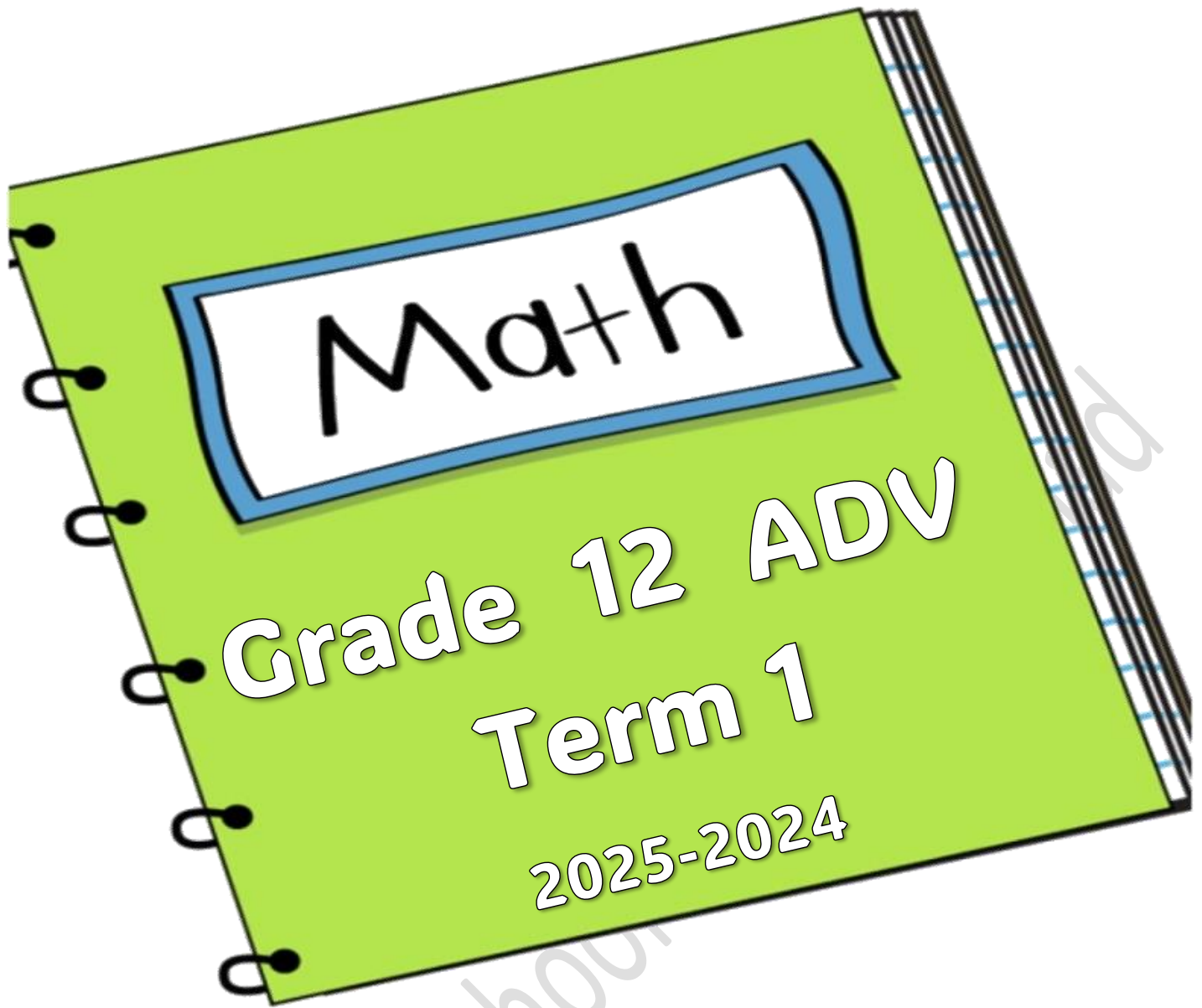




CH3 Differentiation

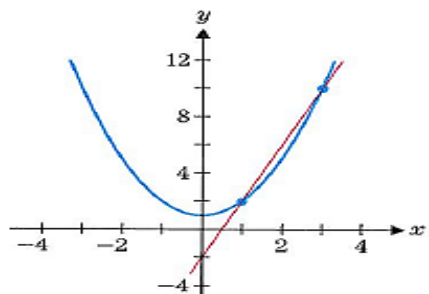
T.Hafez Ahmad

Telegram Channel: https://t.me/HafezHasan_12Adv_calculus20



Chapter Three: Differentiation التفاضل

3-1	Tangent Lines and Velocity	المماسات والسرعة المتجهة
3-2	The Derivative	الاشتقاق
3-3	Computation of Derivatives: The Power Rule	حساب المشتقات: قاعدة القوة
3-4	The Product and Quotient Rules	قواعد الضرب والقسمة
3-5	The Chain Rule	قاعدة السلسلة
3-6	Derivative of Trigonometric Functions	مشتقات الدوال المثلثية
3-7	Derivative of Exponential and Logarithmic Functions	اشتقاق الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية
3-8	Implicit Differentiation and Inverse Trigonometric Functions	الاشتقاق الضمني والدوال المثلثية العكسية
3-9	The Hyperbolic Functions	دوال القطع الزائد
3-10	The Mean Value Theorem	نظرية القيمة المتوسطة

Lesson 3-1	Tangent Lines and Velocity	المماسات والسرعة المتجهة
Slop of secant of curve passing through two points $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ is given by ميل القاطع للمنحنى المار بالنقطتين يعطى بالعلاقة التالية $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Equation of secant is $y = m_{sec}(x - x_1) + y_1$ Slop of secant of curve passing through two points $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ is given by ميل القاطع للمنحنى المار بالنقطتين يعطى بالعلاقة التالية $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ Equation of secant is $y = m_{sec}(x - x_1) + f(x_1)$ Slop of secant of curve passing through two points $(a, f(a)), (a + h, f(a + h))$ is given by ميل القاطع للمنحنى المار بالنقطتين يعطى بالعلاقة التالية $m = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ Note: Slop of secant = change of rate = average speed Find slop of secant for curve $f(x) = x^2 + 1$, at point $(2, 1)$ $m = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{5 - 2}{2 - 1} = 3$		
		

Slope of tangent: the secant become a tangent when $h \rightarrow 0$ then slop of tangent at point $x = a$ is $m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{exist}$ and equation of tangent is

$$y = m_{tan}(x - a) + f(a)$$

Note: Slop of tangent = average change of rate = average speed

ميل المماس = معدل التغير = معدل السرعة

Q: use definition to find: 1) slop of tangent line to $y = f(x)$ at $x = a$

2) equation of tangent line at same point

باستخدام التعريف اوجد : (1 ميل خط المماس للدالة $y = f(x)$ (2 معادلة المماس عند النقطة نفسها

270

$$f(x) = 2x - 1, \text{ at } a = 3$$

271

$$f(x) = \frac{2}{x+1}, \text{ at } a = 1$$

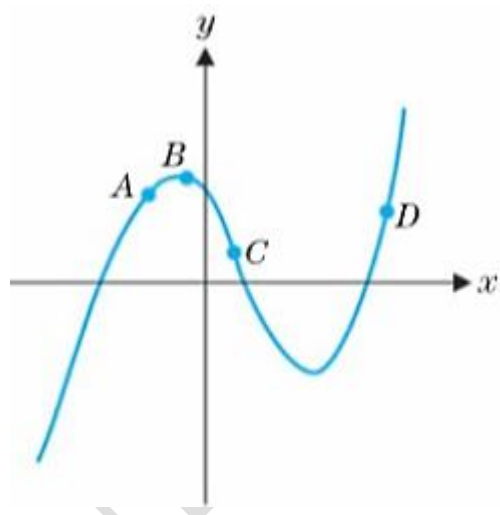
272

$$f(x) = \sqrt{x+3}, \text{ at } a = 1$$

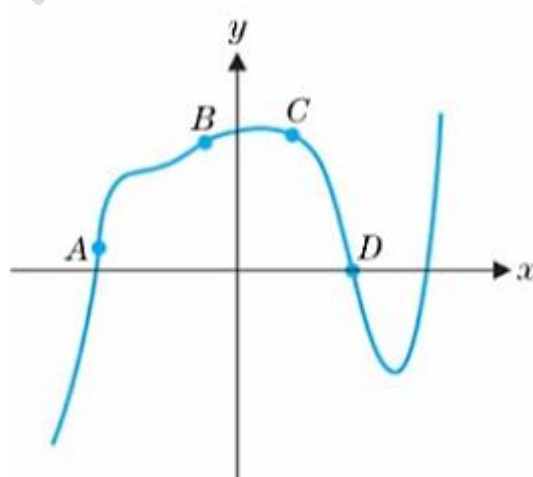
List the points A,B,C and D in order increasing slope of tangent line

نظم قائمة تتضمن إشارة ميل المماس

273



274



Note: The derivative is slope of tangent at point

Symbol of derivative is $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, y'

DEFINITION 2.1

The **derivative** of the function f at the point $x = a$ is defined as

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (2.1)$$

provided the limit exists. If the limit exists, we say that f is **differentiable** at $x = a$.

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = a$ اذا كانت النهاية موجودة

An alternative form of derivative is $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ تعريف بديل للمشتقة عند النقطة هو

DEFINITION 2.2

The **derivative** of the function f is the function f' given by

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (2.3)$$

The domain of f' is the set of all x 's for which this limit exists. The process of computing a derivative is called **differentiation**. Further, f is **differentiable on an open interval I** if it is differentiable at every point in I .

