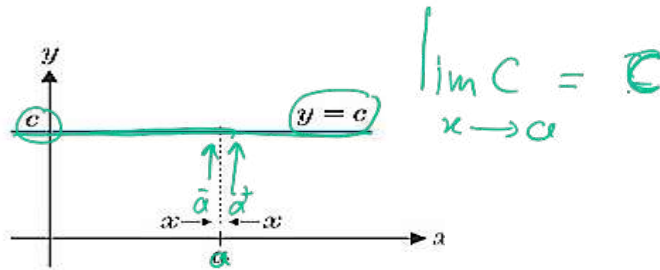


الدرس 2.3 حساب النهايات

الدالة الثابتة: $f(x) = c$

لأي ثابت c وأي عدد حقيقي a .

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c.$$



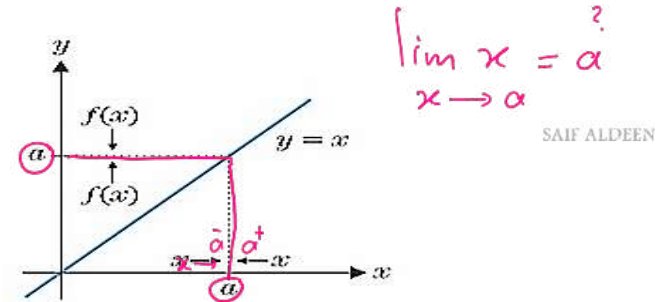
الشكل 2.14

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

الدالة المحايدة: $f(x) = x$

لأي عدد حقيقي a .

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a.$$



الشكل 2.15

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

النظرية 3.1

افترض أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجودتين وافترض أن c هو أي ثابت. إذا سينطبق ما يلي:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x),$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right]$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \right).$

خاصية القوة

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$$

مثال 3.1 إيجاد نهاية كثيرة حدود

$$\frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1^2 - 1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1+x}$$

$$= \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x}$$

$$\frac{1^2 - 1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{8-5}{5-8} = -1$$

$$\frac{a-b}{b-a} = -1$$

مثال 3.2 إيجاد نهاية دالة نسبية

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x + 4}{x^2 - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 5x + 4) = [\lim_{x \rightarrow 3} x]^3 - 5 \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 4$$

$$= [3]^3 - 5(3) + 4 = 27 - 15 + 4 = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2) = [\lim_{x \rightarrow 3} x]^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 2 = [3]^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

$$\frac{16}{7}$$

مثال 3.1 إيجاد نهاية كثيرة حدود

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2) - \lim_{x \rightarrow 2} (5x) + \lim_{x \rightarrow 2} 4$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 4$$

$$= 3 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 4$$

$$= 3(2)^2 - 5(2) + 4 = 12 - 10 + 4 = 6$$

$$3(2)^2 - 5(2) + 4 = 6$$

النظرية 3.3

افترض أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ وأن n هو أي عدد صحيح موجب. إذا،

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

حيث إنه لكل n زوجي، نفترض أن $L > 0$.



النظرية 3.2

لاي كثيرة حدود $p(x)$ وأي عدد حقيقي a .

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$$

مثال 3.4 إيجاد قيمة نهاية الجذر النوني لكثيرة حدود

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{3x^2 - 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{3x^2 - 2x}$$

$$\sqrt[5]{\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x)} = \sqrt[5]{3(2)^2 - 2(2)}$$

$$= \sqrt[5]{8}$$

بشكل عام، في الحالة التي تكون فيها النهايات لكل من البسط والمقام تساوي 0، ينبغي أن نحاول تبسط التعبير جبريًا إلى أبسط صورة

