

حل تمرين الدرس (8-3) الاستقاف الصغري - و لدوال العكسية

تمرين (1) ص 206 $x^2 + 4y^2 = 8$ المطلوب الميجاد ميل المماس عند (2,1) (البرهنة)

I (بشكل صريح) الميجاد y بدلالة x (نفضل y لوحدتها)

$$4y^2 = 8 - x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{8 - x^2}{4}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{8 - x^2}{4}} = \pm \frac{\sqrt{8 - x^2}}{2}$$

لاحظ النقطة المحددة في السؤال (2,1) (y=1 موجب)

$$(2,1) \rightarrow y = + \frac{\sqrt{8 - x^2}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{8 - x^2}$$

$$y' = \frac{1}{2} \times \frac{-2x}{2\sqrt{8 - x^2}} = \frac{-x}{2\sqrt{8 - x^2}}$$

$$(2,1) \rightarrow x=2 \rightarrow m = y'(2) = \frac{-(2)}{2\sqrt{8 - (2)^2}} = -\frac{1}{2}$$

II صغرياً (المطلوب ميل المماس) بدون أن نفضل y لوحدتها

$$x^2 + 4y^2 = 8 \Rightarrow 2x + 4(2yy') = 8$$

$$(2,1) \text{ موصول } \Rightarrow 2(2) + 8xy' = 8$$

$$4 + 8y' = 8 \Rightarrow 8y' = 4 \Rightarrow y' = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

تمرين (2) ص 206 $x^3y - 4\sqrt{x} = x^2y$ المطلوب ميل المماس عند (2, \sqrt{2})

I (بشكل صريح) (أي الميجاد y بدلالة x: نفضل y لوحدتها)

$$x^3y - x^2y = 4\sqrt{x}$$

$$y(x^3 - x^2) = 4\sqrt{x} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{x}}{x^3 - x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(4\sqrt{x})'(x^3 - x^2) - 4\sqrt{x}(x^3 - x^2)'}{(x^3 - x^2)^2}$$

$$= \frac{2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} (x^3 - x^2) - 4\sqrt{x}(3x^2 - 2x)}{(x^3 - x^2)^2}$$

$$(2, \sqrt{2}) \rightarrow m = y'(2) = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}(2^3 - 2^2) - 4\sqrt{2}(3(2)^2 - 2(2))}{(2^3 - 2^2)^2} = -\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

II صغرياً (نستق دون أن نفضل y لوحدتها)

$$x^3y - 4\sqrt{x} = x^2y \Rightarrow (x^3)'y + x^3(y') - \frac{2}{\sqrt{x}} = (x^2)'y + x^2(y')$$

$$3x^2y + x^3y' - \frac{2}{\sqrt{x}} = 2xy + x^2y'$$

$$(2, \sqrt{2}) \text{ موصول } \Rightarrow 3(2)^2(\sqrt{2}) + (2)^3y' - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2(2)\sqrt{2} + (2)^2y'$$

$$12\sqrt{2} + 8y' - \frac{2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} + 4y'$$

$$8y' - 4y' = 4\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4y' = -7\sqrt{2} \Rightarrow y' = -\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

تمرين (3) ص 206 $y - 3x^2y' = \cos x$ المطلوب حل المعادلة عند (0,1) بطريقة

I بطل صريح (نفضل y بدلا من x)

$$y(1-3x^2) = \cos x \Rightarrow y = \frac{\cos x}{1-3x^2}$$

نتق (قاعدة المتبة): $y' = \frac{(-\sin x)(1-3x^2) + (\cos x)(-6x)}{(1-3x^2)^2}$

$$m = y'(0) = \frac{-\sin(0)(1-3(0)^2) + (\cos 0)(-6 \cdot 0)}{(1-3(0)^2)^2} = 0$$

طريقة الطرف

II طرئاً (نتق الطرفين)

$$y - 3x^2y' = \cos x \Rightarrow y' - 3(x^2y' + y) = -\sin x$$

$$y' - 6xy - 3x^2y' = -\sin x$$

$$y' - 3x^2y' = -\sin x + 6xy$$

يلاحظ $y'(1-3x^2) = -\sin x + 6xy \Rightarrow y' = \frac{-\sin x + 6xy}{1-3x^2}$

عند (0,1) $\rightarrow m = y'(0) = \frac{-\sin 0 + 6(0)(1)}{1-3(0)^2} = 0$

تمرين (4) ص 206 $y^2 + 2xy + 4 = 0$ المطلوب حل المعادلة عند (-2,2) بطريقة

I بطل صريح (نفضل y بدلا من x)

