

حل نماذج الدرس (3-4) قواعد الضرب والتقسيم

تمرين (1) ص 170 المطلوب إيجاد المشتقة (نستخدم القواعد)

$$f(x) = (x^2 + 3)(x^3 - 3x + 1)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 3)'(x^3 - 3x + 1) + (x^2 + 3)(x^3 - 3x + 1)' \\ &= (2x)(x^3 - 3x + 1) + (x^2 + 3)(3x^2 - 3) \\ &\text{من هنا نكتب الأقواس ونبسط الناتج (غير مطلوب)} \end{aligned}$$

تمرين (2) ص 170 $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 5)(x^4 - 3x^2 + 2)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 2x^2 + 5)'(x^4 - 3x^2 + 2) + (x^3 - 2x^2 + 5)(x^4 - 3x^2 + 2)' \\ &= (3x^2 - 4x)(x^4 - 3x^2 + 2) + (x^3 - 2x^2 + 5)(4x^3 - 6x) \end{aligned}$$

تمرين (3) $f(x) = (\sqrt{x} + 3x)(5x^2 - \frac{3}{x})$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{x} + 3x)'(5x^2 - \frac{3}{x}) + (\sqrt{x} + 3x)(5x^2 - \frac{3}{x})' \\ &= (\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3)(5x^2 - \frac{3}{x}) + (\sqrt{x} + 3x)(10x - \frac{-3}{x^2}) \end{aligned}$$

تمرين (4) $f(x) = (x^{\frac{3}{2}} - 4x)(x^4 - \frac{3}{x^2} + 2)$

$$f'(x) = (x^{\frac{3}{2}} - 4x)'(x^4 - \frac{3}{x^2} + 2) + (x^{\frac{3}{2}} - 4x)(x^4 - \frac{3}{x^2} + 2)'$$

$$f'(x) = (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 4)(x^4 - \frac{3}{x^2} + 2) + (x^{\frac{3}{2}} - 4x)(4x^3 - \frac{-6}{x^3})$$

تمرين (5) $g(t) = \frac{3t-2}{5t+1}$

$$g'(t) = \frac{(3t-2)'(5t+1) - (3t-2)(5t+1)'}{(5t+1)^2}$$

$$= \frac{3(5t+1) - (3t-2)(5)}{(5t+1)^2} = \frac{15t+3 - 15t+10}{(5t+1)^2} = \frac{13}{(5t+1)^2}$$

$$g(t) = \frac{t^2 + 2t + 5}{t^2 - 5t + 1}$$

تمرين (6)

$$g'(t) = \frac{(t^2 + 2t + 5)'(t^2 - 5t + 1) - (t^2 + 2t + 5)(t^2 - 5t + 1)'}{(t^2 - 5t + 1)^2}$$

$$= \frac{(2t+2)(t^2 - 5t + 1) - (t^2 + 2t + 5)(2t - 5)}{(t^2 - 5t + 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{3x - 6\sqrt{x}}{5x^2 - 2} \quad x^{\frac{1}{2}}$$

تمرين (7) ص 171

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x - 6x^{\frac{1}{2}})'(5x^2 - 2) - (3x - 6x^{\frac{1}{2}})(5x^2 - 2)'}{(5x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{(3 - 3x^{-\frac{1}{2}})(5x^2 - 2) - (3x - 6x^{\frac{1}{2}})(10x)}{(5x^2 - 2)^2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{6x - \frac{2}{x}}{x^2 + \sqrt{x}} \quad \begin{matrix} \rightarrow 2x^{-1} \\ \rightarrow x^{\frac{1}{2}} \end{matrix}$$

تمرين (8) ص 171

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x - 2x^{-1})'(x^2 + x^{\frac{1}{2}}) + (6x - 2x^{-1})(x^2 + x^{\frac{1}{2}})'}{(x^2 + x^{\frac{1}{2}})^2} \\ &= \frac{(6 - 2(-1)x^{-2})(x^2 + x^{\frac{1}{2}}) + (6x - 2x^{-1})(2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})}{(x^2 + x^{\frac{1}{2}})^2} \end{aligned}$$

خطا في الحل :

$$\begin{aligned} (u+1)(u+2) &= u^2 - 2u + u - 2 \\ &= u^2 - u - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{(u+1)(u-2)}{u^2 - 5u + 1} \\ &= \frac{u^2 - u - 2}{u^2 - 5u + 1} \end{aligned}$$

