



Mathematics الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الثالث

2024-2023

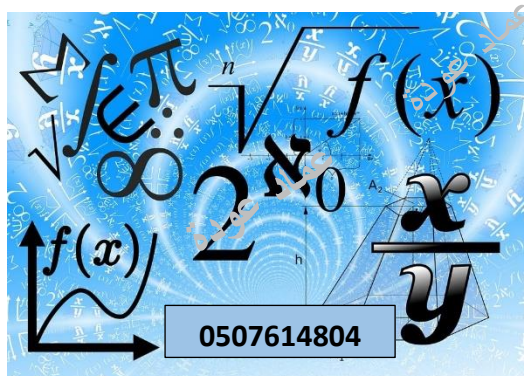
Applications of the Definite Integral

6.1

AREA BETWEEN CURVES

الأستاذ عماد عودة

عماد عودة



عماد عودة

اسم الطالب: -

عماد عودة



الأستاذ عماد عودة

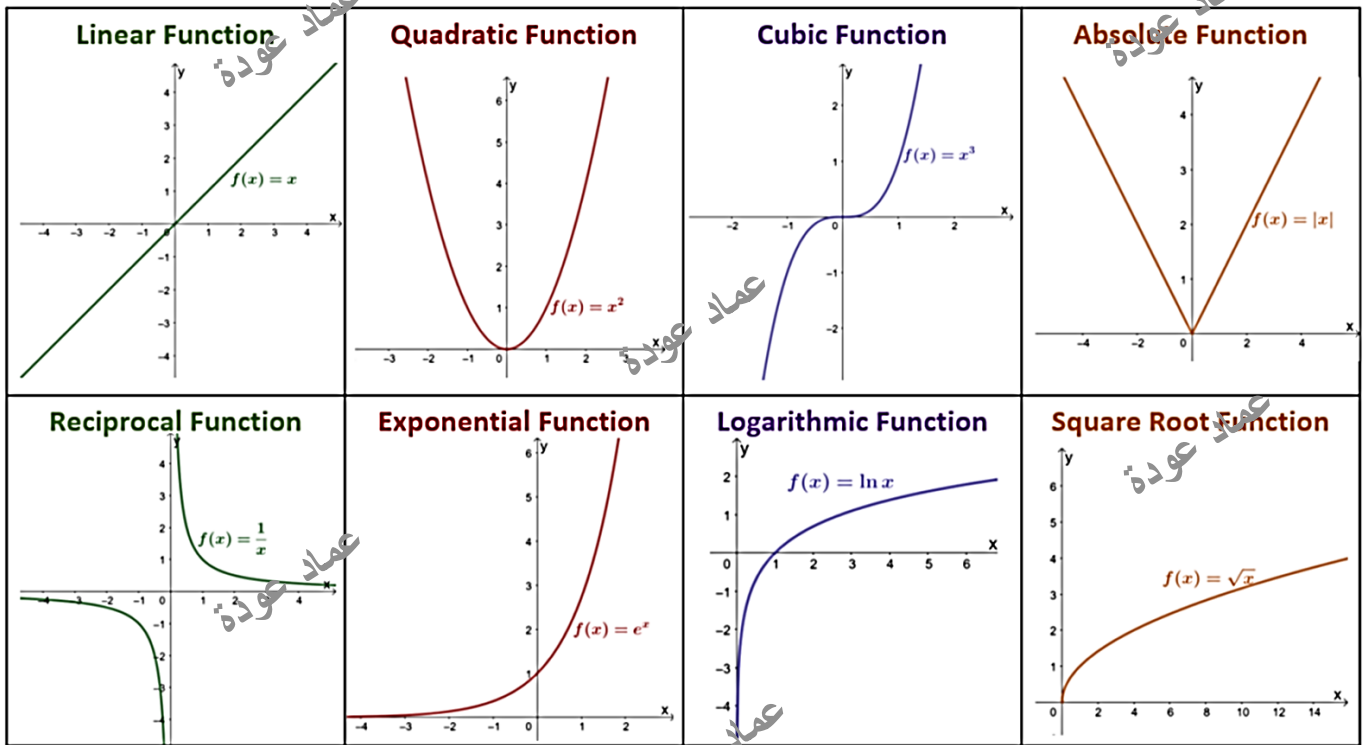
<https://t.me/+v1n4wuNV2B83NDA0>

<http://www.youtube.com/@imaths2022>

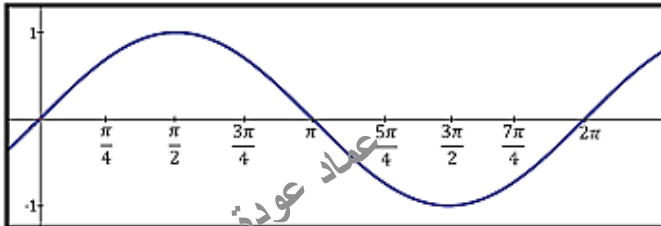
لإيجاد المساحة بين منحنين

- (1) نحدد المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها من خلال رسم المنحنيات المعطاة
- (2) نحدد نقاط التقاطع بين المنحنيات (ان وجدت) وذلك بمساواتها ببعضها وإيجاد قيم x أو y حسب نوع الشريحة إذا كانت عمودية نأخذ المكامل dx ونعمل على المتغير x وإذا كانت أفقية نأخذ المكامل dy ونعمل على المتغير y
- (3) نحدد حدود المنطقة من الأعلى والأسفل أو من اليمين إلى اليسار
- (4) إذا تغيرت حدود المنطقة نقوم بتقسيمها إلى أكثر من منطقة
- (5) نستخدم التكامل لإيجاد المساحة

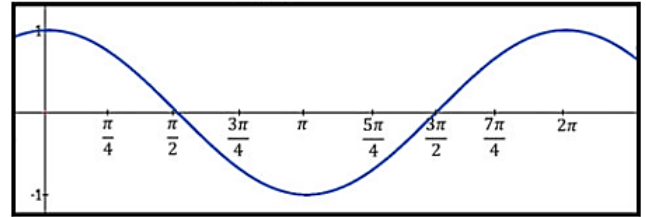
الرسم البياني للدوال الأساسية Parent Functions



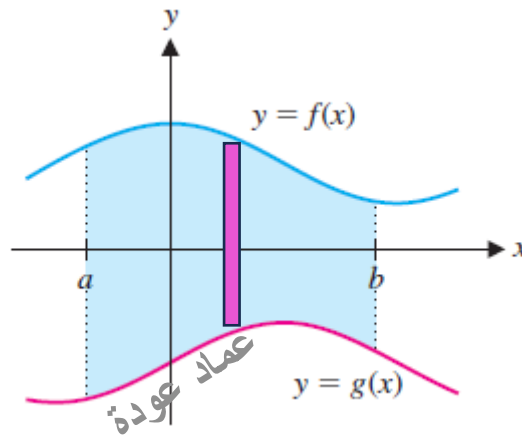
$$f(x) = \sin x$$



$$f(x) = \cos x$$



أولاً: - استخدام شريحة عمودية dx



$$A = \int_a^b [\text{الدالة في الاسفل} - \text{الدالة في الاعلى}] dx$$

$$A = \int_a^b (Up - down) dx$$

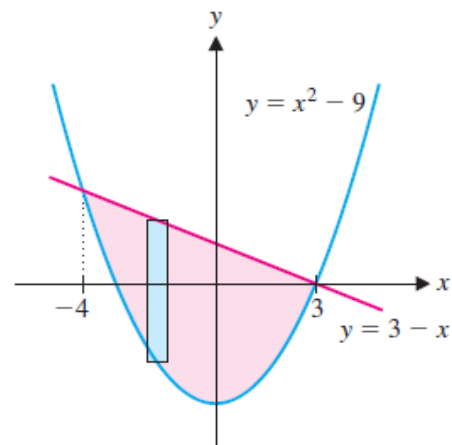
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Example 1

