

الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل المحدود

رياضيات

الصف 12 متقدم

الفصل الثالث 2024

إعداد / عمرو البيومي

الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل المحدود

1. المساحة بين منحنين
2. الحجم : شرائح وحلقات واقراص
3. الأحجام بالاصدا ف الاسطوانية (اثرئي)
4. طول القوس ومساحة السطح
5. حركة المقزوفات
6. تطبيقات التكامل علي الفيزياء والهندسة (اثرئي)
7. الإحتمال (اثرئي)

الوحدة السابعة

طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية

1. مراجعة الصيغ وطرائق التكامل
2. التكامل بالاجزاء
3. طرائق تكامل الدوال المثلثية
4. تكامل الدوال النسبية بالكسور الجزئية
5. جداول التكامل وأنظمة الحاسوب الجبرية (اثنى)
6. نمذجة المعادلات التفاضلية
7. المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

الوحدة السادسة

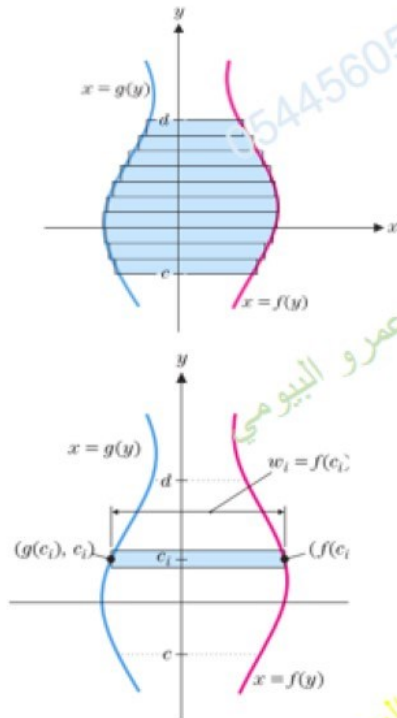
تطبيقات التكامل المحدود

المساحة المحصورة بين منحنين

المساحة بين منحنين

يسار - يمين

فوق - تحت



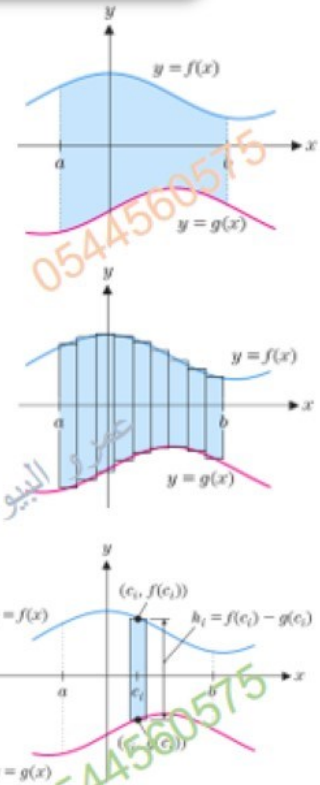
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta y = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy.$$

يسار - يمين

$$x = f(y), \quad x = g(y)$$

أفقية من محور y : من أسفل إلى أعلى

$$y = c, \quad y = d$$



$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

فوق - تحت

$$y = f(x), \quad y = g(x)$$

رأسية من محور x : من اليسار إلى اليمين

$$x = a, \quad x = b$$

الدوال

حدود التكامل

النوع الأول التكامل بالنسبة لـ x أي فوق - تحت

جد المساحة المحصورة بين المنحنيين علي الفترة المعطاه

1. $y = x^3, y = x^2 - 1, 1 \leq x \leq 3$

عمرو البيومي

عمرو البيومي

2. $y = \cos x, y = x^2 + 2, 0 \leq x \leq 2$

0544560575

0544560575

عمرو البيومي

عمرو البيومي

3. $y = e^x, y = x - 1, -2 \leq x \leq 0$

عمرو البيومي

0544560575

0544560575

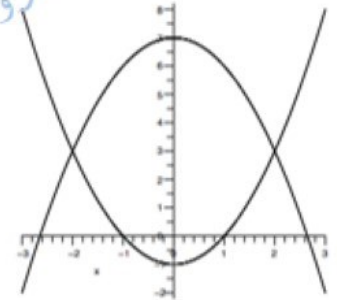
عمرو البيومي

ارسم وجد مساحة المنطقة التي تحددها تقاطعات المنحنيات

$$y = x^2 - 1, y = 7 - x^2$$

عمرو البيومي

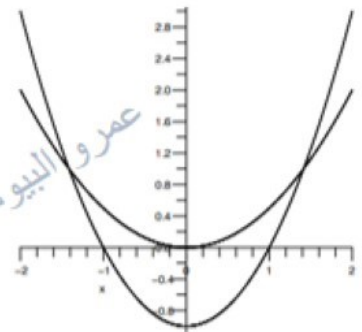
عمرو البيومي



$$y = x^2 - 1, y = \frac{1}{2}x^2$$

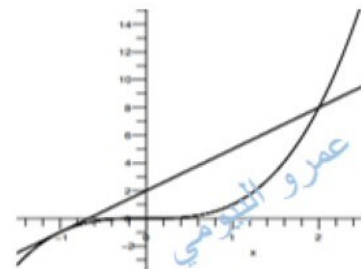
عمرو البيومي

عمرو البيومي



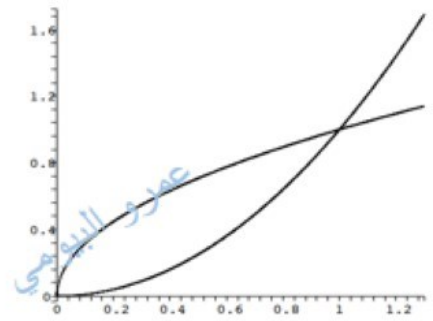
$$y = x^3, y = 3x + 2$$

عمرو البيومي



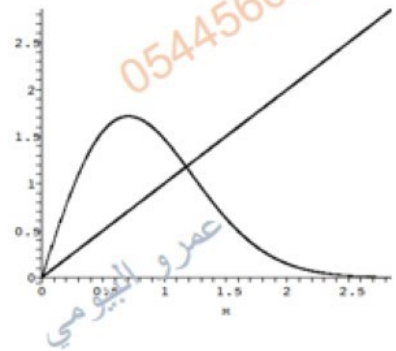
$$y = \sqrt{x}, y = x^2$$

عمرو البيومي



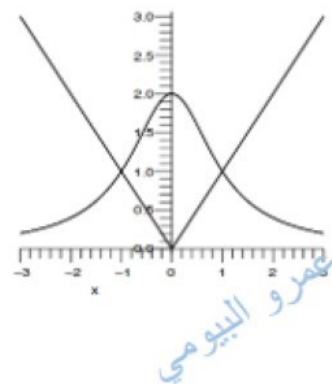
$$y = 4xe^{-x^2}, y = |x|$$

عمرو البيومي



$$y = \frac{2}{x^2 + 1}, y = |x|$$

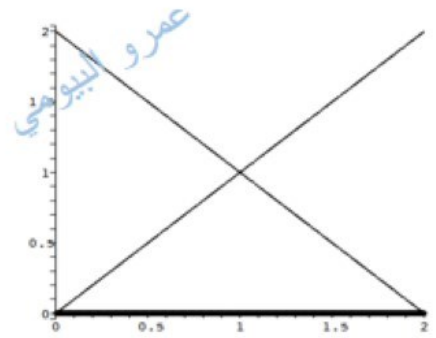
عمرو البيومي



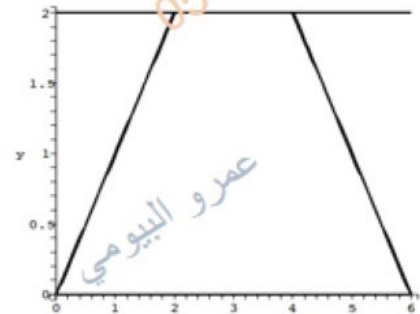
النوع الثاني التكامل بالنسبة لـ y أي يمين - يسار

ارسم وجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات بحيث تتم كتابة المساحة كتكامل واحد.

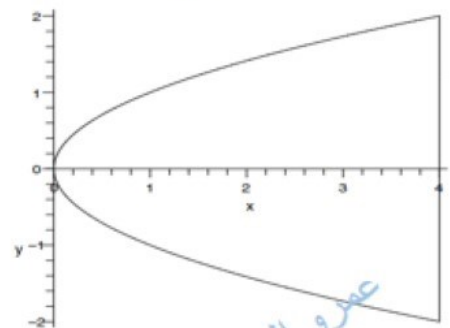
$$y = x, y = 2 - x, y = 0$$



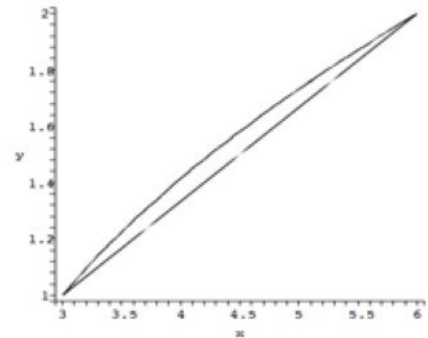
$$y = x, y = 2, y = 6 - x, y = 0$$



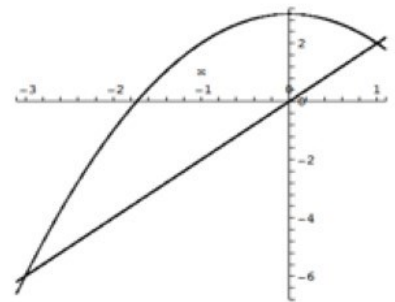
$$x = y^2, x = 4$$



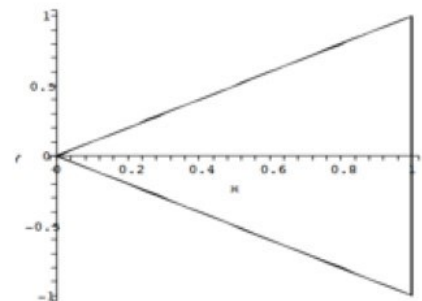
$$x = 3y, x = 2 + y^2$$



$$y = 2x (x > 0), y = 3 - x^2, x = 0$$



$$x = y, x = -y, x = 1$$



قاعدة سيمبسون

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n(f) = \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

x (cm)	0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x)$ (N)	0	1100	2600	5200	7700
$f_e(x)$ (N)	0	44	440	1200	7700

استخدم قاعدة سيمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي احتفظت بها كرة البيسبول.