تمرين (9)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(u^2 - u - 2)'(u^2 - 5u + 1) - (u^2 - u - 2)(u^2 - 5u + 1)'}{(u^2 - 5u + 1)^2} \\ &= \frac{(2u - 1)(u^2 - 5u + 1) - (u^2 - u - 2)(2u - 5)}{(u^2 - 5u + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f(u) = \frac{2u}{u^2 + 1} \times (u^2 + 3) = \frac{2u^3 + 6u}{u^2 + 1} \quad \text{تمرين (10)}$$

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{(2u^3 + 6u)'(u^2 + 1) - (2u^3 + 6u)(u^2 + 1)'}{(u^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(2u^2 + 6)(u^2 + 1) - (2u^3 + 6u)(2u)}{(u^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

يمكن فعله بالتقسيم ببساطة
و جمع الحدود المتشابهة (التبسيط)

يمكن الاستعانة بقاعدة لفيتمة
و يمكن توزيع الكسور لجويع كسور (للقامد و المقام)

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt{x}}$$

تمرين (11)

$$= \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$f(x) = x^{2 - \frac{1}{2}} - 3x^{1 - \frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 3(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}} - 2(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

مَرَبِنِ (12) ص 171 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 5x}$ حَمَانِ الْاِسْتِقَافَ فَوْرًا (قَاعَةُ الْعَمَلِ)

وَمَكَانِ مَلَاظِفَ x كَمَا صَرَفَ لِّلْبَطِّ وَالْعَمَلِ

$$f(x) = \frac{x(x-2)}{x(x+5)} = \frac{x-2}{x+5} : x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{(x-2)'(x+5) - (x-2)(x+5)'}{(x+5)^2} = \frac{1(x+5) - (x-2)(1)}{(x+5)^2} = \frac{x+5-x+2}{(x+5)^2} = \frac{7}{(x+5)^2}$$

حَمَانِ الْاِسْتِقَافَ فَوْرًا (قَاعَةُ الْفَرْبِ)
أَوْ بِنَفْسِكَ الْعَوْدَ وَاسْتِقَافَ كُلِّ حِدٍ

مَرَبِنِ (13) $h(t) = t(\sqrt[3]{t} + 3)$

$$= t(t^{\frac{1}{3}} + 3) = t^{\frac{4}{3}} + 3t$$

$$f'(t) = \frac{4}{3}t^{\frac{4}{3}-1} + 3 = \frac{4}{3}t^{\frac{1}{3}} + 3 = \frac{4}{3}\sqrt[3]{t} + 3$$

مَرَبِنِ (14) $h(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{5}{t^2}$

$$= \frac{1}{3}t^2 + 5t^{-2}$$

$$f'(t) = \frac{1}{3}(2t) + 5(-2t^{-3}) = \frac{2}{3}t - \frac{10}{t^3}$$

مَرَبِنِ (15) $f(x) = (x^2 - 1)\left(\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 2}\right)$ مَقَاعَةُ صَرْبِ

$$f'(x) = (x^2 - 1)' \left[\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 2} \right] + (x^2 - 1) \left[\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 2} \right]'$$

$$f'(x) = (2x) \left[\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 2} \right] + (x^2 - 1) \left[\frac{(3x^2 + 6x)(x+2) - (x^3 + 3x^2)(1)}{(x+2)^2} \right]$$

مَرَبِنِ (16) $f(x) = (x+2) \frac{x^2-1}{x^2+x}$ مَنَ الْحَمَانِ الْاِسْتِقَافَ بِسُجْدَامِ
قَاعَةُ الْفَرْبِ (لَآكِنِ يَمَكُنُ نَبِيَّهُ أَوَّلًا)

$$f(x) = (x+2)x \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)}$$

نَفَقَةُ الْبَطِّ →

$$= \frac{(x+2)(x-1)}{x} = \frac{x^2 + x - 1}{x}$$

نَفَرَقَا لِكُتُوبِ

$$= \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$= x + 1 - x^{-1}$$

تَمَّ نَسَقُ $f'(x) = 1 + x^{-2}$

$$= 1 + \frac{1}{x^2}$$

تمرین (17) ص 171 المطلوب معادلة التماس لمنحنى الدالة: $f(x) = (x^2 + 2x)(x^4 + x^2 + 1)$ عند $a = 0$

