \Delta s(t) = s(t_2) - s(t_1)$$

$$(2) \text{ السرعة المتجهه (السرعة المتجهه اللحظية) هي المشتقة الأولى لدالة الموقع } v(t) = s'(t)$$

$$(3) \text{ التسارع هو المشتقة الثانية لدالة الموقع } a(t) = v'(t) = s''(t)$$

$$(4) \text{ السرعة المتجهه المتوسطة على الفترة الزمنية } [t_1, t_2] \text{ هي}$$

$$v_{avg} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$(5) \text{ السرعة هي القيمة المطلقة للسرعة المتجهه}$$

ملاحظات

(1) إذا كانت إشارة السرعة المتجهة موجبة (+) يكون الجسم متجهاً لليمين أو (للاعلى)

(2) إذا كانت إشارة السرعة المتجهة سالبة (-) يكون الجسم متجهاً لليسار أو (للاسفل)

(3) يكون الجسم متسارعاً إذا كانت للسرعة والتسارع لهما نفس الإشارة (+ و +) أو (- و -)

(4) يكون الجسم متباطئاً إذا كانت السرعة والتسارع لهما إشارتين مختلفتين (+ و -) أو (- و +)

(5) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عندما تتعدى السرعة

[نجد زمن أقصى ارتفاع بوضع $v(t) = 0$ ثم نعوض هذا الزمن بالدالة $s(t)$]

(6) سرعة اصطدام الجسم بالأرض

[نجد زمن الاصطدام بوضع $s(t) = 0$ ثم نعوض هذا الزمن بالدالة $v(t)$]

تمثل الدالة : $s(t) = 60t - 5t^2$ ارتفاع جسم قذف رأسياً للأعلى من الأرض حيث t بالثواني و s بالمتر

(1) اوجد موقع الجسم بعد مرور 3 ثواني.

$$s(3) = 60(3) - 5(3)^2$$
$$= 135 \text{ m}$$

(2) اوجد موقع الجسم بعد مرور 10 ثواني.

$$s(10) = 60(10) - 5(10)^2$$
$$= 100 \text{ m}$$

(3) اوجد السرعة المتجهة المتوسطة اول 5 ثواني.

$$v_{avg} = \frac{s(5) - s(0)}{5 - 0}$$
$$= \frac{175 - 0}{5 - 0} = 35 \text{ m/s}$$

(4) اوجد السرعة المتجهة المتوسطة على الفترة الزمنية $[2, 7]$

$$v_{avg} = \frac{s(7) - s(2)}{7 - 2}$$
$$= \frac{175 - 100}{5} = 15 \text{ m/s}$$

(5) اوجد السرعة المتجهة اللحظية للجسم عند $t = 4$.

$$v = s'(t)$$
$$= 60 - 10t$$
$$v(4) = 60 - 10(4) = 20 \text{ m/s}$$

الجسم صاعد

(6) اوجد السرعة المتجهة للجسم عند $t = 9$.

$$v(9) = 60 - 10(9)$$
$$= -30 \text{ m/s}$$

الجسم هابط

(7) اوجد تسارع الجسم عند $t = 5$.

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$
$$= -10$$
$$a(5) = -10 \text{ m/s}^2$$

تمثل الدالة: $s(t) = 60t - 5t^2$ ارتفاع جسم قذف رأسياً للأعلى من الأرض حيث t بالثواني و s بالمتر

(1) أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم. (أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عندما تتعدم السرعة)

$$v(t) = 60 - 10t$$

$$v(t) = 0$$

$$60 - 10t = 0$$

$$t = 6$$

أقصى ارتفاع يكون عند $t = 6$

$$s(6) = 60(6) - 5(6)^2 = 180 \text{ m}$$

(2) أوجد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع 100 m .

أولاً نجد زمن هذا الارتفاع

$$s(t) = 100$$

$$60t - 5t^2 = 100$$

$$-5t^2 + 60t - 100 = 0$$

$$t = 2, t = 10$$

$$v(2) = 60 - 10(2)$$

$$= 40 \text{ m/s}$$



$$v(10) = 60 - 10(10)$$

$$= -40 \text{ m/s}$$



السرعة تكون (إيجابية عظيمة)
 40 m/s

نجد أولاً زمن الرحلة

$$s(t) = 0$$

$$60t - 5t^2 = 0$$

$$t = 0, t = 12$$

بداية الرحلة

نهاية الرحلة

(3) أوجد سرعة الجسم عندما يرتطم بالأرض

$$v(12) = 60 - 10(12)$$

$$= -60 \text{ m/s}$$

السرعة هي 60 .

(4) هل كان الجسم صاعداً أم هابطاً عند $t = 7$

$$v(7) = 60 - 10(7)$$

$$= -10 \text{ m/s}$$

السرعة هابطة سلبية

لذلك الجسم هابط

تحرك جسم على خط مستقيم بحيث يعطى موقعه S في أي لحظة t بالدالة:

$$s(t) = t^2 - 10t + 12$$

فاوجد:

$$\Delta S = S(t_2) - S(t_1)$$

(1) إزاحة الجسم خلال أول 10 ثواني.

$$\begin{aligned} \Delta S &= S(10) - S(0) \\ &= 12 - 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) السرعة المتوسطة المتجهة للجسم في الفترة $[2, 5]$

$$\begin{aligned} v_{av} &= \frac{S(5) - S(2)}{5 - 2} \\ &= \frac{-13 - (-4)}{3} = -3 \text{ ft/s} \end{aligned}$$

(3) السرعة المتجهة عند الثانية الثالثة.

$$\begin{aligned} v(t) &= 2t - 10 \\ v(3) &= 2(3) - 10 \\ &= -4 \text{ ft/s} \end{aligned}$$

(4) متى تنعدم سرعة الجسم.

$$\begin{aligned} v(t) &= 2t - 10 = 0 \\ 2t &= 10 \\ t &= 5 \end{aligned}$$

(5) ما قيم التسارع في أي لحظة.

$$a(t) = 2.$$

(6) صف حركة الجسم (متى يتحرك لليمين ومتى لليساار، متى يكون متسارعاً ومتى متباطئاً)

t	0		5	
$v(t)$ إشارة		- - - - -		+ + + +
$a(t)$ إشارة		+ + + + +		+ + + +

(0, 5)

الجسم يتحرك الى اليسار وهو متباطئ
(سرته لاترعب ١٢ ساعة فضائلين)

الجسم يتحرك الى اليمين
وهو متسارع
(لنفس الاشياء)

(1) تمثل الدالة $s(t) = \sqrt{t^2 + 8t}$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة

المتوسطة بين $t = 0$ و $t = 1$

$$v_{avg} = \frac{s(1) - s(0)}{1 - 0}$$

$$= \frac{3 - 0}{1 - 0} = 3 \text{ ft/s}$$

محمد عمر الخطيب

(2) تمثل الدالة $s(t) = \sqrt{t^2 + 8t}$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة

اللحظية عند $t = 1$

$$v(t) = s'(t) = \frac{2t+8}{2\sqrt{t^2+8t}}$$

$$v(1) = \frac{10}{2(3)} = 5/3 \text{ ft/s.}$$

محمد عمر الخطيب

(3) جسيم يتحرك في خط مستقيم بحيث ان: $s(t) = t\sqrt{t} + 6t$ حيث s المسافة بالأمتار و t الزمن

بالثانية اوجد تسارع هذا الجسم عندما تكون سرعته 12 m/s

نجد ادلاً الزمن عند سرته 12

$$s(t) = t\sqrt{t} + 6t$$

$$= t^{3/2} + 6t$$

$$v(t) = \frac{3}{2} t^{1/2} + 6$$

$$v(t) = 12$$

$$\frac{3}{2} \sqrt{t} + 6 = 12$$

$$\frac{3}{2} \sqrt{t} = 6$$

$$\sqrt{t} = 4$$

$$t = 16 \text{ s.}$$

$$a(t) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} t^{-1/2}$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{t}}$$

$$a(t) = \frac{3}{4\sqrt{16}} = 3/16 \text{ m/s}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(4) يمثل الجدول المجاور المسافات المقطوعة $s(t)$ بالمتري خلال الفترة الزمنية t قدر السرعة اللحظية

المتجهة عند $t = 2$

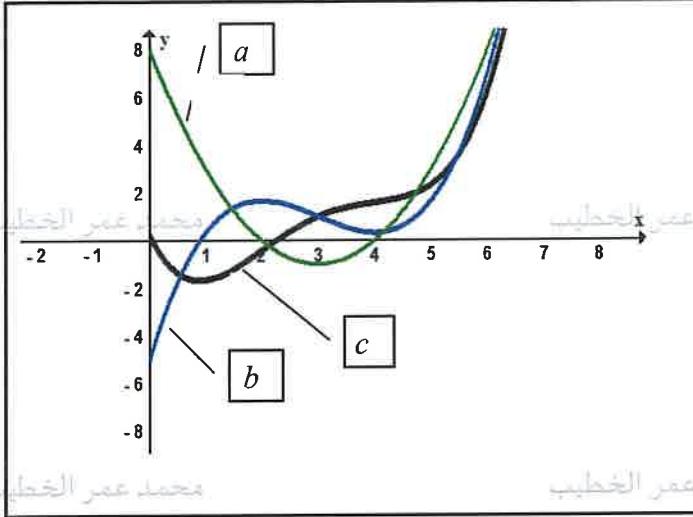
t	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
$s(t)$	3.1	3.9	4.5	5.1	5.5

$$v(2) \text{ m} = \frac{s(2.2) - s(1.8)}{2.2 - 1.8} = \frac{5.1 - 3.9}{2.2 - 1.8} = 3 \text{ m/s}$$

* اذا اردنا تقدير السرعة اللحظية عند $t = 2.4$ نأخذ افر قيمتين

هذه الاشارة من خارج الكتاب

(1) في الشكل المقابل ايأ من المنحنيات يمثل:



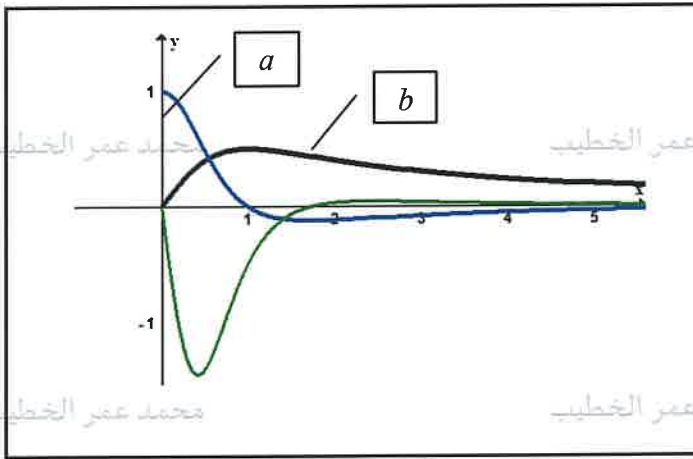
دالة الموقع. (c)

دالة السرعة المتجهة. (b)

دالة التسارع. (a)

(2) في الشكل المقابل ايأ من المنحنيات

يمثل:

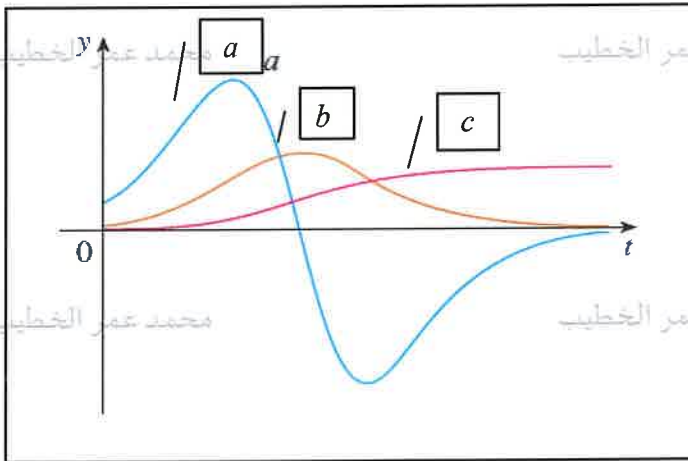


دالة الموقع. (b)

دالة السرعة المتجهة. (a)

دالة التسارع. (c)

(3) في الشكل المقابل ايأ من المنحنيات يمثل:



دالة الموقع. (c)

دالة السرعة المتجهة. (b)

دالة التسارع. (a)

تحدد العلاقة $u(m) = \frac{83m}{m + 0.05}$ meter / s السرعة الابتدائية لكرة جولف كتلتها 0.05 kg

ضربت بعصا كتلتها $m \text{ kg}$ والسرعة الابتدائية للعصا 50 m / s :

وزن الكرة... ثابت

سرعة المضرب... ثابت

(1) اوجد السرعة الابتدائية للكرة عندما يكون وزن العصا 0.15 kg .

$$U(0.15) = \frac{83(0.15)}{0.15 + 0.05} = 62.25 \text{ m/s}$$

(2) اوجد السرعة الابتدائية للكرة عندما يكون وزن العصا 0.20 kg . ماذا تلاحظ

$$U(0.20) = 66.4$$

عند زيادة وزن العصا تزيد السرعة.

(3) اوجد $u'(m)$

$$\begin{aligned} U'(m) &= \frac{83(m + 0.05) - 83m(1)}{(m + 0.05)^2} \\ &= \frac{83m + 4.15 - 83m}{(m + 0.05)^2} \\ &= \frac{4.15}{(m + 0.05)^2} \end{aligned}$$

(4) بين ان $u'(m) > 0$ ثم فسر النتيجة

$$U'(m) = \frac{4.15}{(m + 0.05)^2} > 0$$

لان البسط ايجابي، والمقام كبريم موجب

(5) اوجد $u'(0.15)$ و $u'(0.20)$ ثم فسر النتيجة

$$U'(0.15) = \frac{4.15}{(0.15 + 0.05)^2} = 103.75$$

$$U'(0.20) = \frac{4.15}{(0.15 + 0.05)^2} = 66.4$$

التفسير:

معدل التغير (الزيادة او النقصان) للعصا الثقيلة اقل من
معدل التغير (الزيادة او النقصان) للعصا الخفيفة في وحدة
الزمن

$$r = \frac{1}{\frac{0.55}{c} + \frac{0.45}{h}} = \frac{ch}{0.55h + 0.45c}$$

كمية الوقود المستهلك بالجالون لسيارة تسير داخل المدينة مسافة c ميل وعلى الطريق السريع مسافة h ميل

(أ) اوجد كمية الوقود المستهلك عندما تقطع السيارة 100 ميل داخل المدينة و 50 ميل على الطريق السريع

$$r = \frac{100(50)}{0.55(50) + 0.45(100)} = 69 \text{ جالون}$$

(ب) اوجد كمية الوقود المستهلك عندما تقطع السيارة 50 ميل داخل المدينة و 100 ميل على الطريق السريع

$$r = \frac{50(100)}{0.55(100) + 0.45(50)} = 64.5 \text{ جالون}$$

اعتبر h ثابت

(ج) اوجد $\frac{dr}{dc}$ ثم بين ان $\frac{dr}{dc} > 0$ وفسر النتيجة

التفسير:

العلاقة بين المتغيرين

طردية

$$\frac{dr}{dc} = \frac{h(0.55h + 0.45c) - ch(0.45)}{(0.55h + 0.45c)^2}$$

$$= \frac{0.55h^2 + 0.45hc - 0.45ch}{(0.55h + 0.45c)^2}$$

$$= \frac{0.55h^2}{(0.55h + 0.45c)^2} > 0$$

الملاحظة c, r علاقة طردية

ملاحظة : معدل التغير = المشتقة

(1) في بستان فاكهة به أشجار خوخ ، وجد أن الكمية P من الخوخ السليم بالكيلو غرام تنتجها شجرة متوسطة الإنتاج يتوقف على عدد الكيلو غرامات x من المبيد الحشري المستخدم لرش الشجرة

$$P(x) = 300 - \frac{100}{x} \quad \text{حسب العلاقة:}$$

أوجد معدل التغير في إنتاج الشجرة من الخوخ عند استخدام 4 كيلو من المبيد الحشري.

$$P'(x) = \frac{100}{x^2}$$

$$P'(4) = \frac{100}{4^2} = 6.25 \text{ Kg}$$

(2) تشير دراسة بيئية لأحد المدن أن تركيز أول أكسيد الكربون في الهواء يعطى بالعلاقة:

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

حيث Q تقاس بالجزء من المليون و t تقاس بالسنوات

(أ) أوجد متوسط التغير في تركيز أول أكسيد الكربون في الفترة الزمنية $[1, 10]$

$$Q_{\text{av}} = \frac{Q(10) - Q(1)}{10 - 1} = \frac{9.4 - 3.55}{9} = 0.65$$

(ب) أوجد معدل التغير في تركيز غاز أول أكسيد الكربون بعد 3 سنوات

$$Q'(t) = 0.1t + 0.1$$

$$Q'(3) = 0.1(3) + 0.1 = 0.4$$

(3) تمثل الدالة $f(t) = \sqrt{t+4}$ إجمالي المبيعات بعد الزمن t بالشهور ، أوجد معدل التغير في المبيعات

عند الشهر الخامس ، صف ماذا يحدث لمعدل التغير في المبيعات مع مرور الزمن

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+4}}$$

$$f'(5) = \frac{1}{2\sqrt{5+4}} = \frac{1}{6} = 0.166$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{t+4}} = 0$
يصبح معدل التغير صفر
مع مرور الزمن

(1) يبيع مصنع دمي 120000 قطعة سنوياً بسعر القطعة 25 درهم ، اذا اراد صاحب المصنع زيادة لمبيعات بمعدل 2000 قطعة سنوياً وتخفيض سعر القطعة بمعدل 50 فلس للقطعة ، اوجد معدل التغير التقريبي في دخل المصنع السنوي ، هل قرار ادارة المصنع كان صحيحاً.

$$Q(0) = 120,000, \quad P(0) = 25$$

$$Q'(0) = 2000, \quad P'(0) = -1/2$$

$$R'(0) = ??$$

$$R(t) = Q(t) \cdot P(t)$$

$$R'(t) = Q'(t) \cdot P(t) + Q(t) \cdot P'(t)$$

$$R'(0) = Q'(0) \cdot P(0) + Q(0) \cdot P'(0)$$

$$= 2000(25) + 120,000(-1/2)$$

$$= -10,000$$

ملاحظة: ان معدل تغير الإيراد يتناقص لذلك التناقص.

الكمية $Q(t)$
معدل التغير في الكمية $Q'(t)$
السعر $P(t)$
معدل التغير في السعر $P'(t)$
الإيراد $R(t)$
 $R(t) = Q(t) \times P(t)$
معدل التغير في الإيراد $R'(t)$
ملاحظة: في حالة لم يعطى زمن
نعوض بدل الزمن صفر ويكون
الجواب معدل تقريبي للتغير عند
أي سنة

(2) شركة لإنتاج ألعاب الأطفال تباع إنتاجها البالغ 25000 قطعة سنوياً بسعر 40 درهم للقطعة الواحدة إذا قررت الشركة زيادة الإنتاج بمعدل 2000 قطعة سنوياً لرفع إيراداته بمعدل 130000 درهم سنوياً احسب معدل التغير في سعر القطعة سنوياً الذي على الشركة أن تزيده لتحقيق ذلك الإيرادات.

$$Q(0) = 25,000, \quad P(0) = 40$$

$$Q'(0) = 2000, \quad P'(0) = ??$$

$$R'(0) = 130,000$$

$$R(t) = Q(t) \cdot P(t)$$

$$R'(0) = Q'(0) \cdot P(0) + Q(0) \cdot P'(0)$$

$$130,000 = 2000 \times 40 + 25,000 P'(0)$$

$$\Rightarrow P'(0) = 2$$

معدل التغير في سعر القطعة

(1) استأجر أعضاء احد النوادي بركة سباحة لمدة 10 سنوات وتم تقسيم الايجار بالتساوي على الاعضاء المساهمين وكان هناك 80 عضواً حيث ايجار البركة 8000 درهم سنوياً. فاذا كان عدد الاعضاء يتزايدون بمعدل 20 عضواً في السنة وايجار البركة يتزايد بمعدل 1000 درهم سنوياً. ما المعدل اللحظي للتغير في نصيب كل واحد من الاعضاء المشاركين من ايجار بركة السباحة.

$$\begin{aligned} N(0) &= 80, & R(0) &= 8000 \\ N'(0) &= 20, & R'(0) &= 1000 \\ C'(0) &= ?? \\ C(t) &= \frac{R(t)}{N(t)} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} C'(0) &= \frac{R'(0) \cdot N(0) - R(0) \cdot N'(0)}{[N(0)]^2} \\ &= \frac{1000(80) - 8000(20)}{(80)^2} \\ &= -12.5 \end{aligned} \right.$$

(2) يبيع مصنع دمي $Q(t)$ قطعة سنوياً ونسبة نقصان في معدل التغير هو 4% سنوياً، اذا كان سعر القطعة $P(t)$ ويتزايد بنسبة في معدل التغير هو 3% سنوياً، والدخل السنوي للمصنع هو $R(t)$ ، اوجد النسبة المئوية لمعدل التغير في دخل المصنع السنوي، هل قرار ادارة المصنع كان صحيحاً.