عند حدوث اصطدام بين كرة وجسم مصمم للضرب (مثل مضرب بيسبول أو مضرب تنس)، يتغير شكل الكرة، تنكمش أولاً ومن ثم تتمدد. إذا كانت x تمثل التغيير في قطر الكرة (على سبيل المثال، بالسنتيمتر) لكل $0 \leq x \leq m$ و $f(x)$ القوة بين الكرة والجسم المصمم للضرب (على سبيل المثال، بالنيوتن). إذا تتناسب المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ مع الطاقة المنقولة. على فرض $f_c(x)$ هي القوة أثناء الإنكماش و $f_e(x)$ هي القوة أثناء التمدد. اشرح سبب تناسب $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)] dx$ مع الطاقة المفقودة من الكرة (بسبب الاحتكاك) وبذلك تكون $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)] dx / \int_0^m f_c(x) dx$ هي نسبة الطاقة المفقودة أثناء الاصطدام. بالنسبة لكرة ومضرب بيسبول

0544560575

عمرو البيومي

عمرو البيومي

عمرو البيومي

0544560575

0544560575

عمرو البيومي

x (cm)	0	1.125	2.250	3.375	4.5
$f_c(x)$ (N)	0	880	2200	4400	7900
$f_c(x)$ (N)	0	550	1540	3000	7900

باستخدام المفهوم نفسه تُعطى القيم للقوة $f_c(x)$ أثناء إنكماش كرة الجولف والقوة $f_c(x)$ أثناء تمددها من العلاقة

استخدم قاعدة سمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي احتفظت بها كرة الجولف.

عمرو البيومي

عمرو البيومي

0544560575

0544560575

عمرو البيومي

عمرو البيومي

عمرو البيومي

0544560575

0544560575

عمرو البيومي

3. $y = e^x, y = x - 1, -2 \leq x \leq 0$

A) $5 - e^2$	B) $5 - e^{-2}$	C) $5 - e^4$	D) $5 - e^6$
-----------------	--------------------	-----------------	-----------------

4. $y = e^{-x}, y = x^2, 1 \leq x \leq 4$

A) $\frac{340}{3}$	B) $\frac{68}{3}$	C) $\frac{64}{3}$	D) $\frac{80}{3}$
-----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

جد المساحة المحصورة بين المنحنين

1. $y = x^3, y = x^2 - 1, 1 \leq x \leq 3$

A) $\frac{20}{3}$	B) $\frac{10}{3}$	C) $\frac{40}{3}$	D) $\frac{80}{3}$
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

2. $y = \cos x, y = x^2 + 2, 0 \leq x \leq 2$

A) $\frac{20}{3} - \sin 2$	B) $\frac{10}{3} - \sin 4$	C) $\frac{40}{3} - \sin 6$	D) $\frac{80}{3} - \sin 10$
----------------------------	----------------------------	----------------------------	-----------------------------

25. $y = e^x, y = 4e^{-x}, x = 0$

عمرو البيومي

عمرو البيومي

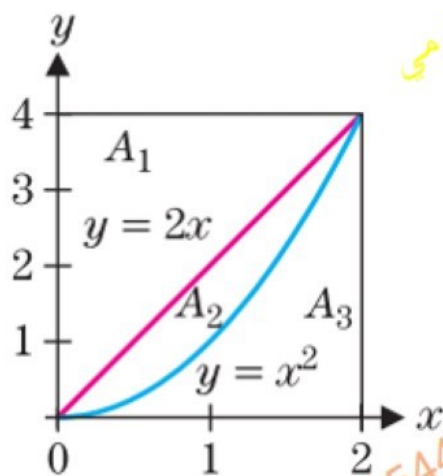
الفصل الثاني

الوحدة السادسة

39. بدلالة A_1, A_2 و A_3 , حدّد المساحة المُعطاة بكل تكامل.

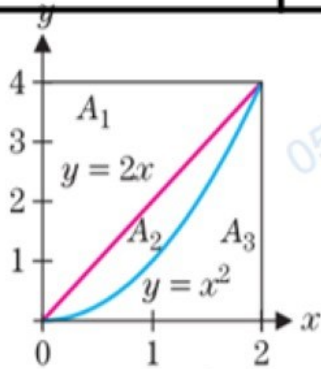
(a) $\int_0^2 (2x - x^2) dx$

A) A1	B) A2	C) A3	D) A3-A2
------------------------	------------------------	------------------------	---------------------------



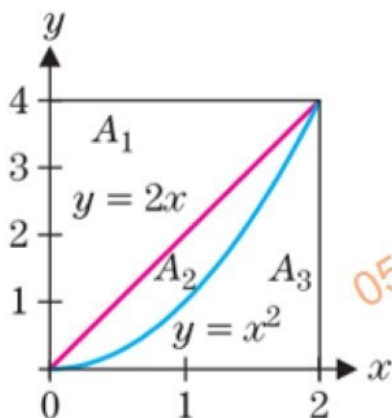
(b) $\int_0^2 (4 - x^2) dx$

A) A1	B) A2	C) A3	D) A3-A2
------------------------	------------------------	------------------------	---------------------------



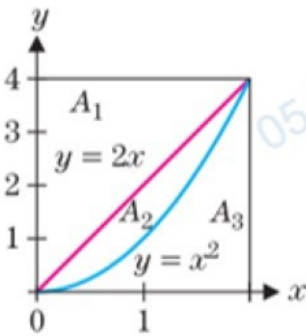
(c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y}) dy$

A) A1	B) A2	C) A3	D) A3-A2
------------------------	------------------------	------------------------	---------------------------



(d) $\int_0^4 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{2} \right) dy$

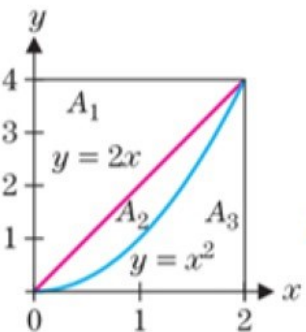
A) A1	B) A2	C) A3	D) A3-A2
------------------------	------------------------	------------------------	---------------------------



أعط تكاملاً مساوياً لكل مساحة.

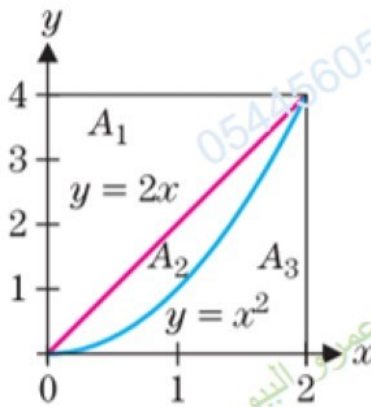
(a) $A_2 + A_3$

A) $\int_0^4 \left(2 - \frac{y}{2} \right) dy.$	B) $\int_0^2 (4 - 2x) dx$	C) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y}) dy$	D) $\int_0^2 (4 - x^2) dx$
--	-------------------------------------	---	--------------------------------------



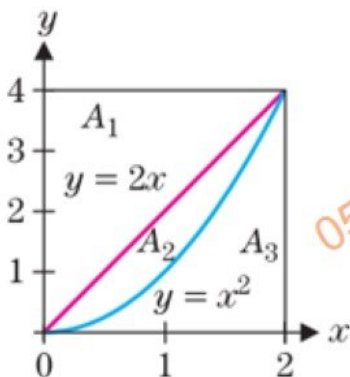
(b) $A_1 + A_2$

A) $\int_0^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy.$	B) $\int_0^2 (4 - 2x) dx$	C) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y}) dy$	D) $\int_0^2 (4 - x^2) dx$
--	-------------------------------------	---	--------------------------------------



(c) A_1

A) $\int_0^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy.$	B) $\int_0^2 (4 - 2x) dx$	C) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y}) dy$	D) $\int_0^2 (4 - x^2) dx$
--	-------------------------------------	---	--------------------------------------



(d) A_3

A)

$$\int_0^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy.$$

B)

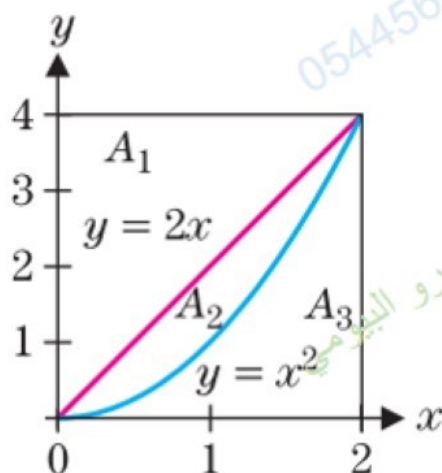
$$\int_0^2 (4 - 2x) dx$$

C)

$$\int_0^4 (2 - \sqrt{y}) dy$$

D)

$$\int_0^2 (4 - x^2) dx$$



Find the area bounded by the graphs $y = -x$, $y = \sqrt{x}$ and $y = 2$. Choose the variable of integration to write the area as a single integral.

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات $y = -x$, $y = \sqrt{x}$ و $y = 2$.