The derivative of $f(x)$ is $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Note: the derivative at point = slope of tangent at point = change of rate = instant velocity

ملاحظة: المشتقة عند نقطة = ميل المماس عند تلك النقطة = معدل التغير = السرعة اللحظية

Find $f'(x)$, using definition of derivative to derivative function or at point $x = a$

275 $f(x) = 3x + 1$, $a = 1$

276	$f(x) = x^2 - 2x + 1$, $a = 1$
277	$f(x) = \sqrt{3x + 1}$, $a = 1$
278	$f(x) = \sqrt{2x + 4}$

279

$$f(x) = \frac{3}{x+1}, a = 2$$

280

$$y = \frac{2}{2x-1}$$

Theorem 2.1

If f is differentiable at $x = a$, then f is continuous at $x = a$

نظرية 2.1

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $x = a$ تكون f متصلة عند $x = a$

Note: the converse the theorem is not always true, mean

مقلوب النظرية ليس بالضروري صحيح دائما

If f is continuous at $x = a$ that does not mean f is differentiable $x = a$

إذا كانت f متصلة عند $x = a$ هذا لا يعني انها قابلة للاشتقاق عند $x = a$

- f is differentiable at $x = a \rightarrow f$ is continuous

- f قابلة للاشتقاق عند $x = a$ اذا هي متصلة

- f is continuous at $x = a \rightarrow f$ is $\begin{cases} \text{differentiable} , f' = \text{exist} \\ \text{not differentiable} , f' \text{ does not exist} \end{cases}$

- إذا كانت f متصلة عند $x = a$ فان يمكن ان تكون قابلة للاشتقاق او غير قابلة للاشتقاق

Nots: the following graph illustrate a different type of functions not differentiable at $x = a$ and reasons

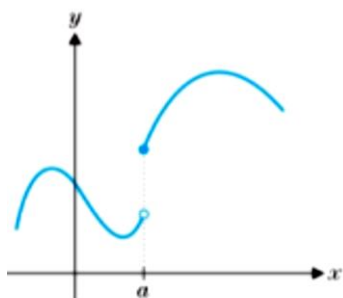


FIGURE 3.19a
A jump discontinuity

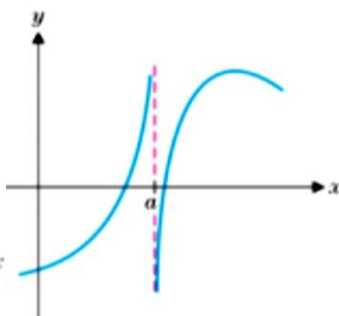


FIGURE 3.19b
A vertical asymptote

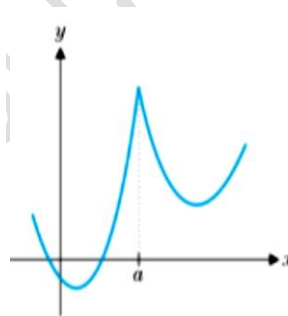


FIGURE 3.19c
A cusp

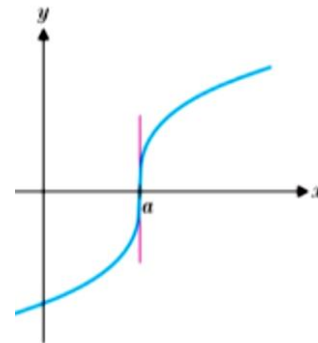


FIGURE 3.19d
A vertical tangent line

Nots: f differentiable at $x = a$ if:

- 1) f continuous at $x = a$
- 2) The derivative exists from both sides left and right side

$$f'(x)^- = f'(x)^+$$

f دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = a$ إذا كانت:

- 1) متصلة عند $x = a$
- 2) المشتقة موجودة من كلا الطرفين اليمين واليسار

$$f'(x)^- = f'(x)^+$$

Compute the right -hand derivative and left-hand derivative does $f'(0)$ exists

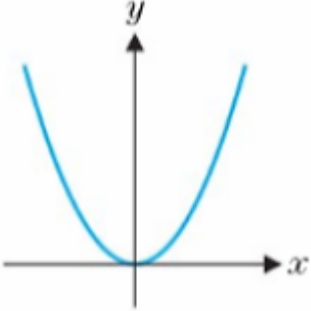
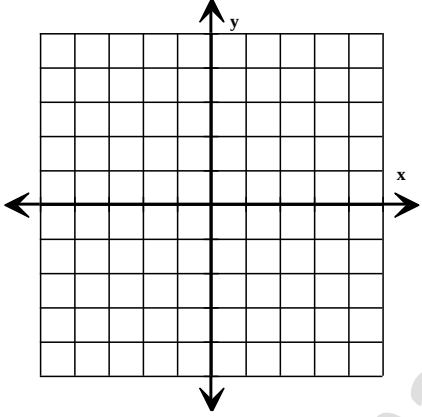
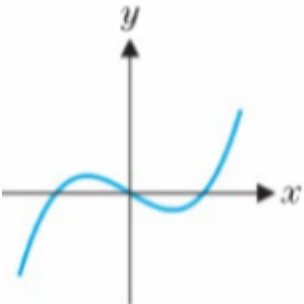
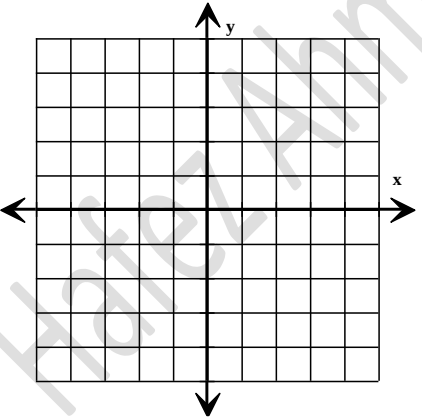
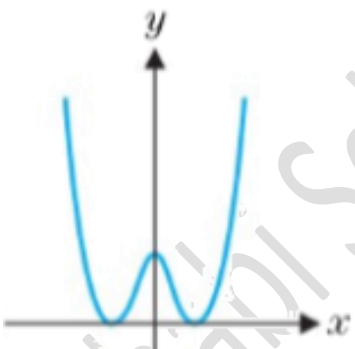
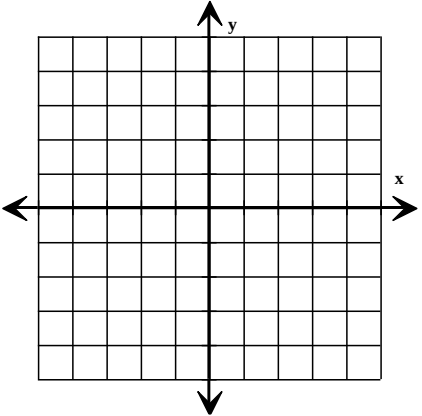
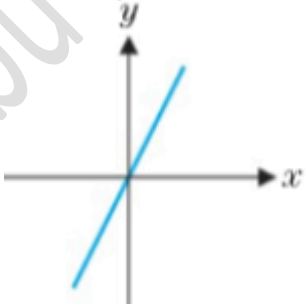
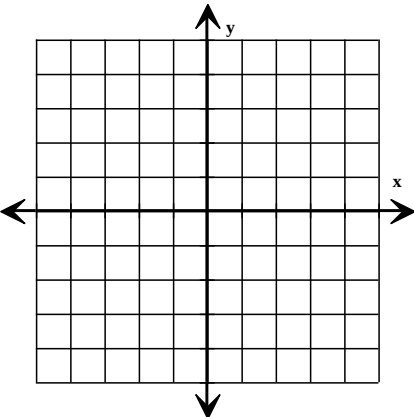
$$f'(x)^- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad , \quad f'(x)^+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

281

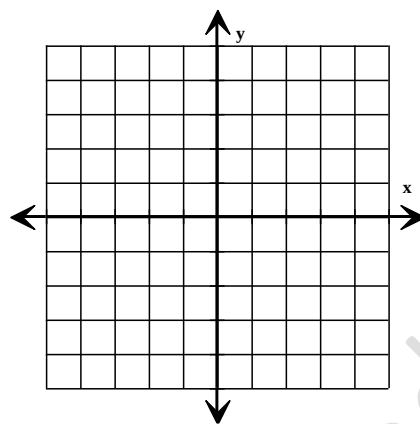
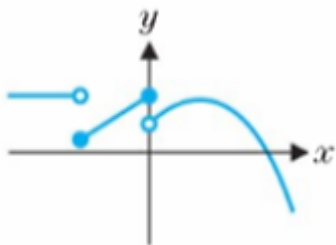
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 0 \\ 3x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

282

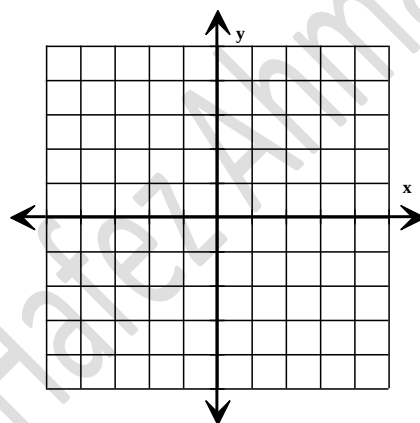
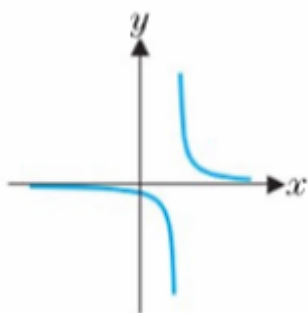
$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

	Use the graph of f to sketch a graph of f'	استخدم الرسم لرسم المشتقة
283		
284		
285		
286		

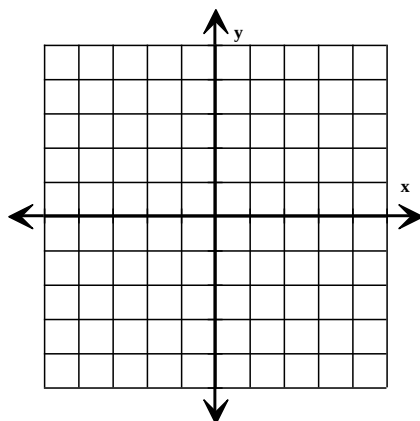
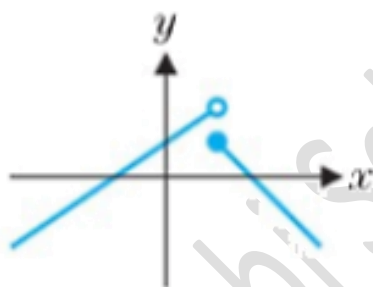
287



