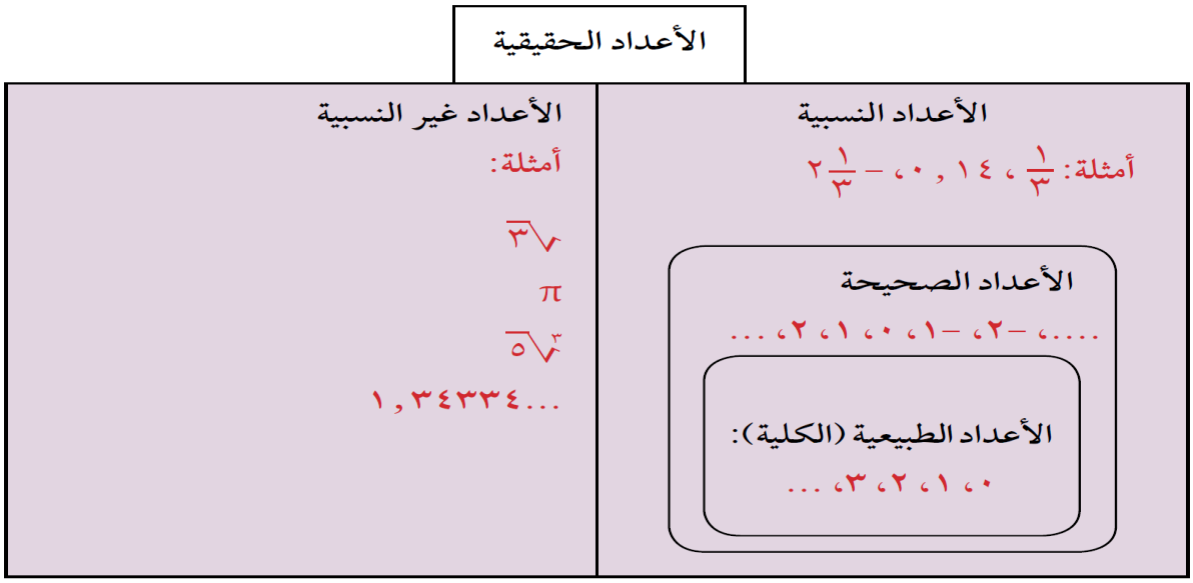
تجميع قوانين ونظريات الرياضيات

فصل اول 2025 صف عاشر



الفترات:

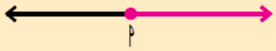
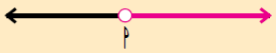
أولا: الفترات المحدودة

الجدول التالي يوضح أنواع الفترات المحدودة: لتكن أ، ب أعدادًا حقيقية.

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ، ب]	مغلقة	أ ≤ س ≤ ب	
(أ، ب)	مفتوحة	أ < س < ب	
[أ، ب)	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ ≤ س < ب	
(أ، ب]	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ < س ≤ ب	
الأعداد أ، ب هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث أ الحد الأدنى للفترة، ب الحد الأعلى للفترة.			

ثانيا: الفترات غير المحدودة

الجدول التالي يوضح بعض الفترات غير المحدودة: ليكن أ، ب ∈ ح.

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ، ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من الأعلى	س ⩾ أ	
(أ، ∞)	مفتوحة وغير محدودة من الأعلى	س > أ	
(−∞، ب]	نصف مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س ⩽ ب	
(−∞، ب)	مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س < ب	

حل المتباينات:

استخدام خاصية المعكوس الضربي في حل المتباينات.

عندما تضرب طرفي متباينة في عدد سالب أو تقسم طرفي متباينة على عدد سالب، اعكس علاقة الترتيب.

معلومة مفيدة:

إذا كان أ < ب، جـ > ٠، فإن

أجـ < ب جـ ، $\frac{أ}{جـ} < \frac{ب}{جـ}$.

إذا كان أ > ب، جـ > ٠، فإن

أجـ > ب جـ ، $\frac{أ}{جـ} > \frac{ب}{جـ}$.

انتبه:

في حالة حل المتباينات مثل:

٢س > ٢س − ١

٢س − ٢س > − ١

٠ × س > − ١

مجموعة حلها ح.

بينما المتباينة الثانية: ٠ × س > −١ ليس لها حلول.

القيمة المطلقة:

تعريف:

لكل عدد حقيقي س يكون:

$$|س| = \begin{cases} س & \text{إذا كان } س > ٠ \\ ٠ & \text{إذا كان } س = ٠ \\ -س & \text{إذا كان } س < ٠ \end{cases}$$

بعض خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية

ليكن أ، ب ∈ ح

١) $|أ| \geq ٠$

٢) $|-أ| = |أ|$

٣) $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$

٤) $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$، حيث ب ≠ ٠

٥) $|أ| \leq أ$

٦) $|أ - ب| = |ب - أ|$

حل معادلة القيمة المطلقة:

نتيجة

١) إذا كان أ عددًا حقيقيًّا موجبًا فإن حل المعادلة $|س| = أ$ هو: س = أ أو س = −أ وتكون مجموعة الحل {−أ، أ}.