نقطة التماس: $x_1 = 0 \rightarrow y_1 = (0 + 2 \times 0)(0^4 + 0^2 + 1) = 0$
المسقة:

$$f'(x) = (2x + 2)(x^4 + x^2 + 1) + (x^2 + 2x)(4x^3 + 2x)$$

$$m = f'(0) = (2 \times 0 + 2)(0^4 + 0^2 + 1) + (0^2 + 2 \times 0)(4 \times 0^3 + 2 \times 0) = 2$$

معادلة التماس: $y = m(x - x_1) + y_1$

$$y = 2(x - 0) + 0 \rightarrow y = 2x$$

تمرین (18) ص 171 $f(x) = (x^3 + x + 1)(3x^2 + 2x - 1)$

المطلوب معادلة التماس عند $a = 1$

نقطة التماس: $x_1 = 1 \rightarrow y_1 = (1^3 + 1 + 1)(3(1)^2 + 2(1) - 1) = 12$

$$f'(x) = (3x^2 + 1)(3x^2 + 2x - 1) + (x^3 + x + 1)(6x + 2)$$

$$m = f'(1) = (3(1)^2 + 1)(3(1)^2 + 2(1) - 1) + (1^3 + 1 + 1)(6(1) + 2) = 40$$

معادلة التماس: $y = m(x - x_1) + y_1$

$$y = 40(x - 1) + 12 \rightarrow y = 40x - 28$$

تمرین (19) ص 171 $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ المطلوب معادلة التماس عند $a = 0$

نقطة التماس: $x_1 = 0 \rightarrow y_1 = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1(x+2) - 1(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$m = f'(0) = \frac{1}{(0+2)^2} = \frac{1}{4}$$

معادلة التماس: $y = \frac{1}{4}(x - 0) + \frac{1}{2}$

تمرین (20) ص 171 $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ المطلوب معادلة التماس عند $a = 1$ $x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 2$

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - (x+3)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 6x + 1}{(x^2+1)^2}$$

$$m = f'(1) = \frac{-(1)^2 - 6(1) + 1}{(1^2+1)^2} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

معادلة التماس: $y = -\frac{3}{2}(x - 1) + 2 \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

تمرین (21) ص 171 معطی: $f'(1)=3$, $f(1)=-2$, $f'(0)=-1$, $f(0)=-1$
 $g'(1)=-2$, $g(1)=1$, $g'(0)=-1$, $g(0)=3$

المطلوب: معادله المماس عند:

عند $(a=0)$ [a]

$$y = h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$h'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = -1 \times 3 + (-1)(-1) = -2$$

عند $a=1$ [b]

$$h'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 3 \times 1 + (-2)(-2) = 7$$

في نقطة التماس

$$x_1 = 0 \rightarrow y_1 = h(0) = f(0)g(0) = 3 \times -1 = -3$$

معادله المماس $y = m(x - x_1) + y_1$

$$y = -2(x - 0) - 3 \rightarrow y = -2x - 3$$

في نقطة التماس:

$$x_1 = 1 \rightarrow y_1 = h(1) = f(1)g(1) = -2 \times 1 = -2$$

معادله المماس $y = 7(x - 1) + (-2) \rightarrow y = 7x - 9$

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

تمرین (22) ص 171 معطی: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$x_1 = 1 \rightarrow y_1 = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{-2}{1} = -2$$

[a] المطلوب: معادله المماس عند $a=1$

$$m = h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{[g(1)]^2}$$

$$= \frac{3 \times 1 - (-2)(-2)}{(1)^2} = -1$$

معادله المماس $y = m(x - x_1) + y_1 \rightarrow y = -1(x - 1) + (-2)$

$$y = -x - 1$$

[b] المطلوب: معادله المماس عند $a=0$

$$x_1 = 0 \rightarrow h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{-1}{3}$$

$$m = h'(0) = \frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{[g(0)]^2}$$

$$= \frac{-1 \times 3 - (-1)(-1)}{(3)^2} = -\frac{4}{9}$$

معادله المماس $y = -\frac{4}{9}(x - 0) + \frac{-1}{3} \rightarrow y = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{3}$