288

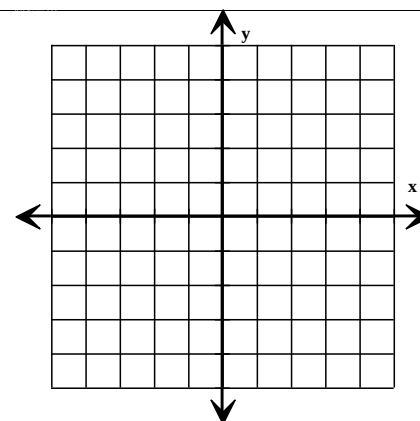
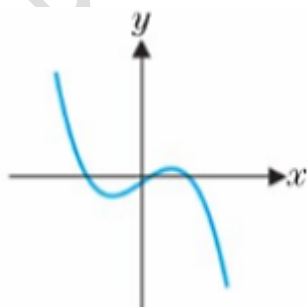


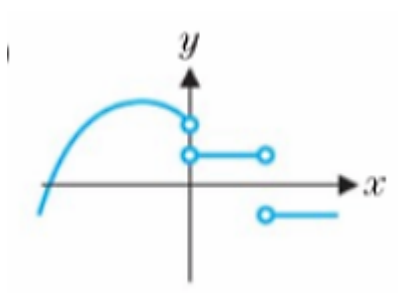
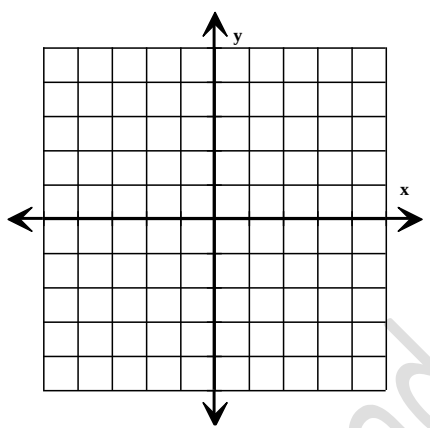
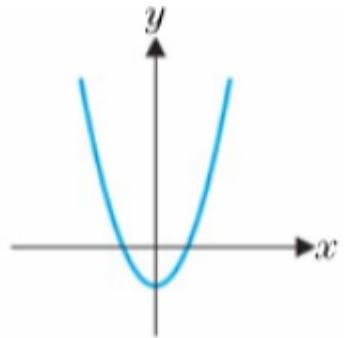
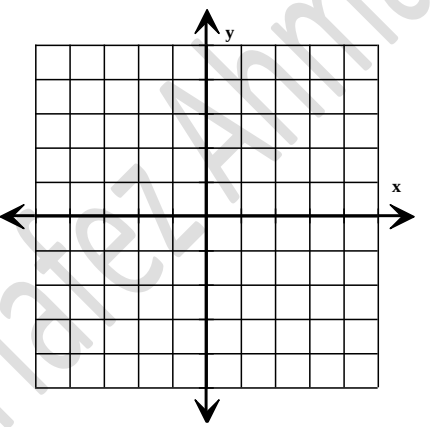
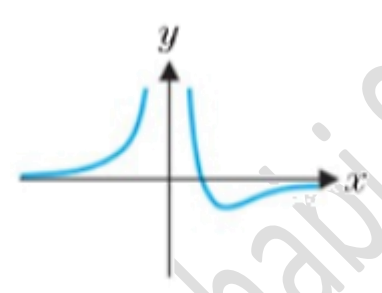
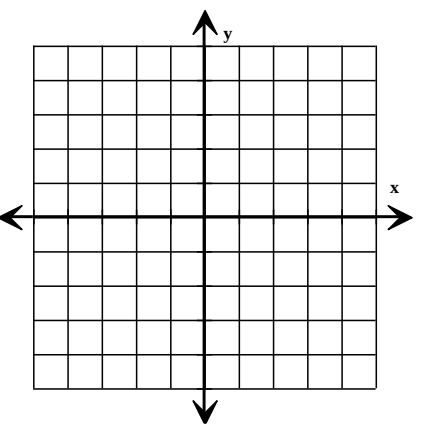
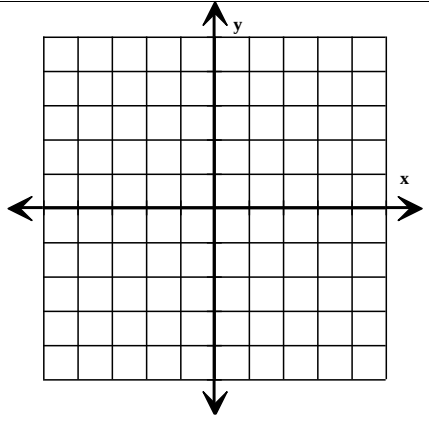
289

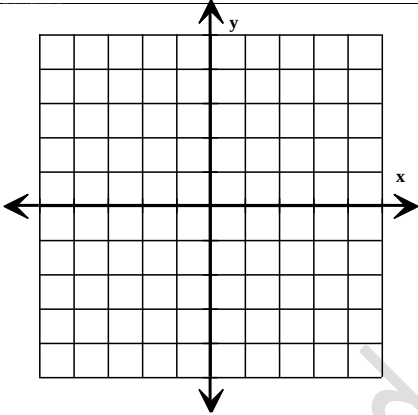
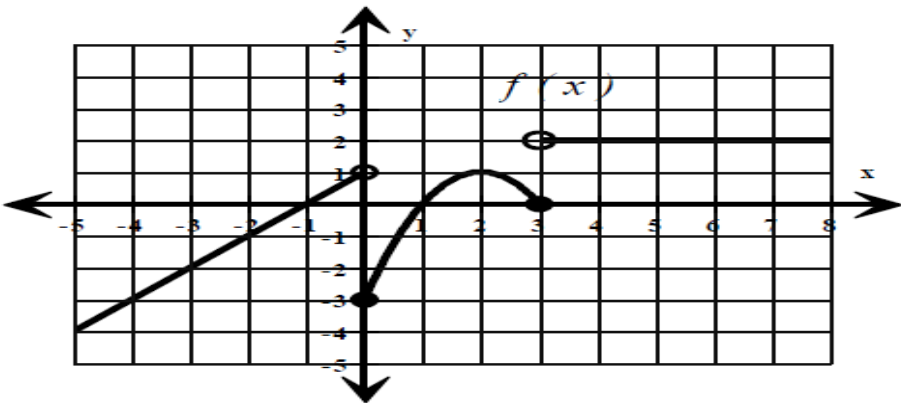


Use the given graph of f' to sketch the plausible continuous function f

290

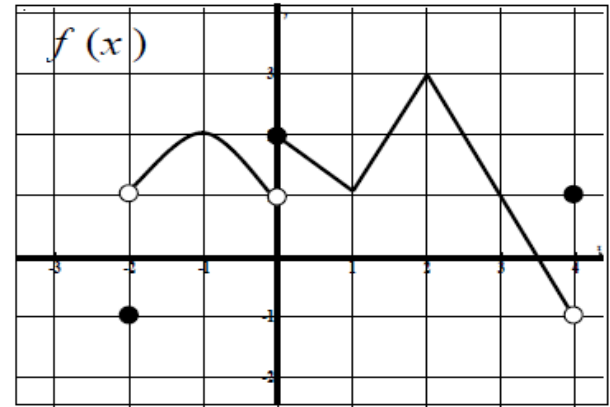
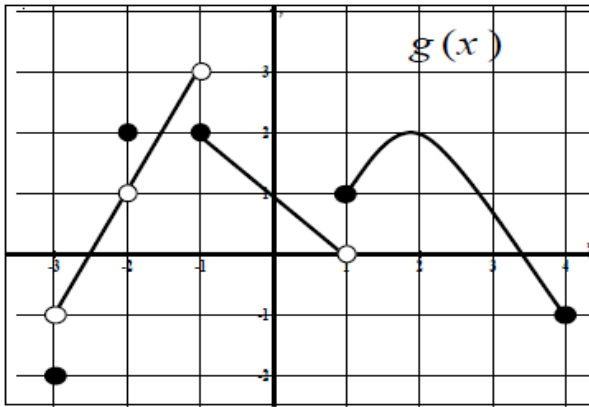


291	 
292	 
293	 
294	Sketch the graph of function with the following properties: ارسم منحنى الدالة حسب الخصائص التالية $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(3) = 6$ $f'(0) = 0$, $f'(1) = -1$, $f'(3) = 4$ 

295	Sketch the graph of function with the following properties: رسم منحنى الدالة حسب الخصائص التالية $f(-2) = 4, f(0) = -2, f(2) = 1$ $f'(-2) = -2, f'(0) = 2, f'(2) = 1$	
The following graph represent $f(x)$ find:(Q301-Q304)		
		
296	The average rate of change in interval $[0, 3]$ متوسط التغير في الفترة المعطاه	297 Rate of change at $x = 2$ معدل التغير عند النقطة
298	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} =$	299 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x} =$

300	If $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6 & x < 0 \\ ax - 2b & x \geq 0 \end{cases}$ find all real number a and b such that f' exist اوجد جميع القيم الحقيقية التي تجعل الدالة قابلة للاشتقاق
301	If f is differentiable at $x = a$, $a \neq 0$ evaluate $\lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x)]^2 - [f(a)]^2}{x^2 - a^2}$ اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق اوجد قيمة
302	Prove that if f is differentiable at $x = a$, then $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+ch) - f(a)}{h} = cf'(a)$ اثبت ان اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة فان تحقق ما يلي

الرسـم التاليـة يـمـثـل بيـان الدالة $f(x)$, $g(x)$ find: اوجد: The following graph represent of $f(x)$, $g(x)$



1) $g(2) =$, $f(2) =$, $f'(2) =$

2) Find one value of x to be $f(x)$ undifferentiable and $g(x)$ jump discontinuous

discontinuous

اوجد قيمة ل x تكون عندها الدالة $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق و $g(x)$ لها انفصال من نوع قفزة

3) Value of x where $f(x)$ discontinuous and type of discontinuity

قيمة x تكون عندها الدالة $f(x)$ منفصلة و نوع الانفصال

.....