اختر متغير التكامل لكتابة المساحة على صورة تكامل واحد.

a) $\int_0^2 (y^2 + y) dy$

b) $\int_0^2 (y^2 - y) dy$

c) $\int_{-2}^4 (\sqrt{x} + x) dy$

d) $\int_{-2}^4 (\sqrt{x} - x) dy$

Find the area bounded by the graphs of

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$y = \cos x$, $y = x^2 + 1$, $0 \leq x \leq 2$

a) $\frac{20}{3} - \sin 2$

b) $\frac{14}{3} - \cos 2$

c) $\frac{20}{3} - \cos 2$

d) $\frac{14}{3} - \sin 2$

Find The Area between

$y^2 = x$

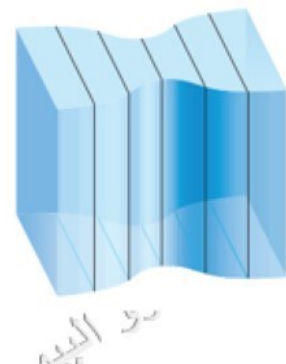
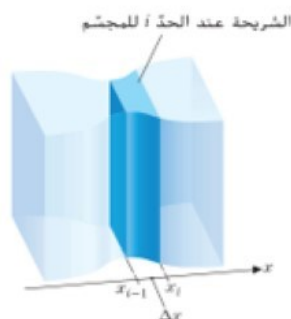
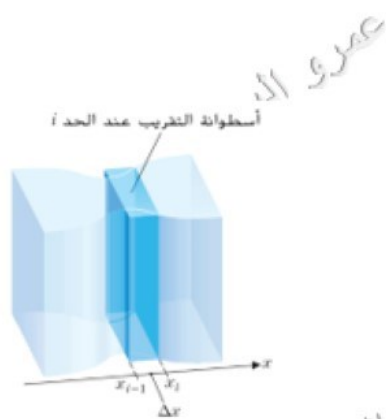
; $x = 36$

أوجد المساحة المحصورة بين

$A = \int_{-6}^6 (y^2 - 36) dy$	$A = \int_0^{36} (36 - \sqrt{x}) dx$	$A = \int_{-6}^6 (36 - y^2) dy$	$A = \int_0^{36} (\sqrt{x} - 36) dx$
---------------------------------	--------------------------------------	---------------------------------	--------------------------------------

الحجم: شرائح وأقراص وحلقات

المقاطع العرضية



$$V_i \approx$$

$$A(c_i)$$

$$\Delta x$$

مساحة مقطع
عرضي

العرض

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

1) جد دمج المجس مع المقطع العرضي $A(X)$.

1. $A(x) = x + 2, -1 \leq x \leq 3$

عمرو البيومي

عمرو البيومي

2. $A(x) = 10e^{0.1x}, 0 \leq x \leq 10$

عمرو البيومي

عمرو البيومي

3. $A(x) = \pi(4 - x)^2, 0 \leq x \leq 2$

عمرو البيومي

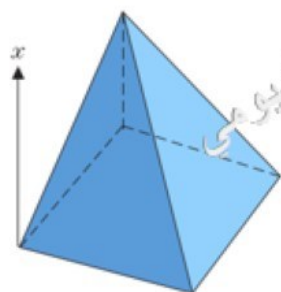
عمرو البيومي

4. $A(x) = 2(x + 1)^2, 1 \leq x \leq 4$

عمرو البيومي

عمرو البيومي

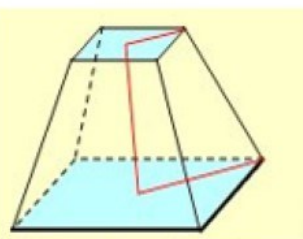
١) للهرم في ممفيس قاعدة مربعة يبلغ طول ضلعها 180 وارتفاعها 100 تقرب الهرم باستخدام هذه القياسات



هرم



يبلغ ارتفاع الهرم الأكبر في الجيزة 152 m. و يرتفع من قاعدة مربعة طول ضلعها 230 m. احسب حجمه باستخدام التكامل.



على فرض أنه بدلاً من إكمال الهرم، توقف عمال البناء في الجيزة عند ارتفاع 250 ft (بهضبة علوية مربعة طول ضلعها 375 ft). احسب حجم هذا البناء. اشرح سبب كون

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n(f) = \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

مثال 2.2 تقدير الحجم من بيانات المقطع العرضي

في التصوير الطبي، مثل التصوير المقطعي بالحاسوب (CT) والتصوير بالرنين المغناطيسي (MRI)، يؤخذ العديد من القياسات وتتم معالجتها بواسطة حاسوب لإنشاء صورة ثلاثية الأبعاد للأنسجة التي يرغب الطبيب في دراستها. تشبه هذه العملية عملية التجزئة إلى شرائح التي استخدمناها لإيجاد حجم مجسم. ولكن، في هذه الحالة، يتم دمج التمثيلات في الرياضيات للشرائح المختلفة من الأنسجة لإنتاج صورة ثلاثية الأبعاد يقوم الأطباء باستعراضها لتحديد مدى صحة الأنسجة. على فرض أن التصوير بالرنين المغناطيسي أظهر أن مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم ما مُعطاة بالقيم المذكورة في الجدول.

x (cm)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$A(x)$ (cm ²)	0.0	0.1	0.4	0.3	0.6	0.9	1.2	0.8	0.6	0.2	0.1

قدّر حجم الورم.

عمرو البيومي

عمرو البيومي

عمرو البيومي

عمرو البيومي

على فرض أن فحص تصوير MRI يبيّن أن مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم كما هو مذكور في الجدول. استخدم قاعدة سمبسون لتقدير الحجم.

x (cm)	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$A(x)$ (cm ²)	0.0	0.2	0.3	0.2	0.4	0.2	0.0

بي

عمرو البيومي

عمرو البيومي

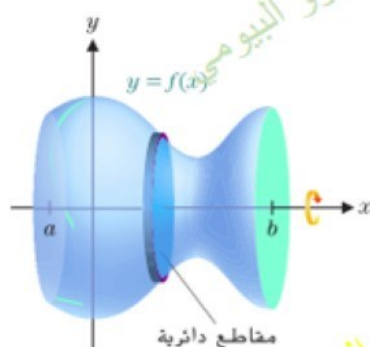
عمرو البيومي

الحجوم الدورانية (الحلقات والاصداغ)

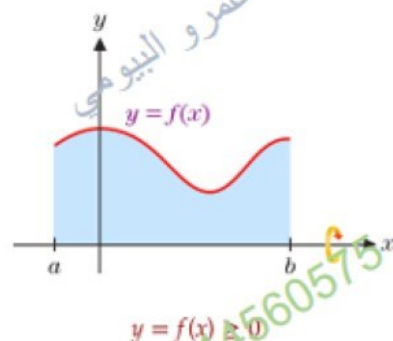
الحلقات (الأقراص): عندما تكون الشريحة عمودية علي محور الدوران وتستخدم عندما يكون حجم الجسم ناتج من دوران المنطقة المحصورة بداله مع محور الدوران

الاصداغ: عندما تكون الشريحة موازية لمحور الدوران وتستخدم عندما يكون حجم الجسم ليس ناتج من دوران المنطقة المحصورة مع محور الدوران

الحاله الاولى الدوران حول محور x في الحلقات يكون التكامل بالنسبة ل x إذا كانت الشريحة توازي محور y



المجسم الناتج عن الدوران



طريقة الأقراص

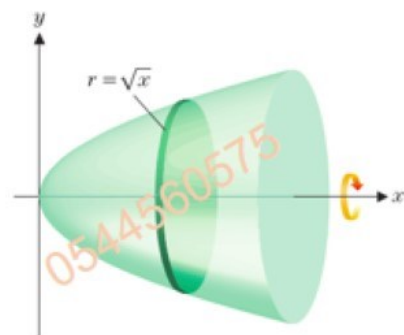
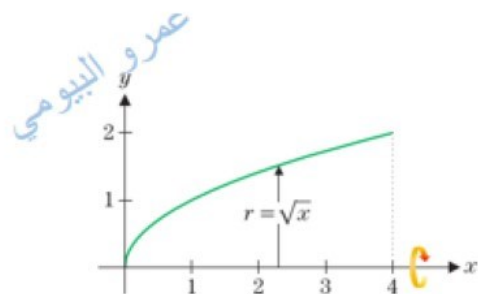
$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

حجم مجسم ناتج عن التدوير
(طريقة الأقراص)

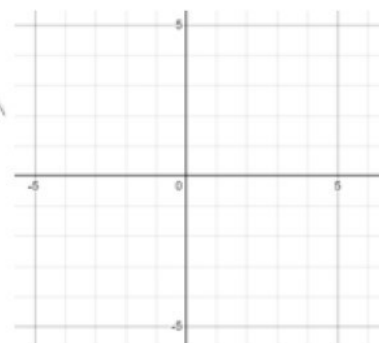
πr^2 = مساحة مقطع عرضي

مثال 2.4 استخدام طريقة الأقراص لحساب الحجم

قم بدوران المنطقة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ على الفترة $[0, 4]$ حول المحور x ووجد حجم المجسم الناتج عن الدوران.



احسب حجم المجسم الذي تكوّن من دوران

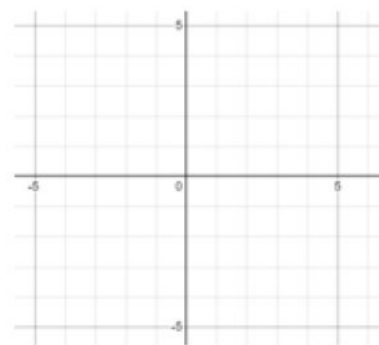
المنطقة المحدودة بواسطة $y = 2 - x$, $y = 0$ و $x = 0$ حول المحور x 

عمرو الببوي

الببوي

عمرو الببوي

عمرو الببوي

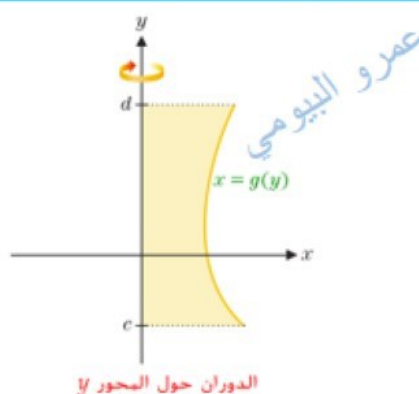
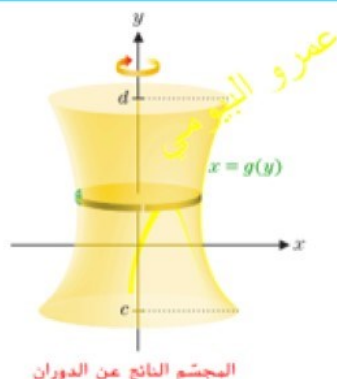
المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$, $y = 4 - x^2$ حول المحور x 

عمرو الببوي

عمرو الببوي

عمرو الببوي

الحالة الثانية الدوران حول محور y في الحلقات يكون التكامل بالنسبة ل y
إذا كانت الشريحة توازي محور x