$$h(x) = x^2 \cdot f(x)$$

171

مَرْنِي (23) ص

المطلوب معادلة الجناح عند $a=1$ [a]

$$x_1 = 1 \rightarrow y_1 = (1)^2 \cdot f(1) = 1 \cdot x - 2 = -2$$

$$h'(x) = (2x) \cdot f(x) + (x^2) \cdot f'(x)$$

$$\text{عند } x=1 \quad m = (2 \cdot 1) \cdot x \cdot f(1) + (1)^2 \cdot f'(1)$$

$$= 2 \cdot x - 2 + 1 \cdot x \cdot 3 = -1$$

$$y = -1(x-1) + -2 \rightarrow y = -x - 1$$

معادلة الجناح عند $a=0$ [b]

$$x_1 = 0 \rightarrow y_1 = (0)^2 \cdot f(0) = 0$$

$$m = (2 \cdot 0) \cdot f(0) + (0)^2 \cdot f'(0) = 0$$

ميل الجناح = 0 $\Leftarrow$ الجناح أفقي معادلتها $y = 0$ (عدد y)

ويجرب بالنقطة (0,0) فمعادلتها $y=0$

$$h'(x) = \frac{2x \cdot g(x) + x^2 g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\leftarrow h(x) = \frac{x^2}{g(x)}$$

مَرْنِي (24) ص

المطلوب معادلة الجناح عند $a=1$ [a]

$$x_1 = 1 \rightarrow y_1 = h(1) = \frac{(1)^2}{g(1)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$m = h'(1) = \frac{2(1)g(1) + (1)^2 g'(1)}{[g(1)]^2} = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)}{(1)^2} = 4$$

$$\text{معادلة الجناح } y = 4(x-1) + 1 \rightarrow y = 4x - 3$$

المطلوب معادلة الجناح عند $a=0$ [b]

$$x_1 = 0 \rightarrow y_1 = h(0) = \frac{(0)^2}{g(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$m = h'(0) = \frac{2(0)g(0) + (0)^2 g'(0)}{[g(0)]^2}$$

$$= \frac{0(3) - 0(-1)}{(3)^2} = \frac{0}{9} = 0$$

ميل الجناح = 0 $\Leftarrow$ الجناح أفقي معادلتها $y = 0$ (عدد y)

ويجرب بالنقطة (0,0) فمعادلتها $y=0$

التاريخ 25 - 26 - 27 - 28
مراجعة بنفسى القانون

تمرين (25) ص 171 $Q(t)$ كمية مبيعات في زمن t سنة تتناقص بمعدل 4%

مطلوب شرح أن هذا أثر حجم العلاقة: $Q'(t) = -0.04Q(t)$

تناقص بغيريات $(-)$

$$0.04 = \frac{4}{100} \text{ أي المعدل } 4\%$$

$$Q'(x) = 0.04Q(x) \Leftrightarrow -\frac{4}{100} \times Q(x) : \text{أي } Q(x)$$

بفرض السعر يزداد بمعدل 3%

$$P'(t) = 0.03P(t) : P(t)$$

الإيراد: $R(t) = \text{الكمية} \times \text{السعر}$

$$R(t) = Q(t) \cdot P(t) \text{ ضرب دالتين}$$

$$\text{المشتقة: } R'(t) = Q' \cdot P + Q \cdot P'$$

$$= [-0.04Q]P + Q(0.03P)$$

$$= -0.04QP + 0.03QP = -0.01QP$$

$$R' = -0.01R \quad \left(= -\frac{1}{100}R \right)$$

(تناقص) وهذا يعني أن R ينخفض بمعدل 1% كل سنة

تمرين (26) ص 171 الكمية المبيعة تنخفض 4% $Q' = -0.04Q$

المطلوب معدل زيادة السعر P ليبقى الإيراد R ثابتاً

$$P' = A \rightarrow P = A \cdot Q \text{ (مثلاً) ليكون } R' = 0$$

$$R = PQ \rightarrow R' = Q'P + QP'$$

$$R' = (-0.04Q)P + Q(AP)$$

$$0 = -0.04QP + A \cdot QP$$

$$0 = (-0.04 + A)QP$$

$$A = 0.04 \leftarrow -0.04 + A = 0 \text{ ويكون مساوياً صفر عندما معاملة}$$

إذن معدل زيادة السعر A يساوي 4%

(في زمن محدد t)