٢) إذا كان أ عددًا حقيقيًّا سالبًا فإن المعادلة $|س| = أ$ مجموعة حلها ∅

٣) إذا كان أ = ٠ فإن $|س| = أ$ مجموعة حلها {٠}.

معلومة مفيدة:

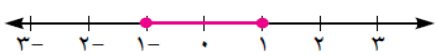
المجموعة الخالية نعبر عنها بأحد الرمزين { } أو ∅

عند حل المعادلة $|س| = |ص|$ نستخدم طريقة المساواة، نضع س = ص أو س = −ص. ونحل المعادلات أو نستخدم طريقة تربيع الطرفين ثم نحل المعادلة الناتجة ونتحقق من القيم بالتعويض عن المجهول لتحديد مجموعة الحل.

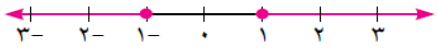
حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن أيضًا حل متباينات تتضمن قيمًا مطلقة باستخدام خط الأعداد.

يبيّن التمثيل البياني الأول حلول المتباينة $|س| \geq ١$.



يبيّن التمثيل البياني الثاني حلول المتباينة $|س| \leq ١$.



تعميم

ليكن أ عددًا حقيقيًّا موجبًا.

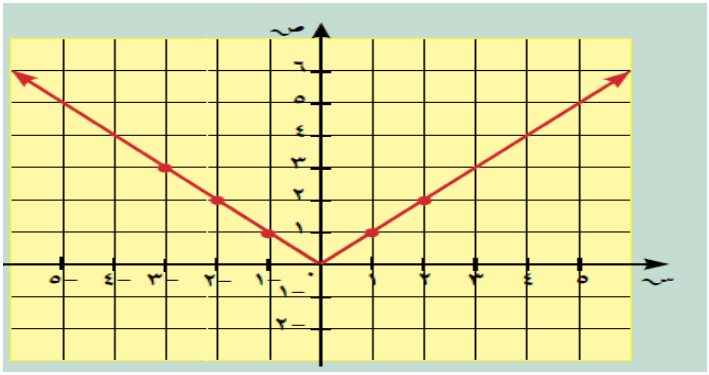
١) $|س| \geq أ$ تكافئ $-أ \geq س \geq أ$

٢) $|س| \leq أ$ تكافئ $س \leq أ$ أو $س \geq -أ$

دالة القيمة المطلقة:

يمكن أيضًا كتابة ص = |س| دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

$$\text{ص} = \begin{cases} \text{س} & : \text{س} > 0 \\ 0 & : \text{س} = 0 \\ -\text{س} & : \text{س} < 0 \end{cases}$$



رأس منحنى الدالة ص = |أ س + ب| + جـ هو النقطة $\left(-\frac{\text{ب}}{\text{أ}} ، \text{جـ}\right)$

التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة:

دالة المرجع هي دالة نستخدم بيانها للحصول على بيان دوال أخرى بإجراء بعض التحويلات الهندسية.

بعض دوال المرجع هي: ص = أ س حيث أ ≠ ٠ ، ص = س^{٢} ، ص = |س|، ص = − |س|، ...

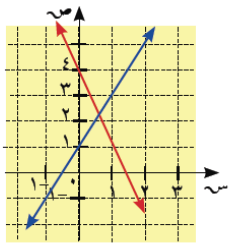
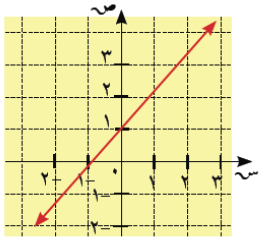
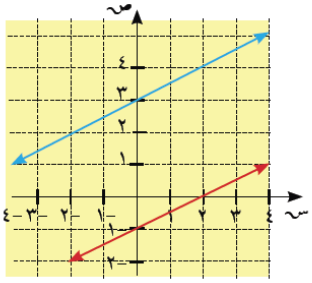
- الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| حيث ل ∈ ع$_{+}$ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليسار .
- الرسم البياني للدالة ص = |س − ل| حيث ل ∈ ع$_{+}$ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليمين .
- الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| − ك هو انسحاب أفقي ورأسي معًا لرسم الدالة ص = |س|.