النسبة المئوية لمعدل التغير في الايراد

$$\frac{R'(t)}{R(t)} \times 100\% \text{ هو}$$

$$\frac{R'(t)}{R(t)} \times 100\%$$

المطلوب

اكن:

$$R(t) = Q(t) \cdot P(t)$$

$$R'(t) = Q'(t) \cdot P(t) + Q(t) \cdot P'(t)$$

$$= -0.04 Q(t) \cdot P(t) + Q(t) \cdot 0.03 P(t)$$

$$R' = -0.04 QP + 0.03 QP$$

$$= -0.01 QP = -0.01 R$$

$$\frac{R'}{R} \times 100\% = \frac{-0.01 R}{R} \times 100\% = -1\%$$

القرار خاطئ

(3) يمثل الجدول المجاور المبيعات السنوية $f(t)$ لاحدى الشركات بملاين الدراهم خلال فترة زمنية

t	1990	1995	2000	2005	2010
f(t)	1.7	2.1	2.4	2.8	3.0

قدر معدل التغير في المبيعات

عام 2000 السنوي

$$f'(2000) \approx \frac{2.8 - 2.1}{2005 - 1995} = 0.07 = 7\%$$

ملاحظة: سيتم شرح الدرس السادس (مشتقة الدوال الدائرية) قبل الدرس الخامس (قاعدة السلسلة)

مشتقات الدوال المثلثية

تذكر ان

قوانين

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{النهايات}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

$$(1) \quad y = 1 + x - \cos x$$

$$y' = 1 - (-\sin x) = 1 + \sin x$$

$$(2) \quad y = \tan x - \sin \frac{\pi}{2} \quad \text{ثابت}$$

$$y' = \sec^2 x$$

$$(3) \quad y = \sin x + \cot x - \frac{2}{x}$$

$$y' = \cos x - \csc^2 x + \frac{2}{x^2}$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = 3x - 4\sin x + \pi$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب $\frac{dy}{dx} = 3 - 4 \cos x$

(2) $y = \sec x - \csc x$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب $\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x + \csc x \cot x$

(3) $y = \sin x - \cos x - \sqrt{x}$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب $\frac{dy}{dx} = \cos x + \sin x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(4) $y = \sin x \cos x$

قاعدة ليفن

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب $\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \cos x + \sin x(-\sin x)$
 $= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

(5) $y = x^3 \tan x$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \cdot \tan x + x^3 \sec^2 x$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب $y = \frac{x}{1 + \cos x}$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب $\frac{dy}{dx} = \frac{1(1 + \cos x) - x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 + \cos x + x \sin x}{(1 + \cos x)^2}$

أوجد $f'(x)$ في كل مما يأتي:

(1) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$f'(x) = 0$$

(2) $f(x) = \frac{\sin x}{\sec x + x}$

$$f'(x) = \frac{\cos x (\sec x + x) - \sin x (\sec x \tan x + 1)}{(\sec x + x)^2}$$

(3) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x (\sin x + \cos x) - \sin x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} \end{aligned}$$

(4) $f(x) = \frac{x}{1 + \cot x}$

$$f'(x) = \frac{1(1 + \cot x) - x(-\csc^2 x)}{(1 + \cot x)^2}$$

(5) $f(x) = \frac{\csc x}{x^2 - 1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\csc x \cot x (x^2 - 1) - \csc x (2x)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-(x^2 - 1) \csc x \cot x - 2x \csc x}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

أوجد $f'(x)$ في كل مما يأتي:

(1) $f(x) = \frac{-2}{1 + \sec x}$

$$f'(x) = \frac{-(-2)(\sec x \tan x)}{(1 + \sec x)^2} = \frac{2 \sec x \tan x}{(1 + \sec x)^2}$$

(2) $f(x) = \frac{\cot x}{x} - \sec x$

$$f'(x) = \frac{-\csc^2 x \cdot x - \cot x \cdot 1}{x^2} - \sec x \tan x$$

(3) $f(x) = \frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\sec x} = \frac{1}{\sec x} = \cos x$

$$f'(x) = -\sin x$$

(4) $f(x) = (3x^2 + 1) \cot x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x) \cot x + (3x^2 + 1)(-\csc^2 x) \\ &= 6x \cot x - (3x^2 + 1) \csc^2 x \end{aligned}$$

(5) $f(x) = \frac{\sec x - \csc x}{\sin x + \cos x}$

$$f'(x) = \frac{(\sec x \tan x + \csc x \cot x)(\sin x + \cos x) - (\sec x - \csc x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

(6) $f(x) = x \sin x \cos x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \sin x \cdot \cos x + x \cdot \cos x \cos x + x \sin x (-\sin x) \\ &= \sin x \cos x + x \cos^2 x - x \sin^2 x \end{aligned}$$

(1) إذا كان: $y = \sec x$ فاوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$y = \sec x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x \cdot \tan x + \sec x \cdot \sec^2 x$$

$$= \sec x \tan^2 x + \sec^3 x$$

(2) إذا كانت: $f(x) = x \sin x + \cos x$

فأثبت أن: $xf''(x) + xf(x) - 2f'(x) = 0$

نبدأ دلاً "طرقاً"

$$f(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x - \sin x = x \cos x$$

$$f''(x) = 1 \cdot \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x \sin x$$

الآن

الطرف الأيسر

$$xf''(x) + xf(x) - 2f'(x)$$

$$= x(\cos x - x \sin x) + x(x \sin x + \cos x) - 2(x \cos x)$$

$$= \cancel{x \cos x} - \cancel{x^2 \sin x} + \cancel{x^2 \sin x} + \cancel{x \cos x} - 2x \cos x$$

$$= 2x \cos x - 2x \cos x$$

$$= 0 \quad \#$$

إذا كان : $y = x^3 + \sin x$ فاوجد :

$$(1) \frac{d^2 y}{dx^2} = 6x - \sin x$$

$$(2) \frac{d^{10} y}{dx^{10}} = -\sin x$$

$$\frac{10}{4} = 2(5)$$

المشتقة الثانية

$$(3) \frac{d^{263} y}{dx^{263}} = -\cos x$$

$$\frac{263}{4} = 65(75)$$

المشتقة الثانية

$$(4) \frac{d^{801} y}{dx^{801}} = \cos x$$

$$\frac{801}{4} = 200(25)$$

المشتقة الأولى

$$(5) \frac{d^{1000} y}{dx^{1000}} + \frac{d^{502} y}{dx^{502}} = \sin x + (-\sin x)$$

$$= 0$$

$$(6) \frac{d^{1000}}{dx^{1000}} \left(\frac{d^{404} y}{dx^{404}} \right) = \frac{d^{1404}}{dx^{1404}}$$

$$= \sin x.$$

ملاحظة: في الدوال الدورية

لايجاد المشتقة ذات الرتبة n

نقسم العدد n على 4 بالآلة الحاسبة

ونلاحظ الكسر العشري فقط

فاذا كان الكسر العشري

0 تكون الدالة الاصلية

0.25 (ربع) تكون المشتقة الأولى

0.50 (ربعين) تكون المشتقة الثانية

0.75 (3 ارباع) تكون المشتقة الثالثة

مع ملاحظة ان الدالة الحدودية

تختفي بعد عدد معين من المشتقات

$$y' = 3x^2 + \cos x$$

$$y'' = 6x - \sin x$$

$$y''' = 6 - \cos x \rightarrow$$

$$y^{(4)} = \sin x$$

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & , x \geq \pi \\ ax + b & , x < \pi \end{cases} \quad (1) \text{ اذا كانت :}$$

اوجد قيمة كل من الثابتين a, b بحيث تكون الدالة $g(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = \pi$

الاتصال

$$\leftarrow ax+b \quad \sin x \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$$

$$ax+b = \sin \pi$$

$$a\pi + b = 0$$

الاشتقاق

$$f' \quad a \quad \cos x$$

$$f'(\pi^-) = f'(\pi^+)$$

$$a = -1$$

$$a\pi + b = 0$$

$$-\pi + b = 0 \Rightarrow b = \pi$$

$$(2) \text{ اوجد معادلة المماس للدالة } y = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \text{ عند } x = \frac{\pi}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{\sin \pi/2}{1 + \cos \pi/2} = 1$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \text{ النقطة}$$

$$y' = \frac{\cos x(1 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$$

$$m = y'(\frac{\pi}{2}) = 1$$

معادلة المماس

$$y - 1 = 1(x - \frac{\pi}{2})$$

$$y - 1 = x - \frac{\pi}{2}$$

$$y = x - \frac{\pi}{2} + 1$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} \sin x - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 0(1) = 0$$

$$\therefore f'(0) = 0$$

$$(3) \text{ اذا كان } f(x) = \sqrt[3]{x} \sin x \text{ فاوجد } f'(0)$$

ملاحظة :

اذا كان ناتج التعويض بعد الاشتقاق يساوي صفر على صفر فيجب اخذ النهاية لايجاد قيمة المشتقة عند النقطة او ايجاد المشتقة بالتعريف

قاعدة السلسلة

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n \times [f(x)]^{n-1} f'(x)$$

(الشكل الأول)

ام قوس

$$\frac{d}{dx}[(f \circ g)(x)] = \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \times g'(x)$$

(الشكل الثاني)

التركيب

$$\begin{aligned} y &\rightarrow u \rightarrow x \\ y &= f(u) \quad , \quad u = g(x) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}}$$

(الشكل الثالث)

السلسلة

مشتقة الدالة العكسية

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

إذا كانت $g(x) = f^{-1}(x)$ فإن

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

او

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = (x^2 + 3)^5$

$$y' = 5(x^2 + 3)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 + 3)^4$$

(2) $y = \frac{3}{(x^3 - 5x + 8)^3} = 3(x^3 - 5x + 8)^{-3}$

$$y' = -9(x^3 - 5x + 8)^{-4} \cdot (3x^2 - 5) = \frac{-9(3x^2 - 5)}{(x^3 - 5x + 8)^4}$$

(3) $y = x^5(4x - 1)^3$

$$y' = 5x^4(4x - 1)^3 + x^5 \cdot 3(4x - 1)^2 \cdot 4 \\ = 5x^4(4x - 1)^3 + 12x^5(4x - 1)^2$$

(4) $y = (2x + 1)^5(2x - 1)^5 = [(2x + 1)(2x - 1)]^5 = (4x^2 - 1)^5$

$$y' = 5(4x^2 - 1)^4 \cdot 8x \\ = 40x(4x^2 - 1)^4$$

* يمكنه الحل
بواسطة الفرق

(5) $y = \left(\frac{x^2 + 3}{2x - 4}\right)^3$

$$y' = 3\left(\frac{x^2 + 3}{2x - 4}\right)^2 \cdot \left[\frac{2x(2x - 4) - (x^2 + 3)(2)}{(2x - 4)^2}\right]$$

(6) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

$$y' = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = (\sin x - x)^5$

$$y' = 5(\sin x - x)^4 \cdot (\cos x - 1)$$

(2) $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$

$$y' = 2(\sin x)^1 \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x$$

(3) $y = \sec^5 x = (\sec x)^5$

$$y' = 5(\sec x)^4 \cdot \sec x \tan x = 5 \sec^5 x \tan x$$

(4) $y = x \cos^2 x = x (\cos x)^2$

$$y' = (1) \cdot \cos^2 x + x \cdot 2(\cos x)^1 \cdot (-\sin x) \\ = \cos^2 x - 2x \sin x \cos x$$

(5) $y = \sin^3 x \cos x = (\sin x)^3 \cdot \cos x$

$$y' = 3(\sin x)^2 \cdot \cos x \cdot \cos x + \sin^3 x \cdot (-\sin x) \\ = 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^4 x$$

(6) $y = x \sqrt{\sin x} =$

$$y' = 1 \cdot \sqrt{\sin x} + x \cdot \frac{\cos x}{2 \sqrt{\sin x}}$$

$$= \sqrt{\sin x} + \frac{x \cos x}{2 \sqrt{\sin x}} = \frac{2 \sin x + x \cos x}{2 \sqrt{\sin x}}$$

أوجد المشتقة $f'(x)$ في كل مما يأتي:

(1) $f(x) = \cos(\sqrt{x})$

الزاوية خلاف x

$$f'(x) = -\sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}$$

(2) $f(x) = \tan \sqrt{x^3 + 1}$

$$f'(x) = \sec^2 \sqrt{x^3 + 1} \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}} \sec^2 \sqrt{x^3 + 1}$$

(3) $f(x) = \sin(\cos 4x)$

$$f'(x) = \cos(\cos 4x) \cdot (-\sin 4x) \cdot 4 \\ = -4 \sin 4x \cos(\cos 4x)$$

(4) $f(x) = \sin^2(2x) = (\sin 2x)^2$

$$f'(x) = 2(\sin 2x) \cdot \cos 2x \cdot 2 = 2 \sin 2x \cos 2x \\ = 4 \sin 2x$$

(4) $f(x) = \cot^2 x^3 = (\cot x^3)^2$

$$f'(x) = 2(\cot x^3) \cdot (-\csc^2 x^3) \cdot 3x^2 \\ = -6x^2 \csc^2 x^3 \cot x^3$$

(5) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \cos(\sec x)$

$$f'(x) = -\sin(\sec x) \cdot \sec x \tan x$$

(6) $f(x) = \frac{1}{\sin 4x} = \csc 4x$

$$f'(x) = -\csc 4x \cdot \cot 4x \cdot 4 = -4 \csc 4x \cot 4x$$

أوجد المشتقة $f'(x)$ في كل مما يأتي:

(1) $f(x) = \sin(\cos \sqrt{x})$

$$f'(x) = \cos(\cos \sqrt{x}) \cdot (-\sin \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} \cdot \cos(\cos \sqrt{x})$$

(2) $f(x) = \sec^2 x \tan x^2$ ضرب $(\sec x)^2 \cdot \tan x^2$

$$f'(x) = 2 \sec x \cdot \sec x \tan x \tan x^2 + \sec^2 x \cdot \sec^2 x^2 \cdot 2x \\ = 2 \sec^2 x \tan x \cdot \tan x^2 + 2x \sec^2 x \cdot \sec^2 x^2$$

(3) $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\cos x^2 \cdot 2x \cdot x^2 - \sin x^2 \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 \cos x^2 - 2x \sin^2 x}{x^4}$$

(4) $f(x) = \tan 3x - \csc^2 x$

$$f'(x) = \sec^2 3x \cdot 3 - 2 \csc x (-\csc x \cot x) \\ = 3 \sec^2 3x + 2 \csc^2 x \cot x$$

(5) $f(x) = \sqrt{\tan x^2 + 2}$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x^2 \cdot 2x}{2\sqrt{\tan x^2 + 2}} = \frac{x \sec^2 x^2}{\sqrt{\tan x^2 + 2}}$$

(6) $f(x) = \sqrt{\sin x \cos x}$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x (-\sin x)}{2\sqrt{\sin x \cos x}} \\ = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sqrt{\sin x \cos x}}$$

$$(1) \quad f(x) = \sin x^2 \tan x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x^2 \cdot 2x \cdot \tan x + \sin x^2 \cdot \sec^2 x \\ &= 2x \cos x^2 \cdot \tan x + \sin x^2 \sec^2 x. \end{aligned}$$

$$(2) \quad f(x) = \sin^2(\tan x) = (\sin(\tan x))^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin(\tan x) \cdot \cos(\tan x) \cdot \sec^2 x \\ &= 2 \sec^2 x \sin(\tan x) \cos(\tan x). \end{aligned}$$

$$(3) \quad f(x) = \sin(\tan^2 x) = \sin((\tan x)^2)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\tan^2 x) \cdot 2 \tan x \cdot \sec^2 x \\ &= 2 \sec^2 x \tan x \cdot \cos(\tan^2 x). \end{aligned}$$

$$(4) \quad f(x) = \sec x^2 \tan x^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sec x^2 \cdot \tan x^2 \cdot 2x \cdot \tan x^2 + \sec x^2 \cdot \sec^2 x^2 \cdot 2x \\ &= 2x \sec x^2 \tan^2 x^2 + 2x \sec^3 x^2 \end{aligned}$$

$$(5) \quad f(x) = \sec^2(\tan x) = (\sec(\tan x))^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sec(\tan x) \cdot \sec(\tan x) \cdot \tan(\tan x) \cdot \sec^2 x \\ &= 2 \sec^2 x \cdot \sec^2(\tan x) \cdot \tan(\tan x). \end{aligned}$$

$$(6) \quad f(x) = \sec(\tan^2 x) = \sec((\tan x)^2)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sec(\tan^2 x) \cdot \tan(\tan^2 x) \cdot 2 \tan x \cdot \sec^2 x \\ &= 2 \sec^2 x \tan x \cdot \sec(\tan^2 x) \cdot \tan(\tan^2 x). \end{aligned}$$

$$(1) \quad f(x) = 4\sin^2 3x + 4\cos^2 3x = 4(\sin^2 3x + \cos^2 3x) \\ = 4(1) = 4$$

$$f'(x) = 0$$

$$(2) \quad f(t) = \sqrt{\cos 5t \sec 5t} \\ = \sqrt{\cos 5t \cdot \frac{1}{\cos 5t}} = \sqrt{1} = 1$$

$$f'(t) = 0$$

$$(3) \quad f(x) = x \tan \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = 1 \cdot \tan \sqrt{x^2 + 1} + x \cdot \sec^2 \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \\ = \tan \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \sec^2 \sqrt{x^2 + 1}$$

$$(4) \quad f(x) = 4x^2 \sin x \sec 3x$$

$$f'(x) = 8x \sin x \sec 3x + 4x^2 \cos x \sec 3x \\ + 4x^2 \sin x \cdot \sec 3x \tan 3x \cdot 3 \\ = 8x \sin x \sec 3x + 4x^2 \cos x \sec 3x + 12x^2 \sin x \sec 3x \tan 3x$$

$$(5) \quad f(x) = \tan^4(\sin^3(x^2)) = [\tan(\sin^3(x^2))]^4$$

$$f'(x) = 4 \tan^3(\sin^3(x^2)) \cdot \sec^2(\sin^3(x^2)) \\ \cdot 3 \sin^2 x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x \\ = 24x \cos x^2 \sin^2 x^2 \sec^2(\sin^3 x^2) \cdot \tan^3(\sin^3 x^2)$$

(1) إذا كان : $f(x) = \sin 2x$ فاوجد

$$(a) f^{(75)}(x) = -2^{75} \cos 2x$$

$$\frac{75}{4} = 18 \cdot 75$$

الناتج مع اختلاف الـ 3

$$(b) f^{(101)}(x) = 2^{101} \cos 2x$$

$$\frac{101}{4} = 25 \cdot 25$$

الذي

$$(c) f^{(101)}(\pi)$$

$$\begin{aligned} f^{(101)}(\pi) &= 2^{101} \cos 2(\pi) \\ &= 2^{101} (1) \\ &= 2^{101} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos 2x \cdot 2 \\ &= 2 \cos 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2 \sin 2x \cdot 2 \\ &= -2^2 \sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -2^2 \cos 2x \cdot 2 \\ &= -2^3 \cos 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= -2^3 (-\sin 2x) \cdot 2 \\ &= 2^4 \sin 2x. \end{aligned}$$

(2) إذا كان : $f(x) = \sin x + \cos 3x$ فاوجد

$$(a) f^{(11)}(x) = -\cos x + 3^2 \sin 3x$$

$$\frac{11}{4} = 2 \cdot 75$$

الناتج

$$(b) f^{(20)}(\pi) = \sin \pi + 3^{20} \cos 3\pi$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{20}{4} &= 5 \\ \text{اللام} \end{aligned} \right\} = -\frac{20}{3}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

$$= \cos 0 - 3 \sin 0$$

$$= 1$$

$$f'(x) = \cos x - 3 \sin 3x$$

$$f'' = -\sin x - 3^2 \cos 3x$$

$$f''' = -\cos x + 3^3 \sin 3x$$

$$f^{(4)} = \sin x + 3^4 \cos 3x$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي عند النقطة المشار إليها:

(1) $y = u^2 + 3 \sin u$, $u = x^2 - 1$, $x = 1$

$x = 1 \Rightarrow u = 0$

$y \rightarrow u \rightarrow x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (2u + 3 \cos u) (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = (2(0) + 3(1)) (2(1)) = 6$$

(2) $y = u^2 + \sec u$, $u = \pi x^2$, $x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = -\frac{\pi}{4}$

$y \rightarrow u \rightarrow x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (2u + \sec u \tan u) (2\pi x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1/2} = \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\right) \pi$$

(3) $\frac{dy}{du} \Big|_{u=-1} = -3$, $u = x^2 - 3x + 1$, $x = 1$

$x = 1 \Rightarrow u = -1$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} \Big|_{x=1} = 2(1) - 3$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{dy}{du} \Big|_{u=-1} \cdot \frac{du}{dx} \Big|_{x=1} = (-3)(-1) = 3$$

(4) $y = \tan(t + \frac{\pi}{4})$, $x = 3t^2 - t$, $t = 0$

$t = 0 \Rightarrow x = 0$

$y \rightarrow t$
 $x \rightarrow t$ } $\Rightarrow y \rightarrow t \rightarrow x$

ملاحظة

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \sec^2(t + \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{1}{6t-1} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = 6t - 1$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{6t-1}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = \sec^2(\frac{\pi}{4}) \cdot (-1) = -2$$

$$(1) \quad y = f(x^2) \Rightarrow y' = f'(x^2) \cdot 2x.$$

$$(2) \quad y = f(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(3) \quad y = [f(x)]^2 \Rightarrow y' = 2[f(x)]' \cdot f'(x)$$

$$(4) \quad y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

$$(5) \quad y = f(f(x)) \Rightarrow y' = f'(f(x)) \cdot f'(x).$$

$$(6) \quad y = f(xf(x))$$

$$y' = f'(xf(x)) \cdot [1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)]$$

$$(7) \quad y = f\left(\frac{x}{f(x)}\right)$$

$$y' = f'\left(\frac{x}{f(x)}\right) \left[\frac{1 \cdot f(x) - x f'(x)}{[f(x)]^2} \right]$$

$$(8) \quad y = xf(x^3)$$

$$y' = 1 \cdot f(x^3) + x \cdot f'(x^3) \cdot 3x^2.$$

بفرض ان الدوال: $f(x)$, $g(x)$ ومشتقاتهما لهم القيم التالية عند $x = 2$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
2	1	3	2	-4

اوجد $h'(2)$ في الحالات التالية

(1) $h(x) = 4f(x) + g(x) - x^2$

$$h'(x) = 4f'(x) + g'(x) - 2x$$

$$h'(2) = 4f'(2) + g'(2) - 2(2)$$

$$= 4(3) + (-4) - 4 = 4$$

(2) $h(x) = f^3(x) + \frac{1}{g(x)}$

$$h'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) + \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$= 3f^2(2) \cdot f'(2) - \frac{g'(2)}{[g(2)]^2}$$

$$= 3(1)^2 \cdot 3 - \frac{-4}{2^2} = 10$$

(3) $h(x) = \sqrt{f(x) + 2g(x)}$

$$h'(x) = \frac{f'(x) + 2g'(x)}{2\sqrt{f(x) + 2g(x)}}$$

$$h'(2) = \frac{f'(2) + 2g'(2)}{2\sqrt{f(2) + 2g(2)}} = \frac{3 + 2(-4)}{2\sqrt{1 + 2(2)}} = \frac{-5}{2\sqrt{2}}$$

(4) $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$h'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2)$$

$$= f'(2) \cdot (-4)$$

$$= 3(-4)$$

$$= -12$$

بفرض أن الدوال: $g(x), f(x)$ ومشتقاتهما لهم القيم التالية عند $x=2, x=4$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
2	3	7	4	6
4	2	-5	9	-3

أوجد $h'(x)$ عند القيمة المشار إليها:

(1) $h(x) = f(\sqrt{x}) \quad x=4$

$$h'(x) = f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(2) = f'(\sqrt{4}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$= f'(2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

(2) $h(x) = f(g(x)) \quad x=2$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= f'(g(2)) \cdot g'(2)$$

$$= f'(4) \cdot 6$$

$$= -5(6) = -30$$

(3) $h(x) = f^3(x^2) \quad x=2$

$$h'(x) = 3f^2(x^2) \cdot f'(x^2) \cdot 2x$$

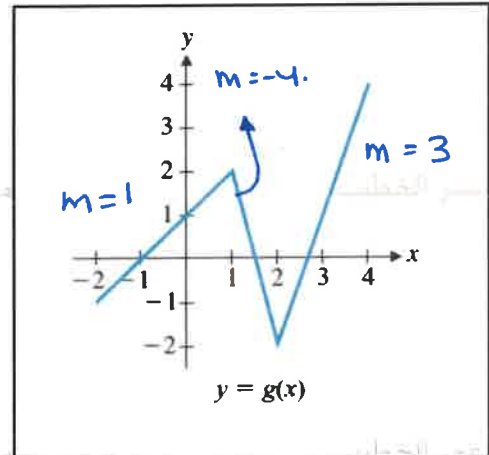
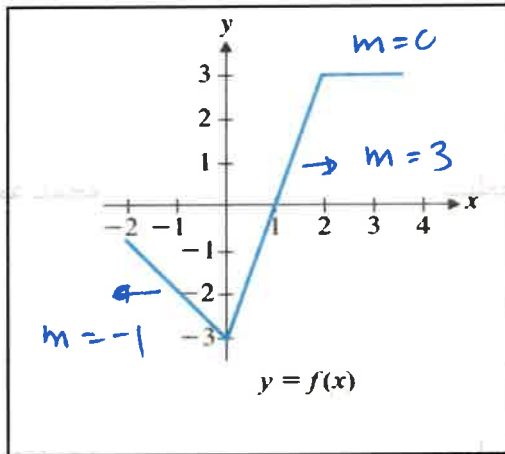
$$= 3f^2(2^2) \cdot f'(2^2) \cdot 2(2)$$

$$= 3(f(4))^2 \cdot f'(4) \cdot 4$$

$$= 3(2)^2 \cdot (-5)$$

$$= -240$$

الرسم البياني المجاور يمثل بيان الدالة $f(x), g(x)$



(1) اوجد $h'(0)$ حيث

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$h'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0)$$

$$\begin{aligned} h'(0) &= f'(1) \cdot 1 \\ &= 3(1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