تمرين (27) ص 171 أ السعر $P = 20$ الكمية المبيعة $Q = 20000$

$$P' = 1.25 \leftarrow \text{السعر يزداد بمعدل } 1.25$$

$$Q' = 2000 \leftarrow \text{الكمية يزداد بمعدل } 2000 \text{ قطعة}$$

المطلوب زيادة الإيراد R (أي R')

$$R = PQ \rightarrow R' = P' \cdot Q + P \cdot Q'$$

$$= 1.25(20000) + 20(2000) = 65000$$

تزيد الإيرادات 65000 في زمن محدد t (لمدة)

أثبتت التمارين السابقة
نفس القانون

تمرين (28) ص 171 معدل سعر القطعة $P=14$

الكمية المباعة $Q=12000$

زادت الكمية المباعة $Q'=1200$

وزاد الأيراد R : $R'=20000$

مطلوب كم هو زيادة السعر؟ (أي P')

$$R = P \cdot Q \rightarrow R' = P' \cdot Q + P \cdot Q'$$

نفوض من المعطيات

$$20000 = P'(12000) + 14(1200)$$

$$20000 = 12000 P' + 16800$$

$$P' = \frac{20000 - 16800}{12000} = \frac{4}{15} = 0.266 \approx 0.27$$

تمرين (29) ص 171

(م) سرعة الكرة $u(m) = \frac{82.5m - 6.75}{m + 0.15}$

المعد:

مطلوب: $u'(m) > 0$ برهن:

$$u'(m) = \frac{(82.5m - 6.75)'(m + 0.15) - (82.5m - 6.75)(m + 0.15)'}{(m + 0.15)^2}$$

$$u'(m) = \frac{(82.5)(m + 0.15) - (82.5m - 6.75)(1)}{(m + 0.15)^2}$$

$$= \frac{82.5m + 12.375 - 82.5m + 6.75}{(m + 0.15)^2} = \frac{19.125}{(m + 0.15)^2}$$

تفسير: البسيط

u : سرعة الكرة (بـ م/ث) ابتداءً من

مع زيادة m كذا يزداد $u'(m)$

لاحظ: البسط موجب وكذلك المقام موجب $\Rightarrow u'(m) > 0$

$$m=1 \Rightarrow u'(1) = \frac{19.125}{(1+0.15)^2} \approx 14.46$$

$$m=1.2 \Rightarrow u'(1.2) = \frac{19.125}{(1.2+0.15)^2} \approx 10.49$$

تناقص السرعة

(م) سرعة الكرة $u(M) = \frac{86.625 - 45M}{M + 1.05}$

$$u'(M) = \frac{-45(M + 1.05) - (86.625 - 45M)(1)}{(M + 1.05)^2}$$

$$= \frac{-45M - 47.25 - 86.625 + 45M}{(M + 1.05)^2} = \frac{-133.875}{(M + 1.05)^2}$$

$u'(M) < 0$ سالبة دائماً

أي u متناقصة: أي مع زيادة كتلة الكرة M

تناقص u (السرعة الابتدائية)

لعدد لا زيادة في سرعة الكرة يكون أقل بكثير (للكرة الثقيلة) منه (للكرة خفيفة)

(يتم تجميع معلومات تمارين 29 / 30 / 31 / 32 في صفحة التالية)

سورۃ (31) ص 171

$u'(m) < 0$ يعني ان u متناقصه $\leftarrow$ أي: تنزايه كلما تنوعت البضعا

(سرعة الكرة تكون أقل للمصنعة الثقيلة منه للمصنعة الخفيفة)

مرکز (32)

$$\text{boy } u(v) = \frac{0.2822}{0.217} v \approx 1.3v$$

(لاحظ تغير المَحْمُول والِدَالَة)

سرعة الجسم (المص)	كتلة الجسم (المص)	سرعة الكرة	كتلة الكرة	السرعة الابتدائية للكرة u	u
40 m/s (لا يلزم عند الحل)	m	45 m/s معتبر	0.15 kg (لا يلزم عند الحل)	(معتبر) (مكتوبة)	تم الاستقار $u'(m)$ (موجب دوماً)

u قزايم (تزيد بقايد m كتلة المص (الجسم) m)