4) Value of x where $g'(x) = 0$ and $f'(x)$ not exist

قيمة ل x تكون عنده $g'(x) = 0$ و $f'(x)$ غير موجوده

.....

5) $g'(x) = \text{does not exist}$ at $x =$

غير موجوده

Lesson 3-3	Computation of Derivatives: The Power Rule	حساب المشتقات: قاعدة القوة
Power rule: 1) Constant rule: $y = c$ where c constant, then $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} c = 0$ (1) قاعدة الثابت : “derivative for any constant function equal zero” "مشتقة العدد الثابت تساوي الصفر دائما" 2) General power rule: $f(x) = x^n$, $\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$ for $n \neq 0$		
Theorem : If $f(x)$ and $g(x)$ are differentiable at x and c is any constant , then إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند x و c عدد ثابت فإن: 1) $\frac{dy}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$ 2) $\frac{dy}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$ 3) $\frac{dy}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$		
Find the derivative of each of the following function اوجد مشتقة الدوال التالية		
304	$f(x) = x^3 - 2x + 1$	305 $f(x) = x^9 - 3x^5 + 4x^2 - 4x$
306	$f(x) = 3t^3 - 2\sqrt{t}$	307 $f(x) = 5\sqrt{s} - 4s^2 + 3$
308	$f(w) = \frac{3}{w} - 8w + 1$	309 $f(y) = \frac{2}{y^4} - y^3 + 2$
310	$h(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{x}} - 2x + \pi$	311 $f(x) = 12x - x^2 - \frac{3}{\sqrt{x^2}}$

312	$f(s) = 2s^{\frac{3}{2}} - 3s^{\frac{-1}{3}}$	313	$f(x) = \frac{3x^2 - 3x + 1}{2x}$
314	$f(x) = \frac{4x^2 - x + 3}{\sqrt{x}}$	315	$f(x) = x(3x^2 - \sqrt{x})$
316	$f(x) = (x + 1)(3x^2 - 4)$	317	$f(x) = x^{-3}(2x + 1)$

Higher order derivative: المشتقات العليا

- First derivative $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ المشتقة الأولى
- Second derivative $y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ المشتقة الثانية
- Third derivative $y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$ المشتقة الثالثة
- The n^{th} derivative $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}$ المشتقة النونية

Compute the Indicated derivative احسب المشتقات التالية					
318	$f(t) = t^4 + 3t^2 - 2$	$f''(t)$	319	$f(t) = 4t^2 - 12 + \frac{4}{t^2}$	$f'''(x)$
320	$f(x) = 2x^4 - \frac{3}{\sqrt{x}}$	$\frac{d^2 f}{dx^2}$	321	$y = x^6 - \sqrt[3]{x}$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$

Relation between distance and velocity and accelerate: العلاقة بين المسافة و السرعة و التسارع

The distance function is $s(t)$ دالة المسافة

The velocity function is $v(t) = s'(t)$ دالة السرعة

The accelerate function is $a(t) = v'(t) = s''(t)$ دالة التسارع

$$s'(t) \quad v'(t)$$

$$s(t) \rightarrow \rightarrow \rightarrow v(t) \rightarrow \rightarrow \rightarrow a(t)$$

Acceleration function and deceleration function depend the sign of $v(t)$, $a(t)$

تسارع الدالة و تباطؤ الدالة يعتمد على إشارة السرعة و التسارع حسب الجدول المرفق

$v(t)$	+	-	+	-
$a(t)$	+	-	-	+
Discription	Acceleration تسارع		Deceleration تباطؤ	

Use the given position function to find the velocity and acceleration functions

استخدم دالة الموقع لإيجاد دالة السرعة و التسارع

322 $s(t) = -16t^2 + 40t + 10$

323 $s(t) = -4.9t^2 + 12t - 3$

The function represents the height of an object. Compute the velocity and acceleration at time $t = t_0$ is the object going up or down

الدالة تمثل ارتفاع هدف , هل الهدف يكون صاعد ام هابط

324 $h(t) = -16t^2 + 40t + 5$ at $t_0 = 1$

325 $h(t) = 10t^2 - 24t$ at $t = 2$

- 326 If the position function after t second $s(t) = t^3 - 9t^2 + 9t$ Find the acceleration every time the velocity equal zero.
 إذا كانت دالة الموقع بعد زمن يعطى بالعلاقة التالية $s(t) = t^3 - 9t^2 + 9t$: اوجد التسارع عندما تكون السرعة تساوي صفر

Equation of Tangent

Note: equation of tangent need to know: لايجاد معادلة المماس نحتاج الى معرفة

- 1) point $x = a$ to find $y = f(a)$ النقطة و لايجاد نعوض في الدالة
- 2) Slop of tangent at $x = a$ can find by: ميل المماس و يمكن ايجاده من خلال
 - a) the derivative of function at $x = a$ $m = f'(a)$ المشتقة
 - b) $m = \tan\theta$ and θ is the angle between tangent and positive x -axis ظل الزاوية
- 3) Slop of horizontal line = 0 ميل الخط الافقي
 معادلة الخط الافقي $y = b$
- 4) Slop of vertical line = undefine ميل الخط الرأسى = غير معرف
 معادلة الخط الرأسى $x = a$ هي
- 5) Equation of line in point -slop form is $(y - y_1) = m(x - x_1)$ where the point is (x_1, y_1) and slop = $m = f'(x_1)$
 معادلة المستقيم المار بنقطة و ميل معلوم هي
- 6) The slop of any parallel two lines are equal $L_2 // L_1 \leftrightarrow m_1 = m_2$
 ميل المستقيمت المتوازية يكون ميلهما متساوي
- 7) The slop of any perpendicular two lines $L_1 \perp L_2 \leftrightarrow m_1 \times m_2 = -1$
 ميل المستقيمت المتعامدة هو

Find an equation of the tangent line to $y = f(x)$ at $x = a$ اوجد معادلة المماس للدالة $y = f(x)$ عند $x = a$	
327	$f(x) = x^2 - 2x + 1$ at $x = 2$
328	$f(x) = 4\sqrt{x} - 2x$ at $x = 4$
1) Determine the value (s) of x for which the tangent line to $y = f(x)$ is horizontal احسب قيم x التي يكون عندها الميل للدالة خط افقي 2) Determine the value(s) of x for which the tangent line to $y = f(x)$ intersects the $x - axis$ at 45° angle احسب قيم x التي يكون عندها المماس يصنع زاوية مقدارها 45° مع محور السينات	
329	$f(x) = x^3 - 3x + 1$

330	$f(x) = x^4 - 4x + 2$		
1) Determine the value (s) of x for which the slope of the tangent line to $y = f(x)$ is does not exist احسب قيم x التي يكون عندها ميل المماس غير معرف			
331	$f(x) = x^{1/3}$	332	$f(x) = x + 2 $
333	$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x < 1 \\ 3x, & x \geq 1 \end{cases}$	334	$f(x) = x^2 - 3x - 4 $

335	Find all the points at which the slope of the tangent line to $f(x) = x^3 + 3x + 3$ equal 5 اوجد جميع القيم التي يكون عندها ميل المماس للدالة $=5$
336	Find all values of x for which the tangent line to $y = x^3 - 3x + 1$ اوجد جميع قيم x التي يكون عندها ميل المماس a) At angle of 45° with the x-axis يصنع زاوية مع محور السينات b) At an angle 30° with x-axis

337	Find all values of x for which the tangent line to $y = x^3 + 2x + 1$ and $y = x^4 + x^3 + 3$ are a) parallel متوازيان c) perpendicular متعامدان
338	Find the value of the constant a, if the tangent of the curve of the function $f(x) = ax^2 - 4x$ at $x = 1$ makes an angle measured 45° with the positive x-axis. اوجد قيمة الثابت a اذا كان الدالة و المماس يصنع زاوية مقدارها 45 مع محور السينات

If $f(x) = x^2 + 3x + 1$ find			
339	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-11}{x-2}$	340	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2)-f(2+h)}{3h}$
341	If $f(2) = 5$, $f'(2) = 4$ find $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)f(x)}{x-2}$		
342	If the curve of function $f(x) = 4x^3 - kx^2 + 3$ has horizontal tangent at $x = 1$ find k إذا كان منحنى الدالة له مماس افقي عند النقطة اوجد قيمة الثابت		

343	If the line $y = 3x - a$ is a tangent to the curve of the function $f(x) = 2x^2 - x + 1$, find the value of the constant a إذا كان المستقيم $y = 3x - a$ هو مماس لمنحنى الدالة اوجد قيمة الثابت a
344	If $f(x) = x^3 - 4x + 2$ find a) The average rate of change in interval $[-1, 3]$ متوسط التغير للدالة في الفترة $[-1, 3]$ b) The rate of change at $x = 2$ معدل التغير للدالة عند النقطة $x = 2$

345	If $g(x) = 3x + 3xf(x) + 2$ and the average rate of change of f in the interval $[1, 3]$ is 5, find the average rate of change of $f(x)$ in the interval $[1, 3]$ إذا كانت الدالة $g(x)$ لها متوسط تغير في الفترة يساوي 5 , اوجد متوسط التغير للدالة $f(x)$ في الفترة نفسها
346	If the average rate of change of $f(x) = x^2 - 4$ in the interval $[2, a]$ equal 5 , find a. إذا كان متوسط معدل التغير للدالة في الفترة يساوي 5 اوجد قيمة a