(2) اوجد $h'(-1)$ حيث

$$h(x) = f(f(x))$$

$$h'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$h'(-1) = f'(f(-1)) \cdot f'(-1)$$

$$\begin{aligned} h'(-1) &= f'(-2) \cdot (-1) \\ &= (-1)(-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(3) اوجد $h'(1)$ حيث

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$h'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1)$$

$$= g'(0) \cdot 3$$

$$= 1(3) = 3$$

(1) بفرض ان الدوال: $f(x)$, $g(x)$ ومشتقاتهما لهم القيم التالية

$$f(1)=3, g(1)=2, f'(1)=4, f'(2)=3, g'(1)=-2, g'(3)=5$$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

اوجد $h'(1)$ حيث $h(x) = f(g(x))$

$$\begin{aligned} h'(1) &= f'(g(1)) \cdot g'(1) \\ &= f'(2) \cdot (-2) \\ &= 3(-2) = -6 \end{aligned}$$

(2) اذا كان $y = f(x^2 + x) + f(2)$ وكان $f'(2) = -1$ ، فاوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x=1$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x^2 + x) \cdot (2x + 1) + 0 \rightarrow \text{متقة } f(2) \text{ لانه ثابت}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f'(2) \cdot (3) \\ &= (-1)(3) = -3 \end{aligned}$$

$g(-2)$	$f'(3)$	$g'(-2)$
-1	-4	2

(3) اذا علمت ان: $h(x) = f(x^2 + g(x))$ اوجد $h'(-2)$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x^2 + g(x)) \cdot [2x + g'(x)] \\ h'(-2) &= f'(4 + g(-2)) (-4 + g'(-2)) \\ &= f'(4 + -1) (-4 + 2) \\ &= f'(3) (-2) = (-4)(-2) = 8 \end{aligned}$$

تحقق لطرفين

(4) اذا كان $f(\frac{1}{x}) = 4x^3 - 7x + 1$ فاوجد $f'(2)$

$$f'(\frac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x^2} = 12x^2 - 7$$

$$f'(2) \cdot \frac{-1}{(\frac{1}{2})^2} = 12(\frac{1}{2})^2 - 7$$

$$f'(2) \cdot (-4) = 3 - 7$$

$$-4 f'(2) = -4 \Rightarrow f'(2) = 1$$

عندما
 $\frac{1}{x} = 2$
فان
 $x = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \cos 2x & , x \geq \frac{\pi}{4} \\ a + bx & , x < \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (1) \text{ لتكن:}$$

دالة قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{\pi}{4}$ فاوجد قيمة كل من a, b

$$\begin{array}{c} a+bx \quad 1+\cos x \\ \hline \frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$a + b\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$a + \frac{\pi}{4}b = 1.$$

$$\begin{array}{c} b \quad -2 \sin 2x \\ \hline \frac{\pi}{4} \end{array}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}-\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}+\right)$$

$$b = -2 \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$b = -2(1)$$

$$b = -2$$

$$a + \frac{\pi}{4}(-2) = 1 \Rightarrow a = 1 + \frac{\pi}{2}$$

(2) اذا كانت $h'(x) = n\sqrt{h(x)}$ حيث $n > 0$ و $h''(x) = 18$ فاوجد قيمة الثابت n

$$h''(x) = n \cdot \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}} = n \cdot \frac{n\sqrt{h(x)}}{2\sqrt{h(x)}}$$

$$h''(x) = \frac{n^2}{2}$$

$$18 = \frac{n^2}{2}$$

$$n^2 = 36$$

$$n = -6 \quad / \quad n = 6.$$

مرفوض

(1) أوجد معادلة المماس للدالة $f(x) = \sin 4x$ عند $x = \frac{\pi}{8}$ $f'(x) = \cos 4x \cdot 4$

$$m = f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4 \cos 4 \cdot \frac{\pi}{8} = 0$$

$$y - 1 = 0 \left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\Rightarrow y = 1$$

$$x_1 = \frac{\pi}{8}$$

$$y_1 = \sin 4 \cdot \frac{\pi}{8}$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

النقطة $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$

(2) أوجد قيم x التي يكون عندها المماس للدالة $f(x) = x - \sin 2x$ أفقي

$$f'(x) = 1 - 2 \cos 2x$$

$$0 = 1 - 2 \cos 2x$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x \begin{cases} \varphi_1 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \\ \varphi_2 \rightarrow 2x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + n\pi$$

$$2x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

$$2x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

(3) أوجد قيم x التي يصنع عندها المماس لمنحنى الدالة $f(x) = x - 2 \cos x$

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية مقدارها 135°

$$f'(x) = 1 + 2 \sin x$$

$$m = 1 + 2 \sin x$$

$$\tan 135^\circ = 1 + 2 \sin x$$

$$-1 = 1 + 2 \sin x$$

$$-2 = 2 \sin x$$

$$\sin x = -1$$

$$x \begin{cases} \frac{\pi}{2} \times \\ \frac{3\pi}{2} \checkmark \end{cases}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$

(4) أوجد قيم x التي تجعل الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x}$ غير قابلة للاشتقاق

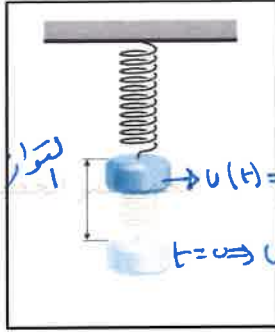
$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} (x^3 - 3x^2 + 2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2 - 6x + 2) = \frac{3x^2 - 6x + 2}{3(x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{2}{3}}}$$

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0, 1, 2$ وهي النقاط

لتكن $u(t) = 4 \cos(2t)$ تقيس مقدار الازاحة بالبوصة لكتلة معلقة في زنبرك لمدة t ثانية بعد

تحريرها



(1) احسب السرعة المتجهة عند اي زمن

$$u'(t) = 4(-\sin 2t) \cdot 2 = -8 \sin 2t$$

اقصى سرعة متجهة هي
السعة

(2) اوجد اقصى سرعة متجهة للزنبرك

اقصى سرعة متجه هي 8 د.هـ

نقطة التوازن عندما تكون

$$u(t) = 0$$

(3) اوجد الزمن الذي تكون فيه السرعة المتجهة اكبرما يمكن

$$\begin{aligned} u'(t) &= 8 \\ -8 \sin 2t &= 8 \\ \sin 2t &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2t < \frac{\pi}{2} \times \\ 2t < \frac{3\pi}{2} \checkmark \\ 2t = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \\ \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4} + n\pi \end{cases}$$

زمن
+ n\pi

(4) احسب موقع الجسم عندما تتعدم سرعة

$$\begin{aligned} u'(t) &= 0 \\ -8 \sin 2t &= 0 \\ \sin 2t &= 0 \end{aligned}$$

$$2t < 0 \checkmark \\ 2t < \pi \checkmark$$

$$2t = 0 + 2n\pi$$

$$t = n\pi$$

$$2t = \pi + 2n\pi$$

$$t = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

التوازن
↓
4

$$u(n\pi) = 4 \cos 2n\pi = (4)$$

$$u(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 4 \cos 2(\frac{\pi}{2} + n\pi) = (-4)$$

$$(a) f(x) = 2x(x^2 + 3)^3$$

الحل بالتخمين

$$g(x) = \frac{1}{4} (x^2 + 3)^4 + C$$

$$(b) f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 1}}$$

$$g(x) = 2 \sqrt{\sin x + 1} + C$$

(2) تسمى الدالة $f(x)$ دالة زوجية اذا حققت $f(-x) = f(x)$ لكل قيم x

وتسمى دالة فردية اذا حققت $f(-x) = -f(x)$ لكل قيم x

اثبت ان مشتقة الدالة الزوجية هي دالة فردية

الاثبات : لنكن $f(x)$ دالة زوجية فان

$$f(-x) = f(x)$$

اخذنا الطرفين

$$f'(-x) (-1) = f'(x)$$

$$f'(-x) = -f'(x)$$

$\therefore$ الدالة $f'(x)$ دالة فردية

حسب التعريف .

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

إذا كانت $g(x) = f^{-1}(x)$ فإن

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

محمد عمر الخطيب * ترتيب الحل بهذا السؤال
او
مهم جداً

(1) إذا كانت $f(x) = x^3 - 3$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$ ، فاوجد $g'(5)$

$$\begin{aligned} g'(5) &= \frac{1}{f'(g(5))} \\ &= \frac{1}{f'(2)} \quad \leftarrow a \\ &= \frac{1}{3(2)^2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

نفرض ان $g(5) = a$
 $f^{-1}(5) = a$
 $5 = f(a)$
 $f(a) = 5$
 $a^3 - 3 = 5$
 $a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$

(2) إذا كانت $f(x) = x^3 + 4x - 1$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$ ، فاوجد $g'(-1)$

$$\begin{aligned} g'(-1) &= \frac{1}{f'(g(-1))} \\ &= \frac{1}{f'(0)} \quad \leftarrow a \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

نفرض ان $g(-1) = a$
 $f^{-1}(-1) = a$
 $-1 = f(a)$
 $f(a) = -1$
 $a^3 + 4a - 1 = -1$
 $a^3 + 4a = 0$
 $\Rightarrow a = 0$

(3) إذا كانت $f(x) = x^3 + 3\sin x + 2\cos x$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$ ، فاوجد $g'(2)$

$$\begin{aligned} g'(2) &= \frac{1}{f'(g(2))} \\ &= \frac{1}{f'(0)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

نفرض ان $g(2) = a$
 $f^{-1}(2) = a$
 $f(a) = 2$
 $a^3 + 3\sin a + 2\cos a = 2 \Rightarrow a = 0$

(1) إذا كانت الدالة $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$ لها معكوس هي $g(x)$ ، فابعد $g'(2)$

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))}$$

$$= \frac{1}{f'(0)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 2}{2\sqrt{x^3 + 2x + 4}}$$

نفسه ان $g(2) = a$
 $f'(2) = a \Rightarrow f(a) = 2$
 $\sqrt{a^3 + 2a + 4} = 2$
 $a^3 + 2a + 4 = 4$
 $\Rightarrow a = 0$

(2) اعتمد على الجدول المجاور ليجاد معادلة المماس للدالة $g(x) = f^{-1}(x)$ عند $x = 2$

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	3	4
3	2	5

عند $x = 2$ فإن
 $g(2) = f^{-1}(2) = 3$
 $\therefore$ النقطة هي $(2, 3)$

$$m = g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))}$$

$$= \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{5}$$

معادله المماس لـ $g(x)$
 $y - 3 = \frac{1}{5}(x - 2)$

(3) إذا كانت $f(x) = x^3 + 5x$ حيث $f(1) = 6$ ، فابعد $[f^{-1}(x)]'$ عند $x = 6$

$$[f^{-1}(x)]'_{(6)} = g'(6)$$

$$= \frac{1}{f'(g(6))}$$

$$= \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{8}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

$$1 = f^{-1}(6)$$

$$1 = g(6)$$

$$f^{-1}(x) = g(x)$$

(4) إذا كانت $f(x) = x^3 + 5x + 6$ لها الدالة العكسية $g(x)$ ، فابعد $g'(x)$ بدلالة $g(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$= \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{3[g(x)]^2 + 5}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

الوحدة الثالثة: التفاضل /// الدرس السابع: مشتقة الدوال الاسية واللوغارتمية

مشتقة الدوال الاسية

تذكر

خاصية تغير الأساس

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \times \ln a$$

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \times f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} a^{f(x)} = a^{f(x)} \times f'(x) \times \ln a$$

مشتقة الدوال اللوغارتمية

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \times \ln a}$$

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a f(x) = \frac{f'(x)}{f(x) \times \ln a}$$

$$\frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$$

وبشكل عام

ملاحظة: يمكن الاستفادة من خواص الأسس واللوغاريتمات قبل الاشتقاق

(1) $y = 2e^{-3x} \Rightarrow y' = 2e^{-3x} \cdot (-3) = -6e^{-3x}$ اوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(2) $y = e^{\sin x} \Rightarrow y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$

(3) $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-1} \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-1} \cdot 2x \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -2x \left(\frac{1}{e}\right)^{x^2-1}$

(4) $y = 2^{\tan x} \Rightarrow y' = 2^{\tan x} \cdot \sec^2 x \cdot \ln 2$

(5) $y = 3^{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = 3^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln 3$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y = 5^{2x} + \ln(x^2 - 5x)$

$$y' = 5^{2x} \cdot 2 \cdot \ln 5 + \frac{2x - 5}{x^2 - 5x}$$

(2) $y = e^{\sqrt{x}} + \ln|2 - \cos x|$

$$y' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

(3) $y = \ln|\sec x + \tan x|$

$$y' = \ln \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \sec x$$

(4) $y = x^2 e^{\cos x}$ قرب

$$y' = 2x e^{\cos x} + x^2 e^{\cos x} (-\sin x)$$

(5) $y = x 5^{3x}$ قرب

$$y' = 1 \cdot 5^{3x} + x \cdot 5^{3x} \cdot 3 \ln 5$$

(6) $y = \frac{e^{\sqrt{x^2+1}}}{2x}$ قرب

$$y' = \frac{e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x - e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot 2}{4x^2}$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) $y = 2^{e^x} + 3^{\cos x} + \log_2 x$

$$y' = 2^{e^x} \cdot e^x \cdot \ln 2 + 3^{\cos x} \cdot (-\sin x) \cdot \ln 3 + \frac{1}{x \ln 2}$$

(2) $y = \ln(\sin 2x)$

$$y' = \frac{\cos 2x \cdot 2}{\sin 2x} = 2 \cot 2x.$$

(3) $y = e^{1/x} + x \ln x$

$$y' = e^{1/x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} e^{1/x} + \ln x + 1$$

(4) $y = \ln(\tan^2 x^3) = \ln(\tan x^3)^2 = 2 \ln(\tan x^3)$

$$y' = \frac{2 \sec^2 x^3 \cdot 3x^2}{\tan x^3} = 6x^2 \sec^2 x^3 \cdot \cot x^3.$$

(5) $y = \ln(x-1) + \ln(e^{\sec x}) + e^{2 \ln x} = \ln(x-1) + \sec x + e^{\ln x^2}$

$$y' = \frac{1}{x-1} + \sec x \tan x + 2x.$$

(6) $y = \ln(\cos 3x) + 3^{\sin x^3}$

$$y' = \frac{-\sin 3x \cdot 3}{\cos 3x} + 3^{\sin x^3} \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 \cdot \ln 3.$$

(1) $f(x) = \sin(\ln x^2)$

$$f'(x) = \cos(\ln x^2) \cdot \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \cos(\ln x^2)$$

(2) $g(t) = \ln(\sin t^2)$

$$g'(t) = \frac{\cos t^2 \cdot 2t}{\sin t^2} = 2t \cot t^2$$

(3) $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1/x}{2\sqrt{\ln x}} \cdot x - \sqrt{\ln x} \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} - \sqrt{\ln x}}{x^2} = \frac{1 - 2\ln x}{2x^2 \sqrt{\ln x}}$$

(4) $g(t) = \frac{\ln \sqrt{t}}{t} = \frac{1}{2} \frac{\ln t}{t}$

$$g'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{t} \cdot t - \ln t \cdot 1}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{2t^2}$$

(5) $f(x) = \frac{e^x}{2^x} = \left(\frac{e}{2}\right)^x$

$$f'(x) = \left(\frac{e}{2}\right)^x \cdot \ln\left(\frac{e}{2}\right)$$

يمكن استخدام قاعدة لـ

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

$$(1) \quad y = x \ln(\sqrt{x^2 + 1}) = x \ln(x^2 + 1)^{1/2} = \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1)$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$(2) \quad y = e^{\tan x} \ln|x| \quad \text{الفرق}$$

$$y' = e^{\tan x} \cdot \sec^2 x \cdot \ln|x| + e^{\tan x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$(3) \quad y = \sqrt[3]{\ln(x^2 - 1)} = [\ln(x^2 - 1)]^{1/3}$$

$$y' = \frac{1}{3} (\ln(x^2 - 1))^{-2/3} \cdot \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$(4) \quad y = \ln\left(\frac{x + \sin x}{1 - \cos x}\right) = \ln(x + \sin x) - \ln(1 - \cos x) \quad \text{خواص لـ}$$

$$y' = \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} - \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

$$(5) \quad y = \ln(x^3 e^{\sin x} \tan^3 x) = \ln(x^3) + \ln(e^{\sin x}) + \ln \tan^3 x$$

$$= 3 \ln x + \sin x + 3 \ln \tan x$$

$$y' = \frac{3}{x} + \cos x + 3 \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

(1) إذا كان: $f(x) = e^{2x}$ فاوجد

المشتقات

$$(a) f^{(10)}(x) = 2^{10} \cdot e^{2x}$$

محمد عمر الخطيب

$$(b) f^{(100)}(0) = 2^{100} \cdot e^{2(0)} = 2^{100}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$f'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$$

محمد عمر الخطيب

$$f''(x) = 2e^{2x} \cdot 2 = 2^2 \cdot e^{2x}$$

$$f'''(x) = 2^2 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2^3 \cdot e^{2x}$$

(2) إذا كان: $f(x) = e^{2x} + \cos 2x - x$ فاوجد

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(a) f^{(11)}(x) = 2^{11} e^{2x} + 2^{11} \sin 2x$$

$$2 \cdot 75 = \frac{11}{4}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(b) f^{(22)}(0) = 2^{22} e^{0} - 2^{22} \cos 0 = 2^{22} - 2^{22} = 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$4 \cdot 5 = \frac{22}{4}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 2e^0 - 2\sin 0 - 1 = 1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

يستخدم التفاضل اللوغاريتمي لإيجاد مشتقة دالة على الصورة

$$(1) \quad y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x.$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y' = y [\ln x + 1] \\ = x^x [\ln x + 1].$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يلي :

(1) خذ $\ln$ للطرفين

(2) اشتق الطرفين ضمناً

(3) اضرب الطرفين في y

(4) استرجع الفرض

$$(2) \quad y = x^{\sin x}$$

$$\ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \cdot \ln x.$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}.$$

$$y' = y \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right] \\ = x^{\sin x} \left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$$

$$(3) \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

$$\ln y = \ln \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = x^2 \ln \frac{1}{2}$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln \frac{1}{2}$$

$$= y (2x \cdot \ln \frac{1}{2})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln \frac{1}{2}.$$

* حتمه حل السؤال

مباشرة بدون

التفاضل اللوغاريتمي

لأنه ليس مناسباً

استخدم التفاضل اللوغاريتمي في إيجاد $f'(x)$ في كل مما يلي :

$$(1) f(x) = (x^2)^{3x} = x^{6x}$$

$$f'(x) = f(x) [6 \ln x + 6]$$

$$\ln f(x) = \ln x^{6x} = 6x \ln x$$

$$= 6 (x^2)^{3x} [\ln x + 1]$$

إشتق :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 6 \ln x + 6x \cdot \frac{1}{x}$$

$$(2) f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln f(x) = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \ln x$$

$$f'(x) = f(x) \left[\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right]$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= x^{\sqrt{x}} \left[\frac{2 \ln x + 1}{2\sqrt{x}} \right]$$

$$(3) f(x) = x^{\ln x}$$

$$\ln f(x) = \ln x^{\ln x} = (\ln x)(\ln x) = (\ln x)^2$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{2}{x} \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 (\ln x)' \cdot \frac{1}{x}$$

$$= x^{\ln x} \cdot \frac{2}{x} \ln x$$

$$= 2 x^{\ln x - 1} \cdot \ln x$$

$$(4) f(x) = (\sin x)^{\ln x}$$

$$\ln f(x) = \ln (\sin x)^{\ln x}$$

$$f'(x) = f(x) \left[\frac{\ln \sin x}{x} + \cot x \ln x \right]$$

$$= (\ln x) \ln (\sin x)$$

$$= (\sin x)^{\ln x} \left[\frac{\ln \sin x}{x} + \cot x \ln x \right]$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} \cdot \ln (\sin x) + \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

(1) إذا كانت $f(x) = 4x - \ln x^3$ وكانت $g(x) = f^{-1}(x)$ فاوجد $g'(4)$

$$g'(4) = \frac{1}{f'(g(4))}$$

$$= \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1} = 1$$

نفرض أن $g(u) = a$

$$f^{-1}(u) = a$$

$$f(a) = u$$

$$4a - \ln a^3 = 4$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad \text{نختبر}$$

(2) أوجد جميع قيم x التي يكون عندها للدالة $f(x) = x e^{-2x}$ مماس أفقي

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x}(-2)$$

$$= e^{-2x}(1 - 2x)$$

$$= \frac{1 - 2x}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1 - 2x}{e^{2x}} = 0$$

$$1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

(3) أوجد معادلة المماس للدالة $f(x) = 3^{\tan x}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3^{\tan \frac{\pi}{4}} = 3$$

نقطة المماس

$$\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$$

$$f'(x) = 3^{\tan x} \cdot \sec^2 x \cdot \ln 3$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3^{\tan \frac{\pi}{4}} \cdot \sec^2 \frac{\pi}{4} \cdot \ln 3$$

$$= 6 \ln 3$$

معادلة المماس

$$y - 3 = 6 \ln 3 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

(4) أوجد معادلة المماس للدالة $f(x) = \ln x$ والتي تمر بمعادلة المماس بنقطة الأصل

لاحظ أن نقطة المماس غير معلومة

$$(a, f(a)) = (a, \ln a)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$m = f'(a) = \frac{1}{a}$$

معادلة المماس هي

$$y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a)$$

النقطة $(0,0)$ تحقق معادلة المماس

$$(0,0) \Rightarrow 0 - \ln a = \frac{1}{a}(0 - a)$$

$$-\ln a = -1$$

$$\ln a = 1$$

$$\Rightarrow a = e$$

∴ المعادلة هي

$$y - \ln e = \frac{1}{e}(x - e)$$

$$y - 1 = \frac{1}{e}x - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{e}x$$

(1) تحدد الدالة $v(t) = 100 \times 4^t$ قيمة الاستثمار لمبلغ 100 درهم بعد الزمن t ، اوجد النسبة المئوية

النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير هي

للمعدل اللحظي للتغير

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \times 100\%$$

$$= \frac{100 \times 4^t \cdot \ln 4}{100 \times 4^t} \times 100\% = 138\%$$

النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \times 100\%$$

(2) يبدأ تكاثر البكتريا بالمعد 200 ويتضاعف ثلاث مرات كل يوم، اوجد قانون لتكاثر البكتيريا بعد t يوم، ثم اوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير في التكاثر

$$P(t) = P_0 \times a^{rt}$$

$$= 200 \times 3^t$$

$$a=3$$

$$r=1$$

عدد البكتيريا يساوي $p(t) = p_0 a^{rt}$

حيث p_0 عدد البكتيريا في بداية التجربة

حيث a عدد مرات التي تضاعف فيها البكتيريا في وحدة الزمن

حيث r معدل نمو البكتيريا ونجدة من خلال تعويض المعطيات

$$\frac{P'(t)}{P(t)} \times 100\%$$

$$= \frac{200 \times 3^t \cdot \ln 3}{200 \times 3^t} \times 100\%$$

$$= 110\%$$

(3) يبدأ تكاثر البكتريا بالمعد 500 ويتضاعف كل اربعة ايام، اوجد قانون لتكاثر البكتيريا بعد t يوم، ثم اوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير في التكاثر

$$a = 2$$

$$r \neq 1$$

$$P(u) = 1000$$

$$P(t) = P_0 \times a^{rt}$$

$$= 500 \times 2^{rt}$$

استخدم استرط

$$P(u) = 1000$$

$$500 \times 2^{4r} = 1000$$

$$2^{4r} = 2$$

$$4r = 1 \rightarrow r = 1/4$$

$$P(t) = 500 \times 2^{\frac{1}{4}t}$$

النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير

$$\frac{P'(t)}{P(t)} \times 100\%$$

$$= \frac{500 \times 2^{\frac{1}{4}t} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln 2}{500 \times 2^{\frac{1}{4}t}} \times 100\%$$

$$= 17.3$$

لكن $c(t) = \frac{10}{9e^{-20t} + 1}$ تقيس تركيز مادة معينة بعد t ثانية من التفاعل

(أ) اوجد تركيز المادة عند بداية التفاعل.

$$c(0) = \frac{10}{9e^0 + 1} = 1$$

(ب) اوجد $c'(t)$ وماذا تعني

$$c'(t) = \frac{-10 (9e^{-20t} \cdot (-20))}{(9e^{-20t} + 1)^2}$$

$$= \frac{1800 e^{-20t}}{(9e^{-20t} + 1)^2}$$

تعني معدل التغير في التركيز

(ج) بين ان $c'(t) > 0$ وفسر النتيجة

$$c'(t) = \frac{1800 e^{-20t}}{(9e^{-20t} + 1)^2} > 0$$

كل من البسط والمقام موجب

العلاقة بين الزمن والتركيز علاقة طردية.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$$

(د) اوجد اكبر قيمة للتركيز مع مرور الزمن

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10}{9e^{-20t} + 1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10}{\frac{9}{e^{20t}} + 1}$$

$$= \frac{10}{\frac{9}{\infty} + 1} = \frac{10}{0 + 1} = 10$$



نقطة التوازن عندما تكون

$$s(t) = 0$$

(1) تعطى الدالة $s(t) = e^{-2t} \sin 3t$ موقع كتلة مرتبطة بزنبك في أي زمن t

$$v(t) = s'(t)$$

(1) اوجد دالة السرعة المتجه

$$= e^{-2t}(-2) \sin 3t + e^{-2t} \cos 3t \quad (3)$$

$$= e^{-2t} [-2 \sin 3t + 3 \cos 3t]$$

(ب) اوجد السرعة المتجه عند $t = 0$

$$s'(0) = e^0 [0 + 3] = 3$$

(ج) متى تكون السرعة المتجه صفر (اول مرة)

$$v(t) = 0$$

$$e^{-2t} [-2 \sin 3t + 3 \cos 3t] = 0$$

$$e^{-2t} = 0$$

لا يوجد حل

$$-2 \sin 3t + 3 \cos 3t = 0$$

$$-2 \sin 3t = -3 \cos 3t$$

$$\tan 3t = 3/2 \Rightarrow 3t = 0.98 \rightarrow t = 0.32 \text{ s}$$

(2) يمكن تقريب الدالة $f(x) = e^x$ بدالة حدودية من الدرجة الثانية $T(x) = ax^2 + bx + c$

حيث $f(x) \approx T(x)$ و تحقق الشروط $f(0) = T(0)$, $f'(0) = T'(0)$, $f''(0) = T''(0)$

اوجد قيم الثوابت a, b, c التي تجعل $f(x) \approx T(x)$

$$T''(0) = f''(0)$$

$$2a = 1 \Rightarrow a = 1/2$$

$$T'(0) = f'(0)$$

$$b = 1$$

$$T(0) = f(0)$$

$$c = 1$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

$$T(x) = ax^2 + bx + c$$

$$T'(x) = 2ax + b$$

$$T''(x) = 2a$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

الوحدة الثالثة: التفاضل /// الدرس الثامن: الاشتقاق الضمني والدوال المثلثية العكسية

الاشتقاق الضمني

تسمى الدالة التي على الصورة $y = f(x)$ علاقة (دالة) صريحة وغير ذلك تسمى علاقة ضمنية

بعض الامثلة للمشتقات الضمنية

$$y \rightarrow y'$$

$$y^2 \rightarrow 2y y'$$

$$\sqrt{y} \rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}}$$

$$\sin y \rightarrow \cos y y'$$

$$e^y \rightarrow e^y y'$$

$$\ln y \rightarrow \frac{y'}{y}$$

$$\frac{d}{dx} g(y) = g'(y) \times \frac{dy}{dx}$$

اشتقاق العلاقات الضمنية

خطوات ايجاد المشتقة ضمناً

(1) ايجاد مشتقة كل حد ضمناً في مكانه

(2) تجميع الحدود التي تحتوي y' في الطرف الايسر

(3) اخراج y' كعامل مشترك

(4) قسمة الطرفين على معامل y'

$$\frac{dy}{dx} \text{ اوجد}$$

$$\text{اذا كان : } x^2 + y^3 - 2y = 0$$

$$2x + 3y^2 \cdot y' - 2y' = 0$$

$$3y^2 y' - 2y' = -2x$$

$$y'(3y^2 - 2) = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{3y^2 - 2}$$

اوجد $\frac{dy}{dx}$

(1) اذا كان : $x^2y - 3y^3 = x^2 + 1$

$$2xy + x^2y' - 9y^2y' = 2x$$

$$x^2y' - 9y^2y' = 2x - 2xy$$

$$y' (x^2 - 9y^2) = 2x - 2xy$$

$$y' = \frac{2x - 2xy}{x^2 - 9y^2}$$

اوجد $\frac{dy}{dx}$

(2) اذا كان : $x^2 + y^2 = 2xy + e^y$

$$2x + 2yy' = 2y + 2xy' + e^y \cdot y'$$

$$2yy' - 2xy' - e^y y' = 2y - 2x$$

$$y' (2y - 2x - e^y) = 2y - 2x$$

$$y' = \frac{2y - 2x}{2y - 2x - e^y}$$

اوجد $\frac{dy}{dx}$

(3) اذا كان : $e^{x^2y} = x$

$$e^{x^2y} [2xy + x^2y'] = 1$$

$$2xy e^{x^2y} + x^2y' e^{x^2y} = 1$$

$$x^2y' e^{x^2y} = 1 - 2xy e^{x^2y}$$

$$y' = \frac{1 - 2xy e^{x^2y}}{x^2 e^{x^2y}}$$

(1) إذا كان : $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$ حيث $x \neq -y$ اوجد $\frac{dy}{dx}$ الضرب في $x+y$

$$x^2(x+y) = x-y$$

$$x^3 + x^2y = x-y$$

$$3x^2 + 2xy + x^2y' = 1-y'$$

$$x^2y' + y' = 1 - 3x^2 - 2xy$$

$$y'(x^2+1) = 1 - 3x^2 - 2xy \Rightarrow y' = \frac{1 - 3x^2 - 2xy}{x^2+1}$$

(2) إذا كان : $\frac{x}{y} + \frac{2}{x} = 5$ اوجد $\frac{dy}{dx}$ الضرب في xy أو كوحيد مقامات.

$$x^2 + 2y = 5xy$$

$$2x + 2y' = 5y + 5xy'$$

$$2y' - 5xy' = 5y - 2x$$

$$y'(2-5x) = 5y - 2x$$

$$y' = \frac{5y-2x}{2-5x} = \frac{2x-5y}{5x-2}$$

(3) إذا كان : $\sin(xy) + x^2 = x - y$ اوجد $\frac{dy}{dx}$

$$\cos(xy) [1 \cdot y + x y'] + 2x = 1 - y'$$

$$y \cos(xy) + x y' \cos(xy) + 2x = 1 - y'$$

$$x y' \cos(xy) + y' = 1 - 2x - y \cos(xy)$$

$$y' [x \cos(xy) + 1] = 1 - 2x - y \cos(xy)$$

$$y' = \frac{1 - 2x - y \cos(xy)}{x \cos(xy) + 1}$$

$$e^{4y} - \ln(y^2 + 3) = 2x \quad \text{اوجد } \frac{dy}{dx}$$

$$4y e^{4y} y' = \frac{2y y'}{y^2 + 3} = 2$$

$$y' \left[4e^{4y} - \frac{2y}{y^2 + 3} \right] = 2$$

$$y' \left[\frac{4(y^2 + 3)e^{4y} - 2y}{y^2 + 3} \right] = 2 \Rightarrow y' = \frac{2(y^2 + 3)}{4(y^2 + 3)e^{4y} - 2y}$$

$$x - 2y^2 = 3e^{x/y} \quad \text{اوجد } \frac{dy}{dx}$$

$$1 - 4yy' = 3e^{x/y} \left[\frac{y - xy'}{y^2} \right]$$

$$y^2 - 4y^3 y' = 3e^{x/y} (y - xy')$$

$$y^2 - 4y^3 y' = 3ye^{x/y} - 3xy'$$

$$3xy' - 4y^3 y' = 3ye^{x/y} - y^2$$

$$y'(3x - 4y^3) = 3ye^{x/y} - y^2$$

$$y' = \frac{3ye^{x/y} - y^2}{3x - 4y^3}$$

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{اوجد}$$

$$xy^2 + 5x = (2y + 1)^3 \quad \text{اذا كان :}$$

$$1 \cdot y^2 + x \cdot 2y y' + 5 = 3(2y + 1)^2 \cdot 2y'$$

$$2xy y' - 6(2y + 1)^2 y' = -5 - y^2$$

$$y' [2xy - 6(2y + 1)^2] = -5 - y^2$$

$$y' = \frac{-5 - y^2}{2xy - 6(2y + 1)^2} = \frac{y^2 + 5}{6(2y + 1)^2 - 2xy}$$

(1) إذا كان : $x^2y + \ln y = xy + 1$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1, e)$

$$2xy + x^2y' + \frac{y'}{y} = y + xy'$$

نعوض بالنقطة $(1, e)$ مباشرة

$$2e + y' + \frac{y'}{e} = e + y'$$

$$\frac{y'}{e} = -e \Rightarrow y' = -e^2$$

(2) إذا كان : $xy + y^2 = 1$ أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند النقطة $(0, -1)$ نتف لمرة الأولى

$$y + xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow -1 - 2y' = 0 \Rightarrow y' = -1/2$$

نتف لمرة ثانية

$$y' + 1 \cdot y' + xy'' + 2y' \cdot y' + 2yy'' = 0$$

نعوض بذلك $x=0$ و $y=-1$ ونعوض $y' = -1/2$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 \cdot y'' + 2(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + 2(-1)y'' = 0$$

$$-1 + \frac{1}{2} - 2y'' = 0 \Rightarrow y'' = -1/4$$

(3) إذا كان : $x + 2y^3 + xy = 5$ أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ نتف لمرة الأولى

$$1 + 6y^2y' + 1 \cdot y + xy' = 0$$

نتف لمرة ثانية

$$12yy' \cdot y' + 6y^2y'' + y' + 1 \cdot y' + xy'' = 0$$

$$12y(y')^2 + 6y^2y'' + 2y' + xy'' = 0$$

$$y''(6y^2 + x) = -2y' - 12y(y')^2$$

$$y'' = \frac{-2y' - 12y(y')^2}{6x^2 + x}$$

(1) إذا كان $x = \tan y$ اثبت ان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1}$

$$x = \tan y.$$

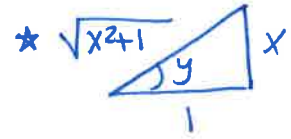
$$1 = \sec^2 y \cdot y'$$

$$y' = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \cos^2 y = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

مثلث لثبوت

$$\tan y = x = \frac{x}{1}$$



(2) إذا كانت $6x^2 + 5 = 4xy$ فاثبت ان $xy'' + 2y' = 3$ نشتق طرفاً لطرف

$$12x = 4y + 4xy'$$

$$3x = y + xy'$$

نشتق طرفاً لثانية

$$3 + y' + 1 \cdot y' + xy''$$

$$3 = 2y' + xy''$$

$$xy'' + 2y' = 3 \quad \#$$

(3) إذا كانت $xy = \sin x$ فاثبت ان $2y' + x(y + y'') = 0$

$$xy = \sin x \quad \text{نشتق طرفاً لطرف}$$

$$1 \cdot y + xy' = \cos x$$

نشتق طرفاً لثانية

$$y' + 1 \cdot y' + xy'' = -\sin x$$

$$2y' + xy'' = -xy$$

$$2y' + xy + xy'' = 0$$

$$2y' + x(y + y'') = 0$$

أوجد معادلة المماس لكل من العلاقات التالية عند النقطة المشار إليها:

(1) $y^2 - xy + x = 5$, $(-1, 2)$

$$2yy' - (y + xy') + 1 = 0$$

نعوض بالنقطة $(-1, 2)$

$$4y' - (2 - y') + 1 = 0$$

$$4y' - 2 + y' + 1 = 0$$

$$5y' = 1$$

$$y' = 1/5 \Rightarrow m = 1/5$$

الميل $1/5$ ، لنقطة $(-1, 5)$

∴ المعادلة

$$y - 5 = \frac{1}{5}(x + 1)$$

(2) $x^2y^2 = 3y + 1$, $(2, 1)$

$$2xy^2 + x^2 \cdot 2y \cdot y' = 3y'$$

عوض بالنقطة

$$4 + 8y' = 3y'$$

$$5y' = -4$$

$$y' = -4/5$$

$$m = \frac{-4}{5}$$

الميل $-4/5$ ، لنقطة $(2, 1)$

∴ المعادلة

$$y - 1 = \frac{-4}{5}(x - 1)$$

(3) $\sqrt{xy} = 2$, $(1, 4)$

تربيع الطرفين

$$xy = 4$$

$$y = \frac{4}{x}$$

$$y' = \frac{-4}{x^2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{-4}{1} = -4$$

الميل -4 ، لنقطة $(1, 4)$

$$y - 4 = -4(x - 1)$$

يمكنه حل السؤال بالاستقراء.
الضمني

أوجد معادلة المماس لكل من العلاقات التالية عند النقطة المشار إليها:

(1) $x^2 y^2 = 4x$, (1,2)

$$2x y^2 + x^2 \cdot 2y y' = 4$$

عوّض النقطة (1,2)

$$8 + 4y' = 4$$

$$4y' = 4$$

$$y' = -1$$

$$\Rightarrow m = -1$$

الميل -1 ، لنقطة (1,2)

المعادلة

$$y - 2 = -1(x - 1)$$

$$y = -x + 3$$

(2) $2xy + \pi \sin y = 2\pi$, $(1, \frac{\pi}{2})$

$$2y + 2x y' + \pi \cos y \cdot y' = 0$$

عوّض النقطة $(1, \frac{\pi}{2})$

$$\pi + 2y' + 0 = 0$$

$$y' = -\pi/2$$

$$\Rightarrow m = -\pi/2$$

الميل $-\frac{\pi}{2}$ ، لنقطة $(1, \frac{\pi}{2})$

المعادلة

$$y - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(x - 1)$$

$$y - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}$$

$$y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$$

(3) $y^2 + x e^y = 2$, (2,0)

$$2y y' + e^y + x e^y \cdot y' = 0$$

عوّض النقطة (2,0)

$$0 + 1 + 2y' = 0$$

$$y' = -1/2$$

$$m = -1/2$$

الميل $-1/2$ ، لنقطة (2,0)

المعادلة

$$y - 0 = -1/2(x - 2)$$

$$y = -1/2x + 1$$

(1) اوجد النقاط التي يكون عندها مماسات افقية ومماسات رأسية للمعادلة

$$x^2 + y^2 - 3y = 0$$

$$2x + 2yy' - 3y' = 0$$

$$y'(2y-3) = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y-3}$$

المماسات الأفقية $m=0$

الربط = عند

$$-2x=0 \Rightarrow x=0$$

نعوض بالمعادلة الأصلية ($x=0$)

$$y^2 - 3y = 0$$

$$y=0, y=3$$

مماسات أفقية عند $(0,0), (0,3)$

المماسات الرأسية
المقام = صفر

$$2y-3=0$$

$$y=3/2$$

نعوض بالمعادلة الأصلية ($y=3/2$)

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$x^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$x = -3/2, x = 3/2$$

المماسات الرأسية عند

$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ و $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(2) اوجد مواقع (معادلات) كل المماسات الأفقية والرأسية للمعادلة

$$x^2 + y^2 - 2y = 3$$

$$2x + 2yy' - 2y' = 0$$

بالقسمة على 2

$$x + yy' - y' = 0$$

$$y'(y-1) = -x$$

$$y' = \frac{-x}{y-1}$$

المماسات الأفقية $m=0$

الربط = عند

$$-x=0 \Rightarrow x=0$$

نعوض بالمعادلة الأصلية

$$y^2 - 2y = 3$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$y = -1, y = 3$$

المماسات الأفقية $y = -1, y = 3$

المماسات الرأسية

المقام = صفر

$$y-1=0 \Rightarrow y=1$$

نعوض بالمعادلة الأصلية

$$x^2 + 1 - 2 = 3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2, x = 2$$

المماسات الرأسية

$$x = -2, x = 2$$

(1) اوجد ميل المماس لكل منحنى من المنحنيين التاليين عند النقطة (0,0) ثم حدد الزاوية المحصورة بين المماسين

(a) $y = x\sqrt{x+4}$

$$y' = 1 \cdot \sqrt{x+4} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

$$m_1 = y'(0) = \sqrt{4}$$

$$m_1 = -2$$

نلاحظ ان

$$m_1 \cdot m_2 = 2(-1/2)$$

$$= -1$$

∴ المماسان متعامدين

الزاوية بينهم 90°

(b) $2y + x + y^5 = x^5$

$$2y' + 1 + 5y^4 \cdot y' = 5x^4$$

عوّض النقطة (0,0)

$$2y' + 1 + 0 = 0$$

$$y' = -1/2$$

$$m_2 = -1/2$$

(2) اذا كانت معادلة المماس لمنحنى العلاقة $x^2y + ay^2 = b$ عند النقطة (1,1) هي $4x + 3y = 7$

فاوجد قيمة a, b

النقطة (1,1) تحقق معادلة

المنحنى

$$1 \cdot 1 + a \cdot 1 = b$$

$$1 + a = b \Rightarrow b = a + 1 \quad \text{--- (1)}$$

ميل المماس

$$4 + 3y' = 0$$

$$y' = -4/3 \Rightarrow m_1 = -4/3$$

ميل المنحنى

$$2xy + x^2y' + 2ayy' = 0$$

عوّض النقطة (1,1)

$$2 + y' + 2ay' = 0$$

$$y'(1 + 2a) = -2$$

$$y' = \frac{-2}{1 + 2a}$$

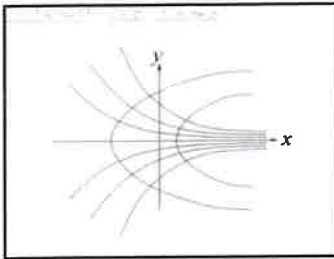
$$m_2 = -2 / (1 + 2a)$$

ميل المنحنى = ميل المماس

$$\frac{-2}{1 + 2a} = -4/3$$

$$-6 = -4 - 8a$$

$$a = 1/4 \Rightarrow b = 5/4$$



(1) وضع ان عائلية المنحنيات $y = \frac{c}{x}$ و $y^2 = x^2 + k$ تكون متعامدة

(بين ان المماسات للمنحنيات متعامدة عند نقطة التقاطع)

$$1) y = \frac{c}{x} \Rightarrow c = xy$$

اشتق

$$y' = \frac{-c}{x^2}$$

$$y' = \frac{-xy}{x^2} = \frac{-y}{x}$$

$$m_1 = \frac{-y}{x}$$

$$2) y^2 = x^2 + k$$

$$2yy' = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$$

$$m_2 = \frac{x}{y}$$

$$المماسات متعامدة . \quad m_1 \cdot m_2 = \frac{-y}{x} \cdot \frac{x}{y} = -1$$

(2) اي من عائلية المنحنيات (المعادلات) تكون متعامدة

$$(a) y = x + c$$

$$y' = 1$$

$$m_1 = 1$$

$$y = 2x + k$$

$$y' = 2$$

$$m_2 = 2$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = 2 \neq -1$$

ليس متعامدة .

$$(b) y = 2x + c$$

$$y' = 2$$

$$m_1 = 2$$

$$2y + x = k$$

$$2y' + 1 = 0$$

$$y' = -\frac{1}{2}$$

$$m_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$$

نعم متعامدة .

$$(c) y = cx^3$$

$$y' = 3cx^2$$

$$y' = 3 \cdot \frac{y}{x^3} \cdot x^2$$

$$= \frac{3y}{x}$$

$$m_1 = \frac{3y}{x}$$

$$x^2 + y^2 = k$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$2yy' = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y}$$

$$m_2 = \frac{-x}{y}$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = \frac{3y}{x} \cdot \frac{-x}{y}$$

$$= -3$$

ليس متعامدة .