$u' > 0$

40 m/s معدل	1.05 kg معدل	45 m/s معدل	4 μ معدل	$u(M)$ معدل كدالة	$u'(M)$ تم الاستنتاج
u متناقصة (تتنامى بزيادة كتلة الكرة M)					$u'(M) < 0$

31	8.5 m/s	m متنزل (م)	50 m/s متنزل (م)	0.05 kg متنزل	$u(m)$ معد كماله	$u'(m)$
					u متناقص (تناقص بتزايد كمية الحما m)	$u'(m) K_0$

32) 50 m/s من 50 (4.6)	0.17 Kg D من 0	ع معتدل	0.05 من 0	معتدل (ع) كذلك	1.3 = (ع) ب
1.3: تصاعف (ع من ع)					

تابع جاردين درس 4-3 قواعد لـ ضرب و اـ صـ

مـ (33) ص 171 مطلوب أ مشتقة $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$

$$\hookrightarrow = f(x) \cdot [g(x) \cdot h(x)]$$

$$: \text{المشتقة} = f'(x) [g(x) \cdot h(x)] + f(x) [g'(x) \cdot h(x)]$$

$$= f'(x) g(x) h(x) + f(x) [g'(x) h(x) + g(x) \cdot h'(x)]$$

$$= f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) g'(x) h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

نلاحظ ان الدالة ضرب ثلاث دوال (والـ مشتقة ثلاث حدود يعني كل حد مشتقة

لا تصدى الدوال الثلاثة وعوضوا بناتج الدوال

ويكون المطلوب ثانياً: مشتقة $f(x) \cdot \dots \cdot f_3(x) \cdot f_2(x) \cdot f_1(x)$

المشتقة نتاً لـ فرض n حداً كل حد فيه (مشتقة احدى الدوال) وعوضوا

بالدوال الباقى والمشتقة.

مـ (34) ص 171 المطلوب أ بيان ان مشتقة $[g(x)]^{-1}$ مساوية $[g(x)]^2 \cdot g'(x)$

$$f(x) = [g(x)]^{-1} = \frac{1}{g(x)}$$

$$f'(x) = (1)^{-1} g'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2} = -g'(x) [g(x)]^{-2}$$

$$\hookrightarrow = \frac{f(x) \cdot [g(x)]^{-1}}{[g(x)]^1} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

نسق بقاعدة البسطة:

$$: \text{المشتقة} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

سنفرد الكسر لكسرين لهما نفس البع

$$= \frac{f'(x) g(x)}{[g(x)]^2} - \frac{f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$= f'(x) [g(x)]^{-1} - f(x) g'(x) [g(x)]^{-2}$$

وهو المطلوب الثاني

مـ (35) المطلوب مشتقة باستخدام قاعدة $f(x) = x^2$ و $g(x) = (x^2 - 2)(x^3 - x + 1)$

$$: \text{المـ (33)} \quad f'(x) = 2x \quad g'(x) = (x^2 - 2)(3x^2 - 1) + x^2(x^2 - 2)' + (x^3 - x + 1)' = (x^2 - 2)(3x^2 - 1) + x^2(2x) + (3x^2 - 1) = (x^2 - 2)(3x^2 - 1) + 2x^3 + 3x^2 - 1$$

$$= \frac{2}{3} x^3 (x^2 - 2)(3x^2 - 1) + x^2(2x) + 3x^2 - 1 = \frac{2}{3} x^3 (3x^2 - 1)(x^2 - 2) + 2x^3 + 3x^2 - 1$$

تمرين (36) ص 171 $f(x) = (x+4)(x^3 - 2x^2 + 1)(3 - \frac{2}{x})$
 المطلوب إيجاد المشتقة باستخدام القاعدة في تمرين 33

(قاعدة مشتقة ضرب ثلاثة عوامل)

$$f'(x) = (x+4)'(x^3 - 2x^2 + 1)(3 - \frac{2}{x}) + (x+4)(x^3 - 2x^2 + 1)'(3 - \frac{2}{x}) + (x+4)(x^3 - 2x^2 + 1)(3 - \frac{2}{x})'$$

$$= (1)(x^3 - 2x^2 + 1)(3 - \frac{2}{x}) + (x+4)(3x^2 - 4x)(3 - \frac{2}{x}) + (x+4)(x^3 - 2x^2 + 1)(0 - \frac{2}{x^2})$$