نحل لمربع كامل $y^2 + 2xy + x^2 = 4 + x^2$ نضرب في الطرفين

$$(y+x)^2 = x^2 + 4$$

$$\sqrt{(y+x)^2} = \pm \sqrt{x^2 + 4}$$

$$y+x = \pm \sqrt{x^2 + 4}$$

$$y = -x \pm \sqrt{x^2 + 4}$$

نختار $y = -x + \sqrt{x^2 + 4}$

نتق $\rightarrow y' = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

$$m = y'(-2) = -1 + \frac{-2}{\sqrt{2^2 + 4}} = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

الحل غير محدد فيكون المحاس رأسياً

II صغياً $y^2 + 2xy + 4 = 0 \xrightarrow{\text{نتق الطرفين}} 2yy' + 2(1y + xy') + 0 = 0$

$$2yy' + 2y + 2xy' = 0$$

يلاحظ $y'(2y+x) = -2y \Rightarrow y' = \frac{-2y}{2y+x}$

(-2,2) $\Rightarrow m = y' = \frac{-2(2)}{2(2)+2(-2)} = 0$ (غير معرف المقام = 0)

الحل غير محدد فيكون المحاس رأسياً

مشتقة
قائمة المخرجات

تمرين (5) $x^2 y^2 + 3y = 4x$ 206 ص
المطلوب إيجاد $y'(x)$ صغياً
نشتق الطرفين:

$$(x^2)' y^2 + x^2 (y^2)' + 3y' = 4$$

$$2xy^2 + x^2 (2yy') + 3y' = 4$$

$$2xy^2 + 2x^2 yy' + 3y' = 4$$

$$2x^2 yy' + 3y' = 4 - 2xy^2$$

لنقسم على $2x^2 y + 3$ لا عامل مشترك $y' = \frac{4 - 2xy^2}{2x^2 y + 3}$

تمرين (6) $3xy^3 - 4x = 10y^2$
المطلوب إيجاد $y'(x)$ صغياً
نشتق الطرفين:

$$3y^3 + 3x(3y^2 y') - 4 = 10(2yy')$$

$$3y^3 + 9xy^2 y' - 4 = 20yy'$$

$$9xy^2 y' - 20yy' = 4 - 3y^3$$

لا عامل مشترك $y' (9xy^2 - 20y) = 4 - 3y^3$

$y' = \frac{4 - 3y^3}{9xy^2 - 20y}$

تمرين (7) $\sqrt{xy} - 4y^2 = 12$
المطلوب إيجاد $y'(x)$ صغياً
نشتق الطرفين:

$$\frac{1}{2\sqrt{xy}} (y + xy') - 8yy' = 0 \Rightarrow \frac{y + xy'}{2\sqrt{xy}} = 8yy'$$

المخرجات المتساوية $y + xy' = 16yy' \sqrt{xy}$

لا عامل مشترك $y + xy' = 16yy' \sqrt{xy} \Rightarrow y = -xy' + 16yy' \sqrt{xy}$

$y = y' (-x + 16y \sqrt{xy}) \Rightarrow y' = \frac{y}{-x + 16y \sqrt{xy}}$

تمرين (8) $\sin(xy) = x^2 - 3$
المطلوب إيجاد $y'(x)$ صغياً
نشتق الطرفين:

$$\cos(xy) [1y + xy'] = 2x$$

$$y \cdot \cos(xy) + \cos(xy) \cdot xy' = 2x$$

$$\cos(xy) \cdot xy' = 2x - y \cos(xy)$$

نقسم على $x \cos(xy)$ $y' = \frac{2x - y \cos(xy)}{x \cos(xy)}$

تمرين (9) ص 206 $\frac{x+3}{y} = 4x + y^2$ مطلوب $y'(x)$ ضمنيًا

نأخذ الضرب التفاضلي $\Rightarrow x+3 = (4xy) + y^3$

ثم نشتق الطرفين ونؤخذ مشتق

$1 = 4y + 4xy' + 3y^2 y'$

$1 - 4y = y'(4x + 3y^2)$

$y' = \frac{1-4y}{4x+3y^2}$

تمرين (10) ص 102 $3x + y^3 - 4y = 10x^2$ مطلوب $y'(x)$ ضمنيًا
نشتق الطرفين $3 + 3y^2 y' - (4y)' = 10(2x)$