Find the area bounded by the graphs of

$$y = 3 - x \text{ and } y = x^2 - 9.$$

مثال 1
اوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين

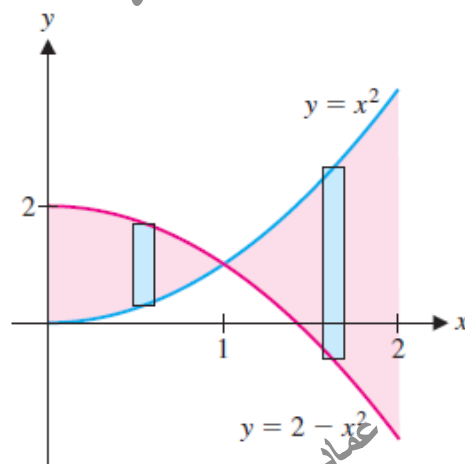


Example 2

Find the area bounded by the graphs of

$$y = x^2 \text{ and } y = 2 - x^2 \text{ for } 0 \leq x \leq 2.$$

مثال 2
أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين

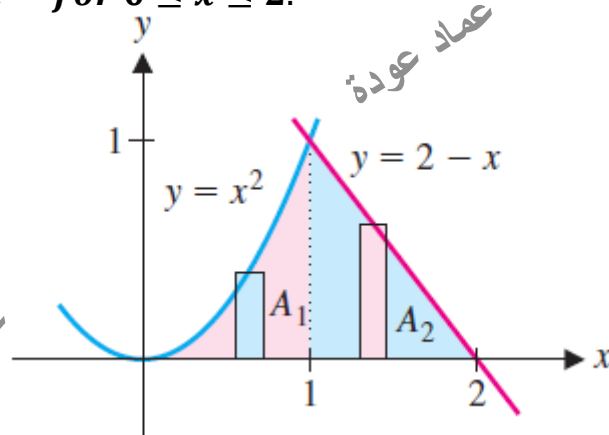


Example 3

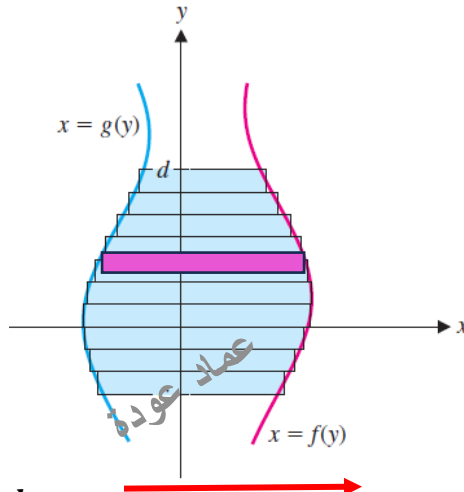
Find the area bounded by the graphs of

$$y = x^2 \text{ and } y = 2 - x \text{ for } 0 \leq x \leq 2.$$

مثال 3
أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين



ثانياً: - استخدام شريحة أفقية dy



$$A = \int_c^d [\text{الدالة اليسرى} - \text{الدالة اليمنى}] dy$$

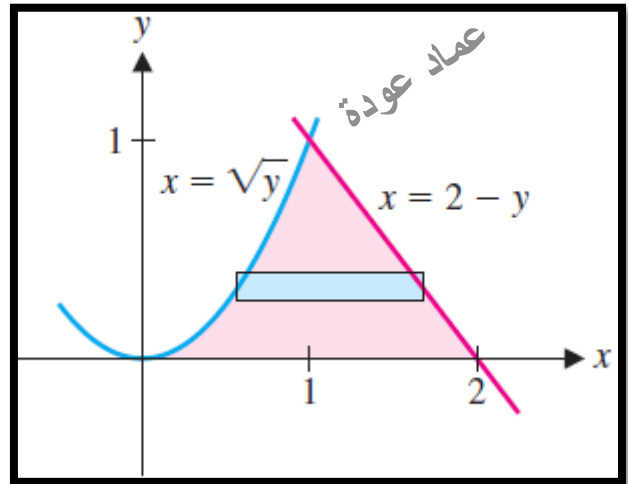
$$A = \int_a^b [f(y) - g(y)] dx$$

Example 4

Find the area bounded by the graphs of

$$y = x^2 \text{ and } y = 2 - x \text{ for } 0 \leq x \leq 2.$$

اوحد المساحة المحصورة بين المنحنيين



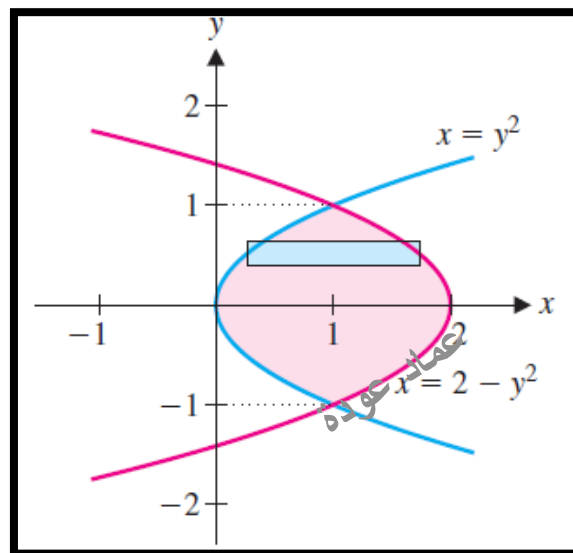
عماد عودة

Example 5

Find the area bounded by the graphs of

$$x = y^2 \text{ and } x = 2 - y^2$$

مثال 5
أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين



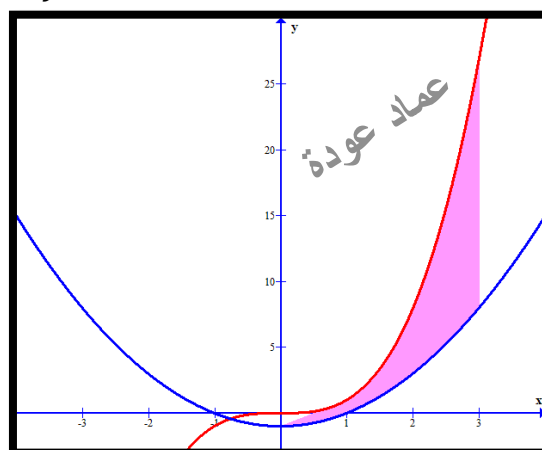
عماد عودة

Exercise 1

Find the area bounded by the graphs of

$$y = x^3 \text{ and } y = x^2 - 1 \text{ for } 1 \leq x \leq 3.$$

تمرين 1
أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين



عماد عودة

عماد عودة

الأستاذ عماد عودة

<https://t.me/+v1n4wuNV2B83NDA0>

<http://www.youtube.com/@imaths2022>