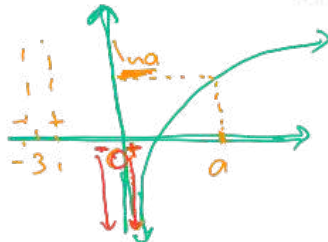
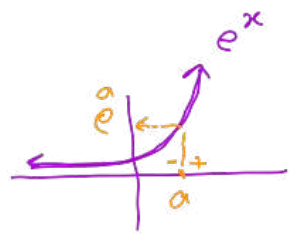
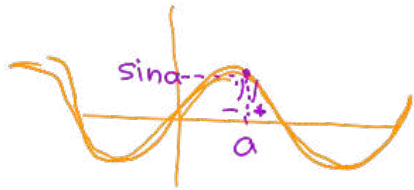
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a-b)(a+b)}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)-(2)}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{0+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

مثال 3.5 إيجاد نهاية بتنسيب المقام أو البسط

أوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN



(i) $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$,

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$,

(iii) $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$

(iv) $\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a, a > 0$ لكل.

النظرية 3.4 لأي عدد حقيقي a ، لدينا: $\lim_{x \rightarrow a^+} \sin^{-1} x = \sin^{-1} a$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} \sin^{-1} x = \sin^{-1} a$ $\left(-1 \leq x \leq 1 \right)$

(v) $\lim_{x \rightarrow a} \sin^{-1} x = \sin^{-1} a$ لكل $-1 < a < 1$,

(vi) $\lim_{x \rightarrow a} \cos^{-1} x = \cos^{-1} a$ لكل $-1 < a < 1$,

(vii) $\lim_{x \rightarrow a} \tan^{-1} x = \tan^{-1} a$ لكل $-\infty < a < \infty$

(viii) إذا كانت p كثيرة حدود و $\lim_{x \rightarrow p(a)} f(x) = L$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(p(x)) = L$

مثال 3.6 إيجاد قيمة نهاية معكوس دالة مثلثية

أوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^{-1} \left(\frac{x+1}{2} \right)$

$-1 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1$
 $-2 \leq x+1 \leq 2$
 $-3 \leq x \leq 1$
 $[-3, 1]$

$\sin^{-1} \left(\frac{0+1}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot \cot x] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{1} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x \cos x}{\sin x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \\
 &= (1) \cdot (1) = 1 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

مثال 3.8 استخدام نظرية الشظيرة للتحقق من صحة نهاية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right] \text{ حدد قيمة}$$

$$-1 \leq \cos \left(\frac{1}{x} \right) \leq 1 \quad x \neq 0$$

$$-x^2 \leq x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) \leq \lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right)] \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right)] \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

مثال 3.7 نهاية ناتج ضرب ليس بناتج ضرب النهايات

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot \cot x] & \text{ أوجد قيمة } \lim_{x \rightarrow 0} (x \cot x) \\
 &= \left[\lim_{x \rightarrow 0} x \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \right] \\
 &= (0) \cdot \left[\text{غ} \right] \\
 &= (0) \cdot \left(\frac{1}{0} \right) \quad \text{غ}
 \end{aligned}$$

النظرية 3.5 (نظرية الشظيرة) ذهنية إذا ما طر:

افترض أن

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

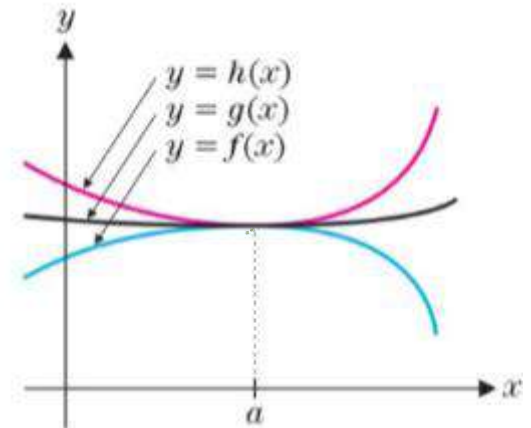
لكل x في الفترة (c, d) ما عدا النقطة $a \in (c, d)$ وأن

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

ولعدد L . إذا، يكون:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \quad \text{كما أن}$$

تنطبق نظرية الشظيرة على النهايات أحادية الطرف.



