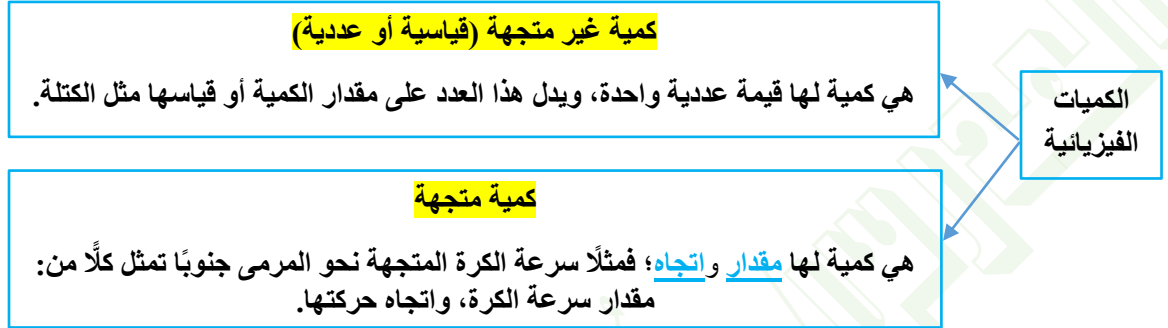


8-1 مقدمة في المتجهات

ورقة عمل الثاني عشر العام

1- تمثيل المتجهات واستخدامها هندسيًا. 2- حل مسائل المتجهات وتحليل المتجهات إلى مركباتها المتعامدة.

في هذا الدرس سوف نتعلم:



تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات غير المتجهة في كلّ مما يأتي:

a. يسير قارب بسرعة 15 km/h .

كمية غير متجهة ؛ الكمية : 15 ، الاتجاه : غير موجود .

b. متجول يسير 25 خطوة باتجاه الغرب.

كمية متجهة ؛ الكمية : 25 ، الاتجاه : الغرب .

c. وزن شخص على ميزان حمام.

كمية متجهة ؛ الكمية : الوزن ، الاتجاه : لأسفل بفعل الجاذبية الأرضية .

d. تسير السيارة بسرعة 60 km/h بزاوية 15° في اتجاه الجنوب الشرقي.

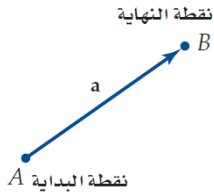
كمية متجهة ؛ الكمية : 60 ، الاتجاه : 15 اتجاه الجنوب الشرقي .

e. يهبط قافز بالمظلات لأسفل مباشرة بسرعة 20.2 km/h .

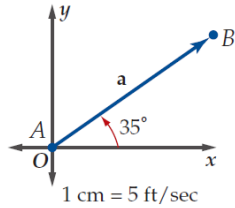
كمية متجهة ؛ الكمية : 20.2 ، الاتجاه : أسفل .

f. يسحب طفل زلاجة بقوة مقدارها 40 N .

كمية غير متجهة ؛ الكمية : 40 ، الاتجاه : لا يوجد .



يمكن تمثيل الكمية المتجهة بسهم يُظهر كلاً من المقدار والاتجاه ويسمى هذا التمثيل **متجهًا**. ويمثل الشكل المجاور المتجه الذي له **نقطة البداية** A، و**نقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\vec{AB}$ أو $\vec{a}$ أو a .



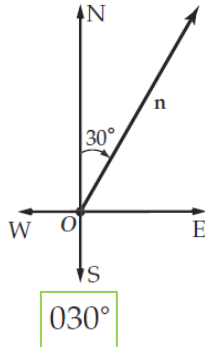
أما **طول المتجه** فهو مقدار المتجه ويمثله طول القطعة المستقيمة، ويتناسب مع مقدار الكمية المتجهة، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو $1 \text{ cm} = 5 \text{ ft/s}$ ، فإن طول المتجه a ، ويرمز له بالرمز $|a|$ ، يساوي 2.6×5 أو 13 ft/s .

يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل.