التمثيل البياني للدالة ص = |س| ± ك ينتج من انسحاب التمثيل البياني للدالة ص = |س| إلى الأعلى (أو إلى الأسفل) ك وحدة.

وبالمثل التمثيل البياني للدالة ص = − |س| ± ك ينتج من انسحاب التمثيل البياني للدالة ص = − |س| (إلى الأعلى أو إلى الأسفل ك وحدة).

حل نظام معادلتين خطيتين:

يمكن لنظام معادلتين خطيتين أن يكون له حل واحد أو لا حل، أو عدد لانهائي من الحلول.

المستقيمان متقاطعان	المستقيمان منطبقان	المستقيمان متوازيان غير منطبقين
		
للنظام حل واحد	للنظام عدد لانهائي من الحلول	لا حل للنظام

يمكن حل نظام معادلتين خطيتين جبريًا بطريقة الحذف. نستخدم خاصية الجمع والضرب في المعادلات.

يمكن أيضًا حل نظام معادلتين جبريًا بطريقة التعويض.

حدّد قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين، وعوّض عنه بقيمته في المعادلة الثانية.

حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد:

- ## طريقة اكمال مربع:

لإكمال المربع نضيف إلى الطرفين $(\frac{1}{2}$ معامل س$)^2$

- ## طريقة القانون العام:

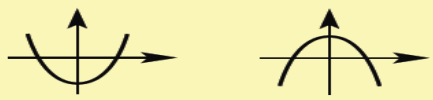
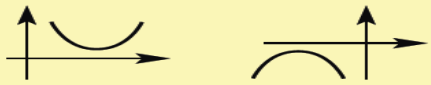
القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد:

حلّ المعادلة: $أ س^2 + ب س + جـ = 0$، حيث $أ \neq 0$ هو:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ}$$

المميز:

المميز: $\Delta = ب^{٢} - ٤ أ جـ$

المميز	نوع جذري المعادلة $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ \neq ٠$	التمثيل البياني للدالة ص = $أ س^{٢} + ب س + جـ$ حيث $أ \neq ٠$
$ب^{٢} - ٤ أ جـ > ٠$ (عدد موجب)	الجذران حقيقيان (مختلفان)	
$ب^{٢} - ٤ أ جـ = ٠$	الجذران حقيقيان متساويان	
$ب^{٢} - ٤ أ جـ < ٠$ (عدد سالب)	جذران غير حقيقيين	

عند رسم بيان

ص = $أ س^{٢} + ب س + جـ$

حيث $أ \neq ٠$ ، يكون رأس المنحنى

عند س = $\frac{-ب}{٢أ}$

مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة:

إذا كان جذرا المعادلة: $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ هما م، ن

فإن: م + ن = $-\frac{ب}{أ}$ ، م × ن = $\frac{جـ}{أ}$

إيجاد المعادلة التربيعية بمعلوميه جذراها:

ليكن م، ن جذري المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد

∴ المعادلة تكون على الصورة: (س − م)(س − ن) = ٠

∴ $س^{٢} - (م + ن) س + م ن = ٠$

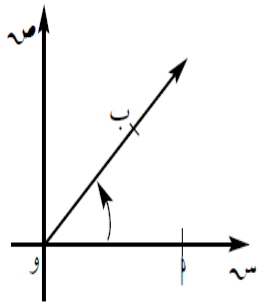
يوجد عدد لا نهائي من المعادلات يكون جذرا كل منها م، ن

وكلّ منها على الصورة: ك[س^{٢} – (م + ن)س + م ن] = ٠

حيث (ك) أي عدد حقيقي ≠ صفرًا.

الزاوية الموجهة:

تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان الضلع الابتدائي لها ينطبق على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها نقطة الأصل كما في الشكل المقابل.



تكون الزاوية الموجهة موجبة إذا كان الانتقال من الضلع الابتدائي $\overleftarrow{وأ}$ إلى الضلع النهائي $\overleftarrow{وب}$ عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كان الانتقال من $\overleftarrow{وأ}$ إلى $\overleftarrow{وب}$ مع اتجاه دوران عقارب الساعة.

الزاوية الربعية

هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات مثل الزوايا ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° أو –٩٠°، –١٨٠°، –٢٧٠°، –٣٦٠°.

القياس الدائرى للزاوية:

تعريف:

القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

ويرمز إليه بالرمز هـ^{د}.

