محمد عمر الخطيب

اوراق عمل

مادة

الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الدراسي الثاني

2024/2023

اسم الطالب : .....

المدرســـــة : .....

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

Khateebacademy.com

محمد عمر الخطيب

الوحدة الرابعة : تطبيقات التفاضل

4-3 القيم العظمى والصغرى

4-4 الدوال المتزايدة والمتناقصة

4-5 التقعر واختبار المشتقة الثانية

4-6 نظرة عامة على رسم المنحنيات

4-7 القيم المثلى

4-8 المعدلات المرتبطة

4-9 معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

الوحدة الخامسة : التكامل

5-1 الدوال الاصلية

5-2 المجموع والرمز سيجما

5-3 المساحة

5-4 التكامل المحدود

5-5 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

5-6 التكامل بالتعويض

قواعد الاشتقاق (مراجعة من الفصل الأول)

#	الدالة	المشتقة	#	الدالة	المشتقة
1	c	0	15	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
2	x^n	nx^{n-1}	16	$\log_a(f)$	$\frac{f'}{f\times\ln a}$
3	$f\pm g$	$f'\pm g'$	17	$\sin x$	$\cos x$
4	$c\times f$	$c\times f'$	18	$\cos x$	$-\sin x$
5	$f\times g$	$f'\times g+f\times g'$	19	$\tan x$	$\sec^2 x$
6	$\frac{f}{g}$	$\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$	20	$\cot x$	$-\csc^2 x$
7	$\frac{c}{g}$	$\frac{-c\times g'}{g^2}$	21	$\sec x$	$\sec x\tan x$
8	$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	22	$\csc x$	$-\csc x\cot x$
9	$(f)^n$	$n(f)^{n-1}\times f'$	23	$\sin^{-1}x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$(f\circ g)(x)$	$f'(g(x))\times g'(x)$	24	$\cos^{-1}x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$y=f(u)$ $u=g(x)$	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$	25	$\tan^{-1}x$	$\frac{1}{1+x^2}$
12	$g=f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(g(x))}$	26	$\cot^{-1}x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
13	a^f	$a^f\times f'\times\ln a$	27	$\sec^{-1}x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
14	e^f	$e^f\times f'$	28	$\csc^{-1}x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

محمد عمر الخطيب

الاعداد (القيم) الحرجة

يعرف العدد الحرج للدالة f بانها النقطة c في مجال الدالة f والتي تكون عندها

اما $f'(x)=0$ او $f'(x)$ غير موجودة

ملاحظة (ممكن ان تكون احدى اطراف الفترة المغلقة اذا حققت احد الشروط السابقة)

ملاحظة: في بيان الدالة f تكون الاعداد الحرجة هي النقاط التي عندها

(1) المشتقة تساوي صفر (مماسات افقية)

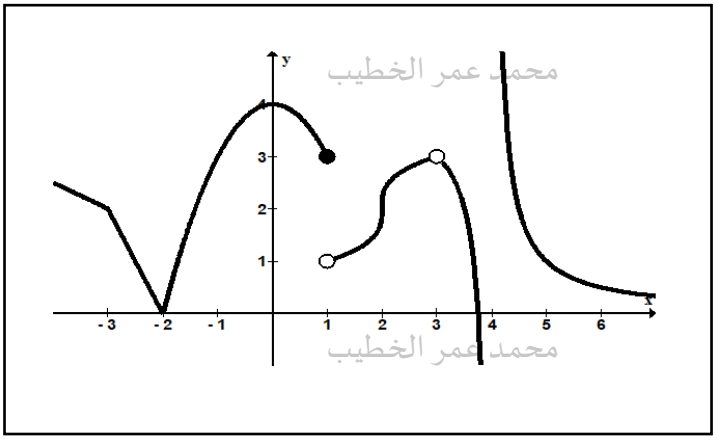
(2) المشتقة غير موجودة عند

(أ) نقاط عدم الاتصال (المعرفة عندها الدالة)

(ب) النقاط التي عندها المماسات الرأسية

(ج) النقاط التي عندها روؤس مدببه (ركن ، ناب)

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f لإكمال الجدول التالي:

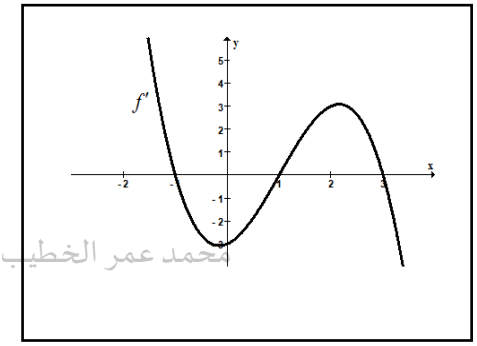


الأعداد الحرجة	$x=2$	$x=1$	$x=0$	$x=-2$	$x=-3$
السبب	مماس رأسي المشتقة غير موجودة	عدم اتصال المشتقة غير موجودة	مماس افقي المشتقة تساوي صفر	رأس مدبب المشتقة غير موجودة	رأس مدبب المشتقة غير موجودة

ملاحظة: ليس للدالة اعداد حرجة عند $x=3$ و $x=4$ لان هذه الاعداد خارج مجال الدالة (ليس لها صورة)

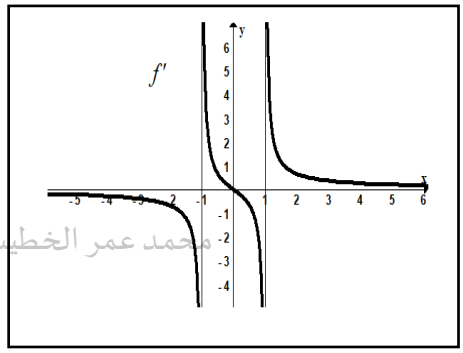
ملاحظة: في بيان الدالة f' تكون الاعداد الحرجة هي نقاط التقاطع مع محور السينات (محور x)
او قيم x التي عندها الدالة f' غير معرفة. (لا يوجد صور للعدد في رسمة f')

(1) بالاعتماد على الشكل المجاورالذي يمثل بيان الدالة f' اوجد الاعداد الحرجة للدالة f



---

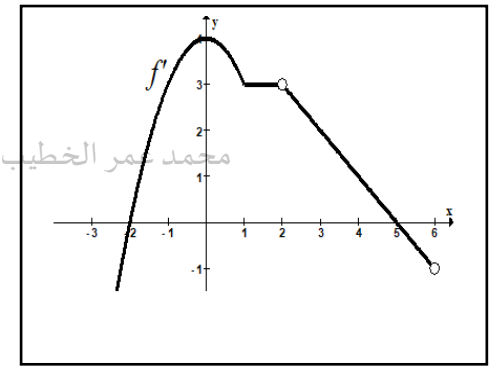
(2) اذا كانت الدالة f معرفه على R ، و الشكل المجاور يمثل بيان الدالة f'
فاوجد الاعداد الحرجة للدالة f



---

(3) اذا كانت الدالة f معرفه على الفترة $(-\infty, 6]$ ، و الشكل المجاور يمثل بيان الدالة f'

فاوجد الاعداد الحرجة للدالة f



محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^3-3x$ **على الفترة** $[-2,3]$.

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+1$ **على الفترة** $[-1,3]$.

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4}$

---

(4) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt{x}$

---

(5) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=e^{x^2-1}$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x+8)$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\dfrac{x^2+12}{x+2}$

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

---

(4) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x-2\cos x$ **على الفترة** $[0,2\pi]$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x-\sin 2x$ **على الفترة** $[0,\pi]$

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sin x+\cos x$

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sin x \cos x$ على الفترة $[0,2\pi]$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=(x^2-3)e^x$

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=|x^2-4|$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^{3/4}-4x^{1/4}$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^{4/3}+4x^{1/3}+4x^{-2/3}$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=(x^{2/5}-3x^{1/5})^2$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\sin^{-1}(1-\frac{1}{x^2})$

مجال الدالة

$-1\le 1-\frac{1}{x^2}\le 1$

$-2\le -\frac{1}{x^2}\le 0$

$2\ge \frac{1}{x^2}\ge 0$

$0\le \frac{1}{x^2}\le 2$

$\frac{1}{2}\le x^2$

$\sqrt{\frac{1}{2}}\le |x|$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\le |x|$

$x\le -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\le x$

$D=\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=\begin{cases}7-2x^2 & x\le 1\\ x^3-12x & x>1\end{cases}$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت للدالة $f(x)=x^4-2a\,x^2+8x$ عدد حرج عند $x=2$ فاوجد قيمة الثابت a

---

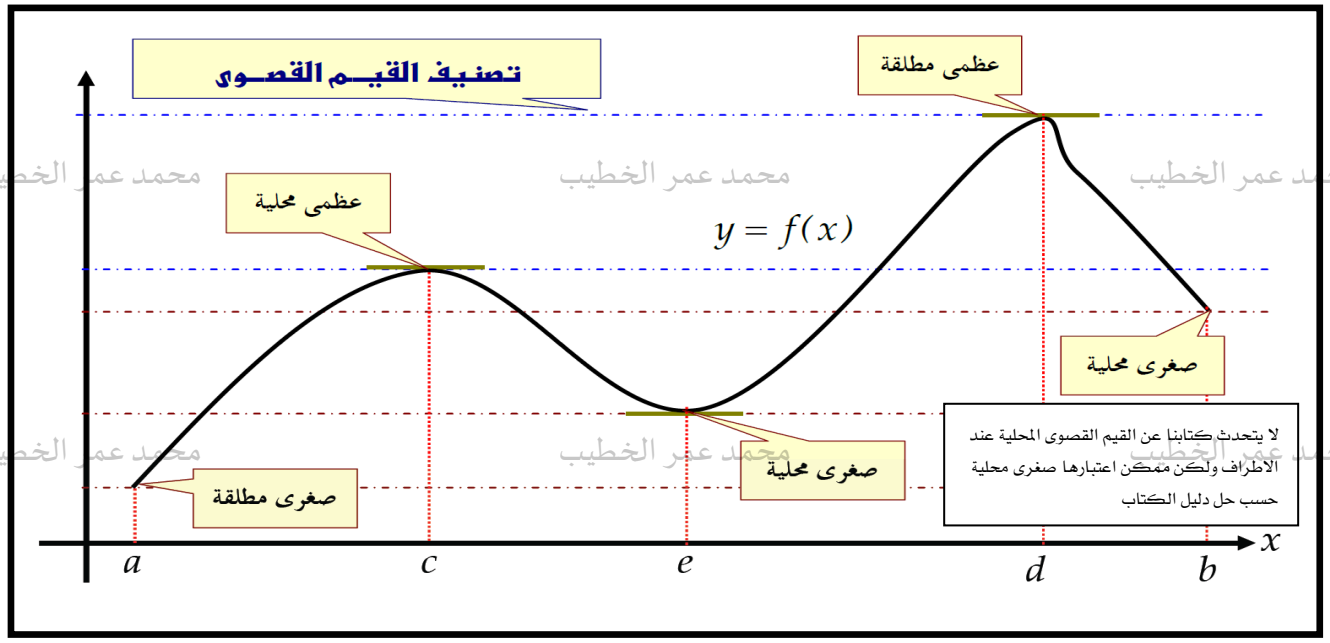
(2) اذا كانت للدالة $f(x)=x^2e^{kx}$ عددا حرجاً عند $x=\frac{2}{3}$ فاوجد قيمة الثابت k

---

(3) اذا كانت للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ اعداد حرجة عند $x=-1, x=2$

فاوجد قيمة الثوابت a,b

القيم القصوى (المطلقة) والقيم القصوى المحلية



القيم القصوى (المطلقة)

اذا كانت f دالة مجالها الفترة S , $c \in S$ فان $f(c)$ تكون:

1. <u>قيمة عظمى مطلقة</u> للدالة f على S اذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل $x \in S$.
2. <u>قيمة صغرى مطلقة</u> للدالة f على S اذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in S$.

ملاحظة:القيم العظمى المطلقة والصغرى المطلقة تسمى القيم القصوى او القيم القصوى المطلقة.

القيم القصوى (المحلية)

اذا كانت c نقطة داخلية في مجال الدالة f فان $f(c)$ تكون:

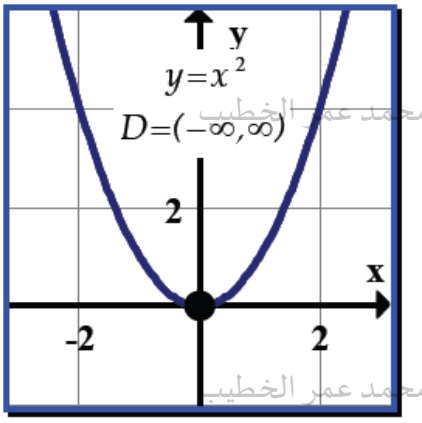
1. <u>قيمة عظمى محلية</u> اذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي c .
2. <u>قيمة صغرى محلية</u> اذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي c .

<u>نظرية فيرمات</u> : اذا كانت $f(c)$ قيمة قصوى محلية فان c عدد حرج للدالة f

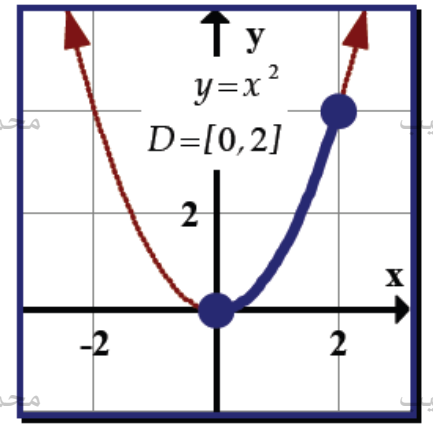
اي ان $f'(c)=0$ او غير موجودة والعكس غير صحيح

الجدول التالي والرسومات البيانية التالية تمثل اشكال مختلفة لقيم قصوى مطلقة.

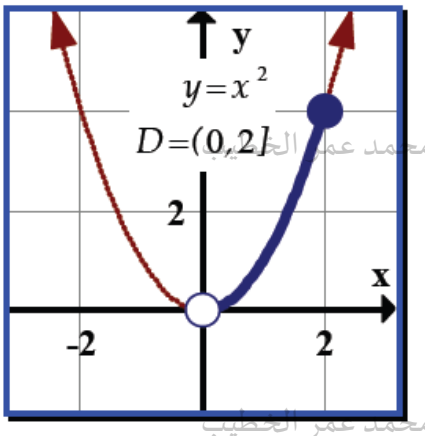
(أ) قيمة صغرى فقط



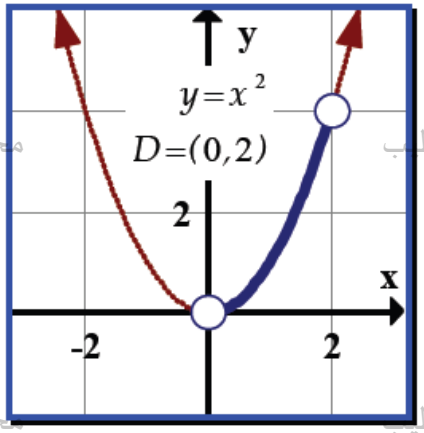
(ب) قيمة عظمى وقيمة صغرى



(ج) قيمة عظمى فقط



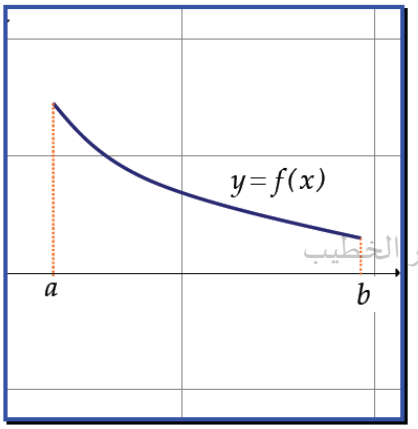
(د) لا توجد قيمة عظمى ولا صغرى



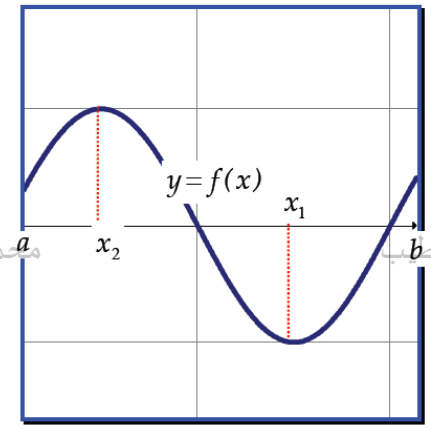
قاعدة الدالة	مجال D	القيم القصوى المطلقة فوق D
(أ) $y=x^2$	$(-\infty,\infty)$	لا يوجد قيمة عظمى مطلقة قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x=0$
(ب) $y=x^2$	$[0,2]$	قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x=2$ قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x=0$
(ج) $y=x^2$	$(0,2]$	قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x=2$ لا يوجد قيمة صغرى مطلقة
(د) $y=x^2$	$(0,2)$	لا توجد قيم قصوى مطلقة

نظرية القيمة القصوى

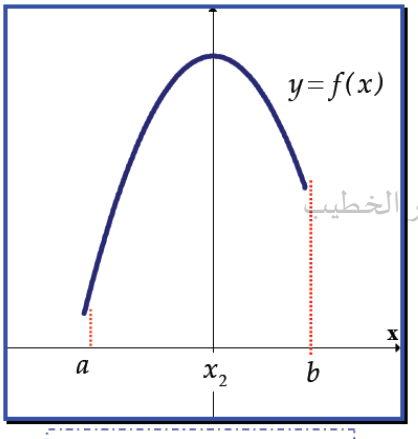
اذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a,b]$ فان الدالة f تكون لها قيمة عظمى (مطلقة) وقيمة صغرى(مطلقة) على هذة الفترة.



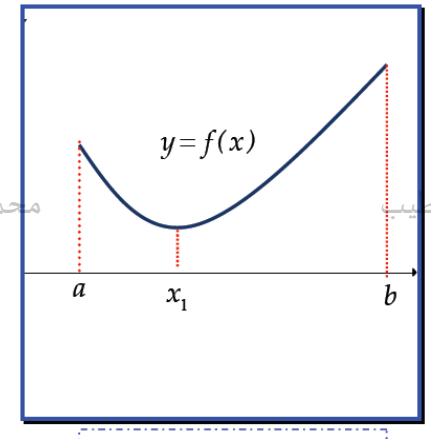
قيمة عظمى وقيمة صغرى
عند النقاط الطرفية



قيمة عظمى وقيمة صغرى
فقط عند نقاط داخلية



قيمة عظمى عند نقطة داخلية
وقيمة صغرى عند نقطة طرفية



قيمة صغرى عند نقطة داخلية
وقيمة عظمى عند نقطة طرفية

ملاحظات:

(1) اذا كانت f لا تحقق الشروط على الفترة المغلقة $[a,b]$ فانه من الممكن ان يكون للدالة f قيمة عظمى (مطلقة) او قيمة صغرى (مطلقة) على هذة الفترة .

(2) اذا كانت مجال الدالة f الفترة المفتوحة (a,b) فانه لا يوجد للدالة f قيمة عظمى (مطلقة) او قيمة صغرى (مطلقة) عند الاطراف.

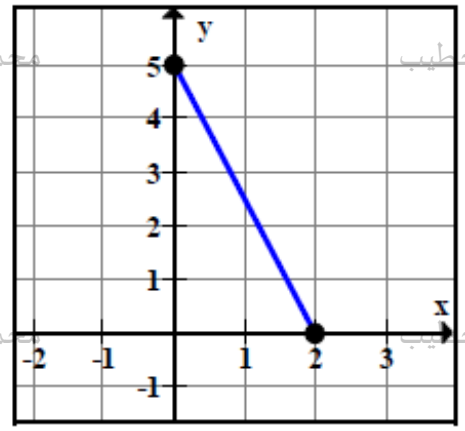
محمد عمر الخطيب

القيم القصوى المطلقة والمحلية بيانياً

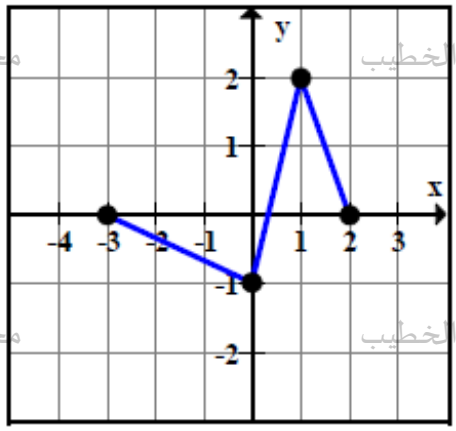
بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f

اوجد في كل حالة مما ياتي القيم القصوى (العظمى المطلقة، الصغرى المطلقة) وحدد مكانها

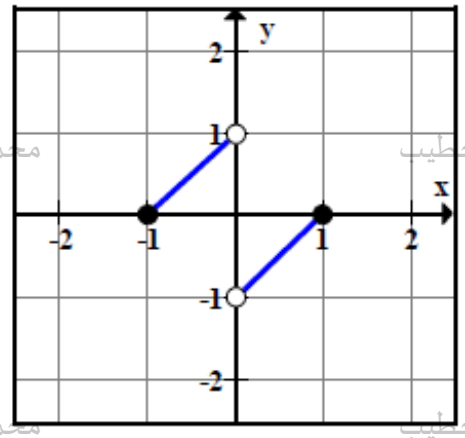
(1)



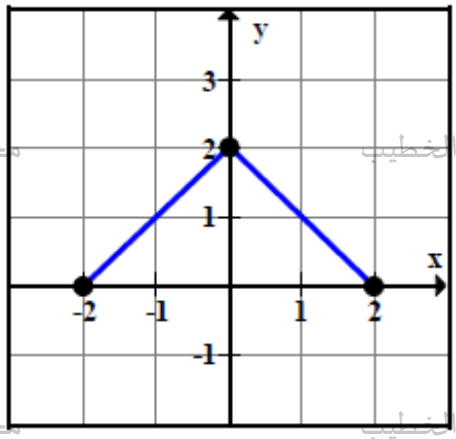
(2)



(3)



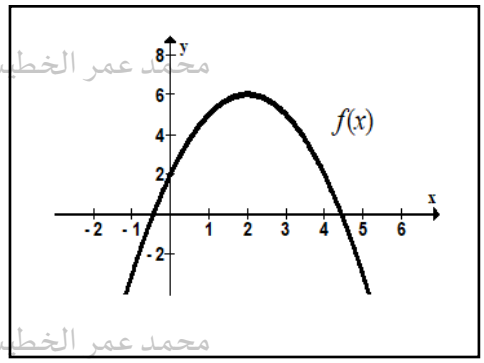
(4)



يمثل كل شكل من الاشكال الاتية بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي

ملاحظة : كل قيمة قصوى مطلقة هي قيمة قصوى محلية ولا داعي لذكر انها قيمة قصوى محلية يكفي ان نقول انها قيمة قصوى مطلقة الا اذا كانت وحيدة

اولاً :

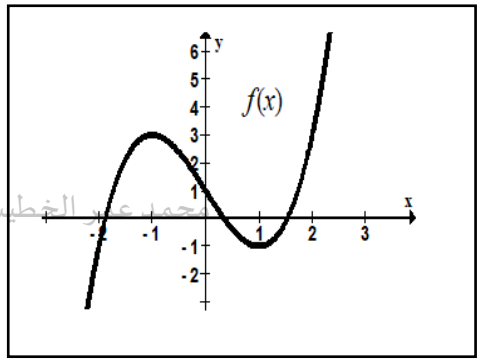


(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي .....

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت).....

ثانياً :

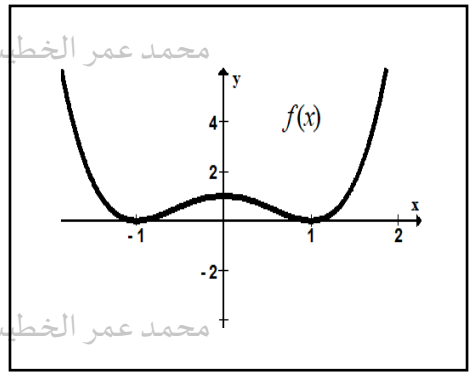


(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي .....

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) .....

ثالثاً :

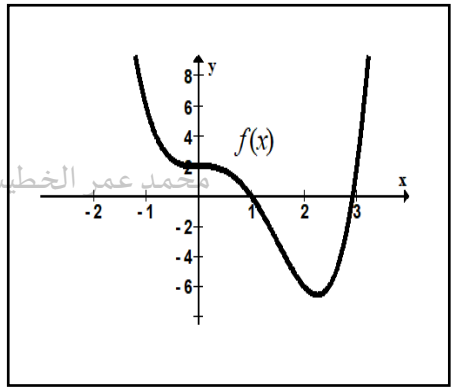


(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي .....

(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) .....

رابعاً :



(أ) الاعداد الحرجة للدالة هي .....

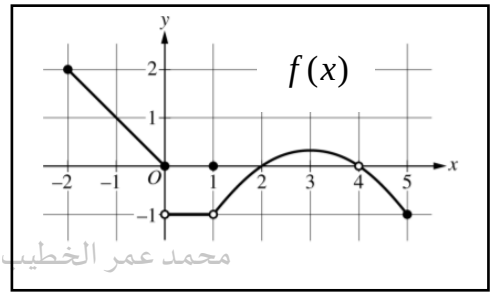
(ب) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....

(ج) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) .....

ملاحظة سيتم مناقشة القيم القصوى المحلية بشكل موسع في الدرس الرابع مع التزايد والتناقص

محمد عمر الخطيب

(1) يمثل الشكل الاتي بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي



(أ) هل الدالة تحقق شروط نظرية القيمة القصوى

على الفترة $[-2,5]$ مع ذكر السبب .....

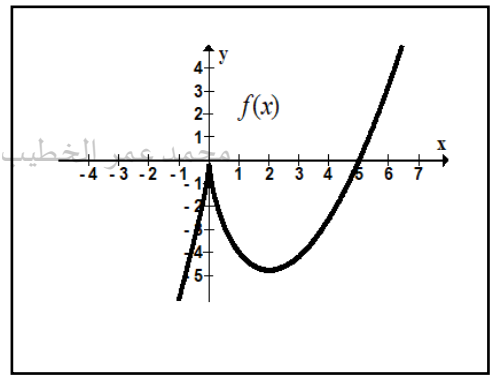
(ب) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) .....

(ج) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) .....

(د) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) عند .....

---

(2) يمثل الشكل الاتي بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي



(أ) هل الدالة تحقق شروط نظرية القيمة القصوى

على الفترة $(-\infty,\infty)$ مع ذكر السبب .....

(ب) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) .....

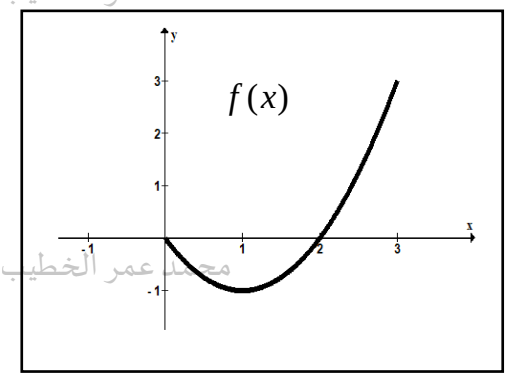
(ج) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) .....

(د) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) عند .....

(هـ) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) عند .....

---

(3) يمثل الشكل الاتي بيان الدالة $f(x)$ اكمل كل مما يأتي



(أ) هل الدالة تحقق شروط نظرية القيمة القصوى

على الفترة $[0,3]$ مع ذكر السبب .....

(ب) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) .....

(ج) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) .....

(د) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....

(هـ) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت).....

محمد عمر الخطيب

القيم القصوى (المطلقة) تحليلاً

اختبار القيم

(1) ايجاد جميع النقاط الحرجة في الفترة المغلقة المعرفة عليها الدالة

(2) ايجاد قيمة الدالة عند النقاط الحرجة واطراف الفترة المغلقة.

(3) تكون اكبر هذه القيم عظمى مطلقة وتكون اصغر هذه القيم صغرى مطلقة.

(1) اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة : $f(x)=x^3-3x+1$ على الفترة $[0,3]$.

---

(2) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x+\frac{1}{x}$ على الفترة $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

---

(3) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ على الفترة $[-3,2]$.

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x^2+e^x$ على الفترة $[0,1]$.

---

(2) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$ على $[0,1]$.

---

(3) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ على الفترة $[-1,1]$.

---

(4) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x\sqrt{3-x}$ على الفترة $[-1,3]$.

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=x^2e^{-x}$ **على** $[0,4]$.

---

(2) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\sin x+\cos x$ **على** $[0,2\pi]$.

---

(3) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\sin^{-1}(x)$

اولاً...

اوجد مجال الدالة

اولاً...

اوجد مجال الدالة

(1) اوجد القيم القصوى للدالة $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$ **على مجالها.**

اولاً...

اوجد مجال الدالة

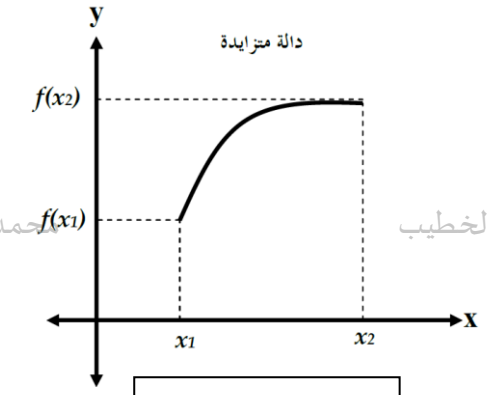
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x<1\\ x^3-12x+12 & 1\le x\le 5\end{cases}$$

(2) اوجد القيم القصوى المطلقة للدالة

محمد عمر الخطيب

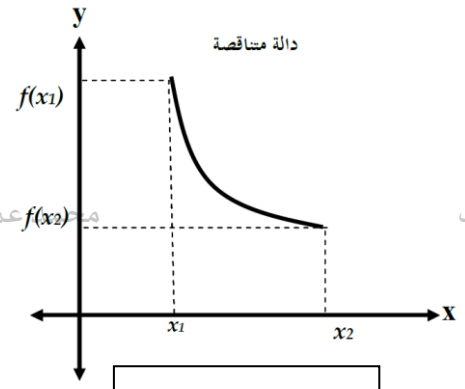
الدوال المتزايدة والمتناقصة

تعريف الدالة المتزايدة والدالة المتناقصة



$$x_1 < x_2$$
$$f(x_1) < f(x_2)$$

كلما زادات قيمة x تزيد قيمة y (العلاقة طردية)



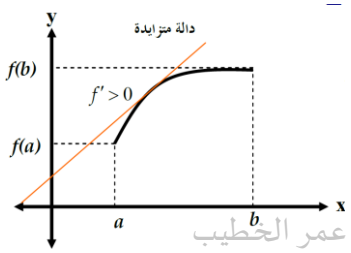
$$x_1 < x_2$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

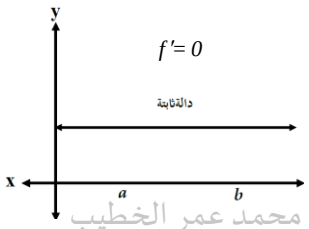
كلما زادات قيمة x تقل قيمة y (العلاقة عكسية)

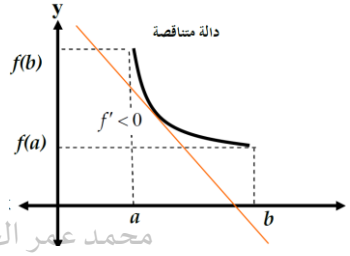
العلاقة بين سلوك الدالة (التزايد والتناقص) واشارة مشتقة الدالة (اشارة f')

اذا كانت

$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$
لكل x في الفترة (a,b) فان الدالة $f(x)$ تكون متزايدة على الفترة (a,b)	لكل x في الفترة (a,b) فان الدالة $f(x)$ تكون ثابتة على الفترة (a,b)	لكل x في الفترة (a,b) فان الدالة $f(x)$ تكون متناقصة على الفترة (a,b)



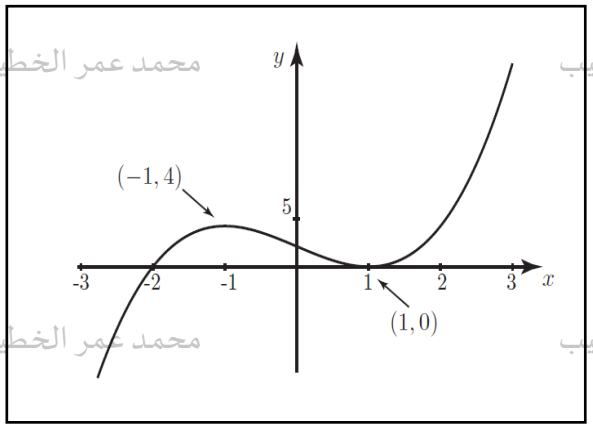




محمد عمر الخطيب

فترات التزايد وفترات التناقص للدالة (بيانياً)

يمثل كل شكل من الاشكال الاتية بيان الدالة $f(x)$ اوجد



(1) الاعداد الحرجة للدالة هي .....

(2) فترات التزايد هي.....

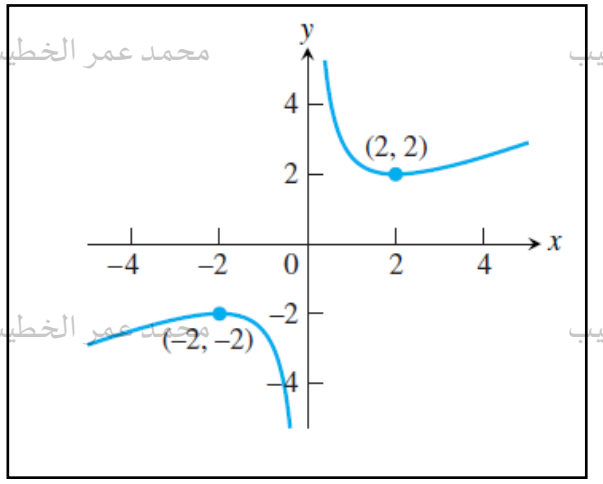
(3) فترة التناقص هي.....

(4) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت).....

(5) القيمة الصغرى المطلقة هي(ان وجدت).....

(6) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت).....

(7) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت).....



(1) الاعداد الحرجة للدالة هي .....

(2) فترات التزايد هي.....

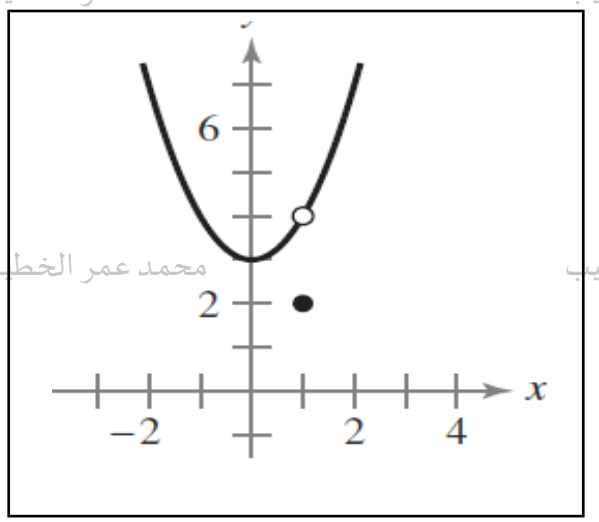
(3) فترات التناقص هي.....

(4) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) .....

(5) القيمة الصغرى المطلقة(ان وجدت) .....

(6) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....

(7) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) .....



(1) الاعداد الحرجة للدالة هي .....

(2) فترة التزايد هي.....

(3) فترة التناقص هي.....

(4) القيمة العظمى المطلقة (ان وجدت) .....

(5) القيمة الصغرى المطلقة (ان وجدت) .....

(6) القيمة العظمى المحلية (ان وجدت) .....

(7) القيمة الصغرى المحلية (ان وجدت) .....

فترات التزايد وفترات التناقص للدالة (تحليلياً)

(1) ايجاد جميع النقاط الحرجة وتعينها على خط الاعداد.

(2) دراسة اشارة دالة المشتقة f' .

(3) تحديد سلوك الدالة f من خلال اشارة الدالة f' .

أ) اذا كانت اشارة الدالة f' موجبة (+ +) على فترة فان الدالة f تكون متزايدة على هذه الفترة.

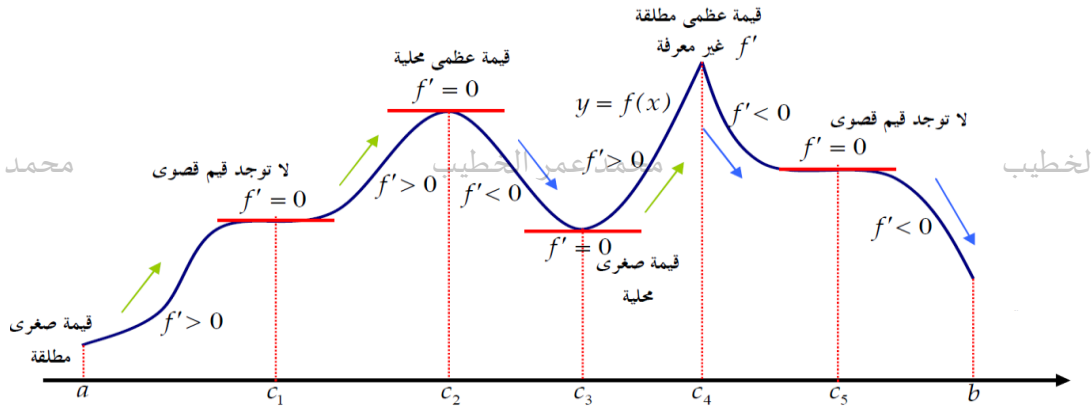
ب) اذا كانت اشارة الدالة f' سالبة (--) على فترة فان الدالة f تكون متناقصة على هذه الفترة.

(1) اوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x)=x^3-3x^2-4$.

---

(2) اوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x)=x-\sqrt{x-1}$.

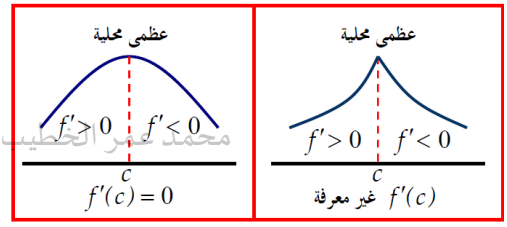
القيم القصوى المحلية: اختبار المشتقة الاولى للقيم القصوى المحلية



أ) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة ، c نقطة حرجة داخلية للدالة.

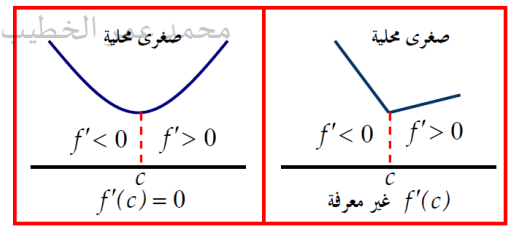
1) فان الدالة f يكون لها قيمة عظمى محلية اذا كانت المشتقة تغيير اشارتها من موجب (+) الى سالب (-)

النقطة الحرجة	c	
	$x<c$	$x>c$
إشارة f'	+	−
سلوك الدالة f	الدالة تزايدية ↗	الدالة تناقصية ↘
للدالة عند c قيمة عظمى محلية		

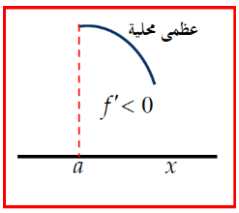


2) فان الدالة f يكون لها قيمة صغرى محلية اذا كانت المشتقة تغيير اشارتها من سالب (-) الى موجب(+)

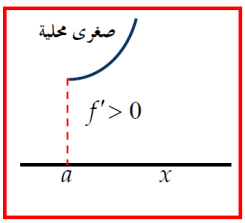
النقطة الحرجة	c	
	$x<c$	$x>c$
إشارة f'	−	+
سلوك الدالة f	الدالة تناقصية ↘	الدالة تزايدية ↗
للدالة عند c قيمة صغرى محلية		



ب) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة ، a نقطة طرفية من اليسار.



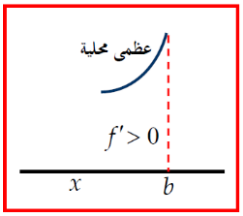
(بداية فترة التناقص)



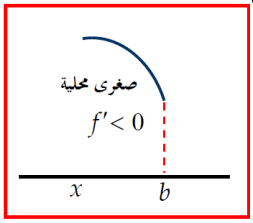
(بداية فترة االتزايد)

هذا التعريق من خارج الكتاب للفقرة ب

ج) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة ، b نقطة طرفية من اليمين.



(نهاية فترة التزايد)



(نهاية فترة التناقص)

هذا التعريق من خارج الكتاب للفقرة ج

كل قيمة قصوى مطلقة ليست على الاطراف ممكن اعتبارها قيمة قصوى محلية

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن : $f(x)=x^4-18x^2+9$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

---

(2) لتكن : $f(x)=2x\sqrt{x+1}$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن : $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

---

(2) لتكن : $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

---

(3) بين ان الدالة $f(x)=\sin^{-1}(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x)$ متزايدة على مجالها (R)

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن : $f(x)=x^2e^{-x}$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

---

(2) لتكن : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن : $f(x)=\ln(x^2-1)$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

---

(2) لتكن : $f(x)=x\ln x$ اوجد

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن : $f(x)=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}$ **اوجد.**

(أ) الاعداد الحرجة للدالة (ب) فترات التزايد والتناقص للدالة (ج) القيم القصوى المحلية.

---

(2) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x)=\sin x+\cos x$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد القيم القصوى المحلية للدالة

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & x<0 \\ x^2-4x+3 & x\geq 0 \end{cases}$$

---

(2) لتكن : $f(x)=\sin x\cos x$ **على** $[0,2\pi]$ **اوجد القيم القصوى المحلية وحدد اي منها قصوى**

فترات التزايد والتناقص بيانياً من الدالة $f'(x)$

الخطوات

ايجاد جميع النقاط الحرجة وتعينها على خط الاعداد.

أ) اذا كان بيان الدالة f' فوق محور السينات فان اشارة f' موجبة (+) اي ان الدالة f تكون متزايدة على هذه الفترة.

ب) اذا كان بيان الدالة f' تحت محور السينات فان اشارة f' سالبة (-)اي ان الدالة f تكون متناقصة على هذه الفترة.

يفضل تحويل الرسم الى خط اعداد (اشارة المشتقة)

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$ في ايجاد

1) فترات التزيد والتناقص للدالة $f(x)$

2) قيم x التي عندها القيم القصوى المحلية للدالة ثم حدد نوعها.

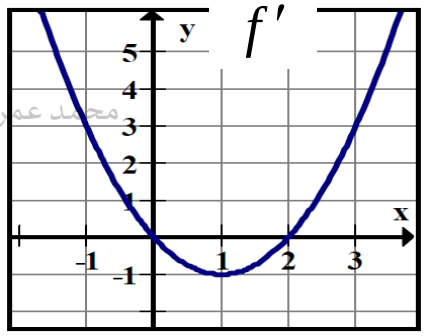
تطابق الرسم مع الخط

(الرسم f' والخط f')

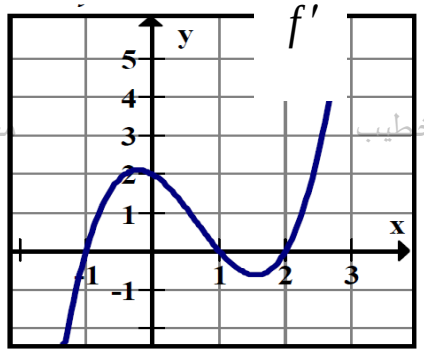
فوق محور x ← موجب

تحت محور x ← سالب

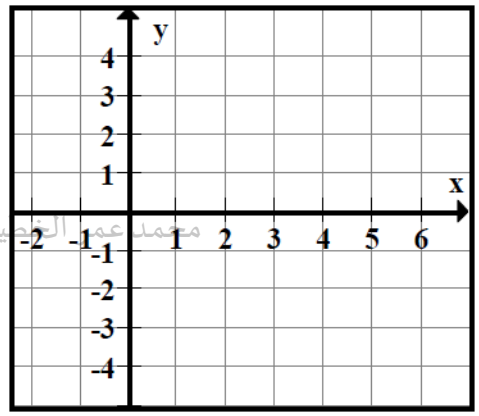
a)



b)



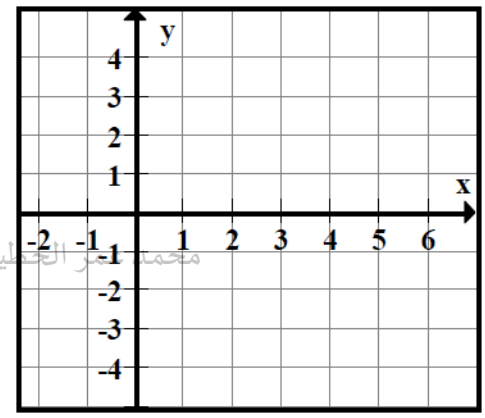
(1) استخدم المعطيات التالية في رسم بيان تقريبي للدالة $f(x)$



$$f(3)=2 \quad , f'(3)=0$$
$$f'(x)>0 \, , x<3$$
$$f'(x)<0 \, , x>3$$

---

(2) استخدم المعطيات التالية في رسم بيان تقريبي للدالة $f(x)$

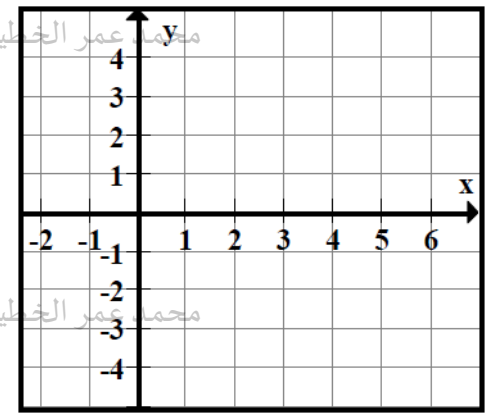


$f(3)=2 \quad , f'(3)$ غير موجودة

$$f'(x)>0 \, , x<3$$
$$f'(x)<0 \, , x>3$$

---

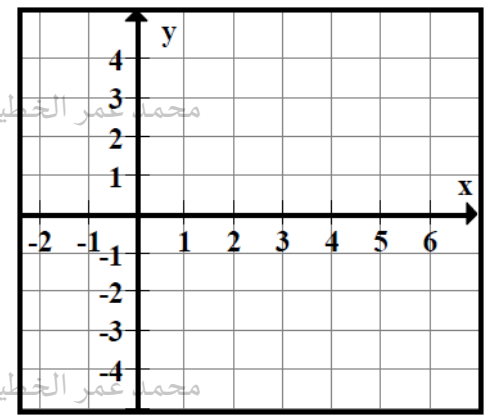
(3) استخدم المعطيات التالية في رسم بيان تقريبي للدالة $f(x)$



$$f(3)=2$$
$$f'(x)<0 \, , x\neq 3$$

---

(4) استخدم المعطيات التالية في رسم بيان تقريبي للدالة $f(x)$



$$f(3)=2 \quad , f'(3)=0$$
$$f'(x)<0 \, , x\neq 3$$

(1) اذا كانت f دالة متزايدة لها معكوس f^{-1} ،فاثبت ان الدالة f^{-1} متزايدة

---

(2) اذا كانت f و g دوال متزايدة ،فاثبت ان الدالة $h(x)=f(g(x))$ دالة متزايدة

---

(3) اذا كانت $f'(x)>g'(x)$ لكل $x>a$ حيث $f(a)=g(a)$ ،فاثبت ان $f(x)>g(x)$

---

(4) استخدم السؤال السابق في اثبات ان $x-1>\ln x$ لكل $x>1$

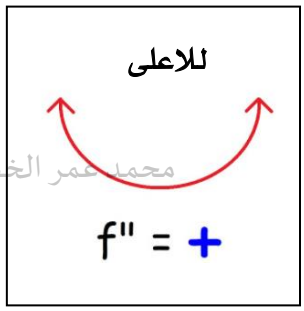
التقعر

الرسم البياني للدالة $y = f(x)$ يكون مقعراً للاعلى على الفترة المفتوحة I

(1) اذا كان منحنى الدالة يقع فوق جميع مماسته.

او (2) اذا كان $y' = f'(x)$ دالة متزايدة على الفترة المفتوحة I.

او (3) اذا كان $f''(x) > 0$ على الفترة المفتوحة I.

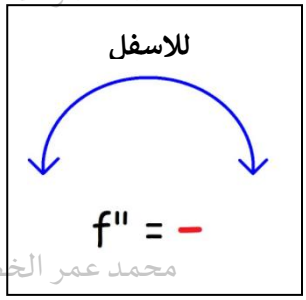


الرسم البياني للدالة $y = f(x)$ يكون مقعراً للاسفل على الفترة المفتوحة I

(1) اذا كان منحنى الدالة يقع تحت جميع مماسته.

او (2) اذا كان $y' = f'(x)$ دالة متناقصة على الفترة المفتوحة I.