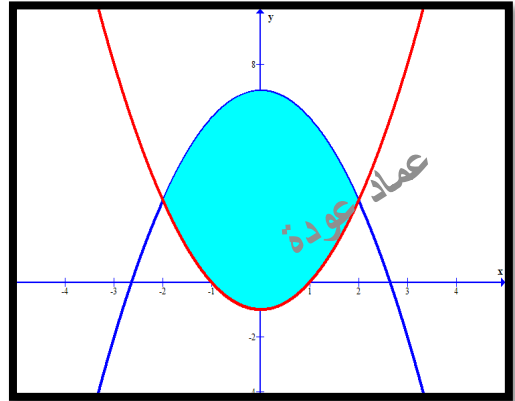
Exercise 5

Find the area bounded by the graphs of

$$y = x^2 - 1, \quad y = 7 - x^2$$

تمرين 5

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين



عماد عودة

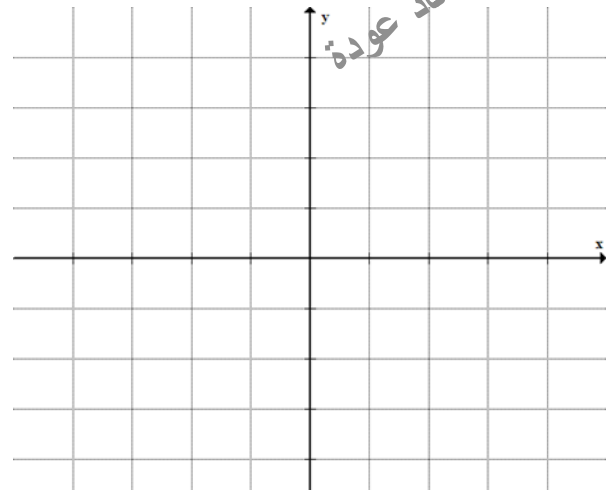
Exercise 6

Find the area bounded by the graphs of

$$y = x^2 - 1, \quad y = \frac{1}{2} x^2$$

تمرين 6

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين



عماد عودة

عماد عودة

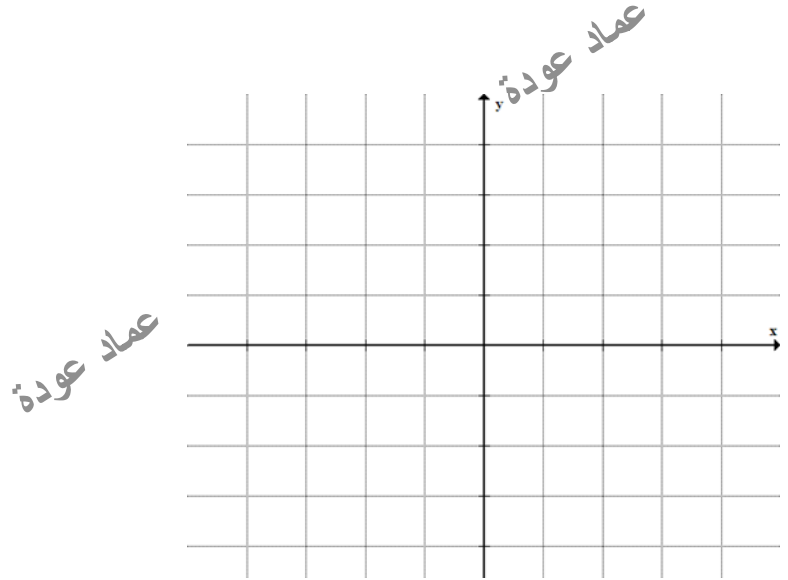
Exercise 7

Find the area bounded by the graphs of

$$y = x^3, \quad y = 3x + 2$$

تمرين 7

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين



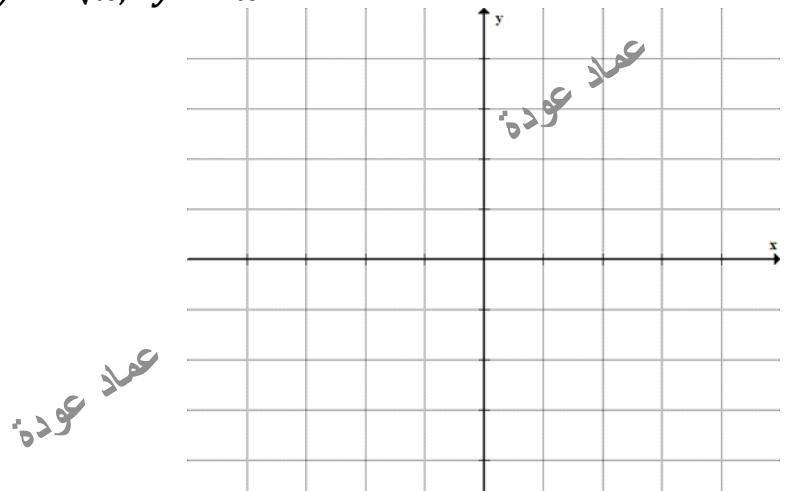
Exercise 8

Find the area bounded by the graphs of

$$y = \sqrt{x}, \quad y = x^2$$

تمرين 8

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين



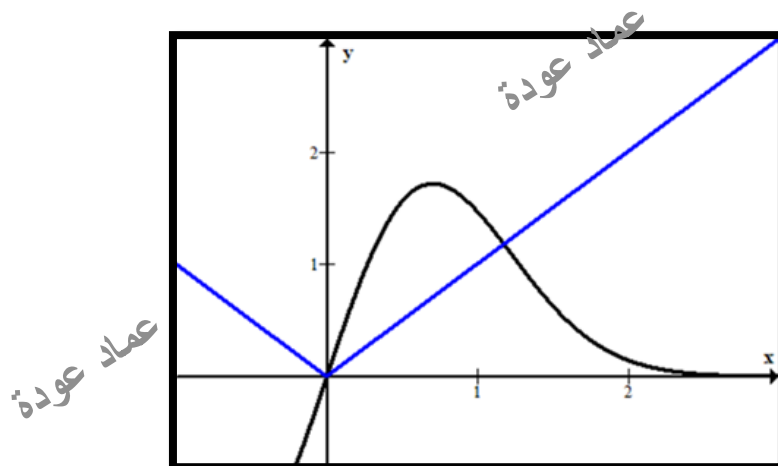
Exercise 9

Find the area bounded by the graphs of

$$y = 4xe^{-x^2}, y = |x|$$

تمرين 9

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين



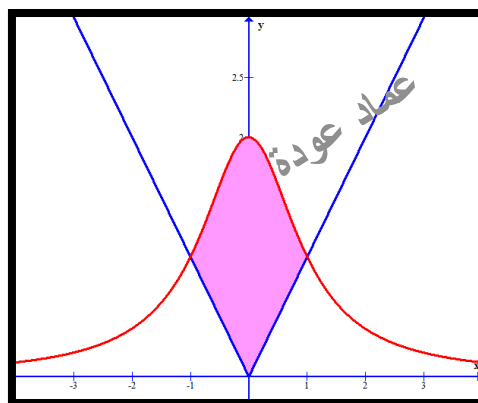
Exercise 10

Find the area bounded by the graphs of

$$y = \frac{2}{x^2 + 1}, y = |x|$$

تمرين 10

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين



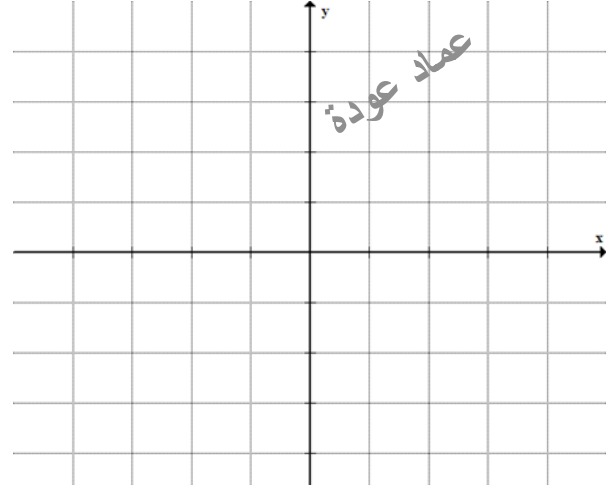
sketch and find the area of the region bounded by the given curves. Choose the variable of integration so that the area is written as a single integral.

ارسم ثم اوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات التالية وذلك باختيار متغير التكامل بحيث تتم كتابة المساحة كتكامل واحد