$3 + 3y^2 y' - \frac{4y'(x+2) - 4y(1)}{(x+2)^2} = 20x$

نضرب الطرفين بـ $(x+2)^2$ $3(x+2)^2 + 3y^2 y' (x+2)^2 - (x+2)^2 \frac{4y'(x+2) - 4y}{(x+2)^2} = 20x(x+2)^2$

$3(x+2)^2 + 3y^2 y' (x+2)^2 - 4y'(x+2) + 4y = 20x(x+2)^2$

$3y^2 y' (x+2)^2 - 4y'(x+2) = 20x(x+2)^2 - 3(x+2)^2 - 4y$

نضرب الطرفين بـ y' $y' [3y^2 (x+2)^2 - 4(x+2)] = \frac{(x+2)^2 [20x - 3] - 4y}{(x+2)^2}$

$y' = \frac{(x+2)^2 [20x - 3] - 4y}{3y^2 (x+2)^2 - 4(x+2)}$

حيث أن $f(x) = e^{x^2 y}$ $f'(x) = e^{x^2 y} \cdot (x^2 y)'$

تمرين (11) ص 102 $(e^{x^2 y}) - e^y = x$ مطلوب $y'(x)$ ضمنيًا
نشتق الطرفين $e^{x^2 y} (x^2 y)' - e^y (y') = 1$

$(e^{x^2 y} (2x \cdot y + x^2 y')) + e^y \cdot y' = 1$

$(e^{x^2 y} \cdot 2xy + (e^{x^2 y})' \cdot x^2 y') + e^y \cdot y' = 1$

$(e^{x^2 y} \cdot x^2 y' + e^y y') = 1 - (e^{x^2 y})' \cdot 2xy$

نضرب الطرفين بـ y' $y' [x^2 \cdot (e^{x^2 y})' + e^y] = 1 - (e^{x^2 y})' \cdot 2xy$

$y' = \frac{1 - 2xy (e^{x^2 y})'}{x^2 \cdot e^{x^2 y} + e^y}$

تمرين (12) ص 206 $x e^y - 3y \sin x = 1$ مطلوب $y'(x)$ ضمنيًا
نشتق الطرفين

$$(x)' e^y + x (e^y)' + (-3y)' \sin x + (-3y) (\sin x)' = 0$$

$$1 \cdot e^y + x (e^y \cdot y') - 3y' \sin x - 3y (\cos x) = 0$$

$$e^y + x \cdot e^y \cdot y' - 3 \sin x \cdot y' - 3y \cos x = 0$$

$$y' (x \cdot e^y - 3 \sin x) = 3 \cos x - e^y$$

$$y' = \frac{3 \cos x - e^y}{x \cdot e^y - 3 \sin x}$$

تمرين (13) $y^2 \sqrt{x+y} - 4x^2 = y$ مطلوب $y'(x)$ ضمنيًا

نشتق الطرفين $(y^2)' \sqrt{x+y} + y^2 (\sqrt{x+y})' - 4(2x) = y'$

$$2y \sqrt{x+y} + y^2 \left[\frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}} \right] - 8x = y'$$

نضرب الطرفين بـ $2\sqrt{x+y}$

$$2y \sqrt{x+y} \times 2\sqrt{x+y} + y^2 \left(\frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}} \right) \times 2\sqrt{x+y} = 8x \times 2\sqrt{x+y} = y' \times 2\sqrt{x+y}$$

$$4y(\sqrt{x+y})^2 + y^2(1+y') = 16x\sqrt{x+y} = 2y'\sqrt{x+y}$$

$$4xy + 4y^2 + y^2 + y^2 y' + 16x\sqrt{x+y} = 2y'\sqrt{x+y}$$

$$y^2 y' - 2y'\sqrt{x+y} = 16x\sqrt{x+y} - 4xy - 5y^2$$

$$y' (y^2 - 2\sqrt{x+y}) = 16x\sqrt{x+y} - 4xy - 5y^2$$

$$y' = \frac{16x\sqrt{x+y} - 4xy - 5y^2}{y^2 - 2\sqrt{x+y}}$$

(الجواب في دليل المعلم ع)