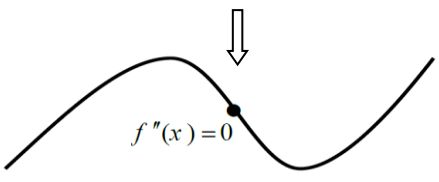
او (3) اذا كان $f''(x) < 0$ على الفترة المفتوحة I.



نقطة الانعطاف

اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المفتوحة (a,b) والتمثيل البياني يغير اتجاه التقعر عند النقطة $c \in (a,b)$ فان النقطة $(c, f(c))$ تسمى نقطة انعطاف.

ملاحظة: اذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = c$ فانها لا تعتبر نقطة انقلاب (انعطاف)

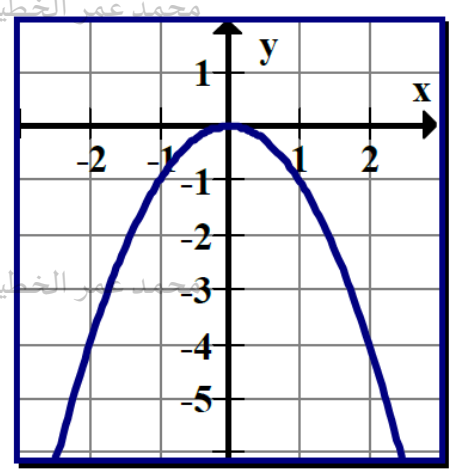


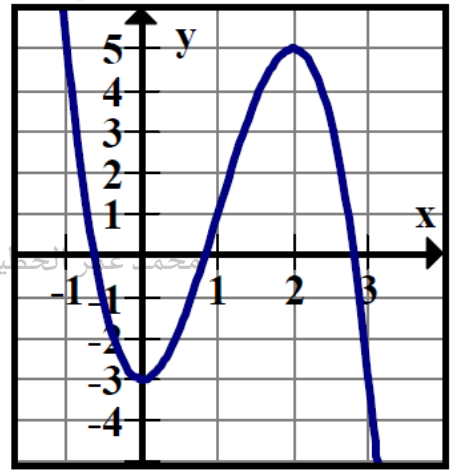
محمد عمر الخطيب

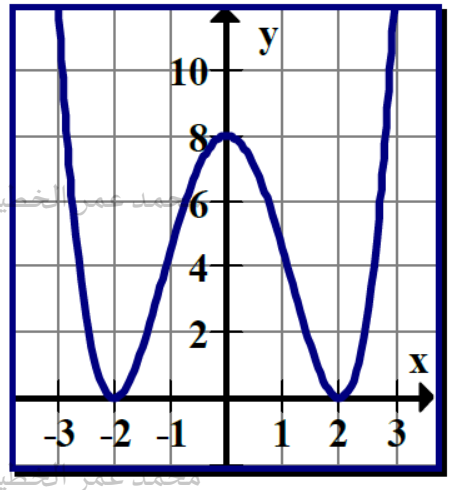
فترات التقعر للدالة (بيانياً) من الدالة f

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، اوجد في كل حالة مما ياتي .

(1) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (2) نقاط الانعطاف.

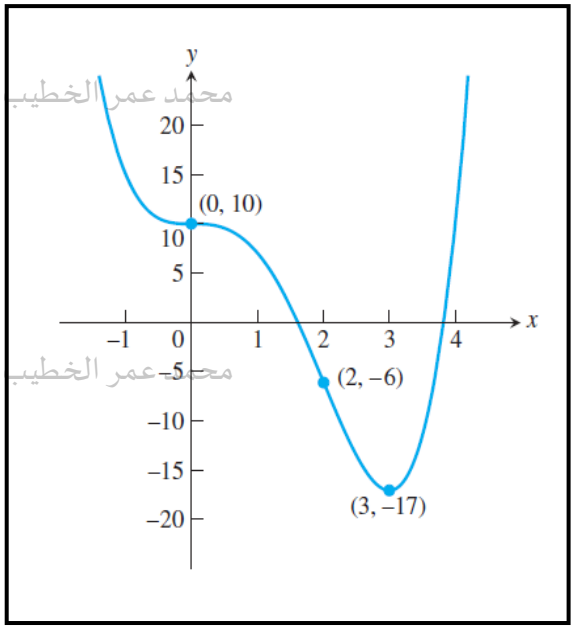






محمد عمر الخطيب

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f للاجابة عن الاسئلة التالية:



(أ) اوجد الاعداد الحرجة للدالة.....

(ب) اوجد فترات التناقص للدالة.....

(ج) اوجد فترات التزايد للدالة.....

(د) اوجد القيم القصوى المطلقة وبين نوعها

.....

(هـ) اوجد فترة التقعر للاسفل. .....

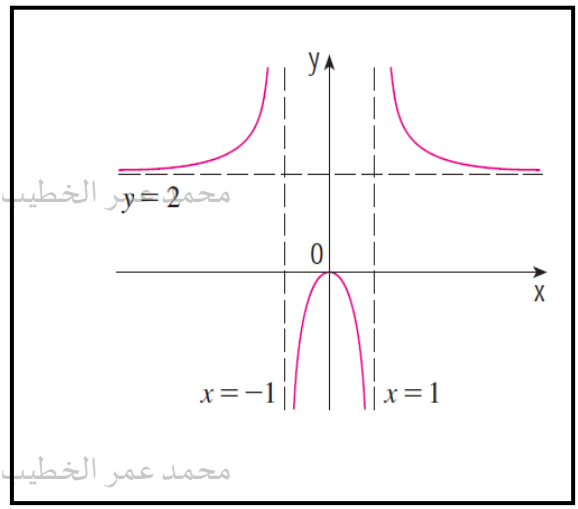
(و) اوجد فترات التقعر للاعلى. .....

(ي) اوجد نقاط الانعطاف للدالة.....

(ل) اوجد الفترة التي تكون عندها اشارة الدالة f' والدالة f'' سالبتين.....

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f للاجابة عن الاسئلة التالية:



(أ) اوجد الاعداد الحرجة للدالة.....

(ب) اوجد فترات التناقص للدالة.....

(ج) اوجد فترات التزايد للدالة.....

(د) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

.....

(هـ) اوجد فترات التقعر للاسفل.....

(و) اوجد فترات التقعر للاعلى.....

(ي) هل يوجد نقاط انعطاف للدالة.....

فترات التقعر للدالة (تحليلياً)

(1) ايجاد جميع النقاط التي تجعل المشتقة الثانية تساوي صفر او غير موجودة وتعينها على خط الاعداد.

(2) دراسة اشارة المشتقة الثانية f''.

(3) تحديد سلوك الدالة f من خلال اشارة الدالة f''.

أ) اذا كانت اشارة الدالة f'' موجبة (+)على فترة فان الدالة f تكون مقعرة للاعلى على هذه الفترة.

ب) اذا كانت اشارة الدالة f'' سالبة (-)على فترة فان الدالة f تكون مقعرة للاسفل على هذه الفترة.

لتكن: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن: $f(x)=x+\frac{1}{x}$ اوجد

(أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

---

(2) لتكن: $f(x)=(x+2)^{\frac{1}{5}}+4$ اوجد

(أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن: $f(x) = x^2 + 4\sin x$ على $[0, 2\pi]$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

---

(2) لتكن: $f(x) = \sin x - \cos x$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن: $f(x) = x e^{-4x}$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

---

(2) لتكن: $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن: $f(x)=\tan^{-1}x^2$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

---

(2) لتكن: $f(x)=x^2|x|$

اوجد (أ) فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل (ب) نقاط الانعطاف

محمد عمر الخطيب

السؤال الشامل

$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
تزايد وتقعر للاعلى	تناقص وتقعر للاعلى
تزايد وتقعر للاسفل	تناقص وتقعر للاسفل

$f''(x) > 0$ ←

$f''(x) < 0$ ←

اكمل الخريطة التالية

$f(x) = x^3 - 6x^2$

$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

الاعداد الحرجة هي

.....

الفترات			
اشارة $f'(x)$			
سلوك $f(x)$			

يوجد قيمة عظمى محلية للدالة عند x تساوي.....

يوجد قيمة صغرى محلية للدالة عند x تساوي.....

$f''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

اصفار المشتقة الثانية هي

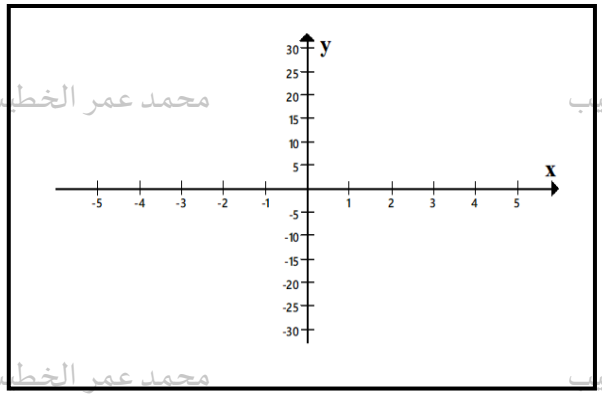
.....

الفترات			
اشارة $f''(x)$			
سلوك $f(x)$			

يوجد نقطة انقلاب للدالة عند x تساوي

.....

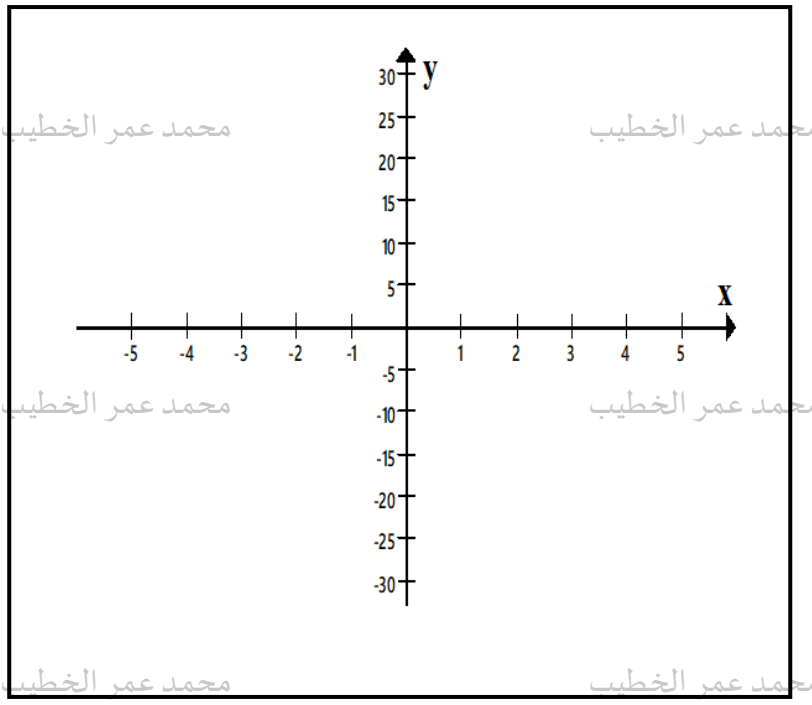
استفد من المخطط السابق في رسم بيان الدالة $f(x)$



لتكن $f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$

(1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة (2) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

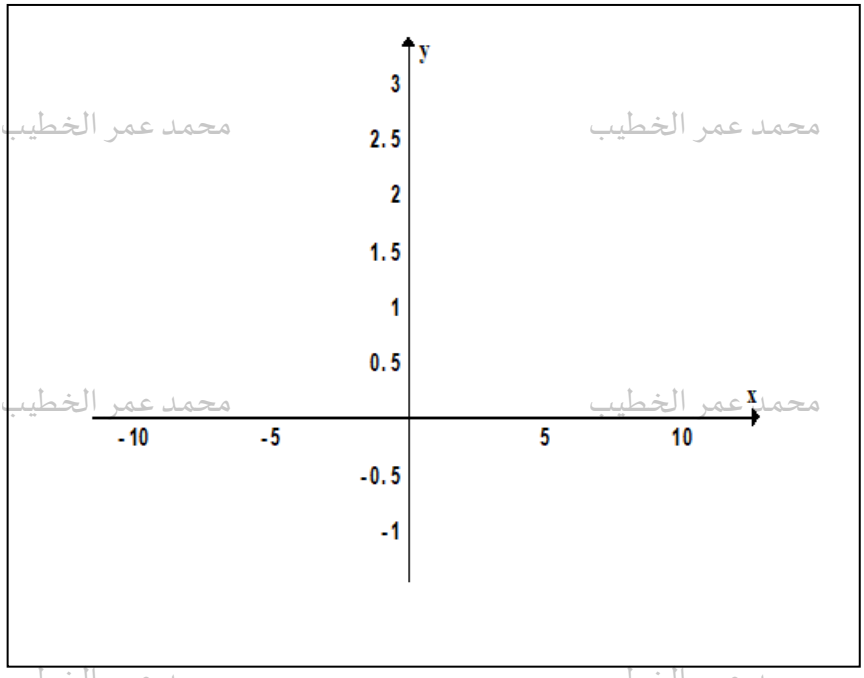
(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل (4) اوجد نقاط الانعطاف للدالة (5) ارسم الدالة

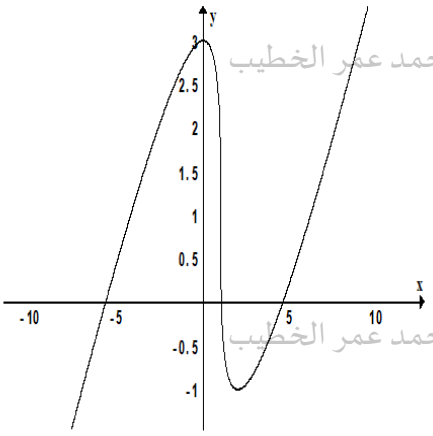


لتكن $f(x)=x+3(1-x)^{1/3}$

(1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة (2) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل (4) اوجد نقاط الانعطاف للدالة (5) ارسم الدالة

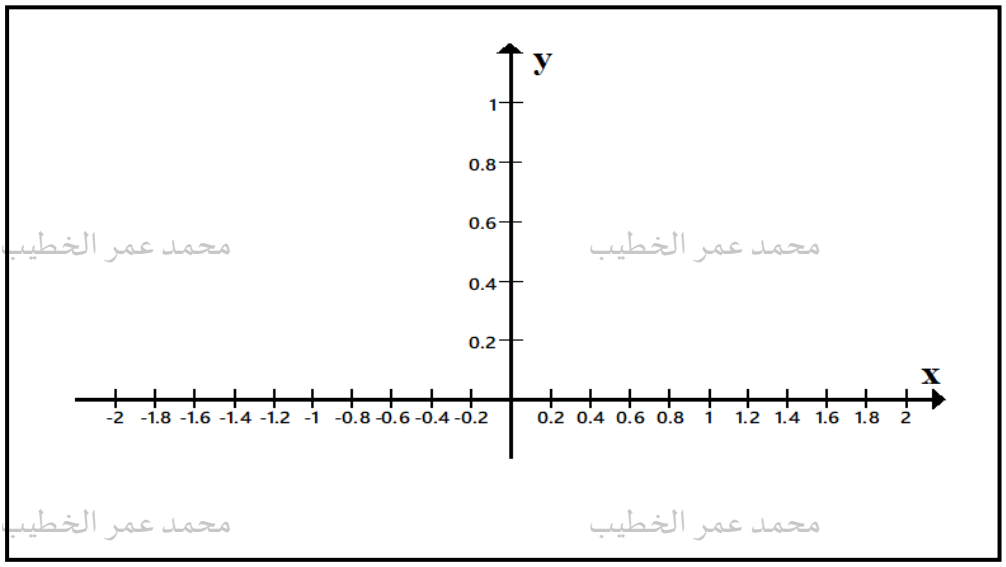


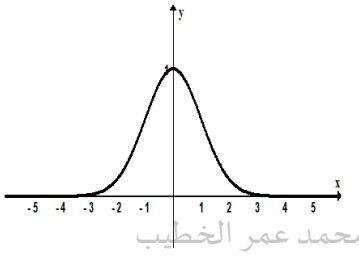


لتكن $f(x)=e^{-x^2/2}$ حيث $f'(x)=-xe^{-x^2/2}$ و $f''(x)=(x^2-1)e^{-x^2/2}$

(1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة (2) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل (4) اوجد نقاط الانعطاف للدالة (5) ارسم الدالة





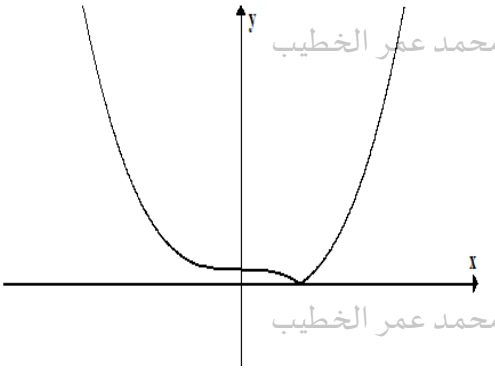
$f(x)=e^{-x^2/2}$

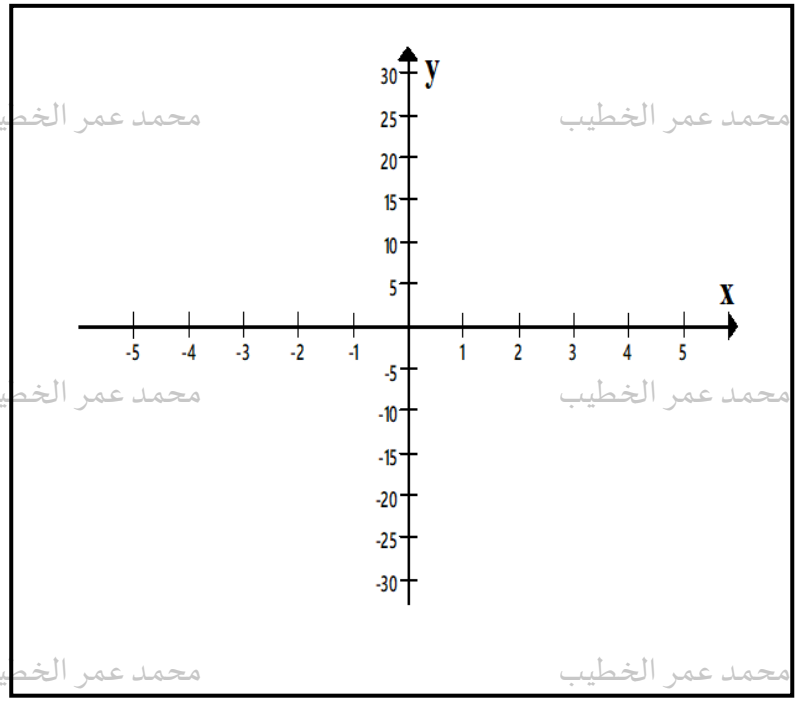
لتكن $f(x)=|x^3-1|$

ملاحظة : لان الرسم سهل... يفضل الرسم ثم ايجاد المطلوب

(1) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة (2) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

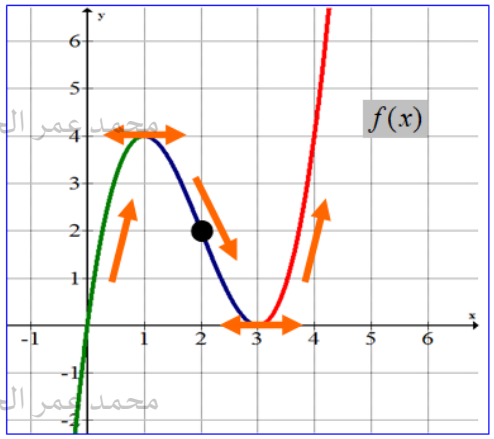
(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل (4) اوجد نقاط الانعطاف للدالة (5) ارسم الدالة





الربط بين منحنى الدالة ومنحنى المشتقة الأولى ومنحنى المشتقة الثانية

سلوك الدالة $f(x)$ ....من بيان الدالة $f(x)$



مباشر من الرسم

فترات التزايد للدالة f $(3,\infty)$, $(-\infty,1)$

فترات التناقص للدالة f $(1,3)$

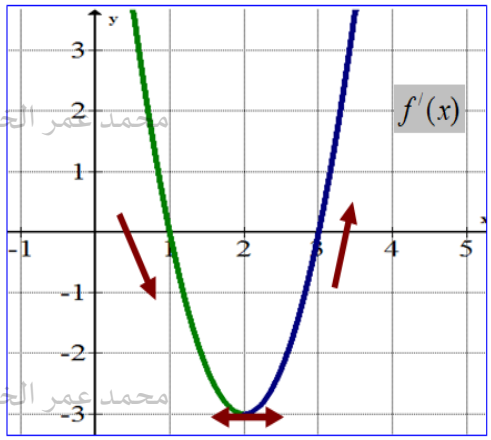
فترات التقعر لأعلى للدالة f $(2,\infty)$

فترات التقعر لأسفل للدالة f $(-\infty,2)$

نقطة الانقلاب $(2,2)=(2,f(2))$

$f'(1)=0$, $f'(3)=0$

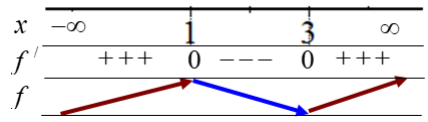
سلوك الدالة $f(x)$ ....من بيان الدالة $f'(x)$



(1) اذا كان $f'(x)$ فوق محور السينات فأن اشارة $f'(x)$ موجبة

(2) اذا كان $f'(x)$ تحت محور السينات فأن اشارة $f'(x)$ سالبة

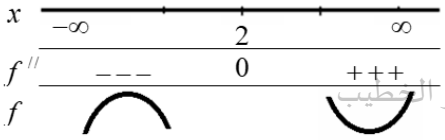
تطابق الخط مع الرسم



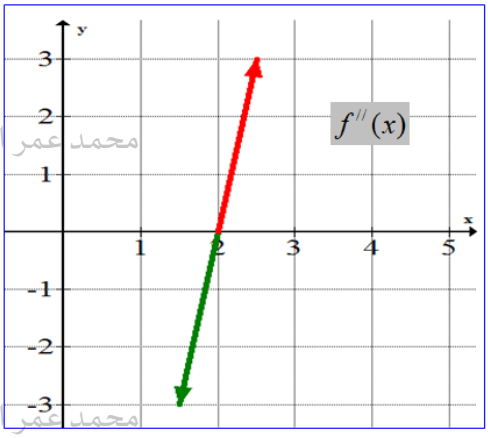
(1) اذا كان $f'(x)$ متزايدة فأن اشارة $f''(x)$ موجبة

(2) اذا كان $f'(x)$ متناقصة فأن اشارة $f''(x)$ سالبة

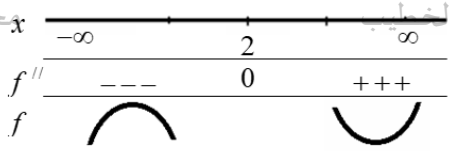
ليس تطابق



سلوك الدالة $f(x)$ ....من بيان الدالة $f''(x)$

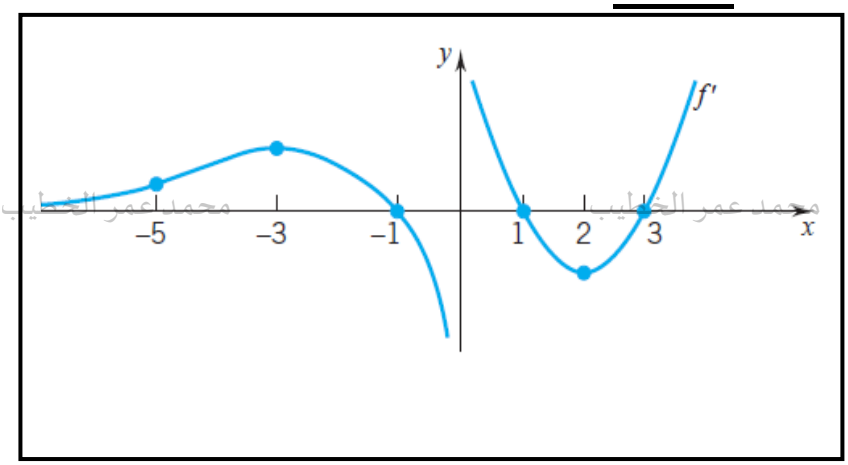


تطابق الخط مع الرسم



محمد عمر الخطيب

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$ للدالة المتصلة $f(x)$ في ايجاد



(1) النقاط الحرجة.

(2) اوجد فترات التزايد والتناقص للدالة.

(3) اوجد قيم x التي عندهاالقيم القصوى المحلية وبين نوعها.

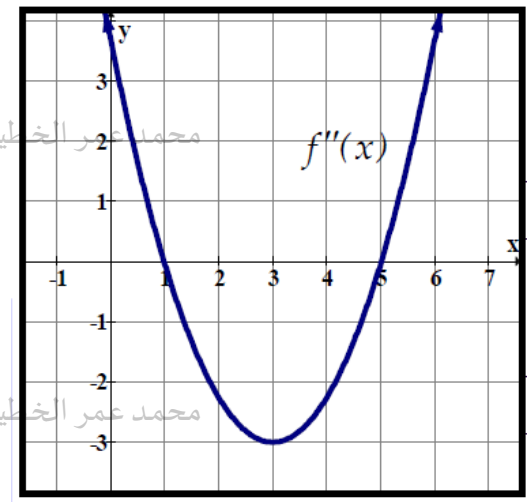
(4) اوجد فترات التقعر للاعلى وللاسفل.

(5) اوجد قيم x التي عندها نقاط انعطاف للدالة.

محمد عمر الخطيب

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f''(x)$ في ايجاد

(أ) فترات التقعر للاعلى وللاسفل

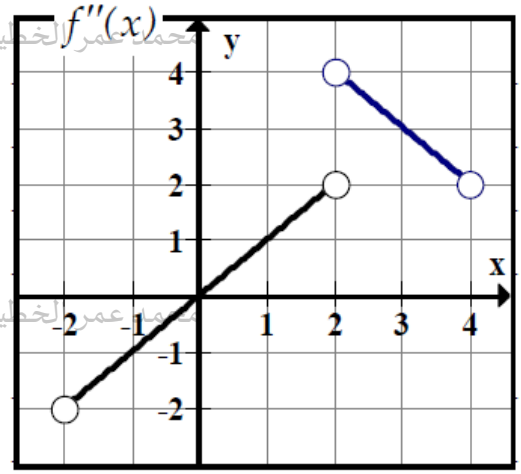


(ب) قيم x التي عندها نقاط الانقلاب.

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f''(x)$ للدالة المتصلة $f(x)$ في ايجاد

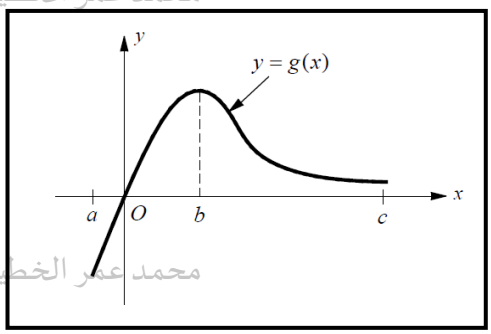
(أ) فترات التقعر للاعلى وللاسفل



(ب) قيم x التي عندها نقاط الانقلاب.

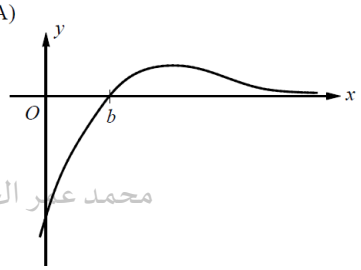
محمد عمر الخطيب

(1) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $g(x)$

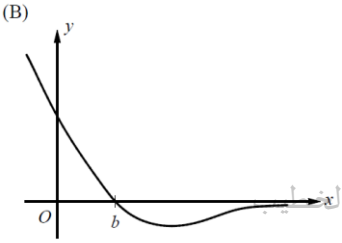


اي من الاشكال التالية يمكن ان يمثل بيان الدالة $g'(x)$

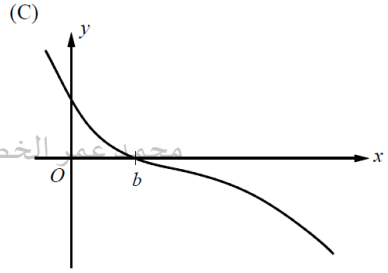
(A)



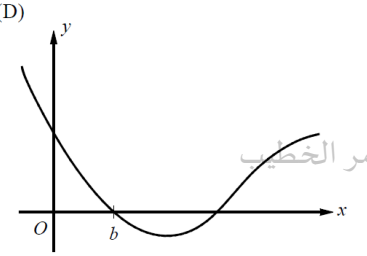
(B)



(C)

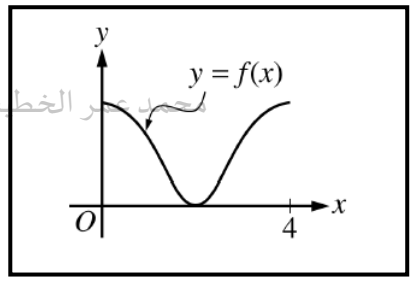


(D)



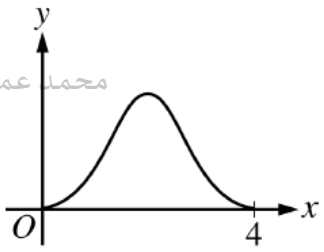
---

(2) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$

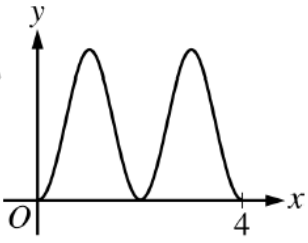


اي من الاشكال التالية ممكن ان يكون لبيان الدالة $f'(x)$

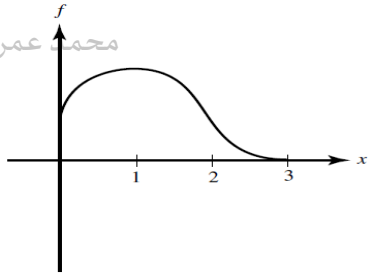
(A)



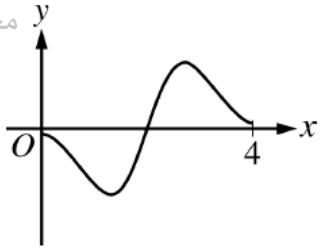
(B)



(C)



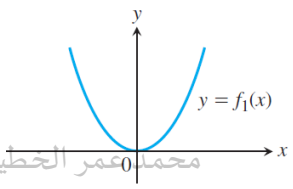
(D)

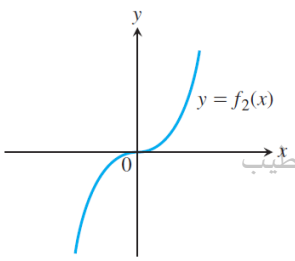


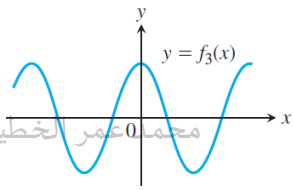
محمد عمر الخطيب

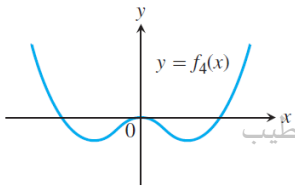
(1) صل بين كل رسم بياني يمثل الدالة f من المجموعة A بالرسم البياني الذي يمثل مشتقتها من المجموعة B.

A	f

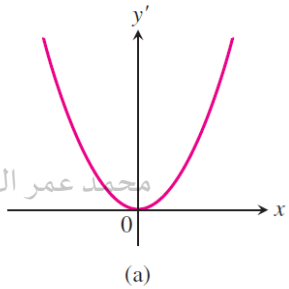


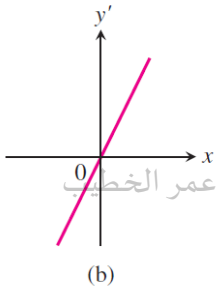


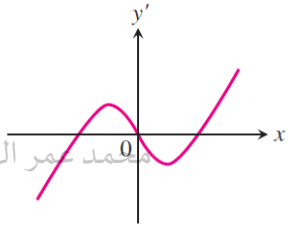


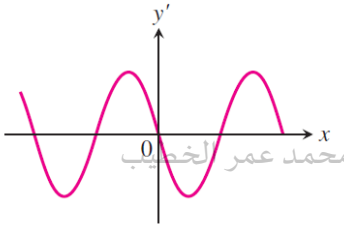


B	f'



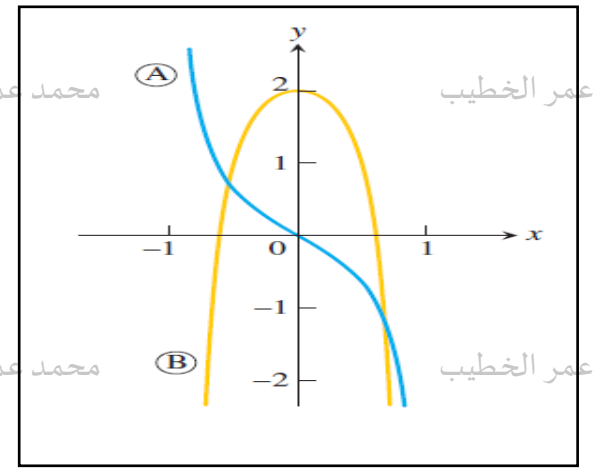


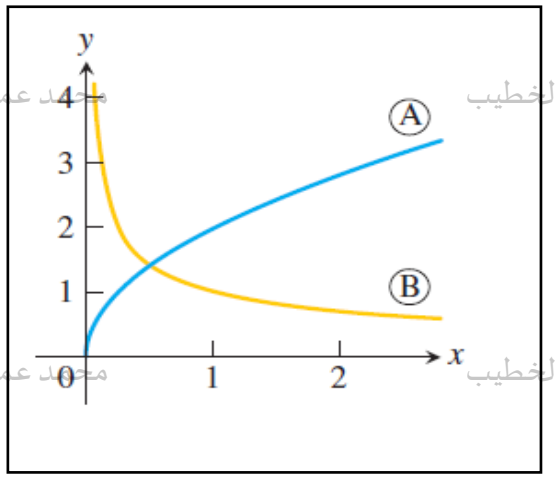




---

(2) حدد على الشكل المجاور بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f'(x)$

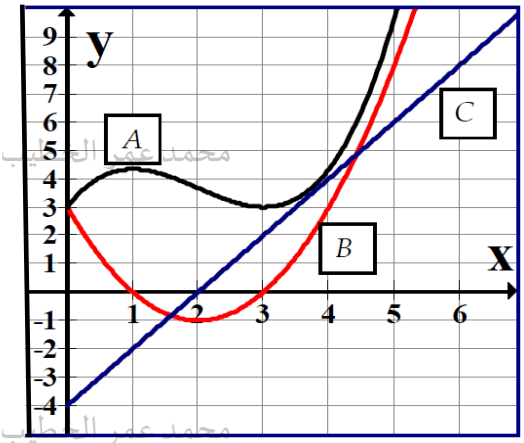




محمد عمر الخطيب

الخط المميز

(1) حدد على الشكل المجاور بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$



ملاحظة (الخط المميز)

الخط المميز هو خط يمر بنقطة انقلاب وقيمة قصوى محلية ومقطع مع محور السينات فيكون

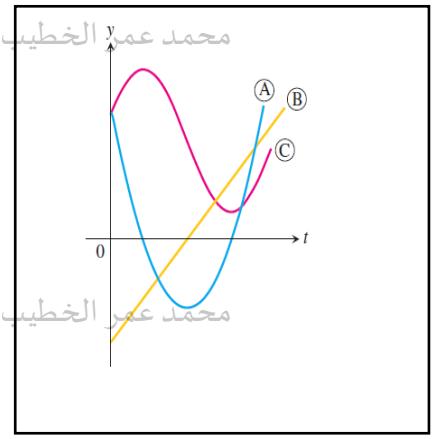
(1) نقطة الانقلاب على $f(x)$

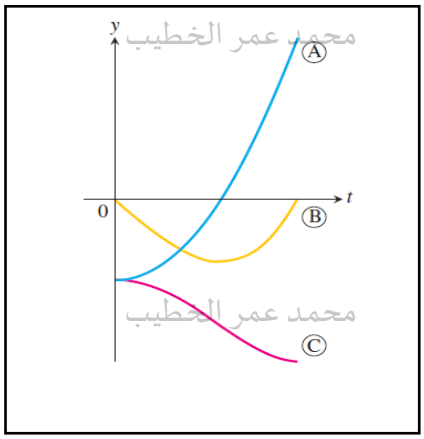
(2) القيمة القصوى المحلية على $f'(x)$

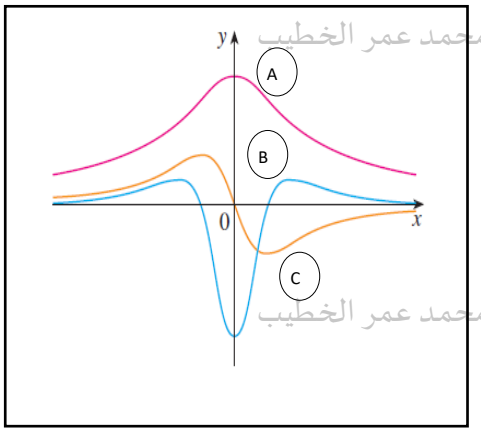
(3) المقطع مع محور السينات على $f''(x)$

---

(2) حدد على الشكل المجاور بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$



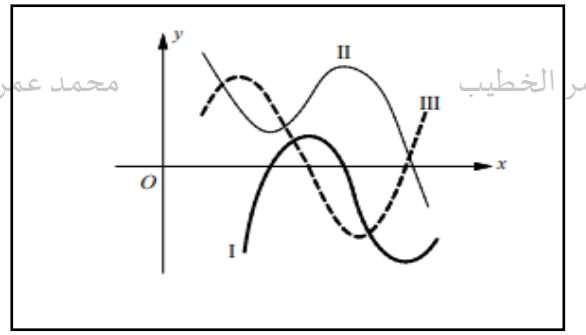




---

(3) بالاعتماد على الشكل المجاور اي من الخيارات التالية هي الصحيحة

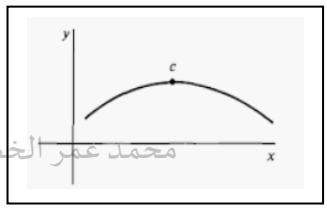
	f	f'	f''
(a)	I	II	III
(b)	II	I	III
(c)	III	II	I
(d)	II	III	I



اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

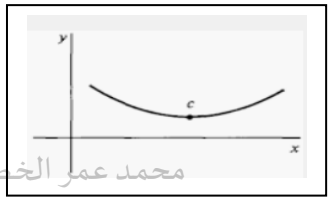
1) اذا كانت $f'(c)=0 \quad , \quad f''(c)<0$

فان f **تكون لها قيمة عظمى محلية عند** $x=c$



2) اذا كانت $f'(c)=0 \quad , \quad f''(c)>0$

فان f **تكون لها قيمة صغرى محلية عند** $x=c$



ملاحظة: (أ) لايجوز استخدام اختبار المشتقة الثانية اذا كانت $f'(c)$ غير موجودة

(ب) يفشل اختبار المشتقة الثانية اذا كانت $f''(c)=0$ ويجب الرجوع لاختبار المشتقة الأولى

(1) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=x^3-12x-5$

(2) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=x^3-5x^2+3x$

محمد عمر الخطيب

(1) استخدم اختبار المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=xe^{-x}$ حيث

$$f'(x)=e^{-x}(1-x)\ ,\ f''(x)=e^{-x}(x-2)$$

---

(2) اوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=x^4+4x^3-1$

---

(3) اوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

محمد عمر الخطيب

القيمة القصوى المحلية الوحيدة

نظرية القيمة القصوى المحلية الوحيدة

اذا كانت الدالة f متصلة على فترة مفتوحة وللدالة قيمة قصوى محلية وحيدة فانها تكون مطلقة

تستخدم هذه النظرية في مسائل القيم المثلى (الدرس السابع)

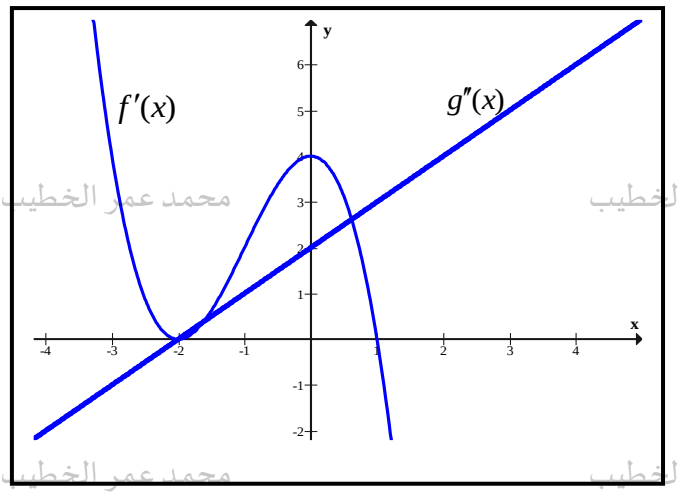
(1) اوجد القيمة القصوى المطلقة للدالة $f(x)=6x-x^2$ وحدد نوعها

(2) اوجد القيمة القصوى المطلقة للدالة $f(x)=xe^{-x}$ وحدد نوعها

(3) اوجد القيمة القصوى المطلقة للدالة $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ وحدد نوعها

محمد عمر الخطيب

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالتين $f'(x)$, $g''(x)$ لإكمال الفراغات التالية:



(أ) النقاط الحرجة للداله $f(x)$ هي .....

(ب) فترة التزايد للدالة $f(x)$ هي.....

(ج) للدالة $f(x)$ قيم عظمى المحليه عند.....

(د) فتره التقعر للاعلى للدالة $f(x)$ هي.....

(هـ) فترات التقعر للاسفل للدالة $g(x)$ هي.....

(و) عدد تقاط الانقلاب للدالة $f(x)$ تساوي: .....

(ي) قيمة x التي عندها للدالتين $f(x), g(x)$ نقطة انقلاب هي.....

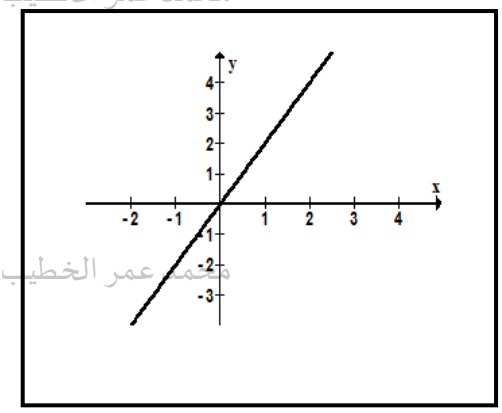
(م) ايهما أكبر $f(3)$ ام $f(2)$ مع ذكر السبب.....

(ن) إذا كان للدالة $g(x)$ نقاط حرجة عند -3 , -1

فبين نوع القيم القصوى المحلية عند هذه القيم الحرجة.

محمد عمر الخطيب

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $g''(x)$



علماً بان $g(x)$ كثيرة حدود و $g'(-2)=g'(2)=0$

لإكمال الفراغات التالية

(أ) فتره التقعر للاعلى للدالة $g(x)$ هي.....

(ب) تقاط الانقلاب للدالة $g(x)$ عند.....

(ج) النقاط الحرجة للداله $g(x)$ هي.....

(د) للدالة $g(x)$ قيم عظمى المحليه عند.....

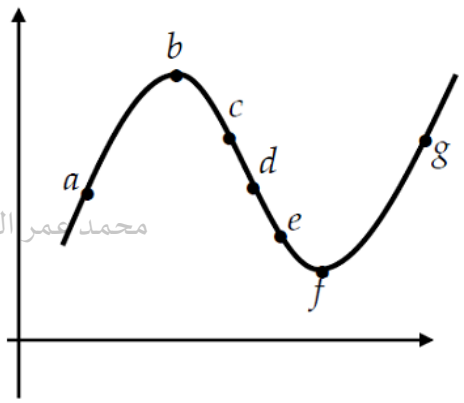
(هـ) للدالة $g(x)$ قيم صغرى المحليه عند.....

(و) فترة التزايد للدالة $g(x)$ هي.....

(ي) فترة التناقص للدالة $g(x)$ هي.....

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ لأكمال الجدول التالي



الشرط	الرمز
$f'=0, f''>0$	
$f'=0, f''<0$	
$f''=0$	
$f'\times f''=0$	
$f'\times f''>0$	

محمد عمر الخطيب

(1) إذا كانت الدالة $f(x)=ax^3-12x^2$ **لها نقطة انعطاف عند** $x=1$ **فما قيمة الثابت** a .

---

(2) إذا كان للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ **قيمة صغرى محلية عند** $x=4$ **ونقطة انقلاب عند** $x=1$ **فاوجد قيمة الثوابت** a,b .