افترض أن $f(x)$ محدودة؛ بمعنى أن هناك M ثابتة بحيث تكون $|f(x)| \leq M$ لجميع قيم x . استخدم نظرية الشطيرة لإثبات أن

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq M \\ -M &\leq f(x) \leq M \\ -Mx^2 &\leq x^2 f(x) \leq Mx^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (-Mx^2) &\leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} (Mx^2) \\ 0 &\leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) \leq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) &= 0 \end{aligned}$$

مثال 3.9 نهاية الدالة متعددة التعريف

أوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ حيث تُعرّف f كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 \cos x + 1, & x < 0 \text{ عندما} \\ e^x - 4, & x \geq 0 \text{ عندما} \end{cases}$$

مثال 3.10 إيجاد نهاية تصف السرعة اللحظية

افترض أن الدالة التي تحدد موقعًا لجسم ما عند الزمن t (بالثواني) تتمثل بـ

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad \text{(قدم)} \quad f(t) = t^2 + 2 \\ f(1) &= 1^2 + 2 = 3 \\ f(1+h) &= (1+h)^2 + 2 = 1 + 2(1)h + h^2 + 2 = h^2 + 2h + 3 \\ t &= 1 \text{ عند الزمن} \\ v(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 2h + 3) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ أثبت أن

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

SAIF ALDEEN

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

أوجد

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{1^2 - \cos^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{\sin^2 x} \quad \begin{matrix} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right]^2 [1 + \cos 0] = (1^2)(1+1) = 2$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 + x^2 \cos \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 3 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cos \frac{1}{x} \right)$$

$$= 3 + 0 = 3$$

نظرية لا مافية
"الشجرة"

$$-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$$

نضرب بـ x^2

$$-x^2 \leq x^2 \cos \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} 2x \csc x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[2x \cdot \frac{1}{\sin x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$$

$$= 2(1)$$

$$= 2$$

$$2(0) \cdot \frac{1}{\sin 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

SAIF ALDEEN

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{\sin^2 x}$$

SAIF ALDEEN

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (1 + \cos x)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)$$

$$= (1) \cdot (1 + \cos 0)$$

$$= 1(2)$$

$$= 2$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \csc^2 x + 5)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 x} + \lim_{x \rightarrow 0} 5 \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sin^2 x} \right) + 5 \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 + 5 \\ & = \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right]^2 + 5 \\ & = 1^2 + 5 = 6 \end{aligned}$$

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

أوجد قيمة النهايات في كل مما يلي

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 1) \\ &= 0^2 - 3(0) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{2x+1} &= \sqrt[3]{2(2)+1} \\ &= \sqrt[3]{5} \\ & \downarrow \\ & \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 2} (2x+1)} \\ & \sqrt[3]{2(2)+1} = \sqrt[3]{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow 0} \cos^{-1}(x^2) \\ &= \cos^{-1}(\lim_{x \rightarrow 0} x^2) \\ &= \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-5}{x^2+4} \\ &= \frac{2-5}{2^2+4} = \frac{-3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{3^2 - 3 - 6}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} \quad \boxed{x=3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+2) \\ &= 3+2 = 5 \end{aligned}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1^2 - 3(1) + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-2)(x-1)} \\ & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-2} = \frac{1+2}{1-2} = \boxed{-3} \end{aligned}$$

نقطة
 $x=1$
 مقلوب
 $x=2$
 مقلوب
 $x=1$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \frac{2^2 - 2 - 2}{2^2 - 4} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= (x-2)(x+2) \\ x^2 - 2^2 &= (x-2)(x+2) \end{aligned}$$

$$\frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{|l} x-2=0 \\ \hline x=2 \\ \hline x+2=0 \\ \hline x=-2 \end{array}$$