$$\frac{16x\sqrt{x+y} - y^2}{y^2 + 4y(x+y) - 2\sqrt{x+y}}$$

مَرَنِي (14) ص 206 $x \cos(x+y) - y^2 = 8$ المطلوب $y'(x)$ ضمنيًا

نَسْتَقَ الطرفَين : $(x \cos(x+y) - y^2)' = 8' = 0$

$$1 \cos(x+y) + x [-\sin(x+y) \cdot (x+y)'] - 2yy' = 0$$

$$\cos(x+y) + x [-\sin(x+y) \cdot (1+y')] - 2yy' = 0$$

$$-x \sin(x+y) (1+y') - 2yy' = -\cos(x+y) \quad \left(\begin{array}{l} \text{لطرفين} \\ \times -1 \end{array} \right)$$

تَنفِيزُ الْإِشْرَافِ
+ أَسْهَلُ مِنْ -

$$x \sin(x+y) \cdot 1 + x \sin(x+y) \cdot y' + 2yy' = \cos(x+y)$$

↑ عَامِدٌ شَرَكٌ ↑

$$y' [x \sin(x+y) + 2y] = \cos(x+y) - x \sin(x+y)$$

$$y' = \frac{\cos(x+y) - x \sin(x+y)}{x \sin(x+y) + 2y}$$

مَرَنِي (15) $e^{4y} \ln(y^2+3) = 2x$ المطلوب $y'(x)$ ضمنيًا

نَسْتَقَ الطرفَين :

$$e^{4y} \cdot x(y^2+3)' - \frac{(y^2+3)' \cdot e^{4y}}{y^2+3} = 2$$

نَضْرِبُ الطرفَينُ بـ (y^2+3)

$$4y' \cdot e^{4y} \cdot x(y^2+3) - \frac{2yy' \cdot e^{4y}}{y^2+3} \cdot x(y^2+3) = 2x(y^2+3)$$

$$4y' e^{4y} (y^2+3) - 2yy' = 2(y^2+3)$$

$$y' [4e^{4y} (y^2+3) - 2y] = 2(y^2+3)$$

$$y' = \frac{2(y^2+3)}{[4e^{4y} (y^2+3) - 2y]}$$

مَرَنِي (16) $e^{x^2} \cdot y - 3\sqrt{y^2+2} = x^2+1$ المطلوب $y'(x)$ ضمنيًا

نَسْتَقَ الطرفَين : $(e^{x^2} \cdot y - 3\sqrt{y^2+2})' = (x^2+1)' = 2x+0$

$$(e^{x^2} \cdot 2x) y + e^{x^2} \cdot y' - \frac{3(2yy' + 0)}{2\sqrt{y^2+2}} = 2x$$

$$2xy e^{x^2} + e^{x^2} y' - \frac{3yy'}{\sqrt{y^2+2}} = 2x$$

نَضْرِبُ الطرفَينُ بـ $\sqrt{y^2+2}$

يَبْقَى فِي الصَّفْحَةِ تَالِيَةِ

206 م (16) معادلة كيرني

$$2x \cdot e^{x^2} y \sqrt{y^2+2} + e^{x^2} y' \sqrt{y^2+2} - \frac{3yy'}{\sqrt{y^2+2}} = 2x \sqrt{y^2+2}$$

$$2xy e^{x^2} \sqrt{y^2+2} + e^{x^2} (y') \sqrt{y^2+2} - 3y(y') = 2x \sqrt{y^2+2}$$

$$(y') [e^{x^2} \sqrt{y^2+2} - 3y] = 2x \sqrt{y^2+2} - 2xy e^{x^2} \sqrt{y^2+2}$$

$$y' = \frac{2x \sqrt{y^2+2} - 2xy e^{x^2} \sqrt{y^2+2}}{e^{x^2} \sqrt{y^2+2} - 3y}$$