تمرين (37) $f(x) = x \cdot g(x)$ / مشتقة عند $x=0$
 المطلوب إثبات أن f قابلة للمشتقة عند $x=0$

موجودة $f'(x) = g(x) + x g'(x)$ $f'(x) = g(x) + x g'(x)$ قاعدة لـ

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h)g(h) - (0) \cdot g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h g(h)}{h} = g(0)$$

ولأن g مشتقة عند $x=0$ $\leftarrow g(0)$ موجودة

وال المطلوب إثباتاً عند $x=0$ $g(x) = |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot (x) & : x \geq 0 \\ x \cdot (-x) & : x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & : x \geq 0 \\ -x^2 & : x < 0 \end{cases}$$

قابل للمشتقة عند $x=0$

تمرين (38) في التمرين السابق بدل $x=0$: $x=a \neq 0$ عدل تعريف ليكون قابلاً للمشتقة

مفهوم : $f(x) = x \cdot g(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h) \cdot g(a+h) - a \cdot g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a g(a+h) + h g(a+h) - a g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h g(a+h)}{h} = g(a)$$

يجب أن تكون $f(x)$ مشتقة عند a

الافتتاح : $f(x) = (x-a)g(x)$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h-a)g(a+h) - (a-a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h g(a+h)}{h} = g(a+0) = g(a)$$

(يجب أن تكون g مشتقة عند a)

مركز (39) ص 171 المطلوب: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ برهن أن ميل m لـ $y=f(x)$ يحقق $-\frac{1}{8} \leq m \leq 1$

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - 2x(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = m$$

نجد دالة القطبي والقيمة الصغرى لأي دالة عند ما تكون (تقصها = 0)

$f'' = 0$ عند ما يكون $f' = m$ لـ $f' = m$ عند ما يكون $f'' = 0$

$$f''(x) = \frac{(-2x)(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)(2x)(1-x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \text{باستخدام (1) نعرف أن } (x^2+1) \text{ عامل مشترك في البسط} \\ & = \frac{(1-x^2)[-2x(x^2+1) - 4x(1-x^2)]}{(x^2+1)^4} \\ & = \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

وعندما $f'' = 0$ السبط = 0 أي:

$$2x^3 - 6x = 0$$

$$2x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

وعند كل هذا يكون الميل:

$$x = 0 \rightarrow m = f'(0) = \frac{1-0^2}{(0^2+1)^2} = 1$$

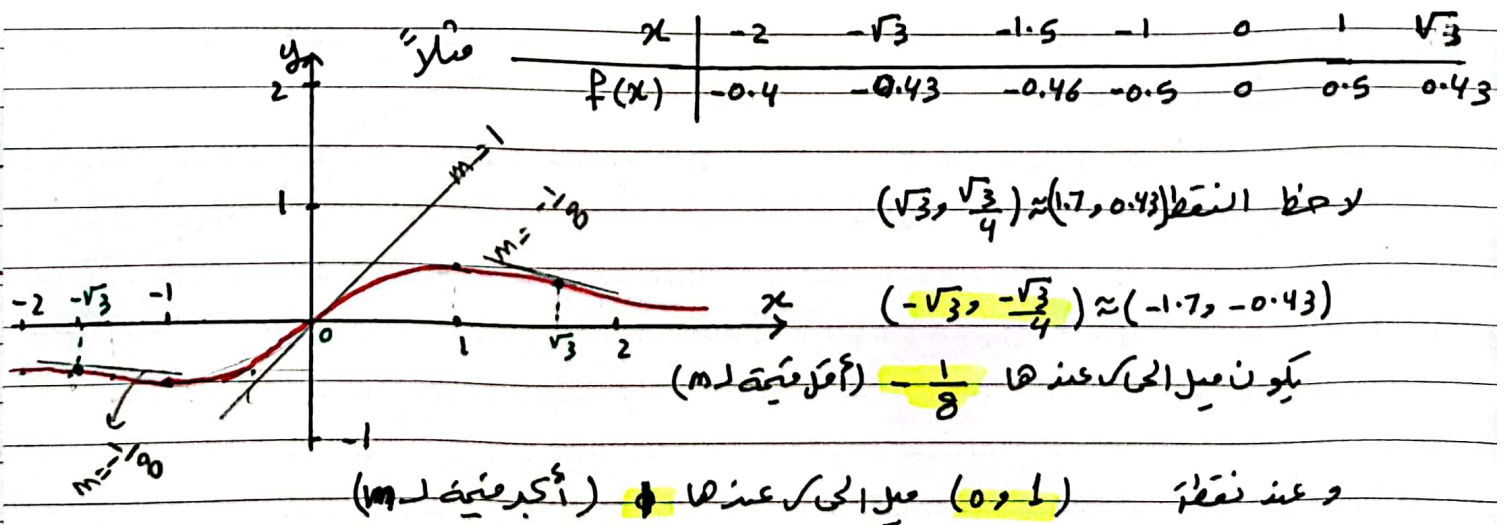
$$x = \pm\sqrt{3} \rightarrow m = f'(\pm\sqrt{3}) = \frac{1-(\pm\sqrt{3})^2}{[(\pm\sqrt{3})^2+1]^2} = \frac{1-3}{(3+1)^2} = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8}$$