طرق التعبير عن اتجاه المتجه في الوضع القياسي

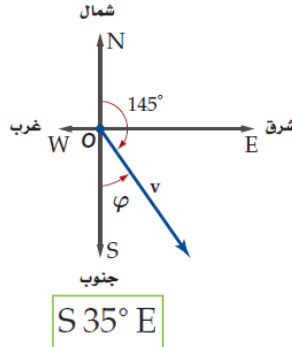
الاتجاه الحقيقي

تقاس زاوية الاتجاه الحقيقي بدءًا من الشمال فقط ومع عقارب الساعة. وتكتب الزاوية بثلاثة أرقام.



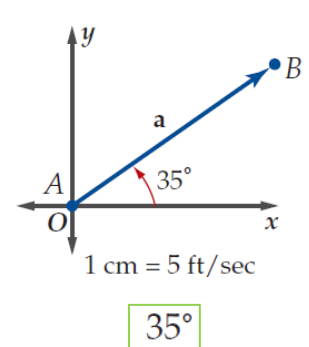
الاتجاه الرباعي ϕ

ϕ نقرا فاي، وهي زاوية قياسها بين 0° و 90° شرق أو غرب الخط الرأسى (شمال أو جنوب)



الاتجاه الأفقي

الزاوية التي يصنعها المتجه مع الجزء الموجب لمحور x عكس عقارب الساعة



استخدم مسطرة أو منقلة؛ لرسم متجه لكلٍ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

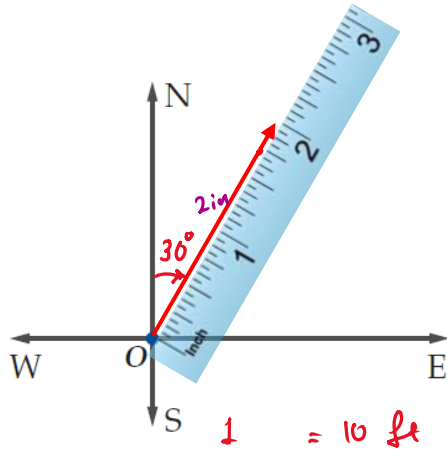
(a) $a = 20 \text{ ft/s}$ باتجاه 30° .

* مقياس الرسم / $2 \text{ in} = 20 \text{ ft}$

$1 \text{ in} = 10 \text{ ft}$

* الزاوية 30° باتجاه عقارب الساعة مع الشمال

* الطول في الرسم : 2 in



(b) $v = 75 \text{ N}$ ، بزاوية قياسها 140° مع الاتجاه الأفقي.

* الزاوية 140° عكس عقارب الساعة من الجزء الموجب

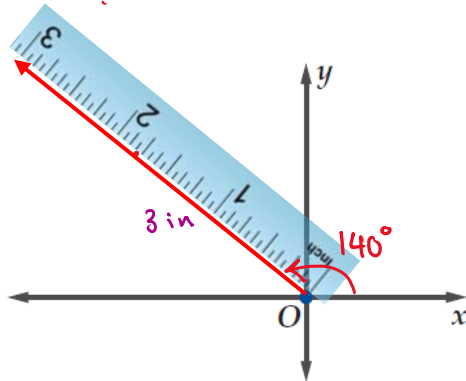
لمحور x

* الطول 3 in

$3 \text{ in} = 75 \text{ N}$

$1 \text{ in} = 25 \text{ N}$

* مقياس الرسم



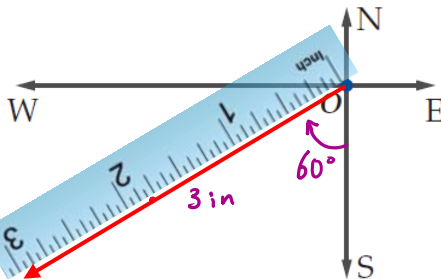
(c) $z = 30 \text{ mi/h}$ ، باتجاه $S 60^\circ W$.