ملاحظة: يمكن اختصار $2x \sqrt{y^2+2}$ كما هو موضح في الصورة ليصبح بالشكل:

$$2x \sqrt{y^2+2} (1 - y e^{x^2})$$

206 م (17) معادلة كيرني

$$x^2 - 4y^3 = 0 \quad \text{المطلوب: معادلة الجدار عند (2,1)}$$

$$2x - 12yy' = 0$$

$$2x = 12yy' \Rightarrow y' = \frac{2x}{12y} = \frac{x}{6y}$$

$$m = y'(2,1) = \frac{2}{6(1)} = \frac{1}{3}$$

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

لنستخدم براهج الرسم

$$y = \frac{1}{3}(x - 2) + 1$$

أو $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

206 م (18) معادلة كيرني

$$x^2 y^2 = 4x \quad \text{المطلوب: معادلة الجدار عند (1,2)}$$

$$(x^2)' y^2 + x^2 (y^2)' = 4$$

$$2x y^2 + x^2 (2y y') = 4 \Rightarrow 2x y^2 + 2x^2 y y' = 4$$

$$2x^2 y y' = 4 - 2x y^2$$

$$y' = \frac{4 - 2x y^2}{2x^2 y}$$

$$m = y'(2,2) = \frac{4 - 2(1)(2)^2}{2(1)^2(2)} = \frac{4 - 8}{4} = -1$$

$$y = -1(x - 1) + 2$$

$$y = -x + 1 + 2 \Rightarrow y = -x + 3$$

لنستخدم براهج الرسم

تمرین (19) ص 206 تابع صدمه
 $x^2 y^2 = 3y + 1$ خطوط معادله محلی کشف (20) x, y_1
 مشتق طرفین:

$$2x \cdot y^2 + x^2(2yy') = 3y' + 0$$

$$2xy^2 + 2x^2y y' = 3y' \Rightarrow 2x^2y y' - 3y' = -2xy^2$$

$$y'(2x^2y - 3) = -2xy^2 \rightarrow y' = \frac{-2xy^2}{2x^2y - 3}$$

$$y' = \frac{-2xy^2}{2x^2y - 3}$$

$$m = y'((2, 1)) = \frac{-2(2)(1)^2}{2(2)^2(1) - 3} = -\frac{4}{5}$$

معادله محلی $y = -\frac{4}{5}(x - 2) + 1 \rightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$
 ممکن است با استفاده از رسم یا رسم آو یا سبب ابزاری (التراسه)

تمرین (20) خطوط معادله محلی کشف (20) x, y_1
 $x^3 y^2 = -2xy - 3$ مشتق طرفین:

$$3x^2 \cdot y^2 + x^3(2yy') = -2(1 \cdot y + xy')$$

$$3x^2 y^2 + 2x^3 y y' = -2y - 2xy'$$

$$y'(2x^3y + 2x) = -2y - 3x^2y^2$$

$$y' = \frac{-2y - 3x^2y^2}{2x^3y + 2x}$$

$$m = y'((-1, -3)) = \frac{-2(-3) - 3(-1)^2(-3)^2}{2(-1)^3(-3) + 2(-1)} = -\frac{21}{4}$$

معادله محلی $y = -\frac{21}{4}(x + 1) - 3 \Rightarrow y = -\frac{21}{4}x - \frac{21}{4} - 3 \Rightarrow y = -\frac{21}{4}x - \frac{33}{4}$

تمرین (21) خطوط معادله محلی کشف (21) x_1, y_1
 $x^4 = 4(x^2 - y^2)$ مشتق طرفین:

$$x^4 = 4x^2 - 4y^2$$

$$x^4 - 4x^2 = -4y^2 \xrightarrow{\text{مشتق طرفین}} 4x^3 - 8x = -4(2yy')$$

$$4x^3 - 8x = -8yy' \Rightarrow y' = \frac{4x^3 - 8x}{-8y}$$

$$y' = \frac{-4x(-x^2 + 2)}{-8y} = \frac{x(2 - x^2)}{2y}$$

$$m = y'((1, \frac{\sqrt{3}}{2})) = \frac{1(2 - (1)^2)}{2(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (1, \frac{\sqrt{3}}{3})$$

معادله محلی $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}$

تمرين (22) ص 206 $x^4 = 8(x^2 - y^2)$ مطلوب معادلات المحاكاة عند $(2, -\sqrt{2})$