Exercise 19

تمرين 19

$$y = x, y = 2 - x, y = 0$$

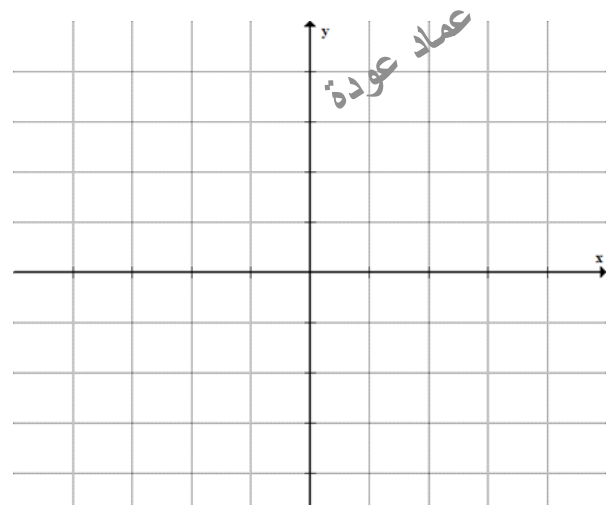


عماد عودة

Exercise 20

تمرين 20

$$y = x, y = 2, y = 6 - x, y = 0$$



عماد عودة

عماد عودة

الأستاذ عماد عودة

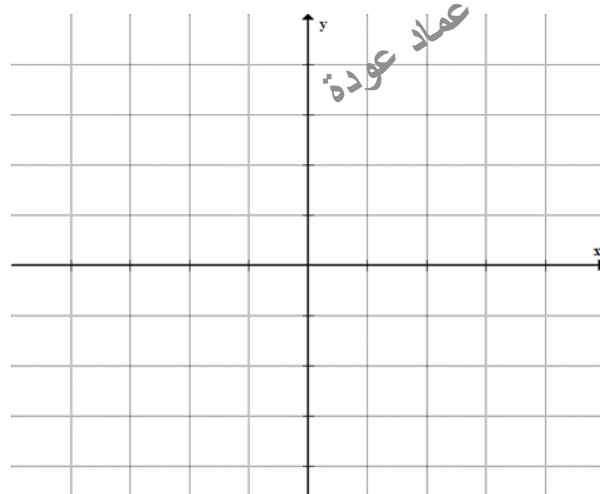
<https://t.me/+v1n4wuNV2B83NDA0>

<http://www.youtube.com/@imaths2022>

Exercise 21

تمرين 21

$$x = y, \quad x = -y, \quad x = 1$$

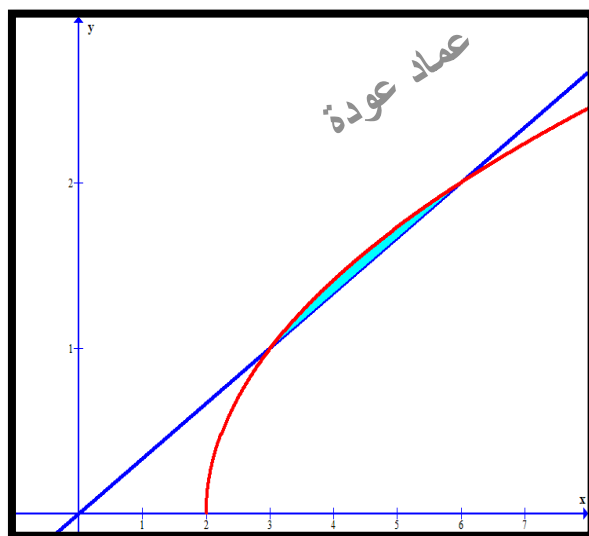


عماد عودة

Exercise 22

تمرين 21

$$x = 3y, \quad x = 2 + y^2$$



عماد عودة

عماد عودة

الأستاذ عماد عودة

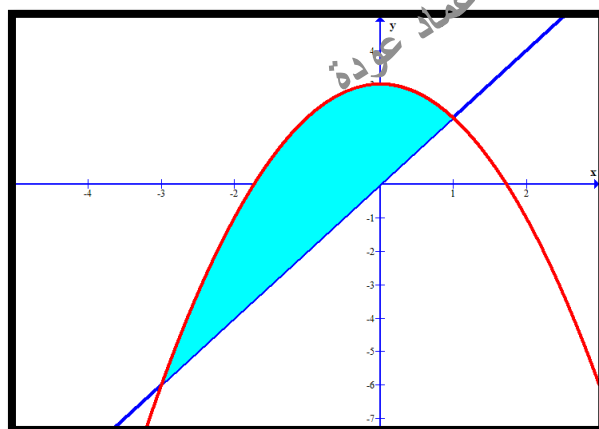
<https://t.me/+v1n4wuNV2B83NDA0>

<http://www.youtube.com/@imaths2022>

Exercise 23

تمرين 23

$$y = 2x, \quad y = 3 - x^2, \quad x = 0$$

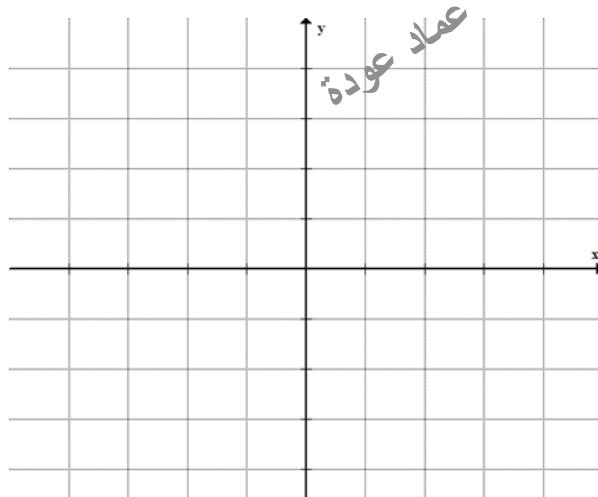


عماد عودة

Exercise 23

تمرين 23

$$y = 2x \ (x > 0), \quad y = 3 - x^2, \quad x = 0$$



عماد عودة

عماد عودة

الأستاذ عماد عودة

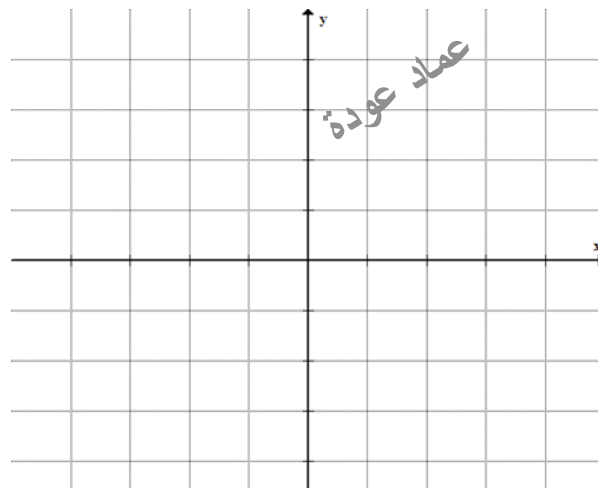
<https://t.me/+v1n4wuNV2B83NDA0>

<http://www.youtube.com/@imaths2022>

Exercise 24

تمرين 24

$$x = y^2, \quad x = 4$$

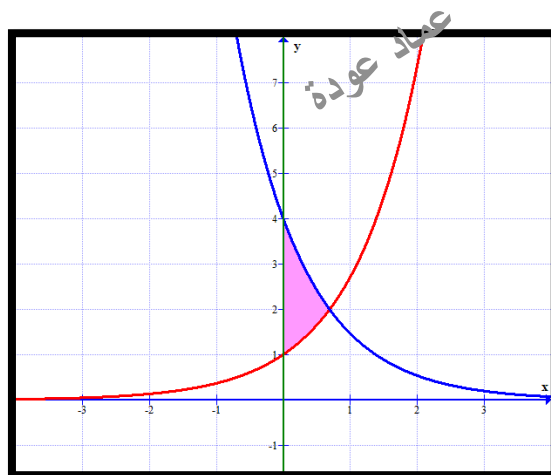


عماد عودة

Exercise 25

تمرين 25

$$y = e^x, \quad y = 4e^{-x}, \quad x = 0$$



عماد عودة

عماد عودة

الأستاذ عماد عودة

<https://t.me/+v1n4wuNV2B83NDA0>

<http://www.youtube.com/@imaths2022>

Exercise 31

The average value of a function $f(x)$ on the interval $[a, b]$ is $A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Compute the average value of