Lesson 3-4	The Product and Quotient Rules	قاعدة الضرب والقسمة
Theorem 4.1: (Product Rule) قاعدة الضرب Suppose that f and g are differentiable. then افترض ان الدوال قابلة للاشتقاق $\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ Theorem 4.2: (Quotient Rule) قاعدة القسمة $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ Note: $y = \frac{a}{g(x)} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-a g'(x)}{(g(x))^2}$		
Find the derivative of each function اوجد مشتقة الدوال التالية		
347	$f(x) = (x^2 + 3)(x^3 - 3x + 1)$	
348	$f(x) = (x^3 - 2x^2 + 5)(x^4 - 3x^2 + 2)$	
349	$f(x) = (\sqrt{x} + 3x)(5x^2 - \frac{3}{x})$	
350	$f(x) = (x^{3/2} - 4x)(x^4 - \frac{3}{x^2} + 2)$	

351	$f(x) = \frac{3t-2}{5t+1}$
352	$g(x) = \frac{x^2+2x+5}{x^2-5x+1}$
353	$f(x) = \frac{3x-6\sqrt{x}}{5x^2-2}$

354	$g(x) = \frac{6x - \frac{2}{x}}{x^2 + \sqrt{x}}$
355	$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2 - 5x + 1}$
356	$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}(x + 3)$

357	$f(x) = \frac{x^2+3x-2}{\sqrt{x}}$
358	$f(x) = t(\sqrt[3]{t} + 3)$
359	$f(x) = \frac{t^2}{3} + \frac{5}{t^2}$

360	$g(x) = (x + 2) \frac{x^2 - 1}{x^2 + x}$
Find the equation of the tangent line to the graph of $y = f(x)$ at $x = a$ اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة	
361	$f(x) = (x^2 + 2x)(x^4 + x^2 + 1)$ $a = 0$
362	$f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ $a = 1$

Assume that f and g are differentiable with افتراض ان كل من قابلة للاشتقاق

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
0	-1	-1	3	-1
1	-2	3	1	-2

Find an equation of the tangent line to the graph of $y = h(x)$ at $x = a$

اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة

363 $h(x) = f(x)g(x) \quad a = 0$

364 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad a = 1$

365

$$h(x) = x^2 f(x) \quad a = 0$$

366

$$h(x) = \frac{x^2}{g(x)} \quad a = 1$$

367	Suppose the price of an object is 20 AED and 20,000 units are sold, If the price increases at a rate of 1.25 AED per year, and the quantity sold increases at rate of 2000 per year, at what rate will the revenue increase? افترض ان سعر احدى السلع 20 درهم للقطعة وقد بيعت 20000 قطعة فاذا كان السعر يزداد بمعدل 1.25 درهم في العام الواحد وتزداد الكمية المباعة بمعدل 2000 قطعة في العام الواحد فبأي معدل سيزداد الايراد؟
368	Suppose the price of an object is 14 AED and 12,000 units are sold. The company wants to increase the quantity sold by 1200 units per year, while increasing the revenue by 20,000 AED. At what rate would the price have to be increased to reach these goals? افترض ان سعر القطعة 14 درهم، وأنه قد بيعت 12000 قطعة. تريد الشركة زيادة الكمية المباعة بمقدار 12000 قطعة في العام مع زيادة الايراد بمقدار 20000 درهم في العام. فما المعدل الذي يتعين زيادة السعر به لتحقيق هذين الهدفين؟

Lesson 3-5	The Chain Rule	قاعدة السلسلة
Theorem 5.1: (Chain Rule) If g is differentiable at x and f is differentiable at $g(x)$, then: $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Note: it is often think of the chain rule in Leibniz notation if $y = f(u)$ and $u = g(x)$ then $y = f(g(x))$ and the chain rule says that $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ من المفيد في اغلب الأوقات التفكير في قاعدة السلسلة باستخدام صيغة ليبنز Note: 1) If $y = (f(x))^n$ then $\frac{dy}{dx} = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$ 2) If $y = \sqrt{f(x)}$ then $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ Use the chain rule to find the derivative of each of the following: استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة الدوال التالية		
369	$f(x) = (x^3 - 1)^2$	
370	$f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5$	
371	$f(x) = (x^3 - x)^3$	
372	$f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$	

373	$f(x) = (x^3 + x - 1)^3$
374	$f(x) = \sqrt{4x - 1/x}$
375	$f(x) = x^5 \sqrt{x^3 + 2}$
376	$f(t) = \frac{t^3}{(t^2 + 4)^2}$

377	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$
378	$f(t) = \sqrt{\frac{t}{t^2+1}}$
379	$f(w) = \frac{6}{\sqrt{w^2+4}}$
380	$f(t) = \frac{8}{(t^3+4)^5}$

381	$f(x) = (\sqrt{x^3 + 2} + 2x)^{-2}$
382	$f(x) = \sqrt{x^3 + 2 + 2x^{-2}}$
383	$f(t) = \sqrt{4t^2 + (8 - x^2)^2}$
384	$f(t) = (\sqrt{4t^2 + 8} - x^2)^2$

Theorem 5.2: The Derivative of an Inverse Function مشتقة الدوال العكسية

If f is differentiable everywhere on its domain and has an inverse function

إذا كانت قابلة للاشتقاق على أي نقطة في المجال ولها معكوس فإن

$$g(x) = f^{-1}(x), \text{ then}$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

For all x in the domain of $g(x)$, provided $f'(g(x)) \neq 0$

f Has and inverse g , find $g'(a)$

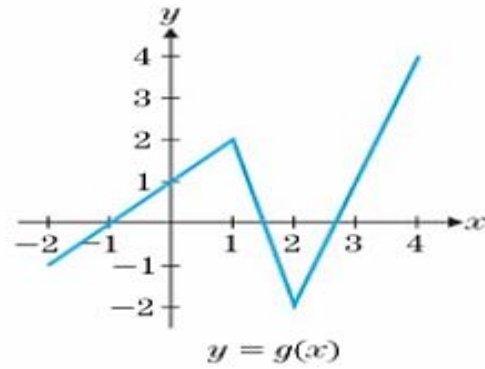
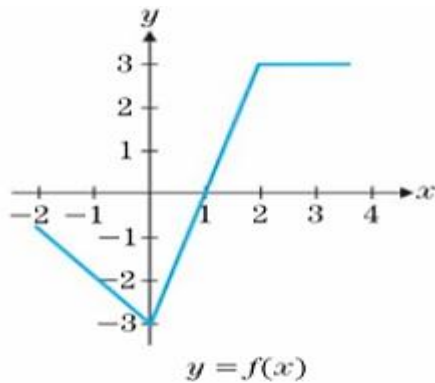
385 $f(x) = x^3 + 4x - 1, a = 1$

386 $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}, a = 2$

387 Find the value of the constant a , if $f(x) = x^3 - ax$ and $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 22$

388	if $xf(x) = 2x^3 + 2$, find $f'(3)$
389	Find an equation of tangent line to the graph of $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ at $a = 3$ اوحد معادلة المماس لمنحنى الدالة
390	Use the relevant information to compute the derivative for $h(x) = f(g(x))$ Where $f(1) = 3$, $g(1) = 2$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 3$, $g'(1) = -2$, $g'(3) = 5$ استخدم المعلومات التالية لإيجاد المشتقة Find $h'(1)$

Use the graphs to find the derivative of the composite function at the point, if it exist
 استخدم الرسم التالي لإيجاد مشتقة الدوال المركبة عند النقطة المشار لها



391 $f(g(x))$ at $x = 0$

392 $f(g(x))$ at $x = 1$

393 $f(g(x))$ at $x = 3$

394 $g(f(x))$ at $x = 0$

395 $g(f(x))$ at $x = 1$

396 $g(f(x))$ at $x = 3$

Find the derivative where f is differentiable everywhere in its domain.

أوجد المشتقات للدالة

397	$f(x^2)$	398	$(f(x))^2$
399	$f(\sqrt{x})$	400	$f(xf(x))$
401	Determine all values of x such that $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x}$ is not differentiable أوجد كل قيم x التي تجعل $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x}$ غير قابلة للإشتقاق. صف الخاصية في التمثيل البياني التي تمنع وجود المشتقة.		

Lesson 3-6		Derivative of Trigonometric Functions		مشتقة الدوال المثلثية			
Theorem: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1-\cos \theta}{\theta} = 0$							
Derivative of trigonometric functions							
Function $y = f(x)$		Derivative $\frac{dy}{dx} = f'(x)$		Function $y = f(g(x))$		Derivative use Chain Rule $y' = f'(g(x)) \times g'(x)$	
$y = \sin x$		$\frac{dy}{dx} = \cos x$		$y = \sin (f(x))$		$y' = \cos(f(x)) \times f'(x)$	
$y = \cos x$		$\frac{dy}{dx} = -\sin x$		$y = \cos (f(x))$		$y' = -\sin(f(x)) \times f'(x)$	
$y = \tan x$		$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$		$y = \tan (f(x))$		$y' = \sec^2(f(x)) \times f'(x)$	
$y = \cot x$		$\frac{dy}{dx} = -\csc^2 x$		$y = \cot (f(x))$		$y' = -\csc^2(f(x)) \times f'(x)$	
$y = \csc x$		$\frac{dy}{dx} = -\csc x \cdot \cot x$		$y = \csc (f(x))$		$y' = -\csc(f(x)) \times \cot(f(x)) \times f'(x)$	
$y = \sec x$		$\frac{dy}{dx} = \sec x \cdot \tan x$		$y = \sec (f(x))$		$y' = \sec(f(x)) \times \tan(f(x)) \times f'(x)$	
Derivative trigonometric function use chain rule						مشتقة الدوال المثلثية باستخدام قاعدة السلسلة	
402	$y = 4\sin 3x - x$						
403	$y = 4x^2 - 3\tan 2x$						