---

(3) إذا كان للدالة $f(x)=ax^4+bx^2+1$ **نقطة انعطاف عند النقطة** $(1,6)$ **فاوجد قيمة الثوابت** a,b ؟

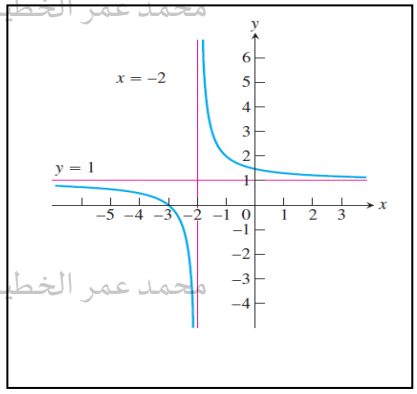
خطوط التقارب للدوال النسبية

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

(1) يجب كتابة الدالة النسبية في ابسط صورة قبل ايجاد خطوط التقارب واذا تم اختصار احد العوامل وليكن $x-a$ واختفى من المقام فان للدالة فجوة عند $x=a$ وليس خط تقارب رأسي

$x-a$ عامل غير مكرر

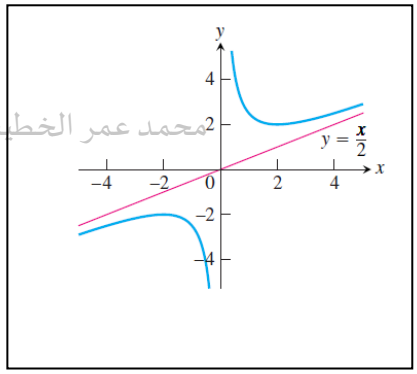
(2) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب رأسية عند اصفار المقام وتكون معادلتة $x=a$



(3) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب افقية اذا كانت درجة البسط اصغر من او تساوي درجة المقام وتكون معادلتة $y=a$

(4) يكون للدالة النسبية خط تقارب مائل اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام بواحد. وتكون معادلتة $y=a\,x+b$

ونستخدم القسمة المطولة او القسمة التركيبية لايجادة



خطوط التقارب للدوال غير النسبية

(1) يكون للدالة خطوط تقارب رأسية عند $x=k$

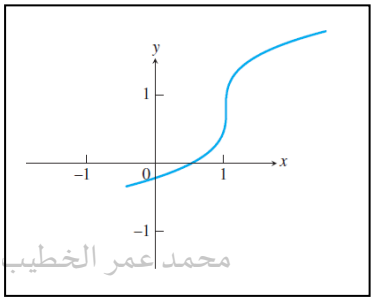
اذا كانت احدى الشروط التالية صحيحة

$$\lim_{x\to k} f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to k^+} f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to k^-} f(x)=\pm\infty$$

(2) يكون للدالة خطوط تقارب افقية عند $y=l$

لا يجوز ان يكون للدالة خط تقارب افقي ومائل في نفس الوقت

اذا كانت احد الشروط التالية صحيحة $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$



المماس الرأسي

(1) يجب ان تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة

(2) ان تكون النهاية من اليسار واليمين للمشتقة (الميل) اما كلاهما ملانهاي او سالب مالانهاية عند هذه النقطة

محمد عمر الخطيب

اوجد خطوط التقارب الرأسية والافقية او المائلة لكل من الدوال التالية

$$(1)\ f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$$

$$(2)\ f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$$

$$(3)\ f(x)=4-\frac{1}{x+2}$$

$$(4)\ f(x)=x+\frac{1}{x-2}$$

$$(5)\ f(x)=\frac{x^2-2}{x+1}$$

$$(6)\ f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

اوجد خطوط التقارب الرأسية والافقية لكل من الدوال التالية

(1) $f(x)=e^{-x^2}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

---

(2) $f(x)=e^{1/x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

---

(3) $f(x)=xe^{-x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

---

(4) $f(x)=\ln(x-2)+3$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

---

(5) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

---

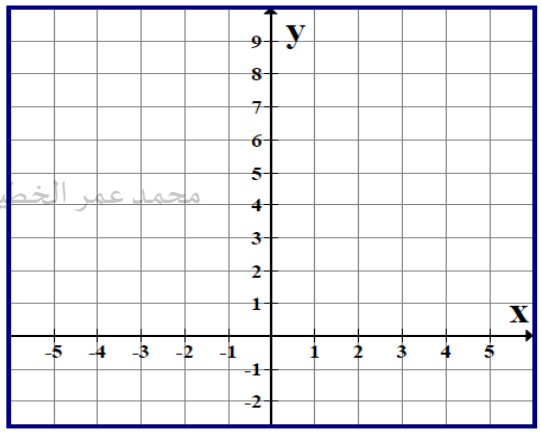
(6) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

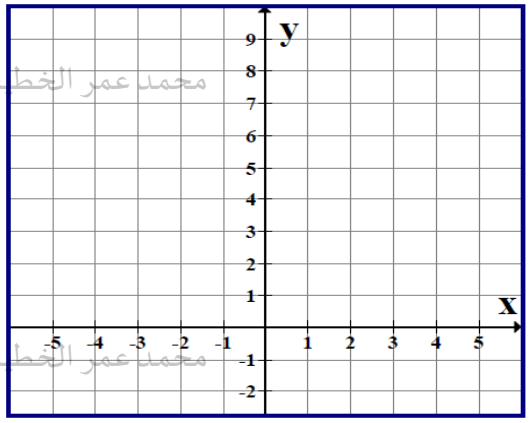
(1) ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R والتي تحقق الشروط التالية:



$$f(2)=1$$
$$f'(x)<0,\ f''(x)>0 \quad , \quad x<2$$
$$f'(x)>0,\ f''(x)<0 \quad , \quad x>2$$

---

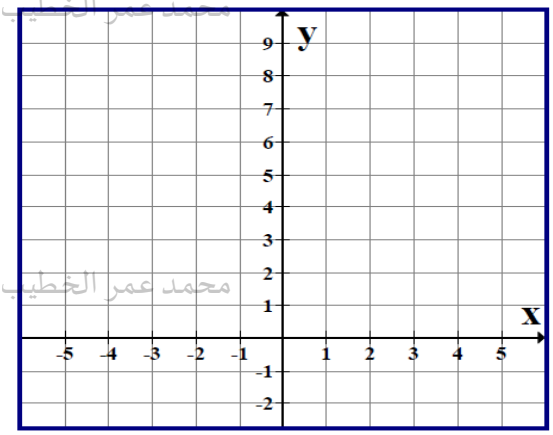
(2) ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R والتي تحقق الشروط التالية:



$$f(0)=1$$
$$f'(x)>0, \quad x\neq 0$$
$$f''(x)>0 \quad , \quad x<0$$
$$f''(x)<0 \quad , \quad x>0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=4,$$

---

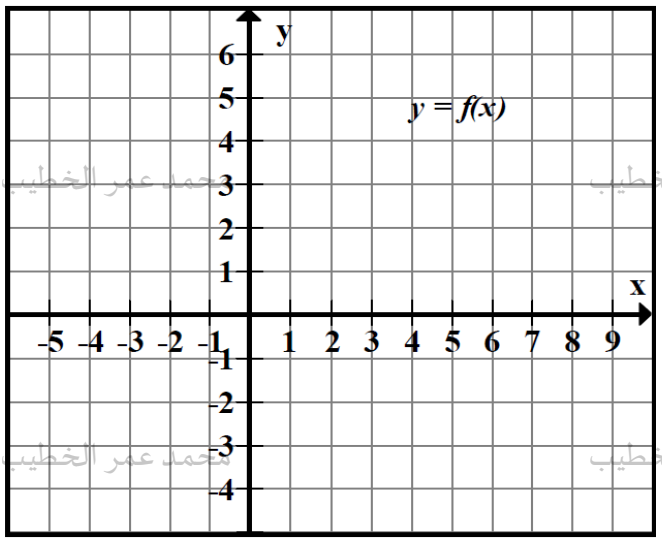
(3) ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R والتي تحقق الشروط التالية:



$$f(-2)=8,\ f(0)=4,\ f(2)=0$$
$$f'(-2)=f'(2)=0$$
$$f'(x)<0, \quad -2<x<2$$
$$f'(x)>0, \quad x<-2,\ x>2$$
$$f''(x)<0 \quad , \quad x<0$$
$$f''(x)>0 \quad , \quad x>0$$

محمد عمر الخطيب

(1) ارسم منحنى تقريبي للدالة $f(x)$ المتصلة على R والتي تحقق الشروط التالية:



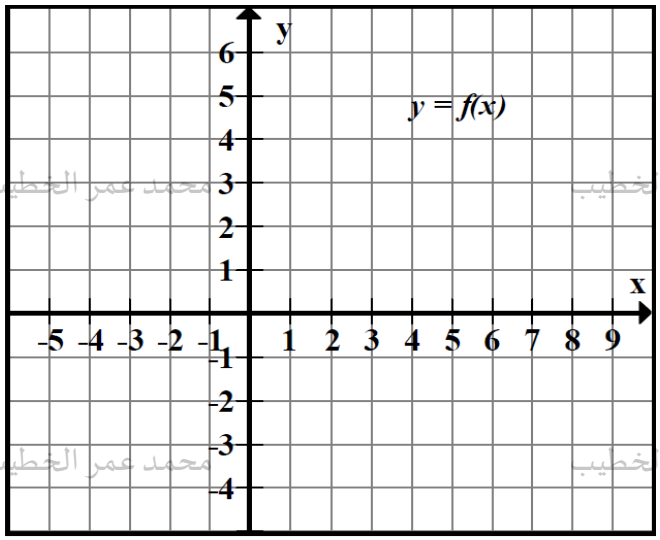
	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$-\infty < x < 1$		$-$	$+$
$x = 1$	-3	0	$+$
$1 < x < 2$		$+$	$+$
$x = 2$	-2	$+$	0
$2 < x < 4$		$+$	$-$
$x = 4$	0	0	0
$4 < x < \infty$		$+$	$+$

---

(2) اعتمد على الجداول التالية لرسم بيان تقريبي للدالة المتصلة $f(x)$

الفترات	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 6$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f''(x)$	0	$+$	0

x	0	2	6
$f(x)$	1	4	0
$f'(x)$	غير موجودة	غير موجودة	-1



ارسم منحنى الدالة $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

المميزات المهمة.....تحليل الدالة

حسب السؤال

مجال الدالة

نقاط التقاطع مع المحاور

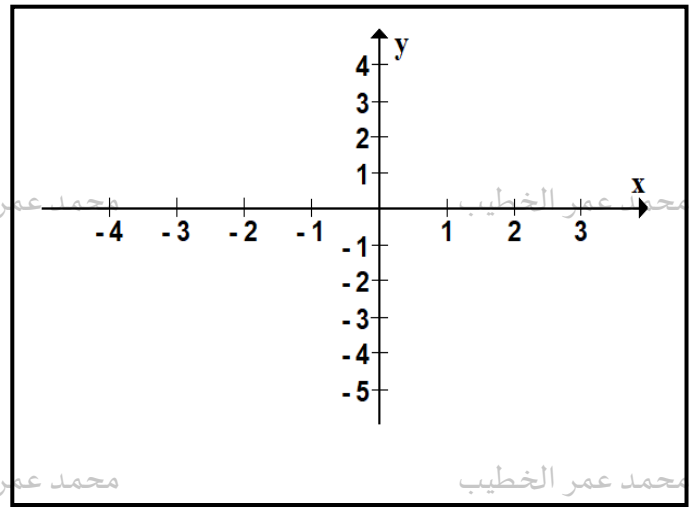
خطوط التقارب والفجوات

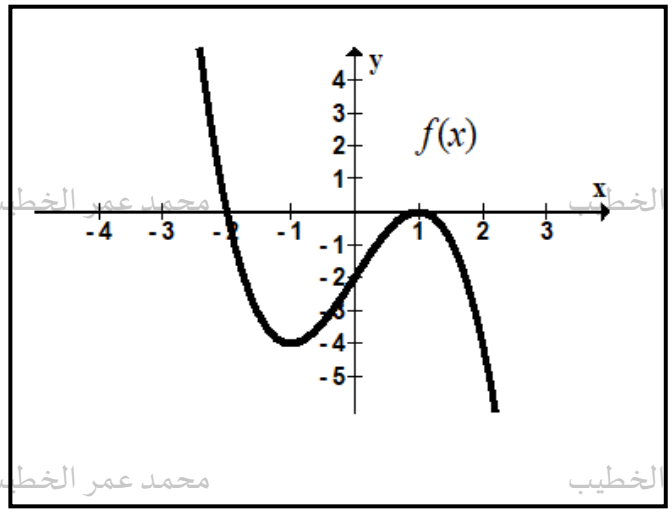
اشارة الدالة (في وجود خطوط تقارب راسية)

القيم القصوى المحلية والمطلقة

فترات التزايد والتناقص

فترات التقعر ونقاط الانعطاف





ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

المميزات المهمة.....تحليل الدالة

مجال الدالة

نقاط التقاطع مع المحاور

خطوط التقارب والفجوات

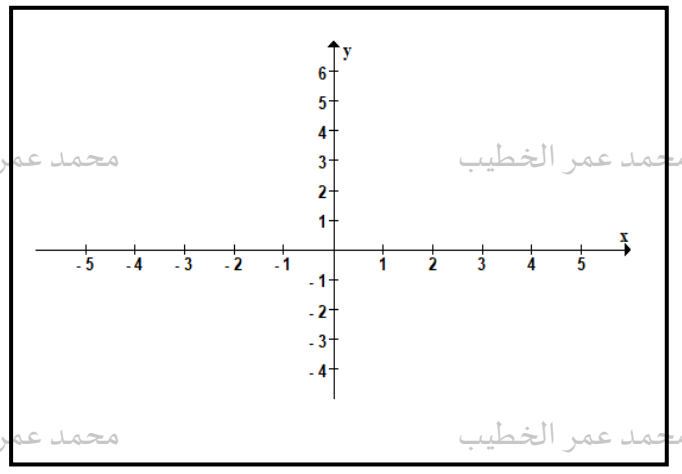
اشارة الدالة (في وجود خطوط تقارب راسية)

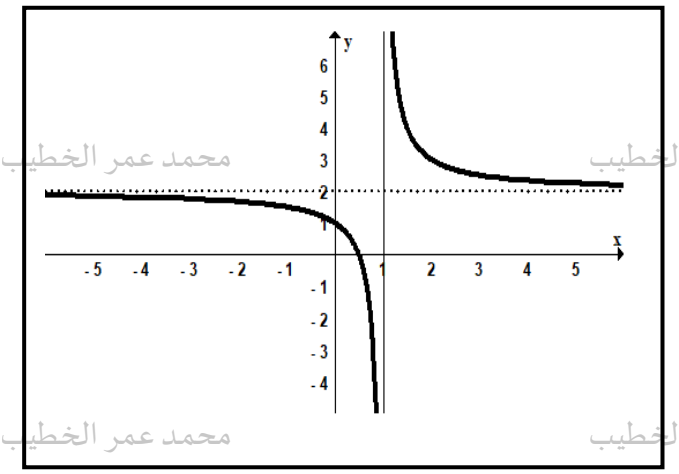
القيم القصوى المحلية والمطلقة

فترات التزايد والتناقص

فترات التقعر ونقاط الانعطاف

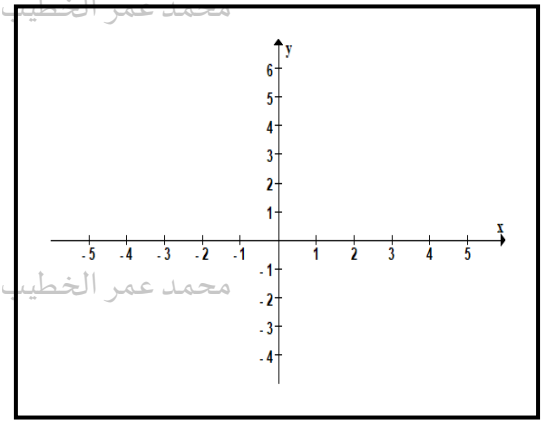
حسب السؤال

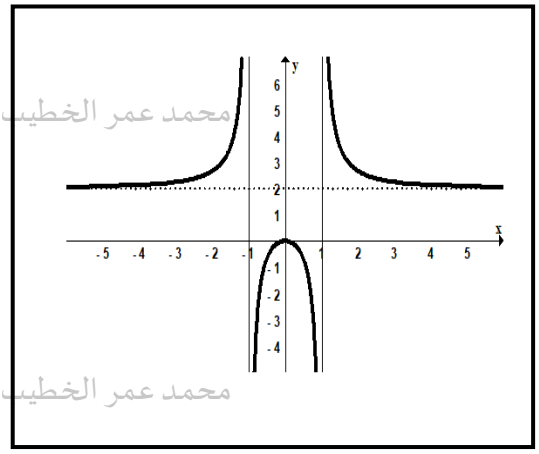




(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

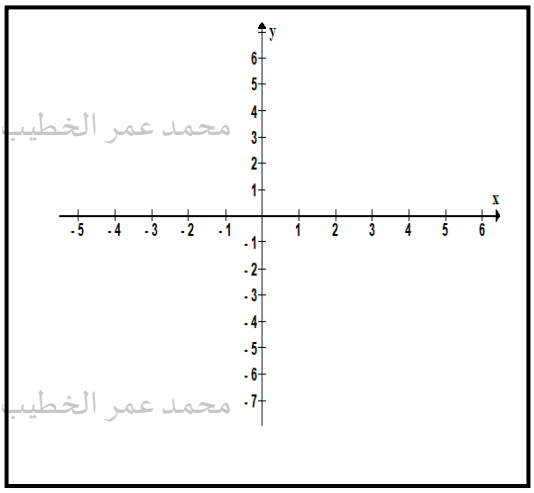


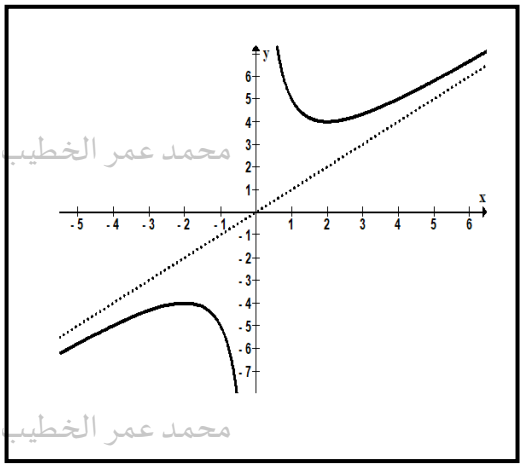


---

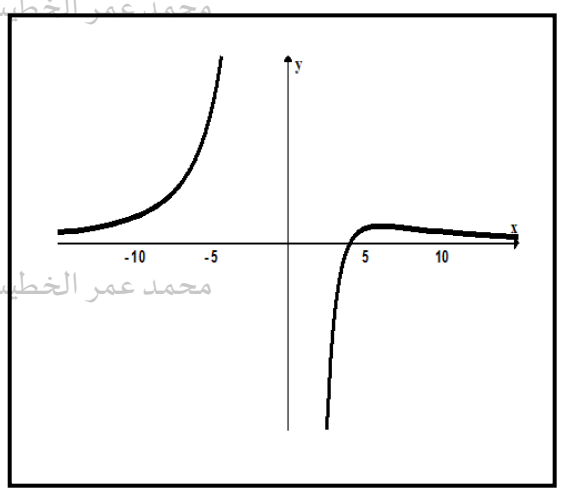
(2) ارسم منحنى الدالة $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة





محمد عمر الخطيب



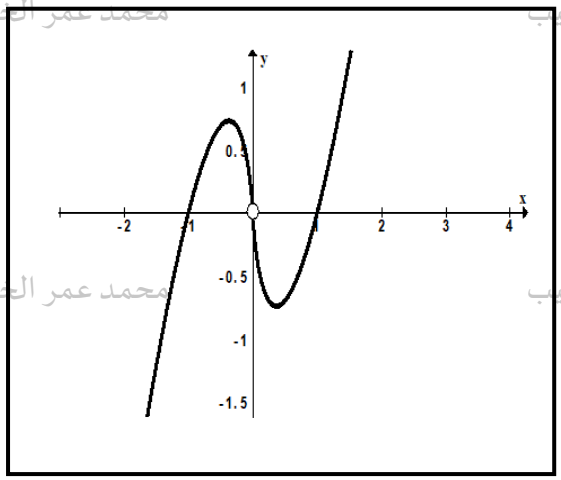
ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{x-4}{x^3}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

حيث

$$f'(x)=\frac{-2x+12}{x^4}\ ,\ f''(x)=\frac{6x-48}{x^5}$$

محمد عمر الخطيب



ارسم منحنى الدالة $f(x) = x \ln x^2$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

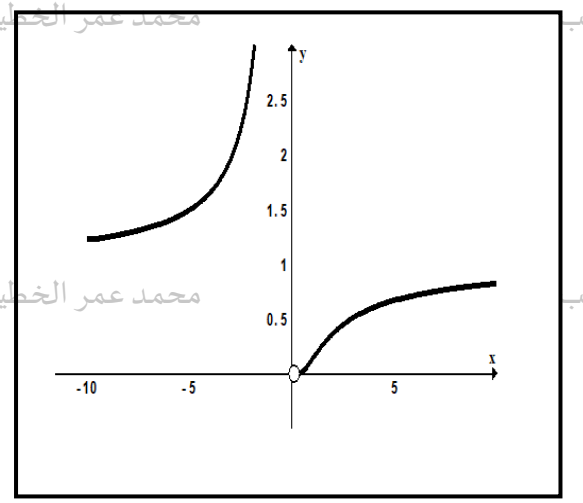
حيث

$$f'(x) = 2 + \ln x^2 \ , \ f''(x) = \frac{2}{x^2}$$

محمد عمر الخطيب

ارسم منحنى الدالة $f(x)=e^{-2/x}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

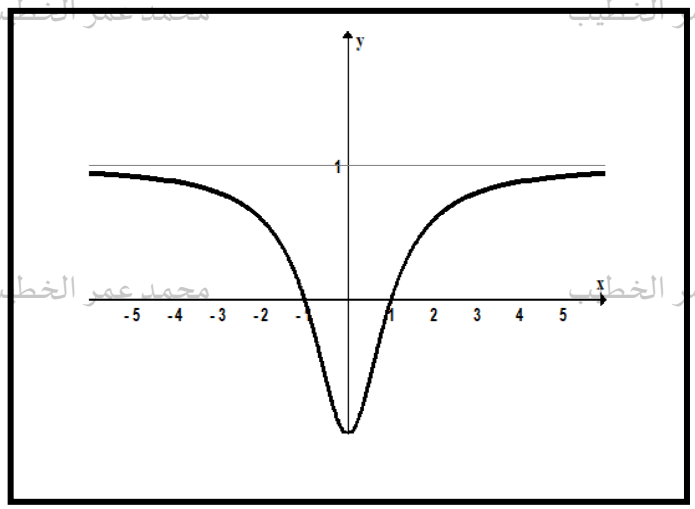


حيث

$$f'(x)=\frac{2}{x^2\,e^{2/x}} \quad , \quad f''(x)=\frac{4-4x}{x^2\,e^{2/x}}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

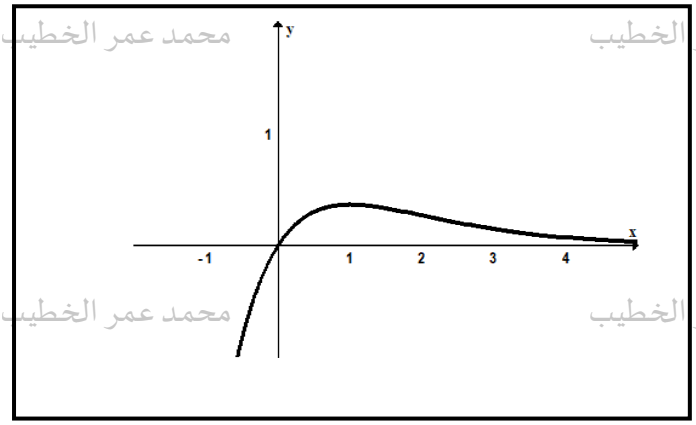


(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

مع تحديد جميع المميزات المهمة

حيث

$$f'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}\ ,\ f''(x)=\frac{4-16x^2}{(x^2+1)^3}$$



(2) ارسم منحنى الدالة $f(x)=xe^{-x}$

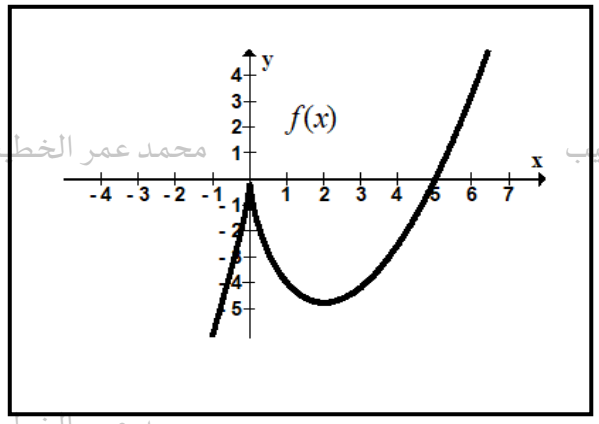
مع تحديد جميع المميزات المهمة

حيث

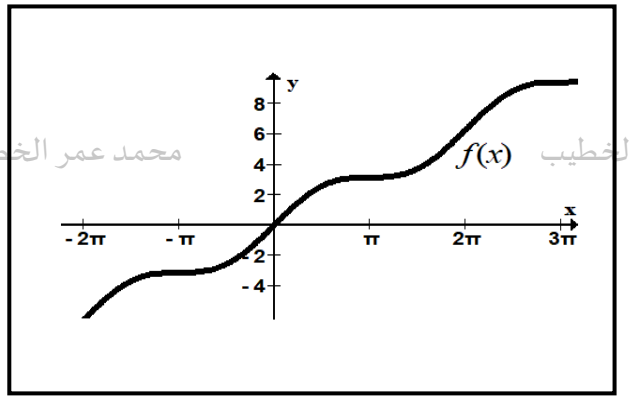
$$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}\ ,\ f''(x)=\frac{x-2}{e^x}$$

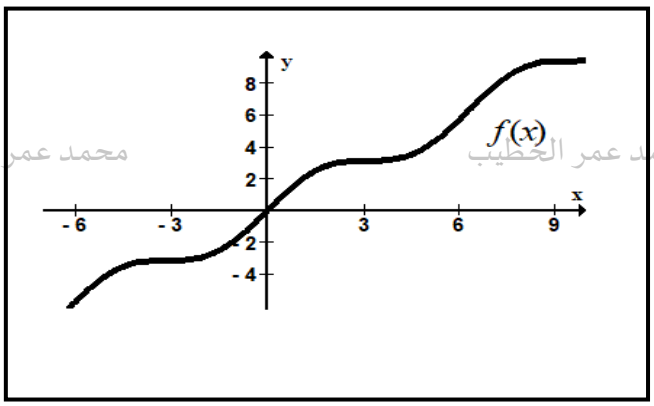
محمد عمر الخطيب

ارسم منحنى الدالة $f(x)=x^{5/3}-5x^{2/3}$ مع تحديد جميع المميزات المهمة



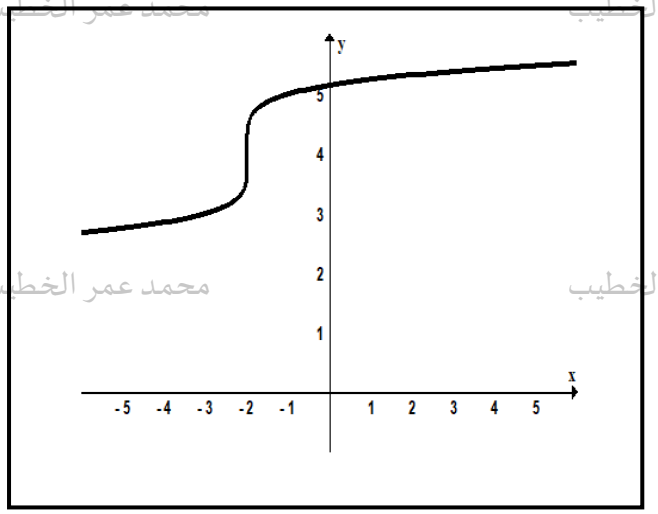
ارسم منحنى الدالة $f(x)=x+\sin x$ مع تحديد جميع المميزات المهمة





(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=(x+2)^{1/5}+4$

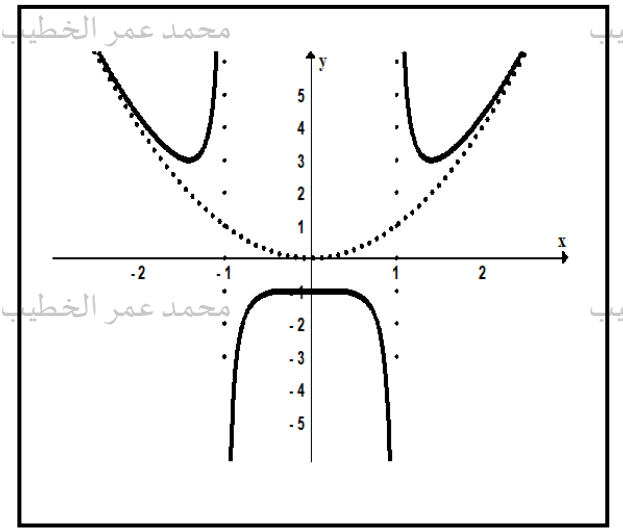
مع تحديد جميع المميزات المهمة



---

(2) اوجد منحنى التقارب للدالة $f(x)=\dfrac{x^4-x^2+1}{x^2-1}$

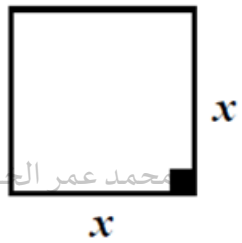
ثم ارسم الدالة



قوانين المساحات والحجوم

ملاحظة : تم نقل المسائل الاقتصادية المطروحة في الدرس السابع الى الدرس التاسع

(1) المربع



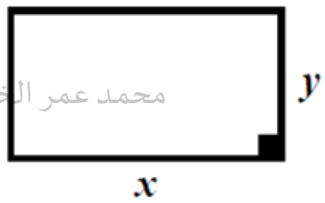
المساحة : $A = x^2$

المحيط : $P = 4x$

طول القطر : $d = \sqrt{2}\, x$

---

(2) المستطيل



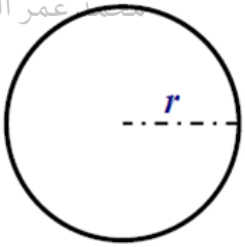
المساحة : $A = x \times y$

المحيط : $P = 2x + 2y$

طول القطر: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

---

(3) الدائرة

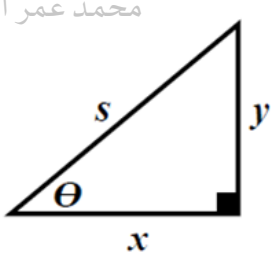


المساحة : $A = \pi r^2$

المحيط : $C = 2\pi r$

---

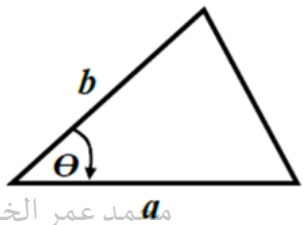
(4) المثلث



المساحة : $A = \frac{1}{2} x \times y$

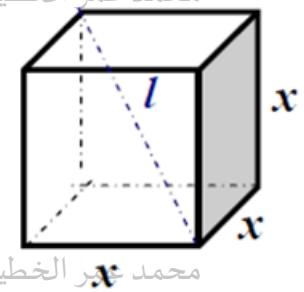
المحيط : $P = x + y + s$

طول الوتر: $s = \sqrt{x^2 + y^2}$



مساحة المثلث غير القائم : $A = \frac{1}{2} ab \sin\theta$

(5) المكعب



الحجم : $V = x^3$

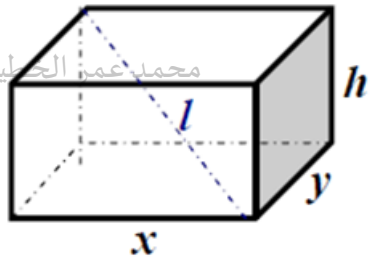
مساحة السطح الجانبية : $A = 4x^2$

مساحة السطح الكلية : $S = 6x^2$

طول القطر: $L = \sqrt{3}\ x$

---

(6) شبة المكعب



الحجم : $V = xyh$

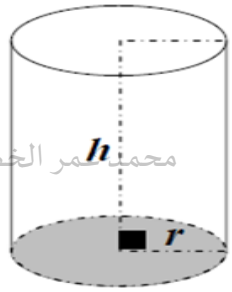
مساحة السطح الجانبية : $A = 2xh + 2yh$

مساحة السطح الكلية : $S = 2xy + 2xh + 2yh$

طول القطر: $L = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}$

---

(7) الاسطوانة



الحجم : $V = \pi r^2 h$

مساحة السطح الجانبية : $A = 2\pi rh$

مساحة السطح الكلية : $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

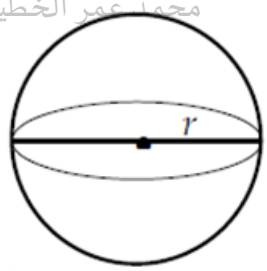
---

(8) المخروط

الحجم : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

---

(9) الكرة



الحجم : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

مساحة السطح الكلية : $S = 4\pi r^2$

خطوات حل مسائل القيم المثلى

اقراء المسالة

(1) ارسم شكلا توضيحياً

(2) حدد المتغيرات ورمّزها

(3) اكتب العلاقة الاساسية ويستدل عليها من كلمة اكبر ما يمكن او اصغر ما يمكن

(4) كتابة العلاقة المساعدة واجعل العلاقة الاساسية بمتغير واحد

اذا كانت بمتغيرين

اذا كانت بمتغير واحد

(5) اشتق الدالة الاساسية ثم اوجد الاعداد الحرجة

ملاحظة : لا يجوز اشتقاق الدالة الاساسية في حالة وجود متغيرين

(6) اختبر القيمة القصوى المطلقة

مجال مغلق...اختبار القيم

مجال مفتوح...
اختبار المشتقة الأولى
او اختبار المشتقة الثانية

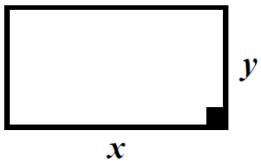
(7) اخذ القرار (ايجاد المطلوب)

كلامات تدل على ان السؤال ...على القيم المثلى مثل .... اكبر ما يمكن ، اصغر ما يمكن ، اقصر ، اطول.....

عددين غير سالبين مجموعهما 30 ، اوجد العددين اذا كان حاصل ضرب مربع العدد الاول في العدد الثاني اكبر ما يمكن.

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد ابعاد مستطيل محيطة 24 متر لتكون مساحته اكبر ما يمكن.

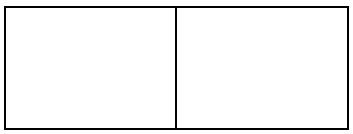


---

(2) مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم، يراد وضع سياج طوله 800 متر على الجوانب الثلاث الاخرى ما أكبر مساحة يمكن احاطتها.

---

(3) يراد عمل سياج حول اسطبل للخيول مستطيل الشكل ومقسوم الى حضرتين متلاصقين ومتطابقين في المساحة إذا كان طول السياج $120\ ft$ اوجد ابعاد الاسطبل لتكون مساحة اكبر ما يمكن



(1) مزرعة ابقار مستطيلة الشكل، يراد تقسيمها بسياج طوله 720 متر الى 8 حظائر مستطيلة الشكل ومتساوية المساحة اوجد ابعاد الحظيرة الواحدة لتكون مجموع مساحات جميع الحظائر اكبر ما يمكن

---

(2) قطعة ارض مستطيلة الشكل مساحتها 400 متر مربع، اوجد طول أصغر سياج ممكن احاطة الارض به من الجوانب الاربعة.

---

(3) مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم مساحتها 1800 قدم مربع ،يراد وضع سياج على الجوانب الثلاث الاخرى ما اصغر طول سياج يمكن احاطة الأرض به (القيمة الصغرى للمحيط)

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) صالة عرض مستطيلة الشكل مساحتها $800\ ft^2$ ، بها ثلاث ابواب من ثلاث جوانب عرض الباب الأول $10\ ft$ ، ومن الجهتين الباقية بابيين بعرض $6\ ft$ لكل منهم، اوجد طول اصغر جدار ممكن احاطة المعرض به من الجوانب الثلاث (التي تحتوي الابواب)

---

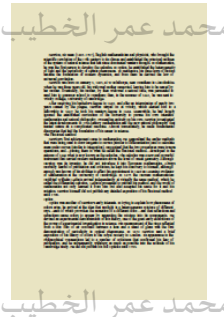
(2) بين ان المستطيل ذي المساحة العظمى الذي محيطة قيمة ثابتة p يكون مربع طول ضلعة $\frac{p}{4}$ ومساحتة $A=\frac{p^2}{16}$.

---

(3) بين ان المستطيل ذي المحيط الاصغر ومساحتة قيمة ثايتة A يكون مربع طول ضلعة $\sqrt{A}$ ومحيطة $4\sqrt{A}$.

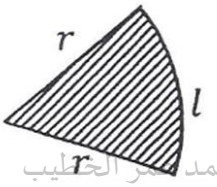
محمد عمر الخطيب

(1) صفحة مستطيلة مطبوع عليها اعلان على شكل منطقة مستطيلة مساحته $98\ in^2$ ويوجد بالصفحة هوامش من الجانبين $1\ in$ و من الاعلى والاسفل $2\ in$ ليس مطبوع عليهم اوجد ابعاد الاعلان التي تحقق القيمة الصغرى لمساحة الصفحة كاملة ثم اوجد ابعاد الصفحة.



---

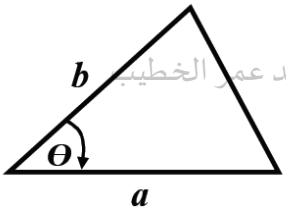
(2) قطاع دائري محيطة $12cm$ ، اوجد طول نصف قطر دائرتة التي تجعل مساحتة اكبر ما يمكن



مساحة القطاع الدائري $A=\frac{1}{2}rl$

---

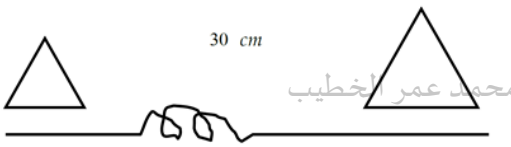
(3) ضلعان في مثلث طولاهما a,b (ثوابت) والزاوية بينهما θ .اوجد قيمة الزاوية θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.



مساحة المثلث = $\frac{1}{2}\ a\ b\ sin\ \theta$

محمد عمر الخطيب

(1) سلك طوله 30 cm نريد ان نصنع منه مثلثين كل منهما متطابق الاضلاع ، حدد طول كل ضلع من اضلاع المثلث ليكون مجموع مساحتيهما اصغر ما يمكن.



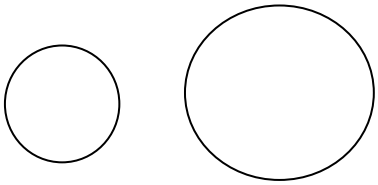
مساحة المثلث المتطابق الذي

طول ضلعة l هو

$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

---

(2) قرصان دائريان مجموع قطريهما 28 cm أوجد طول نصف قطر كل منهما ليكون مجموع مساحتيهما أقل ما يمكن .



محمد عمر الخطيب

(1) سلك طوله 68 cm قسم إلى جزأين غير متساويين وثني الجزء الأول على شكل مربع والثاني على شكل مستطيل طوله ضعف عرضه . أوجد طول كل جزء ليكون مجموع مساحتي الشكلين أقل ما يمكن .

(2) نافذه على شكل مستطيل يعلوها نصف دائرة، يراد احاطة الشكل بزخارف خشبية طولها $8+\pi$ قدم . اوجد نصف قطر الدائرة بحيث تمر اكبر كمية للضوء من الناقذة. (مساحة النافذة اكبر ما يمكن) (يجب وضع زخارف بين المستطيل ونصف الدائرة).

محمد عمر الخطيب

(1) ما أكبر مساحة مستطيل قاعدته على محور السينات وراساه العلويان على القطع المكافئ

$$y = 12 - x^2$$

(2) ما أكبر مساحة مستطيل قاعدته على المستقيم $y = 3$ وراساه السفليان على القطع المكافئ

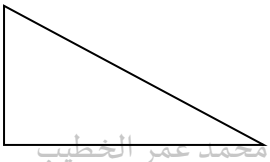
$$y = x^2$$

محمد عمر الخطيب

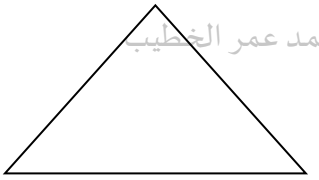
(1) ما أكبر محيط مستطيل قاعدته على محور السينات وراساه العلويان على القطع المكافئ

$$y = 4 - x^2$$

(2) ما أكبر مساحة مستطيل يمكن رسمة داخل مثلث قائم الزاوية طول قاعدته 10 **وارتفاعة** 5

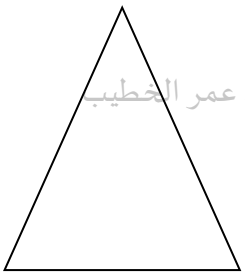


(1) مثلث متساوي الساقين طول قاعدته $8\ cm$ وطول ارتفاعة $10\ cm$ ، يراد رسم مستطيل داخل المثلث بحيث يقع احد بعدية على قاعدة المثلث ويقع كل من رأسيه الاخريين على على ساقي المثلث، اوجد بعدي المستطيل لتكون مساحتة اكبر ما يمكن



---

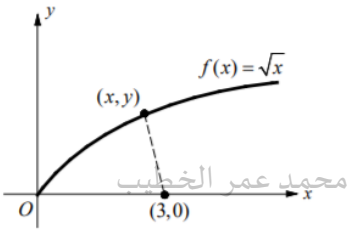
(2) ما اكبر مساحة مثلث متساوي الضلعين محيطة يساوي $30\ cm$



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) ما اقصر بعد للنقطة $(3,0)$ **عن المنحنى** $y=\sqrt{x}$



---

(2) ما أقصر بعد للنقطة $(5,-1)$ **عن المستقيم** $y=2x-1$

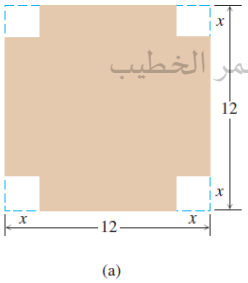
---

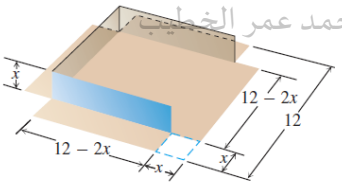
(3) ما أقصر بعد للنقطة $(0,0)$ **عن الدالة** $y=\cos x$

محمد عمر الخطيب

(1) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مربعة الشكل طول ضلعها $12in$

وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس. اوجد أكبر حجم للصندوق؟

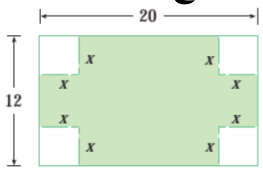




---

(2) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مستطيلة الشكل طول ضلعها $20in$

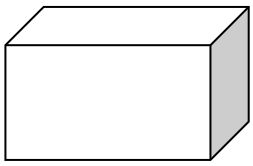
وعرضها $12in$ وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس. اوجد دالة حجم الصندوق (بدون حل)



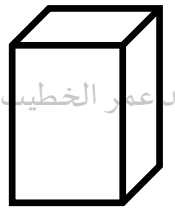
---

(3) صندوق على شكل متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يساوي ضعف عرضها ومجموع أبعاده

الثلاثة $180cm$.أوجد أبعاده ليكون حجمه أكبر ما يمكن .



(1) متوازي مستطيلات (صندوق شبة مكعب) من الصاج بدون غطاء ، قاعدته مربعة الشكل سعته 32 متر مكعب أوجد أبعاده لتكون مساحته السطحية أقل ما يمكن .



---

(2) يراد عمل خزان للمياه بغطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل و سعته 16 متر مكعب وتكاليف صنع المتر المربع من قاعدته ضعف تكاليف صنع المتر المربع من جوانبه أوجد ابعاد الخزان لتكون تكلفة صناعة الخزان اقل ما يمكن (اعتبر تكاليف المتر المربع من الجوانب هو s)

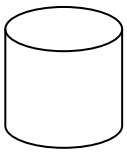
محمد عمر الخطيب

(1) يراد صنع علبة من المعدن على شكل اسطوانه دائرية قائمة مغلقة سعتها $128\pi\ cm^3$. اوجد ابعاد العلبة لتكون كمية المعدن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن.

---

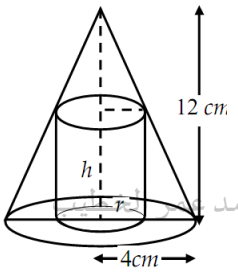
(2) يراد صنع علبة من المعدن على شكل اسطوانه دائرية قائمة مغلقة سعتها $32\pi\ fl\ oz$. بحيث ان سمك القاعدة والقمة ضعف سمك الجوانب اوجد ابعاد العلبة لتكون كمية المعدن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن.

(1) يراد عمل اسطوانة بدون قاعدة وبدون غطاء من صفيحة مستطيلة الشكل محيطها $36\ cm$ اوجد ابعاد المستطيل لتكون حجم الاسطوانة اكبر ما يمكن.



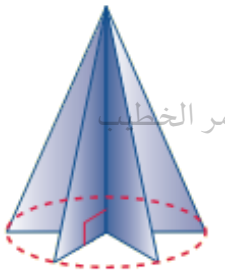
---

(2) الشكل المجاور يمثل مخروط دائرئ قائم نصف قطر قاعدته $4\ cm$ وارتفاعة $12\ cm$ رسم داخله اسطوانه دائرية قائمة بحيث يكون محور الاسطوانة ومحور المخروط متقابلين وكذلك القاعدتين .اوجد أكبر حجم لهذه الاسطوانة



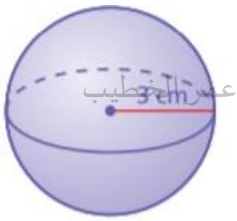
محمد عمر الخطيب

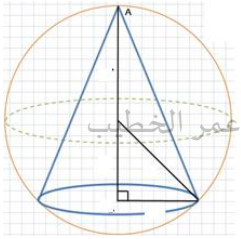
(1) اوجد حجم أكبر مخروط دائري قائم ناتج عن دوران مثلث قائم الزاوية وتره $5\ cm$ حول احد ضلعي القائمة.



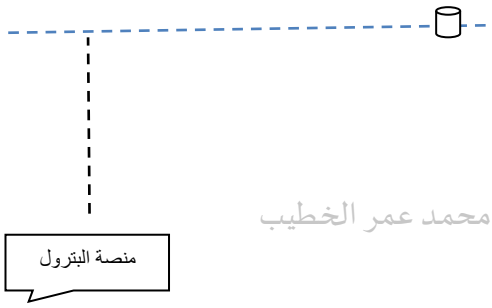
---

(2) اوجد حجم أكبر مخروط دائري قائم داخل كره نصف قطرها 3 وحدات.



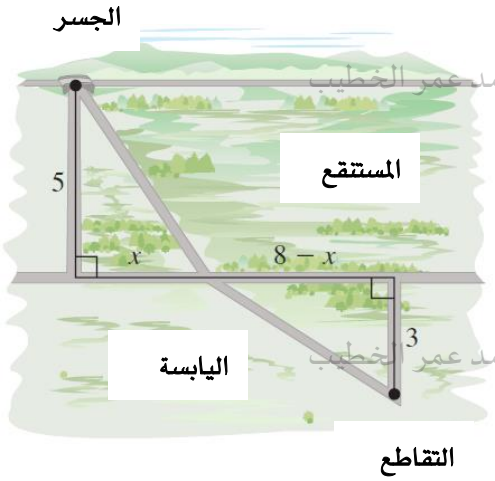


يراد توصيل خط انابيب من منصة للبترول في البحر وتبعد 4 كيلو متر عن الشاطئ الى خزان للنفط يقع على الشاطئ ويبعد الى الشرق عن اقرب نقطة للمنصة من الشاطئ مسافة 8 كيلو متر. اذا علمت ان تكلفة مد كيلومتر في البحر هو 5 مليون درهم وعلى الشاطئ هو 3 مليون درهم .اوجد اقل تكلفة لمد خط الانابيب بين المنصة والخزان.



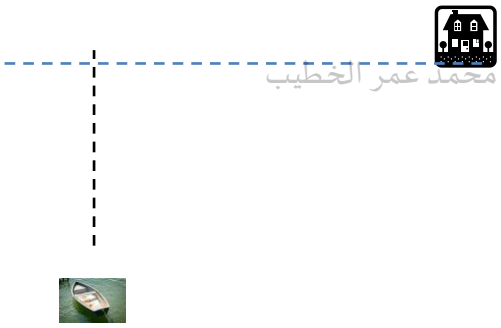
محمد عمر الخطيب

(1) يراد عمل طريق بين الجسر والتقاطع حيث يكون جزء من الطريق فوق المستنقع بتكلفة 10 مليون درهم للميل الواحد و 7 مليون درهم فوق الارض اليابسة للميل الواحد ، اكتب دالة التكلفة لعمل الطريق



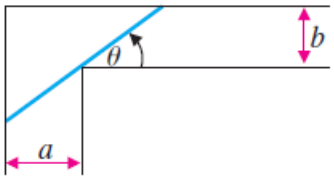
---

(2) ابحر شخص في قاربه على بعد $2km$ من الشاطئ ، يريد الوصول الى بيته الذي يقع على الشاطئ والذي يبعد $2km$ عن اقرب نقطة للقارب من الشاطئ ، اذا علمت انه يمكنه التجديف بمعدل $2km/h$ والسير بمعدل $5km/h$. اوجد اقل زمن ممكن للوصول الى بيته



محمد عمر الخطيب

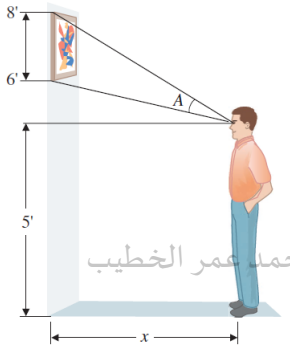
(1) الشكل المجاور يمثل ممر بعرض $a = 5m$ من احدى الجهتين والجهة الاخرى بعرض $b = 4m$ اوجد طول اطول سلم ممكن ان يمر من الممر



---

(2) اعتمد على الشكل المجاور في ايجاد قيمة x التي تجعل زاوية الرؤية A اوضح ما يمكن.

حيث $6'$ تمثل 6 اقدام



محمد عمر الخطيب

(1) تمثل العلاقة $P(v)=\frac{1}{v}+cv^3$ مقدار الطاقة التي يبذلها طائر حتى يسير بالسرعة v

حيث $c>0$ عدد ثابت . اوجد السرعة التي تحقق القيمة الصغرى للطاقة

---

(2) تمثل الدالة $\mathrm{R}(x)=\frac{35x-x^2}{x^2+35}$ ارباح شركة بملاين الدراهم من بيع x سلعة بالالاف.

اوجد القيمة العظمى للربح

(1) الغرض من السعال البشري هو زيادة تدفق الهواء الى الرئتين ،بازاحة جميع الجسيمات التي تسد القصبة الهوائية وتغير نصف قطر القصبة الهوائية. اذا علمت ان السرعة المتجهه لتدفق الهواء خلال القصبة الهوائي تعطى بالعلاقة $V(r) = cr^2(r_0 - r)$ عند نصف قطر القصبة r ، حيث c عدد ثابت و r_0 نصف قطر القصبة بدون اي ضغط (سعال) اوجد نصف قطر القصبة الهوائية التي تجعل السرعة المتجهه للهواء اكبر ما يمكن

---

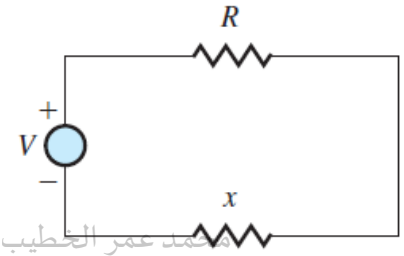
(2) تمثل الدالة $f(v) = v\,e^{-v/2}$ قوة احدى عظلات الجسم بعد انقباضها بسرعة مقدارها $v > 0$ ، اوجد السرعة التي تحقق القيمة العظمى للقوة

(1) تمثل الدالة $f(t)=e^{-0.02t}-e^{-0.42t}$ تركيز الدواء في العضلات بعد t ساعة من اخذ الدواء

اوجد الزمن الذي يكون فية التركيز الدواء داخل العضلات اكبر ما يمكن

---

(2) تمثل العلاقة $p(x)=\dfrac{V^2x}{(R+x)^2}$ مقدار الطاقة المتصة في جهاز



كهربائي كما في الشكل حيث V مقدارالجهد(ثابت)

و R كمية المقاومة (ثابت) ، اوجد قيمة المقاومة x التي تحقق القيمة العظمى للطاقة المتصة.