$f(x) = x^2$ on $[0, 3]$ and show that the area above $y = A$ and below $y = f(x)$ equals the area below $y = A$ and above $y = f(x)$.

تمرين 31

إذا كانت نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$

$$A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ هي}$$

احسب القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2$ على $[0, 3]$

ثم بين ان المساحة تحت المنحنى $y = A$ وفوق المنحنى

$y = f(x)$ تساوي المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$

وفوق المنحنى $y = A$

عماد عودة

عماد عودة

عماد عودة

عماد عودة

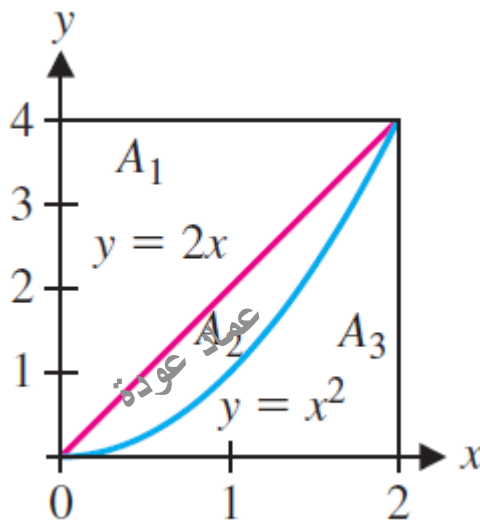
عماد عودة

عماد عودة

Exercise 39

In terms of A_1 , A_2 and A_3 , identify the area given by each integral.

تمرين 39
بدلالة A_1, A_2, A_3 حدد المنطقة التي تمثل كل من التكاملات التالية



(a) $\int_0^2 (2x - x^2) dx$

(b) $\int_0^2 (4 - x^2) dx$

(c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y}) dy$

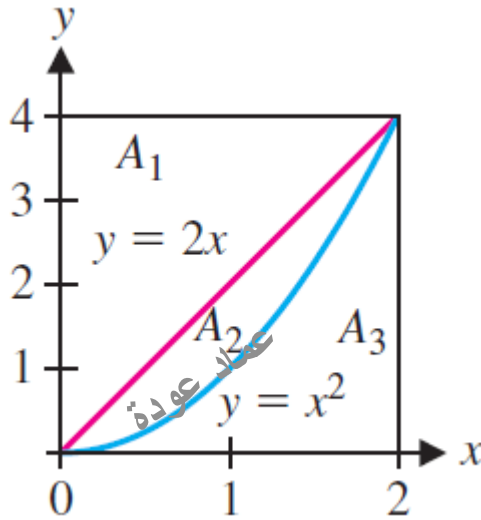
(d) $\int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2}) dy$

Exercise 40

Give an integral equal to each area.

تمرين 40

اكتب تكاملاً يمثل المساحة المحددة في كل ما يلي



عماد عودة

(a) $A_2 + A_3$

عماد عودة

(b) $A_1 + A_2$

عماد عودة

(c) A_1

(d) A_3

عماد عودة

عماد عودة

اختبر نفسك (1)
Check yourself (1)

Mathematics الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الثالث

2024-2023

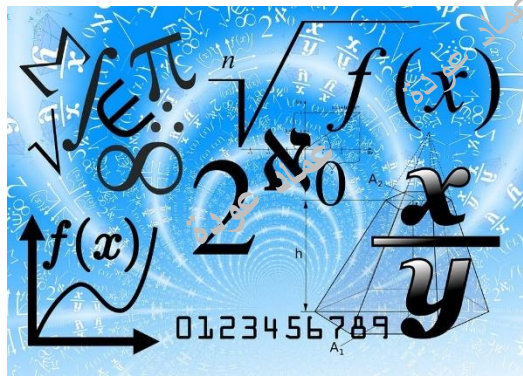
Lesson 6-1 (AREA BETWEEN CURVES)

according to the previous exam

مراجعة الدرس الاول (المساحة بين المنحنيات)
من الوحدة السادسة اعتمادا على
الاختبارات السابقة