404	$y = 2 \sin 2x \cos 2x$
405	$y = x^2 \sec 4x$
406	$y = x \cos 5x^2$
407	$y = \sin 3x \sec 3x$

408	$y = \frac{\sin x^2}{x^2}$
409	$y = \frac{1}{\sin 4x}$
410	$y = \frac{x^2}{\csc^4 2x}$
411	$y = \tan \sqrt{x^2 + 1}$

412	$f(t) = \sqrt{\cos 5t \sec 5t}$
413	$y = 4\sin^2 3x + 4\cos^2 3x$
414	$f(x) = \sin^3(\cos\sqrt{x^3 + 2x^2})$
415	$f(x) = 4x^2 \sin x \sec 3x$

416	$f(x) = \tan^4(\sin^2(x^3 + 2x))$
417	$f(x) = \sqrt{\cos x}$
418	$f(x) = \cos \frac{1}{2}x$
419	$f(x) = \sin x^2 \tan x$
420	$f(x) = \sin^2(\tan x)$

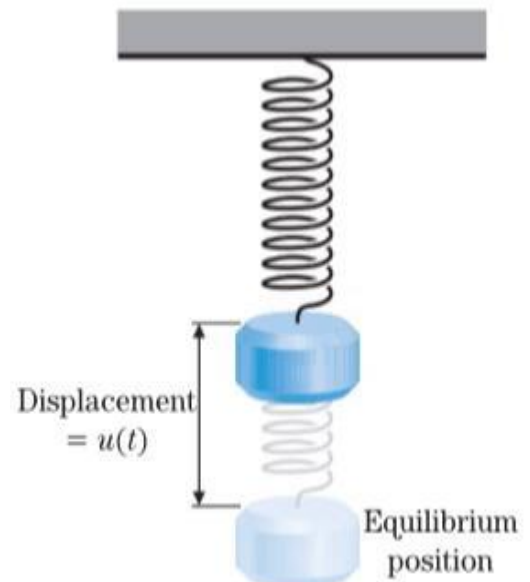
421	$f(x) = \sin(\tan^2 x)$
Find the equation of the tangent line to $y = f(x)$ at $x = a$ أوجد معادلة المماس للدالة عند النقطة المشار لها	
422	$f(x) = \sin 4x$, $a = \frac{\pi}{8}$
423	$f(x) = x^2 \cos x$, $a = \frac{\pi}{2}$
Use the position function to find the velocity at time $t = t_0$, assume unite of feet and second استخدم دالة الموقع لإيجاد السرعة عند الزمن , افترض ان الوحدات تقاس بالقدم و الثانية	
424	$s(t) = 4 + 3 \sin t$ $t_0 = \pi$

425	$s(t) = t \cos(t^2 + \pi) \quad t_0 = 0$		
Use the basic limits $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ and $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ to find the following limits			
426	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$	427	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{5x}$
428	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 5x}$	429	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2 - 1}{x^2}$

430	For $f(x) = \sin 2x$, find $f^{75}(x)$ and $f^{150}(x)$
431	For $f(x) = \cos 3x$, find $f^{77}(x)$ and $f^{120}(x)$

432

Example: Analysis of a Spring -Mass System
 Suppose that $u(t)$ measures the displacement (measured in inches) of a mass suspended from a spring t second after it is released and that $u(t) = 4 \cos 2t$
 Find the velocity at any time t and determine the maximum velocity.



433

If $f(2x + 1) = 3x - 5x^2 + 1$ find $f'(3)$

Lesson 3-7		Derivative of Exponential and Logarithmic Functions		اشتقاق الدوال الاسية والدوال اللوغاريتمية	
Derivative of exponential function:			مشتقة الدالة الأسية		
Function $y = f(x)$	Derivative $\frac{dy}{dx} = f'(x)$	Function $y = f(g(x))$	Derivative use Chain Rule $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$		
$y = e^x$	$\frac{dy}{dx} = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = f'(x) \cdot e^{f(x)}$		
$y = a^x$	$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = f'(x) a^{f(x)} \ln a$		
Derivative of logarithmic function:			مشتقة الدالة اللوغاريتمية		
$y = \ln x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$	$y = \ln(f(x))$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$		
Differentiate each function		$\frac{dy}{dx}$	أوجد مشتقة الدوال التالية:		
434	$f(x) = x^3 e^x$				
435	$f(x) = e^{2x} \cos 4x$				
436	$f(t) = t + 2^t$				

437	$f(t) = t 4^{3t}$		
438	$f(x) = 2e^{4x+1}$	439	$f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$
440	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$	441	$f(u) = e^{u^2+4u}$
442	$f(x) = 3 e^{\tan x}$	443	$f(x) = \frac{x}{e^{6x}}$

444	$f(x) = \ln 2x$	445	$f(x) = \ln \sqrt{8x}$
446	$f(x) = \ln(x^3 + 3x)$	447	$f(x) = x^3 \ln x$
448	$g(x) = \ln (\cos x)$	449	$f(x) = \cos x \ln(x^2 + 3)$

450	$f(x) = \sin(\ln x^2)$	451	$f(x) = \ln(\sin x^2)$
452	$f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$	453	$f(x) = \frac{\ln \sqrt{x}}{x}$
454	$f(x) = e^x \ln x$	455	$f(x) = e^{\ln x}$

456	$f(x) = 2e^x$	457	$f(x) = \frac{e^x}{2^x}$
Find equation of tangent line to $y = f(x)$ at $x = 1$ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند النقطة المشار لها			
458	$f(x) = 3e^{x^2}$		
459	$f(x) = x^2 \ln x$		

Find all value of x for which the tangent line to $y = f(x)$ is horizontal

اوجد قيم x التي يكون عندها المماس افقي

460 $f(x) = xe^{-2x}$

461 $f(x) = x^2e^{-2x}$

Use logarithmic differentiation to find the derivative

استخدم مشتقة اللوغاريتم لإيجاد المشتقات التالية

462 $f(x) = x^{\sin x}$

463	$f(x) = (\sin x)^x$
464	$f(x) = x^{\ln x}$

465

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

466

The concentration of certain chemical after second of an autocatalytic reaction is given by $c(t) = \frac{6}{2e^{-8t}+1}$. show that $c'(t) > 0$ and use this information to determine that the concentration of the chemical never exceeds

يتم تحديد تركيز مادة كيميائية معينة بعد t ثانية من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \frac{6}{2e^{-8t}+1}$ بين ان $c'(t) > 0$ و استخدم هذه المعلومات للتأكد على ان تركيز المركب الكيميائي لا يتخطى 6 ابدا

Lesson 3-8	Implicit Differentiation and Inverse Trigonometric Functions	الاشتقاق الضمني والدوال المثلثية العكسية
$\frac{d}{dx} g(y) = g'(y) \cdot y'(x)$		
Note: can simplify the expression before derivative		
Find the derivative $y'(x)$ implicitly		
اوجد المشتقة $y'(x)$ ضمناً		
467	$x^2y^2 + 3y = 4x$ find $y'(x)$	
468	$3xy^3 - 4x = 10y^2$ find $y'(x)$	

469	$\sqrt{xy} - 4y^2 = 12$ <i>find</i> $y'(x)$
470	$\sin xy = x^2 - 3$ <i>find</i> $y'(x)$
471	$\frac{x+3}{y} = 4x + y^2$ <i>find</i> $y'(x)$

472	$3x + y^3 - \frac{4y}{x+2} = 10x^2$ find $y'(x)$
473	$e^{x^2y} - e^y = x$ find $y'(x)$
474	$xe^y - 3y \sin x = 1$ find $y'(x)$

475	$y^2\sqrt{x+y} - 4x^2 = y$ <i>find $y'(x)$</i>
476	$x\cos(x+y) - y^2 = 8$ <i>find $y'(x)$</i>
477	$e^{4y} - \ln(y^2 + 3) = 2x$ <i>find $y'(x)$</i>

478	$e^{x^2}y - 3\sqrt{y^2 + 2} = x^2 + 1$ find $y'(x)$
Compute the slop of the tangent line at the given point implicitly احسب ميل المماس عند النقطة المعطى , ضمناً	
479	$x^2 + 4y^2 = 8$ at $(2, 1)$
480	$y - 3x^2y = \cos x$ at $(0, 1)$

Find an equation of the tangent line at the given point

أوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة المعطى

481 $x^2 - 4y^3 = 0$ at $(2, 1)$

482 $x^2y^2 = 3y + 1$ at $(2, 1)$

483 $x^4 = 8(x^2 - y^2)$ at $(2, -\sqrt{2})$

Find the second derivative $y''(x)$

اوجد المشتقة الثانية

484 $y^2x^2 + 3x - 4y = 5$ find $y''(x)$

485 $e^{xy} + 2y - 3x = \sin y$ find $y''(x)$

Find the locations of all horizontal and vertical tangents

اوجد اين يكون جميع المماسات الافقية و الرأسية

486 $x^2 + y^2 - 3y = 0$

487	$x^2 + y^2 - 2y = 3$
488	If $x^2 + y^2 = 25$ Show that $(y')^2 + yy'' + 1 = 0$
489	If $x^2 + y^2 = 1$ Show that $y^3 y'' + 1 = 0$

If $6x^2 + 5 = 4xy$ Show that $xy'' + 2y' = 3$

Derivative of the inverse trigonometric functions

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{for } -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{for } -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \cot^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}}, \quad \text{for } |x| > 1$$

$$\frac{d}{dx} \csc^{-1} x = \frac{-1}{|x| \sqrt{x^2-1}}, \quad \text{for } |x| > 1$$