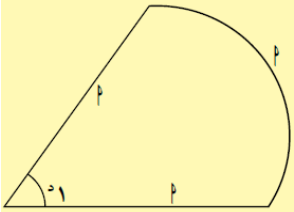
فإذا رمزنا إلى طول القوس بالرمز (ل) وإلى طول نصف القطر بالرمز نق

فإن $هـ^{د} = \frac{ل}{نق}$ ومنها $ل = هـ^{د} نق$

وحدة قياس الزوايا لهذا النوع من القياس تسمى **الراديان** ويرمز لها بالرمز (١^{د})

تعريف الزاوية النصف قطرية: Radial Angle

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.
وقياس الزاوية نصف القطرية يساوي ١ راديان (١ᵈ).

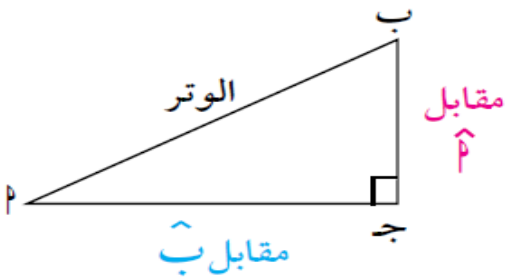


العلاقه بين القياس الدائرى والستينى للزاوية:

قانون: إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري هـ ᵈ وقياسها الستيني س ° فإن:

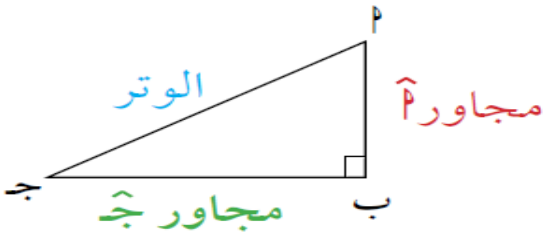
$$\frac{\text{هـ}^{د}}{\pi} = \frac{\text{س}^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} \qquad \text{ومنها س}^{\circ} = \text{هـ}^{د} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi} \qquad \text{هـ}^{د} = \text{س}^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$$

النسب المثلثية:



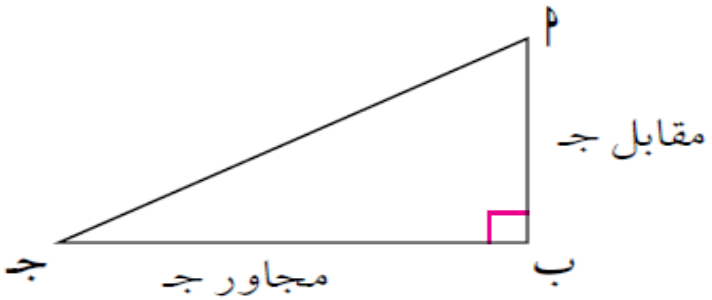
$$\text{جيب الزاوية} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{جا م} = \frac{\text{مقابل } \hat{م}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{م ب}}$$



$$\text{جيب تمام الزاوية} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{مجاور } \hat{جـ}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{م جـ}}$$



$$\text{ظل الزاوية} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\text{طا جـ} = \frac{\text{م ب}}{\text{ب جـ}}$$

مقلوبات النسب المثلثية:

$$\text{قتا}^2 = \frac{1}{\text{جا}^2} \Leftarrow \quad \text{قتا}^2 \times \text{جا}^2 = 1$$

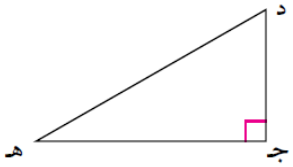
$$\text{قا}^2 = \frac{1}{\text{جتا}^2} \Leftarrow \quad \text{قا}^2 \times \text{جتا}^2 = 1$$

$$\text{ظتا}^2 = \frac{1}{\text{ظا}^2} : \text{ظا}^2 \neq 0 \quad \text{ظا}^2 \times \text{ظتا}^2 = 1$$

إيجاد قياس زاوية علم جيبها او جيب تمامها

تريد معرفة قياس زاوية، تبين العلاقة التالية الترابط بين قياس الزاوية ونسبها المثلثية.

إذا كان جاد = ص فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية د



ننقر على : ص | Sin | shift | لإيجاد د

وإذا كان جتاد = س فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية د

غالبًا ما تستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياسات هذه الزوايا.

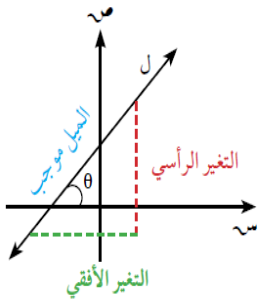
ننقر على: س | Cos | shift | لإيجاد د

إيجاد قياس زاوية إذا علم ظلها:

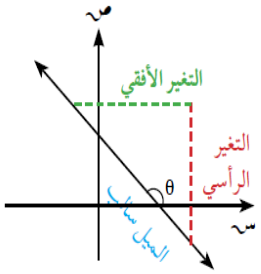
قد تعلم ظل زاوية وتريد معرفة قياس هذه الزاوية.تبين العلاقة التالية الترابط بين قياس الزاوية ونسبتها المثلثية:

إذا كان ظا θ = س فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية θ

ننقر على: س | tan | shift | لإيجاد θ



إذا كان المستقيم ل يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن θ تسمى زاوية ميل المستقيم ويكون ظاθ = ميل المستقيم = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$



إذا كانت معادلة المستقيم: ص = م س + ب فإن ميل المستقيم = م.