* الزاوية 60° غرب الجنوب

* الطول في الرسم 3 in

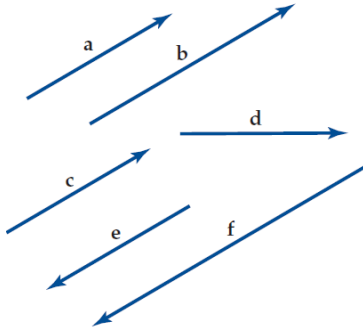
* مقياس الرسم $3 \text{ in} = 30 \text{ mi}$

$1 \text{ in} = 10 \text{ mi}$



تنبيه! يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثل المسافة المقطوعة.

عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:



• **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلاً في الشكل المجاور $a \parallel b \parallel c \parallel f$.

• **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور a, c ؛ لهما الطول والاتجاه نفسهما، لذا هما متساويان، ويعبر عنه بالرموز: $a = c$.

لاحظ أن $a \neq b$ ؛ لأن $|a| \neq |b|$ و $a \neq d$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.

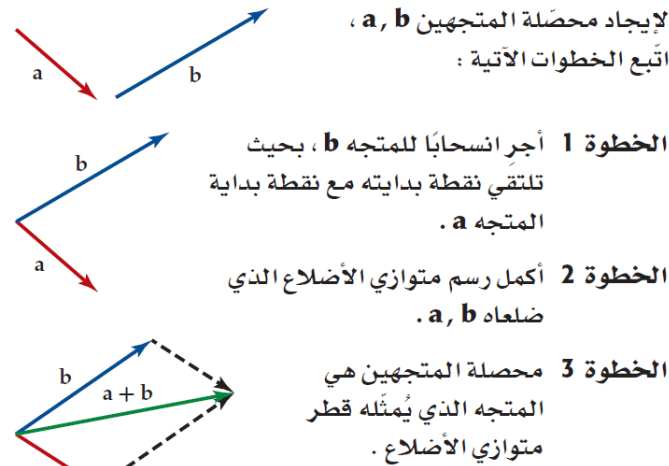
• **معكوس المتجه** هو متجه له طول المتجه a ، ولكنه في اتجاه معاكس له، ويكتب على الصورة $-a$ ، ففي الشكل المجاور $e = -a$.

عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا، ويسمى **المحصلة** أو **الناتج**. ويكون لمتجه المحصلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين عند تطبيقهما واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصلة هندسيًا باستعمال **قاعدة المثلث**، أو **قاعدة متوازي الأضلاع**.

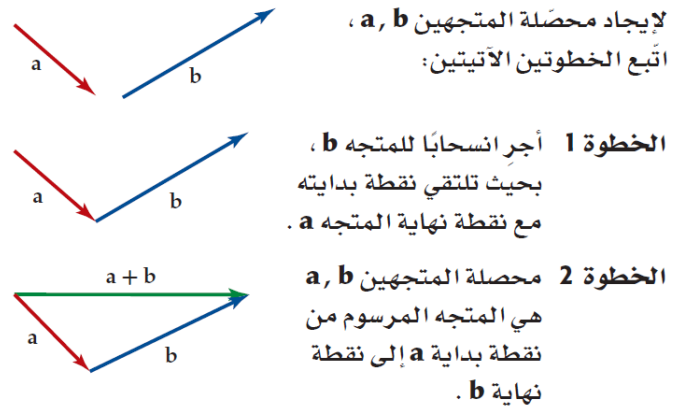
إيجاد المحصلة

مفهوم أساسي

قاعدة متوازي الأضلاع (الذيل إلى الذيل)

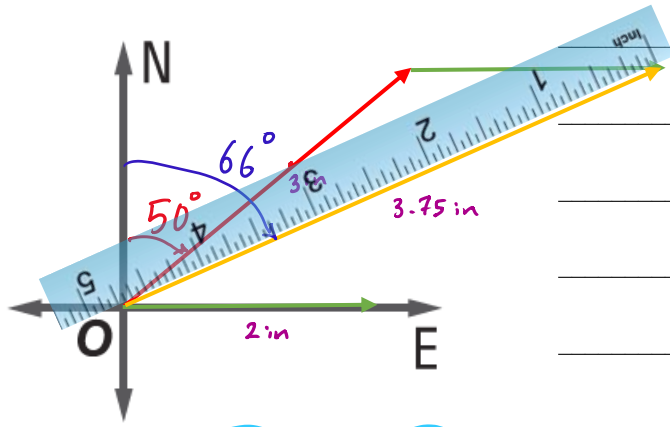


قاعدة المثلث (الطرف إلى الذيل)



إيجاد محصلة (ناتج) متجهين

رياضة المشي: قطع عبد الله في سباق للمشي، مسافة 120 m باتجاه N 50° E، ثم مسافة 80 m في اتجاه الشرق. كم يبعد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الرباعي؟



المتجه الأول: - زاوية 50° من الشمال.