نبدأ الاشتقاق صهيماً مباشرة (أو نقص y^2 ثم نشتق الطرفين)

$$x^4 = 8x^2 - 8y^2 \quad \text{نشتق الطرفين}$$

$$4x^3 = 16x - 8(2yy')$$

$$4x^3 - 16x = -16yy' \Rightarrow y' = \frac{4x^3 - 16x}{-16y} \div 4$$

$$y' = \frac{x^3 - 4x}{-4y}$$

$$m = y' \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{-\sqrt{2}} \right) = \frac{(2)^3 - 4(2)}{-4(-\sqrt{2})} = \frac{0}{4\sqrt{2}} = 0$$

ميل المماس = 0 يكون المحاكاة أفقياً

ومعادلة المماس في النقطة $(2, -\sqrt{2})$ هي: $y = y_1$

(الرسم البياني من خلال برنامج الرسم أو بالحاسبة بيانية غير مضمرة) $y = -\sqrt{2}$

تمرين (23) $x^2 y^2 + 3x - 4y = 5$ المطلوب المشتقة من الرتبة الثانية (y'')

$$(x^2)' y^2 + x^2 (y^2)' + 3 - 4y' = 0 \quad \text{نشتق الطرفين}$$

$$2x \cdot y^2 + x^2 (2yy') + 3 - 4y' = 0$$

$$\frac{2x}{\cancel{y^2}} + \frac{2x^2 y}{\cancel{y}} y' + 3 - 4y' = 0$$

نشتق الطرفين مرة ثانية

$$(2x)' y^2 + (2x)(y^2)' + (2x^2 y)' y' + (2x^2 y) y'' + 0 - 4y'' = 0$$

$$(2)y^2 + 2x(2yy') + [4xy + 2x^2 y'] y' + (2x^2 y) y'' - 4y'' = 0$$

$$2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2 y \cdot 2 + 2x^2 y y'' - 4y'' = 0$$

$$2x^2 y y'' - 4y'' = -2y^2 - 8xyy' - 2x^2 y'^2$$

$$y'' (2x^2 y - 4) = -2y^2 - 8xyy' - 2x^2 y'^2$$

$$y'' = \frac{-2y^2 - 8xyy' - 2x^2 y'^2}{2x^2 y - 4} \div -2 = \frac{y^2 + 4xyy' + 2x^2 y'^2}{2 - x^2 y}$$

تمرين (24) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ مطلوب y' نشتق الطرفين

$$\frac{2}{3}(x)^{\frac{2}{3}-1} + \frac{2}{3}(y)^{\frac{2}{3}-1} y' = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} (y^{-\frac{1}{3}} y') = 0$$

$$\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})(x)^{-\frac{1}{3}-1} + \frac{2}{3}[-\frac{1}{3}y^{-\frac{1}{3}-1} y' x y' + y^{-\frac{1}{3}} y''] = 0$$

$$-\frac{2}{9}(x)^{-\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}[-\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}(y')^2 + y^{-\frac{1}{3}} y''] = 0$$

$$-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{9}y^{-\frac{4}{3}}(y')^2 + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} y'' = 0 \Rightarrow y'' = \frac{-x^{-\frac{4}{3}} - y^{-\frac{4}{3}}}{-3y^{-\frac{1}{3}}}$$

$$y'' = \frac{x^{-\frac{4}{3}} + y^{-\frac{4}{3}}}{3y^{\frac{1}{3}}} \quad \text{يمكن ضرب البسط والمقام بـ 1}$$

تمرين (25) ص 206 $y^2 = x^3 - 6x + 4 \cos y$ المطلوب y''

نشتق الطرفين

$$2yy' = 3x^2 - 6 + 4(-\sin y)y'$$

$$\frac{2y}{y} y' = 3x^2 - 6 - 4(\sin y)y'$$

نشتق الطرفين مرة ثانية

$$(2y)' y' + (2y)(y'') = 6x - 0 - 4[(\sin y)' y' + (\sin y)y'']$$

$$(2y')y' + (2y)y'' = 6x - 4[(\cos y)y' \cdot y' + (\sin y)y'']$$

$$2y'^2 + 2yy'' = 6x - 4(\cos y)y'^2 - 4(\sin y)y''$$

$$2yy'' + 4(\sin y)y'' = 6x - 4(\cos y)y'^2 - 2y'^2$$

نقسم الطرفين على 2

$$yy'' + 2(\sin y)y'' = 3x - 2(\cos y)y'^2 - y'^2$$

$$y''[y + 2\sin y] = 3x - y'^2(2\cos y + 1)$$

$$y'' = \frac{3x - y'^2(2\cos y + 1)}{y + 2\sin y}$$

عامة مشترك
من الطرفين
والجواب هكذا

تمرين (26) ص 206 $e^{xy} + 2y - 3x = \sin y$ المطلوب y''