$y = g(f(x))$	$y' = g'(f(x))f'(x)$
$y = \sin^{-1}(f(x))$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} f'(x)$
$y = \cos^{-1}(f(x))$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} f'(x)$
$y = \tan^{-1}(f(x))$	$y' = \frac{1}{1+(f(x))^2} f'(x)$
$y = \cot^{-1}(f(x))$	$y' = \frac{-1}{1+(f(x))^2} f'(x)$
$y = \sec^{-1}(f(x))$	$y' = \frac{1}{ x \sqrt{(f(x))^2-1}} f'(x), x > 1$
$y = \csc^{-1}(f(x))$	$y' = \frac{-1}{ x \sqrt{(f(x))^2-1}} f'(x), x > 1$

Find the derivative of the given function

أوجد مشتقة الدوال التالية :

491 $f(x) = \sin^{-1}(x^3 + 1)$ find $f'(x)$

492 $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$ find $f'(x)$

493 $f(x) = \cos^{-1}(x^2 + x)$ find $f'(x)$

494 $f(x) = \cos^{-1}(2/x)$ find $f'(x)$

495	$f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$ find $f'(x)$
496	$f(x) = \sqrt{2 + \tan^{-1}x}$ find $f'(x)$
497	$f(x) = e^{\tan^{-1}x}$ find $f'(x)$

498	$f(x) = 4 \sec^{-1}(x^4)$ <i>find</i> $f'(x)$
Show that the families of curves are orthogonal بين ان المماسات جميعها متعامده	
499	$x^2 + y^2 = cx$ <i>and</i> $x^2 + y^2 = ky$
500	$y = cx^3$ <i>and</i> $x^2 + 3y^2 = k$

501

Find and simplify the derivative of $\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

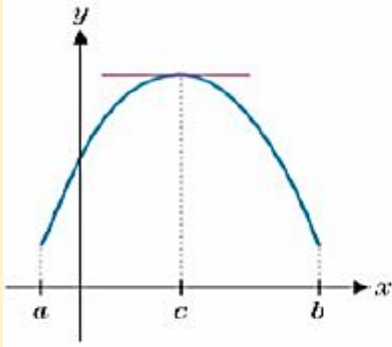


FIGURE 3.48a
Graph initially rising

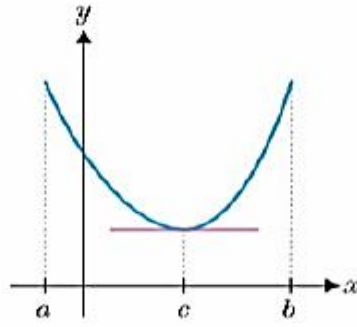


FIGURE 3.48b
Graph initially falling

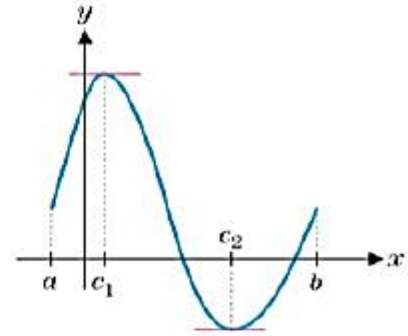


FIGURE 3.48c
Graph with two horizontal tangents

Note: since $f'(x) = 0$ at a horizontal tangent, this says that there is at least point c in (a, b) , for which $f'(c) = 0$ see figures above

لاحظ: بما أن $f'(x) = 0$ عند مماس أفقي، فإنه يعني أنه ثمة نقطة واحدة على الأقل c حيث أن $f'(c) = 0$ (انظر الرسومات في الأعلى)

Theorem 10.1 (Rolle's Theorem)

Suppose that f is continuous on the interval $[a, b]$, differentiable on the interval (a, b) and $f(a) = f(b)$, Then there is a number $c \in (a, b)$ such that $f'(c) = 0$

النظرية 10.1 (نظرية رول):

على فرض أن f متصلة في الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة (a, b) و $f(a) = f(b)$ فإنه يوجد عدد $c \in (a, b)$ حيث أن $f'(c) = 0$

- 502 Find a value of c satisfying the conclusion of Rolle's Theorem for $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ on the interval $[0, 1]$
أوجد قيمة c التي تحقق نظرية رول للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ في الفترة $[0, 1]$.

Theorem 10.2:

Suppose that f is continuous on the interval $[a, b]$, differentiable on the interval (a, b) and $f(x) = 0$ has two solutions in $[a, b]$, then $f'(x) = 0$ has at least one solution on (a, b) .

النظرية 10.2

إذا كانت f متصلة في الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة (a, b) و يوجد لـ $f(x) = 0$ حلان في $[a, b]$ فإن $f'(x) = 0$ لها حل واحد على الأقل في (a, b) .

Theorem 10.3:

For any integer $n > 0$, if f is continuous on the interval $[a, b]$, differentiable on the interval (a, b) and $f(x) = 0$ has n solutions in $[a, b]$, then $f'(x) = 0$ has at least $(n - 1)$ solutions in (a, b) .

النظرية 10.3

لأي عدد صحيح $n > 0$. إذا كانت f متصلة في الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة (a, b) و يوجد لـ $f(x) = 0$ من الحلول في $[a, b]$ فإن $f'(x) = 0$ لها على الأقل $(n - 1)$ من الحلول في (a, b) .

503 Prove that $f(x) = x^3 + 5x + 1 = 0$ has exactly one solution.
اثبت ان الدالة لها حل واحد فقط

504 Prove that $f(x) = x^3 + 4x - 3 = 0$ has exactly one solution.
اثبت ان الدالة لها حل واحد فقط

THEOREM 10.4 (Mean Value Theorem)

Suppose that f is continuous on the interval $[a, b]$ and differentiable on the interval (a, b) . Then there exists a number $c \in (a, b)$ such that

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (10.2)$$

النظرية 10.4 (نظرية القيمة المتوسطة)

على فرض أن f متصلة في الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة (a, b) فإنه يوجد عدد $c \in (a, b)$

حيث إن
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

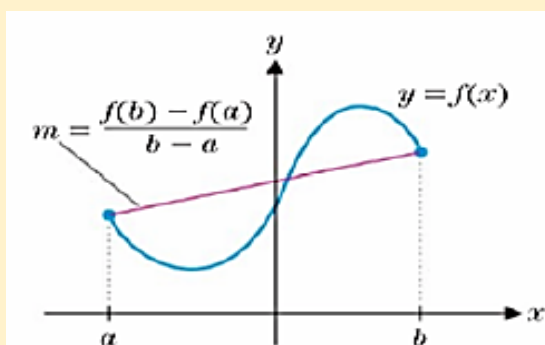


FIGURE 3.51
Secant line

المستقيم القاطع

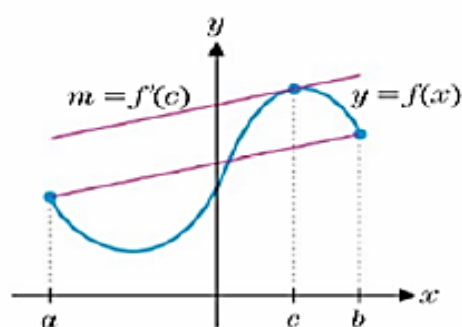


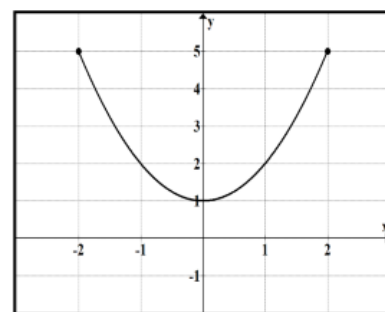
FIGURE 3.52
Mean Value Theorem

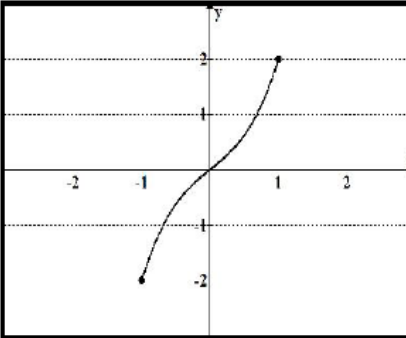
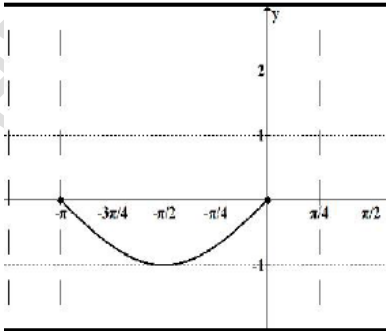
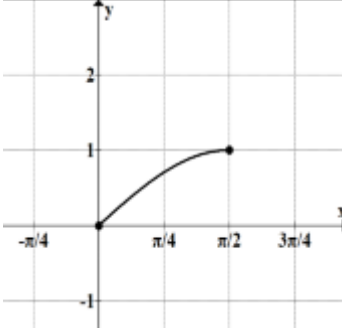
نظرية القيمة المتوسطة

Check the hypotheses of Rolle's Theorem and the Mean Value Theorem and find a value of c that makes the appropriate conclusion true. Illustrate the conclusion with a graph

تحقق من فرضيات نظرية رول و نظرية القيمة المتوسطة وجد قيمة c التي يحمل الاستنتاج الخاص بالنظريتين صحيحاً , اشرح الاستنتاج برسم تمثيل بياني

505 $f(x) = x^2 + 1, [-2, 2]$



506	$f(x) = x^3 + x, [0, 1]$	
507	$f(x) = \sin x, [-\pi, 0]$	
508	$f(x) = \sin x, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	

Explain why it is not valid to use the Mean Value Theorem. Then find any value of determined theorem

اشرح لماذا لا يمكن استخدام نظرية القيمة المتوسطة , اوجد أي قيمة تحقق النظرية

509

$$f(x) = \frac{1}{x} , [-1, 1]$$

510

$$f(x) = \frac{1}{x^2} , [-1, 2]$$

511

$$f(x) = \tan x , [0, \pi]$$

Theorem5: Suppose that $f'(x) = 0$ for all x in some open interval I . Then $f(x)$ is constant on I .