* الطول 3 in

* قياس الرسم: 3 in = 120 m

1 in = 40 m

المتجه الثاني: - اتجاه الشرق.

* الطول 1 in = 40 m

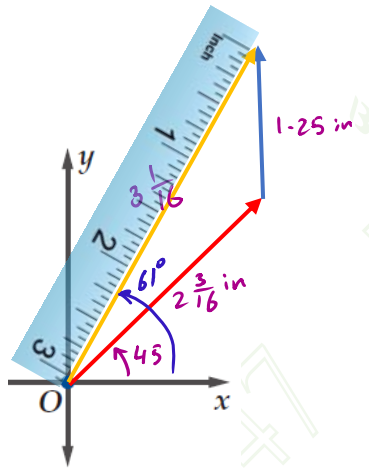
x = 80 m

→ x = $\frac{80}{40} = 2$ in

المحصلة باسخدام قاعدة المثلث 4.75 x 40 = 190 m في اتجاه N 66° E

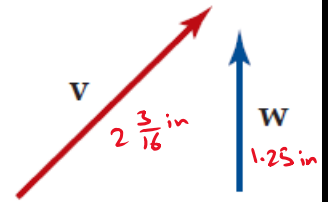
ملاحظة ← الرسم بالحفرة والمنقلة.

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملاً قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفق.



المحصلة: 3 $\frac{1}{16}$ in

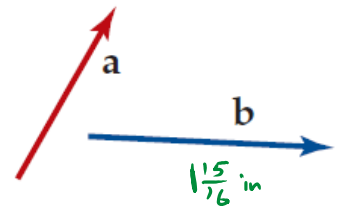
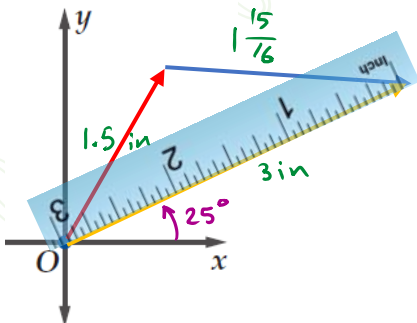
الزاوية: 61°



ملاحظة ← الرسم بالحفرة والمنقلة.

المحصلة: 3 in

الزاوية: 25°



ملاحظة ← الرسم بالحفرة والمنقلة.

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي المتجه الصفري. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو 0، وليس له اتجاه.

ضرب المتجه في عدد حقيقي

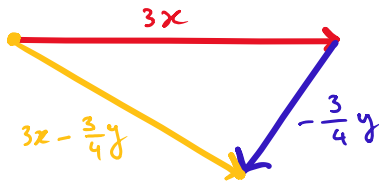
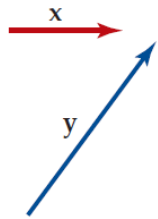
مفهوم أساسي

إذا ضرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ينتج المتجه $k\mathbf{v}$ الذي يوازي المتجه $\mathbf{v}$ ، ويكون طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k| |\mathbf{v}|$. ويتحدد اتجاهه بإشارة k .

- إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

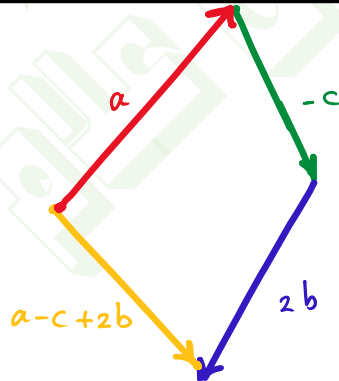
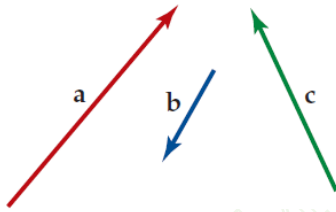
العمليات على المتجهات

$$3x - \frac{3}{4}y$$



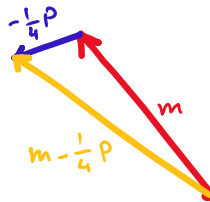
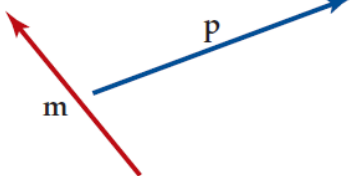
- * ارسم المتجه الذي يُمثّل كلّاً مما يأتي:
- * نرسم متجه $3x$ نفس المتجه x وطوله 3 أضعاف $|x|$
- * نرسم متجه $-\frac{3}{4}y$ عكس اتجاه y وطوله $\frac{3}{4}|y|$
- * نضع ذيل المتجهين عند رأس المتجه الآخر
- * ثم نرسم متجه المحصلة بقاعدة الترتيب.

$$a - c + 2b$$



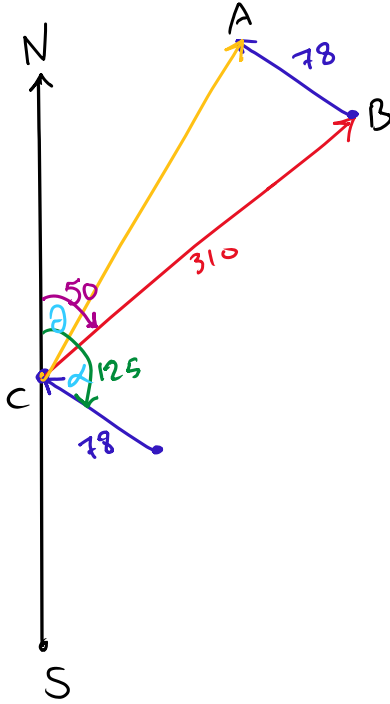
- * نرسم نفس المتجه a
- * نرسم عكس المتجه c
- * نرسم متجه $2b$ نفس اتجاه b وطوله نفس b مرتين.
- * ثم نضع ذيل المتجه على رأس الآخر
- * ثم نصل المحصلة.

$$m - \frac{1}{4}p$$



- * نرسم نفس m
- * نرسم متجه عكس اتجاه p وطوله $\frac{1}{4}|p|$
- * نسحب أصداها لينطبق ذيله على رأس الآخر
- * نصل المحصلة.

الطيران تطير طائرة بسرعة جوية 310 km/h باتجاه 050° . إذا كانت الرياح تهب بسرعة 78-km/h من اتجاه حقيقي 125° ، فحدد سرعة الطائرة واتجاهها بالنسبة إلى الأرض.



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \rightarrow \quad m \angle B = m \angle \alpha = 125 - 50 = 75^\circ$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{310^2 + 78^2 - 2(310)(78) \cos 75^\circ} = 299.45$$

$$\frac{\sin C}{78} = \frac{\sin 75^\circ}{299.45}$$

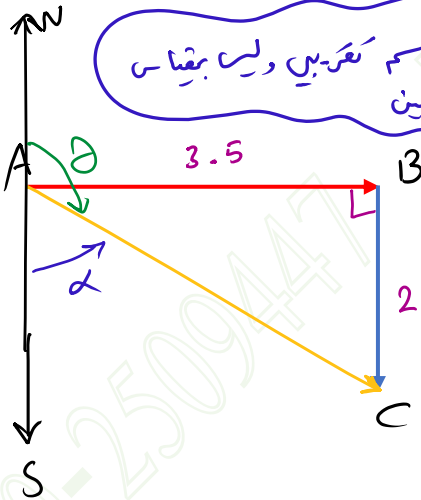
$$\Rightarrow C = \sin^{-1} \frac{78 \sin 75^\circ}{299.45} = 14.57^\circ$$

$$\theta = 50 - 14.57 = 35.43^\circ$$

سرعة الطائرة بالنسبة للأرض هي 299.45 km/h
في اتجاه 035° تقريباً.