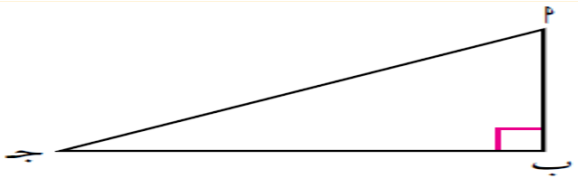
النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة:

جا ٤٥° = جتا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ؛ ظا ٤٥° = ١

جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ظا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

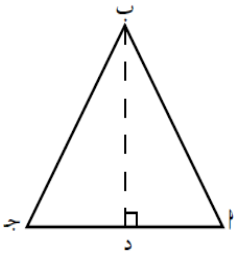
نظرية فيثاغورث لحل المثلث القائم:



بتطبيق نظرية فيثاغورث

(أجـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

المثلث ثلاثيني ستيني 30° – 60° triangle



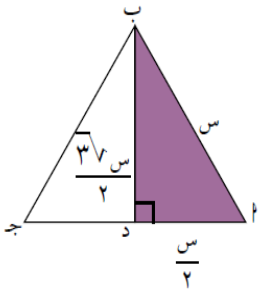
∵ Δ أب جـ مثلث متطابق الأضلاع.

∵ $\overline{ب د} \perp \overline{أجـ}$.

∴ $\overline{ب د}$ هي منصف الزاوية أبجـ.

ومنه ق(أبد) = $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٣٠° ، ق(أ) = ٦٠°

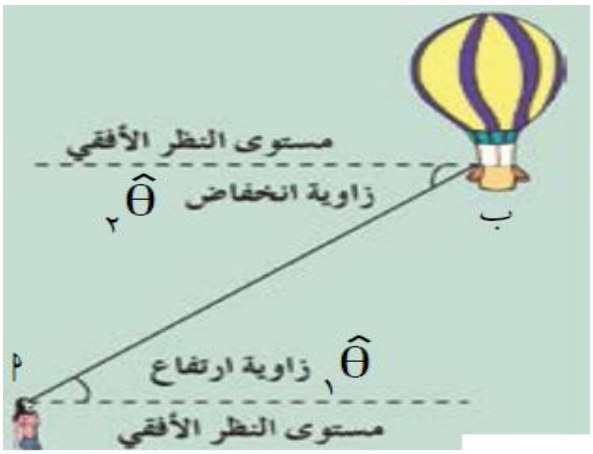
∴ أب د مثلث ثلاثيني ستيني (٣٠°، ٦٠°، ٩٠°).



إذا كان طول الضلع $\overline{أجـ}$ يساوي س فإن أد = $\frac{س}{٢}$

وباستخدام نظرية فيثاغورث في المثلث أب د نحصل على ب د = $\frac{س\sqrt{٣}}{٢}$.

كذلك $\overline{ب د}$ هي المنصف العمودي للقطعة $\overline{أجـ}$.



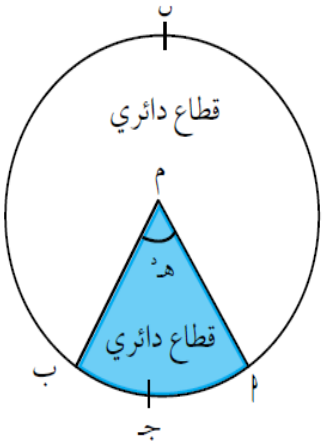
– زاوية الارتفاع: إذا كانت نقطة ما أعلى من مستوى النظر الأفقي.

– زاوية الانخفاض: إذا كانت نقطة ما أدنى من مستوى النظر الأفقي.