(1) تحدد المعادلة $(P + \frac{5}{V^2})(V - 0.03) = 9.7$ العلاقة بين الحجم V والضغط P لغاز معين في

ظروف خاصة. اوجد $\frac{dV}{dP}$ عند النقطة $(5, 1)$ (P, V)

نشتق ضمناً

$$(P + 5V^{-2})(V - 0.03) = 9.7$$

$$(1 - 10V^{-3} \cdot V')(V - 0.03) + (P + 5V^{-2})(V') = 0$$

نعوض بالنقطة (5, 1)

$$(1 - 10V') (1 - 0.03) + (5 + 5)V' = 0$$

$$(1 - 10V') 0.97 + 10V' = 0$$

$$0.97 - 9.7V' + 10V' = 0$$

$$0.97 + 0.3V' = 0$$

$$0.3V' = -0.97$$

$$V' = -\frac{0.97}{0.3} = -97/30 \Rightarrow \frac{dV}{dP} = -\frac{97}{30}$$

(2) يقف لاعب كرة البيسبول على بعد قدمين من اللوح الرئيسي للكرة ويشاهد الكرة قادمة باتجاهه

بشكل افقي وبسرعة متجهة 130 ft/s ، ما معدل التغير في زاوية النظر للاعب لمتابعة الكرة

عندما تعبر الكرة اللوح ($x = 0$)

الحل من المثلث القائم المجاور فان

$$\tan \theta = \frac{x}{2}$$

نشتق كل متغير ضمناً بالنسبة للزمن

$$\sec^2 \theta \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \times \frac{dx}{dt}$$

نعوض المعطيات مع ملاحظ ان $\theta = 0$ عند $x = 0$

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{x=0} = \frac{1}{2} \times (-130) = -65 \text{ rad/s}$$

لتكن x هي المسافة بين الكرة و

اللوحة الرئيسي

فان $\frac{dx}{dt} = -130$ سرعة الكرة وهي

سالبة لان قيمة x تتناقص

المطلوب $\frac{d\theta}{dt}$ عندما $x = 0$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{d}{dx} \cot^{-1} x = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

$$\frac{d}{dx} \csc^{-1} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} f'(x)$$

$$|f(x)| < 1$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

إذا كان $y = \sin^{-1} x$ فاثبت ان

$$y = \sin^{-1} x$$

$$\sin y = x$$

اشتق الطرفين ضمنياً

$$\cos y \cdot y' = 1$$

$$y' = \frac{1}{\cos y}$$

$$y' = \sec y$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

من المثلث

الرياضيات

* مثلث الكوثر

$$\sin y = x = \frac{x}{1}$$



$$\sqrt{1-x^2}$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = \cos^{-1} 2x$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

(2) $y = \sin^{-1} e^{2x}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^{2x})^2}} \cdot e^{2x} \cdot 2 = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$$

(3) $y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \cot^{-1} x^2$

تمكنه الاشتقاق
صباحه

$$y' = \frac{-1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{-2x}{x^4+1}$$

(4) $y = \sec^{-1} \ln x$

$$y' = \frac{1}{|\ln x| \sqrt{(\ln x)^2 - 1}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x |\ln x| \sqrt{(\ln x)^2 - 1}}$$

(5) $y = \cot^{-1} \sin x$

$$y' = \frac{-1}{(\sin x)^2 + 1} \cdot \cos x = \frac{-\cos x}{\sin^2 x + 1}$$

(6) $y = \csc^{-1}(\sqrt{x})$

$$y' = \frac{-1}{|\sqrt{x}| \sqrt{(\sqrt{x})^2 - 1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2x\sqrt{x-1}}$$

(1) $f(x) = \sin^{-1}(x^3 + 1)$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^3 + 1)}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\sqrt{1 - (x^3 + 1)}}$

(2) $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

(3) $f(x) = \cos^{-1}(x^2 + x)$

$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (x^2 + x)^2}} \cdot (2x + 1) = \frac{-(2x + 1)}{\sqrt{1 - (x^2 + x)^2}}$

(4) $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$

* مكرر مع $\sec^{-1} \frac{x}{4}$

$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{x}\right)^2}} \cdot -\frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2 \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}$

(5) $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$

$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

(6) $f(x) = 4\sec^{-1}(x^4)$

$f'(x) = \frac{4}{|x^4| \sqrt{(x^4)^2 - 1}} \cdot 4x^3 = \frac{16x^3}{x^4 \sqrt{x^8 - 1}} = \frac{16}{x \sqrt{x^8 - 1}}$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي:

(1) $y = \sin(\cos^{-1} x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\cos^{-1} x^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2x = \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) $y = e^{\tan^{-1} x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

(3) $y = \tan^{-1}(\cos 2x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(\cos 2x)^2} \cdot -\sin 2x \cdot 2 = \frac{-2 \sin 2x}{1+\cos^2 2x}$$

(4) $y = \sin^{-1} \sin x = x$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

(5) $y = x \sin^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \sin^{-1} x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(6) $y = \sqrt{2 + \tan^{-1} x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{2\sqrt{2+\tan^{-1} x}} = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{2+\tan^{-1} x}}$$

فترة الاتصال

$$f(x) = \sin^{-1}(2x-1)$$

$$-1 \leq 2x-1 \leq 1$$

$$0 \leq 2x \leq 2$$

$$0 \leq x \leq 1$$

فترة الاتصال [0, 1]

(1) اوجد مجال الدالة $f(x)$

تذكر ان مجال

الدالة $\sin^{-1}x$

$$-1 \leq x \leq 1$$

الفترة التي تكون عليها الدالة قابلة للاشتقاق

$$f(x) = \sin^{-1}(2x-1)$$

$$-1 < 2x-1 < 1$$

$$0 < 2x < 2$$

$$0 < x < 1$$

الفترة هي (0, 1)

(2) اوجد مجال الدالة $f'(x)$

تذكر ان مجال

مشتقة الدالة

$\sin^{-1}x$

هو

$$-1 < x < 1$$

(3) اثبت أن الدالة $y = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ هي دالة ثابتة، ثم اوجد قيمة هذا الثابت

نجد مشتقه y .

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 0$$

بما ان المشتقة تساوي صفر

لكل قيم x فان الدالة

تكون ثابتة

لايجاد قيمته لثابت نختار اي

عدد في مجال الداليتين، ولكن هنر

ونعوضه في الدالة.

$$y = \sin^{-1}0 + \cos^{-1}0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore y = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

تذكر : نظرية القيمة الوسطية [للاتصال]

نظرية القيمة المتوسطة [للمشتقات]

إذا كانت الدالة $f(x)$

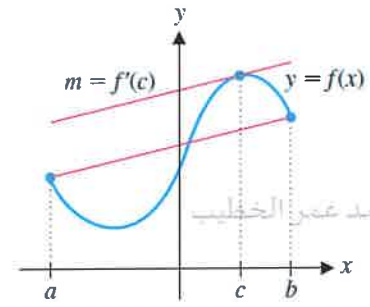
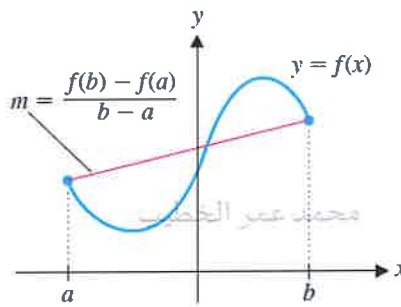
(2) قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) فانه

(1) دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$

يوجد عدد على الاقل $c \in (a,b)$ يحقق

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ميل القاطع يساوي ميل
المماس عند نقطة في
الفترة المفتوحة



ملاحظة: الدالة لا تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

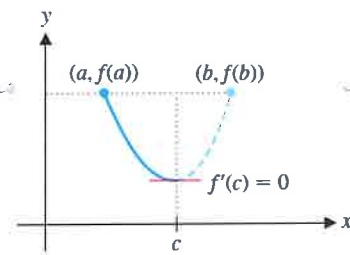
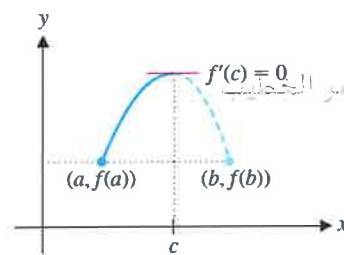
إذا كانت الدالة غير متصلة على $[a,b]$ او غير قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b)

نظرية رول

إذا كانت الدالة $f(x)$

(1) دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ (2) قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) (3)

$f(a) = f(b)$ فانه يوجد عدد على الاقل $c \in (a,b)$ يحقق



$$f'(c) = 0$$

يوجد للدالة مماس افقى عند احدى النقاط في الفترة

اي من الدوال التالية تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 3]$ مع ذكر السبب:

(1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

لا لان الدالة غير متصلة عند $x=1$

(2) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

نعم لان الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق على الفترة.

(3) $f(x) = |x - 1|$

لا لان الدالة غير قابلة للاشتقاق

(4) $f(x) = |(x - 2)^2| = (x - 2)^2$

نعم متصلة وقابلة للاشتقاق

(5) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

لا لان الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=1$

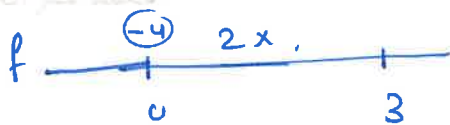
(6) $f(x) = \sqrt{x}$

نعم، رغم ان الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$ حيث نريد الاشتقاق على $(0, 3)$

(7) $f(x) = \tan x$

لا لان الدالة غير متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$ وهي تقريبا 1.57

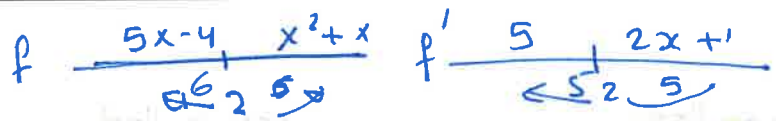
(8) $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 2x - 4 & x \leq 0 \end{cases}$



لا لان الدالة غير متصلة على $[0, 3]$

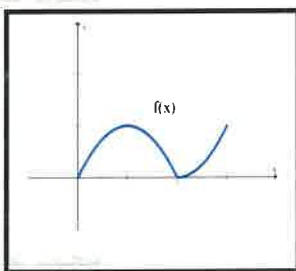
غير متصلة عند $x=0$ من جهة اليمين

(9) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x > 2 \\ 5x - 4 & x \leq 2 \end{cases}$



نعم

(10)



لا لان الدالة غير قابلة

للاشتقاق عند $x=2$ ركن

(1) بين ان الدالة $f(x) = x^2 - 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$

ثم اوجد قيمة c $f'(c) = 2c - 2$

الحل :

الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[0, 2]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0, 2)$ لانها حدودية

إذا الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

إذا يوجد على الاقل عدد مثل c في الفترة $(0, 2)$ ويحقق

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$2c - 2 = \frac{0 - 0}{0} = 0$$

$$2c = 2$$

$$c = 1 \in (0, 2) \checkmark$$

(2) بين ان الدالة $f(x) = x^3 + 1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[-3, 1]$ ثم اوجد قيمة c

الحل : $f'(c) = 3c^2$

الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[-3, 1]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(-3, 1)$ لانها حدودية

إذا الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

إذا يوجد على الاقل عدد مثل c في الفترة $(-3, 1)$ ويحقق

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)}$$

$$3c^2 = \frac{2 - (-26)}{4}$$

$$3c^2 = 7$$

$$c^2 = \frac{7}{3}$$

$$c = +\sqrt{\frac{7}{3}} \notin (-3, 1)$$

$$c = -\sqrt{\frac{7}{3}} \in (-3, 1) \checkmark$$

(1) إذا كانت $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ و $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

أوجد قيمة c التي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$3c^2 - 4c + 1 = \frac{2 - 0}{2 - 0}$$

$$3c^2 - 4c + 1 = 1$$

$$3c^2 - 4c = 0$$

$$c(3c - 4) = 0$$

$$c = 0 \notin (0, 2) \quad \times$$

$$c = \frac{4}{3} \in (0, 2) \quad \checkmark$$

(2) إذا كانت $f(x) = x^3 + x^2$ و $f'(x) = 3x^2 + 2x$

أوجد قيمة c التي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 1]$

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

$$3c^2 + 2c = \frac{2}{1}$$

$$3c^2 + 2c = 2$$

$$3c^2 + 2c - 2 = 0$$

$$c = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \in (0, 1) \quad \checkmark$$

$$c = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \notin (0, 1) \quad \times$$

(3) إذا كانت $f(x) = x^3 + x^2$ و $f'(x) = 3x^2 + 2x$

أوجد قيمة c التي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-1, 1]$

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$$

$$3c^2 + 2c = \frac{2}{2}$$

$$3c^2 + 2c = 1$$

$$3c^2 + 2c - 1 = 0$$

$$c = -1 \notin (-1, 1) \quad \times$$

$$\checkmark c = \frac{1}{3} \in (-1, 1) \quad \checkmark$$

(1) إذا كانت $f(x) = 4 - x + \sin x$ حيث x تقع في الفترة $[-\pi, \pi]$ أوجد قيمة C التي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

$$f'(x) = -1 + \cos x$$

$$f'(C) = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi - (-\pi)}$$

$$-1 + \cos C = \frac{4 - \pi - (4 + \pi)}{2\pi}$$

$$-1 + \cos C = -1$$

$$\cos C = 0$$

$$C < \frac{\pi}{2} \quad \checkmark \quad \left. \begin{array}{l} \text{الفرضية} \\ \text{في الفترة} \end{array} \right\}$$

$$C = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$$

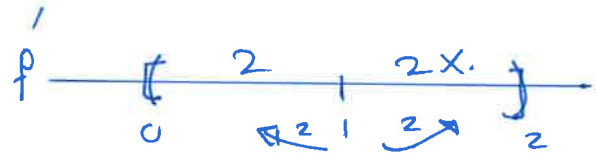
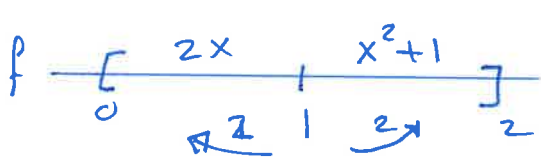
$$C = \frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi)$$

$$C = -\frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi)$$

فتمت

(2) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ حيث x تقع في الفترة $[0, 2]$

بين ان الدالة f تحقق فرضيات نظرية القيمة المتوسطة على هذه الفترة ثم اوجد قيمة C



الدالة متصلة على $[0, 2]$ وقابلة للاشتقاق على $(0, 2)$

∴ الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة.

∴ يوجد $C \in (0, 2)$ التي تحقق

$$f'(C) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$f'(C) = \frac{5 - 0}{2 - 0}$$

$$f'(C) = 5/2$$

$$2C = 5/2$$

$$\Rightarrow C = 5/4 \in (0, 2)$$

$$2 = 5/2$$

لا يوجد حل

(1) إذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + 2x + 5$ تحقق شروط نظرية نظرية القيمة المتوسطة على الفترة

$[1, b]$ حيث $c = 3$ فاوجد قيمة b

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(1)}{b - 1}$$

$$2c + 2 = \frac{b^2 + 2b + 5 - 8}{b - 1}$$

$$8 = \frac{b^2 + 2b - 3}{b - 1}$$

$$8 = \frac{(b-1)(b+3)}{b-1} \quad b \neq 1$$

$$8 = b + 3$$

$$b = 5$$

(2) إذا كانت $f(x) = x^2 + ax$ تحقق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 3]$

وكان $f'(c) = 1$ حيث $c \in (0, 3)$

(أ) اوجد قيمة الثابت a

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$$

$$1 = \frac{9 + 3a - 0}{3}$$

$$3 = 9 + 3a$$

$$3a = -6 \Rightarrow a = -2$$

(ب) اوجد قيمة الثابت c

$$f'(c) = 1$$

$$2c + a = 1$$

$$2c - 2 = 1$$

$$2c = 3$$

$$c = 3/2$$

(1) بين ان الدالة $f(x) = x^3 - x^2$ تحقق فرضيات نظرية رول على الفترة $[0,1]$ ثم اوجد قيمة c

الحل : الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على $(0,1)$ لانها حدودية

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow f(0) = f(1)$$

إذا الدالة تحقق شروط نظرية رول

إذا يوجد على الاقل عدد مثل c في الفترة $(0,1)$ ويحقق

$$f'(c) = 0$$

$$3c^2 - 2c = 0$$

$$c = 0, \quad c = \frac{2}{3}$$

$$c = 0 \notin (0,1) \quad \times$$

$$c = \frac{2}{3} \in (0,1) \quad \checkmark$$

(2) إذا كانت $f(x) = \sin x$ فاوجد قيمة (قيم) c التي تحقق نظرية رول على الفترة $[-\pi, 0]$ $f'(x) = \cos x$.

$$f'(c) = 0$$

$$\cos c = 0$$

$$c < \frac{\pi}{2}$$

لغرف
بـ
π:

$$c = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$c = \frac{\pi}{2} \notin (-\pi, 0) \quad \times$$

$$c = -\frac{\pi}{2} \in (-\pi, 0) \quad \checkmark$$

(3) إذا كانت $f(x) = \sin x + \cos x$ فاوجد قيمة (قيم) c التي تحقق نظرية رول على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ $f'(x) = \cos x - \sin x$.

$$f'(c) = 0$$

$$\cos c - \sin c = 0$$

$$-\sin c = -\cos c$$

$$\tan c = 1$$

سابقة
cos c

$$c < \frac{\pi}{4} \quad Q_1 \rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

$$Q_4 \rightarrow c = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$c = \frac{\pi}{4}$$

منطقة

(4) إذا كانت: $f(x) = x + \frac{4}{x}$ اوجد قيمة c التي تحقق نظرية رول على الفترة $[1,4]$

$$f'(c) = 0$$

$$1 - \frac{4}{c^2} = 0$$

$$1 = \frac{4}{c^2}$$

$$c^2 = 4$$

$$c = -2, \quad c = 2$$

$$c = 2$$

منطقة

نظرية (العلاقة بين عدد جذور الدالة وعدد جذور مشتقتها)

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a, b) ويوجد n من الجذور للدالة $f(x)$ في الفترة $[a, b]$ فإن للدالة $f'(x)$ على الأقل $n-1$ من الجذور تنتمي إلى الفترة $[a, b]$ فمثلاً: إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a, b) ويوجد جذرين للدالة $f(x)$ في الفترة $[a, b]$ فإن للدالة $f'(x)$ على الأقل جذر واحد ينتمي إلى الفترة

ملاحظة مهمة: إذا لم يكن للدالة $f'(x)$ أي جذور فإن الدالة $f(x)$ لها على الأكثر جذر واحد فقط وإذا كان للدالة $f'(x)$ جذر واحد فإن للدالة $f(x)$ على الأكثر جذرين وهكذا...

(1) اثبت ان للدالة $f(x) = x^5 + 4x - 1$ لها جذر واحد فقط

Ⓐ نبحث عن عددين متتاليين لهم هوية مختلفة في البرهان

$$f(0) = -1, f(1) = 4$$

الدالة $f(x)$ متصلة على $(0, 1)$

نحقق نظرية القيمة الوسطية (الاتصال)

يوجد للدالة جذر واحد على الأقل في الفترة $(0, 1)$

$$f'(x) = 5x^4 + 4$$

لـ $f'(x)$ ليس لها جذور حقيقية لأن $f'(x) > 0$ لكل x

من الدالة $f(x)$ لها جذر واحد على الأكثر (نظرية القيمة الوسطية)

من Ⓐ و Ⓑ للدالة $f(x)$ جذر واحد فقط

$$f'(x) = x^4 + 6x^2 - 1$$

(2) اوجد عدد حلول المعادلة $x^4 + 6x^2 - 1 = 0$

Ⓐ بين ان للدالة جذرين على الأقل (نظرية القيمة الوسطية)

Ⓑ بين ان المستقيمة $f'(x)$ لها جذر واحد فقط

فيكون للدالة $f(x)$ جذرين على الأكثر

من Ⓐ و Ⓑ للدالة $f(x)$ جذرين فقط

اثبات متباينات باستخدام نظرية القيمة المتوسطة

(1) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $|\sin a| \leq |a|$ لكل a

الحل : اذا كانت $a = 0$ فان المتباينة صحيحة بالتعويض المباشر بالمتباينة

اذا كانت $a \neq 0$ لتكن $f(x) = \sin x$ على الفترة المغلقة التي حدودها $0, a$

الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة لانها دالة مثلثية

اذ الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

اذا يوجد على الاقل عدد مثل c في الفترة المفتوحة التي حدودها $0, a$ ويحقق

$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = f'(c)$$

$$\left| \frac{\sin a - 0}{a} \right| = |\cos c| \leq 1$$

$$\frac{\sin a - 0}{a - 0} = \cos c$$

$$\frac{|\sin a|}{|a|} \leq 1$$

$$\frac{\sin a}{a} = \cos c$$

$$|\sin a| \leq |a| \quad \#$$

(2) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $|\sin u - \sin v| \leq |u - v|$ لكل u, v

اكن : اذا كانت $u = v$ فان المتباينة صحيحة بالتعويض المباشر.

نفرض الدالة $g(x) = \sin x$ على الفترة التي حدودها u, v

الدالة $g(x)$ متصلة وقابلة للاشتقاق .

∴ تحقق نظرية القيمة المتوسطة

∴ يوجد على الاقل c ينتمي الى الفترة المفتوحة وتحقق

$$\frac{g(u) - g(v)}{u - v} = g'(c)$$

$$\frac{|\sin u - \sin v|}{|u - v|} = |\cos c| \leq 1$$

$$\frac{\sin u - \sin v}{u - v} = \cos c$$

$$|\sin u - \sin v| \leq |u - v|$$

#

(1) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $|\cos x - 1| \leq |x|$ لكل x

لنكن الدالة $g(u) = \cos u$ على الفترة التي حدودها $0, x$
الدالة $g(u)$ متصلة وقابلة للاشتقاق فهي تحقّق نظرية

القيمت المتوسطة .
∴ يوجد c على الأقل في الفترة بحقّة

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(c) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\cos x - 1}{x} = -\sin c \\ \frac{|\cos x - 1|}{|x|} = |-\sin c| \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \frac{|\cos x - 1|}{|x|} \leq 1 \\ \frac{|\cos x - 1|}{|x|} \leq 1 \end{array} \right|$$

(2) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $|\tan^{-1} a| < |a|$ لكل $a \neq 0$ $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

لنكن $g(x) = \tan^{-1} x$ على الفترة التي حدودها $0, a$
الدالة $g(x)$ متصلة وقابلة للاشتقاق فهي تحقّق نظرية القيمي المتوسطة .
∴ يوجد c على الأقل في الفترة ، وتحقّق

$$\frac{g(a) - g(0)}{a - 0} = g'(c) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\tan^{-1} a}{a} = \frac{1}{c^2 + 1} \\ \frac{|\tan^{-1} a|}{|a|} < 1 \end{array} \right|$$

$$\frac{\tan^{-1} a - 0}{a - 0} = \frac{1}{c^2 + 1} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{|\tan^{-1} a|}{|a|} = \left| \frac{1}{c^2 + 1} \right| \\ |\tan^{-1} a| < |a| \neq \end{array} \right|$$

(3) استخدم نظرية القيمة المتوسطة لاثبات ان $|x| < |\sin^{-1} x|$ لكل $0 < |x| < 1$

لنكن $g(u) = \sin^{-1} u$ على الفترة التي حدودها $0, x$
الدالة $g(u)$ متصلة وقابلة للاشتقاق فهي تحقّق نظرية القيمي المتوسطة .