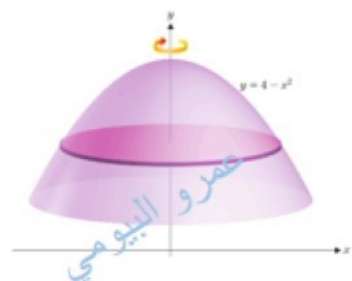
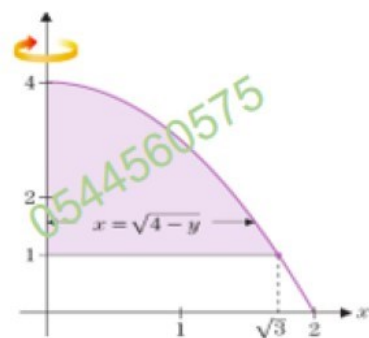


$$V = \int_c^d \underbrace{\pi[g(y)]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي} = \pi r^2} dy.$$

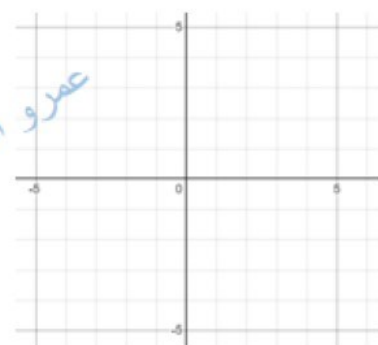
حجم مجسم ناتج عن الدوران
(طريقة الأقراص)

مثال 2.5 استخدام طريقة الأقراص مع y كمتغير مستقل

جد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 1$ من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{3}$ حول المحور y .



احسب حجم المجسم الذي تكوّن من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ و $x = 0$ حول المحور y 

عمرو البيومي

عمرو البيومي

0544560575

0544560575

المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $x = y^2$ حول المحور y 

عمرو البيومي

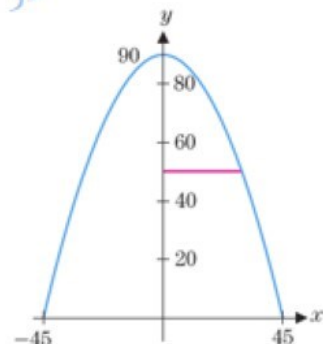
0544560575

0544560575

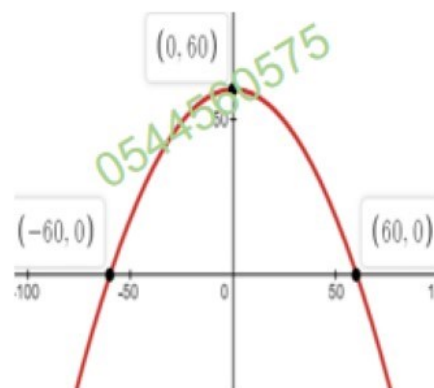
عمرو البيومي

مثال 2.3 حساب حجم قبة

على فرض أن للقبّة مقاطع عرضية دائرية، لها رسم تخطيطي يُعطى بالعلاقة $y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$ لكل $-45 \leq x \leq 45$. (بالسنتيمترات، يعطي هذا الأمر أبعادًا مشابهة لقبة المبنى في الشكل 6.13b). يوضّح الشكل 6.15 تمثيلًا بيانيًا. جـد حجم القبة.



يتم إعطاء الرسم التخطيطي لقبة $y = 60 - \frac{x^2}{60}$ لكل $-60 \leq x \leq 60$ (بالأمتار). بمقاطع عرضية دائرية متعامدة على المحور y . جـد حجمه.



الحجم: هو التكامل المحدود لمساحة المقطع العرضي (مساحة الحلقة)

الحالة الثالثة الدوران حول محور أفقي أو رأسي

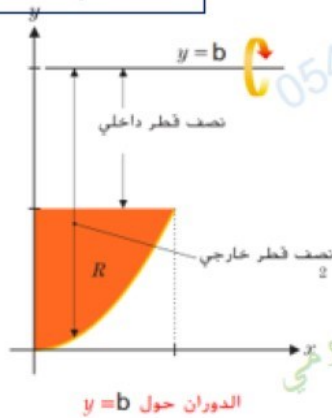
إذا كانت الشريحة توازي محور x تكامل بالنسبة لـ y

حيث: $R(x)$ نصف القطر الخارجي
 $r(x)$ نصف القطر الداخلي

$$V = \pi \int_c^d [R^2(y) - r^2(y)] dy$$

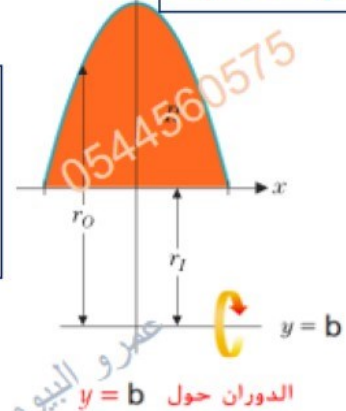
نصف القطر الخارجي = أعلي - أسفل
نصف القطر الداخلي = أعلي - أسفل

المستقيم - المنحني



سواء كان المنحني هو
أعلي أو المستقيم هو
الاعلي

المنحني - المستقيم



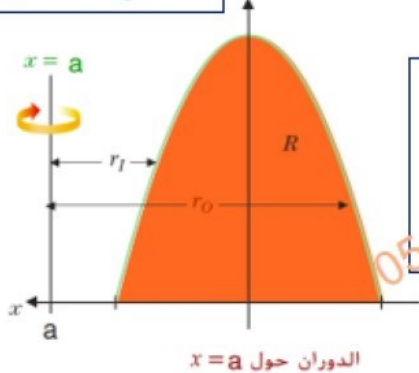
إذا كانت الشريحة توازي محور x تكامل بالنسبة لـ y

حيث: $R(y)$ نصف القطر الخارجي
 $r(y)$ نصف القطر الداخلي

$$V = \pi \int_a^b [R^2(x) - r^2(x)] dx$$

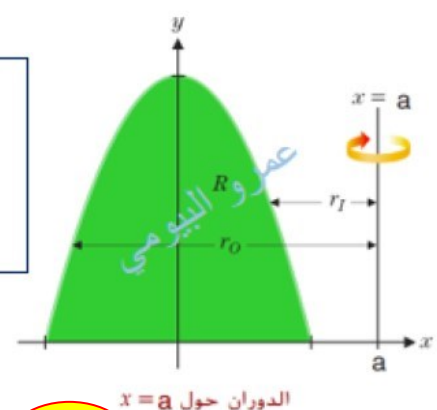
نصف القطر الخارجي = يمين - يسار
نصف القطر الداخلي = يمين - يسار

المستقيم - المنحني



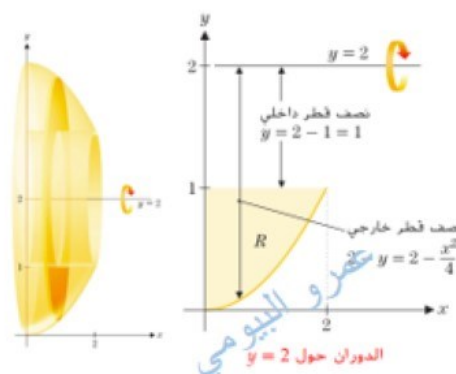
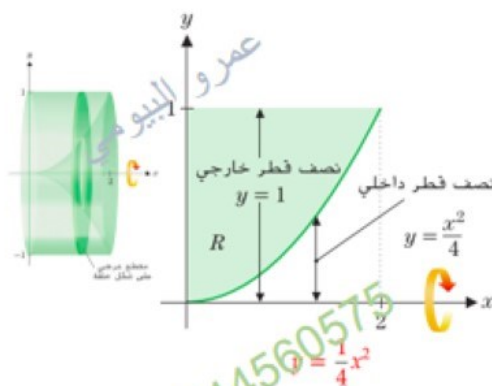
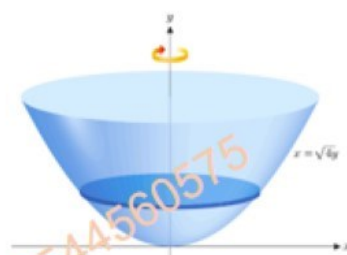
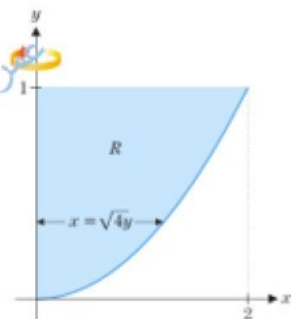
سواء كان المنحني هو
اليمين أو المستقيم هو
اليمين

المستقيم - المنحني

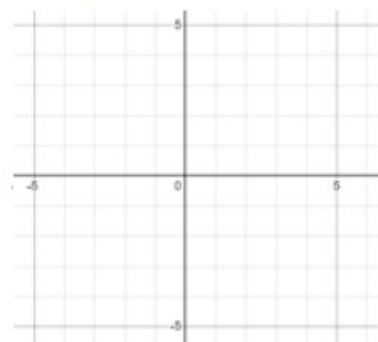


مثال 2.6 حساب أحجام المجسمات المجوفة وغير المجوفة

لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = \frac{1}{4}x^2$, $x = 0$ و $y = 1$. احسب حجم الجسم الذي تكوّن من دوران R حول (a) المحور y و (b) المحور x و (c) المستقيم $y = 2$.