النظرية 10 . 5

على فرض أن $f'(x) = 0$ لكل قيم x في الفترة المفتوحة I فإن $f(x)$ ثابتة في I .

Remarks:

- Suppose that $f'(x) > 0$ for all x in some open interval I . Then $f(x)$ is increasing on I .
- Suppose that $f'(x) < 0$ for all x in some open interval I . Then $f(x)$ is decreasing on I .

Corollary1: Suppose that $g'(x) = f'(x)$ for all x in some open interval I , then, for some constant C , $g(x) = f(x) + C$

النتيجة 10 . 1

على فرض أن $g'(x) = f'(x)$ لكل قيم x في الفترة المفتوحة I فإنه بالنسبة للثابت C يكون
 $g(x) = f(x) + C$ لكل $x \in I$

مثال 10 . 4 إيجاد جميع الدوال التي لها مشتقة معطاة

Determine whether the function is increasing, decreasing or neither.

حدد ما إذا كانت الدالة متزايدة أم متناقصة أم غير ذلك

512

$$f(x) = x^3 + 5x + 1$$

513

$$f(x) = -x^3 - 3x + 1$$

514	$f(x) = e^x$
515	$f(x) = \ln x$
Find all functions g such that $g'(x) = f(x)$ اوجد جميع الدوال g التي مشتقتها $g'(x) = f(x)$	
516	$f(x) = x^2$
517	$f(x) = 9x^4$

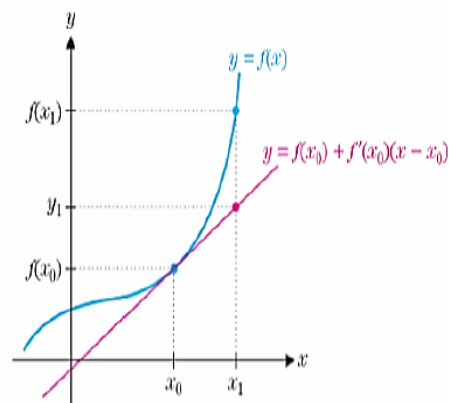
518	$f(x) = \sin x$
519	$f(x) = \frac{1}{x^2}$

Linear approximation التقريب الخطي**DEFINITION 1.1**

The linear (or tangent line) approximation of $f(x)$ at $x = x_0$ is the function $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

1.1 التعريف

التقريب الخطي (أو المماس) للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$ هو الدالة $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



To find linear approximation: لإيجاد التقريب الخطي

- 1) x_0 2) $f(x_0)$ 3) $f'(x_0)$ last 4) $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Finding a Linear approximation

520 Find linear approximation to $f(x) = \cos x$ at $x = \frac{\pi}{3}$ and use it to find approximation $\cos(1)$

521 Find linear approximation to $f(x) = \sin x$ at $x = 0$

522	Find linear approximation to $f(x) = \sqrt{x}$ at $x_0 = 1$ then find $\sqrt{1.2}$
523	Find linear approximation to $f(x) = \sqrt{2x + 9}$ at $x_0 = 0$ then find $\sqrt{8.8}$

524	Find linear approximation to $f(x) = \sin 3x$ at $x_0 = 0$ then find $\sin(0.3)$
525	Find linear approximation to $f(x) = \frac{2}{x}$ at $x_0 = 1$ then find $\frac{2}{0.99}$

526	Use linear approximation to approximate $\sqrt[3]{8.02}$, $\sqrt[3]{8.15}$ and $\sqrt[3]{25.2}$
527	Use linear approximation to estimate the quintet $\sqrt[4]{16.04}$, $\sqrt[4]{16.16}$

528

Use linear approximation to estimate the quintet $\sin(0.1)$, $\sin\left(\frac{4}{9}\right)$

529

A company estimates that $f(x)$ thousand software games can be sold at the price of AED x as given in the table.

x	20	30	40
$f(x)$	18	14	12

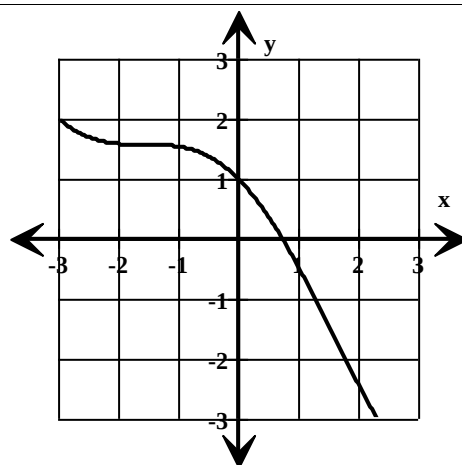
Estimate the number of games that can be sold at (a) AED24 and (b) AED36.

530	Newton`s Method You can use the sequence of two approximation the zeroes of function $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \dots$ Where x_0 first approximation for zero function f And x_1 second approximation for zero function f atc
Using Newton`s method to approximate zero	
531	Find an approximate zero to $f(x) = x^5 - x + 1$
Use newton`s method with given $x_0 = a$ to compute x_1 and x_2 by hand	
532	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 - 0$ at $x_0 = 1$

Use Newton`s method to find an approximate root, sketch the graph

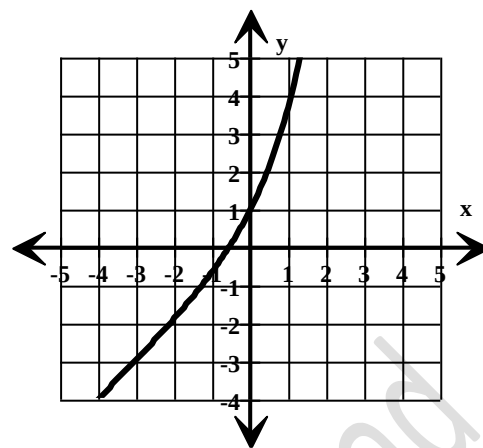
533 $x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$

534 $\cos x - x = 0$



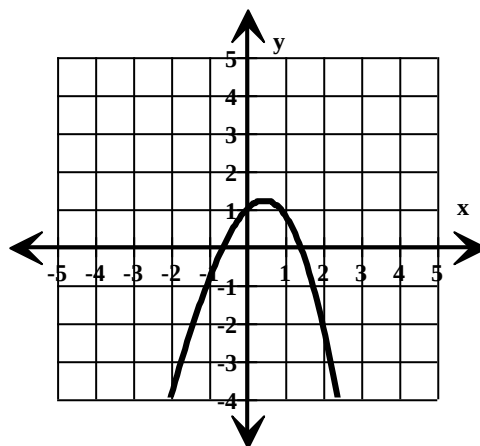
535

$$e^x = -x$$



536

$$\sin x = x^2 - 1$$



Use Newton`s method to estimate the given number	
537	$\sqrt{11}$
538	$\sqrt{23}$
539	Find the linear approximation at $x = 0$ to each function a) $g(x) = \tan^{-1} x$

Lesson 4-2	Indeterminate forms and L'Hopital's Rule	الصيغة غير المعرفة وقاعدة لوبيتال
THEOREM 2.1 (L'Hôpital's Rule) Suppose that f and g are differentiable on the interval (a, b), except possibly at the point $c \in (a, b)$ and that $g'(x) \neq 0$ on (a, b), except possibly at c. Suppose further that $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ has the indeterminate form $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$ and that $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ (or } \pm\infty\text{). Then,}$ $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$		
1) Indeterminate form $\frac{0}{0}$ find the limit		
540	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} =$	
541	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} =$	
542	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} =$	

543	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{2t} - 1}{t} =$
544	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin^{-1} x} =$
545	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin x} =$
546	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{\sin x} =$

547	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} =$
548	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} =$
549	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} =$
550	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} =$

551	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x \sin x}{x \sin^2 x} =$
552	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) =$
553	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{x} - \frac{2}{\sin 2x} \right) =$

554	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} =$
555	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sinh x)}{\sinh(\sin x)} =$
556	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3} =$

557	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sinh x}{\cos x - \cosh x} =$		
Indeterminate form $\frac{\infty}{\infty}$ find the limit			
558	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} =$	559	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} =$
560	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2}{x^2-4} =$	561	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+4x+3} =$

562	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^4} =$	563	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} =$
564	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} =$	565	$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} =$
Other indeterminate Forms There are five additional indeterminate forms to consider : $\infty - \infty, 0 \times \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ Can reduce it to forms $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$ and apply l'hôpital's Rule			
The indeterminate form $(\infty - \infty)$			
566	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right) =$		

567	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) =$
568	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - x) =$
The indeterminate form $(0 \times \infty)$	
569	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x =$

570	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} =$
-----	---

571	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} =$
-----	---

The indeterminate form (1^∞)

572	$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} =$
-----	--

573

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$$

574

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x+1}{x-2} \right|^{\sqrt{x^2-4}} =$$

575

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} =$$

576	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2} \right)^x =$
-----	--

The indeterminate form (0^0)

577	$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x =$
-----	---------------------------------------

The indeterminate form (∞^0)

578	$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{\frac{2}{x}} =$
-----	---

579	$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)^{\frac{2}{x}} =$	
580	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^x =$	
Which of limit can use Hopetal`s Rule or not		
581	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\csc x}{\sqrt{x}}$	582 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-3/2}}{\ln x}$

583	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{\tan^{-1} x}$	584	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2)}{e^{x/3}}$
-----	--	-----	--

Find the error(s)

585	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = \frac{-1}{2}$
586	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

587

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{-2/x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$$

انتهت الأسئلة بحمد الله وتوفيقه

أتمنى من الله أي تكون هذه الملزمة هي بمثابة مساعدة للطالب للوصول الى النجاح والتفوق في مادة الرياضيات

ولا تنسى عزيزي الطالب عدم الاستغناء عن الكتاب حيث انه المرجع الأساسي

ولا تنسونا من دعائكم