محمد عمر الخطيب

(1) تمثل الدالة $Q(t)=-3t^3+18t^2+60t$ **عدد السلع التي ينتجها عامل خلال الزمن** t **حيث تمثل** $Q'(t)$ **كفاءة العامل في اي لحظة . اوجد الزمن التي يكون فيها كفاءة العامل اكبر ما يمكن.**

---

(2) تمثل الدالة $T(x)=102-\frac{1}{54}(9x^2-x^3)$ **درجة حرارة الجسم بعد تلقي الدواء بساعة واحدة حيث** x **كمية الجرعة المعطى بالمليغرام للمريض** $0\le x\le 6$ **وتمثل الدالة** $T'(x)$ **حساسية الجسم من الجرعة . اوجد الجرعة التي تحقق القيمة الصغرى للحساسية.**

خطوات حل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن

اقراء المسالة

(1) ارسم شكلا توضيحياً

(2) حدد المتغيرات ورمّزها

(3) اكتب المعطيات والمطلوب

(4) اكتب العلاقة الاساسية التي تربط المعطيات بالمطلوب

(5) اشتق الدالة الاساسية ضمنياً بالنسبة للزمن

اشتق كل المتغيرات بالنسبة للزمن

(6) عوض المعطيات لايجاد المطلوب

ملاحظة :

(1) يجوز اشتقاق الدالة الاساسية في حالة وجود متغيرين بشرط توفر معلومات عن المتغيرات او ابحث عن علاقة مساعدة للتخلص من احدهما

(2) اذا كانت قيمة المتغير تزيد فان معدل تغيره موجب

(3) اذا كانت قيمة المتغير تقل فان معدل تغيره سالب

ينتشر حريق في احدى الغابات بشكل دائري ،ويتزايد طول نصف قطر الحريق بمعدل $5m/\min$ اوجد معدل التغير في مساحة الحريق عندما يكون نصف قطره $200m$.

محمد عمر الخطيب

(1) مثلث متساوي الأضلاع يزداد طول ضلعه بمقدار $0.1\,cm/s$ أوجد معدل التغير في مساحة المثلث عندما يكون طول ضلعه يساوي $\sqrt{3}\,cm$

---

(2) تتحرك نقطة على منحنى معادلته $y=\sqrt{x^2-3}$ ، فإذا كان الاحداثي x للنقطة يزداد بمعدل $3\,unit/s$ أوجد معدل التغير في الإحداثي y عندما تكون $x=2$

---

(3) تتحرك كرة بمعدل $1\,m/s$ على خط أفقي متجه نحو عمود ارتفاعه $40\,m$ ، أوجد معدل تغير المسافة بين الكرة وقمة العمود عندما تكون الكرة على بعد $30\,m$ من قاعدة العمود. (اهمل ارتفاع الكره)

(1) حوض (منصة) ارتفاعه $6\ ft$ عن منسوب الماء ، سحب رجل مركب بواسطة حبل بمعدل $2\ ft/s$

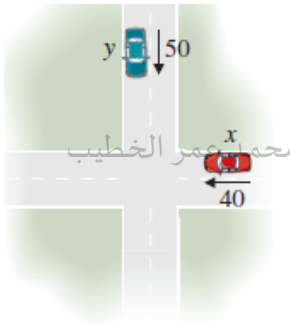
ويبقى القارب على مستوى سطح الماء

اوجد سرعة اقتراب المركب عندما يكون على بعد $20\ ft$ من اسفل الحوض

---

(2) تسير سيارة بسرعة $50km/h$ اتجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2}km$ شمال التقاطع ، وتسير سيارة شرطة بسرعة $40km/h$ من نقطة تبعد $\frac{1}{4}km$ شرق التقاطع نفسه ، في هذه اللحظة يقيس رادار سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير بها المسافة بين السيارتين ، اوجد ما هذه السرعة التي سيسجلها الرادار.

هل ستكون قياس الرادار لسرعة السيارة صحيح ؟ فسر ذلك

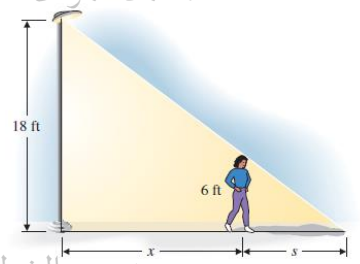


محمد عمر الخطيب

(1) رجل طوله $6\ ft$ ويبعد $12\ ft$ عن عمود انارة ارتفاعة $18\ ft$

ويمشي مبتعداً عن العمود بمعدل $2\ ft/s$

أوجد معدل تغير طول ظل الرجل

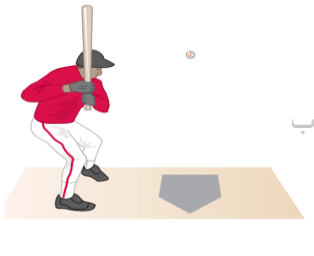


---

(2) يرتفع بالون راسياً للأعلى بمعدل $75m/\min$ ، اذا تم رصد البالون من مشاهد على الارض ويبعد $150m$ عن موقع البالون على الارض، اوجد معدل تغير زاوية المشاهد للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع $150m$ من سطح الارض (اهمل ارتفاع الرجل)

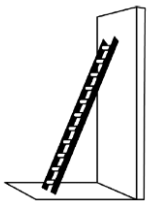
---

(3) يقف لاعب كرة البيسبول على بعد قدمين من اللوح الرئيس للكرة ويشاهد الكرة قادمة بتجاهه بشكل افقي وبسرعة متجهة $130\ ft/s$، ما معدل التغير في زاوية النظر للاعب لمتابعة الكرة عندما تعبر الكرة اللوح $(x=0)$

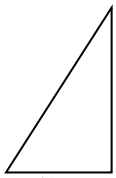


سلم طوله $10\ m$، موضوع احد طرفية على جدار منزل والطرف الأخر موضوع على الارض،ويتحرك بعيداً عن الحائط بمعدل $3\ m/s$

(أ) ما سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $8\ m$ من الحائط.



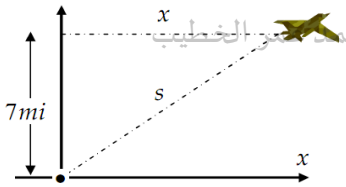
(ب) ما معدل التغير في الزاوية التي تقع بين السلم والارض عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $8\ m$ من الحائط.



(ج) ما معدل التغير في مساحة المثلث الذي يتكون من السلم والحائط والارض عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $8\ m$ من الحائط.

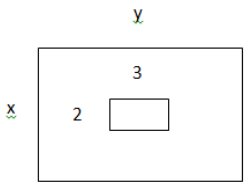
محمد عمر الخطيب

(1) تطير طائرة على ارتفاع ثابت قدرة $7\ mi$ عن سطح الارض وتمر مباشرة فوق رادار كما هو مبين بالشكل ، اذا كانت المسافة بين الطائرة والردار تتغير بسرعة $300\ mi/h$ اوجد سرعة الطائرة عندما تكون المسافة بين الطائرة والردار $10\ mi$.

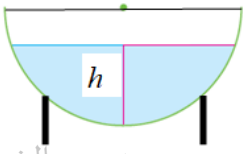


---

(2) مستطيل عرضة $2\ cm$ ، وطولة $3\ cm$ يتغير بعدي المستطيل بحيث يزداد عرضة بمعدل $4\ cm/s$ فاذا كانت النسبة بين ابعاد المستطيل لا تتغير ، اوجد معدل تزايد مساحة المستطيل عندما يكون عرضة $8\ cm$



(1) يتدفق النفط الى خزان على شكل نصف كرة بمعدل $8m^3 / s$ ، فاذا كان حجم النفط V في الخزان يعطي بالعلاقة



$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (36 - h)$$

اوجد معدل تغير ارتفاع النفط بالخزان عندما يكون النفط على ارتفاع $4m$.

---

(2) بالون كروي نفخ في غاز الهيليوم بمعدل $100\pi \ ft^3 / \min$.

(أ) اوجد سرعة تزايد نصف قطر البالون عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $5 \ ft$.

(ب) اوجد سرعة تزايد مساحة البالون السطحية عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $5 \ ft$.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

قطرة ماء كروية تتبخر بمعدل $1\,cm^3 / \min$ وتبقى تحافظ على شكلها

(أ) اوجد معدل تناقص نصف قطر قطرة الماء عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $0.2\ cm$.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(ب) اوجد سرعة تناقص المساحة السطحية لقطرة الماء عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $0.2\ cm$.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

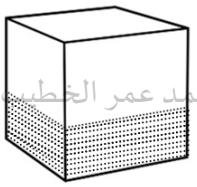
(ج) اذا كان معدل تبخر حجم قطرة الماء يتناسب مع المساحة السطحية لها ، فبين ان معدل تغير نصف القطر ثابت عند اي لحظة

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) خزان مكعب الشكل مملوء بالماء طول ضلعه $5\ m$ يتسرب منه الماء بمعدل $2\ m^3 / h$ ، أوجد معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان.



---

(2) خزان اسطواني الشكل نصف قطره $3\ ft$ وارتفاعة $5\ ft$ و يتدفق الماء له بمعدل $15\ ft^3 / s$ ويتسرب منه بمعدل $6\ ft^3 / s$.

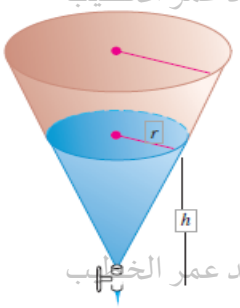
(أ) اوجد معدل تغير ارتفاع الماء داخل الخزان

(ب) اوجد معدل تغير مساحة سطح الماء داخل الخزان من الجهه العلوية (عند النظر من الاعلى)

محمد عمر الخطيب

(1) يتسرب الماء من خزان على شكل مخروط قائم رأسه للاسفل بمعدل $10m^3 / \min$ اذا كان ارتفاع الماء في المخروط يساوي طول قطر قاعدة الماء عند نفس اللحظة،

(أ) اوجد سرعة تغير نصف قطر الماء في المخروط عندما يكون نصف القطر $5m$.



(ب) اوجد سرعة هبوط سطح الماء عند نفس اللحظة.

(ج) اوجد معدل تغير مساحة سطح الماء العلوية داخل الخزان (عند النظر من الاعلى) عند نفس اللحظة.

(1) ينسكب الرمل بمعدل $20\ ft^3 / s$ ويشكل كومة مخروطية على الأرض بحيث يبقى الارتفاع ضعف نصف القطر، اوجد معدل تزايد نصف قطر الكومه عندما يصل ارتفاع الكومة $6\ ft$ الكومة

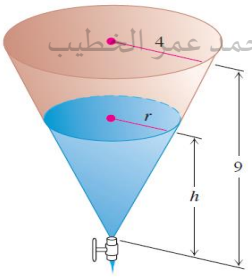
---

(2) ينسكب الرمل بمعدل $20\ ft^3 / s$ ويشكل كومة مخروطية على الأرض بحيث تبقى زاوية المخروط مع المستوى الافقي 45° ، اوجد معدل تزايد نصف قطر الكومه عندما يصل ارتفاع الكومة $6\ ft$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) خزان ماء مخروطي قائم رأسه للاسفل طول نصف قطر قاعدته $4m$ وارتفاعة $9m$ ، يصب فيه الماء بمعدل $17m^3 / h$ ويتسرب الماء منه بمعدل $8m^3 / h$ ، اوجد سرعة تغير نصف قطر الماء في المخروط عندما يكون نصف القطر $2m$



---

(2) اسطوانة دائرية قائمة تتمدد بالحرارة ، فإذا كان ارتفاعها $\frac{2}{3}$ قطر قاعدتها ، ويتغير نصف قطرها بمعدل $0.01\,ft / h$ أوجد معدل تغير حجمها وذلك عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها $5\,ft$.

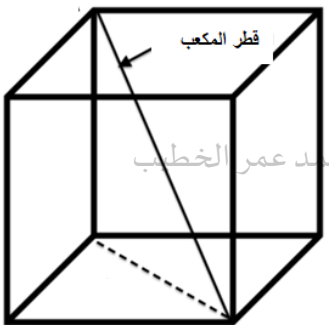
محمد عمر الخطيب

مكعب ثلجي يتناقص طول ضلعة بمعدل $1cm/h$

(أ) اوجد معدل تغير حجمه عندما يكون طول ضلعه $10\,cm$

(ب) اوجد معدل تغير مساحتة السطحية عندما يكون طول ضلعه $10\,cm$

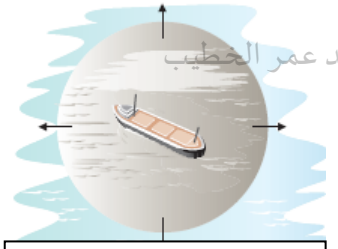
(ج) اوجد معدل تغير طول قطره عندما يكون طول ضلعه $10\,cm$



محمد عمر الخطيب

(1) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل 120 جالون في الدقيقة وينتشر بشكل دائري بسمك $\frac{1}{4}''$ ،

اوجد معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط عندما يكون نصف القطر $300\ ft$.



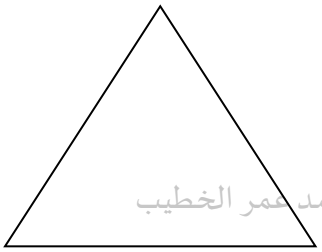
$$7.5\ gal = 1\ ft^3$$
$$120\ gal = 16\ ft^3$$

$$\frac{1}{4}'' = \frac{1}{4}in = \frac{1}{4}\times\frac{1}{12}\ ft = \frac{1}{48}'$$

---

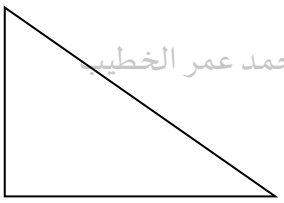
(2) مثلث متساوي الساقين قاعدته ثابتة طولها $8\ cm$ ، يزيد ارتفاع المثلث بمعدل $2\ cm$ لكل دقيقة

اوجد معدل التغير في زاوية رأس المثلث عندما يكون ارتفاعة $6\ cm$.



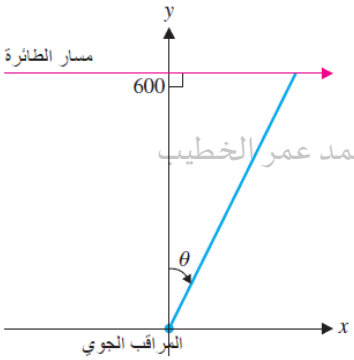
محمد عمر الخطيب

(1) في لحظة ما كان طولا القاعدة والارتفاع في مثلث قائم الزاوية هما $6\ cm$ و $8\ cm$ على الترتيب فإذا كان طول الضلع الأول ينقص بمعدل $1\ cm/\min$ وكان طول الضلع الثاني يزداد بمعدل $2\ cm/\min$. أوجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد دقيقتين



---

(2) تطير طائرة بسرعة $540\ km/h$ على ارتفاع ثابت قدرة $600m$ عن سطح الارض وتمر فوق مراقب جوي ، اوجد <u>اكبر معدل للتغير</u> في الزاوية بين خط نظر المراقب والخط العمودي على مسار الطيران



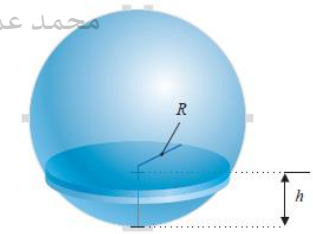
ضخت مياه الى خزان كروي نصف قطره $60\ ft$ بمعدل ثابت $10\ f^3 / s$

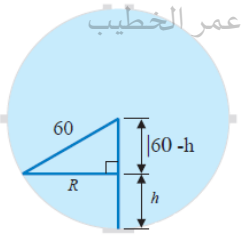
اوجد معدل تغير نصف قطر اعلى مستوى للمياه في الخزان عندما يمتلى الخزان الى النصف

يعطى حجم الماء في الخزان الكروي الذي نصف قطره $60\ ft$ ونصف قطر مستوى سطح الماء R بالعلاقة

$$V(R)=\pi\left[60^2(60^2-R^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}(60^2-R^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\times 60^3\right]$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dR}\times\frac{dR}{dt}\rightarrow\frac{dR}{dt}=\frac{dV/dt}{dV/dR}$$





ضخت مياه الى خزان كروي نصف قطره $60\ ft$ بمعدل ثابت $10\ f^3 / s$

اوجد الارتفاع الذي عنده معدل التغير في الارتفاع يساوي معدل التغير في نصف القطر

تعطى العلاقة بين ارتفاع الماء h ونصف قطر سطح الماء R عند اي زمن بالعلاقات التالية

$$h(t) = 60 \pm \sqrt{60^2 - R^2} \quad , \quad R(t) = \pm\sqrt{120h - h^2}$$

محمد عمر الخطيب

الاقتصاد

القيمة العظمى للربح

نظريات مهمة في الاقتصاد

(1) القيمة العظمى للربح
(2) القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة
(3) الطلب والسعر

(1) الدخل من بيع x قطعة بسعر القطعة الواحدة p هو $r(x)=x\times p$

الدخل الحدي $\frac{dr}{dx}$

(2) تكلفة انتاج x قطعة هو $c(x)$

التكلفة الحدية $\frac{dc}{dx}$

(3) الربح (الخسارة) من بيع x قطعة هو $p(x)=r(x)-c(x)$

الربح الحدي $\frac{dp}{dx}$

ملاحظة مهمة: دالة الدخل والتكلفة والربح هي دالة تراكمية اما الدخل الحدي والتكلفة الحدية والربح الحدي دالة حدية اي تحسب قيمة كل دالة عند قطعة واحدة فقط وليست تراكمية

ملاحظات مهمة

(1) التكلفة الفعلية لانتاج القطعة رقم x_n هو $C(x_n)-C(x_{n-1})$

(2) التكلفة الحدية لانتاج القطعة رقم x_n هو $C'(x_n)$

(3) عندما يكون الانتاج كبير فان التكلفة الفعلية لانتاج القطعة رقم x_n تقريبا يساوي التكلفة الحدية

(4) متوسط التكلفة للقطعة الواحدة يساوي $\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$

(5) عندما يكون $C''(x)<0$ فانه يعني ان تكلفة انتاج القطعة الواحدة يقل مع زيادة الانتاج ويدل ذلك على ان التصنيع على درجة كفاءة عالية

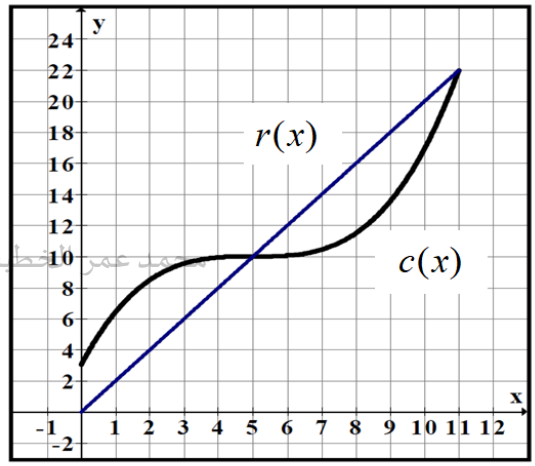
محمد عمر الخطيب

يمثل الشكل المجاور دالة الدخل $r(x)$

ودالة التكلفة $c(x)$ بملاين الدراهم

عند انتاج x جهاز كمبيوتر بالالاف الوحدات

لاحدى الشركات



(1) اوجد $C(0)$ وماذا تمثل

---

(2) هل تحقق الشركة ربح ام خسارة عند انتاج 2000 قطعة

---

(3) حدد قيمة الربح او الخسارة عند انتاج 2000 قطعة

---

(4) حدد الفترة التي تحقق فيها الشركة خسارة

---

(5) حدد الفترة التي تحقق فيها الشركة ربح

---

(6) حدد القيمة التقريبية للانتاج التي تحقق فيها الشركة ربحية عظمى

---

(7) اوجد $C(5)$ و $r(5)$ وماذا تلاحظ.

محمد عمر الخطيب

اذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.02x^2+8x+5000$

(1) اوجد تكلفة انتاج اول 100 قطعة.

(2) اوجد التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100.

(3) اوجد التكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100.

(4) قارن بين التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100والتكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100. وايهما اسهل بالحساب.

(5) اوجد متوسط تكلفة انتاج القطعة الواحدة عند انتاج 100 قطعة

(6) اوجد متوسط تكلفة انتاج القطعة الواحدة عند انتاج 1000 قطعة

(7) قارن بين متوسط تكلفة القطعة الواحدة عند انتاج 100 قطعة وعند انتاج 1000 ماذا تلاحظ.

(1) اذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x وحدة تعطى بالعلاقة $C(x)=2x+5000$ ودالة الايردات تعطى بالعلاقة $R(x)=10x-0.001x^2$ اوجد القيمة العظمى للربح.

---

(2) مصنع لانتاج دمى الاطفال، يبيع المصنع x دمية اسبوعيا بسعر الواحدة 20 درهم ،فاذا كانت دالة التكلفة لانتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.002x^2+8x+5000$ اوجد عدد القطع التي ينتجها المصنع ليحقق اكبر ربح.

محمد عمر الخطيب

القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة

متوسط التكلفة للقطعة الواحدة يساوي التكلفة الكلية على عدد القطع أي ان $\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$

(1) لتكن $C(x)=x^3-6x^2+15x$ **تمثل دالة تكلفة انتاج** x **من الاجهزة بالالاف .**

اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

---

(2) لتكن $C(x)=0.02x^2+20x+1800$ **تمثل دالة تكلفة انتاج** x **من الاجهزة. اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.**

محمد عمر الخطيب

(1) لتكن $C(x)=10\,e^{0.02x}$ **تمثل دالة تكلفة انتاج** x **من الاجهزة بالالاف. اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.**

---

(2) لتكن $C(x)=16000+200x+4x^{\frac{3}{2}}$ **تمثل دالة تكلفة انتاج** x **من الاجهزة. اوجد مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.**

---

(3) تمثل الدالة $\overline{C}(x)=10+\frac{100}{x}$ **متوسط التكلفة لانتاج** x **من الاجهزة. إذا كان الانتاج الحالي** 10 **قطع ويزداد بمعدل جهزين سنويا ، اوجد معدل التغير السنوي في متوسط التكلفة.**

(1) تمثل الدالة $p(x)=1.3-\frac{x}{2500}$ سعر علبة العصير الواحدة بالدرهم عند بيع x علبة . اوجد عدد القطع التي تحقق القيمة العظمى للدخل

---

(2) تبيع مكتبة 20000 او اقل كتاب سنوياً من نوع واحد بربح 3 درهم لكل كتاب فاذا زاد عدد الكتب المباعة عن هذا العدد فان الربح يقل بـ 0.0001 درهم عن كل كتاب زيادة عن 20000 كتاب (مثلاً ربح الكتاب الواحد 2.9 درهم عند بيع 21000 كتاب).

ما عدد النسخ التي تبيعها المكتبة حتى تحقق اعلى ربح

---

(3) اذا كانت سعر التذكرة الواحدة لحضور حفل هي 40 درهم ، ويتم خصم واحد درهم عن كل تذكرة بعد طلب 20 تذكرة بحد اقصى 50 تذكرة (مثلاً سعر التذكر 38 درهم عند شراء 22 تذكرة) اوجد عدد التذاكر التي تحقق القيمة العظمى لتكلفة التذاكر.

(1) دالة الطلب : هي دالة تمثل عدد السلع او القطع وهي دالة تعتمد على سعر القطعة وتكون على الشكل $x = f(p)$

(2) دالة الايراد او الدخل هي $R = p \times x = p \times f(p)$

(3) مرونة الطلب E هي دالة تعتمد على سعر السلعة وعدد السلع وتساوي $E = \frac{P}{f(P)} f'(P)$

(4) اذا كانت $E < -1$ يكون الطلب مرن اي ان السعر يزداد و دالة الايرادات تتناقص

أذا كانت دالة الطلب لسلعة معينة تعطى بالعلاقة $f(p) = 200(30 - p)$ حيث p سعر القطعة

$0 < P < 30$

(1) اوجد عدد القطع المطلوبة عند السعر 10 درهم.

(2) اوجد عدد القطع المطلوبة عند السعر 25 درهم.

(3) اوجد الايرادات (الدخل) عند السعر 10 درهم وعند السعر 25 درهم وقارن بينهم

اذا كانت دالة الطلب لسلعة معينة تعطى بالعلاقة $f(p)=200(30-p)$ حيث p سعر القطعة

$0<P<30$

(1) اوجد مرونة الطلب E

مرونة الطلب

$$E=\frac{P}{f(P)}f'(P)$$

---

(2) اوجد مدى الاسعار الذي يجعل الطلب مرن $E<-1$. (اوجد الفترة التي يكون فيها الطلب مرن)

الدخل او الايرادت

$$R=P\times f(P)$$

(3) اوجد دالة الايرادات ثم حدد الفترة التي يتزايد فيها الايراد.

(اوجد مدى الاسعار الذي يجعل الطلب غير مرن $E>-1$)

محمد عمر الخطيب

تقوم احدى الشركات بتقدير مبيعاتها السنوية بالعلاقة $s(t) = 60 - 40e^{-0.05x(t)}$ بالالاف حيث $x(t)$

تمثل كمية الانفاق بالالاف الدراهم على الاعلانات مع مرور الزمن t بالسنوات ، والجدول التالي يمثل حجم الانفاق لمدة اربع سنوات.

السنة t	1	2	3	4
تكلفة الاعلانات	14500	16000	18000	20000

(أ) قدر مقدار المبيعات عند السنة الثانية.

(ب) قدر معدل التغير في الانفاق على الاعلانات في السنة الرابعة.

(ج) قدر معدل التغير في كمية المبيعات في السنة الرابعة.

(1) تحدد العلاقة $f(x)=\sqrt{2x}$ **حيث** $0\le x\le 8$ **كتلة أول** x **مترمن سلك معدني رقيق**

اوجد الكثافة الخطية للمعدن عندما $x=8$

الكثافة الخطية
هي مشتقة الكتلة
$\rho(x)=m'(x)$

---

(2) تحدد العلاقة $m(x)=(x-1)^3+6x$ **حيث** $0\le x\le 2$ **كتلة أول** x **مترمن سلك معدني رقيق اوجد الكثافة الخطية ثم صف كيف تتوزع الكثافة على السلك**

(1) أذا كان سرعة التفاعل $x'(t)$ لمادة معينة تعطى بالعلاقة $x'(t)=2x(t)\left[1-4x(t)\right]$ حيث $x(t)$

تقيس مقدار التركيز من درجة التشبع اوجد التركيز الذي تصل فيه سرعة التفاعل $x'(t)$ الى القيمة العظمى .

ملاحظة

$x(t)$ تمثل التركيز

و $x'(t)$ تعني معدل التغير في التركيز وهو سرعة التفاعل ويمكن اعتبارة دالة في التركيز اي ان

$$x'(t)=f(x)$$

---

(2) تحدد العلاقة $Q(t)=e^{t}(3\cos 2t+4\sin 2t)$ ، كمية الشحنة بالكولوم في دائرة كهربائية عند زمن معين، اوجد التيار بعد نصف ثانية .

التيار $I(t)=Q'(t)$

محمد عمر الخطيب

قانون بويل للغازات في درجة حرارة ثابتة هو $PV = c$ حيث ان P هو ضغط الغاز و V حجم الغاز والعدد c ثابت الغازات على اعتبار ان P و V دوال متربطة بالزمن

(أ) بين ان $\frac{P'(t)}{V'(t)} = \frac{-c}{V^2}$

(ب) اكتب P كدالة في V ثم اوجد $P'(V)$

(ج) قارن بين $P'(V)$ و $\frac{P'(t)}{V'(t)}$ من الفقرتين أ و ب

(1) يرتبط f تردد اهتزاز اوتار الجيتار بالتوتر T (ثابت) الذي يشد به الوتر بالعلاقة $f=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$

حيث ρ تمثل الكثافة (ثابت) و L طول الوتر

(أ) اوجد $f'(t)$ عندما يكون $L=\frac{1}{2}$ و $\sqrt{\frac{T}{\rho}}=220$ و $L'(t)=-4$

(ب) اوجدالزمن المستغرق لرفع طبقة الصوت اوكتاف واحد (ضعف f)

---

(2) يعرف الرقم الهيدروجيني $P(x)$ بالعلاقة $P(x)=c+ln\frac{x}{1-x}$ حيث تمثل x كمية القاعدة المضافة الى الخليط لكسر الحامض و c عدد ثابت حيث $0<x<1$ ، اوجد قيمة x التي تجعل معدل تغيير الرقم الهيدروجيني صغير جدا.(قيمة صغرى مطلقة)

ملاحظة (معدل تغير الرقم الهيدروجني هو $P'(x)$ وممكن اعتبارها $g(x)$)

السكان

(1) اذا كانت المعادلة اللوجستية للنمو السكاني تعطى بالعلاقة $p'(t)=4p(t)\left[5-p(t)\right]$ **حيث تمثل** $p(t)$ **عدد السكان بالمليون مع مرور الزمن ، اوجد التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو الى القيمة العظمى.**

ملاحظة

$p(t)$ **تمثل عدد السكان**

و $p'(t)$ **تعني معدل النمو السكاني ويمكن اعتبارها دالة في عدد السكان**

اي ان $f(p)=p'(t)$

---

(1) تمثل الدالة $f(t)=\dfrac{70}{1+3e^{-0.2t}}$ **نسبة عدد السكان التي تصلهم اشاعة معينة بعد الزمن** t **بالساعة**

(أ) اوجد $f(2)$ **وماذا تمثل**

(ب) اوجد $f'(t)$ **, وبين ان** $f'(t)>0$

(ج) اوجد $f'(2)$ **وماذا تمثل .**

(د) الحد الأقصى لنسبة عدد السكان الذين ستصلهم الاشاعة .

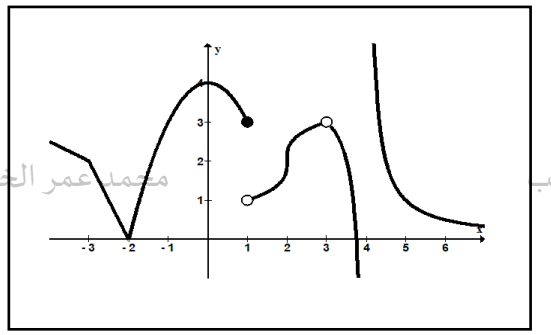
$$\lim_{t\to\infty} f(t)$$

اجابات التمارين العامة موجودة في آخر صفحة بالوحدة

تمارين عامة على الوحدة الرابعة

الوحدة الرابعة ///// اسئلة الدرس الثالث

(1) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$



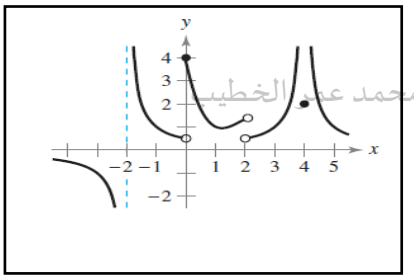
ان عدد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)$ تساوي

(a) 4 (b) 5

(c) 6 (d) 7

---

(2) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$ ، ان الاعداد الحرجة للدالة $f(x)$ هي

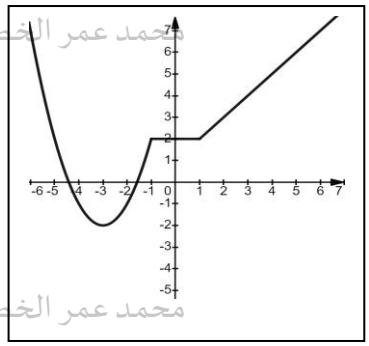


(a) $-2,0,1,2,4$ (b) $0,1,2,4$

(c) $0,1,4$ (d) $0,1$

---

(3) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$



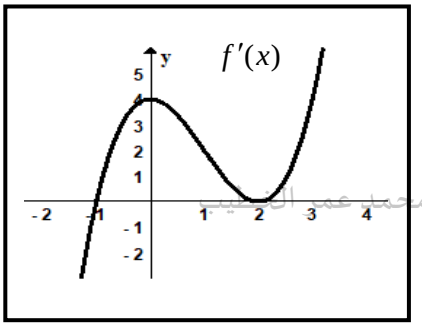
فان الاعداد الحرجة للدالة هي

(a) $x=-3,-1,1$ (b) $x=-3,-1,0,1$

(c) $x=-3, x\in[-1,1]$ (d) $x=-3, x\in(-1,1)$

محمد عمر الخطيب

(4) الشكل المجاوريمثل بيان الدالة $f'(x)$ ،ان الاعداد الحرجة للدالة $f(x)$ هي



(a) -1

(b) $-1,2$

(c) $-1,0,2$

(d) $0,2$

---

(5) الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=3x^{\frac{1}{3}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ هي

(a) 0

(b) $0,-1$

(c) $1,-1$

(d) -1

---

(6) الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=\begin{cases}7-2x^2 & x\le 1\\ x^2-4x & x>1\end{cases}$ هي

(a) $0,1,2$

(b) $0,1$

(c) $0,2$

(d) $1,2$

---

(7) الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=(x^2+x+0.45)e^{-2x}$ هي

(a) $\frac{1}{\sqrt{20}}$

(b) $-\frac{1}{\sqrt{20}}$

(c) $\pm\frac{1}{\sqrt{20}}$

(d) $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

محمد عمر الخطيب

(8) الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=x-\sin 2x$ على الفترة $[0,\pi]$ هي

(a) $\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$

(c) $\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{3}$

---

(9) عدد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=\sqrt[3]{x^3-4x}$ هي

(a) 2 (b) 3

(c) 4 (d) 5

---

(10) الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=\frac{2x^2}{x+2}$ هي

(a) $-4,-2,0$ (b) $-4,-2$

(c) 0 (d) $-4,0$

---

(11) العدد الحرج للدالة $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ هي

(a) 0 (b) 1

(c) -1 (d) 2

---

(12) اذا كانت للدالة $f(x)=x^2e^{kx}$ عددا حرجا عند $x=\frac{2}{3}$ فان قيمة k تساوي

(a) -3 (b) 0

(c) $\frac{-3}{2}$ (d) $\frac{-1}{3}$

محمد عمر الخطيب

(13) اذا كان للدالة $f(x)=x^3-cx$ عدد حرج عند $x=-1$ فان قيمة c تساوي

(a) 1 (b) 3 (c) -3 (d) 0

---

(14) اذا كانت $f(x)=x^3-3x^2+12$ فان القيمة العظمى المطلقة للدالة f على الفترة $[-2,4]$ تكون عند

(a) -2 (b) 0

(c) 2 (d) 4

---

(15) القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)=\sin^{-1}x$ على الفترة $[-1,1]$ هي

(a) π (b) 1

(c) $\frac{3\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

---

(16) القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)=x^2e^{-x}$ على الفترة $[0,4]$ هي

(a) 0 (b) e

(c) $\frac{4}{e^2}$ (d) $\frac{16}{e^4}$

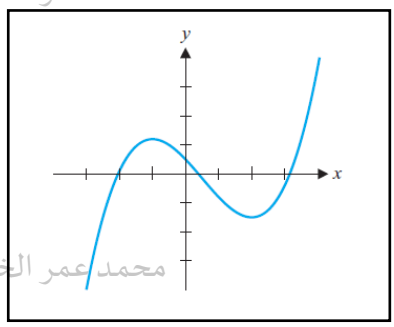
---

(17) اذا كانت $f(x)=\cos 2x$ على الفترة $[0,\pi]$ فان القيمة الصغرى المطلقة للدالة تكون عند

(a) 0 (b) π

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

محمد عمر الخطيب



(18) ان القيمة العظمى المحلية للدالة $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$

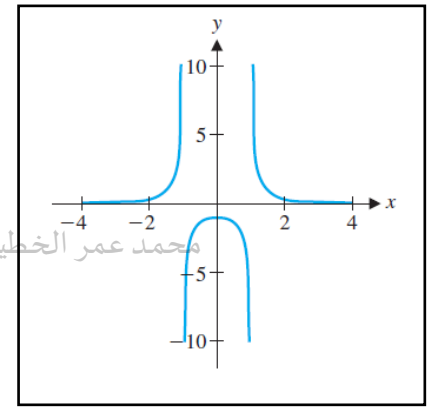
التي لها التمثيل البياني المجاور تكون عند

(a) 0

(b) -1

(c) 2

(d) $-1,2$



(19) ان القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

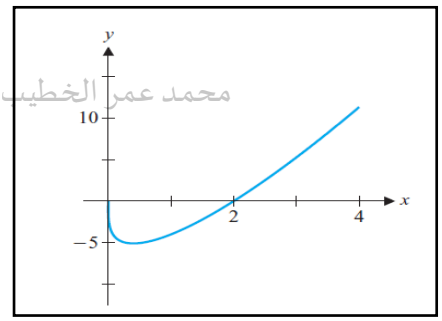
التي لها التمثيل البياني المجاور على الفترة $(-1,1)$ تكون عند

(a) 0

(b) -1

(c) -2

(d) $0,-1$



(20) ان القيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x)=4x^{\frac{5}{4}}-8x^{\frac{1}{4}}$

التي لها التمثيل البياني المجاور تكون عند

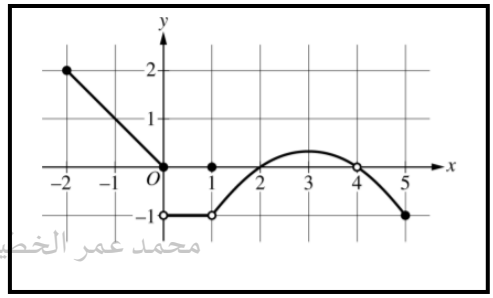
(a) $\dfrac{2}{5}$

(b) $\dfrac{3}{5}$

(c) -5

(d) -6

(21) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$



اي من الجمل التالية صحيحة

(a) للدالة f قيمة عظمى محلية عند $x=1$

(b) للدالة f قيمة صغرى محلية عند $x=0$

(c) للدالة f قيمة صغرى محلية عند $x=0$

(d) ليس للدالة f قيمة صغرى مطلقة

---

(22) للدالة $g(x)=e^x-2x$ على الفترة $[0,1]$

(a) قيمة عظمى مطلقة عند $x=\ln 2$

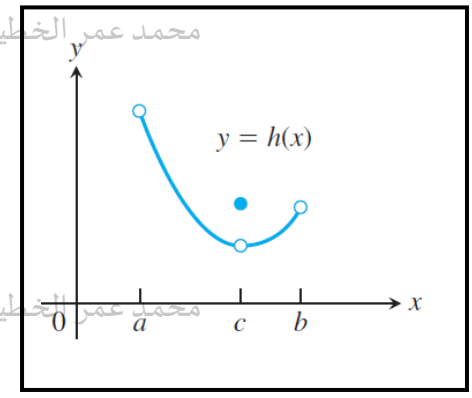
(b) قيمة صغرى مطلقة عند $x=0$

(c) قيمة صغرى مطلقة عند $x=\ln 2$

(d) قيمة صغرى مطلقة عند $x=1$

---

(1) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $h(x)$ ، اي من الجمل التالية صحيحة



(a) للدالة $h(x)$ قيمة عظمى مطلقة عند $x=a$

(b) للدالة $h(x)$ قيمة صغرى مطلقة عند $x=c$

(c) للدالة $h(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x=c$

(d) للدالة $h(x)$ مماس افقي عند $x=c$

---

(2) الدالة $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-1$ متزايدة على الفترة

(a) $(-1,0)$ (b) $(-3,-1)$

(c) $(-\infty,0)$ (d) $(0,\infty)$

---

(3) الدالة $f(x)=-x^3+3x^2-3x$

(a) متزايدة على $(-\infty,\infty)$

(b) متناقصة على $(-\infty,\infty)$

(c) متزايدة على $(1,\infty)$

(d) متزايدة على $(0,\infty)$

---

(4) الدالة $f(x)=\tan^{-1}x$ متزايدة على الفترة

(a) $(-1,1)$ (b) $(0,2)$

(c) $(-\infty,0)$ (d) $(-\infty,\infty)$

محمد عمر الخطيب

(5) الدالة $f(x)=x-\sqrt{x-1}$ متناقصة على الفترة

(a) $(-\infty,\frac{5}{4})$ (b) $(1,\frac{5}{4})$

(c) $(\frac{5}{4},\infty)$ (d) $(1,\infty)$

---

(6) فترة التناقص للدالة $f(x)=\sin x-\cos x$ على $[0,\pi]$ هي

(a) $(-\infty,\frac{3\pi}{4})$ (b) $(\frac{3\pi}{4},\infty)$

(c) $(0,\frac{3\pi}{4})$ (d) $(\frac{3\pi}{4},\pi)$

---

(7) الدالة $f(x)=x+\frac{1}{x}$ متناقصة على الفترة

(a) $(-1,0),(0,1)$ (b) $(-\infty,\infty)$

(c) $(-\infty,-1),(1,\infty)$ (d) $(0,1)$

---

(8) الدالة $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ متزايدة على الفترة

(a) $(-\infty,e)$ (b) $(0,e)$

(c) (e,∞) (d) $(0,1)$

---

(9) للدالة $f(x)=4x^{5/4}-8x^{1/4}$ عند $x=\frac{2}{5}$

(a) قيمة عظمى محلية

(b) قيمة صغرى محلية

(c) مماس رأسي

(d) غير ذلك

محمد عمر الخطيب

(10) الدالة $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ متناقصة على الفترة

(a) $(0,\infty)$ (b) $(-\infty,\infty)$

(c) $(-1,1)$ (d) $(0,1)$

---

(11) الدالة $f(x)=x-3\sqrt[3]{x}$ متناقصة على الفترة

(a) $(0,1)$ (b) $(-1,1)$

(c) $(-1,0)$ (d) $(-\infty,-1),(1,\infty)$

---

(12) الدالة $f(x)=\ln|x|$ متناقصة على الفترة

(a) $(0,\infty)$ (b) $(-\infty,\infty)$

(c) $(-\infty,0)$ (d) $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

---

(13) للدالة $f(x)=-x^3+3x^2-3x$ عند $x=1$

(a) قيمة عظمى محلية

(b) قيمة صغرى محلية

(c) لايوجد قيم قصوى محلية

(d) مماس رأسي

---

(14) اذا كانت $f'(x)=x(x-3)^2(x+1)$ فان للدالة $f(x)$ قيمة(قيم) عظمى محلية عند

(a) -1 (b) 0

(c) $-1,0$ (d) $-1,3$

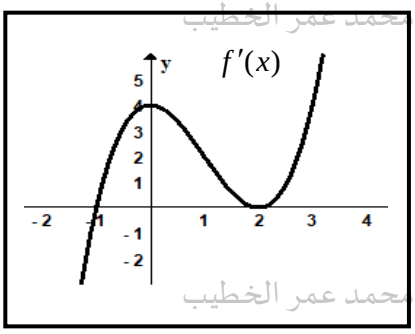
(15) اذا كانت $f(x)=2x\sqrt{x+1}$ فان للدالة قيمة عظمى محلية عند

(a) -1 (b) -2

(c) $\frac{-2}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

---

(16) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ، ان فترة التناقص للدالة $f(x)$ هي

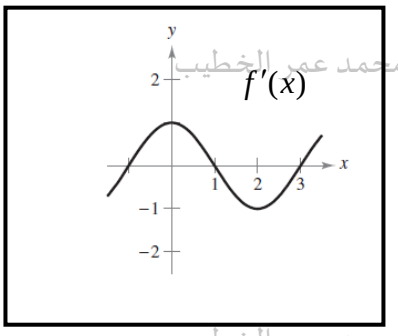


(a) $(0,2)$ (b) $(-1,2)$

(c) $(-\infty,0)$ (d) $(-\infty,-1)$

---

(17) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ، ان القيمة العظمى المحلية للدالة $f(x)$ تكون عند

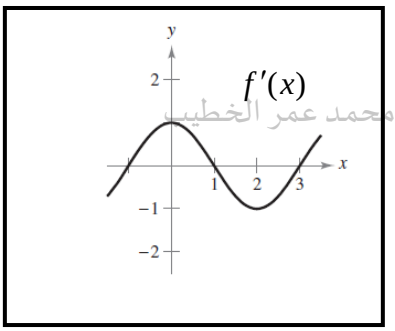


(a) -1 (b) 0

(c) 1 (d) 2

---

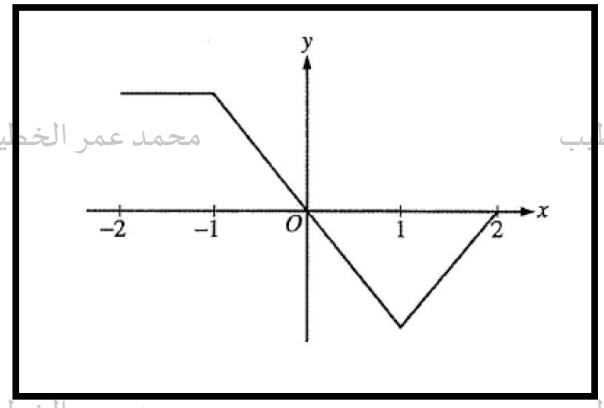
(18) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ، ان القيمة الصغرى المحلية للدالة $f(x)$ تكون عند



(a) 2 (b) $-1,3$

(c) $-1,1,3$ (d) -1

(19) الشكل المجاوريمثل بيان الدالة $f'(x)$ على الفترة $(-2,2)$ فاي من العبارات التالية صحيحة بالنسبة لبيان الدالة $f(x)$



(a) الدالة f متناقصة على الفترة $(-1,1)$

(b) الدالة f متزايدة على الفترة $(1,2)$

(c) الدالة f متزايدة على الفترة $(-2,0)$

(d) للدالة f قيم صغرى مطلقة عند $x=1$

---

(20) اذا كانت الدوال $f(x), g(x)$ متصلة ومتزايدة على مجموعة الاعداد الحقيقية

اي من العبارات التالية ممكن ان تكون <u>خاطئة</u>

(a) $f(1)<f(2)$

(b) $f(g(1))<f(g(2))$

(c) $f^{-1}(1)<f^{-1}(2)$

(d) $f(1)<g(2)$

---

(21) لتكن $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-2 & ,x<1\\ -x^2+2 & ,x\geq 1\end{cases}$ فان

(a) للدالة f قيمة عظمى محليه عند $x=0$

(b) للدالة f قيمة عظمى محليه عند $x=1$

(c) للدالة f قيمة عظمى محليه عند $x=2$

(d) ليس للدالة f اي قيم عظمى

(1) الدالة $f(x)=\frac{-5}{(x-2)}$ مقعرة للاسفل على الفترة

(a) $(-\infty,\infty)$ (b) $(2,\infty)$

(c) $(-\infty,2)$ (d) $(5,\infty)$

---

(2) الدالة $f(x)=x+\frac{1}{x}$

(a) لها نقطة انقلاب عند $x=0$

(b) لها نقاط انقلاب عند $x=1,-1$

(c) لها نقاط انقلاب عند $x=-1,0,1$

(d) ليس لها نقاط انقلاب

---

(3) الفترة التي تكون عليها الدالة $f(x)=2x^3-6x^2+4$ متناقصة ومقعرة للاسفل هي

(a) $(0,1)$ (b) $(1,2)$ (c) $(0,2)$ (d) $(0,4)$

---

(4) الدالة $f(x)=x^2|x|$ مقعرة للاعلى على الفترة

(a) $(0,\infty)$ (b) $(-\infty,\infty)$

(c) $(-\infty,0)$ (d) φ

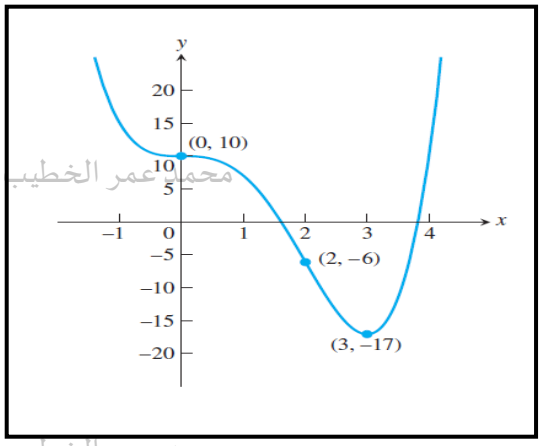
(5) الدالة $f(x)=2xe^{x}$ مقعرة للاسفل على الفترة

(a) $(-\infty,-2)$ (b) $(-2,\infty)$

(c) $(-\infty,-1)$ (d) $(-1,\infty)$

---

(6) بالاعتماد على الشكل المجاورالذي يمثل بيان الدالة $f(x)$



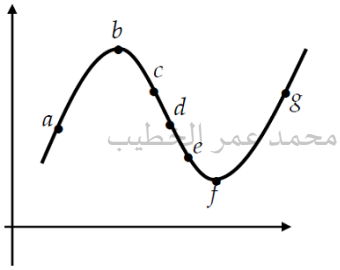
ان قيم x التي يكون عندها اشارة الدالة f' والدالة f'' موجبتين هي

(a) $(-\infty,\infty)$ (b) $(3,\infty)$

(c) $(-17,\infty)$ (d) $(-\infty,3)$

---

(7) اعتمد على الشكل المجاورالذي يمثل بيان الدالة h في تحديد الرمزالذي يحقق $h''=0$