نشتق الطرفين

$$(x \cdot y)' e^{xy} + 2y' - 3 = (\cos y)y'$$

$$(1y + xy')e^{xy} + 2y' - 3 = (\cos y)y'$$

$$y \cdot e^{xy} + xy' \cdot e^{xy} + 2y' - 3 = y'(\cos y)$$

نشتق مرة ثانية

$$y' e^{xy} + y(e^{xy})' + (xy')' e^{xy} + xy'(e^{xy})' + 2y'' - 0 = y'(\cos y)' + y'(\cos y)''$$

$$y' e^{xy} + y[(1y + xy')e^{xy}] + (1y' + xy'')e^{xy} + xy'[(1y + xy')e^{xy}] +$$

$$y' e^{xy} + 1y^2 e^{xy} + xy y' e^{xy} + 1y' e^{xy} + xy'' e^{xy} + xy y' e^{xy} + x^2 y'^2 e^{xy} +$$

$$2y'' = y' \cos y + y'(-\sin y \cdot y')$$

$$2y'' = y' \cos y - y'^2 \sin y$$

$$2y' e^{xy} + [y^2 e^{xy} + 2xy y' e^{xy} + x^2 y'^2 e^{xy}] + y'^2 \sin y =$$

$$y'(\cos y - y'^2 \sin y)$$

$$2y' e^{xy} + e^{xy}(y^2 + 2xy y' + x^2 y'^2) + y'^2 \sin y = y'(-\cos y - 2 + \cos y)$$

$$y' = \frac{2y' e^{xy} + e^{xy}(y^2 + 2xy y' + x^2 y'^2) + y'^2 \sin y}{\cos y - e^{xy} - 2}$$

$$y' = \frac{2y' e^{xy} + e^{xy}(y^2 + 2xy y' + x^2 y'^2) + y'^2 \sin y}{\cos y - e^{xy} - 2}$$

$$y' = \frac{2y' e^{xy} + e^{xy}(y^2 + 2xy y' + x^2 y'^2) + y'^2 \sin y}{\cos y - e^{xy} - 2}$$

مَرْنِ (27) ص 206 $(y-1)^2 = 3xy + e^{4y}$ مطلوب y''

نشتق الطرفين $2(y-1)(y-1)' = 3y + 3xy' = e^{4y} \times 4y'$

$\frac{2(y-1)}{y'} = 3y + 3xy' = 4y' e^{4y}$

نشتق مرة ثانية للطرفين

$2[(y-1)' y' + (y-1) y''] = 3y' + 3y' + 3xy'' = 4y' e^{4y} + 4y' (e^{4y})'$

$2[y' \cdot y' + (y-1) y''] = 6y' + 3xy'' + 4y' e^{4y} + 4y' \cdot e^{4y} \times 4y'$

$2y'y' + 2(y y'' - y'') = 6y' + 3xy'' + 4e^{4y} y' + 16y'^2 e^{4y}$

$2y'^2 + 2yy'' - 2y'' = 6y' + 3xy'' + 4e^{4y} y' + 16y'^2 e^{4y}$

$2yy'' - 2y'' + 3xy'' = 4e^{4y} y' = 6y' - 2y'^2 + 16y'^2 e^{4y}$

$y'' [2y - 2 - 3x - 4e^{4y}] = 6y' - 2y'^2 + 16y'^2 e^{4y}$

$y'' [2(y-1) - 3x - 4e^{4y}] = 2y' (3 - y' + 8y' e^{4y})$

$y'' = \frac{2y' (3 - y' + 8y' e^{4y})}{2(y-1) - 3x - 4e^{4y}}$

مَرْنِ (28) $(x+y)^2 - e^{y+1} = 3x$ مطلوب y''