لا فطعة: الرسم تقريبي وليس بقياس معين

السباحة يسبح إبراهيم في اتجاه الشرق بسرعة 3.5 ft/s عبر نهر متجهاً مباشرة نحو الضفة المقابلة. وفي الوقت ذاته، يحمله تيار النهر باتجاه الجنوب بمعدل 2 ft/s. جد سرعة إبراهيم واتجاهه بالنسبة للشاطئ.



لا فطعة: الرسم تقريبي وليس بقياس معين

باستخدام فيثاغورس

$$b = \sqrt{3.5^2 + 2^2} = 4.03$$

$$\tan A = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$$

$$\tan A = \frac{2}{3.5}$$

$$A = \tan^{-1} \frac{2}{3.5} = 29.74^\circ$$

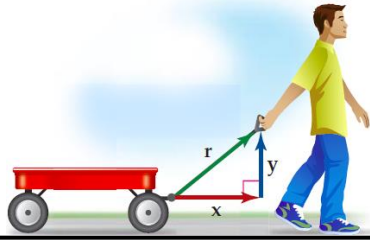
$$\theta = 90 + 29.74 = 119.74^\circ$$

$$\alpha = 90 - 29.74 = 60.26^\circ$$

السرعة 4.03 ft/s

الاتجاه $S 60.26^\circ E$

السرعة 4.03 ft/s والاتجاه الحقيقي 120° تقريباً



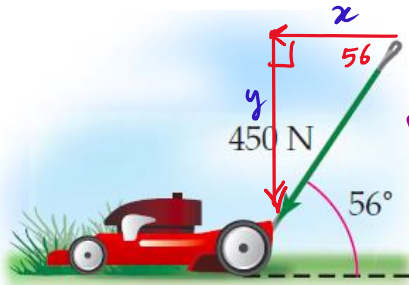
تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللذان ناتج جمعهما المتجه r ، مركبتين x ، ومع أن مركبتين المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين**، واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة r المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية x تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية y تسحب العربة إلى أعلى.

تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

قص العشب: يدفع علي عربة قصّ العشب بقوة مقدارها 450 N، وبزاوية قياسها 56° مع الأفقي (سطح الأرض).

(a) ارسم شكلًا يوضح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

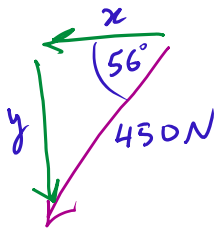
(b) أوجد مقدار كل من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.



$$|x| \text{ المركبة الأفقية} = 450 \cos 56 = 251.64 \text{ N}$$

$$|y| \text{ المركبة الرأسية} = 450 \sin 56 = 373.07 \text{ N}$$

a



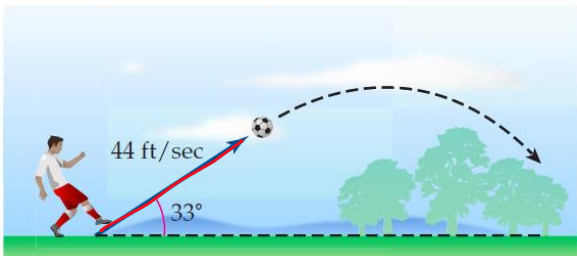
* مقدار المركبة الأفقية 252 N تقريبًا.

* مقدار المركبة الرأسية 373 N تقريبًا.

كرة قدم: يركل لاعب كرة قدم من سطح الأرض بسرعة مقدارها 44 ft/s، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.

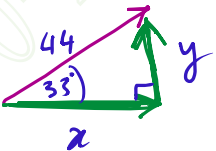
(A) ارسم شكلًا يوضح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

(B) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة.



B

A



$$|x| \text{ المركبة الأفقية} = 44 \cos 33 = 36.9 \text{ ft/sec}$$

$$|y| \text{ المركبة الرأسية} = 44 \sin 33 = 23.96 \text{ ft/sec}$$

* مقدار المركبة الأفقية 36.9 ft/sec تقريبًا.

* مقدار المركبة الرأسية 23.96 ft/sec تقريبًا.