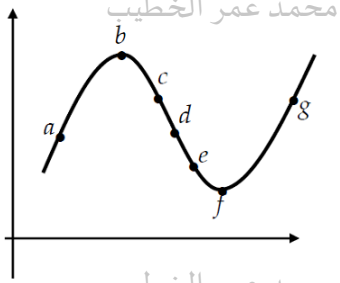


(a) b (b) f

(c) d (d) g

---

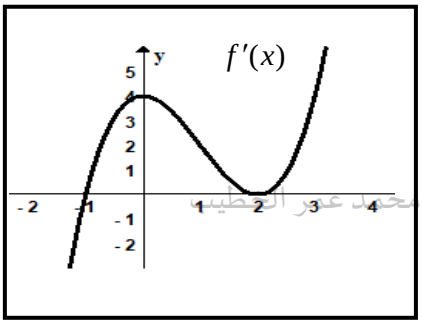
(8) اعتمد على الشكل المجاورالذي يمثل بيان الدالة h في تحديد الرمزالذي يحقق $h'=0, h''>0$



(a) b (b) f

(c) d (d) g

(9) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ، ان فترة التقعر للاعلى للدالة $f(x)$ هي

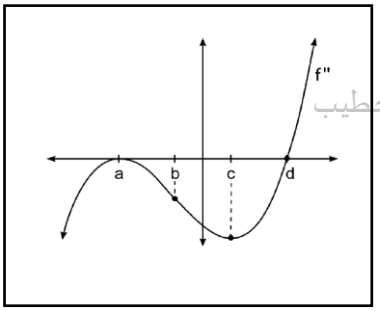


(a) $(-\infty,0),(2,\infty)$ (b) $(1,\infty)$

(c) $(-\infty,-1),(2,\infty)$ (d) $(1,2)$

---

(10) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f''(x)$



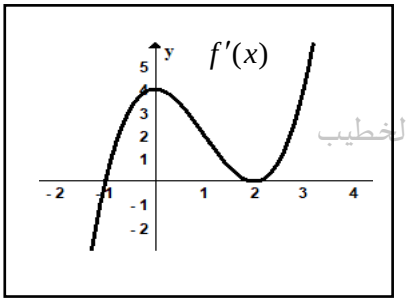
ان نقطة الانعطاف للدالة $f(x)$ تكون عند x

(a) a (b) d

(c) a,d (d) b

---

(11) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$



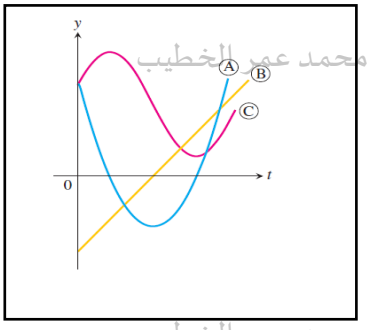
ان الدالة متزايدة ومقعر للاسفل على الفترة

(a) $(-\infty,0)$ (b) $(-\infty,1)$

(c) $(-\infty,1)$ (d) $(0,2)$

---

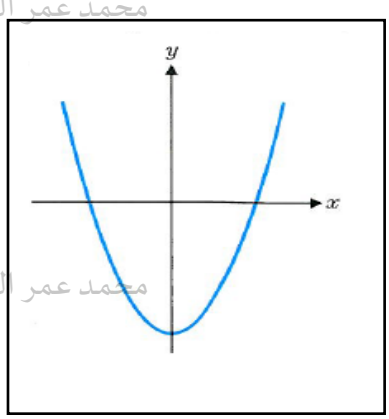
(12) الشكل المجاور يمثل بيان كل من الدوال $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$ ،ان الدالة التي تمثل بيان الدالة $f'(x)$ هي

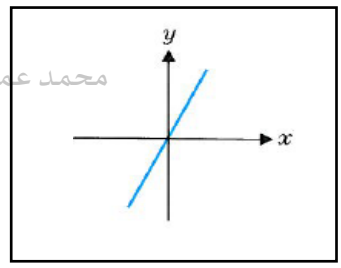


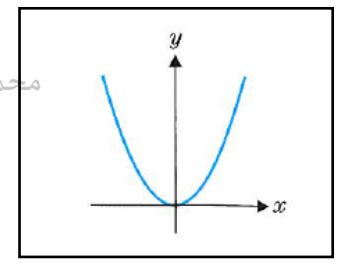
(a) A (b) B

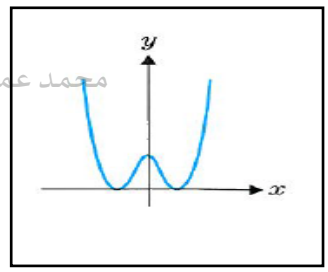
(c) C (d) لا يمكن تحديدها

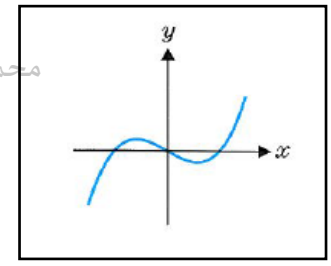
(13) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$ في تحديد بيان الدالة $f(x)$



(a)


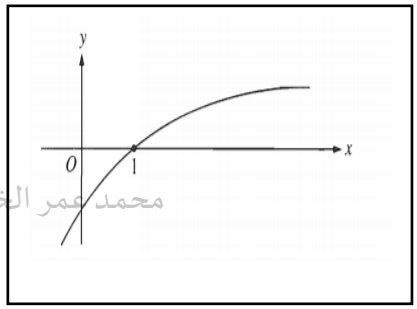
(b)


(c)


(d)


---

(14) اي من العبارات التالية صحيحة بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$



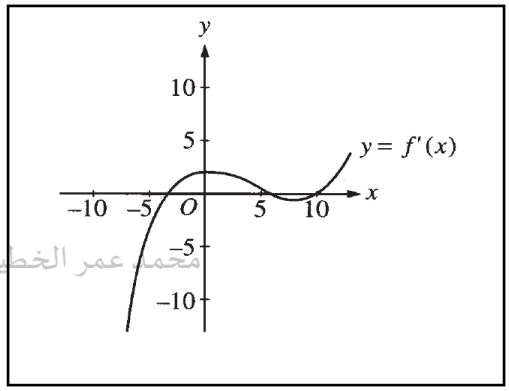
(a) $f(1) < f'(1) < f''(1)$

(b) $f(1) < f''(1) < f'(1)$

(c) $f'(1) < f(1) < f''(1)$

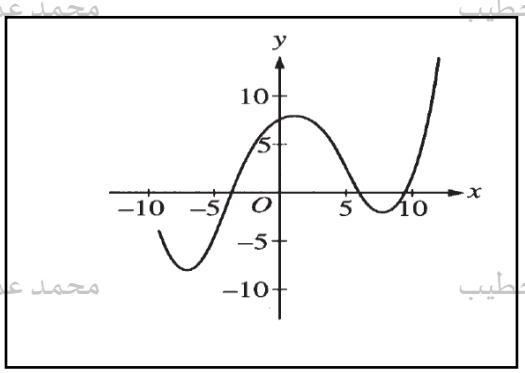
(d) $f''(1) < f(1) < f'(1)$

(15) بالاعتماد على الشكل المجاورالذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$

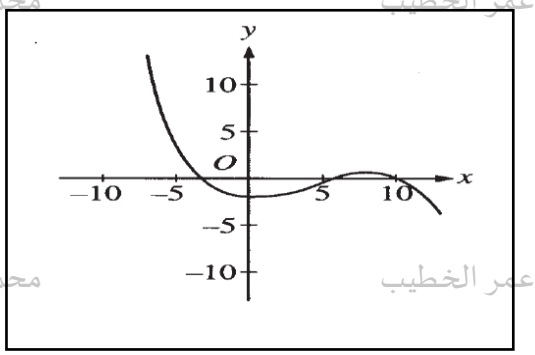


اي من الرسومات البيانية التالية ممكن ان يكون للدالة $f(x)$

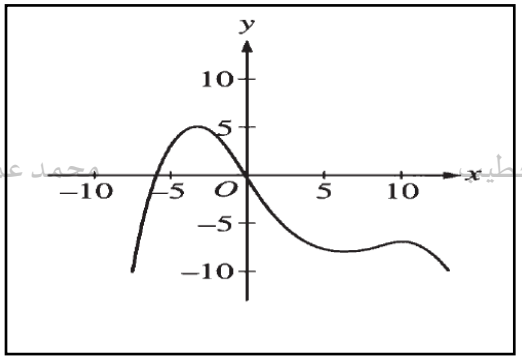
(a)



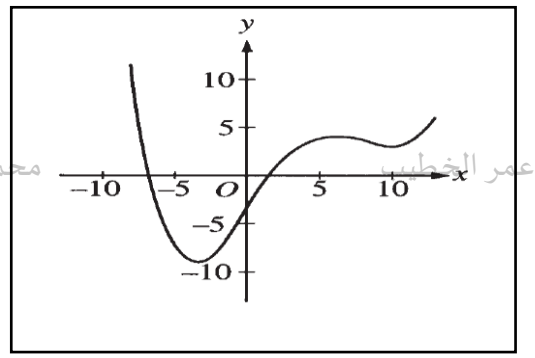
(b)



(c)

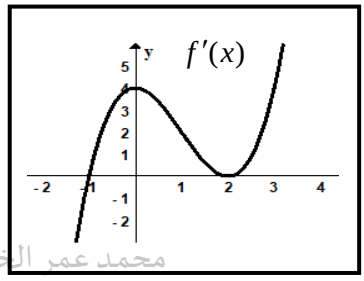


(d)



---

(16) اعتمد على الشكل المجاورالذي يمثل بيان الدالة $f'(x)$



في تحديد اي من العبارات التالية صحيحة

(a) $f(0) > f(1)$

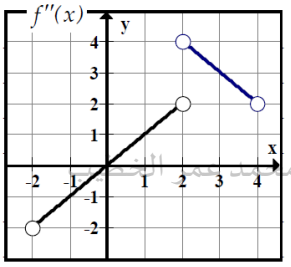
(b) $f(-1) = f(2)$

(c) $f(0) < f(1)$

(d) $f'(0) = 0$

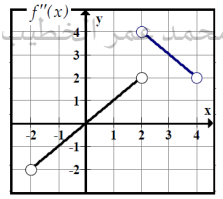
محمد عمر الخطيب

(17) الشكل المجاوريمثل بيان الدالة $f''(x)$ ، ان فترة التقعرللاسفل للدالة $f(x)$ هي



(a) $(2,4)$ (b) $(-2,0)$

(c) $(0,4)$ (d) $(-2,2)$



(18) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f''(x)$ حيث $f'(-1)=f'(1)=0$

فاي من الجمل التالية صحيحة

(a) للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x=1$ وقيمة صغرى محلية عند $x=-1$

(b) للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند $x=1$ وقيمة عظمى محلية عند $x=-1$

(c) للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x=0$

(d) للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند $x=0$

---

(19) اذا كان للدالة $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ نقطة انعطاف عند $x=1$ فان قيمة a تساوي

(a) -2 (b) 2 (c) -1 (d) 1

---

(20) اذا كان $f'(c)=0$ وللدالة قيمة عظمى محلية عند $x=c$

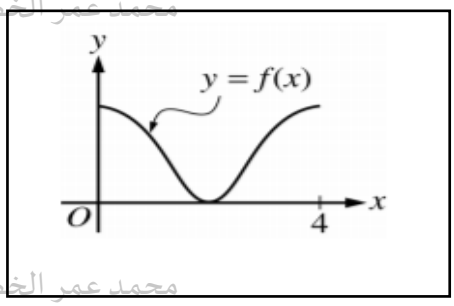
فاي من العبارات التالية صحيحة

(a) $f''(c)=0$ (b) $f''(c)>0$

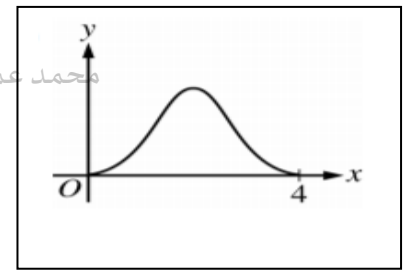
(c) $f''(c)<0$ (d) $f''(c)=1$

(21) الشكل المجاوريمثل بيان الدالة $f(x)$

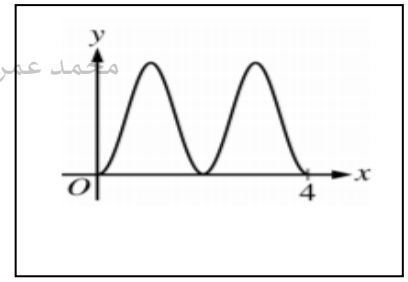
ان الشكل المناسب لبيان الدالة $f'(x)$ هو



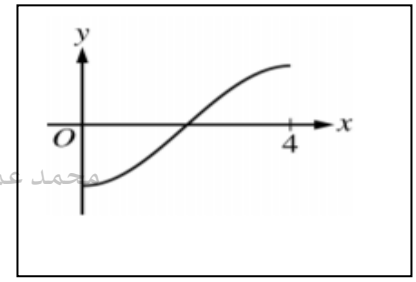
(a)



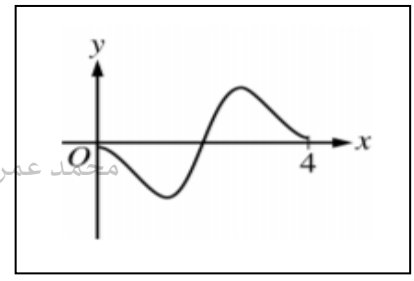
(b)



(c)

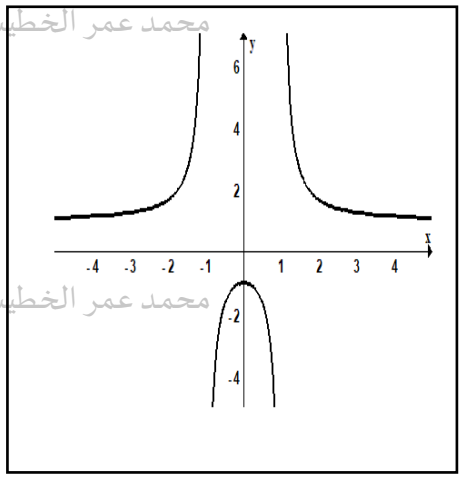


(d)



---

(22) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$



اي من الجمل التالية صحيحة

(a) للدالة f نقاط انقلاب

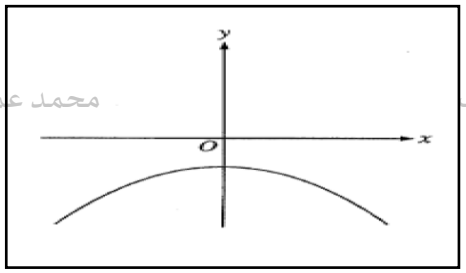
(b) الدالة f متزايدة على الفترة $(-\infty,0)$

(c) للدالة f قيمة عظمى مطلقة على الفترة $(-1,1)$

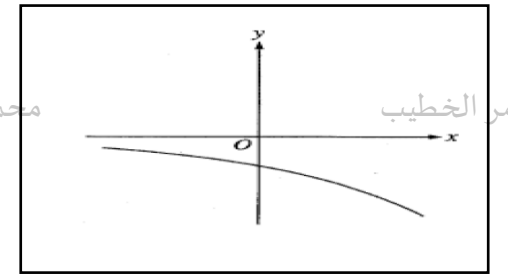
(d) للدالة f قيم صغرى مطلقة على الفترة $(1,\infty)$

(23) اذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق مرتين حيث $f<0$ و $f'<0$ و $f''<0$ ،فان التمثيل البياني الذي يمثل الدالة $f(x)$ هو

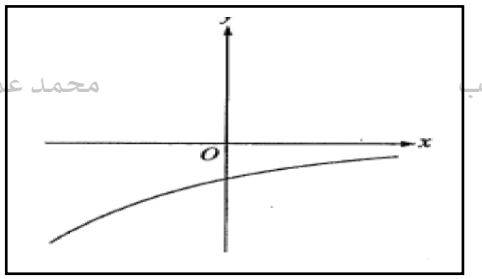
(a)



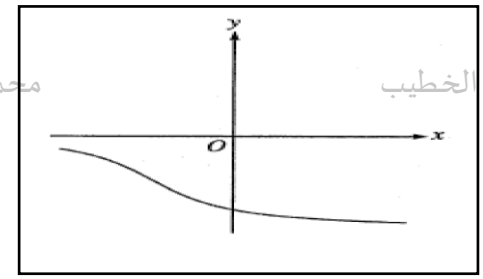
(b)



(c



(d)



---

(24) الدالة $f(x)=|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & x<-2, x>2\\ 4-x^2 & -2\le x\le 2\end{cases}$ مقعرة للاسفل على الفترة

(a) $(-\infty,\infty)$

(b) $(2,\infty)$

(c) $(-\infty,-2),(2,\infty)$

(d) $(-2,2)$

---

(25) اذا كان للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ نقطة انقلاب عند $(-1,5)$ فان قيمة $a+b$ تساوي

(a) -2

(b) -1

(c) 3

(d) 6

---

(26) اذا كانت للدالة $f(x)=x^4+bx^3+6x^2+12x+1$ نقطتين انقلاب فان

(a) $b=0$

(b) $b^2=16$

(c) $b^2<16$

(d) $b^2>16$

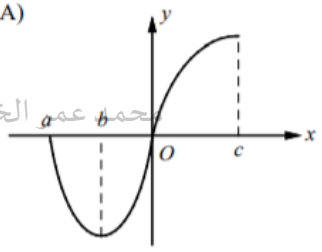
(1) الجدول التالي يمثل بعض المعلومات

x	$a<x<b$	b	$b<x<0$	0	$0<x<c$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	3	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$

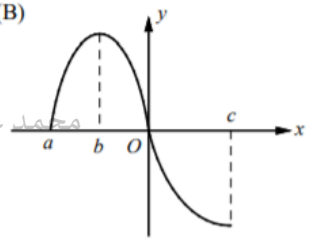
عن الدالة $f(x)$ ومشتقاتها

اي من الرسومات التالية ممكن ان يكون للدالة $f(x)$

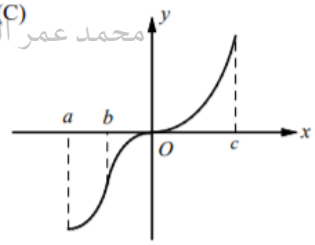
(A)



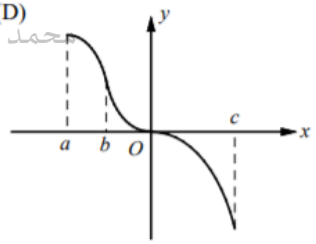
(B)



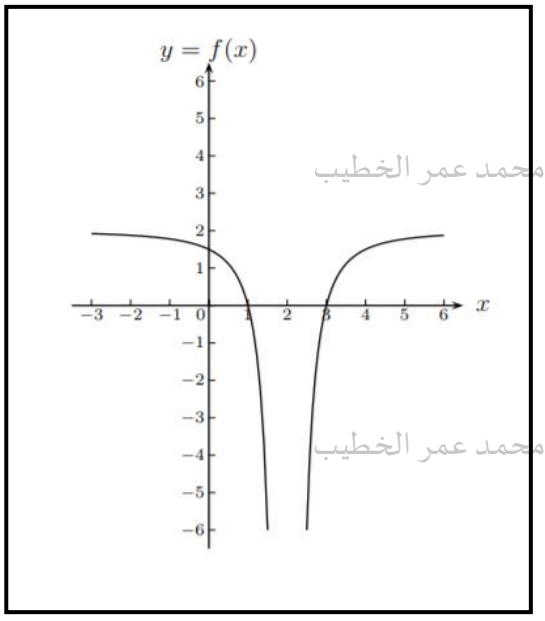
(C)



(D)



(2) احدى الدوال التالية له التمثيل البياني المجاور



(a) $f(x)=\dfrac{2(x-1)(x-3)}{x-2}$

(b) $f(x)=\dfrac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^3}$

(c) $f(x)=\dfrac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

(d) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

(3) احدى الدوال التالية لها خط تقارب مائل

(a) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x-2}$

(b) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

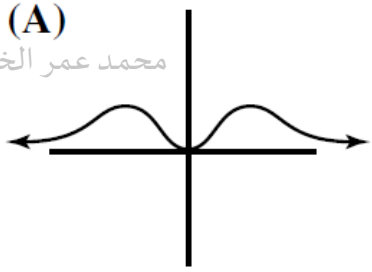
(c) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

(d) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+2}$

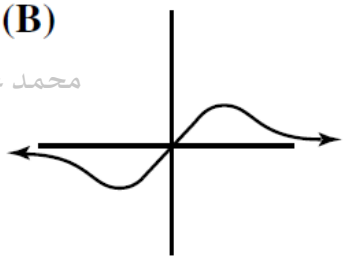
---

(4) اي من الاشكال التالية الذي يمثل بيان الدالة $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

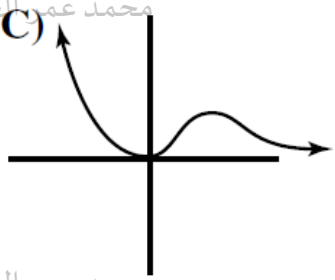
(A)



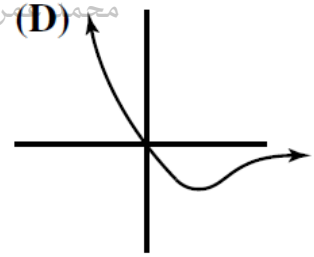
(B)



(C)

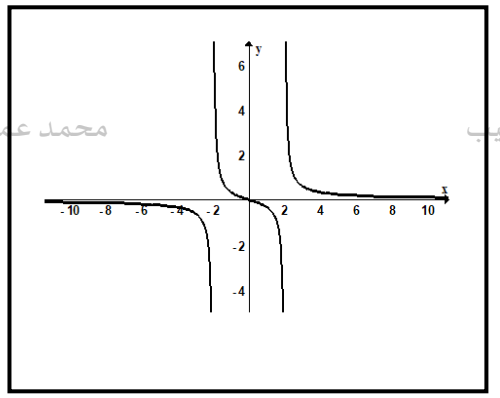


(D)

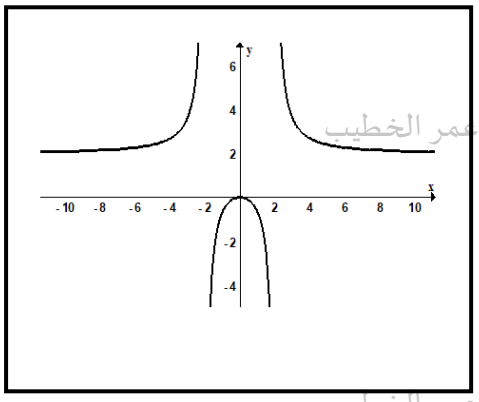


(5) الشكل الذي يمثل بيان الدالة $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$ هو

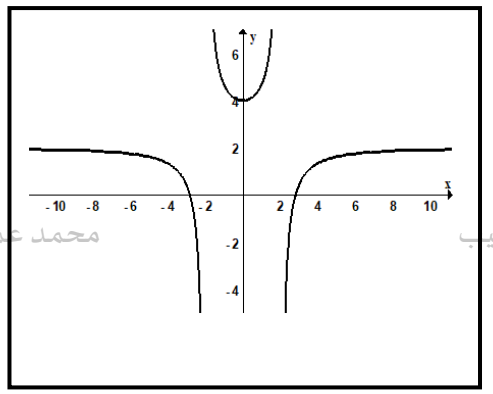
(a)



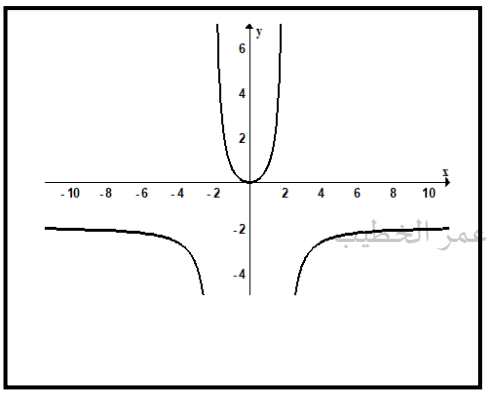
(b)



(c)



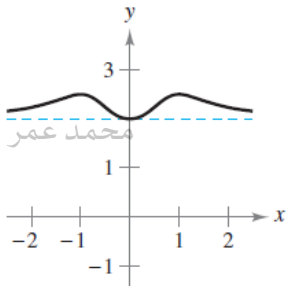
(d)



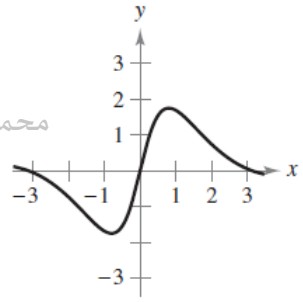
---

(6) التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ هو

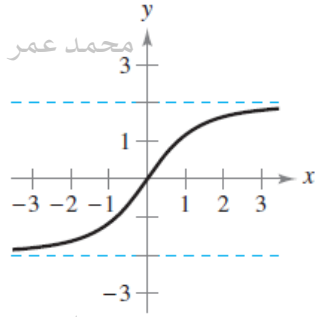
(a)



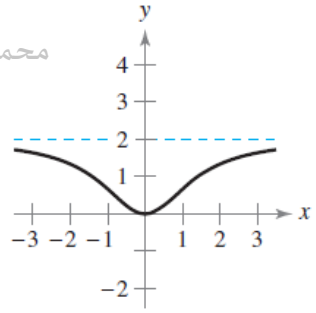
(b)



(c)



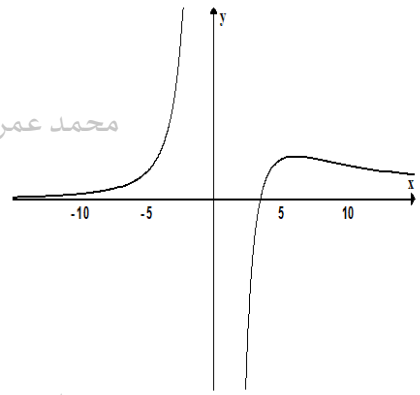
(d)



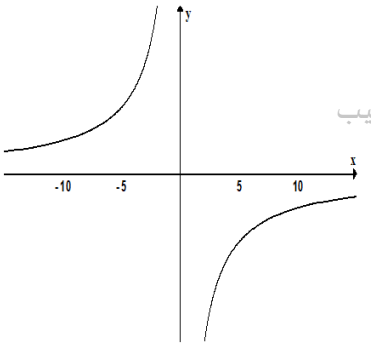
محمد عمر الخطيب

(7)اي من الاشكال التالية الذي يمثل بيان الدالة $f(x)=\frac{x-4}{x^3}$ هو

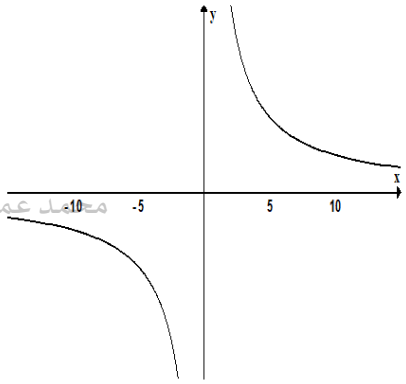
(a)



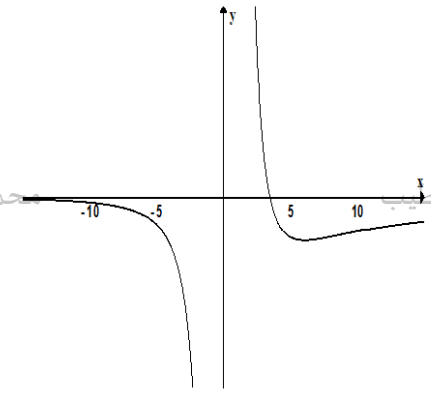
(b)



(c)

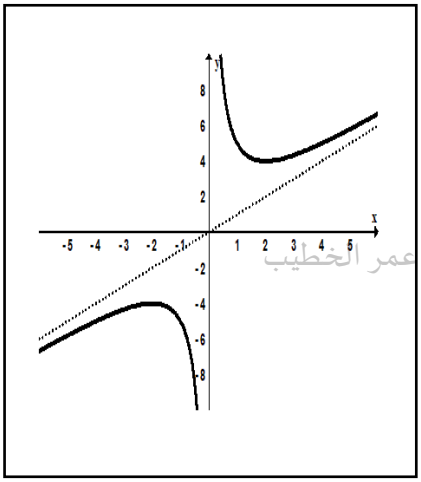


(d)



---

(8) احدى الدوال التالية له التمثيل البياني المجاور



(a) $f(x)=1+\frac{4}{x}$

(b) $f(x)=x-\frac{4}{x}$

(c) $f(x)=x+\frac{4}{x}$

(d) $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$

(9) اذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة $[-2,3]$ وتحقق ما يلي

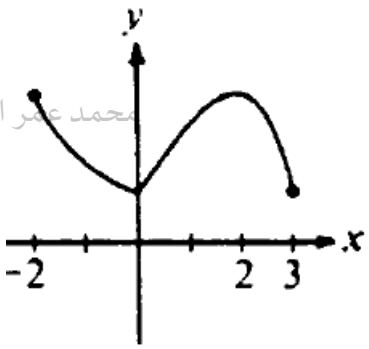
$f'(2)=0$

$f'(0)$ غير موجودة

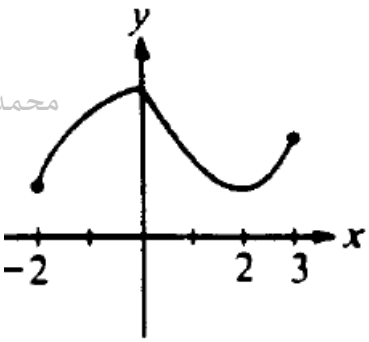
$f''(x)<0$

فان التمثيل البياني المناسب للدالة $f(x)$ هو

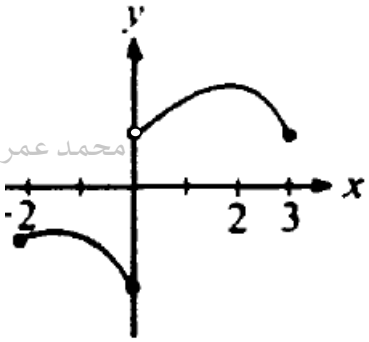
(a)



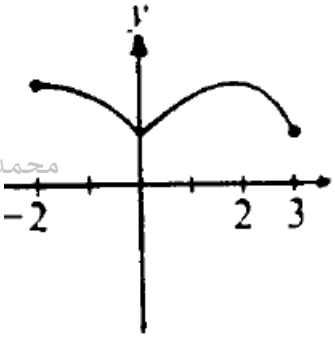
(b)



(c)

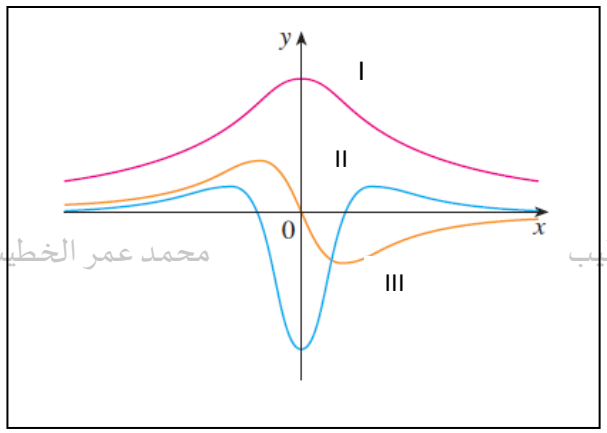


(d)



---

(10) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدوال



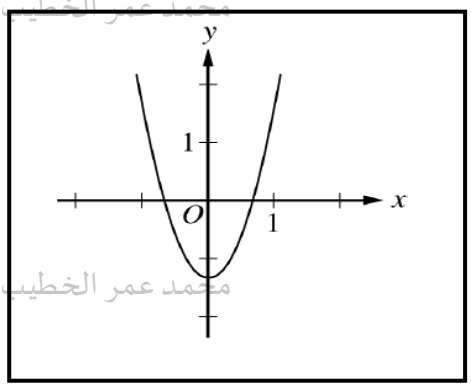
$f''(x), f'(x), f(x)$

ان الدالة التي تمثل $f'(x)$ هي

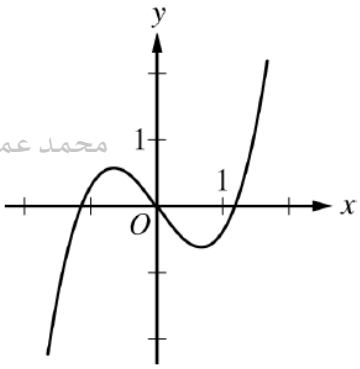
(a) I (b) II (c) III (d) غير ذلك

(11) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f''(x)$

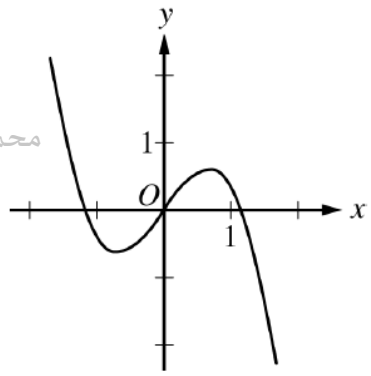
في تحديد بيان الدالة $f(x)$



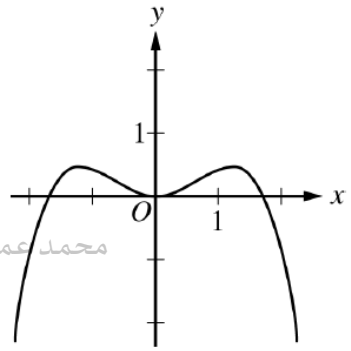
(A)



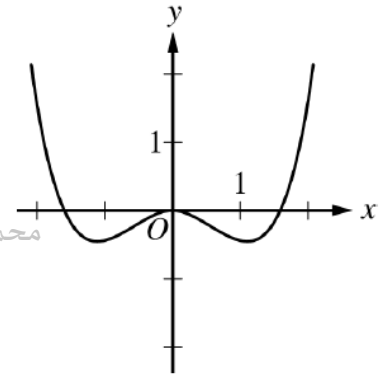
(B)



(C)

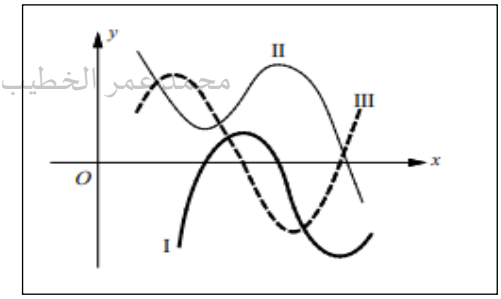


(D)



---

(12) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$

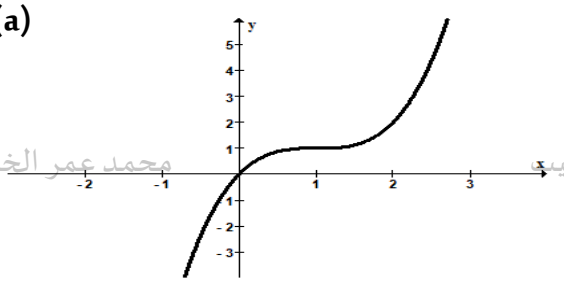


اي من الخيارات التالية هي الصحيحة

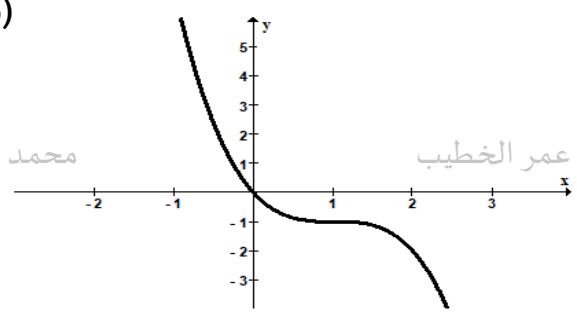
	f	f'	f''
(a)	I	II	III
(b)	II	I	III
(c)	III	II	I
(d)	II	III	I

(13)اي من الاشكال التالية الذي يمثل بيان الدالة $f(x)=x^3-3x^2+3x$

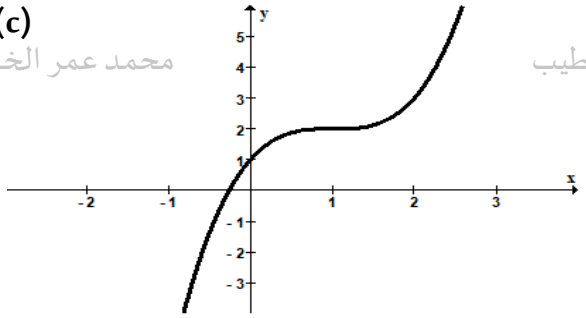
(a)



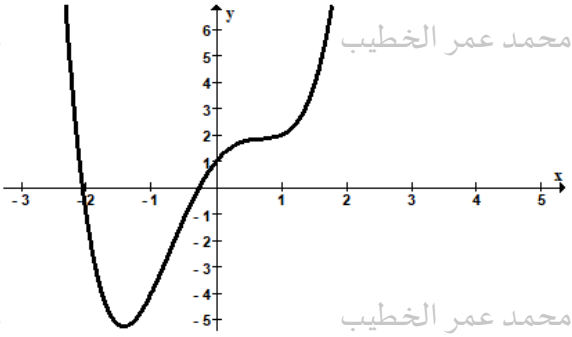
(b)



(c)



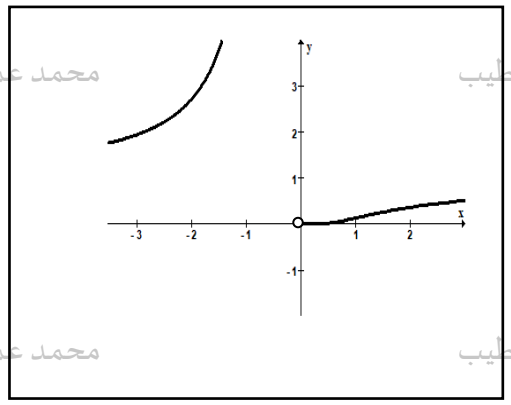
(d)



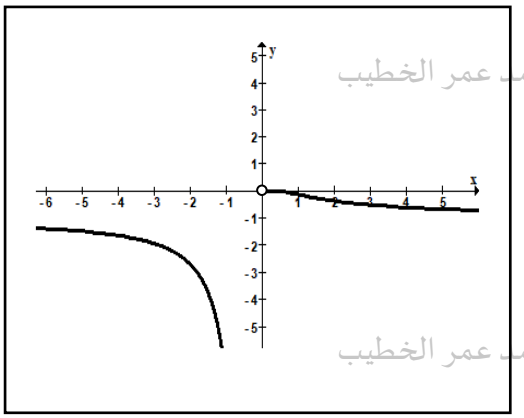
---

(14) الشكل الذي يمثل بيان الدالة $f(x)=e^{-2/x}$ هو

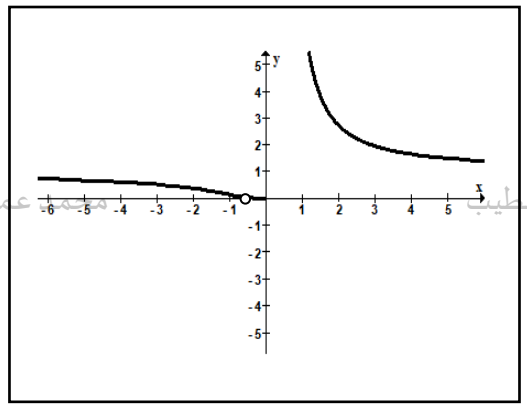
(a)



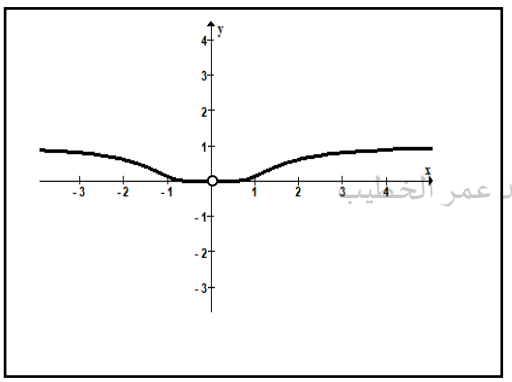
(b)



(c)

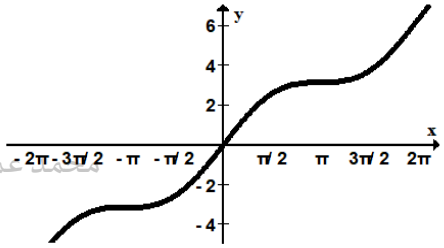


(d)

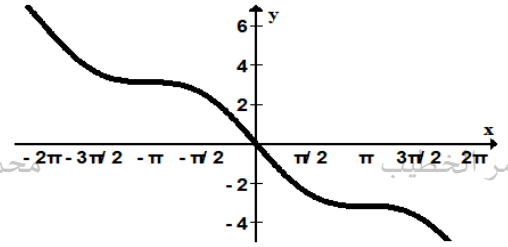


(15) اي من الاشكال التالية الذي يمثل بيان الدالة $f(x)=x+\sin x$

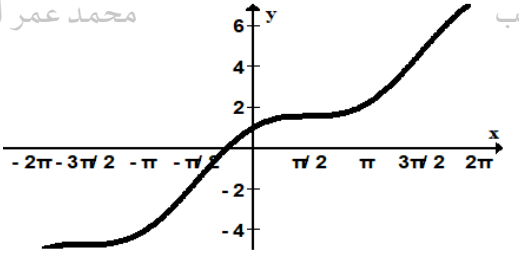
(a)



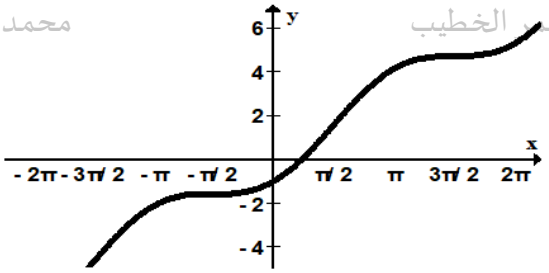
(b)



(c)



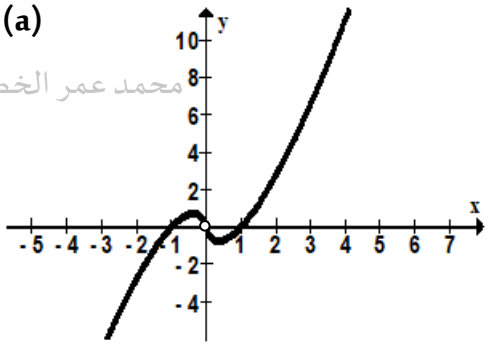
(d)



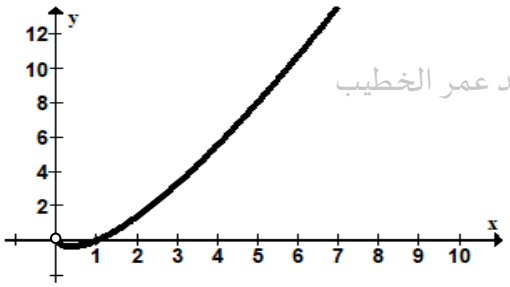
---

(16) اي من الاشكال التالية الذي يمثل بيان الدالة $f(x)=x\ln x$

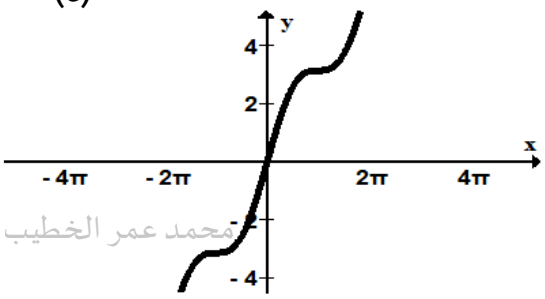
(a)



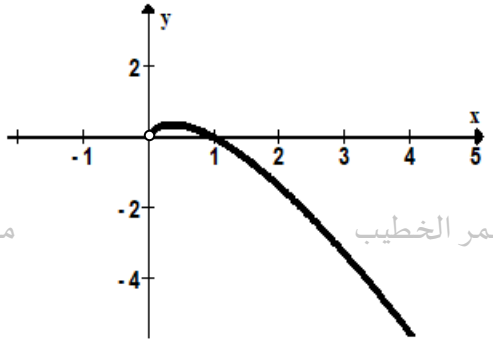
(b)



(c)



(d)



(17) خطوط التقارب الراسية والافقية للدالة $f(x)=e^{1/x}$ هما

(a) $x=0 \quad , y=0$

(b) $x=0 \quad , y=1$

(c) $x=1 \quad , y=0$

(d) $x=1 \quad , y=1$

محمد عمر الخطيب

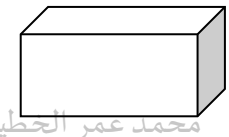
ملاحظة : الأسئلة المتعلقة بالاقتصاد تم نقلها الى اسئلة الدرس التاسع

(1) مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم، يراد وضع سياج طوله $600\ ft$ مترعلى الجوانب الثلاث الاخرى فان اكبر مساحة يمكن احاطتها هي .

(a) 45000 (b) 40000 (c) 60000 (d) 30000

---

(2) صندوق على شكل متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يساوي ضعف عرضها ومجموع أبعاده الثلاثة $45cm$ فان اكبر حجم للصندوق هو .

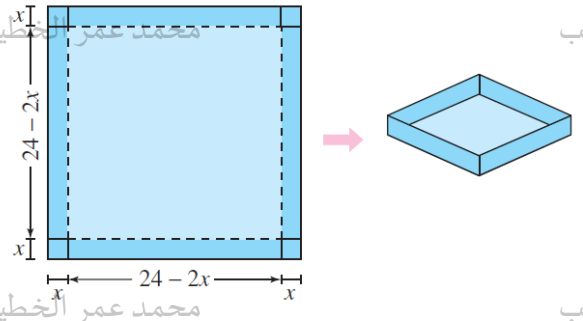


(a) 3000 (b) 30000 (c) 22500 (d) 90000

---

(3) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مربعة الشكل طول ضلعها $24cm$ وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس.

فان اكبر حجم للصندوق هو ؟



(a) 1024 (b) 512 (c) 4 (d) 64

---

(4) ان مساحة اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه بحيث يكون احد رؤوسة هي نقطة الاصل والرأسان الاخران على المنحنى $y = 27 - x^2$ هو

(a) 27 (b) 108 (c) 54 (d) 72

(5) ان مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمة داخل مثلث قائم الزاوية طول قاعدتة 10 وارتفاعة 5 هو

(a) 5 (b) 25 (c) 37.5 (d) 12.5

---

(6) ان اقصر بعد للنقطة $(1,0)$ عن المنحنى $y=\sqrt{x}$ يساوي

(a) $\sqrt{3}$ (b) 1

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

---

(7) ان اصغر محيط مستطيل مساحتة ثابتة A يكون

(a) مستطيل طوله ضعف عرضه

(b) مستطيل طوله ثلاث اضعاف عرضه

(c) مربع طول ضلعه $\sqrt{A}$

(d) مربع طول ضلعه $\frac{A}{4}$

---

(8) الغرض من السعال البشري هو زيادة تدفق الهواء الى الرئتين ،بازاحة جميع الجسيمات التي تسد القصبة الهوائية وتغير نصف قطر القصبة الهوائية. اذا علمت ان السرعة المتجهه لتدفق الهواء خلال القصبة الهوائي تعطى بالعلاقة $V(r)=2r^2(1-r)$ عند نصف قطر القصبة r بالسنتميتر ،فان نصف قطر القصبة الهوائية التي تجعل السرعة المتجهه للهواء اكبر ما يمكن هي

(a) 1 (b) 2

(c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{2}{3}$

(9) تمثل الدالة $R(x)=\dfrac{35x-x^2}{x^2+35}$ ارباح شركة بملاين الدراهم من بيع x سلعة بالاف . فان القيمة العظمى للربح تكون عند بيع سلع عددها

(a) 5000 (b) 7000

(c) 5 (d) 7

---

(10) تمثل العلاقة $P(v)=\dfrac{1}{v}+cv^3$ مقدار الطاقة التي يبذلها طائر حتى يسير بالسرعة v حيث ان الثابت $c>0$ فان السرعة التي تحقق القيمة الصغرى للطاقة تكون عند

(a) $v=\dfrac{1}{3c}$ (b) $v=\dfrac{1}{\sqrt{3c}}$

(c) $v=\dfrac{1}{\sqrt[4]{c}}$ (d) $v=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3c}}$

---

(11) تمثل الدالة $f(t)=e^{-0.02t}-e^{-0.42t}$ تركيز الدواء في العضلات بعد t ساعة من اخذ الدواء فان الزمن الذي يكون فية تركيز الدواء اكبر ما يمكن هو

(a) 7 (b) 3.8

(c) 5 (d) 7.6

---

(12) تمثل الدالة $f(v)=v\,e^{-v/2}$ قوة احدى عظلات الجسم بعد انقباضها بسرعة مقدارها v فان السرعة التي تحقق القيمة العظمى للقوة هي

(a) 2 (b) 4

(c) 1 (d) 8

محمد عمر الخطيب

(13) اذا كانت $v(t)=t^3-3t^2+12t+4$ تمثل دالة السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم فان اقل تسارع يصل اليه الجسم هو

(a) 12 (b) 40

(c) 9 (d) 21

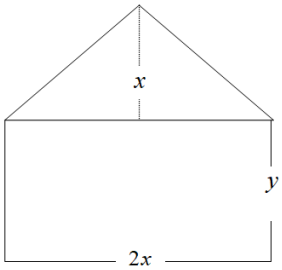
---

(14) تمثل الدالة $Q(t)=-3t^3+18t^2+60t$ عدد السلع التي ينتجها عامل خلال الزمن t بالساعات حيث تمثل $Q'(t)$ كفاءة العامل في اي لحظة . ان الزمن بالساعات الذي يكون فيها كفاءة العامل اكبر ما يمكن هو

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

---

(15) نافذه على شكل مستطيل يعلوها مثلث متساوي الساقين، كما في الشكل ،اذا كان محيط المستطيل يساوي 12 متر فان اكبر مساحة للنافذة هي

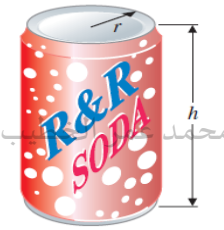


(a) 2 (b) 4

(c) 12 (d) 24

---

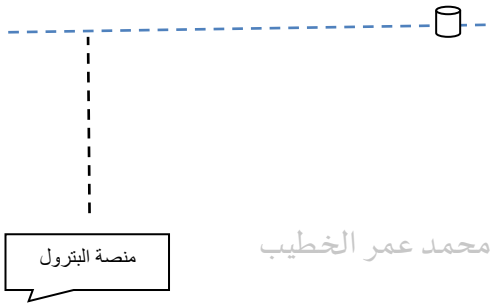
(16) يراد صنع علبة من المعدن على شكل اسطوانه دائرية قائمة مغلقة سعتها $128\pi\ cm^3$. اوجد ابعاد العلبة لتكون كمية المعدن المستخدم في صناعتها اقل ما يمكن.