نشتق الطرفين $2(x+y)'(x+y)' = e^{y+1} (y+1)' = 3$

$2(x+y)(1+y') - e^{y+1} (y'+1) = 3$

$2(x + xy' + y + yy') - y' e^{y+1} = 3$

$2x + 2xy' + 2y + 2yy' - y' e^{y+1} = 3$

نشتق مرة ثانية

$2 + [2y' + 2xy''] + 2y' + [2y' \cdot y' + 2yy''] - [y' e^{y+1} + y' (e^{y+1})' \times y'] = 0$

$2 + 2y' + 2xy'' + 2y' + 2y'^2 + 2yy'' - y' e^{y+1} - y'^2 (e^{y+1}) = 0$

$2xy'' + 2yy'' = y' e^{y+1} = 2(4y') - 2y'^2 + y'^2 e^{y+1}$

جميع الحدود التي تحتوي على y' في الطرف الأيسر = 2

$y'' (2x + 2y - e^{y+1}) = -2(1 + 2y' + y'^2) + y'^2 e^{y+1}$

$y'' [2(x+y) - e^{y+1}] = -2(1+y')^2 + y'^2 e^{y+1}$

$y'' = \frac{-2(1+y')^2 + y'^2 e^{y+1}}{2(x+y) - e^{y+1}}$

مَرَبِن (29) ص 206 [a] المطلوب $f(x) = \sin^{-1}(x^3+1)$ $f'(x)$

$$[\sin^{-1} f(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \times f'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}} \times (x^3+1)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}} \times 3x^2$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$ [b]

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \times (\sqrt{x})'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)x}}$$

$$[\cos^{-1} f(x)]' = \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \times f'(x)$$

مَرَبِن (30) [a] $f(x) = \cos^{-1}(x^2+x)$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}} \times (2x+1) = \frac{-(2x+1)}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}}$$

[b] $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}} \times \left(\frac{0 \times x - 2 \times 1}{x^2}\right) = \frac{-2}{x^2 \sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}}$$

$$= \frac{-2}{x^2 \left[\frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \right]} = \frac{-2}{x \sqrt{x^2-4}}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2} \\ &= \sqrt{1-\frac{4}{x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \end{aligned}$$

لأن $x^2 > 4$

$$[\tan^{-1} x]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$[\tan^{-1} f(x)]' = \frac{f'(x)}{1-[f(x)]^2}$$

مَرَبِن (31) [a] $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'}{1-(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}$$

[b] $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{-1}{x^2 \left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{-1}{x^2-1}$$

مَرَنِي (32) 206, $f(x) = \sqrt{2 + \tan^{-1} x}$ [a]

$f'(x) = \frac{(2 + \tan^{-1} x)^{\frac{1}{2}}}{2 \sqrt{2 + \tan^{-1} x}} = \frac{0 + \frac{1}{1+x^2}}{2 \sqrt{2 + \tan^{-1} x}}$
 $= \frac{1}{2 \sqrt{2 + \tan^{-1} x}} \times \frac{1}{(1+x^2)}$

$f(x) = e^{\tan^{-1} x}$ [b]
 $f'(x) = e^{\tan^{-1} x} \times (\tan^{-1} x)'$

$= e^{\tan^{-1} x} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$

مَرَنِي (33) $f(x) = 4 \sec(x^4)$ [a]

$f'(x) = 4 [\sec x^4 \tan x^4] (x^4)'$
 $= 4 (\sec x^4 \tan x^4) (4x^3)$
 $= 16x^3 (\sec x^4 \tan x^4)$

$f(x) = 4 \sec^{-1}(x^4)$ [b]

$f'(x) = 4 \times \frac{1}{|x^4| \sqrt{(x^4)^2 - 1}} \times 4x^3$

$\frac{4x^3}{|x^4| \sqrt{x^8 - 1}} = \frac{4}{x \sqrt{x^8 - 1}}$

مَرَنِي (34) $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ [a]

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \times \left(\frac{1}{x}\right)'$
 $= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \times \frac{-1}{x^2}$

$1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$

$= \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}} \times \frac{-1}{x^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \times \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$

$f(x) = \csc^{-1} x$ [b]

$f'(x) = \frac{-1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} \times 1$