فقط $x=2$ هو الحل

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1^3 - 1}{1^2 + 2(1) - 3} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+3)(x-1)}$$

SAIF ALDEEN

$$\frac{1^2 + 1 + 1}{1 + 3} = \frac{3}{4}$$

SAIF ALDEEN

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ x^3 - 1 &= x^3 - 1^3 \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

SAIF ALDEEN

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin x} = \cos(0) = 1$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{-2x+1}}{x^2 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{-2x+1}}{x(x+1)} = \frac{e^{-2(0)+1}}{0+1} = e$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \\ &= (1) \cdot \left(\frac{1}{\cos 0} \right) \\ &= (1) (1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

المشرح

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \csc^2 x \quad (0)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2(0)} = (0) \cdot \frac{1}{(0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 = \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right]^2 = [1]^2 = 1$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3 - \sqrt{x+9}} \quad \frac{2(0)}{3 - \sqrt{0+9}} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot (3 + \sqrt{x+9})}{(3 - \sqrt{x+9})(3 + \sqrt{x+9})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(3 + \sqrt{x+9})}{(3)^2 - (\sqrt{x+9})^2} = \frac{9 - (x+9)}{9 - x - 9} = \frac{9 - x - 9}{-x} = -x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(3 + \sqrt{x+9})}{-x} = -2(3 + \sqrt{0+9}) = -12$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \quad \frac{\sqrt{0+4} - 2}{0} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \quad \frac{a^2 - b^2}{(a+b)} = a - b$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4})^2 - (2)^2}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+4) - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{\sqrt{0+4} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} = \sqrt{1} + 1 = 2$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x^3 - 4^3} = (x-4)(x^2+4x+16)$$

$$= 4^2 + 4(4) + 16 = 48$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) \quad \frac{1}{1-1} - \frac{2}{1^2-1} \left(\frac{1}{0} - \frac{2}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} \right)$$

SAIF ALDEEN

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x+1) - 2}{(x-1)(x+1)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

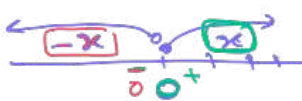
$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{|x|} \right) \quad \frac{2}{0} - \frac{2}{|0|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{x} = 0$$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{4}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{-x} \right) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$



$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{1 - e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x)(1 + e^x)}{(1 - e^x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^x)$$

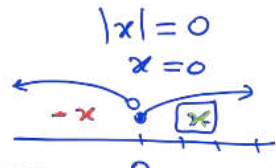
$$= 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$$

عوامل لا «قوة قوة»

$$1 - e^{2x} = 1^2 - (e^x)^2 = (1 - e^x)(1 + e^x)$$

20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|}{x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

م.ع



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{x}$$

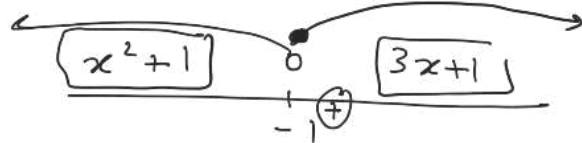
$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \boxed{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = \boxed{1}$$

22. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < -1 \\ 3x + 1, & x \geq -1 \end{cases}$



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = (-1)^2 + 1$$

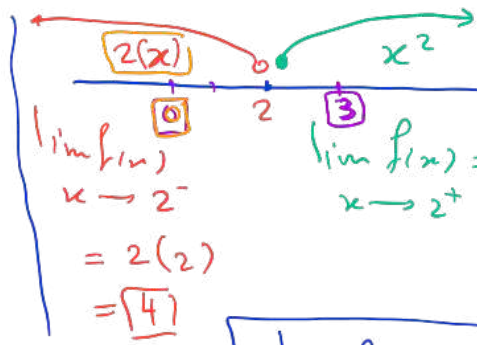
$$= \boxed{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3(-1) + 1$$

$$= \boxed{-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \text{م.ع}$$

21. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$

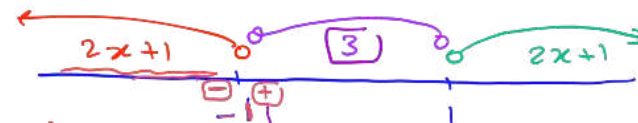


$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2(2) = \boxed{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^2 = \boxed{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \boxed{4}$$

23. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < -1 \\ 3, & -1 < x < 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x + 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x + 1)$$

$$= 2(-1) + 1$$

$$= \boxed{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 3$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} 3$$

$$= \boxed{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \text{م.ع}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ حيث } f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < -1 \\ 3, & -1 < x < 1 \\ 2x+1, & x > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3) = \boxed{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1) = 2(1)+1 = \boxed{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

$$26. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} \quad (1+h)^3 = 1^3 + 3(1)^2h + 3(1)h^2 + h^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3 + 3h + h^2)}{h}$$

$$= 3 + 3(0) + (0)^2 = \boxed{3}$$

$$25. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \quad \begin{matrix} 2^2 + 2(2)(h) + h^2 \\ 4 + 4h + h^2 \end{matrix}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4+h)}{h} = 4 + 0 = \boxed{4}$$

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

$$27. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = 1$$

$$x \rightarrow 2$$

$$x^2 \rightarrow 4$$

$$x^2 - 4 \rightarrow 0$$

$$y = x^2 - 4 \rightarrow 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

نظرية
3.4

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{5x} = \frac{1}{5}$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x) \quad (0^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{0}\right)$$

الشريطة

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \quad x \neq 0$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$33) \quad \underline{f(t) = t^2 + 2, a = 2}$$

$$v(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(6 + 4h + h^2) - 6}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4 + h)}{h} = 4 + 0 = \underline{4} \quad \checkmark$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sec(1/x) = 0$$

لأن دالة $\sec$ غير محدودة
أي أنه ما لها غير محدود
مثل دالة $\sin$ و $\cos$

استخدم دالة الموقع $f(t)$ لإيجاد السرعة اللحظية عند الزمن $t = a$

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$f(2) = 2^2 + 2 = \underline{6}$$

$$f(2+h) = (2+h)^2 + 2 = 2^2 + 2(2)(h) + h^2 + 2 = \underline{6 + 4h + h^2}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

36)

$$f(t) = t^3, a = 1$$

$$v(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+3h+3h^2+h^3) - (1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3+3h+h^2)}{h} = 3+3(0)+0^2 = 3$$

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

38. إذا كانت النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ أوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ سريفا

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \quad = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = (1)^2 = 1$$

42. أوجد قيمة كل نهاية وعلّل كل خطوة مشيرًا إلى النظرية أو المعادلة المناسبة.

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \sin x]$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xe^x}{\tan x}$

الآن كما بينت بالبراديات

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \sin x$$

ناتج حاصل ضرب

$$= (-1+1) \cdot (\sin(-1))$$

تساوي حاصل ضرب

$$= (0) (\sin(-1))$$

نظرية 3.1

$$= 0$$

$$\frac{1e^1}{\tan 1}$$

37. إذا كانت النهاية $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ أوجد قيمة $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$ سريفا.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

41. أوجد قيمة كل نهاية وعلّل كل خطوة مشيرًا إلى النظرية أو المعادلة المناسبة.