المنطقة المحدودة بواسطة $y=x^2$ و $x=y^2$ حول المحور $x=1$



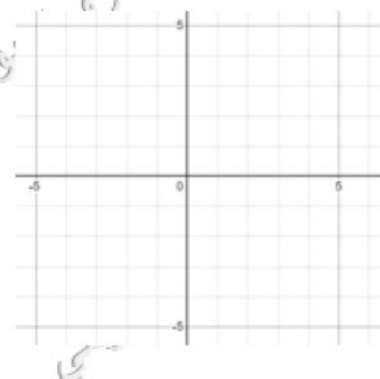
عمرو البيومي

البيومي

عمرو البيومي

عمرو البيومي

المنطقة المحدودة بواسطة $y=2-x$, $y=0$ و $x=0$ حول المحور $y=3$



عمرو البيومي

البيومي

عمرو البيومي

البيومي

عمرو البيومي

عمرو البيومي

المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ و $x = 0$ حول المحور $x = 4$



عمرو البيومي

عمرو البيومي

0544560575

0544560575

المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$, $y = 4 - x^2$ حول المحور $y = 4$



عمرو البيومي

عمرو البيومي

عمرو البيومي

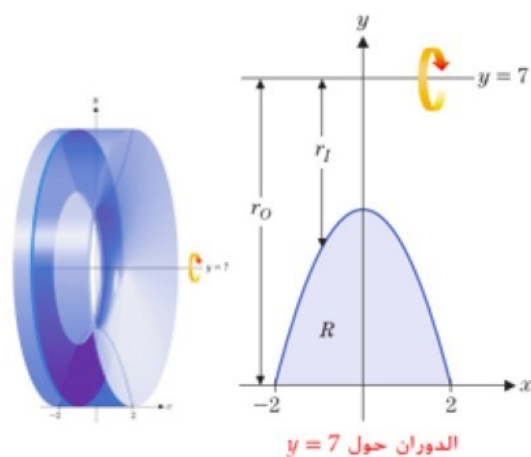
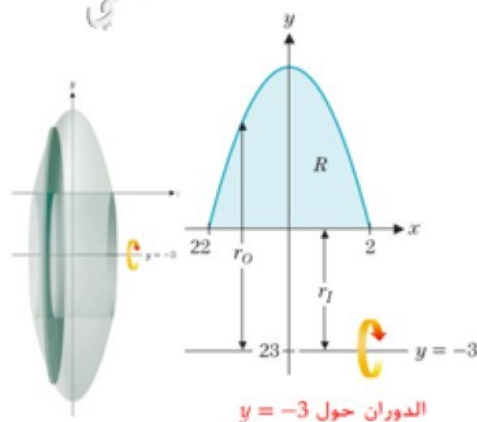
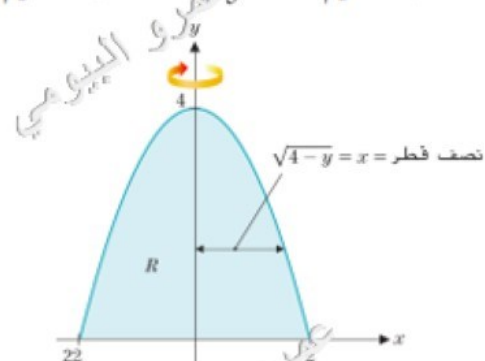
0544560575

0544560575

عمرو البيومي

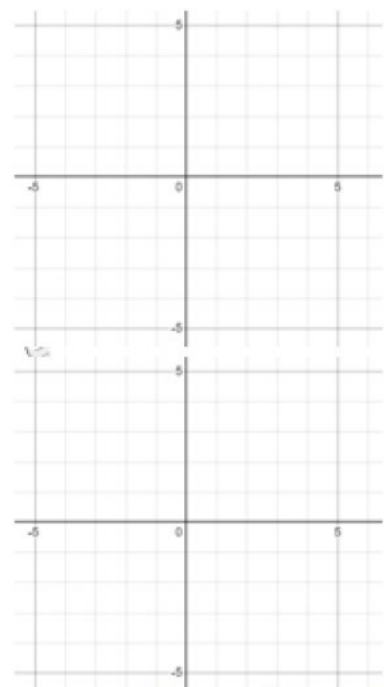
مثال 2.7 دوران منطقة حول مستقيمات مختلفة

لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x^2$ و $y = 0$. جـد أحجام المجسمات التي تم الحصول عليها من دوران R حول كل من التالي: (a) المحور y و (b) المستقيم $y = -3$ و (c) المستقيم $y = 7$ و (d) المستقيم $x = 3$.



يتكون مجسم من دوران المنطقة المذكورة حول المستقيم المذكور. احسب الحجم بالضبط

المساحة المحدودة بواسطة $y = e^x, x = 0, x = 2$ و $y = 0$ حول
(a) المحور y ؛ (b) $y = -2$

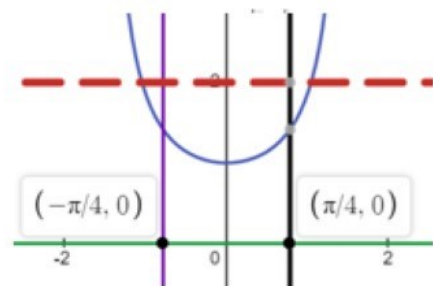


عمرو البيومي

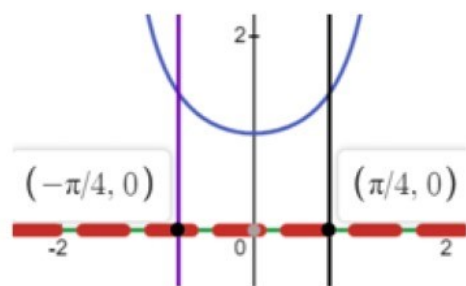
عمرو البيومي

المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sec x, y = 0, x = -\pi/4$ و $x = \pi/4$ حول
(a) $y = 2$ ؛ (b) المحور x

عمرو البيومي

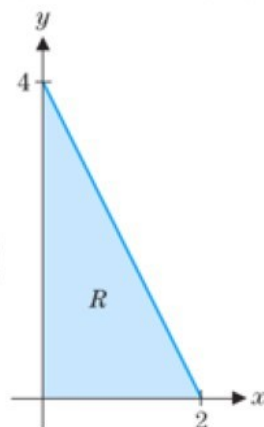


عمرو البيومي

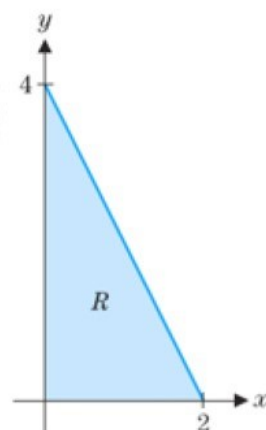


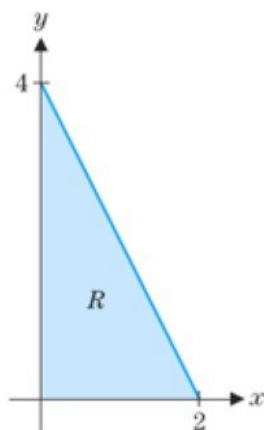
لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحور x والمحور y . احسب حجم المجسم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y



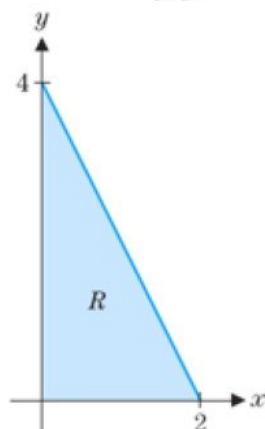
(b) المحور x



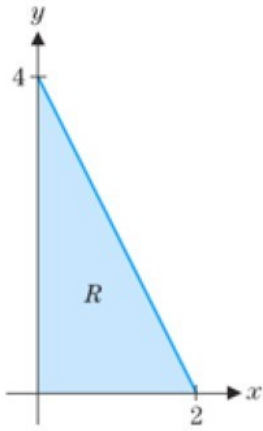


$$y = 4 \text{ (c)}$$

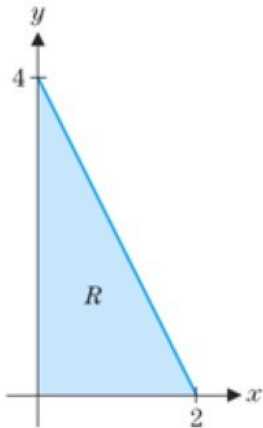
$$y = -4 \text{ (d)}$$



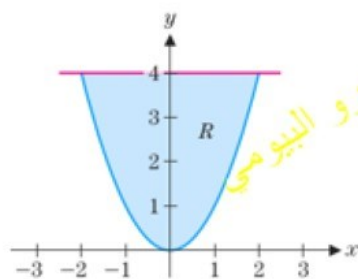
$$x = 2 \text{ (e)}$$



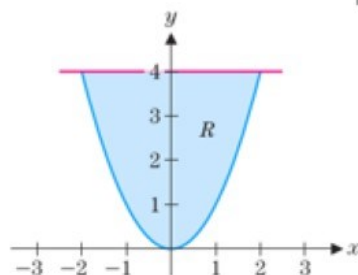
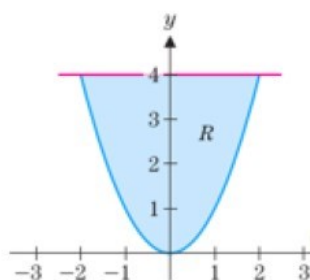
$$x = -2 \text{ (f)}$$



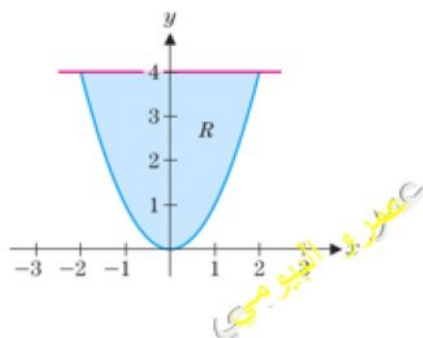
لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 4$.
أحسب حجم المجسم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.



(a) $y = 4$ (b) المحور y (c) $y = 6$



$$y = -4 \text{ (d)}$$

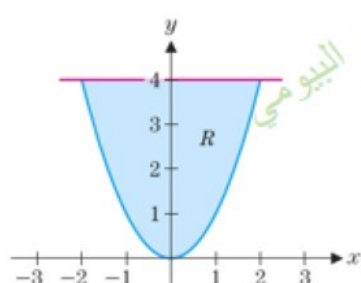


عمرو البيومي

0544560575 عمرو البيومي

عمرو البيومي

0544560575



عمرو البيومي

$$x = -4 \text{ (f)}$$

عمرو البيومي

0544560575

0544560575

عمرو البيومي

Compute the volume of the solid formed by revolving the region between

أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنىي

$$y = x^2, 2 - x = y^2$$

about the y -axis

حول المحور y

Let R be the region bounded by

$$y = x^2, y = 4.$$

لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة

$$y = x^2, y = 4$$

Compute the volume of the solid formed by revolving R about the line $x = -4$.