القيمة العظمى: $m = f' = 1$ (عند $x = 0$)

القيمة الصغرى: $m = f' = -\frac{1}{8}$ (عند $x = \pm\sqrt{3}$)

ثانياً: مثل الدالة بيانياً

باستخدام برامج الرسم (أدباً عند نقطة (جدول القيم) واسم البيان)



مركز (40) ص 171 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $0 < m \leq 1$: أولاً ميل المحاكاة m

$$m \rightarrow f'(x) = \frac{1(\sqrt{x^2+1}) - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2+1}) \times \sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{(\sqrt{x^2+1})} \times \sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+1})^2 \times \sqrt{x^2+1}}$$

نضرب كل مصدور دال

$$= \frac{(x^2+1) - x^2}{(x^2+1)^2 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

والصاحبة $\frac{1}{(\sqrt{x^2+1})}$

الأساس موجب $\leftarrow$ $f'(x) > 0$
المقام موجب $\leftarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

المعية العظمى للدالة f' والصفر عند $x=0$: $f'' = 0$

$$f''(x) = -\frac{3}{2} (x^2+1)^{-\frac{3}{2}-1} (2x) = -3 (x^2+1)^{-\frac{5}{2}} \cdot x = \frac{-3x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

وعند $x=0$ يكون $f'' = 0$ يكون السبب : $(-3x=0 \rightarrow x=0)$

$$f'(0) = (0^2+1)^{-\frac{3}{2}} = 1$$

وعندها

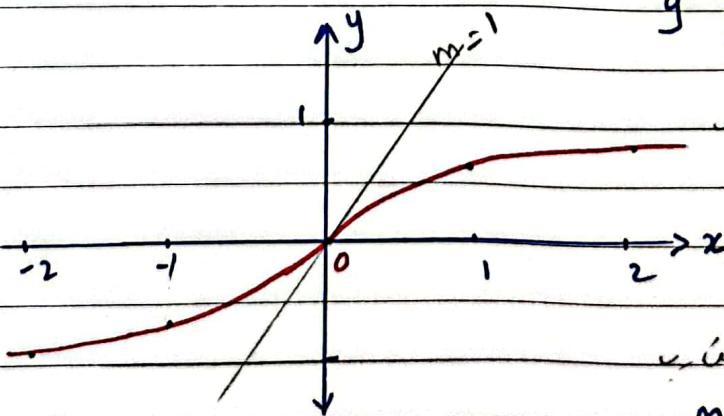
(1) وهي قيمة عظمى لـ f' (الميل)

ولاحظ أن : $f' > 0$

وبالتالي سيكون : $0 < m \leq 1$

ثانياً : بالتعويض الجبرائي للدالة (باستخدام برنامج الرسم) (أوجد أوليها)

x	-2	-1	0	1	2
y	-0.89	-0.71	0	0.71	0.89



نقطة (0,0)

$$x=0 \rightarrow y=0$$

يكون عندها الميل الأكبر

$$m = f'(0) = (0^2+1)^{-\frac{3}{2}} = 1$$

ويكون