الأستاذ عماد عودة

عماد عودة



عماد عودة

عماد عودة

اسم الطالب: -



الأستاذ عماد عودة

<https://t.me/+v1n4wuNV2B83NDA0>

<http://www.youtube.com/@imaths2022>

Part One MCQ

Q1: - Find the area of the region bounded by the given curves

س1: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

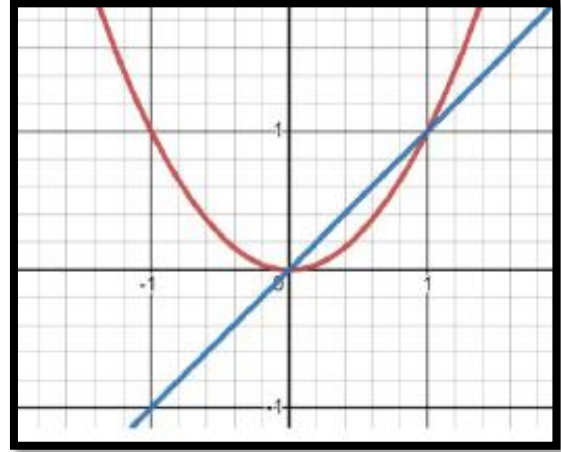
$$y = x, y = x^2$$

a) $A = \int_{-1}^1 (x - x^2) dx$

b) $A = \int_0^1 (x - x^2) dx$

c) $A = \int_{-1}^1 (x^2 - x) dx$

d) $A = \int_0^1 (x^2 - x) dx$



imad Odh

Q2: - Find the area of the region bounded by the given curves

س2: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

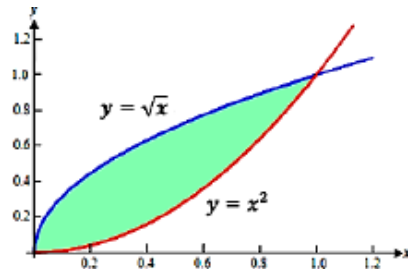
$$y = \sqrt{x}, y = x^2$$

a) $A = \frac{1}{6}$

b) $A = \frac{1}{3}$

c) $A = \frac{8}{3}$

d) $A = \frac{16}{3}$



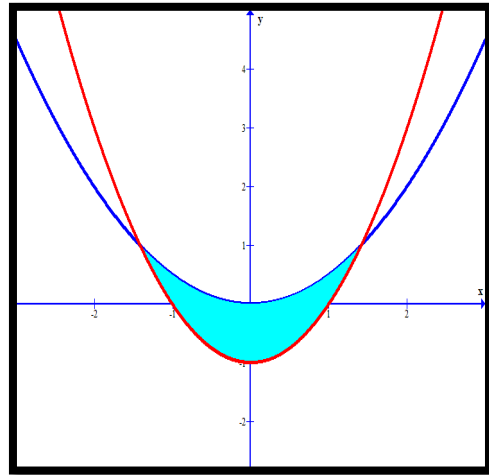
imad Odh

Q3: - Find the area of the region bounded by the given curves

س3: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = x^2 - 1, \quad y = \frac{1}{2} x^2$$

- a) $\int_{-1}^1 \left(1 - \frac{1}{2} x^2\right) dx$
- b) $\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} x^2 + 1\right) dx$
- c) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} x^2 + 1\right) dx$
- d) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2} x^2\right) dx$



imathsh

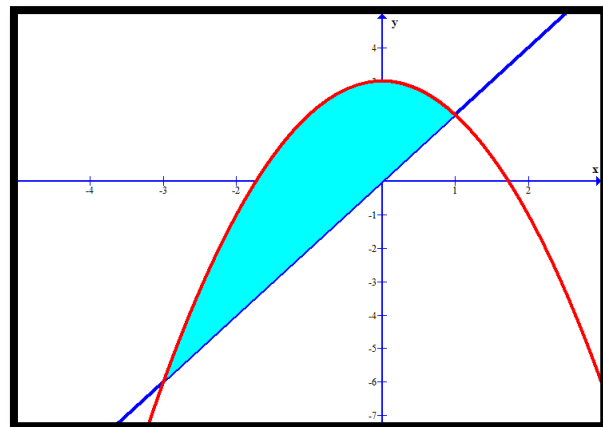
عماد عودة

Q4: - Find the area of the region bounded by the given curves

س4: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = 2x, \quad y = 3 - x^2, \quad x = 0$$

- a) $A = \frac{32}{3}$
- b) $A = \frac{16}{3}$
- c) $A = \frac{32}{3} \pi$
- d) $A = \frac{16}{3} \pi$



imathsh

الأستاذ عماد عودة

<https://t.me/+v1n4wuNV2B83NDA0>

<http://www.youtube.com/@imaths2022>

Q5: - Find the area of the region bounded by the given curves

س5: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

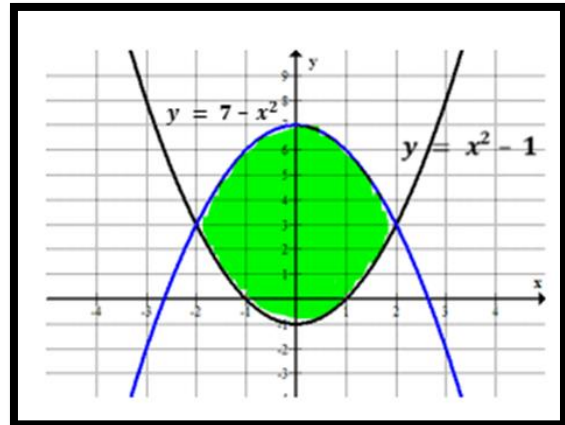
$$y = x^2 - 1, \quad y = 7 - x^2$$

a) $A = \int_{-2}^2 ((7 - x^2) - (x^2 - 1)) \, dx$

b) $A = \int_{-2}^2 ((x^2 - 1) - (7 - x^2)) \, dx$

c) $A = \int_{-1}^7 ((y^2 + 1) - (7 - y^2)) \, dy$

d) $A = \int_{-1}^7 ((7 - y^2) - (y^2 + 1)) \, dy$



imathsoodh

Q6: - Find the area of the region bounded by the given curves

س6: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

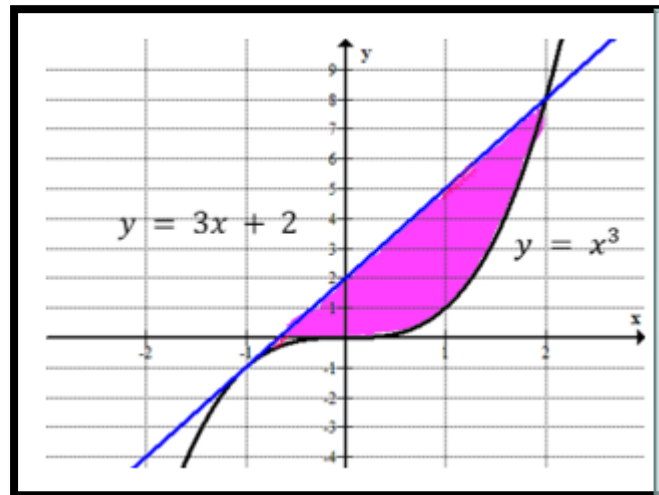
$$y = x^3, \quad y = 3x + 2$$

a) $A = \frac{27}{4}$

b) $A = \frac{4}{27}$

c) $A = \frac{3645}{4}$

d) $A = \frac{15}{2}$



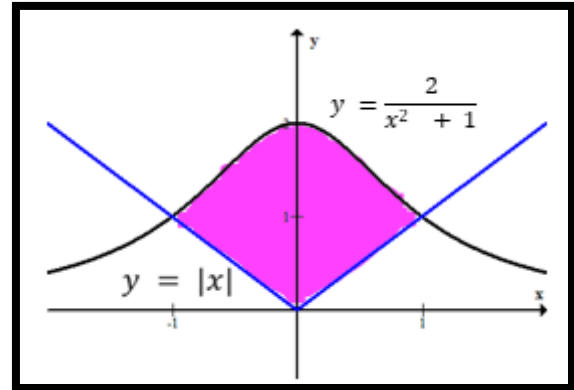
imathsoodh

Q7: - Find the area of the region bounded by the given curves

س6: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = \frac{2}{x^2 + 1}, y = |x|$$