تعويض

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 1)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2+1}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} e^x = (1)(e^0) = 1$$

49. أوجد كل الأخطاء في المعادلات الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = 0 \cdot \infty = 0.$$

SAIF ALDEEN ~~غير موجود~~ موجودة. SAIF ALDEENنطبق قاعدة فاجبر في حالات
النزعة موجودة لكن هنا.51. أعط مثالاً للدالتين f و g بحيث توجد $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)]$ ولا توجد

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

SAIF ALDEEN

$$g(x) = \frac{3+x}{x}$$

SAIF ALDEEN

$$f(x) = \frac{-3}{x}$$

50. أوجد كل الأخطاء في المعادلات الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{0}{0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

نطبق قاعدة
نايعة ليمية إذا كانت
الناتج موجوداً
فإنه موجوداً
وإلا فليس
بذلك52. أعط مثالاً للدالتين f و g بحيث توجد $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)]$ ولا توجد واحدة

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

54. هل ما يلي صواب أم خطأ؟ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ غير موجودة، فعندما

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$$

تكون $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$ غير موجودة. اشرح ذلك.53. إذا وجدت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ولم توجد $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ، فهل يكون من الصواب دوماً

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$$

أن $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ غير موجودة؟ اشرح ذلك.

$$55. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/x}$$

$$56. \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x}$$

$$57. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-x^2}$$

SAIF ALDEEN

* دليل عددي

أوبالدرس 2.5

SAIF ALDEEN

النهايات التي تتصني
اللا نهاية .

SAIF ALDEEN

SAIF ALDEEN

$$58. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln x}$$

$$59. \lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1} \frac{1}{x}$$

$$60. \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left| \frac{1}{x} \right|$$

x الدخل $T(x)$ الضريبة

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (0.14x) = 0$$

يعودحياناً : لأن الدخل عند ما يقترب من الصفر
تكون الضريبة المفروضة تساوي
صفر " لا يوجد دخل
لا يوجد ضريبة "

65. افترض أن القانون الضريبي في دولة ما ينص على أن الالتزام الضريبي المفروض على x من الدولارات من الدخل الخاضع للضريبة

$$T(x) = \begin{cases} 0.14x, & 0 \leq x < 10,000 \\ 1500 + 0.21x, & 10,000 \leq x \end{cases}$$

احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} T(x)$ لماذا يُعد هذا جيداً؟ احسب $\lim_{x \rightarrow 10,000} T(x)$ لماذا يُعد هذا سيئاً؟

$$\lim_{x \rightarrow 10,000^-} T(x) = 0.14(10,000) = 1400$$

$$\lim_{x \rightarrow 10,000^+} T(x) = 1500 + 0.21(10,000) = 3600$$

بعد هذا سيء لأن الضريبة قفزت بشكل كبير عند ما يصبح الدخل 10000
بمعنى لو أنه شخص دخله 9999 تكون الضريبة 1400
وشخص دخله 10001 تكون الضريبة 3600
بالدعم أنه الفرق بالدخل هو دولاران بينما الفرق بالضريبة كبير جداً

66. افترض أن القانون الضريبي في دولة ما ينص على أن نسبة الالتزام الضريبي تبلغ 12% على أول \$20,000 من الأرباح الخاضعة للضريبة

$$T(x) = \begin{cases} a + 0.12x, & x \leq 20,000 \\ b + 0.16(x - 20,000), & x > 20,000 \end{cases}$$

و 16% على الباقي. أوجد الثابتين a و b لدالة الضريبة بحيث توجد $\lim_{x \rightarrow 0^+} T(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 20,000} T(x)$ لماذا من المهم أن يكون

هاتان النهايتان موجودتين؟

$$\lim_{x \rightarrow 20,000} T(x) \text{ موجودة}$$

$$\lim_{x \rightarrow 20,000^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 20,000^+} T(x)$$

$$a + 0.12(20,000) = b + 0.16(20,000 - 20,000)$$

$$0 + 2400 = b + 0$$

$$b = 2400$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} T(x) = 0$$

$$a + (0.12 \times 0) = 0$$

$$a = 0$$

من الأفضل أن تكون الضريبة موجودة
لأنه الضريبة على دخل صفر تكون صفر

من الأفضل أن تكون
النهاية موجودة
حتى لا يحدث قفزة في الضريبة
عند دخل 20000 دولار