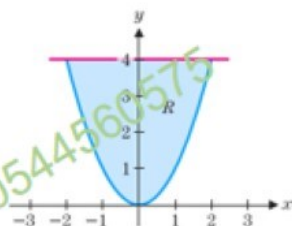
جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة حول المستقيم $x = -4$.

$$a) v = \int_0^4 \pi(\sqrt{y})^2 dy$$

$$a) v = \int_{-2}^2 \pi[4 - x^2]^2 dx$$

$$a) v = \int_0^4 \pi[(4 + \sqrt{y})^2 - (4 - \sqrt{y})^2] dy$$

$$a) v = \int_0^4 \pi[(2 + \sqrt{y})^2 - (2 - \sqrt{y})^2] dy$$



احسب حجم المجس الذي يتكون من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y=x^2$ و $x=y^2$ حول المحور $x=1$

A)	B)	C)	D)
$\frac{11\pi}{30}$	$\frac{1\pi}{3}$	$\frac{15\pi}{7}$	$\frac{11\pi}{3}$

احسب حجم المجس الذي يتكون من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y=x^2$ و $x=y^2$ حول المحور y

A)	B)	C)	D)
$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{1\pi}{3}$	$\frac{15\pi}{7}$	$\frac{11\pi}{3}$

احسب حجم المجس الذي يتكون من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y=\sqrt{x}$, $y=2$ و $x=0$ حول المحور $y=4$

A)	B)	C)	D)
$\frac{224\pi}{15}$	$\frac{171\pi}{3}$	$\frac{15\pi}{7}$	$\frac{11\pi}{3}$

احسب حجم المجس الذي يتكون من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ و $x = 0$ حول المحور x

A)	B)	C)	D)
$\frac{32\pi}{5}$	$\frac{71\pi}{3}$	$\frac{15\pi}{7}$	$\frac{11\pi}{3}$

عمرو البيومي

احسب حجم المجس الذي يتكون من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$, $y = 4 - x^2$ حول المحور y

A)	B)	C)	D)
$\pi(\frac{64\sqrt{2}}{4})$	$\pi(\frac{64\sqrt{2}}{3})$	$\pi(\frac{64\sqrt{2}}{5})$	$2\pi(\frac{64\sqrt{2}}{4})$

عمرو البيومي

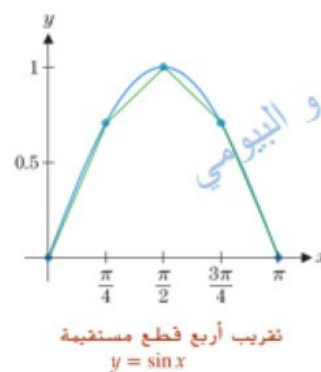
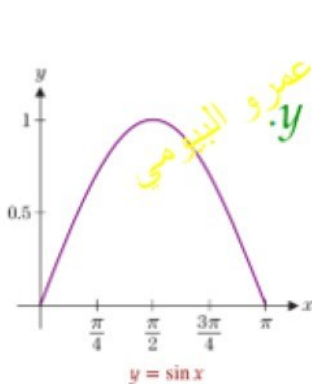
احسب حجم المجس الذي يتكون من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$, $y = 4 - x^2$ حول المحور x

A)	B)	C)	D)
$\pi(\frac{64\sqrt{2}}{4})$	$\pi(\frac{64\sqrt{2}}{3})$	$\pi(\frac{64\sqrt{2}}{5})$	$2\pi(\frac{64\sqrt{2}}{4})$

عمرو البيومي

طول القوس ومساحة السطح



طول القوس
سابقا

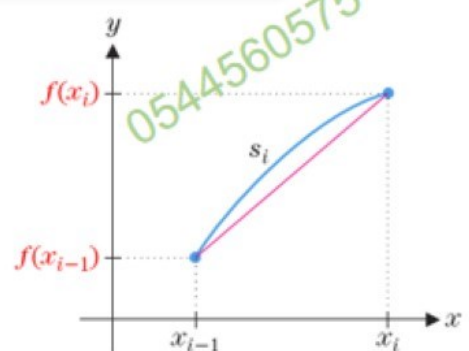
القطع المستقيمة النقاط $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ و $(\pi, 0)$ على المنحنى $y = \sin x$ تقرب لطول القوس s للمنحنى من ناتج جمع أطوال هذه القطع المستقيمة:

$$s \approx \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 3.79$$

الطول	n
3.8125	8
3.8183	16
3.8197	32
3.8201	64
3.8202	128

طول قوس $y = f(x)$ على الفترة $[a, b]$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$



تقريب المستقيم لطول القوس

0544560575

عمر الببوي

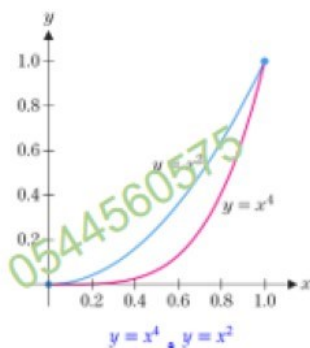
جـد طول القوس الخاص بجزء من منحنى $y = \sin x$ مع $0 \leq x \leq \pi$.

عمر و اليومي

جد طول قوس لجزء من منحنى $y = x^2$ مع $0 \leq x \leq 1$.

0544560575

جـد طول القوس لجزء من المنحنى $y = x^4$ مع $0 \leq x \leq 1$ وقارنه بطول قوس جزء من المنحنى $y = x^2$ على الفترة نفسها.



جد طول قوس لجزء من منحنى $y = 2x + 1, 0 \leq x \leq 2$

0544560575

عمر و اليومي

جد طول قوس لجزء من منحنى $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x, 1 \leq x \leq 2$

عمرو البيومي

عمرو البيومي

$$x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2}, -2 \leq y \leq -1$$

0544560575

0544560575

$$x = e^{y/2} + e^{-y/2}, -1 \leq y \leq 1$$

عمرو البيومي

عمرو البيومي

عمرو البيومي

0544560575

$$y = 2 \ln(4 - x^2), 0 \leq x \leq 1$$

0544560575

عمرو البيومي

ضع تكامل طول المنحنى ثم قرّب التكامل باستخدام طريقة عددية.

$$y = x^3, -1 \leq x \leq 1$$

عمرو البيومي

عمرو البيومي

$$y = x^3, -2 \leq x \leq 2$$

0544560575

0544560575

$$y = \tan x, 0 \leq x \leq \pi/4$$

عمرو البيومي

عمرو البيومي

$$y = \ln x, 1 \leq x \leq 3$$

عمرو البيومي

0544560575

0544560575

عمرو البيومي

$$y = \int_0^x u \sin u \, du, 0 \leq x \leq \pi$$

عمرو البيومي

عمرو البيومي

$$y = \int_0^x e^{-u} \sin u \, du, 0 \leq x \leq \pi$$

0544560575

0544560575

عمرو البيومي

عمرو البيومي

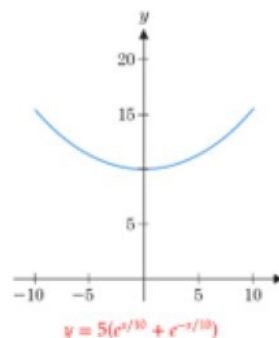
عمرو البيومي

0544560575

0544560575

عمرو البيومي

لربط كابل بين عمودين متساويين في الارتفاع والبعد بينهما 20 m. يمكن توضيح أن مثل هذا الكابل المعلق معادلته سلسلة، وعموماً معادلته $y = a \cosh x/a = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$. في هذه الحالة، على فرض أن الكابل يتخذ شكل $y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$ ، لأجل $-10 \leq x \leq 10$ ، كما هو ظاهر في الشكل. كم يبلغ طول هذا الكابل؟



عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 40 ft. إذا كان الحبل يبدو أنه يتخذ شكل سلسلة معادلته $y = 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$ ، $-20 \leq x \leq 20$ فاحسب طول الحبل.



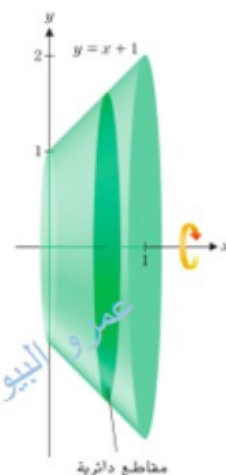
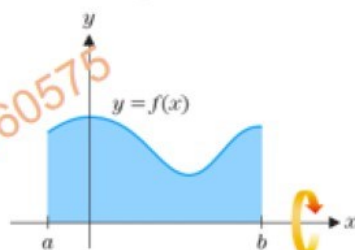
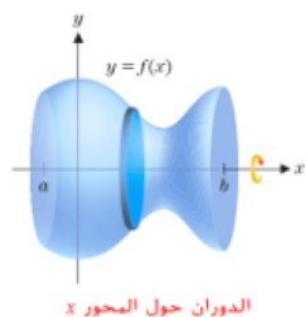
عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 60 ft.
إذا كان الحبل يبدو أنه يتخذ شكل سلسلة معادلته
 $y = 15(e^{x/30} + e^{-x/30})$ ، $-30 \leq x \leq 30$ فاحسب طول الحبل.



مساحة السطح

مساحة سطح مجسم ناتج عن الدوران

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$



مساحة سطح مجسم ناتج عن الدوران

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

جد مساحة سطح متولد من تدوير منحنى $y = x^4$ لكل $0 \leq x \leq 1$ حول المحور x .

ضع التكامل لمساحة السطح الناتج من الدوران وقرب التكامل باستخدام طريقة عددية.