- a) $A = \frac{\pi}{2} - 1$
 b) $A = \pi + 1$
 c) $A = \frac{\pi}{2} + 1$
 d) $A = \pi - 1$



Imad Odeh

Q8: - Find the area of the region bounded by the given curves

س8: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = \sin x, y = x^2 + 2 \text{ on interval } 0 \leq x \leq 2$$

- a) $\frac{17}{3} - \sin 2$
 b) $\frac{17}{3} + \sin 2$
 c) $\frac{17}{3} - \cos 2$
 d) $\frac{17}{3} + \cos 2$

Imad Odeh

Q9: - Find the area of the region bounded by the given curves

س9: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = \cos x, y = x^2 + 2 \text{ on interval } 0 \leq x \leq 2$$

- a) $\frac{14}{3} - \sin 2$
 b) $\frac{20}{3} - \sin 2$
 c) $\frac{20}{3} - \cos 2$
 d) $\frac{14}{3} - \cos 2$

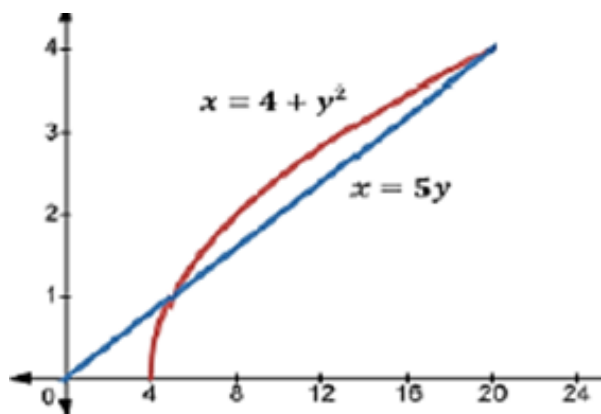
Imad Odh

Q10: - Find the area of the region bounded by the given curves

س10: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$x = 5y, x = 4 + y^2$$

- a) $A = \int_1^4 (5y - (4 + y^2)) dy$
 b) $A = \int_5^{20} (5x - (4 + x^2)) dx$
 c) $A = \int_5^{20} ((4 + y^2) - 5y) dy$
 d) $A = \int_1^4 ((4 + x^2) - 5x) dx$



Imad Odh

Q11: - Find the area of the region bounded by the given curves

س11: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = x^3, y = x^2 - 1, 1 \leq x \leq 3$$

a)

$$A = \int_1^3 x^3 - x^2 - 1 \, dx$$

b)

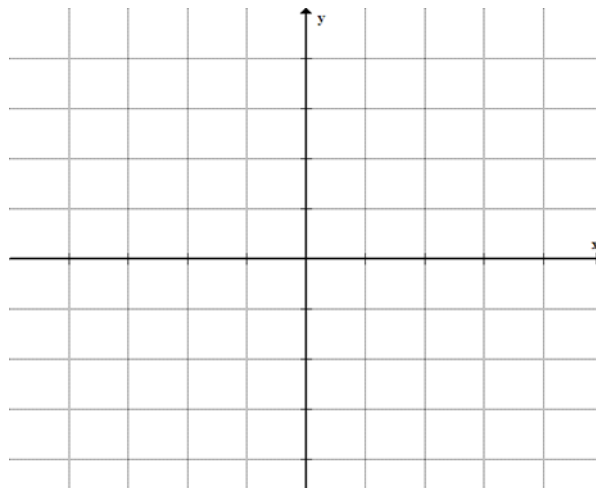
$$A = \int_1^3 x^3 - x^2 + 1 \, dx$$

c)

$$A = \int_1^3 -x^3 - x^2 - 1 \, dx$$

d)

$$A = \int_1^3 -x^3 - x^2 + 1 \, dx$$



Q12: - Find the area of the region bounded by the given curves

س12: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = x, y = 2 - x, y = 0$$

a)

$$A = \int_0^1 2 - 2y \, dy$$

b)

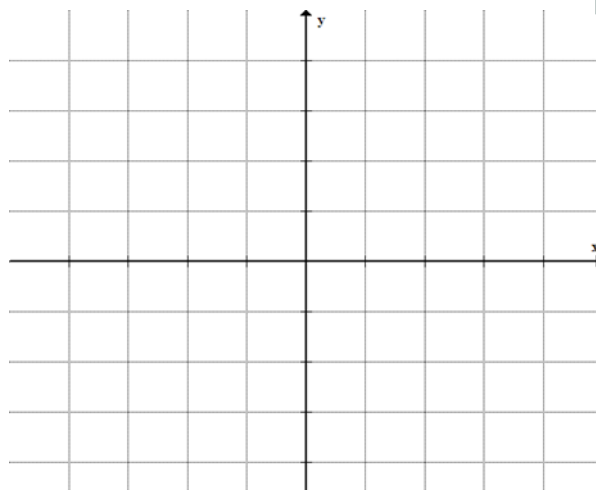
$$A = \int_0^1 2y - 2 \, dy$$

c)

$$A = \int_0^2 2x - 2 \, dx$$

d)

$$A = \int_0^2 2 - 2x \, dx$$

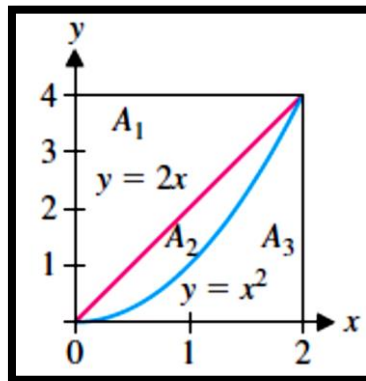


Q13: - In term of A_1, A_2 and A_3 identify the area given by integral

س13: - بدلالة A_1, A_2, A_3 أي مما يلي يمثل المساحة المحددة بالكامل

$$\int_0^4 (2 - \sqrt{y}) dy$$

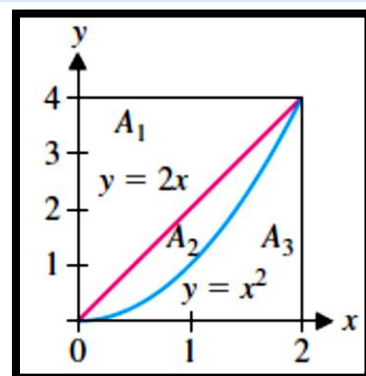
- a) A_1
- b) $A_1 + A_2$
- c) A_3
- d) A_2



Q14: - Give an integral equal to the area.