(a) $r=4,h=8$ (b) $r=4,h=4$

(c) $r=3,h=\frac{128}{3}$ (d) $r=3,h=\frac{128}{9}$

(17) يراد توصيل خط انابيب من منصة للبترول في البحروتبعد 12 كيلو مترعن الشاطئ ،الى خزان للنفط يقع على الشاطئ ويبعد الى الشرق عن اقرب نقطة للمنصة من الشاطئ مسافة 24 كيلو متر. اذا علمت ان تكلفة مد كيلومتر من الانابيب في البحرهو 5 مليون درهم وعلى الشاطئ هو 3 مليون درهم اوجد اقل تكلفة لمد خط الانابيب بين المنصة والخزان.



(a) $120m$

(b) $134.16m$

(c) $132m$

(d) $90m$

(1) يتدفق النفط الى خزان على شكل نصف كرة بمعدل $126m^3 / h$ ،فاذا كان حجم النفط V في الخزان يعطي بالعلاقة

$$V = \frac{4}{3}h^2(36-h)$$

فان معدل تغير ارتفاع ا الماء في الخزان عندما يكون النفط على ارتفاع $3m$ هو

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{4}$

---

(2) خزان مكعب الشكل مملوء بالماء طول ضلعه $5\ m$ يتسرب منه الماء بمعدل $2\ m^3 / h$ ، فان معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان هو

(a) $-\frac{2}{25}$ (b) $\frac{2}{25}$ (c) $\frac{1}{25}$ (d) $-\frac{1}{25}$

---

(3) قطرة ماء كروية الشكل تتبخر بمعدل $1cm^3 / \min$ وتبقى تحافظ على شكلها فان معدل تغير نصف قطر قطرة الماء عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $0.2\ cm$ هو

(a) 2 (b) 0.2 (c) -2 (d) -0.2

---

(4) اذا كان معدل التناقص في نصف قطر كرة ثلجية هو $2cm / h$ ، فان معدل التغير في مساحة الكرة السطحية عندما يكون القطر $6cm$ هو

(a) -4π (b) -16π (c) -48π (d) -144π

محمد عمر الخطيب

(5) تتحرك نقطة على منحنى معادلته $y=\sqrt{x^2-3}$ ، فإذا كان الاحداثي x للنقطة يزداد بمعدل $3\ unit/s$ أوجد معدل التغير في الإحداثي y عندما $x=2$

(a) 3 (b) -6 (c) 6 (d) 4

---

(6) مثلث متساوي الأضلاع يزداد طول ضلعه بمقدار $0.1\ cm/s$ فان مقدار التغير في مساحته عندما يكون طول ضلعه يساوي $\sqrt{3}\ cm$ هي

(a) 0.15 (b) 0.3 (c) 1.5 (d) 0.75

---

(7) سلم طوله $15\ m$، موضوع احد طرفية على جدار منزل والطرف الأخر موضوع على الارض،ويتحرك بعيداً عن الحائط بمعدل $6\ m/s$ فان معدل التغير في الزاوية التي بين السلم والارض عند اللحظة التي يكون عندها اسفل السلم على بعد $9m$ من الحائط هي

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

---

(8) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل $20m^3/h$ وينتشر بشكل دائري بسمك $2cm$ فان معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط عندما يكون نصف القطر $100m$ هو

(a) $\frac{1}{20\pi}$ (b) $-\frac{1}{20\pi}$ (c) $-\frac{5}{\pi}$ (d) $\frac{5}{\pi}$

---

(9) تتحرك نقطة على المنحنى $y=x^2$ فان النقطة التي يتساوى فيها معدل تغير الاحداثي السيني مع الاحداثي الصادي هي.

(a) $(1,1)$ (b) $(-1,1)$

(c) $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ (d) $(1,\frac{1}{2})$

محمد عمر الخطيب

(10) تسير سيارة بسرعة $30km/h$ اتجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{3}km$ شمال التقاطع ، وتسير سيارة شرطة بسرعة $40km/h$ من نقطة تبعد $\frac{1}{4}km$ شرق التقاطع نفسه ،في هذه اللحظة يقيس رادار سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير بها المسافة بين السيارتين ،فان السرعة المتجهة التي سيسجلها الرادار هي.

(a) 0 (b) -96

(c) 48 (d) -48

---

(11) تتابع الة تصوير اطلاق مسبار الامل الذي يصعد عموديا بمعدل $0.2\ km/s$ وتقع الة التصوير على الارض وتبعد $2\ km$ عن مكان انطلاق المركبة ان معدل تغير زاوية الة التصوير عندما تكون المركبة على ارتفاع $1\ km$ لتحافظ على تصوير الانطلق هو

(a) $0.16\ rad/s$ (b) $0.08\ rad/s$ (c) $0.2\ rad/s$ (d) $0.4\ rad/s$

---

(12) مكعب ثلجي يتناقص طول ضلعة بمعدل $1cm/h$ فان معدل تغير طول قطر المكعب عندما يكون طول ضلعه $10\,cm$ هو

(a) $-\sqrt{2}$ (b) $-\sqrt{3}$

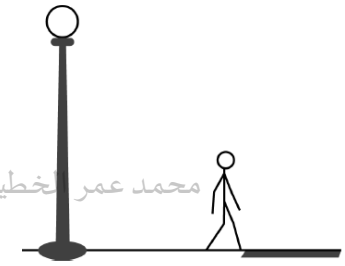
(c) -1 (d) -3

(13) خزان على شكل مخروط قائم مملوء بالماء ويتسرب منه الماء ويتغير ارتفاعة ونصف قطره بمعدل $2\ m$ في الساعة فان معدل تغير حجم الماء في الخزان عندما يكون الارتفاع $4\ m$ ونصف القطر $3\ m$ هو

(a) -16π (b) -22π (c) -6π (d) -8π

---

(14) يمشي رجل طوله $6\ ft$ بمعدل $4.5\ ft/s$



على خط أفقي مبتعداً عن عمود كهرباء ارتفاعه $15\ ft$.

فان معدل التغير في طول ظل الرجل هو

(a) 1.5 (b) 3 (c) 2.8 (d) 2.25

---

(15) اطلق صاروخ للاعلى ويتم رصدة من جهاز على الارض ويبعد عن مكان اطلقه $800m$ ،فاذ كانت معدل تغير الزاوية بين الارض والصاروخ هي $0.6\ rad/s$ فان سرعة الصاروخ عندما تكون الزاوية 45° هي

(a) $480m/s$ (b) $960m/s$ (c) $720m/s$ (d) $800m/s$

---

(16) مثلث متساوي الاضلاع يزداد طول ضلعه بمقدار $2\ cm/s$ فان مقدار التغير في محيطة يساوي

(a) 2 (b) 6 (c) -6 (d) 4

---

(17) مثلث قائم الزاوية طول وترة $5cm$ ويزداد طول ضلع القاعدة بمقدار $1\ cm/s$ بحيث يبقى طول الوتر ثابت فان مقدار التغير في مساحة المثلث عندما يكون طول قاعدتة $3cm$ هو

(a) 0.875 (b) -0.875 (c) 1.75 (d) -1.75

(18) مثلث قائم الزاوية طول وترة $10cm$ ويزداد طول ضلع القاعدة بمقدار $2\ cm/s$ فان مقدار التغير في ارتفاعة عندما تكون طول قاعدتة $6cm$ هو

(a) 0.15 (b) -1.5 (c) 1.5 (d) -0.75

---

(19) رجل طوله $6\ ft$ ويبعد $12\ ft$ عن عمود انارة ارتفاعة $18\ ft$
ويمشي نحو العمود بمعدل $3\ ft/s$
فان معدل تغير طول ظل الرجل يساوي

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $-\frac{3}{2}$

(c) $\frac{1}{6}$ (d) $-\frac{1}{6}$

---

(20) ينسكب الرمل بمعدل $5m^3/s$ ويشكل كومة مخروطية ارتفاعها يساوي قطرها فان معدل تزايد ارتفاع الكومة عندما يكون الارتفاع مترين يساوي

(a) $\frac{5}{\pi}$ (b) $-\frac{5}{\pi}$

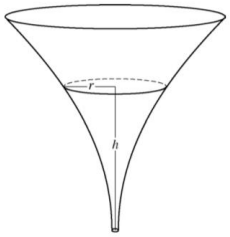
(c) $\frac{10}{\pi}$ (d) $-\frac{10}{\pi}$

---

(21) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل 150 جالون في الدقيقة وينتشر بشكل دائري بسمك $\frac{1}{30}\ ft$ فان معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط عندما يكون نصف القطر $300\ ft$ هو

(a) $\frac{15}{2\pi}$ (b) $\frac{1}{\pi}$ (c) $-\frac{1}{\pi}$ (d) $\frac{2}{\pi}$

(22) يتسرب الماء من الشكل المجاور الذي يمثل قمع ارتفاعة $10\ cm$ حيث يعطي نصف قطر



سطح الماء في اي لحظة بالعلاقة $r=\frac{1}{20}(3+h^2)$ ، اذا كان معدل تناقص

نصف القطر $\frac{1}{5}\ cm/s$ عند الارتفاع $3\ cm$ فان معدل تغير الارتفاع عند نفس اللحظة يساوي

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $-\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

---

(23) يرتبط f تردد اهتزاز اوتار الجيتار بالتوتر T (ثابت) الذي يشد به الوتر بالعلاقة $f=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ حيث

ρ تمثل الكثافة (ثابت) و L طول الوتر

فان $f'(t)$ عندما يكون $L=\frac{1}{2}$ و $\sqrt{\frac{T}{\rho}}=220$ و $L'(t)=-4$ تساوي

(a) 440 (b) 1760

(c) 220 (d) -1760

---

(24) قانون بويل للغازات في درجة حرارة ثابتة هو $PV=c$ حيث ان P هو ضغط الغاز و V حجم الغاز

والعدد c ثابت الغازات على اعتبار ان P و V دوال مترابطة بالزمن

فان $\frac{P'(t)}{V'(t)}$ تساوي

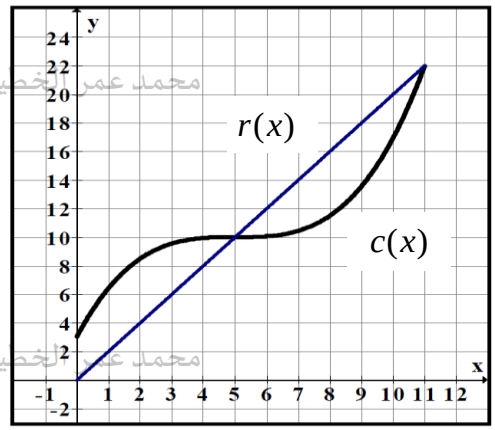
(a) $\frac{-c}{V^2(t)}$ (b) $\frac{c}{V^2(t)}$

(c) $\frac{-c}{V(t)}$ (d) $\frac{c}{V(t)}$

(1) يمثل الشكل المجاور دالة الدخل $r(x)$

ودالة التكلفة $c(x)$ بملاين الدراهم عند انتاج x جهاز

كمبيوتر بالالاف فان القيمة العظمى للربح تكون عند انتاج



(a) 2000 قطعة

(b) 8000 قطعة

(c) 11000 قطعة

(d) 8 قطع

---

(2) اذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.02x^2+8x+5000$

فان التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100 هي

(a) 6000 **(b)** 11.98

(c) 5988 **(d)** 12

---

(3) اذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.02x^2+8x+5000$

فان التكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100 هي

(a) 6000 **(b)** 12

(c) 5988 **(d)** 6

(4) مصنع لانتاج دمى الاطفال ، يبيع المصنع x دمية اسبوعيا بسعر الواحدة 20 درهم ،فاذا كانت دالة التكلفة لانتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.002x^2+8x+5000$ فان عدد القطع التي ينتجها المصنع ليحقق اكبر ربح هي

(a) 6000 (b) 3000

(c) 30000 (d) 7000

---

(5) لتكن $C(x)=10e^{0.02x}$ تمثل دالة تكلفة انتاج x من الاجهزة الكهربائية . فان مستوى الانتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة هو

a) 5 (b) 500

(c) 50 (d) 10

---

(6) تمثل الدالة $f(p)=400(20-p)$ كمية الطلب على سلعة معينة عند السعر p حيث $p<20$ ان السعر الذي تكون فية دالة الايرادات $R=p\,f(p)$ اكبر ما يمكن هو

(a) 10 (b) 20

(c) 400 (d) 15

---

(7) تمثل الدالة $R=p\times f(p)$ دالة الايرادات عند السعر p ان دالة الايرادات تكون متناقصة عندما تكون مرونة الطلب

(a) $E<1$ (b) $E<-1$

(c) $E<0$ (d) $E>-1$

(8) تمثل الدالة $f(p)=400(20-p)$ كمية الطلب على سلعة معينة عند السعر p حيث $p<20$ ان مدى الاسعار الذي تكون فية دالة الايرادات $R=p\,f(p)$ متزايدة هي

(a) $(0,10)$ (b) $(10,20)$

(c) $(0,20)$ (d) $(20,400)$

---

(9) تمثل الدالة $f(p)=400(20-p)$ كمية الطلب على سلعة معينة عند السعر p حيث $p<20$ ان مدى الاسعار الذي يكون فية الطلب مرن هي

(a) $(0,10)$ (b) $(10,20)$

(c) $(0,20)$ (d) $(20,400)$

---

(10) اذا كان الطلب مرن ($E<-1$) على الفترة (a,b) فاي من العبارات التالية صحيحة

(a) السعر يزداد و دالة الايرادات تزداد على الفترة (a,b)

(b) السعر يزداد و دالة الايرادات تتناقص (a,b)

(c) السعر يتناقص و دالة الايرادات تتناقص (a,b)

(d) السعر يتناقص و دالة الايرادات تتزايد (a,b)

---

(11) تمثل الدالة $p(x)=1.3-\frac{x}{2500}$ سعر علبة العصير الواحدة بالدرهم عند بيع x علبة . فان القيمة العظمى للدخل تكون عند بيع

(a) 1625 (b) 10000

(c) 3250 (d) 16250

(12)تقوم احدى الشركات بتقدير مبيعاتها السنوية بالاف الدراهم بالعلاقة $s(t)=60-40e^{-0.05x(t)}$ حيث

$x(t)$ تمثل كمية الانفاق بالاف الدراهم على الاعلانات مع مرور الزمن t بالسنوات ،

والجدول التالي يمثل حجم الانفاق لمدة اربع سنوات.

السنة	1	2	3	4
تكلفة الاعلانات	14500	18000	22000	25000

فان معدل التغير في كمية المبيعات في السنة الرابعة تقريبا تساوي

(a) 1719 (b) 6550

(c) 27250 (d) 3000

---

(13) تحدد العلاقة $f(x)=\sqrt{2x}$ حيث $0\le x\le 8$ كتلة أول x مترمن سلك معدني رقيق

فان الكثافة الخطية للمعدن عندما $x=8$ هي

(a) 2 (b) 4

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

الكثافة الخطية

$$\rho(x)=f'(x)$$

---

(14)) تحدد العلاقة $m(x)=(x-1)^3+6x$ حيث $0\le x\le 2$ كتلة أول x مترمن سلك معدني رقيق اي

من العبارات التالية تكون صحيحة

(a) تتوزع الكثافة بالتساوي(تناسق) على طول السلك f

(b) تكون الكثافة على الاطراف اكثر من الوسط

(c) تكون الكثافة في الوسط اكثر من الاطراف

(d) تزيد الكثافة من اليسار الى اليمين على طول السلك

(15) اذا كان سرعة التفاعل $x'(t)$ لمادة معينة تعطى بالعلاقة $x'(t)=x(t)[1-2x(t)]$ حيث $x(t)$ مقدار التركيز فان التركيز الذي تصل فيه سرعة التفاعل $x'(t)$ الى القيمة العظمى هي .

(a) $x(t)=\frac{1}{8}$ درجة الاشباع

(b) $x(t)=\frac{1}{16}$ درجة الاشباع

(c) $x(t)=\frac{1}{2}$ درجة الاشباع

(d) $x(t)=\frac{1}{4}$ درجة الاشباع

---

(16) اذا كانت المعادلة اللوجستية للنمو السكاني تعطى بالعلاقة $p'(t)=2p(t)[6-p(t)]$ حيث تمثل $p(t)$ عدد السكان بالمليون مع مرور الزمن ،فان التعداد السكاني الذي يصل فيه معدل النمو الى القيمة العظمى هو

(a) 6 مليون

(b) 12 مليون

(c) 3 مليون

(d) 4 مليون

---

(17) تمثل الدالة $f(t)=\frac{70}{1+3e^{-0.2t}}$ نسبة عدد السكان التي تصلهم اشاعة معينة بعد الزمن t بالساعة فان معدل التغير في انتشار الاشاعة بعد ساعتين يساوي

(a) 70%

(b) 23%

(c) 3.1%

(d) 17.5%

---

(18) اذا كانت درجات طالب بعد دراسة (t) ساعة باليوم تعطى بالدالة $f(t)=\frac{90}{1+4e^{-0.4t}}$ اذا قرر الطالب زيادة دراسته بمعدل ساعة يومياً فان درجاته سترتفع تقريبا بمعدل

(a) 5.76 (b) 15.28 (c) 1.44 (d) 23.04

ملاحظة: بما ان عدد ساعات الدراسة غير معلوم ممكن تعويض $t=0$ بالمشتقة لتسهيل الحسابات ويكون الناتج تقريبي

محمد عمر الخطيب

الإجابات

الدرس الثالث	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	B	C	C	B	B	A	C	B	D	D	A	A	B	D	D	C	C	C	A	A
	21	22																		
	A	C																		

الدرس الرابع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	C	D	B	D	B	D	A	B	B	D	B	C	C	A	A	D	C	B	C	D
	21																			
	B																			

الدرس الخامس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	B	D	A	B	A	B	C	B	A	B	D	A	D	D	D	C	B	B	C	C
	21	22	23	24	25	26														
	D	C	B	D	A	D														

السادس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17			
	A	C	C	C	B	C	A	C	D	C	D	B	A	A	A	B	B			

السابع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17			
	A	A	A	C	D	C	C	D	A	D	D	A	C	B	C	A	A			

محمد عمر الخطيب

الدرس الثامن	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	B	A	C	C	C	A	D	D	C	D	B	B	B	B	B	B	A	B	B	A
	21	22	23	24																
	B	B	B	A																

التاسع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		
	B	B	B	B	C	A	B	A	B	B	A	A	D	B	D	C	C	A		

إنتهت الوحدة الرابعة بحمد الله ... واعتذر للجميع عن أي تقصير أو خطأ.

الوحدة الخامسة

التكامل

محمد عمر الخطيب

5 -1 الدوال الاصلية

5 -2 المجموع والرمز سيجما

5 -3 المساحة

5 -4 التكامل المحدود

5 -5 النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

5 -6 التكامل بالتعويض

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

الدالة الاصلية

اذا كانت الدالة $f(x)=x^2+c$ حيث c عدد ثابت فان مشتقتها الدالة $f'(x)=2x$.

نقول ان الدالة $f(x)=x^2+c$ هي الدالة الاصلية للدالة $f'(x)=2x$

ونعبر عما سبق بالرموز

$$\int 2x\ dx = x^2+c$$

ويقرء.... تكامل $2x$ هو x^2+c

او التكامل غير المحدود للدالة $f'(x)=2x$ بالنسبة للمتغير x هو $f(x)=x^2+c$

---

(1) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(t)=3t^2$ وعبرها عن ذلك بالرموز

نعلم ان مشتقة الدالة $F(t)=t^3+c$ حيث c عدد ثابت هي الدالة $f(t)=3t^2$

لذلك فان الدالة الاصلية للدالة $f(t)=3t^2$ هي الدالة $F(t)=t^3+c$

ونكتب ذلك بالرموز

$$\int 3t^2\ dt = t^3+c$$

---

(2) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(x)=1$ وعبر عن ذلك بالرموز

---

(3) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(t)=1$ وعبر عن ذلك بالرموز

---

(4) اوجد الدالة الاصلية للدالة $g(\theta)=\cos\theta$ وعبر عن ذلك بالرموز

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كانت $F(x)=\ln\left|\sec x+\tan x\right|$

(أ) اوجد $F'(x)$

(ب) ما هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=\sec x$

---

(2) بين ان الدالة $F(x)=2x\ln(ex)-3x$ **هي الدالة الاصلية للدالة** $f(x)=1+\ln x^2$ ، $x>0$

---

(3) اذا كان $\int \frac{bx^2+10}{x^3+5x+1}\,dx=2\ln\left|x^3+5x+1\right|+c$ **فأوجد قيمة الثابت** b

التكامل غير المحدود

تعريف : التكامل غير المحدود

مجموعة كل الدوال الاصلية للدالة $f(x)$ هو التكامل غير المحدود للدالة f بالنسبة إلى x

ويرمز لها بالرمز $\int f(x)\,dx$

أي أن $\int f(x)\,dx = F(x)+C$

نظرية : اذا كانت الدالة $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ ، و الدالة $G(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ على الفترة I فان

$G(x)=F(x)+c$ او $G(x)-F(x)=c$ حيث c عدد ثابت.

(1) بين ان الدالتان $F(x)=x^2(x^2+4)$ ، $G(x)=\frac{1}{4}(2x^2+4)^2$ هما دالتان كل منهما الدالة الاصلية لنفس الدالة

ملاحظة : التكامل هو العملية العكسية للمشتقة اي ان المشتقة تلغي التكامل والتكامل يلغي المشتقة

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]=f(x) \quad \text{و} \quad \int\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]dx=f(x)+c$$

(2) اذا كان $g(x)=x\sin x$ ، اوجد

$(a)\ \int g'(x)\,dx$

$(b)\ \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$

قواعد التكـامل

ملاحظة: راجع قواعد الاشتقاق

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1 \qquad * \int a\, dx = ax + c \qquad * \int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(2) $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

(3) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c \qquad * \int \sin(ax+b)\, dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$

(4) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

(5) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

(6) $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$

(7) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

(8) $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$

(9) $\int e^x\, dx = e^x + c \qquad * \int e^{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c \qquad * \int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c$

(10) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \qquad * \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(11) $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + c \qquad * \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c \qquad * \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(13) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c \qquad * \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

خواص التكامل غير المحدود

(1) $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

(2) $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

يتوزع التكامل على الجمع والطرح

ولا يتوزع على الضرب او القسمة

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int 2x^4 \quad dx$

(2) $\int 3 \quad dt$

(3) $\int x^{\frac{-4}{3}} \quad dx$

(4) $\int \frac{1}{x^2} \quad dx$

(5) $\int \sqrt[3]{x^2} \quad dx$

(6) $\int \frac{2}{\sqrt[5]{x}} \quad dx$

(7) $\int t\sqrt{t} \quad dt$

(8) $\int \frac{1}{2y} dy$

(9) $\int (2x-1)^4 \quad dx$

(10) $\int \frac{6}{(3x+2)^2} \quad dx$

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

(1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

(2)هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها الى جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int (4x^3 - 3x) \quad dx$

---

(2) $\int (3x^2 - \sqrt{x} + 2) \quad dx$

---

(3) $\int (\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x}) \quad dx$

---

(4) $\int t^2 (t^3 - \frac{1}{t^2}) \quad dt$

---

(5) $\int x^{\frac{2}{3}} (x^{\frac{-4}{3}} - 3) \quad dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int \frac{x^4-3x+1}{x^2}\ dx$

(2) $\int \frac{x^{1/3}-3}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx$

(3) $\int \frac{x+2x^{3/4}}{x^{5/4}}\ dx$

(4) $\int \frac{t^2-1}{1-t}\ dt$

(5) $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\ dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int (3\sin x - \cos 4x) \quad dx$

---

(2) $\int \sec x(\tan x - \sec x) \quad dx$

---

(3) $\int (\sec 2x \tan 2x + \csc^2 5x) \quad dx$

---

(4) $\int \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cot x} \quad dx$

---

(5) $\int \csc x(\sec x \tan x - \cot x) \quad dx$

---

(6) $\int \dfrac{2\sin x}{\cos^2 x} \quad dx$

---

(7) $\int \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} \quad dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int (e^x + \frac{1}{x} - \cos 2x + 1) \quad dx$

(2) $\int (2x + x\sqrt{x} + e^{2x} - \sin 3x) \quad dx$

(3) $\int (2x^{-1} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} - x) \quad dx$

(4) $\int e^x(2e^x - 3) \quad dx$

(5) $\int (e^x - e^{-x})^2 \quad dx$

(6) $\int \frac{e^x + 3}{e^x} \quad dx$

(7) $\int \frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}} \quad dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{e^x}{e^x+3}\ dx$

(2) $\int \frac{3}{3x-2}\ dx$

(3) $\int \frac{x}{x^2+1}\ dx$

(4) $\int \frac{-7}{2x+1}\ dx$

(5) $\int \frac{2x+1}{x(x+1)}\ dx$

(6) $\int \frac{5x^3}{x^4-5}\ dx$

(7) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\ dx$

(8) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ dx$

(9) $\int \cot x\ dx$

(10) $\int \tan 2x\ dx$

(11) $\int (\cot x+\tan x)\ dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int e^{2x+1} \quad dx$

---

(2) $\int \cos x \, e^{\sin x} \quad dx$

---

(3) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \quad dx$

---

(4) $\int x \, e^{x^2} \quad dx$

---

(5) $\int \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x} \quad dx$

---

(6) $\int e^{x^2+\ln x} \quad dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{3}{x^2+1} \; dx$

---

(2) $\int \frac{x}{x^3+x} \; dx$

---

(3) $\int \frac{x+1}{x^2+1} \; dx$

---

(4) $\int \frac{5}{\sqrt{4-4x^2}} \; dx$

---

(5) $\int \frac{-2}{\sqrt{x^4-x^2}} \; dx$

---

(6) $\int \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2+4} \; dx \qquad , x>0$

محمد عمر الخطيب

ملاحظة : راجع المتطابقات واحفظها

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \sin^2 5x + \cos^2 5x \quad dx$

(2) $\int \tan^2 x \quad dx$

(3) $\int \cos^2 x - \sin^2 x \quad dx$

(4) $\int 2\sin x \cos x \quad dx$

(5) $\int \sin^2 x \quad dx$

(6) $\int \cos^2 3x \quad dx$

(7) $\int \frac{1}{1+\cos 2x} \quad dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\ dx$

---

(2) $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}\ dx$

---

(3) $\int \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}\ dx, \qquad x \in [0, \pi]$

---

(4) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\ dx, \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

محمد عمر الخطيب

تكاملات خاصة

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{1+\sin x} \; dx$

(2) $\int \sec x \;\; dx$

(3) $\int \csc x \;\; dx$

(4) $\int \frac{1}{e^{-x}+1} \;\; dx$

(5) $\int \frac{1}{e^{x}+1} \;\; dx$

مساعدة:

اضرب و اقسم على e^{-x}

او اضف واطرح للبسط e^{x}

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد التكاملات التالية

يمكن كتابة الدالة النسبية $f(x)$ الى فيها درجة البسط اكبر من او تساوي درجة المقام على الشكل التالي

$$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

(a) $\int \frac{2x+3}{x+7}\ dx$

(b) $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\ dx$

---

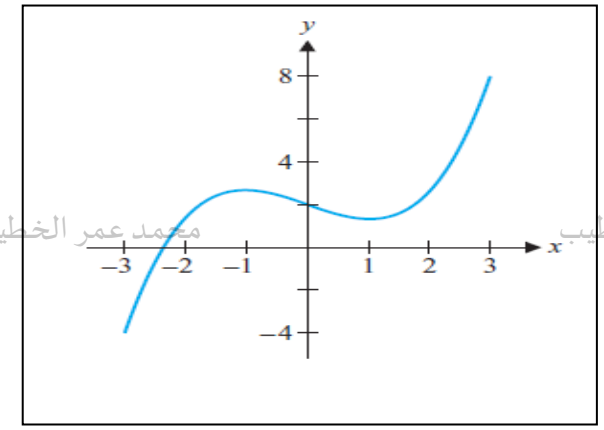
(2) اوجد الدالة الاصلية $F(x)$ للدالة $f(x)$

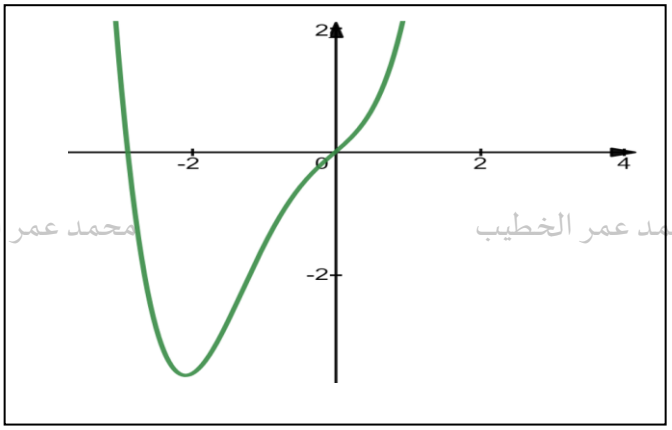
الحل بالتخمين

(a) $f(x) = 2x\cos x^2$

(b) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x$

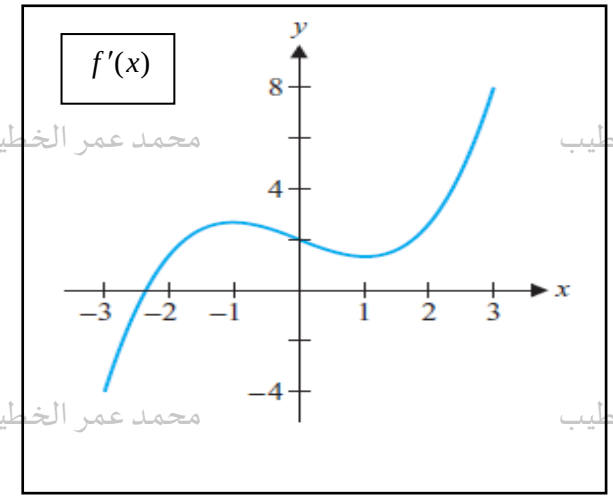
(1) عين الدالة $f(x)$ وعين الدالة الاصلية لها

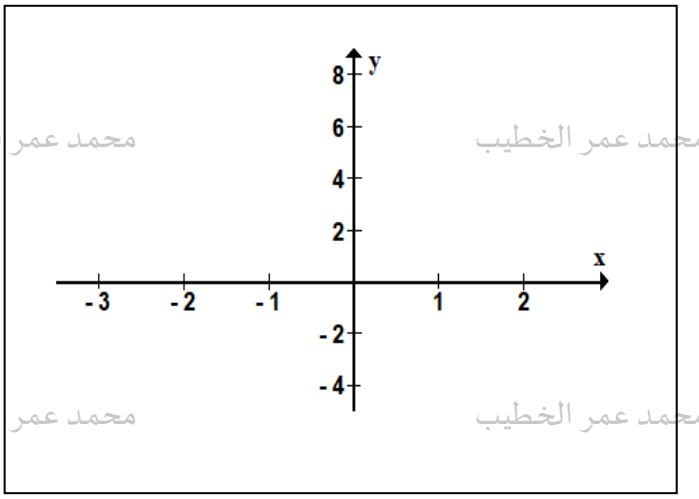


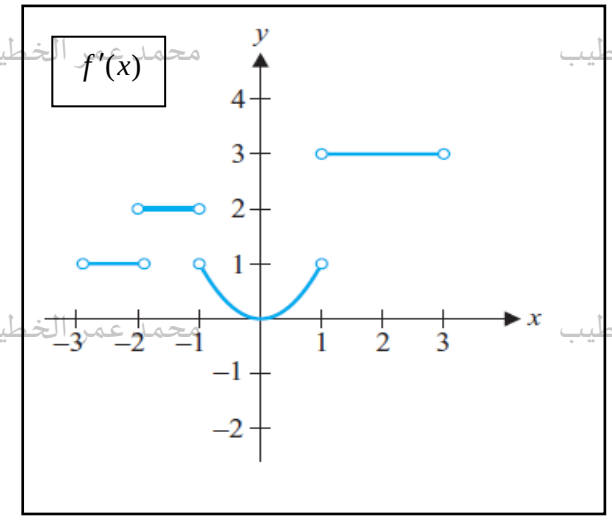


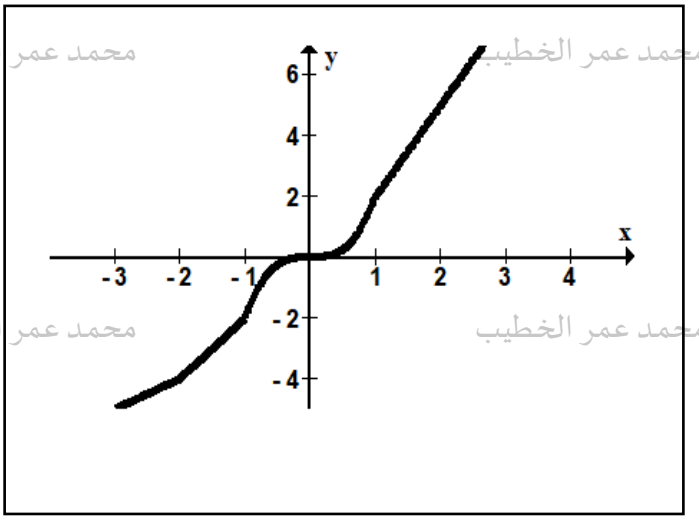
يوجد اجابات صحيحة اخرى

(2) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ارسم بيان الدالة الاصلية $f(x)$









إيجاد التكامل المحدود

سيتم مناقشة التكامل المحدود بشكل موسع في الدرس الرابع

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{1}^{3}(2x-1)\,dx=$

---

(2) $\int_{0}^{2}3x(x+2)\,dx=$

---

(3) $\int_{0}^{\ln 2}e^{x}\,dx=$

---

(4) $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^{2}+1}\,dx=$

---

(5) $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^{2}+1}\,dx=$

---

(6) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sec^{2}x\,dx=$

---

(7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x-\cos 3x\,dx=$

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق

(1) $f'(x) = 3x^2 - e^x$

(2) $f'(x) = \sqrt{x} + \sin 2x$

(3) $f'(x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

(4) $f''(x) = 12x + \cos 3x$

محمد عمر الخطيب

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط التالية

(1) $f'(x) = 3e^x + 2x \qquad f(0) = 4$

---

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2x \qquad f(1) = 4$

---

(3) $f'(x) = \sec^2 x \qquad f(\dfrac{\pi}{4}) = -1$

---

(4) $f'(x) = \cos x + \sin x \qquad f(\pi) = 1$

محمد عمر الخطيب

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط التالية

(1) $f''(x)=12x^2+4e^{2x}$ $\quad f(0)=3$, $f'(0)=2$

---

(2) $f''(t)=2t+2$ $\quad f(0)=2$, $f(3)=2$

التطبيقات

الدالة المكانية ⟸ دالة السرعة المتجهة ⟸ دالة التسارع

بالاشتقاق

الدالة المكانية ⟹ دالة السرعة المتجهة ⟹ دالة التسارع

بالتكامل

(1) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=10t+5$ حيث $s(0)=10$

---

(2) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3e^{-t}-2$ حيث $s(0)=0$

---

(3) حدد الدالة المكانية اذا كانت دالة التسارع $a(t)=t^2+1$ والسرعة المتجهة الابتدائية $v(0)=4$ والموقع الابتدائي $s(0)=0$

(1) حدد الدالة المكانية لدالة التسارع $a(t)=3\sin t$ حيث $s(0)=0, v(0)=4$

---

(2) سقط جسم من ارتفاع برج الشيخ خليفة عن ارتفاع $828m$ اذا كان تسارع الجسم بعد t ثانية يعطى بالعلاقة $a(t)=-9.8\ m/s^2$ و السرعة الابتدائية للجسم هي $-30m/s$ ، اوجد الدالة المكانية للجسم ثم اوجد ارتفاع الجسم عن الارض بعد 10 ثواني من بدء الحركة.

---

(3) قذف جسم افقياً للأعلى من ارتفاع $80\ ft$ اذا كان تسارع الجسم ثابت هو $a(t)=-32\ ft/s^2$ و السرعة الابتدائية للجسم هي $64\ ft/s$ ، اوجد اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم.

(1) اذا كانت سيارة تتسارع من $20m/s$ الى $60m/s$ في 4 ثواني ، اوجد المسافة التي تقطعها السيارة خلال اول 5 ثواني ، علماً بان التسارع ثابت وبداية الحركة عند الموضع صفر.

---

(2) اذا كانت دالة السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم يعطى بالعلاقة $v(t)=-s(t)$ حيث $s(0)=e$ فأوجد دالة الوضع $s(t)$

(1) اوجد الدالة $f(x)$ التي لها ميل المماس عند اي نقطة $m = 2x$ و تمر بالنقطة $(2,5)$

---

(2) اوجد الدالة $f(x)$ التي تمر بالنقطة $(0,1)$ولها مماس افقي عند نفس النقطة حيث $f''(x) = 6x$

---

(3) يكلف طباعة الكتاب الأول 1600 درهم وتعطى التكلفة الحدية لطباعة x نسخة من نفس النوع بالعلاقة $c'(x) = \frac{200}{\sqrt{x}}$ ، اوجد تكلفة طباعة 400 كتاب.

خزان للماء يحتوي على 288 لتر وتتغير كمية الماء في الخزان بمعدل $f(t)=4t-t^2$ لتر في الدقيقة

(أ) اكتب المعادلة التفاضلية التي تنمذج معدل كمية الماء $v(t)$ بالخزان عند الزمن t مع الشروط

(ب) اوجد كمية الماء $v(t)$ بالخزان عند اي زمن .

(ج) اوجد كمية الماء بالخزان بعد 9 دقائق.

(د) حدد الزمن الذي يصبح فيه الخزان فارغ.

(هـ) حدد الفترة التي يتزايد فيها مستوى الماء ومتى يتناقص

رمز المجموع (سيجما) $\sum$

محمد عمر الخطيب

اكتب كل مما يلي بدون استخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

(1) $\sum_{i=1}^{7} 2i+1$

---

(2) $\sum_{i=1}^{10} i^2 - 3i$

---

(3) $\sum_{n=1}^{10} (n-2)(n+2)$

---

(4) $\sum_{i=2}^{100} (-1)^i \frac{1}{i}$

---

(5) $\sum_{i=1}^{20} \sin(\frac{\pi}{2} i)$

---

(6) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{e^i}$

---

(7) $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{i}\, e^{1/i}$

محمد عمر الخطيب

اكتب كل مما يلي باستخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

اذا كان الفرق بين اي حددين متتالين ثابت تسمى مسلسلة حسابية الحد ويكون الحد لعام للمتسلسلة الحسابية هو

$$a_i = a_1 + (i-1)d$$

حيث a_1 الحد الأول

$d = a_2 - a_1$ الاساس (الفرق)

اذا كان قسمة اي حددين متتالين ثابت تسمى متسلسلة هندسية ويكون الحد العام للمتسلسلة الهندسية هو

$$a_i = a_1 \times r^{i-1}$$

حيث a_1 الحد الأول

$r = \frac{a_2}{a_1}$ الاساس (النسبة)

(1) $3+6+9+12+15+\ldots+99$

(2) $2+9+16+23+30+\ldots+149$

(3) $0.4+0.8+1.2+1.6+2.0+\ldots+20$

(4) $2.05+2.15+2.25+2.35+\ldots+6.75$

(5) $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+\ldots+20\times21$

(6) $\sqrt{2-1}+\sqrt{3-1}+\sqrt{4-1}+\ldots+\sqrt{100-1}$

(7) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\ldots-\frac{1}{400}$

(8) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{1024}$

خواص وقوانين المجموع (سيجما)

اذا كانت n عدد صحيح موجب و a,b,c اعداد حقيقية فان

(1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} 3 = 20\times 3 = 60$

(2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} i = \frac{20(21)}{2} = 210$

(3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$

(4) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} i^3 = \left[\frac{20(21)}{2}\right]^2 = 44100$

المتسلسلات الهندسية المنتهية

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n$$

عدد الحدود(قوة)

(الاساس -1) × الحد الاول

الاساس -1

(5) $\sum_{i=0}^{n} a r^i = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}, \quad r \neq 1$

الحد الأول مكان i=0

عدد الحدود (n-0)+1

او $\sum_{i=1}^{n} a r^i = \frac{ar(1-r^{n})}{1-r}, \quad r \neq 1$

عدد الحدود (n-1)+1

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

$$\sum_{i=m}^{\infty} a r^i = \frac{a\, r^m}{1-r} \quad , \quad |r| < 1$$

الحد الأول مكان i=m

خواص المجموع

(1) $\sum_{i=1}^{n} (c\,a_i \pm d\,b_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i \pm d\sum_{i=1}^{n} b_i$

(2) $\sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i$ $\quad or \quad \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-m} a_{i+m}$

محمد عمر الخطيب

(1) اكتب كل الحدود واحسب المجموع

$(a) \quad \sum_{i=1}^{5}(4i+2) =$

$(b) \quad \sum_{i=3}^{7}(i^2+i) =$

---

(2) استخدم قواعد المجموع لحساب

$(a) \quad \sum_{i=1}^{25} 3 =$

$(b) \quad \sum_{i=1}^{15}(2i-3) =$

$(c) \quad \sum_{i=1}^{20}(5-i) =$

$(d) \quad \sum_{i=1}^{125}(i^2+i+5) =$

$(e) \quad \sum_{i=1}^{20} i(i-3) =$

$(f) \quad \sum_{i=1}^{10} i^3 =$

محمد عمر الخطيب

استخدم قواعد المجموع لحساب

(1) $\sum_{i=0}^{100}(5i+2) =$

(2) $\sum_{i=5}^{20}(5i+2) =$

(3) $\sum_{i=4}^{20}(i-3)(i+3) =$

(4) $\sum_{i=1}^{10}3\times 2^{i} =$

(5) $\sum_{i=0}^{8}4\times 2^{-i} =$

(6) $\sum_{i=1}^{\infty}e^{-i} =$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان $f(x)=2x-3$ **فأوجد**

$$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)$$

---

(2) احسب مجموع قيم الدالة $f(x)=3x+5$ **عند**

$$x=0.4\ ,0.8\ ,\ 1.2\ ,1.6\ ,\ 2.0\ ,2.4\ ,2.8\ ,3.2\ ,3.6\ ,...,40$$

---

(3) احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ **لقيم** x_i **المعطاه**

$$f(x)=x^2+4x \qquad x=2\ ,4\ ,6\ ,8\ ,10\ ,...,100$$

محمد عمر الخطيب

اوجد ناتج كل مايلي واحسب نهاية المجموع عندما تقترب n من ∞

(1) $\sum_{i=1}^{n} \frac{5i}{n^2}$

---

(2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^3}$

---

(3) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[(\frac{i}{n})^2 + 2(\frac{i}{n}) \right]$

محمد عمر الخطيب

اوجد ناتج كل مايلي واحسب نهاية المجموع عندما تقترب n من ∞

(1) $\sum_{i=1}^{n} 2 \times 3^{-i} =$

---

(2) $\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}} \frac{2}{n}$

مجموع ريمان لحساب المساحة

التجزئة المنتظمة

تسمى المجموعة $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a,b]$ اذا تحققت الشروط التالية

(1) $x_0 = a$ و $x_n = b$

(2) $x_i < x_{i+1}$ لكل قيم i

(3) $\Delta x_i = \Delta x = x_{i+1} - x_i$ قيمة ثابتة لكل قيم i

مثال: المجموعة $\{2,4,6,8,10\}$ هي تجزئة منتظمة للفترة $[2,10]$

تسمى كل فترة $[x_{i-1}, x_i]$ فترة جزئية للتجزئة ويكون عدد الفترات الجزئية هو n

وعدد عناصر التجزئة هو $n+1$

ملاحظات مهمة

(1) طول الفترة الكلية للتجزئة هي $b-a$

(2) طول الفترة الجزئية للتجزئة المنتظمة هي $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

(3) العنصر x_i في التجزئة هو العنصر الذي ترتيبه $i+1$ (مثلا x_6 هو العنصر السابع)

(4) الفترة الجزئية التي ترتيبها i هي الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ (مثلا $[x_5, x_6]$ هي الفترة الجزئية السادسة)

(5) نقاط القيم هي $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ حيث c_i تقع في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$

(6) يمكن ايجاد اي عنصر في التجزئة بالعلاقة $x_i = a + \Delta x(i) = a + \frac{b-a}{n} i$ لكل قيم i

يسمى المقدار $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ حيث x_i هي عناصر التجزئة و c_i هي نقاط القيم

(1) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 10 للفترة $[0,2]$

(2) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 25 للفترة $[1,13]$

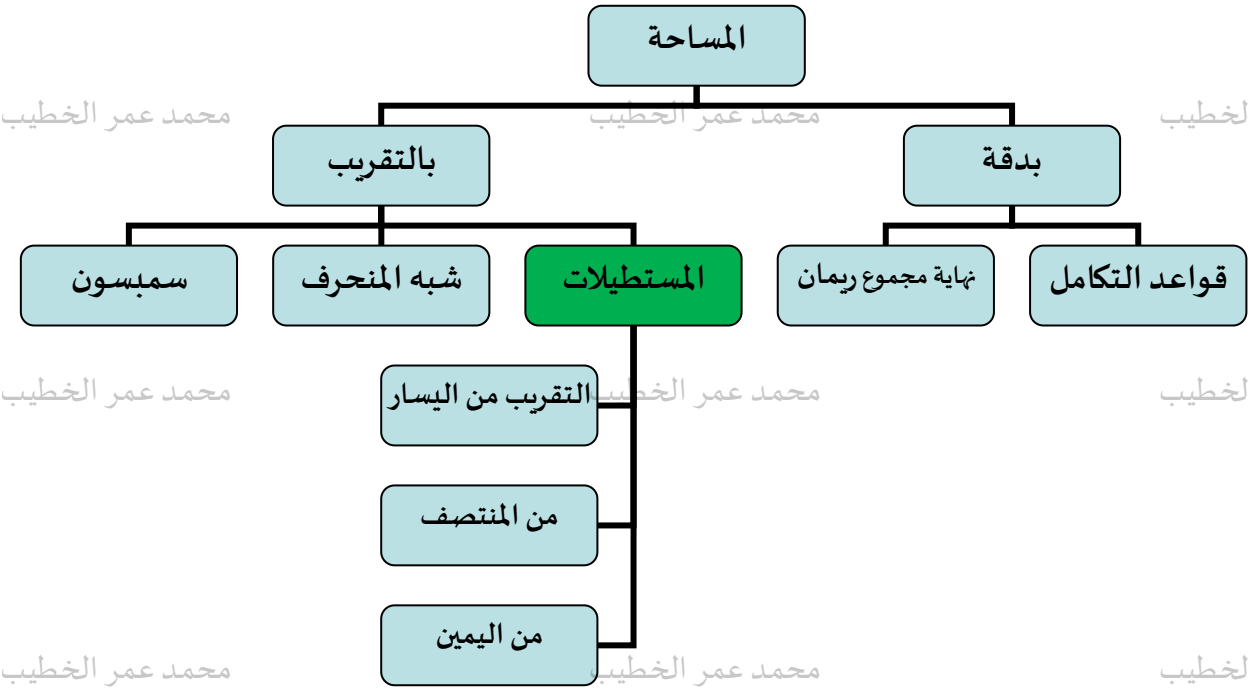
(3) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية n للفترة $[0,3]$

(4) اكتب العنصر السابع في التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 31 للفترة $[2,5]$

(5) اكتب الفترة الجزئية العاشرة في التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 40 للفترة $[1,3]$

محمد عمر الخطيب

تقريب المساحات



يسمى المقدار $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ حيث x_i هي عناصر التجزئة و c_i هي نقاط القيم

لتقريب المساحة نستخدم قانون مجموع ريمان

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$

من اليمين

$$c_i = x_i$$

من المنتصف

$$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}$$

من اليسار

$$c_i = x_{i-1}$$

طريقة التقريب باستخدام المستطيلات

هناك ثلاث طرق شائعة لتقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام طريقة التقريب بالمستطيلات :

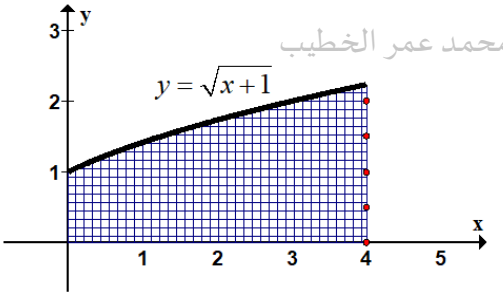
(1) التقريب اليساري L (قاعدة النقطة اليسرى)

$$c_i = x_{i-1}$$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليسرى المنحنى

وتسمى هذه الطريقة طريقة تقريب المستطيلات من الجهة اليسرى

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى



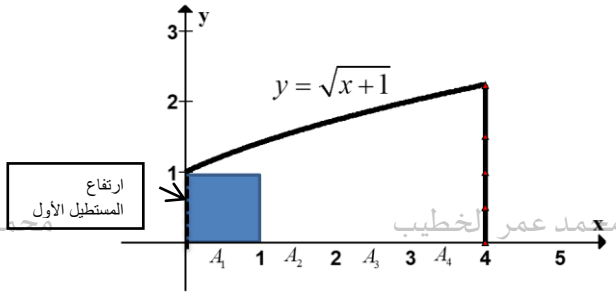
عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

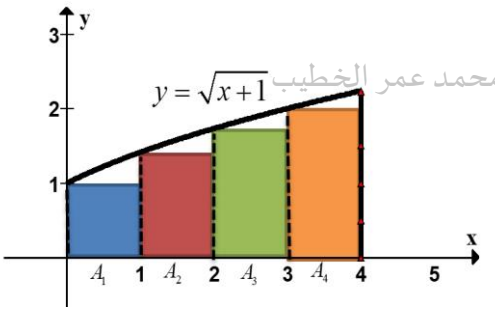
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$

عناصر التجزئة $p: 0, 1, 2, 3, 4$

نقاط القيم (من جهة اليسار) $c_i: 0, 1, 2, 3$



$$A \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$= 1\times f(0) + 1\times f(1) + 1\times f(2) + 1\times f(3)$$



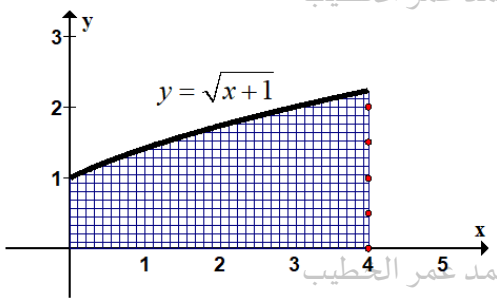
(2) التقريب اليميني R (قاعدة النقطة اليمنى)

$c_i = x_i$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليمنى المنحنى

وتسمى طريقة تقريب المستطيلات من الجهة اليمنى.