القطاع الدائرى و القطعة الدائرية:

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ ل نق

$\frac{1}{2}$ هـ^{د} نق^{2}

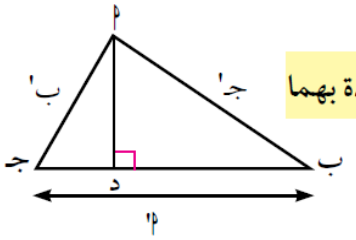


تذكر:

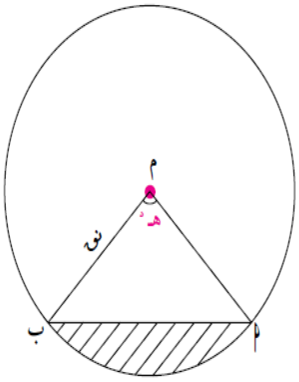
محيط الدائرة = ٢ π نق

مساحة الدائرة = π نق^{2}

طول القوس ل = هـ^{د} × نق



مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما



مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^{2} (هـ^{د} – جاهـ^{د})

تذكر:

هـ^{د} هو قياس الزاوية بالراديان.

انتبه لوضع الآلة الحاسبة.

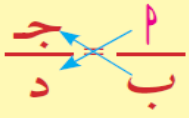
التناسب:

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

خاصيّة الضرب التقاطعي:

ليكن أ، ب، جـ، د ∈ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن أ د = ب جـ



الأعداد المتناسبة:

ليكن ٢، ب، جـ، د ∈ ح*

إذا كان $\frac{٢}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه يقال أن ٢، ب، جـ، د أعداد متناسبة.

وإذا كانت ٢، ب، جـ، د أعداد متناسبة فإن $\frac{٢}{ب} = \frac{جـ}{د}$

ويسمى ٢، د طرفي التناسب، كما يسمى جـ، ب وسطي التناسب.

معلومة رياضية:

إذا كانت ٢، ب، جـ أعدادًا متناسبة مع الأعداد د ، هـ ، و ، فإن:

$\frac{٢}{د} = \frac{ب}{هـ} = \frac{جـ}{و} = م$

حيث م عدد ثابت

الأعداد التى فى تناسب متسلسل:

ليكن ٢، ب، جـ ∈ ح*

إذا كان $\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإنّه يقال إن ٢، ب، جـ في تناسب متسلسل (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت ٢، ب، جـ في تناسب متسلسل فإنّ: $\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

ويسمى ب الوسط المتناسب للعددين ٢، جـ أو الوسط الهندسي لهما كما يسمى ٢، جـ طرفي التناسب.

إذا كان:

$\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ (أي أن ٢، ب، جـ، د في تناسب متسلسل) حيث م عدد ثابت

فإن:

جـ = د × م ، ب = د × $م^{٢}$ ، ٢ = د × $م^{٣}$ فإن $ب^{٢} = ٢جـ$

التغير الطردى:

إذا كانت ص تتغير طرديًّا مع س أي ص $\propto$ س فإن:
ص = ك س حيث ك ثابت لا يساوي الصفر
والعكس صحيح.

يمكن تمثيل دالة التغير الطردي: ص = ك س بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل.

يمكن كتابة المعادلة الخطيّة ص = ك س بالصورة: ك = $\frac{ص}{س}$ حيث س $\neq$ ٠

الثابت ك = ميل الخط المستقيم الذي يمثّل المعادلة بيانيًّا.

إذا كانت ص $\propto$ س فمعنى ذلك أن $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}}$: المقام $\neq$ صفر

التغير العكسى:

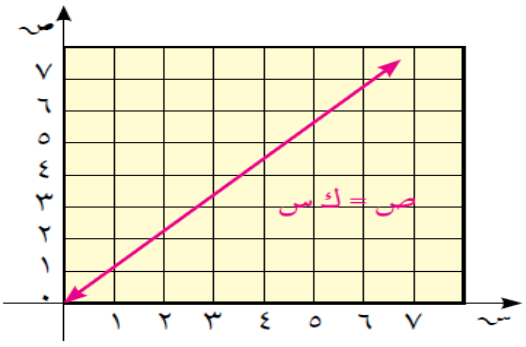
س ص = ك أو ص = $\frac{ك}{س}$ ، ك $\neq$ ٠

ويمكن التعبير عن التغيّر العكسي بالصورة ص $\propto \frac{١}{س}$

$س_١ ص_١ = س_٢ ص_٢ = ك$

ومن ذلك نستنتج أن $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

تغيّر طردي



ص $\propto$ س
ص = ك س ك > ٠
ك = $\frac{ص}{س}$
= ثابت التغيّر

تغيّر عكسي



ص $\propto \frac{١}{س}$
ص = $\frac{ك}{س}$: ك > ٠
ك = س ص
= ثابت التغيّر

التشابة:

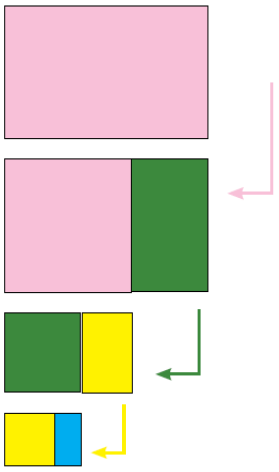
يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:
- قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.
- أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

والعكس صحيح.

وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين **نسبة التشابه**.

المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين.

الرمز ~ يعني تشابه الرمز ≅ يعني تطابق



المستطيل الذهبي Golden Rectangle

هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى جزئين، أحدهما مربع والآخر مستطيل.

والمستطيل الناتج يكون مستطيلًا ذهبيًّا آخر ويكون مشابهًا للمستطيل الأصلي.

يبيّن الشكل المقابل نمطًا من المستطيلات الذهبية.

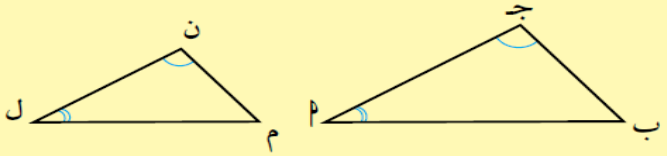
النسبة الذهبية Golden Ratio

في كل مستطيل ذهبي، نسبة طول الضلع الأكبر إلى طول الضلع الأصغر تسمى النسبة الذهبية وتساوي $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$: ١ أي حوالى ١,٦١٨ : ١.

تشابة المثلثات:

نظرية (١)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.



Δأب جـ ~ Δل م ن.

نظرية (٢)

يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.

نظرية (٣)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.

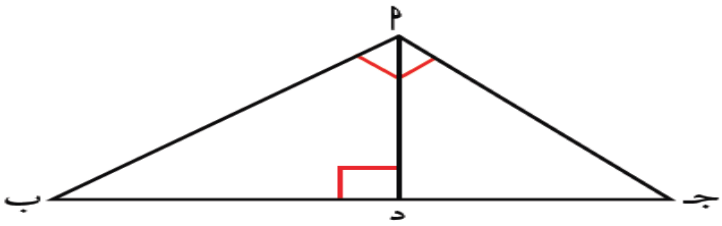
تشابة المثلث قائم الزاوية:

نظرية (١)

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.

نتيجة (١)

مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.



$(أد)^{٢} = ب د \times جـ د$

إذا كان Δ أ ب جـ قائم الزاوية أ، $\overline{أد} \perp \overline{جـ ب}$:

١ $(أب)^{٢} = ب د \times ب جـ$

٢ $(أجـ)^{٢} = جـ د \times جـ ب$

٣ $أب \times أجـ = أد \times ب جـ$

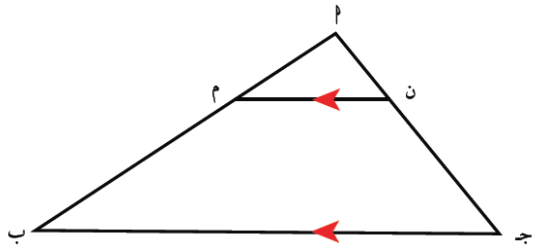
التناسب والتشابة:

نظرية (١) نظرية المستقيم الموازي Parallel Line Theory

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.

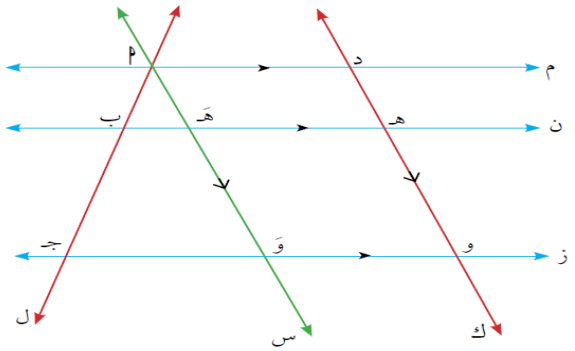
المعطيات: أ ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{م ن} \parallel \overleftrightarrow{ب جـ}$.

المطلوب: إثبات أن $\frac{أ م}{م ب} = \frac{أ ن}{ن جـ}$.