$y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ تم دورانها حول المحور x

$y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ تم دورانها حول المحور x

$y = 2x - x^2$, $0 \leq x \leq 2$ تم دورانها حول المحور x

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$, تم دورانها حول المحور x

عمرو البيومي

عمرو البيومي

$y = \ln x$, $1 \leq x \leq 2$, تم دورانها حول المحور x

0544560575

0544560575

$y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/2$, تم دورانها حول المحور x

عمرو البيومي

عمرو البيومي

عمرو البيومي

0544560575

$y = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$, تم دورانها حول المحور x

0544560575

عمرو البيومي

أوجد طول المنحنى في $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$ حيث $f'(x) = \sqrt{(\tan x)^2 - 1}$

a) 0.34 عمرو البيومي

b) 68 عمرو البيومي

c) 46

d) غير ذلك

أوجد طول القوس $y = -x + 3$ من $x = 0$ إلى $x = 2$

a) 2.828 عمرو البيومي

b) غير ذلك عمرو البيومي

c) 1.43

d) 1.02 عمرو البيومي

أوجد طول القوس $y = x^4$ لكل $-1 \leq x \leq 1$

a) 5.6 عمرو البيومي

c) 1.23 عمرو البيومي

b) غير ذلك عمرو البيومي

d) 3.2 عمرو البيومي

أوجد طول القوس $y = \sin 2x$ لكل $0 \leq x \leq \pi$

a) 7.01

b) 6.23

c) غير ذلك

d) 5.2

أوجد طول المنحنى في $[0, 3]$ حيث $f'(x) = x \sqrt{x^2 + 2}$

a) 12

b) 21

c) 13

d) غير ذلك

أوجد مساحة السطح الناتج من دوران المنطقة المحدودة حول محور x حيث $y = 1 - x^2$ لكل $0 \leq x \leq 1$

a) 5.48

b) 5.84

c) غير ذلك

d) 5.2

أوجد مساحة السطح الناتج من دوران المنطقة المحدودة حول محور x حيث $y = \cos^2 x$ لكل $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

a) 7

b) 6

c) غير ذلك

d) 5

أوجد مساحة السطح الناتج من دوران المنطقة المحدودة حول محور x حيث $y = \cos^2 x$ لكل $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

a) 7

b) 6

c) غير ذلك

d) 5

أوجد طول القوس لمنحنى الدالة $f(x)$ حيث $f'(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$ $[-2, -1]$

A) $\int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + 4x^2} dx$

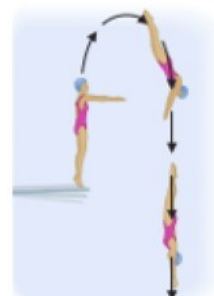
B) $\int_{-2}^{-1} 2x dx$

C) $\int_{-2}^{-1} 4x dx$

D) $\int_{-2}^{-1} -2x dx$

حركة المقذوفات

الحركة في بعدين



$$h''(t) = -32 \text{ ft/s}^2 \quad \text{أو} \quad h''(t) = -9.8 \text{ m/s}^2$$

لأسفل	لأعلى	
-9.8 m/s^2 -32 ft/s^2	-9.8 m/s^2 -32 ft/s^2	التسارع (المجلة)
-	+	السرعة المتجهة
-	+	الإزاحة

زمن الحركة الرأسية كاملة: (الزمن الذي قطعه الجسم في الهواء - زمن الاصطدام
- زمن العودة إلى نقطة القذف)
عندما تنعدم المسافة أي نضع $h(t) = 0$

زمن أقصى ارتفاع: (زمن القيمة العظمى للارتفاع)

عندما تنعدم السرعة أي نضع $h'(t) = 0$

أقصى ارتفاع: (القيمة العظمى للارتفاع)

نعوض بـ $h(t)$ بـ زمن أقصى ارتفاع في المسافة

حدد الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$

أسقط جسم من ارتفاع 80 ft.

أسقط جسم من ارتفاع 100 ft.

أطلق جسم من ارتفاع 60 ft مع سرعة متجهة صعوداً 10 ft/s.

أطلق جسم من ارتفاع 20 ft مع سرعة متجهة نزولاً 4 ft/s.

يسقط غطاس من ارتفاع 30 ft فوق الماء (ارتفاع منصة الغطس الأولمبية نفسه تقريباً). ما السرعة المتجهة للغطاس لحظة الاصطدام؟

إذا كان ارتفاع لوح الغطس 4.5 m فوق مستوى سطح المياه وبدأ الغواص بسرعة متجهة ابتدائية 2.4 m/s (في اتجاه لأعلى)، كم بلغت السرعة المتجهة للغواص عند الاصطدام (بافتراض عدم وجود مقاومة هواء)؟

عمر و اليومي

يسقط غطاس من ارتفاع 120 ft فوق الماء (ارتفاع منصة الغطس في مسابقة Acapulco Cliff Diving نفسه تقريبًا).
ما السرعة المتجهة للغطاس لحظة الاصطدام؟

عمر و البيومي

عمر و اليومى

ارتفاع نصب واشنطن 555 ft, 5 1/8 in. في تجربتي شهيرة.
أسقطت كرة بيسبول من أعلى النصب التذكاري لمعرفة إذا ما
كان اللاعب يمكنه الإمساك بها. ما مدى سرعة انطلاق الكرة؟

0544560575

عمر و اليوم

يتضمّن المخطط التالي للذئب البري إطلاق نفسه في الهواء باستخدام منجنيق. إذا تم دفع الذئب البري رأسياً من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية 19.6 m/s جـد معادلة لارتفاع الذئب في أي زمن t . جـد أقصى ارتفاع له ومقدار الزمن الذي يمضيه في الهواء وسرعته المتجهة عندما يرتد بقوة مرة أخرى إلى داخل المنجنيق.

0544560575

0544560575

عمرو البيومي

عمرو البيومي

تم قذف كرة للأعلى بشكل مستقيم من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية 19.6 m/s . بتجاهل مقاومة الهواء، جـد معادلة لارتفاع الكرة عند أي زمن t . وأيضاً حدّد القيمة العظمى للارتفاع ومقدار الزمن الذي قطعتة الكرة في الهواء.

عمرو البيومي

0544560575

0544560575

عمرو البيومي

لقد أفادت التقارير أنّ نجم كرة السلة السابق مايكل جوردان كانت له قفزة عمودية بلغت 135 cm. بتجاهل مقاومة الهواء. ما هي السرعة المتجهة الابتدائية المطلوبة للقفز بهذا الارتفاع؟

عمرو البيومي

عمرو البيومي

أحد اللاعبين له "قفزة" رأسية تبلغ 20 in. ما السرعة المتجهة الابتدائية الضرورية للقفز بهذا الارتفاع؟

عمرو البيومي

عمرو البيومي

عمرو البيومي

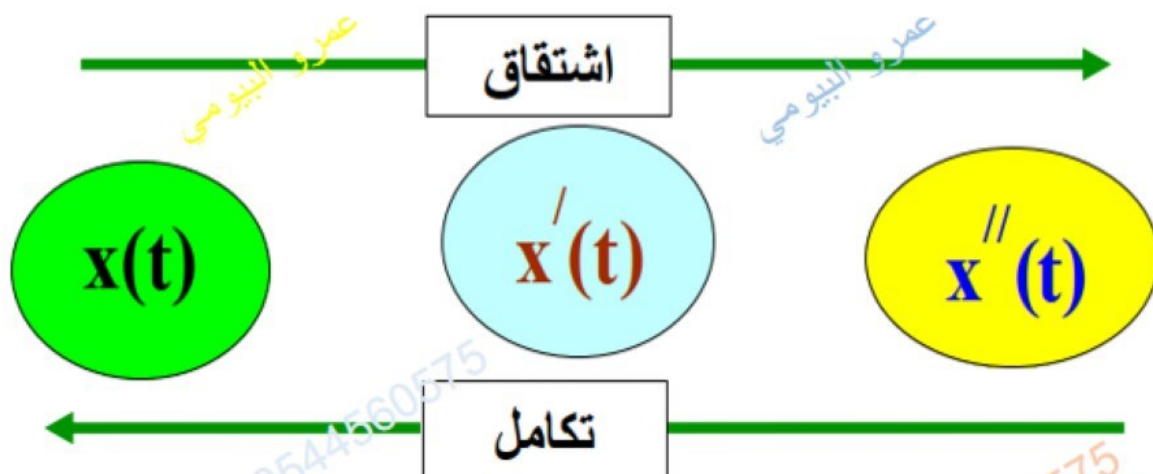
0544560575

0544560575

عمرو البيومي

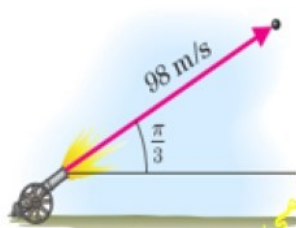
الحركة في بعدين

المركبة الأفقية



استراتيجية الحل	الشروط الابتدائية	
نبدأ بـ $y''(t) = -9.8 \text{ m/s}^2$ أو $y''(t) = -32 \text{ ft/s}^2$ ونجري عمليات التكامل ثم نضع $y(t) = 0$ فينتج زمن الانطلاق	$y'(0) = v_0 \sin \theta$ $y(0) = 0$	(1) زمن الانطلاق: من المركبة الرأسية
نبدأ بـ $x''(t) = 0$ ونجري عمليات التكامل ثم نعوض بزمن الانطلاق في $x(t)$ فينتج مدى المقذوف	$x'(0) = v_0 \cos \theta$ $x(0) = 0$	(2) مدى المقذوف: من المركبة الأفقية

يطلق جسم ما بزاوية $\theta = \pi/3$ راديان من الأفق مع سرعة ابتدائية 98 m/s. حدّد زمن التحليق والمدى الأفقي.



عمرو البيومي

عمرو البيومي

0544560575

0544560575

جد زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم أطلق بزاوية 30° مع سرعة ابتدائية 40 m/s. كرر العملية مع زاوية 60° .