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى



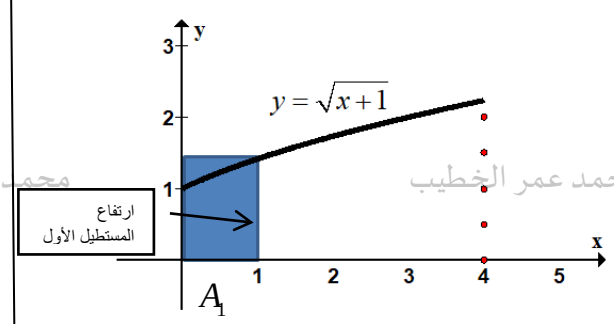
عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

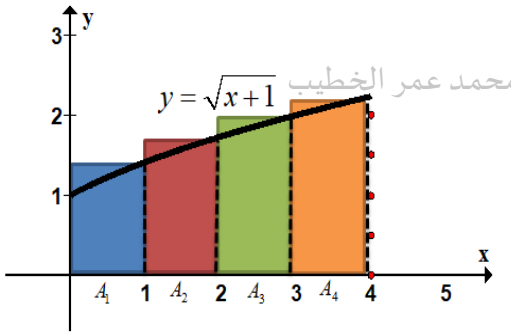
$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$$

عناصر التجزئة $p:0,1,2,3,4$

نقاط القيم (من جهة اليمين) $c_i:1,2,3,4$



$$A\approx A_1+A_2+A_3+A_4$$
$$=1\times f(1)+1\times f(2)+1\times f(3)+1\times f(4)$$



$$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}$$

(3) التقريب المنتصفي M (قاعدة نقطة المنتصف)

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تقطع المنحنى في نقطة المنتصف

وتسمى هذه الطريقة طريقة تقريب المستطيلات باستخدام نقطة المنتصف

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية المنتصف

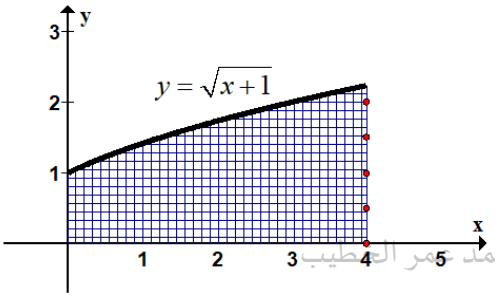
عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

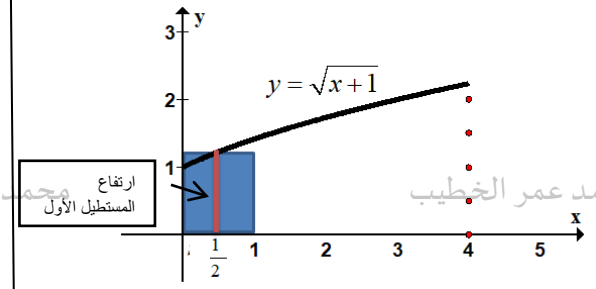
طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$

عناصر التجزئة $p: 0, 1, 2, 3, 4$

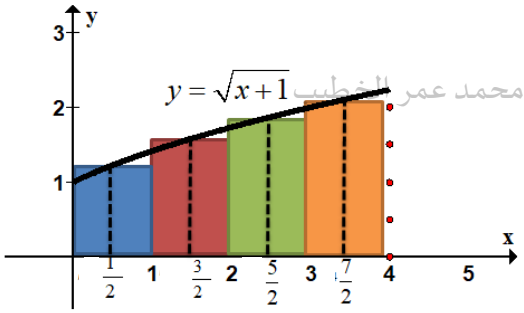
نقاط القيم (من جهة اليمين) $c_i : \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$





$$A \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$= 1 \times f(\frac{1}{2}) + 1 \times f(\frac{3}{2}) + 1 \times f(\frac{5}{2}) + 1 \times f(\frac{7}{2})$$



اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=2x-x^2$ ومحور السينات على الفترة $[0,2]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث

(1) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

ملاحظة: اولاً اكتب التجزئة

---

(2) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

---

(3) قواعد القيم هي نقطة المنتصف

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\cos x$ ومحور السينات على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث

(1) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

ملاحظة: اولاً اكتب التجزئة

---

(2) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

محمد عمر الخطيب

(1) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات على الفترة $[0,1]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0

---

(2) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات على الفترة $[0,0.5]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4

---

(3) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[1,2.6]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.0	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.2	1.4	1.0

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=2x$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$

(1) باستخدام 16 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

$$c_i = x_i$$

ملاحظة: عندما يكون عدد المستطيلات قليل نستخدم طريقة التجزئة وغير ذلك نستخدم قانون مجموع ريمان

---

(2) باستخدام 24 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

$$c_i = x_{i-1}$$

---

(3) باستخدام 8 مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة المنتصف

$$c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}$$

تعريف المساحة

المساحة (بدقة) هي نهاية مجموع ريمان

اذا كانت الدالة $f(x)$ **متصلة على الفترة** $[a,b]$ **حيث** $f(x)\geq 0$ **فان المساحة** A **تحتى منحنى الدالة وفوق محور السينات تعطى بالصيغة**

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n$$

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

ملاحظة : عندما تكون n كبيرة فان $c_i=x_i$

واذا كانت $f(x)\leq 0$ **فان المساحة** A **فوق منحنى الدالة وتحت محور السينات تعطى بالصيغة**

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n$$

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} -f(c_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} -f(x_i)\Delta x$$

اوجد المساحة تحت المستقيم $f(x)=2x$ **وفوق محور السينات على الفترة** $[1,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

1) اوجد المساحة تحت المنحنى $f(x)=3x^2$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان $f(x)=2x-2x^2$ دالة معرفة على الفترة $[0,1]$ حيث $A_n=\frac{(n+1)(n-1)}{3n^2}$

فأوجد المساحة المحصورة بين الدالة ومحور x

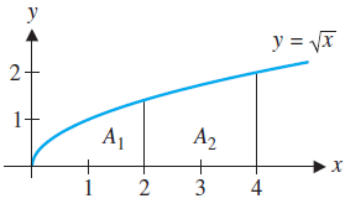
---

(2) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة و $f(x)\geq 0$ على الفترة $[0,1]$ حيث $A_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2$

فأوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0,1]$

---

(3) اعتمد على الشكل المجاور في تحديد قيمة $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\frac{2}{n}$ بدلالة A_1 او A_2



محمد عمر الخطيب

التكامل المحدود

ملاحظة: تم تقديم جزء من الدرس الخامس في هذا الدرس

اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a,b]$ فان التكامل المحدود للدالة f من a الى b هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{b-a}{n} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

بشرط وجود النهاية، ونقول ان الدالة قابلة للتكامل

ملاحظة : اذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فان الدالة قابلة للتكامل على نفس الفترة

عبر عن التكامل في كل مما يلي بصورة نهاية مجموع ريمان

$$\int_a^b \to \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}$$

ملاحظة: $x \to x_i = c_i$

$dx \to \Delta x$

(1) $\int_0^2 (3x^2 - 1)\,dx$

---

(2) $\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,3]$ حيث $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \frac{5}{2} + \frac{3-n}{2n}$

فأوجد $\int_0^3 f(x)\,dx$

---

(2) إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{(n+1)(2n+1)}{4n^2}$ على الفترة $[0,2]$ فاوجد $\int_0^2 f(x)\,dx$

---

(3) إذا كان $R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2(1+\frac{i}{n})$ على الفترة $[1,2]$ فاوجد $\int_1^2 f(x)\,dx$

عبر عن النهاية في كل مما يلي بصورة تكامل محدود

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\sin^2 c_i + c_i)\Delta x$, $[0,\pi]$ **والتجزئة على الفترة**

$$\int_a^b \to \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}$$

ملاحظة: $x \to x_i = c_i$

$dx \to \Delta x$

---

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2$

1. نجرب $a=0$ **ونجد** b **من خلال**

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \to$$
$$b-a=1 \to b=1$$

2. اوجد $c_i = a + \Delta x\, i$

$$c_i = 0 + \frac{1}{n}i = \frac{i}{n}$$

3. استبدل Δx **بـ** $\frac{1}{n}$

و استبدل c_i **بـ** $\frac{1}{n}i$

---

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})}{n}$

---

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}+\frac{n+2}{n^2}+\frac{n+3}{n^2}+\ldots+\frac{2n}{n^2}$

محمد عمر الخطيب

عبر عن النهاية في بصورة تكامل محدود ثم اوجد قيمة النهاية

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}}\ \frac{2}{n}$

---

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان (تعريف التكامل المحدود)

(1) $\int_0^1 2x\,dx$

---

(2) $\int_0^3 (4x+1)\,dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد قمية التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان (تعريف التكامل المحدود)

(1) $\int_0^2 x^2\,dx$

(2) $\int_{-2}^2 (x^2-1)\,dx$

محمد عمر الخطيب

خواص التكاملات المحدودة

(1)خاصية التوزيع على الجمع والطرح

$$\int_a^b (m\ f(x)+k\ g(x))dx = m\int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\,dx$$

(2)خاصية التكامل على نقطة

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(3)خاصية الثابت

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

(4)خاصية الترتيب

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(5)خاصية الاضافة (تكامل الدوال المتفرعة)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(6)خاصية السيادة اذا كانت $f(x) \geq g(x)$ لكل x على الفترة $[a,b]$

فان $$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

(7)خاصية الاحاطة اذا كانت

القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ هي $M = Max(f)$

والقيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ هي $m = Min(f)$

فان $$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)M$$

محمد عمر الخطيب

ايجادالتكامل المحدود

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{1}^{3}(4x+1)\,dx=$

---

(2) $\int_{2}^{5}3x(x+2)\,dx=$

---

(3) $\int_{0}^{\ln 2}e^{2x}\,dx=$

---

(4) $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+1}\,dx=$

---

(5) $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+1}\,dx=$

---

(6) $\int_{0}^{1}(x^5+x^{\frac{1}{5}})\,dx=$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x \, dx =$

(2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx =$

(3) $\int_{0}^{1} xe^{x^2} \, dx =$

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x - \cos 3x \, dx =$

(5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx =$

محمد عمر الخطيب

تكامل الدوال المتفرعة

(1) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2-2 & x\geq 0\\ 2x-2 & x<0\end{cases}$ **فأوجد** $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$

---

(2) اذا كانت $f(x)=3x|x-2|$ **فاوجد** $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$

---

(3) اذا كانت $f(x)=2[x+3]$ **فاوجد** $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

محمد عمر الخطيب

(1) اكتب $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$ **بصورة تكامل منفرد**

---

(2) اكتب $\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$ **بصورة تكامل منفرد**

---

(3) اكتب $\int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx$ **بصورة تكامل منفرد**

---

(4) اذا كان $\int_1^3 f(x)\,dx = 3$ و $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$ **فاوجد**

$(a) \int_1^3 [f(x)+g(x)]\,dx =$

$(b) \int_1^3 [f(x)-g(x)]\,dx =$

$(c) \int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,dx =$

$(d) \int_1^3 [4g(x)-3f(x)]\,dx =$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان $\int_{2}^{4} f(x)\,dx = -6$ ، $\int_{-1}^{2} 3f(x)\,dx = 15$ **فاوجد** $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$

---

(2) اذا كانت $\int_{2}^{5} f(x)\,dx = 7$ ، $\int_{2}^{7} f(x)\,dx = -3$ ، $\int_{1}^{7} f(x)\,dx = 10$ **فأوجد**

$(a)\ \int_{2}^{2} f(x)\,dx$

$(b)\ \int_{5}^{7} f(x)\,dx$

$(c)\ \int_{1}^{2} f(x)\,dx$

---

(3) اذا كانت $f(x)$ **دالة متصلة حيث** $\int_{2}^{2x} f(t)\,dt = 4x^2 + bx - 1$ **فأوجد قيمة** b

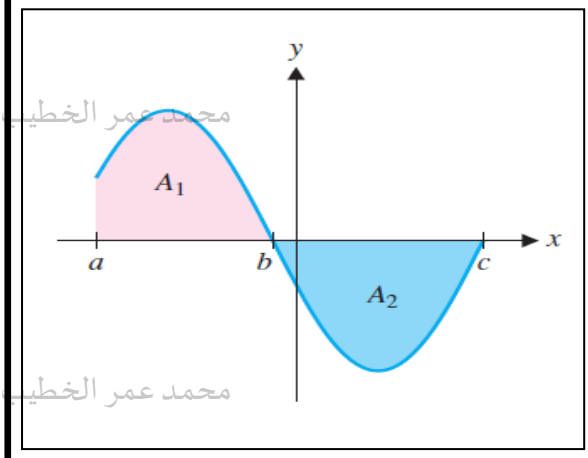
العلاقة بين المساحة والتكامل

(1) اذا كانت الدالة فوق محور السينات $f(x) \geq 0$

فان قيمة المساحة المحصور بالدالة ومحور السينات

تساوي قيمة التكامل المحدود على الفترة

$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$$



(2) اذا كانت الدالة تحت محور السينات $f(x) \leq 0$

فان قيمة المساحة المحصور بالدالة ومحور السينات

تساوي سالب قيمة التكامل المحدود على الفترة

$$A_2 = -\int_b^c f(x)\,dx$$

A_1 , A_2 **هذه اعداد تمثل المساحة فتكون دائماً موجبة**

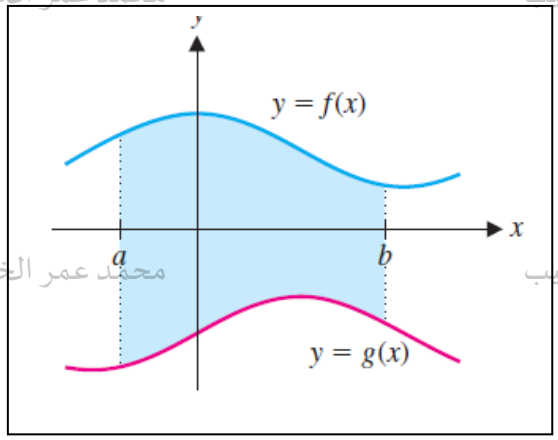
(3) المساحة المحصورة بين الدالة ومحور x **هي** $A = A_1 + A_2$

بشكل عام

اذا كانت كل من $f(x)$ **و** $g(x)$ **دوال متصلة على الفترة** $[a,b]$ **حيث** $f(x) \geq g(x)$ **فان المساحة المحصورة بين المنحنين تعطى بالتكامل**

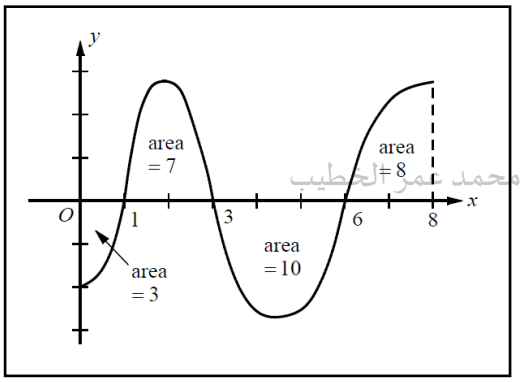
$$A = \int_a^b [\text{الدالة الأعلى} - \text{الدالة الأدنى}]\,dx$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



ملاحظة: يعتبر محور x **(السينات) دالة معادلتها** $y = 0$

(1) استخدم التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x)$ والمساحات المحددة في ايجاد قيمة التكاملات التالية



$(a)\quad \int_0^1 f(x)\,dx$

$(b)\quad \int_0^3 f(x)\,dx$

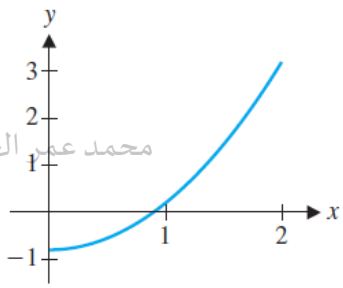
$(c)\quad \int_0^8 f(x)\,dx$

(d) المساحة المحصورة بالدالة ومحور x

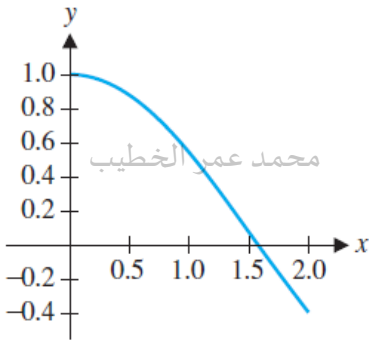
---

(2) استخدم التمثيل البياني المجاور لتحديد اذا كان قيمة التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx$ موجبة ام سالبة

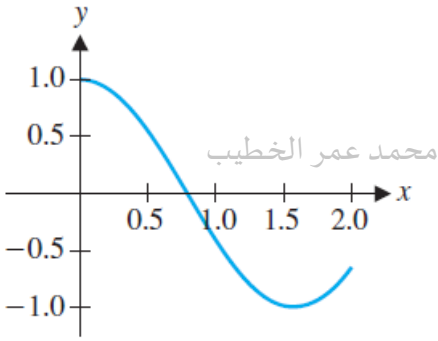
a.



b.



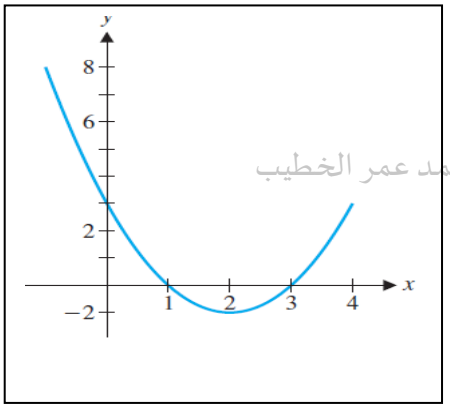
c.



---

(3) استخدم التمثيل البياني لترتيب القيم التالية تصاعدياً

$$\int_0^1 f(x)\,dx,\quad \int_0^2 f(x)\,dx,\quad \int_0^3 f(x)\,dx$$



(1) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=4-x^2$

---

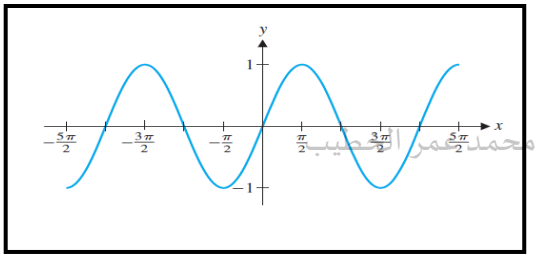
(2) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوف محور x وتحت المنحنى $f(x)=4x-x^2$

---

(3) اكتب التيكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x)=x^2-4$

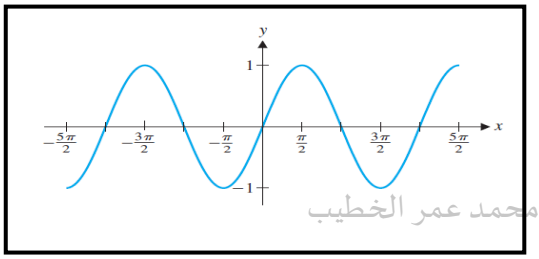
---

(4) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ ومحور x على الفترة $[0,\pi]$



---

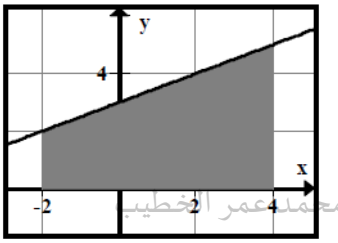
(5) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ محور x على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$



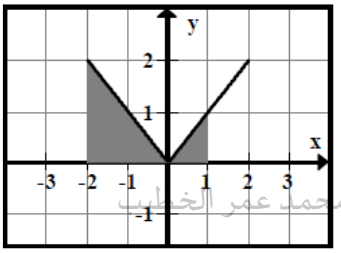
محمد عمر الخطيب

(1) استخدم قوانين (المساحات) في ايجاد

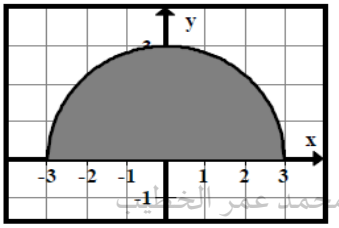
$(a)\quad \int_{-2}^{4} (\frac{1}{2}x+3)\,dx$



$(b)\quad \int_{-2}^{1} |x|\,dx$



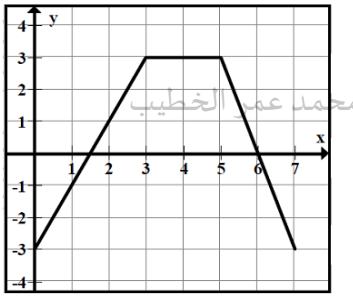
$(c)\quad \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$



---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، في ايجاد

(a) $\int_{0}^{7} f(x)\,dx$

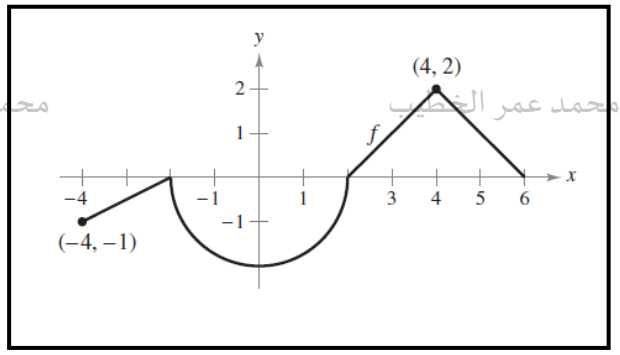


$(b)\quad \int_{0}^{7} |f(x)|\,dx$

---

(3) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، في ايجاد

(a) $\int_{-4}^{6} f(x)\,dx$



$(b)\quad \int_{-4}^{0} f(x)\,dx$

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

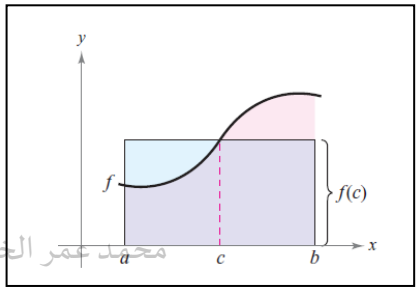
اذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فان القيمة المتوسطة للدالة f تساوي

$$f_{ave}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

نظريةالقيمة المتوسطة في التكامل

اذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فانة يوجد عدد مثل c ينتمي الى الفترة (a,b) بحيث

$$f(c)=f_{ave}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



اي ان المساحة تحت المنحنى $f(x)$ وفوق محور السينات على الفترة $[a,b]$ تساوي مساحة مستطيل احد ابعادة $b-a$

والبعد الثاني هو $f(c)$ حيث c تنتمي الى الفترة (a,b)

ويمكن استخدام هذه المتباينة لتقدير التكامل $(b-a)m \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)M$

حيث $m=Min(f)$, $M=Max(f)$

اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=2x-x^2$ على الفترة $[0,3]$

(1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=2x+1$ على الفترة $[0,4]$ ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية

---

(2) اذا كانت $f(x)=3x^2$ فأوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$

---

(3) اذا كانت $f(x)=\sin x$ فأوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2\pi]$

(1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ على الفترة $[0,2]$

ثم اوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$

---

(2) اذا كانت $f(x)=\begin{cases} x+4 & -4\le x\le -1 \\ -x+2 & -1< x\le 2 \end{cases}$

فاوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[-4,2]$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان $\int_{9}^{6} f(x)\,dx = 3$ ، $\int_{2}^{6} 2f(x)\,dx = 16$ ، $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 4$

فاوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ **على الفترة** $[0,9]$

---

(2) اذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ **على الفترة** $[0,2]$ **هي** 3 **والقيمة المتوسطة للدالة** $f(x)$ **على الفترة** $[2,5]$ **هي** 7 **فاوجد القيمة المتوسطة للدالة** $f(x)$ **على الفترة** $[0,5]$

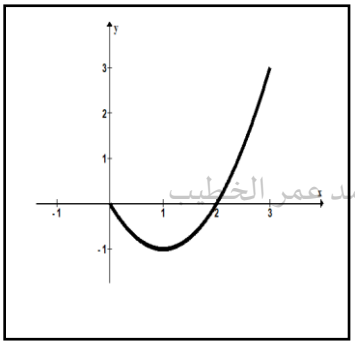
---

(3) اذا كانت $f(x)$ **دالة متصلة على الفترة** $[1,4]$ **وكانت القيمة المتوسطة للدالة** f **تساوي** 1

فأوجد قيمة $\int_{1}^{4} (2x - 5f(x))\,dx$

محمد عمر الخطيب

(1) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، بين ان $-3 \leq \int_0^3 f(x)\,dx \leq 9$



---

(2) بين ان $\sqrt{2}\pi \leq \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx \leq \pi$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

---

(3) بين ان $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx$ يقع بين 2 و $2\sqrt{2}$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

(استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدر قيمة التكامل)

---

(2) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_{-1}^1 \frac{3}{x^3+2}\,dx$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

(استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدر قيمة التكامل)

---

(3) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2\,dx$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

محمد عمر الخطيب

(1) تمثل الدالة $T(t)=30-2\pi\cos(\frac{\pi}{8}t)$ **درجة حرارة احدى المدن خلال السنة بالسيلسيوس حيث**

تمثل t **الشهور على مدار العام، احسب متوسط درجة حرارة المدينة خلال العام**

---

(2) تمثل الدالة $B(t)=400-0.3t$ **معدل مواليد احدى المدن بالالاف**

والدالة $D(t)=396+0.2t$ **معدل الوفيات لنفس المدينة بالالاف**

حيث تمثل t **الشهور**

عدد السكان	$p(t)$
معدل التغير في عدد السكان	$p'(t)$
$p'(t)=B(t)-D(t)$	

صافي التغير في عدد السكان

$$\Delta p=\int_0^{12}p'(t)\,dt$$

(أ) حدد الفترات التي يتزايد ويتناقص فيها عدد السكان خلال السنة

(ب) حدد الشهر الذي يصل فيه عدد السكان الى ذروته

(ج)اوجد صافي التغير في عدد السكان خلال سنة

(د) احسب متوسط صافي التغير في عدد السكان الشهري

تمثل الدالة $v(t)=6-2t$ السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم افقي من (نقطة الاصل)

(أ) حدد الدالة المكانية للجسم في اي لحظة

(ب) اوجد موقع الجسم بعد مرور 2 ثانية

(ج) اوجد الازاحة للجسم بعد مرور 5 ثواني

الازاحة تساوي التكامل

(د) اوجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور 5 ثواني

المسافة تساوي المساحة

محمد عمر الخطيب

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الاول)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و $F(x)$ هي الدالة الاصلية لـ f فان

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(1) إذا كانت $F(x) = x\ln x - x + c$ الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ فأوجد

$$\int_1^e f(x)\,dx$$

---

(2) إذا كانت $F(x)$ الدالة الاصلية للدالة $f(x) = 3x^2 + 5$ حيث $F(2) = 5$ فأوجد $F(1)$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{1}^{3}(3x^2+1)\,dx=$

---

(2) $\int_{1}^{4}(x\sqrt{x}+\frac{3}{x})\,dx=$

---

(3) $\int_{0}^{1}(6e^{-2x}+4)\,dx=$

---

(4) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$

---

(5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx=$

---

(6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=$

---

(7) $\int_{0}^{t}(e^{x/2})^2\,dx=$

---

(8) $\int_{0}^{t}(\sin^2 x+\cos^2 x)dx=$

محمد عمر الخطيب

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الثاني)

الحالة الأولى: الحد الأعلى x

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(x)$$

(1) اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

$(a)\quad F(x)=\int_1^x (t^2+2t+1)\,dt$

$(b)\quad F(x)=\int_2^x \sin^2 t\,dt$

$(c)\quad F(x)=\int_x^1 te^{2t}\,dt$

$(d)\quad F(x)=\int_0^{\pi/4} \tan t\,dt$

---

(2) اذا كان $\int_0^x f(t)\,dt=x\ln x-x$ ، فاوجد $f(e)$

---

(3) اذا كان $F(x)=\int_1^x \sqrt{4t^2-1}\,dt$ ، فاوجد $F(1)$ ، $F'(1)$

الحالة الثانية: الحد الأعلى $g(x)$ (استخدام قاعدة السلسلة والنظرية الاساسية)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(g(x))\times g'(x)$$

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x)=\int_1^{x^2}(t^3+2)\,dt$

---

(2) $F(x)=\int_0^{\sin x}\tan t\,dt$

---

(3) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{t^2}\,dt$

---

(4) $F(x)=\int_1^{xe^x}\sin t\,dt$

الحالة الثالثة : الحد الادنى و الحد الاعلى متغيرات (الحالة العامة)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$

فان $F'(x)=f(g(x))\times g'(x)-f(h(x))\times h'(x)$

او ممكن كتابة الدالة التكاملية

$$F(x)=\int_{h(x)}^{c} f(t)\,dt+\int_{c}^{g(x)} f(t)\,dt=\int_{c}^{g(x)} f(t)\,dt-\int_{c}^{h(x)} f(t)\,dt$$

وتطبيق الحالة الثانية

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x)=\int_{x}^{\sin x}(t^3+2)\,dt$

---

(2) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\cos t\,dt$

---

(3) $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{1}{t^2+1}\,dt$

محمد عمر الخطيب

أوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x)=\int_{2x}^{\sqrt{x}} \tan 3t \, dt$

(2) $F(x)=\int_{x}^{\sin^{-1}x} \sin t \, dt$

(3) $F(x)=\int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t \, dt$

(4) $F(x)=\int_{2-x}^{xe^{x}} 3t \, dt$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ ، **حيث** $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ **فاثبت ان** $F'(x)=-1$

---

(2) اذا كان $F(x)=x+\int_{\tan x}^{0}\frac{1}{t^2+1}\,dt$ ، **فاثبت ان** $F'(x)=0$

---

(3) اذا كان $g(x)=\int_{0}^{3x}\left(\int_{0}^{u}\sin t\;dt\right)du$ ، **فأوجد** $g''(x)$

مساعدة: افرض

$f(u)=\int_{0}^{u}\sin t\;dt$

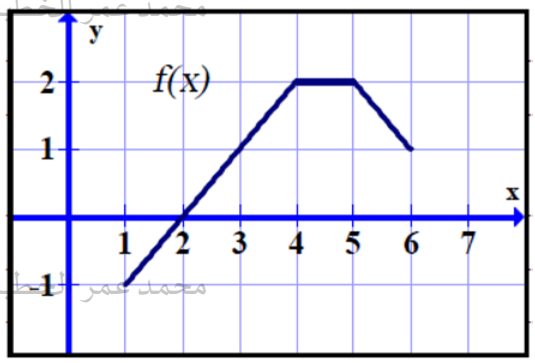
(1) اعتمد على الجدول التالي في ايجاد $h'(3)$ حيث

x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	−1	6	7

$$h(x)=\int_{1}^{g(x)} f(t)\,dt$$

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$



المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $\mathrm{H}(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt$

في الاجابة عن الاسئلة التالية

(a) H(3)

(b) H(6)

(c) H′(3)

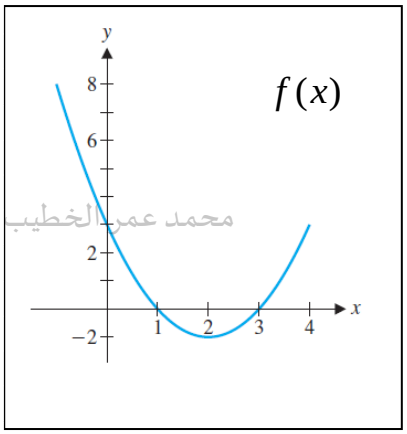
(d) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

(e) اوجد قيمة c التي تحقق القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

(f) اوجد فترة التزايد للدالة $\mathrm{H}(x)$ على الفترة $[1,6]$

(g) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $\mathrm{H}(x)$ قيمة صغرى محلية على الفترة $[1,6]$

(1) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على R حيث



$$H(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

في الاجابة عن الاسئلة التالية

(أ) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $H(x)$ .....

(ب) اوجد فترة التزايد للدالة $H(x)$ .....

(ج) اوجد فترة التناقص للدالة $H(x)$ .....

(د) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ قيمة عظمى محلية.....

(هـ) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ قيمة صغرى محلية.....

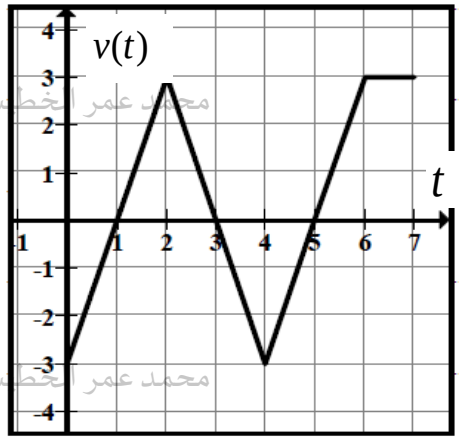
(و) اوجد فترة التقعر للاعلى للدالة $H(x)$ .....

(ي) اوجد فترة التقعر للاسفل للدالة $H(x)$ .....

(ل) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $H(x)$ نقطة انقلاب.....

---

(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل السرعة المتجهة $v(t)$ لجسم يتحرك على خط مستقيم



حيث دالة الموضع $s(t)=\int_0^t v(x)\,dx$

في الاجابة عن الاسئلة التالية

(أ) اوجد سرعة الجسم عند $t=5$ .....

(ب) اوجد تسارع الجسم عند $t=5$ .....

(ج) اوجد موقع الجسم عند $t=7$ .....

(د) اوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال 7 ثواني.....

الازاحة هي التكامل

المسافة هي المساحة

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد معادلة المماس للدالة y **عند** $x=2$ **حيث** $y=\int_{2}^{x}\cos(\pi t^3)\,dt$

---

(2) اوجد معادلة المماس للدالة $f(x)$ **عند** $x=0$ **حيث** $f(x)=\cos x+\int_{2x}^{x^2}e^{-t}\,dt$

---

(3) اوجد قيمة النهاية التالية باستخدام قاعدة لوبتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}(e^t-1)\,dt}{x^2}$$

---

(4) اذا كان $f(t)=\begin{cases}2 & 0\le t<1\\ 2t & 1\le t\end{cases}$ **دالة متصلة على الفترة** $[0,\infty)$ **فأوجد الدالة** $\mathrm{H}(x)$

حيث $\mathrm{H}(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=9-x^2$

---

(2) اوجد المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x)=x^2-2x$

---

(3) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ ومحور x حيث $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{4}$

---

(4) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\begin{cases}x & x<2\\ 2 & 2\le x\end{cases}$ ومحور x على الفترة $[0,5]$

يستخدم التكامل بالتعويض عندما نريد ايجاد تكامل حاصل ضرب او قسمة دالتين ، احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

ويكون التعويض عادة (1) ما بداخل القوس (2) ما تحت الجذر (3) الزاوية (4) الأس

ويعتبر هو الخيار الاقوى في التكامل

يعتبر التكامل بالتعويض العملية العكسية للاشتقاق باستخدام قاعدة السلسلة

ويمكن استخدام هذه القاعدة

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + c$$

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع وطرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

2) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها ال جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

3) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي حاصل ضرب او قسمة دالتين، احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x^2 (x^3+1)^5\, dx$

(2) $\int (2x+1)^5\, dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^x \sqrt{e^x + 1}\, dx$

---

(2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^4}}\, dx$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\, dx$

---

(4) $\int x e^{-x^2/2}\, dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

(3) $\int \frac{1}{x\ln\sqrt{x}}\,dx$

(4) $\int (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^{\ln x}(x^2-1)^3\,dx$

(2) $\int e^{\tan x+2\ln\sec x}\,dx$

(3) $\int \frac{e^{\cot x}}{1-\cos^2 x}\,dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{4}{x(\ln x+1)^2}\ dx$

---

(2) $\int \tan 2x\ dx$

---

(3) $\int \frac{(\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)}\, dx$

---

(2) $\int \sec x\, dx$

---

(3) $\int \csc x\, dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x\cos x^2\ dx$

(2) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\ dx$

(3) $\int x^2\sec^2 x^3\ dx$

(4) $\int e^x\cos(e^{x+1})\ dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \sin x \cos x \, dx$

---

(2) $\int \cos x \sin^3 x \, dx$

---

(3) $\int \sec^2 x \sqrt{\tan x} \, dx$

---

(4) $\int \sqrt{\tan x}(\sec x \tan x)^2 \, dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{(\sin x + 1)^3}{\sec x}\, dx$

---

(2) $\int \sin 2x \cos x \, dx$

---

(3) $\int \sin 3x \ \cos^5 3x \, dx$

---

(4) $\int x \sec^2 x^2 \ \tan x^2 \, dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$

(2) $\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{x^2+1}\, dx$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1} x}\, dx$

(4) $\int \frac{\sec^{-1} 2x}{|x|\sqrt{4x^2-1}}\, dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

---

(2) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

---

(3) $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$

اوجد التكاملات التالية (باكمال المربع)

عند اكمال المربع يجب إضافة

[نصف معامل x تربيع]

بشرط ان يكون معامل x تربيع

(1) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

---

(2) $\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,dx$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

(3) $\int \sqrt[3]{x^5-x^3}\,dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx$

---

(2) $\int x(x-2)^5\,dx$

---

(3) $\int \frac{t}{\sqrt{2t-1}}\,dt$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$

---

(2) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-25}}\,dx$

---

(3) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx$

---

(2) $\int \tan x \sec^4 x \, dx$

---

(3) $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3} \, dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة التكاملات المحدودة التالية

(1) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}\,dx$

---

(2) $\int_1^e \frac{1}{x+x\ln x}\,dx$

---

(3) $\int_0^2 \frac{4x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$

محمد عمر الخطيب

(1) اذا كان $\int_0^1 f(x)\,dx = -6$ ، **اوجد**

$(a)\quad \int_0^3 f(\frac{x}{3})\,dx$

$(b)\quad \int_1^2 2f(x-1)\,dx$

---

(2) اذا كان $f(4) = -5\,,\ f(1) = 3$ ، **فأوجد** $\int_1^2 x\ f'(x^2)\,dx$

---

(3) اذا كان $f(0) = 1\,,\ f(1) = 9$ ، **فأوجد** $\int_0^1 3\sqrt{f(x)}\ f'(x)\,dx$

(1) رصدت محطة الارصاد الجوية درجة الحرارة C° في احدى المدن بعد منتصف الليل فتبين انه يمكن نمذجتها بالعلاقة $T(t)=3-\frac{1}{3}(t-5)^2$ C°

حيث t هو الوقت بعد منتصف الليل

اوجد متوسط درجة الحرارة في المدينة في الفترة من الساعة 8 صباحاً الى 5 مساءً (الساعة 17)

---

(2) عند اجراء عملية لمريض يحقن بالبنج، وبعد مضي t ساعة يكون تركيز المخدر في دم المريض هو

$C(t)=\frac{3t}{(t^2+36)^{\frac{3}{2}}}$ mg/cm^2 حيث $C(t)$

اوجد متوسط تركيز المخدر في الدم اثناء الساعات الثمانية الاولى بعد حقن المريض

(1) اذا كانت $f(x)$ **دالة متصلة على الفترة** $[0,1]$ **فاثبت ان**

$$(1)\ \int_0^1 f(1-x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

---

(2) اذا كانت $f(x)$ **دالة متصلة على الفترة** $[0,a]$ **فيمكن اثبات ان** $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \frac{a}{2}$

استفد من العلاقة السابقة لتبين ان

$$(a)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

$$(b)\ \int_0^{10} \frac{\sqrt{10-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}\,dx = 5$$

الوحدة الخامسة ///// اسئلة الدرس الأول

اختر الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية

(1) الدالة الاصلية للدالة $f(x)=\sin 2x$ **هي**

(a) $F(x)=-\cos 2x+c$ (b) $F(x)=2\cos 2x+c$

(c) $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ (d) $F(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+c$

---

(2) $\int t^2(4t-\frac{1}{t^2})\ dt=$

(a) t^4-1 (b) t^4-t+c

(c) t^3-t+c (d) $4t^4-t+c$

---

(3) $\int \cos^2 x-\sin^2 x\ dx=$

(a) $\sin 2x+c$ (b) $\cos 2x+c$

(c) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ (d) $\frac{1}{2}\cos 2x+c$

---

(4) $\int(\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt{e^{2x}}})\ dx=$

(a) $2\ln|x|-e^x+c$ (b) $2\ln|x|+e^x+c$

(c) $2\ln|x|-e^{-x}+c$ (d) $2\ln|x|+e^{-x}+c$

(5) $\int \frac{x^{1/3}-3}{\sqrt[3]{x^2}}\ dx =$

(**a**) $\frac{3}{2}x^{2/3}-9x^{1/3}+c$ (**b**) $\frac{3}{2}x^{2/3}-3x^{1/3}+c$

(**c**) $\frac{3}{2}x^{2/3}-x^{1/3}+c$ (**d**) $\frac{2}{3}x^{2/3}-9x^{1/3}+c$

---

(6) $\int \frac{x}{x^2+1}\ dx =$

(**a**) $2\ln(x^2+1)+c$ (**b**) $\ln(x^2+1)+c$

(**c**) $\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)+c$ (**d**) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$

---

(7) $\int \sec x\,(\tan x-\sec x)\,dx =$

(**a**) $\sec x-\tan x+c$ (**b**) $-\sec x-\tan x+c$

(**c**) $\sec x+\tan x+c$ (**d**) $-\sec x+\tan x+c$

---

(8) $\int \sin^2 x\,dx =$

(**a**) $\frac{1}{2}(2x-\sin 2x)+c$ (**b**) $\frac{1}{2}(2x-\cos 2x)+c$

(**c**) $\frac{1}{4}(2x-\cos 2x)+c$ (**d**) $\frac{1}{4}(2x-\sin 2x)+c$

---

(9) $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\ dx =$

(**a**) $x-\cos x+c$ (**b**) $x+\cos x+c$

(**c**) $x+\sin x+c$ (**d**) $x-\sin x+c$

(10) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{x}} \; dx =$

(**a**) $e^{x}-e^{-x}+c$ (**b**) $e^{x}+e^{-x}+c$

(**c**) $\frac{1}{2}e^{2x}-e^{-x}+c$ (**d**) $\frac{1}{2}e^{2x}+e^{-x}+c$

---

(11) $\int \cot x \; dx =$

(**a**) $-\csc^{2} x+c$ (**b**) $\csc x \cot x+\mathrm{c}$

(**c**) $\ln|\cos x|+c$ (**d**) $\ln|\sin x|+\mathrm{c}$

---

(12) $\int \frac{3}{x^{2}+1} \; dx =$

(**a**) $3\ln(x^{2}+1)+c$ (**b**) $3x\ln|x|+c$

(**c**) $3\tan^{-1} x+c$ (**d**) $3\tan^{-1}(x^{2}+1)+c$

---

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{x^{4}-x^{2}}} \; dx =$

(**a**) $\sec^{-1} x+c$ (**b**) $\csc^{-1} x+c$

(**c**) $\sin^{-1} x+c$ (**d**) $\cos^{-1} x+c$

---

(14) $\int \frac{x^{2}+e^{3x}}{x^{3}+e^{3x}} \; dx =$

(**a**) $3\ln|x^{3}+e^{3x}|+c$ (**b**) $\ln|x^{3}+e^{3x}|+c$

(**c**) $\frac{1}{3}\ln|x^{3}+e^{3x}|+c$ (**d**) $\frac{1}{9}\ln|x^{3}+e^{3x}|+c$

(15) $\int e^{x^2+\ln 2x} \; dx =$

(a) $e^{x^2}+c$ (b) $2xe^{x^2}+c$

(c) $2e^{x^2}+c$ (d) $xe^{x^2}+c$

---

(16) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\, dx$

(a) $\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$ (b) $\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$

(c) $\tan^{-1}x+\ln(x^2+1)+c$ (d) $x+2\ln(x^2+1)+c$

---

(17) $\int \frac{\sec^3 x+e^{\sin x}}{\sec x} \; dx =$

(a) $\tan x+e^{\sin x}+c$ (b) $\tan x-e^{\sin x}+c$

(c) $\sec x+e^{\sin x}+c$ (d) $\sec x-e^{\sin x}+c$

---

(18) $\int 3x e^{x^2+1}\, dx =$

(a) $6e^{x^2+1}+c$ (b) $3e^{x^2+1}+c$

(c) $\frac{2}{3}e^{x^2+1}+c$ (d) $\frac{3}{2}e^{x^2+1}+c$

---

(19) $\int \csc^2 x \cos x \, dx =$

(a) $\csc x+c$ (b) $-\csc x+c$

(c) $\cot x+c$ (d) $-\cot x+c$

(20) $\int \frac{t+1}{t+2}\ dt =$

(**a**) $\ln|t+2|+c$ (**b**) $1-\ln|t+2|+c$

(**c**) $t-\ln|t+2|+c$ (**d**) $t+\ln|t+2|+c$

---

(21) $\int \frac{x}{x+2}\ dx =$

(**a**) $x\ln|x+2|+c$ (**b**) $x+2\ln|x+2|+c$

(**c**) $x-2\ln|x+2|+c$ (**d**) $x+\ln|x+2|+c$

---

(22) $\int \frac{1}{2x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\ dx =$