س14: - اكتب تكاملا يمثل المساحة المحددة في ما يلي

A_2



- a) $\int_0^4 (2x - x^2) dx$
- b) $\int_0^2 (2x - x^2) dx$
- c) $\int_0^4 \left(\frac{y}{2} - \sqrt{y}\right) dy$
- d) $\int_0^4 (y^2 - 2y) dx$

Q15: - In term of A_1, A_2 and A_3 identify the area given by integral

س15: - بدلالة A_1, A_2, A_3 أي مما يلي يمثل المساحة المحددة بالكامل

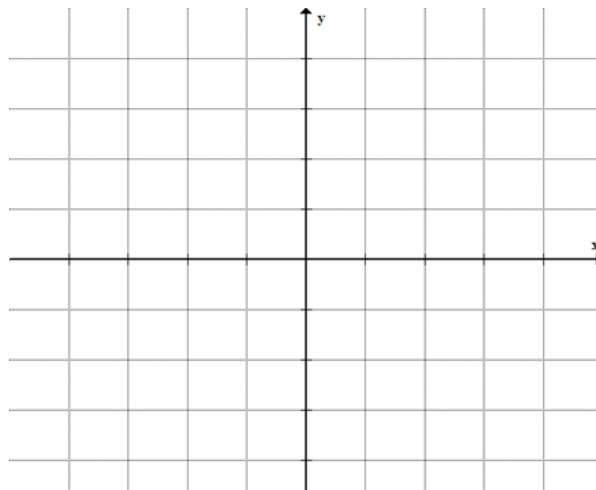
$$x = y^2, \quad x = 4$$

a) $A = \int_0^2 y^2 - 4 \, dy$

b) $A = \int_0^2 4 - y^2 \, dy$

c) $A = \int_{-2}^2 y^2 - 4 \, dy$

d) $A = \int_{-2}^2 4 - y^2 \, dy$



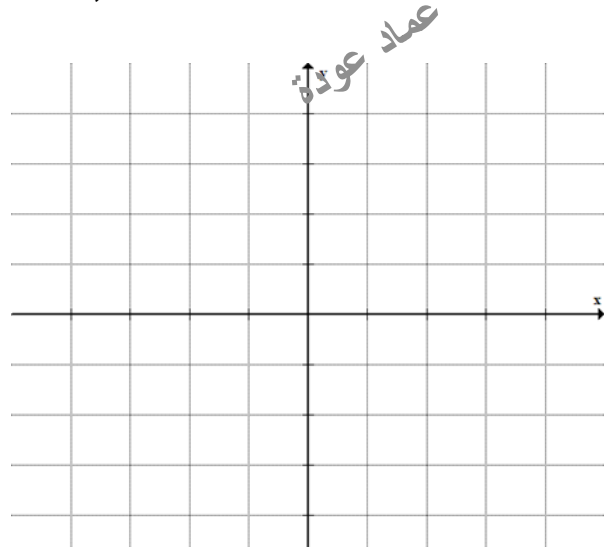
I
m
a
d
O
d
e
h

I
m
a
d
O
d
e
h

القسم الثاني الأسئلة الكتابية
Part Two FAQ

س16: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات
Q16: - Find the area of the region bounded by the given curves

$$y = 2x \ (x > 0), y = 3 - x^2, x = 0$$

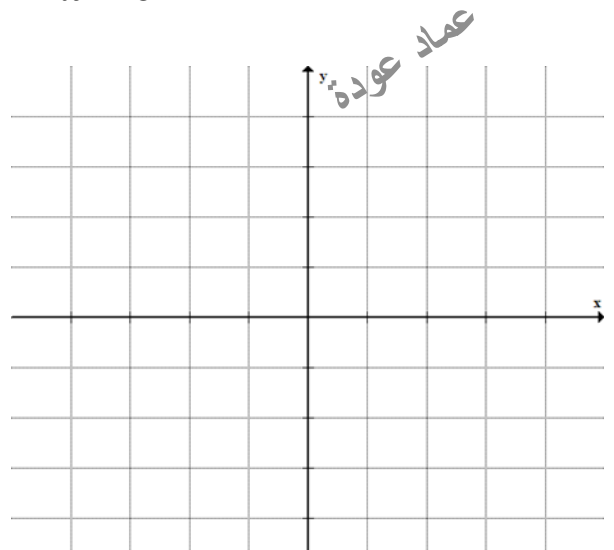


عماد عودة

عماد عودة

س17: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات
Q17: - Find the area of the region bounded by the given curves

$$y = e^x, y = 4e^{-x}, x = 0$$



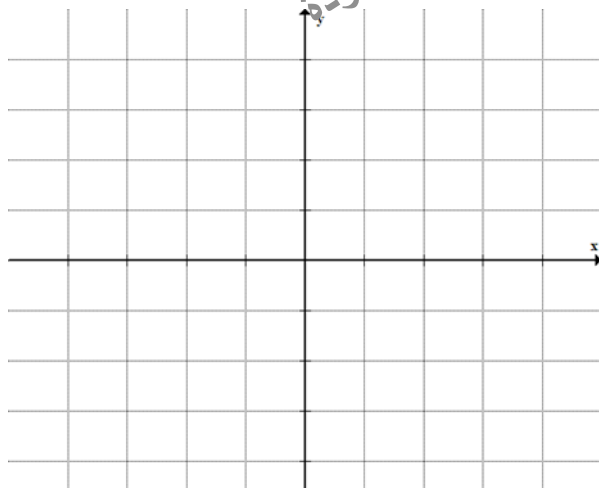
عماد عودة

عماد عودة

Q18: - Find the area of the region bounded by the given curves

س18: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = x, \quad y = 2, \quad y = 6 - x, \quad y = 0$$



عماد عودة

Q19: - Find the area of the region bounded by the given curves

س19: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$x = 3y, \quad x = 2 + y^2$$

عماد عودة

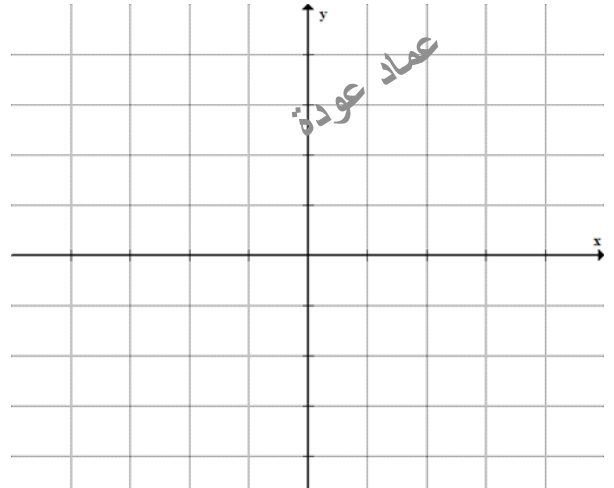
عماد عودة

عماد عودة

Q20: - Find the area of the region bounded by the given curves

س20: - اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$



Imaad h

عماد عودة

عماد عودة

عماد عودة

عماد عودة

أطيب التمنيات

Best wishes

اشترك في قناة التلجرام واليوتيوب يساعدنا في دعمك ومساعدتك لفهم دروسك

الأستاذ عماد عودة

<https://t.me/+v1n4wuNV2B83NDA0>

<http://www.youtube.com/@imaths2022>