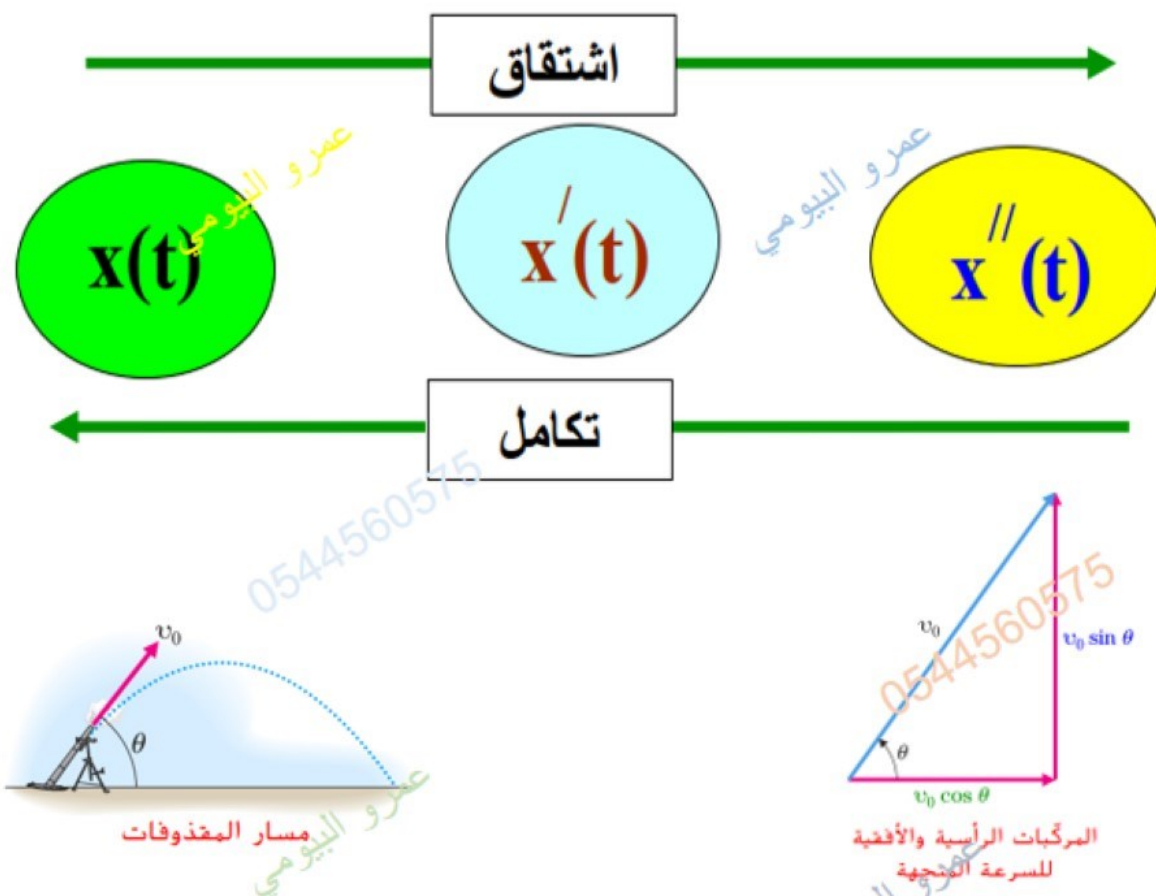
عمرو البيومي

0544560575

0544560575

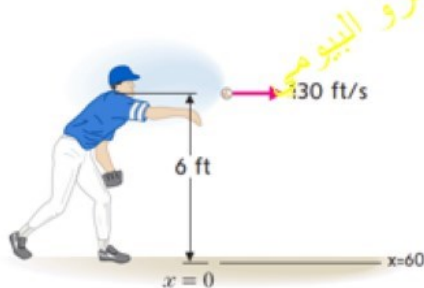
عمرو البيومي

المركبة الرأسية

الإطلاق من ارتفاع $y = k$ فوق سطح الأرض

استراتيجية الحل	الشروط الابتدائية	
نبدأ بـ $x''(t) = 0$ ونجري عمليات التكامل ثم نضع المسافة الأفقية فينتج زمن التحليق $x(t) =$	$x'(0) = v_0 \cos \theta$ $x(0) = 0$	(1) زمن التحليق: من المركبة الأفقية
نبدأ بـ $y''(t) = -9.8 \text{ m/s}^2$ أو $y''(t) = -32 \text{ ft/s}^2$ ونجري عمليات التكامل ثم نعوض بزمن التحليق في $y(t)$ فينتج ارتفاع المقذوف	$y'(0) = v_0 \sin \theta$ $y(0) = k$	(2) ارتفاع المقذوف: من المركبة الرأسية

يُطلق ضارب كرة بيسبول الكرة أفقيًا من ارتفاع 6 ft مع سرعة ابتدائية 130 ft/s. جـد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة الرئيسية على بعد 60 ft. (إرشاد: حدد زمن التحليق من المعادلة x . ثم استخدم المعادلة y لتحديد الارتفاع).

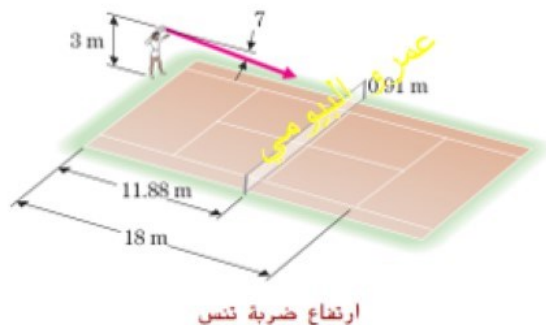


يرمي لاعب بيسبول كرة باتجاه القاعدة الأولى على بعد 120 ft يطلق الكرة من ارتفاع 5 ft مع سرعة ابتدائية 120 ft/s بزاوية 5° أعلى الأفق. جـد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة الأولى.

0544560575

عمرو البيومي

فينوس وليامز واحدة من أسرع الضربات في تنس السيدات. على فرض أنها سدّدت ضربة من ارتفاع 3 أمتار بسرعة ابتدائية 190 km/h وبزاوية 7° تحت المركبة الأفقية. تكون الضربة موجهة "داخل الحد" إذا مرت الكرة على شبكة ارتفاعها 0.91 m وتبعد مسافة 18 m وترتطم بالأرض أمام خط التسديد على بُعد 18 m . حدّد ما إذا كانت الضربة داخل أو خارج الحد.



$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t + y(0)$$

عمرو البيومي

0544560575

0544560575

على فرض أنّ قطرات المطر تسقط من غيمة على ارتفاع 900 m فوق سطح الأرض. بتجاهل مقاومة الهواء، ما هي سرعة سقوط قطرة المطر عند ارتطامها بالأرض؟

عمرو البيومي

عمرو البيومي

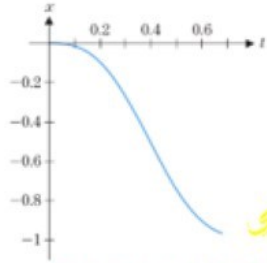
عمرو البيومي

0544560575

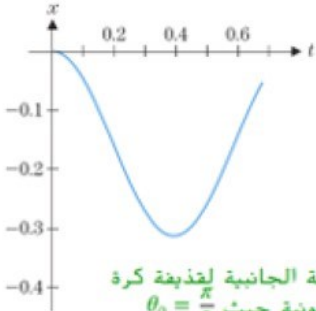
0544560575

عمرو البيومي

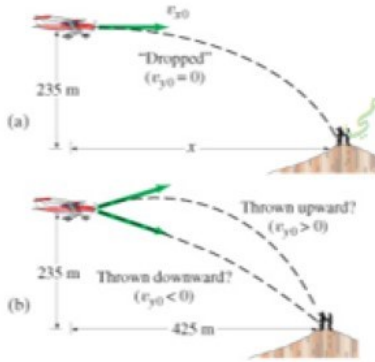
لمعدل دوران $\omega = 2$ راديان في الثانية مع $\theta_0 = 0$. جـد معادلة الحركة الجانبية لقذيفة جنونية ومثلها بيانياً لكل $0 \leq t \leq 0.68$. كتر ذلك لأجل $\theta_0 = \pi/2$.



الحركة الجانبية لقذيفة كرة جنونية حيث $\theta_0 = 0$



الحركة الجانبية لقذيفة كرة جنونية حيث $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$



تريد طائرة على ارتفاع 256 ft إسقاط إمدادات إلى موقع معين على الأرض. إذا كان للطائرة سرعة أفقية 100 ft/s، فما المسافة التي ينبغي أن تبعد بها الطائرة عن الهدف عند إطلاق الإمدادات من أجل أن تسقط في الموقع المستهدف؟ (إرشاد: استخدم المعادلة y لتحديد زمن الشلق، ثم استخدم المعادلة x لتحديد إلى المدى الذي ستجرف إليه الإمدادات).

إذا كان ارتفاع لوح الغطس ٤.٥ متراً فوق مستوى سطح المياه وبدأ الغواص بسرعة متجهة $2\frac{1}{4} m/s$ في اتجاه لأعلى (كم بلغت السرعة المتجهة للغواص عند الاصطدام بافتراض عدم وجود مقاومة هواء) ؟

a) $-9.36 m/s$

b) $14.16 m/s$

c) $-14.16 m/s$

d) $-11.76 m/s$

يسقط غطاس من ارتفاع 9 أمتار فوق الماء. ما السرعة المتجهة للغطاس عند الاصطدام لحظة الاصطدام (بافتراض عدم وجود مقاومة هواء) ؟

a) $-4.33 m/s$

b) $-9.39 m/s$

c) $-13.33 m/s$

d) $-18.39 m/s$

أسقط جسم من ارتفاع 24 متراً. حدد الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$

a) $y(0) = 0, y'(0) = 24$

b) $y(0) = -24, y'(0) = 0$

c) $y(0) = 24, y'(0) = -9.8$

d) $y(0) = 24, y'(0) = 0$

أسقط جسم من ارتفاع 6 أمتار مع سرعة متجهة نزولاً 1.2 m/s . حدد الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$

- a) $y(0) = -6$, $y'(0) = -1.2$ b) $y(0) = 6$, $y'(0) = -1.2$
 c) $y(0) = 6$, $y'(0) = 1.2$ d) $y(0) = -6$, $y'(0) = 1.2$

تم قذف كرة للأعلى بشكل مستقيم من الأرض بسرعة ابتدائية 19.6 m/s

- A) 19.6 m
 B) 4.9 m
 C) 9.8 m
 D) 39.2 m

أسقط جسم من السكون من ارتفاع 100 ft

- a) $y' = 100$, $y = 0$
 b) $y' = 100$, $y = 100$
 c) $y' = 0$, $y = 100$
 d) $y' = 0$, $y = 0$

يسقط غواص من ارتفاع 30m فوق الماء، ما السرعة المتجهة للغواص لحظة الاصطدام بالأرض بوحدة ft/s

- a) -29.2 b) -24.2 c) 2.4 d) -2.4