(**a**) $\frac{1}{2}\ln|x|+\sec x+c$ (**b**) $\frac{1}{2}\ln|x|-\csc x+c$

(**c**) $\frac{1}{2}\ln|x|+\sec x\tan x+c$ (**d**) $\frac{1}{2}\ln|x|+\tan x+c$

---

(23) $\int (1+e^{\tan x})\sec^2 x\ \ dx =$

(**a**) $\tan x+e^{\tan x}+c$ (**b**) $x+e^{\tan x}+c$

(**c**) $\tan x+\tan x\, e^{\tan x}+c$ (**d**) $1+e^{\tan x}+c$

(24) $\int \sec x \, dx$

(a) $\ln|\sec x + \tan x| + c$ (b) $\ln|\sec x - \tan x| + c$

(c) $\ln|\sec x \tan x| + c$ (d) $\ln|\sec x| + c$

---

(25) $\int (\sin x + x\cos x) \quad dx =$

(a) $x\sin x + c$ (b) $x\cos x + c$

(c) $\sin x \cos x + c$ (d) $\cos x - x\sin x + c$

---

(26) $\int \frac{1}{e^x + 1} dx =$

(a) $\ln|e^x + 1| + c$ (b) $-\ln|e^{-x} + 1| + c$

(c) $x + \ln|e^x + 1| + c$ (d) $-e^x + x + c$

---

(27) اذا كان $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ حيث $F(1) = 3$ فان $F(4)$ تساوي

(a) 16 (b) 19 (c) 2.5 (d) 13

---

(28) اذا كان $\int \frac{bx^2 + 10}{x^3 + 5x + 1} dt = 2\ln|x^3 + 5x + 1| + c$ فان قيمة b تساوي

(a) 3 (b) -3 (c) 6 (d) -6

محمد عمر الخطيب

(29) اذا كان $\int \frac{bx}{x^4+1}\,dx = \tan^{-1} x^2 + c$ فان قيمة الثابت b تساوي

(a) 4 (b) 2

(c) 1 (d) 8

---

(30) اذا كان $\int (3x^2 + f(x))\,dx = x^3 + \sin x + c$ فان $f(x)$

(a) $\sin x$ (b) $-\sin x$

(c) $\cos x$ (d) $-\cos x$

---

(31) اذا كان $\int \tan x \sec^n x = \frac{1}{3}\sec^3 x + c$ فان قيمة n تساوي

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

---

(32) اعتمد على الجدول المجاور الذي يمثل السرعة المتجهة لجسم في ازمنة مختلفة استخدم هذة البيانات لتقدير المسافة المقطوعة خلال اول 4 ثواني

t	0	1	2	3	4
$v(t)$	40	42	40	44	48

(a) 178 **(b)** 214 **(c)** 200 **(d)** 40

---

(33) اذا كانت $f'(x) = 3e^x + 2x$, $f(0) = 4$ فان $f(x)$ تساوي

(a) $f(x) = 3e^{3x} + x^2 + 4$ (b) $f(x) = 3e^x + x^2 + 4$

(c) $f(x) = e^{3x} + x^2 + 1$ (d) $f(x) = 3e^x + x^2 + 1$

(34) الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=10t+2$ حيث $s(0)=10$ هي

(a) $s(t)=t^2+2t+10$ (b) $s(t)=5t^2+2t$

(c) $s(t)=5t^2+2t+10$ (d) $s(t)=5t^2+t+10$

---

(35) اذا كانت دالة التسارع هي $a(x)=12t^2+4$ حيث $s(0)=1, v(0)=4$ فان $s(2)$ تساوي

(a) 37 (b) 33 (c) 25 (d) 32

---

(36) يتدفق الماء الى خزان ويتسرب منه حيث ان صافي معدل تغير الماء بالخزان في اي لحظة يعطى بالعلاقة $f(t)=20(t^2-1)$ متر مكعب بالساعة علما بان حجم الماء بالخزان هو 200 لتر عند الزمن صفر فان كمية الماء بالخزان بعد ثلاث ساعات سوف تكون

(a) 120 **(b)** 320 **(c)** 160 **(d)** 240

---

(37) اذا كانت $f''(x)=6x$ حيث $f(x)$ تمر بالنقطة $(0,1)$ ولها مماس افقي عند نفس النقطة فان الدالة $f(x)$ تساوي

(a) $f(x)=x^3+1$ (b) $f(x)=3x^2+1$

(c) $f(x)=x^3+x$ (d) $f(x)=x^3$

---

(38) اذ كانت تكلفة طباعة اول كتاب هي 1600 درهم وتعطى التكلفة الحدية بالعلاقة $c'(x)=\frac{200}{\sqrt{x}}$ لطباعة x نسخة من نفس النوع ، فان تكلفة طباعة 100 كتاب من نفس النوع هو

(a) 5200 **(b)** 3200 **(c)** 160000 **(d)** 2800

(1) يمكن كتابة الصيغة $\sum_{i=2}^{7}(4i-3)$ بدون رمز سيجما بالشكل

(a) $5,9,13,17,21,25,29$

(b) $5,9,13,17,21,25$

(c) $5+9+13+17+21+25$

(d) $5+9+13+17+21+25+29$

---

(2) يمكن كتابة التعبير $2+5+8+11+\ldots+65$ باستخدام الرمز سيجما

(a) $\sum_{i=1}^{32}2i+1$

(b) $\sum_{i=1}^{22}3i-1$

(c) $\sum_{i=1}^{65}3i-1$

(d) $\sum_{i=1}^{20}3i-1$

---

(3) يمكن كتابة التعبير $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\ldots-\frac{1}{900}$ باستخدام الرمز سيجما

(a) $\sum_{i=1}^{30}\frac{-1}{i^2}$

(b) $\sum_{i=1}^{30}\frac{1}{i^2}$

(c) $\sum_{i=1}^{30}\frac{(-1)^i}{i^2}$

(d) $\sum_{i=1}^{30}\frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$

---

(4) ان ناتج $\sum_{i=1}^{20}(2i+1)$ يساوي

(a) 440 **(b)** 401 **(c)** 230 **(d)** 411

(5) $\sum_{i=1}^{20}(i-1)(i+1)$

(**a**) $\frac{20\times21\times41}{6}-1$ (**b**) $\frac{20\times21\times41-1}{6}$

(**c**) $\frac{20\times21\times41}{6}-20$ (**d**) $\frac{20\times21\times41}{2}-20$

---

(6) $\sum_{i=1}^{20}i^2-\sum_{i=1}^{4}i^2=$

(**a**) $\sum_{i=1}^{20}i^2$ (**b**) $\sum_{i=5}^{20}i^2$

(**c**) $\sum_{i=4}^{20}i^2$ (**d**) $\sum_{i=1}^{16}i^2$

---

(7) $\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{n^2}$

(**a**) $\frac{n+1}{3n}$ (**b**) $\frac{n+3}{2n}$

(**c**) $\frac{n+1}{2n}$ (**d**) $\frac{2n}{n+3}$

---

(8) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}$

(**a**) 1 (**b**) ∞

(**c**) $\frac{1}{3}$ (**d**) $\frac{2}{3}$

محمد عمر الخطيب

(9) ان ناتج مجموع مربعات اول 20 عدد طبيعي هو

(**a**) $\sum_{i=1}^{20} i^2 = 2870$ (**b**) $\sum_{i=0}^{19} i^2 = 2470$

(**c**) $(\sum_{i=1}^{20} i)^2 = 44100$ (**d**) $\sum_{i=1}^{21} i^2 = 3311$

---

(10) اذا كان $\sum_{i=1}^{10} (2i + c) = 140$ فان قيمة c تساوي

(**a**) 30 (**b**) 3

(**c**) 2 (**d**) 1

---

(11) ان ناتج $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i}$ يساوي

(**a**) $\frac{1}{e-1}$ (**b**) $\frac{e}{e-1}$ (**c**) $\frac{1}{e^2-e}$ (**d**) $\frac{e}{e^2-1}$

---

(12) ان مجموع قيم الدالة $f(x) = 3x + 1$ عند $x = 0.1 \ , 0.2 \ , \ 0.3 \ , ...,10$ يساوي

(**a**) 26.5 (**b**) 1516

(**c**) 1615 (**d**) 1545

---

(13) ان مجموع قيم الدالة $f(x) = x^2$ عند $x = 0.1 \ , 0.2 \ , \ 0.3 \ , ...,4$ يساوي

(**a**) 6724 (**b**) 221.4

(**c**) 672.4 (**d**) 2214

محمد عمر الخطيب

(1) طول الفترة الجزئية المنتظمة للفترة $[-1,2]$ التي عدد عناصرها 15 هي

(a) $\frac{3}{14}$ **(b)** $\frac{3}{15}$ **(c)** $\frac{1}{15}$ **(d)** $\frac{1}{14}$

---

(2) التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 11 للفترة $[0,2]$ هي

(a) $P=\left\{0,\frac{2}{11},\frac{4}{11},...,2\right\}$ **(b)** $P=\left\{0,\frac{1}{11},\frac{2}{11},...,2\right\}$

(c) $P=\left\{0,\frac{2}{10},\frac{4}{10},...,2\right\}$ **(d)** $P=\left\{0,\frac{1}{10},\frac{2}{10},...,2\right\}$

---

(3) العنصر السابع في التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 30 للفترة $[2,5]$ هو

(a) $2+\frac{3}{31}\times 6$ **(b)** $2+\frac{3}{30}\times 6$

(c) $2+\frac{3}{29}\times 6$ **(d)** $2+\frac{3}{30}\times 7$

---

(4) ان القيمة التقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=3x^2$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم نقطة النهاية اليمنى

(a) 14 **(b)** 22.5 **(c)** 90 **(d)** 64

(5) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0,1]$ حيث قواعد القيم نقطة النهاية اليسرى

x	0.0	0.25	0.50	0.75	1
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.8

(a) 1.8 **(b)** 1.325 **(c)** 5.8 **(d)** 7.2

---

(6) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

(a) 1.81 **(b)** 1.74 **(c)** 1.67 **(d)** 16.7

---

(7) احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ لقيم x_i المعطاه

$f(x)=3x+5$ $x=0.4,0.8,1.2,1.6,2$ $\Delta x=0.4,\quad n=5$

(a) 48 **(b)** 17.2 **(c)** 2.4 **(d)** 6

---

(8) ان القيمة التقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمستقيم $f(x)=2x$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام 16 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى يساوي

(a) 16 (b) 15

(c) 17 (d) 15.5

(9) المساحة تحت المنحنى $f(x)=x^2$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان) تعطى بالعلاقة

(a) $\lim_{n\to\infty}\frac{64}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$

(b) $\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2$

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{64}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3$

(d) $\lim_{x\to\infty}\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^3$

---

(10) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة و $f(x)\geq 0$ على الفترة $[0,1]$ حيث $A_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2$

فان المساحة المحسورة بين الدالة $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0,1]$ تساوي

(a) $\frac{1}{6}$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) 1

(d) 2

---

(11) اذا كان مجموع ريمان للدالة $f(x)=x^2$ على الفترة $[0,1]$ هو $\frac{2}{3}$ حيث نقاط القيم هي c,d فاي من العلاقات التالية صحيحة

(a) $c^2+d^2=\frac{4}{3}$

(b) $c^2+d^2=\frac{2}{3}$

(c) $c^2+d^2=\frac{1}{3}$

(d) $c^2+d^2=\frac{4}{9}$

---

(1) اذا كان $\int_1^3 f(x)\,dx = 3$ و $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$ فان $\int_3^1 [2f(x) - g(x)]\,dx$ يساوي

(a) 8 (b) -8 (c) 4 (d) -5

---

(2) $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx =$

(a) $-\int_0^1 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^1 f(x)\,dx$

(c) 0 (d) $2\int_0^1 f(x)\,dx$

---

(3) اذا كانت $\int_1^7 (g(x)+1)dx = 10$ فان $\int_7^1 3g(x)\,dx$

(a) 12 (b) -12

(c) 27 (d) -27

---

(4) اذا كان $\int_1^5 f(x)\,dx = -7$ ، $\int_1^3 2f(x)\,dx = 10$ فان $\int_3^5 f(x)\,dx$ يساوي

(a) 17 (b) 12

(c) -17 (d) -12

محمد عمر الخطيب

(5) اذا كانت $\int_{-2}^{3k+10} f(x)\,dx = 0$ **فان قيمة** k **تساوي**

(a) 4 **(b)** -4 **(c)** 0 **(d)** -2

---

(6) اذا كانت $\int_{6}^{2x} f(t)\,dt = \cos(x-3)+k$ **فان قيمة** k **تساوي**

(a) 3 **(b)** 1 **(c)** -1 **(d)** 6

---

(7) اذا كانت $f(x)$ **دالة متصلة حيث** $\int_{2}^{2x} f(t)\,dt = 4x^2+bx-1$ **فان قيمة** b **تساوي**

(a) 3 **(b)** -3 **(c)** 1 **(d)** 5

---

(8) اذا كانت $\int_{0}^{3}(3x^2+k)\,dx = 3$ **فان قيمة** k **تساوي**

(a) 24 **(b)** -24 **(c)** 8 **(d)** -8

---

(9) اذا كانت $f(x) = g(x)+7$ **على الفترة** $[3,5]$ **فان** $\int_{3}^{5}[f(x)+g(x)]\,dx =$ **تساوي**

(a) $2\int_{3}^{5} g(x)\,dx+7$ **(b)** $2\int_{3}^{5} g(x)\,dx+28$

(c) $2\int_{3}^{5} g(x)\,dx+14$ **(d)** $\int_{3}^{5} g(x)\,dx+7$

محمد عمر الخطيب

(10) اذا كان $\int_1^c (2x-1)\,dx + k = \int_5^c (2x-1)\,dx$ فان قيمة k تساوي

(**a**) 20 (**b**) -20

(**c**) 8 (**d**) -8

---

(11) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx =$

(**a**) π (**b**) 2π

(**c**) $\frac{\pi}{2}$ (**d**) $\frac{\pi}{4}$

---

(12) $\int_0^1 \sqrt{x}(x+1)\,dx =$

(**a**) $\frac{7}{5}$ (**b**) $\frac{16}{15}$

(**c**) 1 (**d**) 2

---

(13) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx =$

(**a**) 1 (**b**) $\ln\sqrt{2}$

(**c**) $\frac{\pi}{4}$ (**d**) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

محمد عمر الخطيب

(14) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx =$

استعن بمساحة الدائرة

(a) π (b) 2π

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

---

(15) $\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx =$

استعن بمساحة الدائرة

(a) πa^2 (b) $2\pi a^2$

(c) $\frac{1}{2}\pi a^2$ (d) $\frac{1}{4}\pi a^2$

---

(16) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}4 & x\geq 2\\ 2x & x<2\end{cases}$ فان $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$ يساوي

(a) 4 (b) 8

(c) 12 (d) 16

---

(17) $\int_{-2}^{2} |x|\,dx =$

(a) 0 (b) 2

(c) 4 (d) 8

محمد عمر الخطيب

(18) اذا كانت $f(x)=|2x-2|$ **فان** $\int_0^3 f(x)\,dx$ **يساوي**

(**a**) 6 (**b**) 4

(**c**) 3 (**d**) 5

---

(19) اذا كان $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ **، فان** $\int_{-5}^{3} f(x)\,dx$ **يساوي**

(**a**) -2 (**b**) 2

(**c**) 8 (**d**) 0

---

(20) ان قيمة c **التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة في التكامل حيث** $\int_0^2 3x^2\,dx(=8)$ **هي**

(**a**) $\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (**b**) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(**c**) $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (**d**) $\sqrt{\dfrac{8}{3}}$

---

(21) اذا كان القيمة المتوسطة في التكامل للدالة $f(x)=3x^2+1$ **على الفترة** $[0,4]$ **تساوي** 17 **فان قيمة (قيم)** c **التي تحقق النظرية هي**

(**a**) $-\dfrac{4}{\sqrt{3}},\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ (**b**) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(**c**) $\dfrac{16}{\sqrt{3}}$ (**d**) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(22) اذا كانت $f(x)=4x^3$ فان قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$ هي

(a) $\pm\sqrt{2}$ (b) $\pm\sqrt[3]{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt[3]{2}$

---

(23) اذا كانت $f(x)=\sin x$ فان قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2\pi]$ هي

(a) $0,\pi,2\pi$ (b) 0 (c) 2π (d) π

---

(24) اذا كانت القيمة المتوسط في التكامل للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ على الفترة $[0,k]$ تساوي 2 فان قيمة k تساوي

(a) 3 (b) 4 (c) 6 (d) 9

---

(25) مساحة المنطقة المحصورة بين الدالة $f(x)=4-x^2$ ومحور السينات تساوي مساحة مستطيل طوله 4 وحدات وعرضه

(a) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{8}{3}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{10}{3}$

---

(26) اذا كان $\int_9^6 f(x)\,dx=3$ ، $\int_2^6 f(x)\,dx=5$ فان القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[2,9]$ تساوي

(a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{8}{7}$ (d) $\frac{4}{7}$

محمد عمر الخطيب

(27) اذا كان $|f(x)| \le 0.1$ على الفترة $[-1,2]$ فان اقل قيمة للتكامل $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ هي

(a) -0.1 **(b)** 0.3

(c) -0.3 **(d)** 0

---

(28) ان حدود التكامل $\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx$ المناسبة باستخدام نظرية القيمة المتوسطة بالتكامل هما

(a) $1, e$ **(b)** $0, 1$

(c) $\frac{1}{e}, 1$ **(d)** $\frac{1}{e^2}, 1$

---

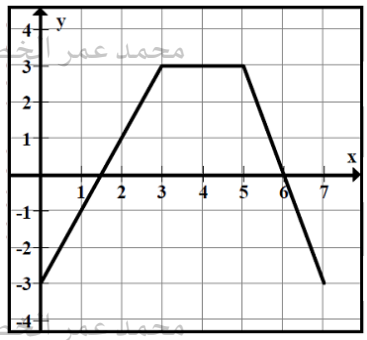
(29) للحصول على افضل تقريب للتكامل $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx$ فانه يقع بين

(a) $\pi, \sqrt{2}\pi$ **(b)** $1, \sqrt{2}\pi$

(c) $0, \pi$ **(d)** $\sqrt{2}\pi, 2\pi$

---

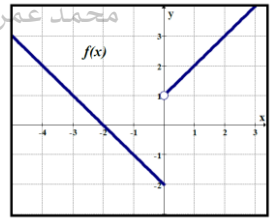
(30) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f



ان قيمة $\int_{0}^{7} f(x)\,dx$ تساوي

(a) 13.5 **(b)** 11.5 **(c)** 6 **(d)** 12

(31) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f

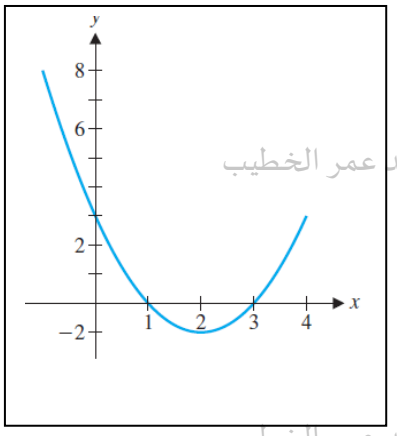


ان قيمة $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ تساوي

(a) 6 **(b)** 4 **(c)** 2 **(d)** 0

---

(32) بالاعتماد على التمثيل البياني الذي يمثل $f(x)$ اي من العبارات التالية صحيحة



(a) $\int_{0}^{1} f(x)\,dx < \int_{0}^{2} f(x)\,dx < \int_{0}^{3} f(x)\,dx$

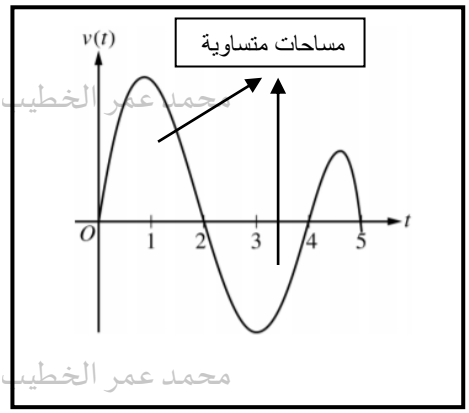
(b) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx < \int_{0}^{1} f(x)\,dx < \int_{0}^{3} f(x)\,dx$

(c) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx < \int_{0}^{2} f(x)\,dx < \int_{0}^{1} f(x)\,dx$

(c) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx < \int_{0}^{1} f(x)\,dx < \int_{0}^{2} f(x)\,dx$

---

(33) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $v(t)$



اذا كانت المساحة بين المنحنى ومحور x على الفترة $[0,5]$ هي 13 و $\int_{0}^{5} v(t)\,dt = 3$ فان $\int_{2}^{4} v(t)\,dt$ يساوي

(a) 10 **(b)** -5

(c) 5 **(d)** -10

محمد عمر الخطيب

(34) التكامل المحدود الذي يعبر عن نهاية مجموع ريمان $\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin {c_i}^2\Delta x$ على الفترة $[0,2]$ هو

(**a**) $\int_0^2 \sin^2 x\,dx$ (**b**) $\int_0^2 \sin x\,dx$

(**c**) $\int_0^2 x\sin x^2\,dx$ (**d**) $\int_0^2 \sin x^2\,dx$

---

(35) اذا كان مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,2]$ هو $2+\frac{3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

فان $\int_0^2 f(x)\,dx$ يساوي

(**a**) 2 (**b**) 3

(**c**) 6 (**d**) 2.5

---

(36) ان $\int_2^5 x^2\,dx$ باستخدام نهاية مجموعة ريمان يساوي

(**a**) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(2+\frac{i}{n})^2\frac{1}{n}$ (**b**) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(2+\frac{i}{n})^2\frac{3}{n}$

(**c**) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(2+\frac{3i}{n})^2\frac{1}{n}$ (**d**) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(2+\frac{3i}{n})^2\frac{3}{n}$

---

(37) اذا كانت $f(x)=3x^2$ على الفترة $[0,2]$ فان $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ يساوي

(**a**) 4 (**b**) 8

(**c**) 12 (**d**) 2

محمد عمر الخطيب

(38) اذا كان مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,4]$ هو $\sum_{i=1}^{n}(\frac{6}{n}i+1)\frac{1}{n}$ فان

$\int_{0}^{4} f(x)\,dx$ يساوي

(a) 6 (b) 7

(c) 3 (d) 4

---

(39) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}}\frac{2}{n}$

(a) e^2-1 (b) e^2+1

(c) $e^{-2}-1$ (d) $e^{-2}+1$

---

(40) ان افضل تقدير للتكامل $\int_{-1}^{1}\frac{3}{x^3+2}\,dx$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة بالتكامل يكون محصورين بين العددين

(a) $1,3$ (b) $0,3$

(c) $0,2$ (d) $2,6$

---

(41) $\int_{1}^{8}\sqrt{x^{-\frac{2}{3}}}\,dx=$

(a) 3 (b) 9

(c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{9}{2}$

(1) $\int_{-1}^{1} \frac{4}{1+x^2}\,dx =$

(a) π (b) 2π

(c) 0 (d) 4π

---

(2) $\int_{0}^{t} \sin^2 x + \cos^2 x\,dx =$

(a) 1 (b) t

(c) $t+1$ (d) $t-1$

---

(3) $\int_{1}^{e} \frac{t-3}{t}\,dt =$

(a) $e-4$ (b) $e+2$

(c) $e-2$ (d) e

---

(4) $\int_{0}^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

(5) $\int_1^4 (x\sqrt{x}+\frac{3}{x})\,dx =$

(a) $\frac{62}{5}+3\ln 4$ (b) $\frac{62}{5}-3\ln 4$

(c) $\frac{19}{3}$ (d) $\frac{19}{3}+3\ln 4$

---

(6) $\int_0^2 \frac{e^{2x}-2e^{3x}}{e^{3x}}\,dx =$

(a) $-\frac{1}{e}-3$ (b) $-\frac{1}{e^2}+3$

(c) $-\frac{1}{e}+3$ (d) $-\frac{1}{e^2}-3$

---

(7) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx =$

(a) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}-1$

(c) $\sqrt{2}-1$ (d) $\sqrt{2}+1$

---

(8) اذا كانت الدالة $f(x)=\int_x^2 \sec t\,dt =$ فان $f'(x)$ تساوي

(a) $\sec x$ (b) $\sec x-2$

(c) $-\sec x$ (d) $-\sec x\tan x$

محمد عمر الخطيب

(9) اذا كانت الدالة $f(x)=\int_1^2 (t^3-5t)\,dt$ فان $f'(x)$ تساوي

(a) 0 (b) 1

(c) $3t^3-5$ (d) t^3-5t

---

(10) اذا كانت الدالة $f(x)=\int_{x^2}^{x^3} \sin 3t\,dt$ فان $f'(x)$ تساوي

(a) $3x^2\cos 3x^3-2x\cos 3x^2$ (b) $\sin 3x^3-\sin 3x^2$

(c) $x^3\sin 3x^3-x^2\sin 3x^2$ (d) $3x^2\sin 3x^3-2x\sin 3x^2$

---

(11) $\dfrac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} \dfrac{1}{t^2+1}\,dt=$

(a) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(x^2+1)}$ (b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$

(c) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ (d) $\dfrac{1}{(x+1)}$

---

(12) $\dfrac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt=$ $\quad x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

(a) 1 (b) -1

(c) $\sin x$ (d) $\cos x$

محمد عمر الخطيب

(13) اذا كانت الدالة $f(x)=5+\int_{2}^{2x} e^{-t^2}\,dt$ **فان**

(a) $f'(x)=e^{-x^2}\ ,\ f(0)=5$ **(b)** $f'(x)=e^{-x^2}\ ,\ f(1)=5$

(c) $f'(x)=2e^{-4x^2}\ ,\ f(0)=5$ **(d)** $f'(x)=2e^{-4x^2}\ ,\ f(1)=5$

---

(14) اذا كانت الدالة $F(x)$ **هي الدالة الاصلية للدالة** $f(x)=2x$ **حيث** $F(1)=5$ **فان** $F(3)$ **تساوي**

(a) 13 **(b)** 7

(c) 6 **(d)** 9

---

(15) اعتمد على الجدول التالي حيث $h(x)=\int_{1}^{g(x)} f(t)\,dt$

x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	−1	6	7

ان $h'(3)$ **تساوي**

(a) -2 **(b)** 1 **(c)** -1 **(d)** 2

---

(16) اذا كانت $f(x)$ **دالة متصلة حيث** $\int_{1}^{x} f(t)\,dt=e^{\sin 2x}-\ln\cos x-1$ **فان** $f(0)$ **تكون**

(a) 1 **(b)** 2

(c) e **(d)** $2e$

---

(17) اذا كانت $\int f'(x)\,dx=x^3+9x$ **حيث** $f(2)=7$ **فان قيمة** $f(-1)$ **تساوي**

(a) -29 **(b)** -19 **(c)** -9 **(d)** 26

محمد عمر الخطيب

(18) $\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x e^{t^2}\, dt}{x^2-1} =$

(a) 0 (b) 1

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}e$

---

(19) اذا كان $\int_0^{2x} f(t)\, dt = 3x^3 - x + 5$ فان $f(2)$

(a) 8 (b) 27

(c) 7 (d) 4

---

(20) اذا كان $\int_0^k 2kx - x^2\, dx = 18$ فان قيمة k تساوي

(a) -3 (b) 3

(c) -9 (d) 9

---

(21) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int_1^{2x} f(t)\, dt = 2x^2 - 2x + 1$ فان $f(x)$ تكون

(a) $4x-1$ (b) $x-2$

(c) $x-1$ (d) $8x-2$

(22) ان التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=x^2-4$ ومحور السينات هو

(a) $\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,dx$

(b) $-\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,dx$

(c) $\int_{0}^{4}(x^2-4)\,dx$

(d) $-\int_{0}^{4}(x^2-4)\,dx$

---

(23) ان المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ ومحور السينات على الفترة $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ تساوي

(a) $\sqrt{2}$

(b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

---

(24) ان المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=4x-x^2$ ومحور السينات تساوي

(a) $\frac{64}{3}$

(b) $\frac{32}{3}$

(c) $\frac{16}{3}$

(d) $\frac{8}{3}$

---

(25) ان معادلة المماس للدالة $H(x)$ عند $x=1$ حيث $H(x)=\int_{1}^{x^2}2t-1\,dt$ هي

(a) $y=2x-1$

(b) $y=2x-2$

(c) $y=2x-3$

(d) $y=2x$

(26) اذا كانت $F(x)$ دالية اصلية للدالة $f(x)$ المتصلة على $[-1,3]$ وكان منحنى الدالة $F(x)$ يمر بالنقطتين $(3,2)\ ,\ (-1,-4)$ فان $\int_{-1}^{3}(f(x)+1)\,dx$ يساوي

(a) 14 (b) 7

(c) 13 (d) 10

---

(27) اذا كانت دالة السرعة المتجهة لأحد لاعبي القفز الحر هي $v(x)=9(1-e^{-t})$ متر / ثانية فان المسافة التي يقطعها اللاعب خلال اول 5 ثواني هي

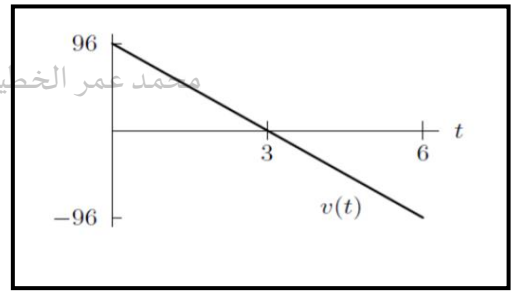
(a) 36 (b) 18

(c) 27 (d) 45

---

(28) يمثل الشكل المجاور العلاقة بين الزمن والسرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم

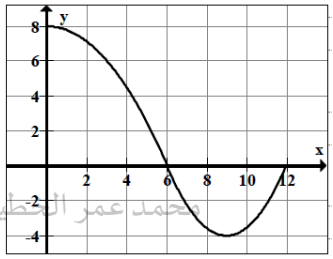
فان المسافة التي يقطعها الجسم خلال أول 6 ثواني



(a) 0 (b) 192

(c) 144 (d) 288

(29) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $[0,12]$ حيث



$$H(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

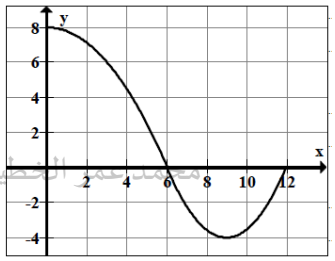
ان فترة التزايد للدالة $H(x)$ هي

(a) $(0,6)$ (b) $(0,9)$

(c) $(6,12)$ (d) $(0,12)$

---

(30) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $[0,12]$ حيث



$$H(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

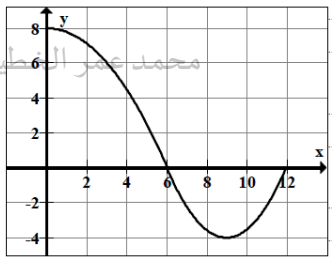
ان القيمة العظمى المطلقة للدالة $H(x)$ تكون عند

(a) 0 (b) 6

(c) 9 (d) 12

---

(31) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $[0,12]$ حيث



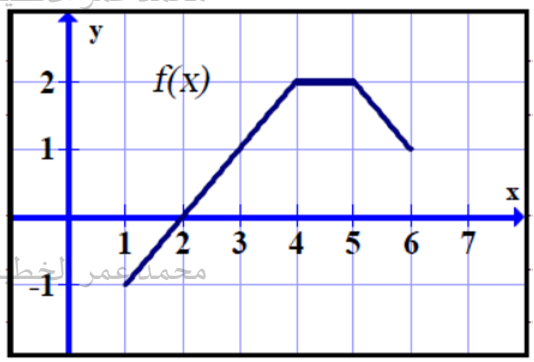
$$H(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

ان فترة التقعر للاعلى للدالة $H(x)$ هي

(a) $(6,12)$ (b) $(0,9)$

(c) $(9,12)$ (d) $(0,12)$

(32) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$



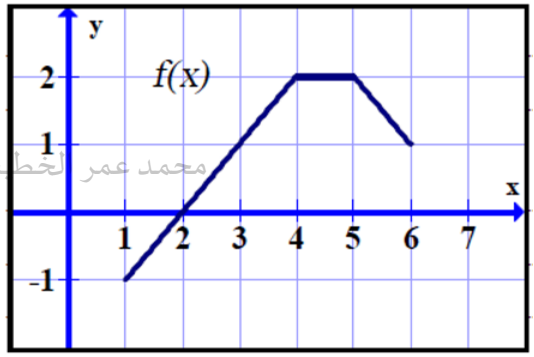
المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $H(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

ان $H(3)$ تساوي

(a) 1 **(b)** 0 **(c)** 2 **(d)** 3

---

(33) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$



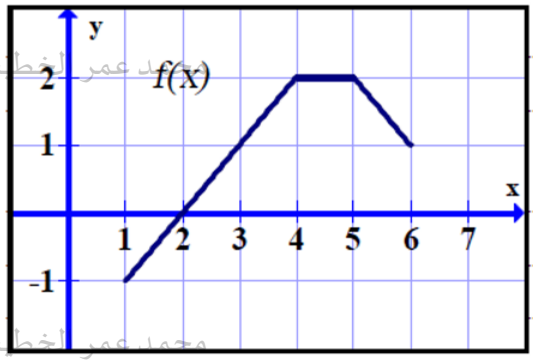
المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $H(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

ان $H'(4)$ تساوي

(a) 0 **(b)** 1 **(c)** 2 **(d)** 2.5

---

(34) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$

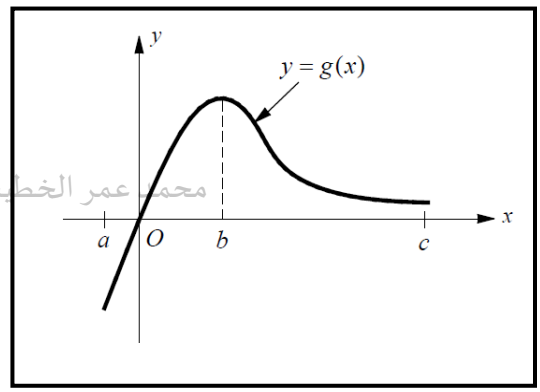


المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $H(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

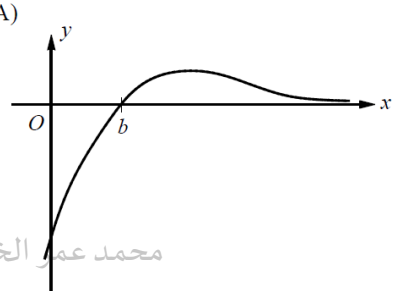
ان القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$ تساوي

(a) 0 **(b)** 1 **(c)** 5 **(d)** 1.2

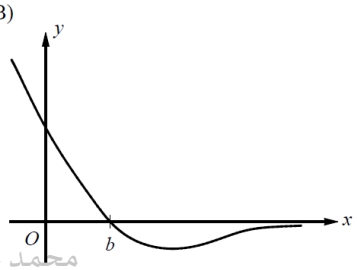
(35) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة المتصلة $g(x)$ على الفترة $[a,c]$ حيث $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ لتحديد التمثيل البياني للدالة $f(x)$



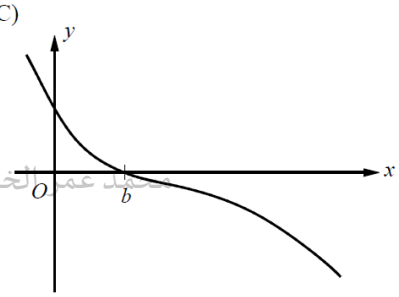
(A)



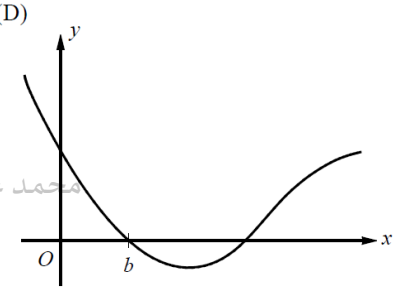
(B)



(C)



(D)



---

(36) اذا كان كل من $F(x)$ و $G(x)$ دوال اصلية للدالة $h(x)$ المتصلة على $[0,4]$ وكان $\int_0^4 (F(x)-G(x))\,dx=12$ فان $\int_0^4 (F(x)-G(x))x^2\,dx$ يساوي

(**a**) 16

(**b**) 64

(**c**) 32

(**d**) 48

(37) اذا كان $f(x)=\int_0^x (t^2-3t+2)\,dt$ **فان للدالة** $f(x)$ **قيمة عظمى محلية عند**

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) -1

---

(38) اذا كان $F(x)=\int_{-2}^{x^2-6x} e^t\,dt$ **فان للدالة** $F(x)$ **قيمة صغرى محلية عند**

(a) -3 (b) 3

(c) $0,6$ (d) 6

---

(39) اذا كان $\int (f(x)+2x)\,dx = x^3+a\,x+1$ **حيث** $f(1)=5$

فان قيمة الثابت a **هو**

(a) 12 (b) 4

(c) 2 (d) -3

---

(40) اذا كان $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx = k$ **و** $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x\,dx = l$ **فان** $k+l$ **يساوي**

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) 0 (d) 1

محمد عمر الخطيب

(41) اذا كان $f(x)=\begin{cases}2 & 0\le x<1\\ 2x & 1\le x\end{cases}$ **دالة متصلة على الفترة** $[0,\infty)$ **حيث**

$$H(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

فان $H(x)$ **تساوي**

(**a**) $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ x^2 & 1\le x\end{cases}$ (**b**) $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ x^2+1 & 1\le x\end{cases}$

(**c**) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & 0\le x<1\\ x^2 & 1\le x\end{cases}$ (**d**) $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ x^2+2 & 1\le x\end{cases}$

---

(42) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n}+\frac{n+3}{n}+\ldots+\frac{2n}{n}\right]=$

استعن بتعريف التكامل

(**a**) 1 (**b**) 2

(**c**) $\frac{3}{2}$ (**d**) $\frac{1}{2}$

---

(43) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]=$

(**a**) $\frac{4}{\pi}$ (**b**) $\frac{-2}{\pi}$

(**c**) $\frac{2}{\pi}$ (**d**) $\frac{-4}{\pi}$

(1) $\int x^2(x^3+1)^5\,dx =$

(a) $\frac{1}{6}(x^3+1)^6+c$ (b) $\frac{1}{18}(x^3+1)^6+c$

(c) $(x^3+1)^6+c$ (d) $6(x^3+1)^6+c$

---

(2) $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}\,dx =$

(a) $\frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{3}{2}}+c$ (b) $\frac{3}{2}(\tan x)^{\frac{3}{2}}+c$

(c) $\frac{1}{3}(\sec x)^3+c$ (d) $\frac{2}{3}(\sec x)^{\frac{3}{2}}+c$

---

(3) $\int \sin x\cos^6 x\,dx =$

(a) $\frac{1}{7}\cos^7 x+c$ (b) $-\frac{1}{7}\cos^7 x+c$

(c) $\frac{1}{2}\sin^2 x+c$ (d) $-\frac{1}{2}\sin^2 x+c$

---

(4) $\int x^2\cos x^3\,dx =$

(a) $\frac{1}{3}\sin x^3+c$ (b) $-\frac{1}{3}\sin x^3+c$

(c) $\frac{x^3}{3}\sin x^3+c$ (d) $-\frac{x^3}{3}\sin x^3+c$

(5) $\int \frac{x^2}{e^{x^3}}\, dx =$

(**a**) $-\frac{1}{3}e^{x^3}+c$ (**b**) $\frac{x^3}{3e^{x^3}}+c$

(**c**) $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+c$ (**d**) $-\frac{1}{3}\ln e^{x^3}$

---

(6) $\int \tan 2x\, dx =$

(**a**) $\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+c$ (**b**) $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+c$

(**c**) $\ln|\cos 2x|+c$ (**d**) $-\ln|\cos 2x|+c$

---

(7) $\int \frac{1}{x(\ln x+1)^2}\, dx =$

(**a**) $\frac{-1}{\ln x+1}+c$ (**b**) $\frac{1}{\ln x+1}+c$

(**c**) $\frac{-1}{(\ln x+1)^3}+c$ (**d**) $\frac{9}{x^3(\ln x+1)^3}+c$

---

(8) $\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{x^2+1}\, dx =$

(**a**) $(\tan^{-1}x)^3+c$ (**b**) $(x^2+1)^3+c$

(**c**) $\frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3+c$ (**d**) $\frac{1}{3}(x^2+1)^3+c$

(9) $\int \frac{1}{4x^2+25}\ dx =$

(**a**) $\frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{2x}{5}+c$ (**b**) $\frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{5x}{2}+c$

(**c**) $\frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{5}+c$ (**d**) $\frac{1}{10}\tan^{-1}\frac{2x}{5}+c$

---

(10) $\int \sqrt[3]{x^5-x^3}\ dx =$

(**a**) $\frac{3}{4}(x^5-x^3)^{\frac{4}{3}}+c$ (**b**) $\frac{3}{4}(x^2-1)^{\frac{4}{3}}+c$

(**c**) $\frac{3}{8}(x^2-1)^{\frac{4}{3}}+c$ (**d**) $-\frac{3}{8}(x^2-1)^{\frac{4}{3}}+c$

---

(11) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\ dx$

(**a**) $\ln(e^{2x}+1)+c$ (**b**) $\tan^{-1}(e^x)+c$

(**c**) $\tan^{-1}(e^{2x}+1)+c$ (**d**) $\tan^{-1}(e^x+1)+c$

---

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\ dx$

(**a**) $\sin^{-1}x+c$ (**b**) $\sin^{-1}(x-1)+c$

(**c**) $\sin^{-1}(x+1)+c$ (**d**) $\sin^{-1}(1-x)+c$

(13) $\int \frac{3x\sqrt{x}}{1+x^5}\,dx =$

(a) $\frac{3}{5}\tan^{-1}(x^{5/2})+c$ (b) $\frac{6}{5}\tan^{-1}(x^{5/2})+c$

(c) $\frac{2}{5}\tan^{-1}(x^{5/2})+c$ (d) $\frac{6}{5}\tan^{-1}(\sqrt{x})+c$

---

(14) $\int t\sqrt{t-1}\;\;dt =$

(a) $\frac{2}{5}(t-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}+c$ (b) $\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}+2(t-1)^{\frac{1}{2}}+c$

(c) $\frac{2}{3}t^2(t-1)^{\frac{3}{2}}+c$ (d) $\frac{5}{2}(t-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{2}(t-1)^{\frac{3}{2}}+c$

---

(15) $\int \frac{\sin x+1}{\cos^2 x}\;\;dx =$

(a) $\sec x+\sec^2 x+c$ (b) $-\csc x-\cot x+c$

(c) $\sec x+\tan x+c$ (d) $-\cot x+c$

---

(16) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+5}}\;\;dx =$

(a) $\frac{1}{9}(3x^2+5)^{\frac{3}{2}}+c$ (b) $\frac{1}{4}(3x^2+5)^{\frac{3}{2}}+c$

(c) $\frac{1}{3}(3x^2+5)^{\frac{1}{2}}+c$ (d) $\frac{3}{2}(3x^2+5)^{\frac{3}{2}}+c$

(17) $\int \frac{3}{x^{1/4}+x}\,dx =$

(a) $4\ln\left|1+x^{3/4}\right|+c$ (b) $2\ln\left|1+x^{3/4}\right|+c$

(c) $4\ln\left|x^{1/4}+x\right|+c$ (d) $2\ln\left|x^{1/4}+x\right|+c$

---

(18) $\int \frac{1}{x^2-6x+10}\,dx =$

(a) $\tan^{-1}(x+3)+c$ (b) $\sec^{-1}(x+3)+c$

(c) $\tan^{-1}(x-3)+c$ (d) $\sin^{-1}(x-3)+c$

---

(19) $\int \frac{x^3}{x^8+1}\,dx =$

(a) $\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^4)+c$ (b) $\frac{1}{2}\tan(x^4)+c$

(c) $\frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4)$ (d) $\frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4)+c$

---

(20) $\int \frac{x^5}{x^{12}+4}\,dx =$

(a) $\frac{1}{6}\tan^{-1}(x^6)+c$ (b) $\frac{1}{12}\tan(\frac{x^6}{2})+c$

(c) $\frac{1}{12}\tan^{-1}(\frac{x^6}{2})+c$ (d) $\frac{1}{6}\tan^{-1}(\frac{x^6}{2})+c$

محمد عمر الخطيب

(21) $\int 2(\tan x + \tan^3 x)\, dx =$

(**a**) $\tan^2 x + c$ (**b**) $2\tan^2 x + c$

(**c**) $\sec^3 x + c$ (**d**) $2x + c$

---

(22) $\int 18(3\tan x + 4)^5 \sec^2 x\, dx =$

(**a**) $(3\tan x + 4)^6 + c$ (**b**) $3(3\tan x + 4)^6 \tan x + c$

(**c**) $3(3\tan x + 4)^6 + c$ (**d**) $6(3\tan x + 4)^6 + c$

---

(23) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx =$

(**a**) $\sin^{-1}(x^2) + c$ (**b**) $\sin^{-1}(x^4) + c$

(**c**) $\frac{1}{2}\sin^{-1}(x^2) + c$ (**d**) $\frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4) + c$

---

(24) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4 - 1}}\, dx =$

(**a**) $\frac{1}{2}\sec^{-1} x + c$ (**b**) $\frac{1}{2}\sec^{-1} x^2 + c$

(**c**) $\frac{1}{2}\sin^{-1} x^2 + c$ (**d**) $\frac{1}{2}\sin^{-1} x^4 + c$

(25) $\int_0^1 x\sqrt{8x^2+1}\,dx =$

(a) $\frac{1}{24}$ (b) $\frac{13}{12}$

(c) $\frac{9}{8}$ (d) $\frac{52}{3}$

---

(26) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx =$

(a) $\frac{1}{2}\int_1^4 e^u\,du$ (b) $\frac{1}{2}\int_1^2 e^u\,du$

(c) $2\int_1^2 e^u\,du$ (d) $2\int_1^4 e^u\,du$

---

(27) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx =$

(a) 1 (b) -1

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

---

(28) $\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}}\,dx =$

(a) $\frac{1}{2}(e-1)$ (b) $(1-\frac{1}{e})$

(c) $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$ (d) $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e^2})$

محمد عمر الخطيب

(29) اذا كان $\int_0^1 f(x)\,dx = -3$ ، **فان** $\int_1^2 2f(x-1)\,dx$ **يساوي**

(a) 3 **(b)** -3 **(c)** 6 **(d)** -6

---

(30) اذا كان $\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = 10$ ، $\int_2^6 f(x)\,dx = 3$ **فان** $\int_2^6 f(4-x)\,dx$ **يساوي**

(**a**) 3 (**b**) 6

(**c**) 7 (**d**) 10

---

(31) اذا كان $f(x)$ **دالة متصلة على** R ، **فان** $\int_0^{\pi} \cos x\ f'(\sin x)\,dx$ **يساوي**

(a) 1 **(b)** π **(c)** 0 **(d)** 2π

---

(32) اذا كان $f(0)=0\,,\ f(1)=2$ ، **فان** $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)+1}\,dx$ **يساوي**

(**a**) 0 (**b**) 4

(**c**) $\ln 3$ (**d**) $\ln 4$

---

(33) اذا كان $f(2)=5,\ f(1)=-1$ ، **فان** $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ **يساوي**

(**a**) 3 (**b**) 6

(**c**) 12 (**d**) 8

(34) اذا كانت الدالة $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ حيث $F(3)=4, F(0)=1$ فان $\int_0^3 2f(x)\,F(x)\,dx$ تساوي

(a) 3 (b) 15

(c) 6 (d) 10

---

(35) اذا كان $\int_3^5 x\sqrt{2x-1}\,dx = k\int_a^b (u+1)\sqrt{u}\,du$ فان قيمة الثابت k تساوي

(a) 4 (b) 2

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

---

(36) $\int\left(\frac{1}{x}\int_1^x \frac{1}{u}\,du\right)dx \qquad x>0$

(a) $\frac{1}{x^3}+c$ (b) $\frac{1}{2}\ln(x^2)+c$

(c) $\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$ (d) $\frac{1}{2}\ln(\ln x)+c$

---

(37) اذا كان $g(x)=\int_0^{2x}\left(\int_0^u \sqrt{t^2+1}\,dt\right)du$ ، فان $g''(x)$ هو

(a) $2\sqrt{4x^2+1}$ (b) $\sqrt{4x^2+1}$

(c) $2\sqrt{x^2+1}$ (d) $4\sqrt{4x^2+1}$

محمد عمر الخطيب

الإجابات

الدرس الأول

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	B	C	C	A	D	A	D	A	B	D	C	A	C	A	A	A	D	B	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38		
C	A	A	A	A	B	B	C	B	C	C	A	D	C	B	B	A	A		

الدرس الثاني

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	B	D	A	C	B	B	C	A	B	A	C	B

الدرس الثالث

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	C	B	C	A	C	B	C	A	B	A

الدرس الرابع

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	B	B	D	B	C	B	D	C	B	D	B	B	C	D	C	C	D	A	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	D	D	D	B	B	C	C	A	C	C	C	B	D	B	D	B	D	A	D
41																			
D																			

الدرس الخامس

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	B	A	B	A	D	C	C	A	D	B	B	D	A	A	B	A	D	D	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	B	C	B	B	D	A	D	A	B	C	B	C	B	B	B	B	B	B	A
41	42	43																	
B	C	C																	

محمد عمر الخطيب

السادس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	B	A	B	A	C	B	A	C	D	C	B	B	B	A	C	C	A	C	D	C
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37			
	A	A	C	B	B	C	A	C	D	C	C	C	C	B	D	C	D			

انتهت الوحدة الخامسة بحمد الله....

وأعتذر للجميع عن أي تقصير او خطأ.