نظرية (٢) نظرية طاليس Thales Theory

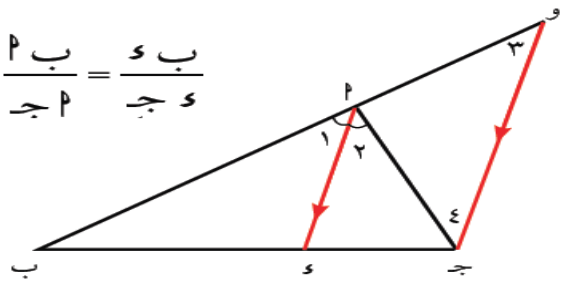
إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



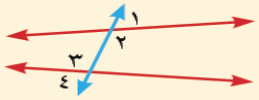
نظرية (٣) نظرية منصف الزاوية في مثلث

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

$$\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$$

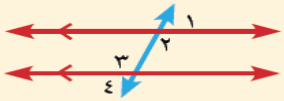


معلومة رياضية:



(٢)، (٣): زاويتان متبادلتان داخليًّا

(١)، (٤): زاويتان متبادلتان خارجيًّا



ق(٢) = ق(٣): التوازي والتبادل الداخلي

ق(١) = ق(٤): التوازي والتبادل الخارجي

المتتاليات و المتتابعات:

المتتالية الحقيقية هي دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها مرتبة على الصورة {١، ٢، ٣، ٤، ... ، م} ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

ملاحظة: يمكن التعبير عن المتتالية بكتابة حدودها ($ح_1$، $ح_2$، $ح_3$، ...)

(المتتالية ممكن ان تكون منتهيه او غير منتهيه حسب عدد عناصرها)

المتتالية الحسابية:

المتتالية (المتتابعة) الحسابية هي متتالية ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة عددًا ثابتًا. يسمى هذا الناتج أساس المتتالية ويرمز إليه بالرمز ء. وعلى ذلك $ح_{ن+1} - ح_ن = ء$ أو $ح_{ن+1} = ح_ن + ء$.

الحد النونى للمتتالية الحسابية:

$ح_ن = ح_1 + (ن - 1)ء$ لكل ن ∈ صـ+.

لاحظ أن $ء = \frac{ح_ن - ح_ك}{ن - ك}$: ن ≠ ك

الوسط الحسابى:

إذا كونت أ، ب، جـ متتالية حسابية حيث أ، ب، جـ هي عناصر من ح (أعداد حقيقية):

$ب = \frac{أ + جـ}{٢}$ أي أن ب هو **الوسط الحسابي** للعددين أ، جـ.

بصورةٍ عامّةٍ

إذا كانت (أ، ب، جـ، د، ...، ف، ص) متتالية حسابية فإن ب، جـ، د، ...، ف تسمى أوساطًا حسابية للعددين أ، ص.

وتسمى عملية إيجاد الأوساط الحسابية إدخال أوساط حسابية بين العددين أ، ص.

مجموع الحدود للمتتالية الحسابية:

مجموع ن حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية $(ح_ن)$ يعطى بالقاعدة:

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن) \quad \text{أو} \quad جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ح_١ + (ن - ١)ء]$$

حيث $ح_ن$ هو الحد الذي ترتيبه ن من المتتالية الحسابية وحدها الأول $ح_١$.

.....

المتتالية الهندسية:

المتتاليّة الهندسيّة: هي متتالية ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة، يساوي عددًا حقيقيًّا ثابتًا غير صفري،

فيكون $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = ر$ حيث $ح_ن \neq ٠$.

لكل ن $\in$ صـ$_+$، ر عدد حقيقي ثابت يسمى أساس المتتالية الهندسية common ratio

الحد النونى للمتتالية الهندسية:

$$ح_ن = ح_1 \times ر^{ن-1}$$

$$ح_ن = ح_ك \times ر^{ن-ك}$$

الوسط الهندسى:

إذا كوَّنت أ، ب، جـ متتالية هندسية حيث أ، ب، جـ أعداد حقيقية غير صفرية وحيث أجـ > ٠ فإن: $\frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب}$ ومنه $ب^2 = أجـ$

$$\therefore \quad ب = \pm\sqrt{أجـ}$$

يسمى ب وسطًا هندسيًّا بين العددين أ، جـ، أي أن: $\sqrt{أجـ}$ أو $-\sqrt{أجـ}$ وسطًا هندسيًّا بين العددين أ، جـ.

في المتتالية الهندسية (أ، ب، جـ، د، ...، ك، ل). تسمى ب، جـ، د، ...، ك **أوساطًا هندسية** للعددين الحقيقيين أ، ل.

وتسمى عملية إيجاد ب، جـ، د، ...، ك عملية إدخال أوساط هندسية بين العددين أ، ل.

مجموع الحدود للمتتالية الهندسية:

إذا كانت $(ح_ن)$ متتالية هندسية، $جـ_ن = ح_1 + ح_2 + ح_3 + ... + ح_ن$ هو مجموع ن حدًّا الأولى، فإن:

١ $جـ_ن = ح_1 \times \frac{ر^ن - 1}{ر - 1}$ أو $جـ_ن = ح_1 \times \frac{1 - ر^ن}{1 - ر}$ ، $ر \neq 1$

٢ إذا كانت $ر = 1$ فإن $جـ_ن = ن ح_1$