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(c) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\sin^{-1} x}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} > 1 \\ |\sin^{-1} x| > |x| \end{array} \right|$$

$$\frac{\sin^{-1} x - 0}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{|\sin^{-1} x|}{|x|} > 1 \\ |\sin^{-1} x| > |x| \end{array} \right|$$

اثبات نظريات باستخدام نظرية القيمة المتوسطة

(1) اذا كانت $f'(x) = 0$ لكل قيم x في الفترة المفتوحة I فانبت ان $f(x)$ دالة ثابتة على الفترة I

الاثبات: لنكلم $a, b \in I$ حيث $a < b$

الدالة f متصلة وقابلة للاشتقاق على الفترة I حيث

قابلة للاشتقاق على (a, b)

نحقق نظرية لافيه المتوسطة، $\therefore$ يوجد c في الفترة I بحيث

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f(b) - f(a) = 0$$

$$f(b) = f(a)$$

$\therefore$ الدالة $f(x)$ دالة ثابتة

(2) اذا كانت $f'(x) = g'(x)$ لكل قيم x في الفترة المفتوحة I فانبت ان $g(x) = f(x) + c$

على الفترة I

الاثبات: لنكلم الدالة $h(x) = g(x) - f(x)$

الدالة $h(x)$ متصلة وقابلة للاشتقاق حيث

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$$

$\therefore$ الدالة $h'(x)$ دالة صفرية

اي ان $h(x) = c$

$$g(x) - f(x) = c \Rightarrow g(x) = f(x) + c \quad \#$$

(3) اذا كانت $f(x), g(x)$ دوال متصلة على $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a, b) حيث

$$f(a) = g(a), f(b) = g(b)$$

الاثبات: لنكلم الدالة $h(x) = f(x) - g(x)$ على الفترة $[a, b]$

الدالة $h(x)$ متصلة وقابلة للاشتقاق حيث

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - g(b) = 0$$

$\therefore$ يوجد c في الفترة المفتوحة حيث

$$h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = g'(c)$$

$\therefore$ اعم محاسن مشتركة عند $x = c$

(1) إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a, b) حيث $f(a) = a, f(b) = b$ فاثبت انه يوجد عدد مثل c على الاقل تنتمي الى (a, b) بحيث $f'(c) = 1$

الاثبات: بما ان f دالة متصلة وقابلة للاشتقاق
على الفترة (a, b) فان f تحقق نظرية لافيرمييه

∴ يوجد c تنتمي الى الفترة حيث

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{b - a}{b - a}$$

$$f'(c) = 1 \quad \#$$

(2) إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a, b) ويوجد جذرين للدالة $f(x)$ في الفترة $[a, b]$ فاثبت ان للدالة $f'(x)$ على الاقل جذر واحد ينتمي الى الفترة (a, b)

الاثبات: لنفرض r_1, r_2 جذور لدالة $f(x)$ في الفترة $[a, b]$

الدالة f متصلة وقابلة للاشتقاق على الفترة (r_1, r_2)

$$f(r_1) = 0$$

$$f(r_2) = 0$$

∴ f تحقق نظرية رول على الفترة $[r_1, r_2]$

∴ يوجد c تنتمي الى الفترة (r_1, r_2) حيث

$$f'(c) = 0$$

∴ يوجد للدالة f' جذر على الاقل في الفترة

تكون الدالة $f(x)$ دالة متزايدة اذا كانت $f(b) > f(a)$ لكل $b > a$

(1) اذا كانت $f'(x) > 0$ لكل قيم x فاثبت ان الدالة $f(x)$ متزايدة

(الدالة التي مشتقتها موجبة تكون متزايدة)

الاثبات: لنأخذ $a < b$

الدالة $f(x)$ متصلة وقابلة للاشتقاق على الفترة (a, b)

نحسب نظرية لافرانك في المتوسط.

يوجد c تنتمي الى الفترة (a, b) حيث

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) > 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$

$$f(b) - f(a) > 0$$

$$f(b) > f(a)$$

نكون دالة متزايدة

(2) بين ان الدالة $f(x) = \tan^{-1} x$ متزايدة على R

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

لكل قيم x

$$f'(x) > 0$$

فان الدالة f

متزايدة على R

(3) بين ان الدالة $f(x) = \ln(x-3)$ متزايدة على مجالها

$$f'(x) = \frac{1}{x-3}$$

لكل $x > 3$ فان

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة متزايدة على مجالها

مجال الدالة

$$x-3 > 0$$

$$x > 3$$

تكون الدالة $f(x)$ دالة متناقصة إذا كانت $f(b) < f(a)$ لكل $b > a$

(1) إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل قيم x فاثبت ان الدالة $f(x)$ متناقصة

(الدالة التي مشتقتها سالبة تكون متناقصة)

اللازيات : لنفرض $a < b$

والدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق في (a, b)

نحقق نظرية لافيريه بالمتوسط .

نوجد c تنتمي الى الفترة ونحقق

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) < 0$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$$

$$f(b) - f(a) < 0$$

$$f(b) < f(a)$$

نجد ان f متناقصة .

(2) بين ان الدالة $f(x) = -x^3 + 1$ متناقصة على R

$$f'(x) = -3x^2$$

$$f'(x) < 0$$

بما ان $f'(x) < 0$ لكل قيم x

فان f متناقصة

على R

(3) بين ان الدالة $f(x) = 3 - x + e^{-x}$ متناقصة على R

$$f'(x) = -1 + e^{-x}(-1)$$

$$= -(1 + e^{-x})$$

$$= -(1 + \frac{1}{e^x}) < 0$$

نجد ان $f(x)$ متناقصة على R

جدول قواعد الاشتقاق الخاصة والعامة

#	الدالة	المشتقة	#	الدالة	المشتقة
1	c	0	15	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
2	x^n	nx^{n-1}	16	$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
3	$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$	17	$\sin x$	$\cos x$
4	$c \times f(x)$	$c \times f'(x)$	18	$\cos x$	$-\sin x$
5	$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$	19	$\tan x$	$\sec^2 x$
6	$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	20	$\cot x$	$-\csc^2 x$
7	$\frac{c}{g}$	$\frac{-c \times g'}{g^2}$	21	$\sec x$	$\sec x \tan x$
8	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	22	$\csc x$	$-\csc x \cot x$
9	$(f(x))^n$	$n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$	23	$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$(f \circ g)(x)$	$f'(g(x)) \times g'(x)$	24	$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$y = f(u)$ $u = g(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$	25	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
12	$g = f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(g(x))}$	26	$\cot^{-1} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
13	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \times f'(x) \times \ln a$	27	$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$
14	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \times f'(x)$	28	$\csc^{-1} x$	$\frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}$

اجابات اسئلة درس الحدود
الوحدة الثالثة

① $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+2h)}{3h}$ المادة لترتيب

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(f(x+2h) - f(x))}{3h}$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{h}$$

$$= -\frac{2}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{2}{3} f'(x) \quad (15)$$

② $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{\sqrt{x} - 2} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$ مرافق

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \cdot \sqrt{x} + 2$$

$$= f'(4) \cdot [\sqrt{4} + 2]$$

$$= -8(4)$$

$$= -32$$

(15)

③ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

(A)

المسألة الأولى

سابع اجابة اسئلة درس الأول

$$④ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)^2 - 16}{x^2 - 4} \rightarrow 16 = 4^2 = [f(2)]^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[f(x)]^2 - [f(2)]^2}{x^2 - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \cdot \frac{f(x) + f(2)}{x + 2}$$

$$= f'(2) \cdot \frac{f(2) + f(2)}{2 + 2}$$

$$= 5 \cdot \frac{4 + 4}{4} = 10 \quad (C)$$

⑤

يوجد أكثر من طريقة لكل

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^2 h + 3(3)h^2 + f(3) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9h + 9h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(9 + 9h)}{h}$$

$$= 9 \quad (B)$$

$$⑥ \quad f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2 - 11}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6 \quad (C)$$

لوجية لينة

اجابات اسئلة درس الثاني

① $g(0) \cdot g'(-2)$ الميل

$= -1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ (C)

② الانتقال بين عندا لدرج غير قابلة الاشتقاق هي

$x = 0$ نقطة انفصال

$x = 2$ ركن

الفتره

$(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$

او $R \setminus \{0, 2\}$ (B)

③ معدل التغير (الميل) عند $x=5$ هو

$m = \frac{-3}{-1} = 3$ (C)

④ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4) = m = \frac{-2}{-2} = 1$ (C)

⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0$

من النظرية

$x^3 \sin \frac{1}{x}$ 0 0 $x^3 \sin \frac{1}{x}$

$x=0$ لدرج متناهية عند

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$

(A)

$x=0$ لدرج متناهية، قابلة الاشتقاق عند

⑥ a) $f(x) = |x-2|^2 = (x-2)^2$ كثيرة حدود

b) $g(x) = x^2 - 4$ كثيرة حدود

c)
$$p(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ 4x-1 & x < 2 \end{cases}$$

غير قابلة عند $x=2$ فهي غير قابلة للاشتقاق

عند $x=2$

⑦

d) $h(x) = \frac{1}{x-3}$ دالة نسبية

غير قابلة للاشتقاق عند $x=3$ لأنها مقام فقط ($x=3$)

⑦ $f'(3) = m_t \approx \frac{5}{6} \approx 0.8$ (B)

⑧ الترتيب حسب الميل

C , B , A , D.

⑨

⑨ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=1$

لا محاسن، رأيي

قدره قابلية الاشتقاق هي

(A) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

تابع اجایات اسئلہ پر دیکھ لیتا ہے

لڑکھانہ لکھو

$$\begin{aligned} \textcircled{10} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \\ &= f'(1) = m = \frac{-2}{1} = -2 \quad \textcircled{C} \end{aligned}$$

11

11

الاجابہ

12

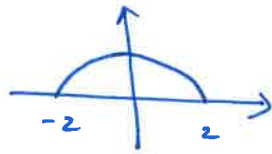
نکھانہ عند $x=0$

12

الاجابہ

13

$f(x)$



(1) $f(x)$ کا محاس افقی عند $x=0$ لزلک $f'(x)$ کا قطع مع محور x عند $x=0$.

(2) $f(x)$ متزایدہ مع $(-2, 0)$ خان $f'(x)$ تاون فوق محور x مع هنہ لفرہ

(3) $f(x)$ متافصہ مع $(0, 2)$ خان $f'(x)$ تاون تحت محور x مع هنہ لفرہ

(4) الدالہ $f(x)$ کا محاس رأسی عند $x=3$

(B) خان لدرہ $f'(x)$ کا خط تقاب رأسی عند $x=3$

(14) ① الدالة $f(x)$ متناقصة على $(0, 2)$ لذلك فان $f'(x)$ تكون تحت محور x في نفس الفترة .

② الدالة $f(x)$ متزايدة على $(2, 4)$ لذلك فان $f'(x)$ تكون فوق محور x في نفس الفترة .

الاجابة ⑤

(15) ① الدالة $f(x)$ لها مماس افقي عند $x=3$ لذلك فان

للمستقيم مماس مع محور x عند $x=3$.

② الدالة $f(x)$ متزايدة على الفترة $(0, 2)$ لذلك

فان $f'(x)$ تكون فوق محور x وتكون خط افقي .

الاجابة ⑤

(16) ① الدالة $f'(x)$ من درجة الثانية فان

الدالة الاصل تكون من درجة الثالثة .

الاجابة ⑤

تابع اجابات اسئلة ادرس الثاني الوحدة الثالثة .

(17) ① للدالة $f(x)$ خط تقارب افقي فان للدالة $f'(x)$

خط تقارب افقي معادلة $y = 0$

② الدالة $f(x)$ متناقصة على $(-\infty, 0)$ فان $f'(x)$

تكون تحت محور x على نفس الفترة

الاجابة (A)

تكميم f

ترتيب f

خط f''

الدرجة

الدرجة

الدرجة

الدرجة

الدرجة

الدرجة

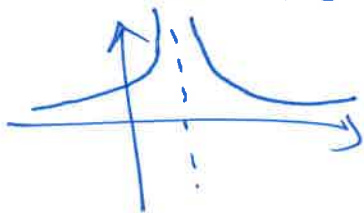
الاجابة (B)

(19) ① للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي معادلة $x = 1$

فان للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي معادلة $x = 1$

② الدالة متزايدة دائماً لذلك $f'(x)$ تكون فوق محور x

الاجابة تتكون رسم $f'(x)$ على الشكل



③ بما ان $f'(x)$ تكون متزايدة ثم متناقصة لذلك تكون

$f''(x)$ على الشكل الاجابة (B)

(20) ① للدالة $f(x)$ مماس أفقي عند $x=3$

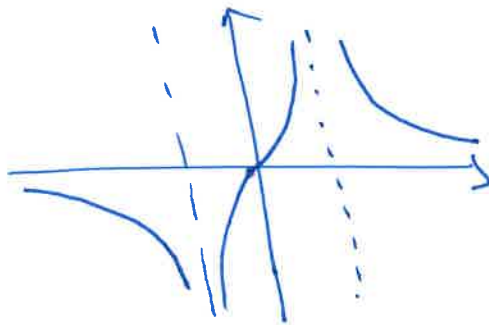
② الدالة $f(x)$ متزايدة ثم متناقصة ثم متزايدة

الإجابة (A)

(21) ① للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي معادلة $x=1, x=-1$

② للدالة $f(x)$ خط تقارب أفقي فان للدالة $f'(x)$ خط تقارب أفقي معادلة $y=0$

③ الدالة $f(x)$ متناقصة ثم متزايدة لذلك فان رسم $f'(x)$ يكون



④ رسم $f''(x)$

تقريباً ميل الدالة $f'(x)$ عند $x=0$ يساوي 2 أو

عدد موجب لذلك يكون رسم $f''(x)$

(C)

(22) هذا من الأسئلة الصعبة وهو من خارج الكتاب

الإجابة (B)

(23) ① الدرم $f(x)$ من درجة الرابعة لذلك فإن

$f'(x)$ من درجته الثالثة، $f''(x)$ من درجته الثانية

② الدرم $f(x)$ متناقص ثم متزايد

الإجابة (A)

(24) ① للدالة $f'(x)$ مقطع عند $x=1$ و $x=3$. لذلك

فإن $f(x)$ لها مماس أفقي عند هذه النقاط

الإجابة (C)

(25) ① المستقاة الثانية من درجة الثانية لذلك إلا أنه الأصل

$f(x)$ من درجة الرابعة

② المستقاة الثانية فوق محور x ثم تحت محور x ثم فوق

لذلك الدالة $f'(x)$ تكون متزايدة ثم متناقصة ثم متزايدة

فتكون كما يلي  وتكون للدالة الأصل بداية متناقصة

لذلك الإجابة (D)

اجابات ۱. $\frac{d}{dx} \ln x$ مشتق

۲. $\frac{d}{dx} e^{\ln x}$ مشتق

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{d}{dx} [e^{-\ln x}] &= \frac{d}{dx} [e^{\ln x^{-1}}] = \frac{d}{dx} x^{-1} \\ &= \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{x^2} \quad \textcircled{D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{\sqrt{x} - x}{x^2} \right] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{x}{x^2} \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[x^{-3/2} - \frac{1}{x} \right] \\ &= -\frac{3}{2} x^{-5/2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-3}{2\sqrt{x^5}} + \frac{1}{x^2} \quad \textcircled{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad f(x) &= \frac{6x}{\sqrt{x} + 1} \\ f'(x) &= \frac{6(\sqrt{x} + 1) - 6x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} \\ &= \frac{6\sqrt{x} + 6 - 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 1)^2} \quad \textcircled{A} \end{aligned}$$

الموجة الثانية

تابع جابان اشارة اولى

$$(4) \quad f(x) = \frac{6x-2}{x^2 + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{(6)(x^2 + \sqrt{x}) - (6x-2)(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x^2 + \sqrt{x})^2}$$

بدون تبسيط

$$f'(1) = \frac{(6)(2) - (4)(2 + \frac{1}{2})}{2^2} = \frac{1}{2} \quad (A)$$

$$(5) \quad f(x) = [2x + 0.7]$$

$$f'(2) = 0$$

(C)

تابع تعريف
لكر

$$(6) \quad f(x) = 3x - [x]$$

$$f'(\frac{4}{3}) = 3 - 0 = 3 \quad (C)$$

$$(7) \quad f(x) = (|x|)^2 = x^2$$

$$f'(x) = 2x \rightarrow f'(0) = 0 \quad (A)$$

$$(8) \quad f(x) = x + |x|$$

$$|x| \quad \begin{array}{c} -x \quad x \\ \hline 0 \end{array}$$

$f'(0)$ غير محدد

(D)

$$f(x) = x + |x| \quad \begin{array}{c} 0 \quad 2x \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f'(x) \quad \begin{array}{c} 0 \quad 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

الدرجة الأولى

تابع الاستدلال

(9)

$$\frac{3x}{x^2+1}$$

(10) الدالة $f(x)$ غير متصلة عند $x=1$ فهي غير قابلة للاشتقاق

(11)

$$f(x) = \begin{cases} 3x & x > 0 \\ 3 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{3}{0} \quad \frac{3x}{\star}$$

(12)

الدالة متصلة عند $x=1$

(13)

$$f(x) = x^5 - 2x$$

$$f'(x) = 5x^4 - 2$$

$$f''(x) = 20x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1}$$

$$= f''(1) = 20$$

(B)

(14)

$$f(x) = x^2 - |x|$$

عند $x < 0$ فإن

$$f(x) = x^2 + x$$

$$f'(x) = 2x + 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= f'(-2) = -3$$

(A)

(15)

$$1 = 3(1) + k$$

$$k = -2$$

(D)

$$\frac{x^3}{3x+k}$$

كاتب اجابات اسئلة درس لانه

لوصف لثانة

$$(14) \quad f'(3) = 22$$

$$3(3)^2 - a = 22.$$

$$a = 5 \quad (D)$$

$$f(x) = x^3 - ax$$

$$f'(x) = 3x^2 - a.$$

$$(15) \quad g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f'(x)$$

$$= 4x^3 - 2.$$

$$g'(x) = 12x^2.$$

$$g'(-1) = 12 \quad (B)$$

$$(16) \quad g(x) = \frac{d}{dx} |x|.$$

$$|x| \quad \begin{array}{c} -x \quad x \\ | \\ 0 \end{array}$$

$$g(x) \quad \begin{array}{c} -1 \quad 1 \\ | \\ 0 \end{array}$$

نوع انفصال لانه $g(x)$ عند $x=0$ هو قفزة

(B)

$$(17) \quad g(x) = x|x|$$

الدالة متصلة وقابلة

للانحداف عند

$$x=0 \quad (A)$$

$$|x| \quad \begin{array}{c} -x \quad x \\ | \\ 0 \end{array}$$

$$g(x) = x|x| \quad \begin{array}{c} -x^2 \quad x^2 \\ | \\ 0 \end{array}$$

$$g'(x) \quad \begin{array}{c} -2x \quad 2x \\ | \\ 0 \end{array}$$

تابع اجابات اسئلة المرسى الثاني .
الوحدة الثانية

(18) $g(x) = |x| - [x]$.

$$g(1) = |1| - [1] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = |1| - [1^-] = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = |1| - [1^+] = 1 - 1 = 0$$

الدالة غير متصلة عند $x=1$

الاجابة (C)

(19) الدالة التي لها مماس رأسي عند $x=0$

تكون متصلة و مشتقها غير موجودة (ملاحظة)

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

$$y' = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3 x^{2/3}} \quad (D)$$

$$f'(0^+) = \infty$$

$$f'(0^-) = \infty$$

تابع اجهادات اشارة ادرس لسانه .

بوصرفه لسانه

$$(20) \quad f(x) = |x^2 - 4x|$$

$$f(x) \quad \frac{x^2 - 4x}{-} \quad \frac{-(x^2 - 4x)}{-} \quad \frac{x^2 - 4x}{-}$$

$$f'(x) \quad \frac{2x - 4}{-} \quad \frac{-(2x - 4)}{-} \quad \frac{2x - 4}{-}$$

انتظام اتي عندها اشارة غير قابلة للاختلاف هي 0, 4

الفدات $(-\infty, 0), (0, 4), (4, \infty)$

(B)

$$(21) \quad f(x) = x^p$$

$$f'(x) = p x^{p-1}$$

$$p-1 \geq 0 \Rightarrow p \geq 1 \quad (A)$$

$$(22) \quad f(x) \times g(x) = f(x) + 2g(x)$$

$$g(1) = 2$$

$$f(1) \times g(1) = f(1) + 2g(1)$$

$$g'(1) = 3$$

$$f(1) \times 2 = f(1) + 2(2)$$

$$f(1) \text{ نحصل } f'(1)$$

$$\Rightarrow f(1) = 4$$

$$f'(1) \text{ لا نعلم}$$

نستعمل التفاضل

$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = f'(x) + 2g'(x)$$

$$f'(1) \cdot g(1) + f(1) \cdot g'(1) = f'(1) + 2g'(1)$$

$$f'(1) \times 2 + (4)(3) = f'(1) + 2(3)$$

$$\Rightarrow f'(1) = -6 \quad (B)$$

(23)

$$f \frac{ax+b}{x^2-3x}$$

$$b=0$$

(A)

$$f \frac{a}{2x-3}$$

$$a=-3$$

(24)

$$h(x) = \frac{x^2}{f(x)}$$

$$f(2) = 1, f'(2) = -2$$

$$h'(x) = \frac{2x f(x) - x^2 f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$h'(2) = \frac{2(2) f(2) - 2^2 f'(2)}{(f(2))^2}$$

$$= \frac{4(1) - 4(-2)}{1^2} = 12 \quad (A)$$

①

منه كما هو $f'(a)$

منه المماس هو $\frac{-1}{f'(a)}$

①

②

منه كما هو $m_t = f'(3) = -1$

والنقطة $(3, 2)$

منه المماس هو $m_{\perp} = \frac{-1}{-1} = 1$

معادله كما هو

$$y - 2 = 1(x - 3)$$

$$y = x - 1 \quad \text{②}$$

③

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = 2x$$

$$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

①

④

$$y' = 6x^2 - k$$

$$y'(-1) = 0$$

$$6(-1)^2 - k = 0$$

$$6 - k = 0 \rightarrow k = 6 \quad \text{①}$$

(5)

معادله العمودي $y = 3x - 5$

ميل العمودي $m_{\perp} = 3$

ميل المماس $f'(2) = -\frac{1}{3}$ فان $-\frac{1}{3}$

(6)

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$m = f'(0) = -2$$

$$m = -2 \quad (0, -1) \quad \text{P(0)}$$

$$y - (-1) = -2(x - 0)$$

$$y = -2x - 1$$

(A)

(7)

$$f(x) = 2x^2 + ax + b$$

$$f'(x) = 4x + a$$

$$f'(-1) = m_t = \tan 45^\circ$$

$$4(-1) + a = 1 \rightarrow a = 5$$

نقطة التقاطع $(-1, 3)$ في المماس

$$f(x) = 2x^2 + 5x + b$$

$$3 = 2(-1)^2 + 5(-1) + b$$

$$\Rightarrow b = 6$$

(A)

(8)

$$y = x$$

$$m_1 = 1$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$m_2 = -1$$

حاصل ضرب الميكان هو 1 - لذلك الميكان

متعامدان اي ان الزاوية 90°

(B)

(9)

$$f(x) = x^2 + 4x - 1$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

$$f'(x) = 0$$

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 1 = -5$$

$$\Rightarrow y = -5 \quad (D)$$

(10)

★

ميد المماس يادي مي نصف عند نقطة لها س

$$f'(x) = y'$$

$$4x - 1 = 3 \Rightarrow x = 1$$

نقطة لها س هي (1, f(1))

$$(1, 7)$$

وهي تحقق معادلة المماس

$$7 = 3(1) + a \Rightarrow a = 4 \quad (B)$$

سوال ۱۱

تابع $f(x) = x^2 - 2$ را در $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ مماس را بیابید

(11)

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$m = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$\tan \theta = m = \sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{C}$$

(12)

$$h(x) = x^2 f(x) \quad \rightarrow \quad h(2) = 2^2 f(2) = 4$$

$$h'(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x)$$

$$\begin{aligned} m = h'(2) &= 2(2) \cdot f(2) + 2^2 f'(2) \\ &= 4(1) + 4(-3) = -8 \end{aligned}$$

نقطه $(2, h(2))$

$$(2, 4)$$

$$y - 4 = -8(x - 2)$$

$$y = -8x + 20 \quad \text{C}$$

(13)

$$m_t = \tan 135^\circ = -1$$

$$y - 3 = -1(x - 2)$$

$$y = -x + 5 \quad \text{C}$$

$$\begin{aligned} (14) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{-3(x-2)} &= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \\ &= -\frac{1}{3} f'(2) \\ &= -\frac{1}{3} \tan 45^\circ \\ &= -\frac{1}{3} (1) = -\frac{1}{3} \quad (C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (15) \quad f'(x) &= m_t = \tan 45^\circ \\ 2x - 5 &= 1 \\ x &= 3 \quad (A) \end{aligned}$$

$$(16) \quad y = 2 \text{ افقی}$$

$$(B) \quad x = 1 \text{ عمودی}$$

$$(17) \quad p(x) = x^2$$

$$p'(x) = 2x$$

$$p'(0) = 0 \quad (C) \text{ افقی}$$

$$(18) \quad v_{avg} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 48}{2 - 1} = -48 \text{ m/s.}$$

(A)

(19) $S'(t) = 60 - 10t$

$S'(t) = 0$ زمن اقصى ارتفاع

$60 - 10t = 0$

$t = 6$

$S(6) = 60(6) - 5(6)^2 = 180 \text{ m}$. (B)

(20) $s(t) = 60t - 5t^2$

$v(t) = S'(t) = 60 - 10t \rightarrow S'(t) = 0 \rightarrow t = 6$

$a(t) = S''(t) = -10$

t	0		6		12
v		+	+	+	-
a		-	-	-	-

زمن
المرحلة

للاعلى
تباطئ

للا أسفل
تسارع

(B) $(6, 12)$ الفترة

(21) $S(t) = 60t - 5t^2 \rightarrow v(t) = 60 - 10t$

$100 = 60t - 5t^2$

$5t^2 - 60t + 100 = 0$

$t^2 - 12t + 20 = 0$

$t = 2, t = 10$

زمن الوصول
الى ارتفاع 100

$v(2) = 40, v(10) = -40$

(A) السرعة هي 40

$$(22) \quad v(t) = \frac{3}{2} \sqrt{t} + 6.$$

$$12 = \frac{3}{2} \sqrt{t} + 6$$

$$6 = \frac{3}{2} \sqrt{t}$$

$$4 = \sqrt{t} \rightarrow t = 16 \text{ s.}$$

$$a(t) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

$$a(16) = \frac{3}{4\sqrt{16}} = \frac{3}{16} \text{ m/s}^2 \quad (C)$$

(23)

السؤال منه ما راجع الكتاب (موجب)

الاجابة (B)

(24)

$$Q(0) = 60000$$

$$P(0) = 15$$

$$Q'(0) = 3000$$

$$P'(0) = -1$$

$$R(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

$$R'(x) = P'(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot Q'(x)$$

$$R'(0) = P'(0) \cdot Q(0) + P(0) \cdot Q'(0)$$

$$= -1 \cdot 60000 + 15 \cdot 3000$$

$$= -15000$$

$$\text{النسبة المئوية} = \frac{R'(0)}{R(0)} \times 100\% = \frac{-15000}{60000(15)} \times 100\%$$

(D)

$$= -1.66\%$$

(25)

$$Q(0) = 25000$$

$$P(0) = 20$$

$$Q'(0) = -800$$

$$P'(0) = 2$$

$$R(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

$$R'(0) = P'(0) \cdot Q(0) + P(0) \cdot Q'(0)$$

$$= 2(25000) + 20(-800)$$

$$= 34000$$

(A)

(26)

معدل تغییر هو طویل

$$m = \frac{2.8 - 2.1}{2005 - 1995} = \frac{0.7}{10} = 0.07$$

(C)

(27)

$$Q(0) = 20000$$

$$P(0) = 20$$

$$Q'(0) = 2000$$

$$P'(0) = 1.25$$

$$R'(0) = P'(0) \cdot Q(0) + P(0) \cdot Q'(0)$$

$$= 1.25 \cdot 20000 + 20 \cdot 2000$$

$$= 65000$$

(B)

(28)

$$y = 3x^4 - 6x^2 + 1$$

$$y' = 12x^3 - 12x$$

$$y' = 0$$

$$12x^3 - 12x = 0$$

$$12x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0, \pm 1 \quad \textcircled{C}$$

(29)

$$S(t) = 2\sqrt{t} + 2t^2$$

$$= 2t^{1/2} + 2t^2$$

$$v(t) = S'(t) = t^{-1/2} + 4t$$

$$a(t) = S''(t) = -\frac{1}{2}t^{-3/2} + 4 \quad \textcircled{A}$$

(30)

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f(1) = -2, f'(1) = 3$$

$$g(1) = 1, g'(1) = -2$$

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$h'_m = h'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - f(1) \cdot g'(1)}{[g(1)]^2}$$

$$= \frac{(3)(1) - (-2)(-2)}{1^2} = -1$$

$$(1, -2) \leftarrow (1, h(1)) \quad \text{النقطة}$$

$$y - (-2) = -1(x - 1)$$

$$y + 2 = -x + 1 \Rightarrow y = -x - 1 \quad \textcircled{D}$$

$$(1) \quad y = x^3 + \sin x$$

$$y' = 3x^2 + \cos x$$

$$y'' = 6x - \sin x$$

$$y''' = 6 - \cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x$$

$$\frac{2022}{4} = 504.5$$

مستقیم، لکون

$$\frac{d}{dx} y = -\sin x \quad (B)$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x (1 + \cos x) - \sin x (-\sin x)}{(1 + \cos x)^2}$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (B)$$

$$(3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \sin \frac{\pi}{3}}{h} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad (C)$$

هز ایتعرفه لکون

مستقیم، لکون $x = \frac{\pi}{3}$ $\sin x$ $\cos x$

الوحدة الثانية

تابع الجيب، دس، الخامس

$$\textcircled{4} \quad \frac{d}{dx} [\sin x + \cos x] = \cos x - \sin x \quad \textcircled{D}$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$$

الحل بالتعريف انفس

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \frac{\sin x}{x} = 0(1) = 0$$

او بالقواعد

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \sin x + \sqrt[3]{x} \cos x$$

$$= \frac{1}{3} x^{2/3} \sin x + \sqrt[3]{x} \cos x$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} x^{2/3} \sin x + \sqrt[3]{x} \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3 x^{2/3}} \cdot \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \cos x$$

$$= (0)(1) + (0)(1) = 0. \quad \textcircled{B}$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = \sin |x|$$

$$f'(0^+) = 1$$

$$f'(0^-) = -1$$

Ⓐ

$$|x| \quad \frac{-x}{0} \quad \frac{x}{0}$$

$$\sin |x| \quad \frac{-\sin x}{0} \quad \frac{\sin x}{0}$$

$$f'(x) \quad \frac{-\cos x}{0} \quad \frac{\cos x}{0}$$

$$\textcircled{7} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \xleftrightarrow{\tan \pi/4} = \left. \frac{d}{dx} (\tan x) \right|_{x = \frac{\pi}{4}}$$

قاعدة لوبيتال *

$\tan x$ و $\frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4}$ نعوض

$$= \sec^2(\pi/4)$$

$$= 2 \quad \textcircled{B}$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = x \sin x.$$

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$$

$$= \sin x + x \cos x. \quad \textcircled{D}$$

$$\textcircled{9} \quad f(x) = \sec x \tan x.$$

$$f'(x) = \sec x \tan x \cdot \tan x + \sec x \cdot \sec^2 x$$

$$= \sec x \tan^2 x + \sec^3 x \quad \textcircled{C}$$

$$\textcircled{10} \quad f(x) = \sin x \cdot \cos x$$

$$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x (-\sin x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos 2x \quad \textcircled{A}$$

المرحلة الثالثة

اجابات الاسئلة

$$\textcircled{1} \quad \frac{d}{dx} \sqrt{x^2+1} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \textcircled{A}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{d}{dx} [\sin^3 3x] &= 3 \sin^2 3x \cdot \cos 3x \cdot 3. \\ &= 9 \sin^2 3x \cos 3x. \quad \textcircled{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \frac{d}{dx} \left[\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x \right] \\ &= \sec^2 x + \frac{1}{3} \cdot 3 \tan^2 x \cdot \sec^2 x. \\ &= \sec^2 x [1 + \tan^2 x] = \sec^2 x \cdot \sec^2 x = \sec^4 x. \quad \textcircled{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad \frac{d^2}{dx^2} [\sin^2 x] \\ &= \frac{d}{dx} [2 \sin x \cdot \cos x] \\ &= \frac{d}{dx} [\sin 2x] = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x. \quad \textcircled{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad \frac{d}{dx} [\sec^3 2x] \\ &= 3 \sec^2 2x \cdot \sec 2x \cdot \tan 2x \cdot 2 \\ &= 6 \sec^3 2x \cdot \tan 2x. \quad \textcircled{B} \end{aligned}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{d}{dx} [x(x^2+3)^5]$$

$$= 1 \cdot (x^2+3)^5 + x \cdot 5(x^2+3)^4 \cdot 2x$$

$$= (x^2+3)^4 (x^2+3 + 10x^2)$$

$$= (x^2+3)^4 (11x^2+3), \quad \textcircled{D}$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{d}{dx} [\sec^2 x \tan x]$$

$$= 2\sec x \cdot \sec x \tan x \cdot \tan x + \sec^2 x \cdot \sec^2 x$$

$$= 2\sec^2 x \tan^2 x + \sec^4 x, \quad \textcircled{A}$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{d}{dx} [\sec^2 3x - \tan^2 3x]$$

$$= \frac{d}{dx} [1] \quad \text{ثابت}$$

$$= 0 \quad \textcircled{B}$$

لوحدة الثانية

تابع إجابات الأسئلة 1 و 2 و 3

$$(9) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \left(\frac{x}{x+1} \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{-1/2} \left[\frac{1 \cdot (x+1) - x(1)}{(x+1)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{-1/2} \left[\frac{1}{(x+1)^2} \right] \quad (B) \end{aligned}$$

$$(10) \quad y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad x = 3t^2 - t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$t=0$$

$$= \sec^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot (6t - 1)$$

$$x=0.$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) (-1) = -2 \quad (B)$$

$$(11) \quad y = u^2 - \frac{8}{u}, \quad u = 2x\sqrt{x} = 2x^{3/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \left(2u + \frac{8}{u^2} \right) \cdot \left(3x^{1/2} \right)$$

$$x=1$$

$$u=2.$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} &= \left(2(2) + \frac{8}{2^2} \right) (3) \\ &= 18 \quad (B) \end{aligned}$$

سوال نمبر 12

تابع $h(x) = f(g(x))$ کے لیے

(12)

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$h'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0)$$

$$= f'(1) \cdot (-2)$$

$$= \frac{1}{2}(-2) = -1$$

(D)

(13)

$$h'(x) = n \sqrt{h(x)}$$

$$h''(x) = n \cdot \frac{h'(x)}{2 \sqrt{h(x)}}$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{n \sqrt{h(x)}}{\sqrt{h(x)}}$$

$$18 = \frac{n^2}{2}$$

$$n^2 = 36 \rightarrow n = \pm 6, \quad n > 0$$

$$\Rightarrow n = 6 \quad (C)$$

(14)

$$b = -2 \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$b = -2$$

(B)

$$f \frac{a+bx}{1+\cos 2x}$$

$$\frac{b}{-2 \sin 2x}$$

$\frac{\pi}{4}$

سوال ۱۵

سوال ۱۵

(15)

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$4-x^2 > 0$$

$$D = (-2, 2)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & - & - & 0 & + & + & 0 & + & + \\ & & & | & & & | & & \\ & & & -2 & & & 2 & & \end{array}$$

(D)

(16)

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x$$

$$g = f^{-1} \quad \text{ان } f \text{ و } g$$

$$g'(7) = \frac{1}{f'(g(7))}$$

$$= \frac{1}{f'(3)}$$

$$= \frac{1}{5}$$

(C)

$$g(7) = a$$

$$f^{-1}(7) = a$$

$$7 = f(a)$$

$$f(a) = 7$$

$$a = 3$$

(17)

$$y = f(x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x^2) \cdot 2x$$

$$= \sqrt{5x^2-1} \cdot 2x$$

$$= 2x\sqrt{5x^2-1} \quad (C)$$

حل المسألة

المسألة (18) هي

$$(18) \quad f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{f(x)} \quad (D)$$

(19)

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' \quad \bigg| \quad x=1 \quad \text{في}$$

$$= \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \quad \bigg| \quad \frac{f'(1)}{2\sqrt{f(1)}} = \frac{-2}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$$

(D)

$$(20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2-x-2} = (x^2-x-2)^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-x-2)^{-2/3} \cdot (2x-2)$$

$$= \frac{2x-2}{3(x^2-x-2)^{2/3}}$$

(A) $x=2, -1$ هي الجذور

$$(21) \quad g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)}$$

$$= \frac{1}{3}$$

(A)

$$g(2) = x$$

$$f'(2) = x$$

$$2 = f(x)$$

$$f(x) = 2$$

$$\rightarrow x=1$$

المسألة الأولى

تابع جاباتي استمرارية له في

(22)

$$h(x) = f(\sqrt{x}) + \sqrt{f(x)}$$

$$h'(x) = f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$h'(1) = f'(1) \cdot \frac{1}{2} + \frac{f'(1)}{2\sqrt{f(1)}}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = 2 \quad (D)$$

(23)

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-2/3} = \frac{1}{3(x-2)^{2/3}}$$

غير قابل عند $x=2$ ، قطع للـ $y=0$

الفتره $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

(B)

(24)

$$g(x) = (x^2+1)^5 \quad (C)$$

$$g'(x) = 5(x^2+1)^4 \cdot 2x = 10x(x^2+1)$$

(25)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^5 + 1 - (x^5 + 1)}{h} = \frac{d}{dx} [x^5 + 1] = 5x^4 \quad (A)$$

(26)

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x^3 - 7x + 1$$

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} = 12x^2 - 7$$

$$f'\left(\frac{1}{1/2}\right) \cdot \frac{-1}{(1/2)^2} = 12\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2) \cdot (-4) = -4 \\ f'(2) = 1 \end{array} \right\} (A)$$

$\frac{1}{x} = 2$
 $x = \frac{1}{2}$

للمسألة الثانية

تابع الجابّة المسألة الأولى

(27)

$$h(x) = f(x^2)$$

$$h'(x) = f'(x^2) \cdot 2x = 2x f'(x^2)$$

$$\begin{aligned} h''(x) &= 2 \cdot f'(x^2) + 2x \cdot f''(x^2) \cdot 2x \\ &= 2 f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2) \quad (C) \end{aligned}$$

(28)

$$f(x) = x \sqrt{2x-3}$$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x-3} + x \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x-3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2x-3}}{1} + \frac{x}{\sqrt{2x-3}}$$

$$= \frac{2x-3 + x}{\sqrt{2x-3}} = \frac{3x-3}{\sqrt{2x-3}} \quad (A)$$

(29)

$$f(3x) = 6x^3$$

$$f'(3x) \cdot 3 = 18x^2$$

$$f'(3x) = 6x^2$$

$$f''(3x) \cdot 3 = 12x$$

$$f''(3x) = 4x$$

$$f''(6) = 4(2) = 8$$

(D)

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

(30)

$$h'(3) = g'(f(3)) \cdot f'(3)$$

$$= g'(3) \cdot 0$$

$$= 0$$

(A)

تابع اجابات ايرى بارى

البرهان لبيان

(31)

$$f = \frac{\sin(2x-4) \cdot \odot}{x^2-2x}$$

$$f' = \frac{\cos(2x-4) \cdot 2}{2x-2}$$

(A) الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق عند $x=2$

(32)

$$g(x) = \sqrt{|x-1|}$$

$$|x-1| = \frac{1-x}{1} \cdot \frac{x-1}{1}$$

الدالة متصلة وعند

قابلة للاشتقاق

عند $x=1$

(B)

$$f = \sqrt{|x-1|} = \frac{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x-1}}{1}$$

$$f' = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}}{1}$$

(33)

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))}$$

$$= \frac{1}{f'(0)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \quad (B)$$

$$g(2) = x$$

$$f'(2) = x \rightarrow f(x) = 2$$

$$\sqrt{x^3+2x+4} = 2$$

$$x^3+2x+4=4$$

$$x^3+2x=0$$

$$x(x^2+2)=0$$

$$x=0$$

$$f'(x) = \frac{3x^2+2}{2\sqrt{x^3+2x+4}}$$

$$f'(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} (34) \quad g'(x) &= \frac{1}{f'(g(x))} \\ &= \frac{1}{3[g(x)]^2 + 5} \quad (D) \end{aligned}$$

$f(x) = x^3 + 5x + 6$
 $f'(x) = 3x^2 + 5$

$$\begin{aligned} (35) \quad (f^{-1})'(-2) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(-2))} \\ &= \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{3} \quad (D) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (36) \quad f(x) &= \\ g'(2) &= \frac{1}{f'(g(2))} \\ &= \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4} \quad (A) \end{aligned}$$

$g(2) = x$
 $f^{-1}(2) = x$
 $2 = f(x)$
 $x = 2$

$$\begin{aligned} (37) \quad g'(2) &= \frac{1}{f'(g(2))} \\ &= \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$g(2) = x$
 $f^{-1}(2) = x$
 $2 = f(x)$
 $x = 3$

النقطة
(2, 3)

$$\begin{aligned} y - 3 &= \frac{1}{5}(x - 2) \\ y &= \frac{1}{5}(x - 2) + 3 \quad (B) \end{aligned}$$

تابع اجابات اسئلة ادرس لادرس

لوحة لادرس

(38) $v(t) = b \sqrt{s(t)}$

$$a(t) = b \cdot \frac{s'(t)}{2 \sqrt{s(t)}} \rightarrow v(t)$$

$$8 = b \cdot \frac{b \sqrt{s(t)}}{2 \sqrt{s(t)}}$$

$$8 = \frac{b^2}{2} \rightarrow b^2 = 16 \rightarrow b = 4, b > 0$$

(A)

(39) $v_{avg} = \frac{s(1) - s(0)}{1 - 0} = \frac{3 - 0}{1 - 0} = 3 \text{ m/s.}$

(A)

(40) $v(t) = s'(t) = \frac{2t + 8}{2 \sqrt{t^2 + 8t}}$

$$v(1) = \frac{10}{2 \sqrt{9}} = \frac{10}{6} = 5/3 \text{ m/sec (A)}$$

(41) $u(t) = 4 \cos(2t)$

$$u'(t) = -8 \sin(2t)$$

(A) 8 اقصى سرعة موجة هي سرعة

(42) من السؤال لادرس اقصى سرعة هي 8

$$\begin{aligned} u'(t) &= 8 \\ -8 \sin(2t) &= 8 \\ \sin 2t &= -1 \end{aligned}$$

$$2t = \frac{3\pi}{2}$$

$$t = \frac{3\pi}{4} \text{ ثانية}$$

(B)

$$(43) \quad g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))}$$

$$= \frac{1}{f'(-1)}$$

$$= \frac{1}{5}$$

(A)

$$f(x) = x^3 + 2x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

نفرض ان

$$g(2) = a$$

$$f^{-1}(-2) = a$$

$$-2 = f(a)$$

$$f(a) = -2$$

$$a^3 + 2a + 1 = -2$$

$$a^3 + 2a + 3 = 0$$

$$a = -1$$

$$(44) \quad \frac{d}{dx} [\sin^2(\tan x)]$$

$$= 2 \sin(\tan x) \xrightarrow{\quad} \cos(\tan x) \xrightarrow{\quad} \sec^2 x$$

$$= 2 \sin(\tan x) \cos(\tan x) \cdot \sec^2 x \quad (A)$$

اجابات المسئلة ليس باع

لبرهان

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \quad \frac{d}{dx} [e^x \ln x] &= e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{e^x}{x} + e^x \ln x \quad \textcircled{D}\end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d}{dx} [2^{\sin x}] = 2^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 2. \quad \textcircled{C}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{3} \quad \frac{d}{dx} [\ln(\sqrt{e^x+x} + \sqrt{x}) + \ln \sqrt{e^x+x} - \sqrt{x}] \\ &= \frac{d}{dx} [\ln(\sqrt{e^x+x} + \sqrt{x})(\sqrt{e^x+x} + \sqrt{x})] \\ &= \frac{d}{dx} [\ln(e^x + x - x)] \quad \textcircled{A} \\ &= \frac{d}{dx} [\ln e^x] = \frac{d}{dx} x = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} \quad \frac{d}{dx} [\ln \sqrt{x^2+1}] &= \frac{d}{dx} [\ln (x^2+1)^{1/2}] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} \quad \textcircled{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{5} \quad \frac{d}{dx} \ln(\sec x + \tan x) \\ &= \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x (\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} \\ &= \sec x. \quad \textcircled{A}\end{aligned}$$

تابع اجابات ۱ سئله پرسش پاسخ

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad \frac{d}{dx} [\text{Log}_2(3^x+1)] \\ = \frac{3^x \cdot \ln 3}{(3^x+1) \ln 2} = \frac{3^x}{3^x+1} \cdot \text{Log}_2 3. \quad \textcircled{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{9} \quad & \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{\sin x - x}{\tan x + 1} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\ln(\sin x - x) - \ln(\tan x + 1) \right] \\ &= \frac{\cos x - 1}{\sin x - x} - \frac{\sec^2 x}{\tan x + 1} \quad \textcircled{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{10} \quad & \frac{d}{dx} \left[\ln(x-1) + \log_3 3^{\sec x} + e^{\ln x} \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\ln(x-1) + \sec x + x \right] \\ &= \frac{1}{x-1} + \sec x \tan x + 1 = \frac{1+x-1}{x-1} + \sec x \\ &= \frac{x}{x-1} + \sec x \quad \textcircled{B} \end{aligned}$$

لو انا انا

تابع الجابات انا - انا - انا - انا

$$(11) \frac{d}{dx} [\sin^3(e^{2x})]$$

$$= 3 \sin^2(e^{2x}) \cdot \cos e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot 2$$

$$= 6 \sin^2(e^{2x}) \cos(e^{2x}) e^{2x} \quad (A)$$

$$(12) \frac{d}{dx} [\ln(x^3 e^{2x} \cos^5 x)]$$

$$= \frac{d}{dx} [\ln x^3 + \ln e^{2x} + \ln \cos^5 x]$$

$$= \frac{d}{dx} [3 \ln x + 2x + 5 \ln \cos x]$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 + \frac{-5 \sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{3}{x} + 2 - 5 \tan x \quad (A)$$

$$(13) \frac{d}{dx} [x^{\ln x}]$$

$$y = x^{\ln x}$$

$$\ln y = \ln x^{\ln x} = \ln x \cdot \ln x = (\ln x)^2$$

$$\frac{y'}{y} = 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = x^{\ln x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= 2 \frac{x^{\ln x} \ln x}{x} \quad (B)$$

الوقت الثاني

تابعان متساويان

$$(14) \quad \frac{d}{dx} [x^2]^{4x} = \frac{d}{dx} [x^{8x}]$$

$$y = x^{8x}$$

$$\ln y = \ln x^{8x} = 8x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = 8 \cdot \ln x + 8x \cdot \frac{1}{x} = 8 \ln x + 8$$

$$y' = x^{8x} [8(\ln x + 1)] \\ = 8x^{8x} (\ln x + 1) \quad (B)$$

$$(15) \quad h(\ln x) = f(x) + x$$

$$h'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = f'(x) + 1$$

$$0 = \ln x$$

$$x = 1$$

$$h'(0) \cdot \frac{1}{1} = f'(1) + 1$$

$$h'(0) = -2 + 1 = -1 \quad (B)$$

$$(16) \quad g(x) = f(f(x))$$

$$g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$g'(0) = f'(f(0)) \cdot f'(0)$$

$$= f'(1) \cdot (-1)$$

$$= -e^{-1} (-1)$$

$$= e^{-1}$$

$$= 1/e \quad (B)$$

$$f(x) = e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^{-x}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -1$$

پہلے سوال

۱. معادلات اس کے لئے لکھیں

(17) $f'(x) = \tan x$

$f(x) = \ln(\sec x)$

جیسے لکھنا ہے (c)

(18) $e^{f(x)} = 1 + x^2$

$e^{f(x)} \cdot f'(x) = 2x$

$f'(x) = \frac{2x}{e^{f(x)}} = \frac{2x}{1+x^2}$ (B)

(19) $f(x) = x - \ln x \rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

$= \frac{1}{1 - \frac{1}{g(x)}} = \frac{1}{\frac{g(x)-1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{g(x)-1}$ (A)

(20) $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$

$= \frac{1}{f'(x)}$

$= \frac{1}{f'(0)}$

$= \frac{1}{2}$ (B)

$f^{-1}(1) = x$

$f(x) = 1$

$e^{x^3+2x} = 1$

$x^3+2x = 0$

$x(x^2+2) = 0$

$x = 0$

$f'(x) = e^{x^3+2x} (3x^2+2)$

لو انا انا

ع.ل. 1 = ع.ل. 0 = ع.ل. 1

$$(21) \quad f(x) = x^{x^2}$$

$$\ln f(x) = \ln x^{x^2} = x^2 \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) [2x \ln x + x]$$

$$f'(2) = 2\sqrt{2} [\ln 2 + 1] \quad (B)$$

$$f(x) = [x]^{4-x^2}$$

$$\ln f(x) = \ln (x)^{4-x^2} = (4-x^2) \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -2x \ln x + (4-x^2) \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) \left[-2x \ln x + \frac{4-x^2}{x} \right] \quad (B)$$

$$(23) \quad f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot x - \sqrt{\ln x} \cdot 1}{x^2}$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} - \sqrt{\ln x}}{x^2}$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{\ln x}}{2\sqrt{\ln x} \cdot x^2} \quad (A)$$

$$(24) \quad \frac{d}{dx} [x \cdot 3^{x^2}]$$

$$= 1 \cdot 3^{x^2} + x \cdot 3^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 3.$$

$$= 3^{x^2} [1 + 2x^2 \ln 3] \quad (D)$$

$$(25) \quad y = x e^x$$

$$y' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x + x e^x$$

$$y'' = e^x + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

$$= 2e^x + x \cdot e^x$$

$$y''' = 2e^x + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

$$= 3e^x + x \cdot e^x$$

⋮

$$y^{(n)} = n e^x + x e^x$$

$$= e^x (n + x) \quad (e)$$

المشتق الثاني

تابع الأس المثلثي

(26)

الاشتقاق

$$\frac{a+b(0)}{e} = 0+2$$

$$\frac{a}{e} = 2$$

$$\ln e^a = \ln 2$$

$$a = \ln 2.$$

$$f = \frac{a+bx}{e^{x+2}}$$

$$f = \frac{a+bx}{e} \cdot b$$

الاشتقاق

$$\frac{a+b(0)}{b e} = 1$$

$$\frac{a}{b e} = 1$$

$$\frac{\ln 2}{b e} = 1$$

$$2b = 1 \rightarrow b = 1/2. \quad (B)$$

(27)

$$f(x) = e^{ax}$$

$$f'(x) = a e^{ax}$$

$$f''(x) = a^2 e^{ax}$$

$$f''(x) - f(x) = 0$$

$$a^2 e^{ax} - e^{ax} = 0$$

$$e^{ax} (a^2 - 1) = 0$$

$$a^2 - 1 = 0, \quad e^{ax} \neq 0.$$

$$a = \pm 1. \quad (D)$$

(28)

$$\frac{27}{4} = 6.75$$

المشتق الثاني

$$(22) \quad f(x) = \frac{27}{2} e^{2x} + \cos x$$

$$f^{(2)}(0) = \frac{27}{2} + 1 \quad (A)$$

$$f(x) = e^{2x} - \sin x$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - \cos x$$

$$f''(x) = 2e^{2x} + \sin x$$

$$f'''(x) = 2^3 e^{2x} + \cos x$$

دالة

تابع

(29)

$$f^{(2)}(x) = 2^1 + 2^1$$

$$= 2 \cdot 2^1$$

$$= 2^{22}$$

(D)

$$f(x) = e^{2x} - e^{-2x}$$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 2e^{-2x}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 2e^{2x} - 2 \cdot 2e^{-2x}$$

$$f^{(2)}(x) = 2^1 \cdot 2e^{2x} + 2^1 \cdot 2e^{-2x}$$

(30)

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x e^x}{(e^x)^2}$$

$$m = f'(0) = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

$$m_{\perp} = -\frac{1}{1} = -1 \quad (C)$$

(31)

$$f(x) = x e^{2x}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2$$

$$f'(x) = 0$$

$$e^x + 2x e^x = 0$$

$$e^x (1 + 2x) = 0$$

$$e^x \neq 0, \quad x = -1/2 \quad (B)$$

تابع اطلاعات استفاده از سری تابع

نسبت به

نسبت به متوسط تغییر هو

(32)

$$\frac{p'(t)}{p(t)} \times 100\%$$
$$= \frac{500(2)^t \cdot \ln 2}{500(2)^t} \times 100\% = 70\% \quad (\beta)$$

(33)

$$f(t) = \frac{70}{1 + 3e^{-0.2t}}$$

$$f'(t) = \frac{-70(3(-0.2)e^{-0.2t})}{(1 + 3e^{-0.2t})^2}$$

$$f'(2) = 3.1 \rightarrow \text{نسبت به } 3.1\% \quad (\gamma)$$

(34)

$$f(x) = x^2 e^{-2x}$$

$$f'(x) = 2x e^{-2x} + x^2 \cdot e^{-2x}(-2)$$
$$= e^{-2x} (2x - 2x^2)$$

$$f'(x) = 0$$

$$2x - 2x^2 = 0$$

$$x = 0, x = 1$$

(C)

لوحة الحساب

تابع ايجاد المساحة

$$(35) \quad y = 3^{\tan x}$$

$$y' = 3^{\tan x} \cdot \sec^2 x \cdot \ln 3$$

$$m = y'(0) = 3^0 \cdot 1 \cdot \ln 3 = \ln 3$$

$$y - 1 = \ln 3 (x - 0) \quad \text{نقطة } (0, 1)$$

$$y = \ln 3 x + 1 \quad (C)$$

$$(36) \quad y = x e^{-2x}$$

$$y' = 1 \cdot e^{-2x} + x e^{-2x} \cdot (-2)$$

$$y'(1) = e^{-2} + e^{-2} (-2) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2} \quad (A)$$

(37) النسبة المئوية للمعدل المحض التغير هي

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \times 100\%$$

$$= \frac{60 e^{-0.2t} \cdot (-0.2)}{60 e^{-0.2t}} \times 100\% = -20\% \quad (A)$$

(38)

$$P(t) = P_0 a^t$$

$$= 200 (3)^t$$

$$P_0 = 200$$

$$a = 3$$

(A)

(39)

بعد آئینہ طریقیہ کے سوال

$$p(t) = P_0 a^{rt}$$

$$P_0 = 500$$

$$a = 2 \text{ تصانیف}$$

$$p(t) = 500 (2)^{rt}$$

$$* p(4) = 1000$$

$$p(4) = 500 (2)^{r(4)}$$

$$1000 = 500 (2)^{4r}$$

$$2 = 2^{4r} \rightarrow 4r = 1 \rightarrow r = \frac{1}{4}$$

$$p(t) = 500 (2)^{\frac{1}{4}t}$$

(D)

(40)

$$f(x) = 3^{x^e}$$

$$f'(x) = 3^{x^e} \cdot e x^{e-1} \cdot \ln 3$$

$$f'(1) = 3e \ln 3$$

(D)

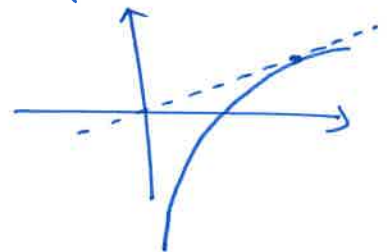
(41)

نقطہ لہذا سے جہ معلوم

یہاں الرسم کے ضمن سوال

$$(a, f(a)) \text{ ولیکنہ}$$

$$(a, \ln a)$$



$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow m = \frac{1}{a}$$

معادنہ کا ہے

$$y - \ln a = \frac{1}{a} (x - a)$$

النقطہ (0, 0) کے معادنہ کا ہے

$$0 - \ln a = \frac{1}{a} (0 - a)$$

$$- \ln a = -1$$

$$\ln a = 1$$

$$a = e$$

(C) نقطہ لہذا سے (e, 1)

تابع سرعة الدفع الرابع .

لوحدة ساعة

$$(42) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10}{9e^{-20t} + 1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10}{\frac{9}{e^{20t}} + 1} = \frac{10}{0 + 1} = 10 \quad (C)$$

$$(43) \quad c'(t) = \frac{-10 (9e^{-20t} \cdot (-20))}{(9e^{-20t} + 1)^2}$$
$$= \frac{1800 e^{-20t}}{(9e^{-20t} + 1)^2} > 0$$

(A) معدل التغير موجب $\Rightarrow$ السرعة متزايدة

$$(44) \quad f'(t) = \frac{-90 (4e^{-0.4t} \cdot (-0.4))}{(1 + 4e^{-0.4t})^2}$$

جد معدل التغير عند $t=0$ ويكون هو معدل التغيري
للتغير عند أي ساعة

$$f'(0) = 5.76 \quad (A)$$

$$(45) \quad f(t) = e^{-t} \cos t.$$

$$f'(t) = e^{-t} (-1) \cos t + e^{-t} (-\sin t).$$

$$= -e^{-t} (\cos t + \sin t)$$

$$= - \frac{\cos t + \sin t}{e^t}.$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \cos t + \sin t = 0 \quad \text{نصلح = 0}$$

$$\sin t = -\cos t.$$

$$\frac{\sin t}{\cos t} = -1$$

$$\tan t = -1.$$

$$t < \frac{\pi}{4} \quad \varphi_2 \rightarrow t = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad \text{الاولى}$$

$$\varphi_4 \rightarrow t = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{3\pi}{4}} \quad (D)$$

لوحة الأسئلة

اجابات الاسئلة من

$$\textcircled{1} \quad \frac{d}{dx} [\cos^{-1} 2x] = \frac{-2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} \quad \textcircled{D}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d}{dx} [\tan^{-1} x^2] = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4} \quad \textcircled{D}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \frac{d}{dx} [\cos(\sin^{-1} x)] \\ = -\sin(\sin^{-1} x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \textcircled{B} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{d}{dx} [e^{\tan^{-1} x^2}] = e^{\tan^{-1} x^2} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x \quad \textcircled{B}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad \frac{d}{dx} [2^{\tan^{-1} x}] &= 2^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln 2 \\ &= 2^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{\ln 2}{1+x^2} \quad \textcircled{D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \quad \frac{d}{dx} [\cos^{-1} \sqrt{x}] &= \frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \quad \textcircled{B} \end{aligned}$$

$$\textcircled{7} \quad y = e^{xy} \\ y' = e^{xy} [1 \cdot y + x \cdot y']$$

$$(0, 1) \Rightarrow$$

$$y' = e^0 [1 \cdot 1 + 0 \cdot y'] \Rightarrow y' = 1 \quad \textcircled{D}$$

$$\textcircled{8} \quad \sin x = e^y \\ \cos x = e^y \cdot y' \\ y' = \frac{\cos x}{e^y} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x. \quad \textcircled{C}$$

$$\textcircled{9} \quad x = \tan y \Rightarrow y = \tan^{-1} x \\ y' = \frac{1}{1+x^2}. \quad \textcircled{A}$$

$$\textcircled{10} \quad \sin(xy) = x \\ \cos(xy) [1 \cdot y + x \cdot y'] = 1 \\ y \cos(xy) + xy' \cos(xy) = 1 \\ xy' \cos(xy) = 1 - y \cos(xy) \\ y' = \frac{1 - y \cos(xy)}{x \cos(xy)} \\ = \frac{1}{x \cos(xy)} - \frac{y}{x} = \frac{\sec(xy)}{x} - \frac{y}{x} = \frac{\sec(xy) - y}{x} \quad \textcircled{D}$$

الوحدة السابعة

سابع اجابات استاذك لثان

⑪

$$x^2 + 2y^2 = 6, (2, 1)$$

$$2x + 4y \cdot y' = 0$$

$$4 + 4y' = 0 \rightarrow y' = -1$$

$$y - 1 = -1(x - 2)$$

$$y = -x + 2 + 1 \rightarrow y = -x + 3. \quad \textcircled{B}$$

⑫

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$2x + 2y y' - 2y' = 0$$

$$2y'(y - 1) = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2(y - 1)}$$

$$y' = 0 \quad \text{المماسات الأفقية}$$

$$-2x = 0 \rightarrow x = 0$$

نعوض بالعلاقة الأصلية

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y = 0, y = 2 \quad \textcircled{A}$$

الموجة المسألة

كل اجابات اسئلة المرس المسألة

$$(13) \quad y^2 - xy + x = 5, \quad (-1, 2)$$

$$2y \cdot y' - (1 \cdot y + x \cdot y') + 1 = 0$$

عوضنا لنقيم

$$4y' - (2 - y') + 1 = 0$$

$$4y' - 2 + y' + 1 = 0 \Rightarrow 5y' = 1 \Rightarrow y' = 1/5$$

$$m = \frac{1}{5}$$

$$m = -5$$

$$y - 2 = -5(x + 1)$$

$$y - 2 = -5x - 5$$

$$y = -5x - 3 \quad (B)$$

$$(14) \quad \sqrt{xy} = 2, \quad (1, 4)$$

$$xy = 4$$

$$y = \frac{4}{x} \rightarrow y' = -\frac{4}{x^2}$$

$$m = \frac{-4}{1^2} = -4 \quad (B)$$

$$(15) \quad \ln x - \ln y = y - 4, \quad (4, 4)$$

$$\frac{1}{x} - \frac{y'}{y} = y'$$

$$\frac{1}{4} - \frac{y'}{4} = y'$$

$$\frac{1}{4} = \frac{y'}{4} + \frac{y'}{4} \rightarrow$$

$$\frac{1}{4} = \frac{5y'}{4} \rightarrow y' = 1/5 \quad (C)$$

لوحدة الثانية

جميع اجابات درس الثامن

$$\begin{aligned}(16) \quad & x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ & 2x + 2y \cdot y' - 2y' = 0 \\ & 2y'(y-1) = -2x \\ & y' = \frac{-2x}{2(y-1)} \\ & y = \frac{-x}{y-1}\end{aligned}$$

المحالات الخاصة (المقام صفر)

$$y = 1$$

عوض المعادلة الأصلية

$$x^2 + 1 - 2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1 \quad (B)$$

$$(17) \quad f(x) = \sin^{-1}(2x-1)$$

مذكرات مجال دالة $\sin^{-1}x$ هو $|x| < 1$

$$-1 < 2x-1 < 1$$

$$0 < 2x < 2$$

$$0 < x < 1$$

$$D = (0, 1)$$

مجال الدالة

(B)

$$(18) \quad f(x) = (1+x) \tan^{-1} \sqrt{x}$$

$$f'(x) = 1 \cdot \tan^{-1} \sqrt{x} + (1+x) \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \tan^{-1} \sqrt{x} + (1+x) \cdot \frac{1}{(1+x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \tan^{-1} \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (D)$$

طريقة التفاضل

تابع الجابلات المستندة لدرس التفاضل

(19)

$$x^2 + y^2 = 25$$

اختق طريقة التفاضل

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \rightarrow 2(4) + 2(3) \cdot y' = 0 \rightarrow y' = -4/3$$

اختق طريقة التفاضل

$$2 + 2y' \cdot y' + 2y \cdot y'' = 0$$

$$2 + 2(-4/3)(-4/3) + 2(3) \cdot y'' = 0$$

$$y'' = -\frac{25}{27} \quad (B)$$

(20)

$$x^2 y^2 = 3y + 1$$

$$2x \cdot y^2 + x^2 2y \cdot y' = 3y'$$

$$2x^2 y y' - 3y' = -2xy^2$$

$$y' (2x^2 y - 3) = -2xy^2$$

$$y' = \frac{-2xy^2}{2x^2 y - 3}$$

الحالات الخاصة
التي = 0

$$-2xy = 0$$

$$x = 0, y = 0$$

عوضنا بالمعادلة
الخاصة

$$0 = 3y + 1$$

$$y = -1/3$$

النقطة (0, -1/3)

(C)

(21)

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$2x + 2y \cdot y' - 2y' = 0$$

$$2y'(y - 1) = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2(y-1)} = \frac{-x}{y-1}$$

الحالات الخاصة (التي = 0)

$$x = 0$$

عوضنا بالمعادلة الخاصة

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y = 0, y = 2$$

النقطة (0, 2)

(0, 0), (0, 2) (C)

تابع اجابات اسئلة لدس الثامن

الوحدة الثانية

(22)

من اسوال سابقة

$$y' = \frac{-x}{y-1}$$

الحالات الراسية (المقام = صفر)

$$y-1=0$$

$$y=1$$

عوضنا المعادلة للاصل:

$$x^2 + 1 - 2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

التقام (1, 1), (-1, 1)
(C)

(23)

$$y = \ln(x^2 + y^2)$$

$$y' = \frac{2x + 2y \cdot y'}{x^2 + y^2}$$

(0, 1) د

$$y' = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow m=2 \quad (C)$$

(24)

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$x + y y' = 0$$

بالتعويض 2

اختق

$$1 + y' \cdot y' + y \cdot y'' = 0$$

$$1 + (y')^2 + y y'' = 0$$

$$(y')^2 + y y'' = -1 \quad (B)$$

تابع الجاباج اسطه لدرس لئاس

لوحة لئاس

$$(25) \quad (p + 5\bar{u}^2)(u - 0.03) = 9.7.$$

$$(1 - 10\bar{u}^3)(u - 0.03) + (p + 5\bar{u}^2)(u') = 0$$

عوض لنقيم $p=5, u=1$

$$(1 - 10u') (1 - 0.03) + (5+5)u' = 0$$

$$(1 - 10u') (0.97) + 10u' = 0$$

$$0.97 - 9.7u' + 10u' = 0$$

$$0.97 + 0.3u' = 0$$

$$u' = - \frac{0.97}{0.3} = - \frac{97}{30} \quad \textcircled{D}$$

$$(26) \quad \textcircled{D} \quad y' = c.$$

$$m_1 = c.$$

$$m_1 = \frac{y}{x}$$

$$x^2 + y^2 = k$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$2yy' = -2x.$$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

$$m_2 = -\frac{x}{y}$$

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{y}{x} \cdot -\frac{x}{y} = -1.$$

∴ الخا ل متعامدة

$$(27) \quad f(x) = 4 \sec^{-1}(x^4)$$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{|x^4| \sqrt{(x^4)^2 - 1}} \cdot 4x^3$$

$$= \frac{16}{x \sqrt{x^8 - 1}} \quad (B)$$

$$(28) \quad f(x) = \sin^{-1} \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (C)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

لوجود القيمة

اجابات ادرس اعلى

①

نص نظرية القيمة المتوسطة .

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \textcircled{C}$$

②

Ⓐ

نص نظرية رول

③

$$f(x) = x^3 + x, \quad [-1, 0]$$

$$f'(c) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)}$$

$$3c^2 + 1 = \frac{+2}{1}$$

$$3c^2 = 1 \Rightarrow$$

$$c^2 = 1/3$$



$$c = -\sqrt{1/3} \in (-1, 0) \checkmark$$

$$c = \sqrt{1/3} \notin (-1, 0) \times$$

Ⓒ

④

$$f(x) = x^3 + x^2, \quad [-1, 1]$$

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$$

$$3c^2 + 2c = 1$$

$$3c^2 + 2c - 1 = 0 \Rightarrow$$

Ⓓ

$$c = 1/3 \in (-1, 1)$$

$$c = -1 \notin (-1, 1)$$

مرفوض

تابع اجابات استریمین لاسر

لوجة لاسر

$$(5) \quad f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \quad [0, 2]$$

$$\cos \pi c = \frac{0 - 0}{2} = 0$$

$$\cos \pi c = 0$$

$$\pi c = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

$$c = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{3}{2} \quad (D)$$

$$(6) \quad \begin{array}{l|l} f'(c) = 0 & f(0) = 1 \\ 2c - 1 = 0 & f(1) = 1 \\ c = \frac{1}{2} & \end{array} \quad (B)$$

القتره $[0, 1]$ و $c = \frac{1}{2}$

$$(7) \quad \begin{array}{l} f'(c) = 0 \\ 1 - \frac{1}{c^2} = 0 \\ \frac{1}{c^2} = 1 \rightarrow c = \pm 1 \end{array}$$

$c = 1$ ✓ , $c = -1$ مرفوض
خارج القتره

(C)

(8) الداله كبت ان تكون متصده مع القتره $[0, 3]$
وقائله الاستنتاج مع القتره $(0, 3)$

(C)

تابع اجزایات است و پس از آن

یوم وجود دارد

(9) $f(x) = x^2 + ax$, $f'(c) = 1$

$$f'(x) = 2x + a$$

$$1 =$$

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$$

$$1 = \frac{9 + 3a}{3}$$

$$9 + 3a = 3$$

$$3a = -6$$

$$a = -2$$

(B)

(10) $f(x) = x^5 + 4x - 1$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{یوم جذری لایق}$$

$$f'(x) = 5x^4 + 4$$

لا یوم جذر
لایق

ای انه لایق لایق یوم جذری لایق

من (10) و (2) یوم جذر واحد فقط . (A)

(11) $f(x) = e^x$

$$f'(x) = e^x > 0$$

(B)

الوجه الثاني

تابع الجاهات ا سطح ادرى لاسى

(12)

$$f(1) = f(3)$$

$$a-5 = 9a-15$$

$$-8a = -15+5$$

$$-8a = -10 \rightarrow a = \frac{-10}{-8} = \frac{5}{4} \quad (B)$$

(13)

$$f'(2) = g'(2)$$

$$2a(2)+5 = a-2(2)$$

$$4a+5 = a-4$$

$$3a = -9 \rightarrow a = -3 \quad (D)$$

$$f'(x) = 2ax+5$$

$$g'(x) = a-2x$$

(14)

$$f(x) = x^5 + 4x - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 4 \end{array} \right\}$$

① يوجد جذر واحد فقط

$$f'(x) = 5x^4 + 4$$

② لا يوجد المشتق جذور

فان للدالة ا لاصه جذر واحد فقط

من ① و ② يوجد للدالة جذر واحد فقط

(A)

$$(15) \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{b - a}{b - a} = 1. \quad (B)$$

(16) نه تتيه نظره لقا طوط

(B)

(17)

الاجابه (C)

(18)

عدد محاسات التي توازي لقا طع
الواصل بين الطرفين

(C) 4 محاسات