

1 Estimate an arc length of a given function.

تقدير طول القوس على منحنى دالة معطاة

(7-12)

68

قدر طول القوس لمنحنى الدالة $y = f(x)$ في الفترة المعطاة باستخدام 4 قطعة مستقيمة ، 8 قطع مستقيمةEstimate the length of the curve $y = f(x)$ on the given interval using(a) $n = 4$ line segments

and

(b) $n = 8$ line segments.

7. $f(x) = \cos x, 0 \leq x \leq \pi/2$

10. $f(x) = 1/x, 1 \leq x \leq 2$

8. $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi/2$

11. $f(x) = x^2 + 1, -2 \leq x \leq 2$

9. $f(x) = \sqrt{x+1}, 0 \leq x \leq 3$

12. $f(x) = x^3 + 2, -1 \leq x \leq 1$

Solutions:

7. $f(x) = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

, 2 lines segments

2 قطعة مستقيمة

Left Point	Right Point	Length
(0 ,)	($\frac{\pi}{4}$,)	$d_1 = \sqrt{\quad}$
($\frac{\pi}{4}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$)	($\frac{\pi}{2}$,)	$d_2 = \sqrt{\quad}$
Total		

8. $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

, 3 lines segments

3 قطع مستقيمة

Left Point	Right Point	Length
(,)	(,)	$d_1 = \sqrt{\quad}$
(,)	(,)	$d_2 = \sqrt{\quad}$
(,)	(,)	$d_3 = \sqrt{\quad}$
Total		



9. Estimate the length of the curve $y = \sqrt{x+1}$ on the interval $[0, 3]$
by using 3 line segments $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

قدر طول القوس لمنحنى الدالة $f(x)$ في الفترة المعطاة باستخدام 2 قطعة مستقيمة

Left Point	Right Point	Length
(,)	(,)	$\sqrt{\quad}$
(,)	(,)	$\sqrt{\quad}$
(,)	(,)	$\sqrt{\quad}$
Total		

قدر طول القوس لمنحنى الدالة $f(x)$ في الفترة المعطاة باستخدام 2 قطعة مستقيمة

10. Estimate the length of the curve $f(x) = \frac{1}{x}$ on the interval $[1, 2]$
by using 2 line segments $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Left Point	Right Point	Length
(,)	(,)	$\sqrt{\quad}$
(,)	(,)	$\sqrt{\quad}$
Total		

11. $f(x) = x^2 + 1$, $-1 \leq x \leq 1$, 2 lines segments
2 قطعة مستقيمة

12. $f(x) = x^3 + 2$, $-2 \leq x \leq 2$, 2 lines segments
2 قطعة مستقيمة



استخدم التمثيل البياني لإيجاد كل نهاية إن وجدت. Use the graph to find each limit if exists.

7. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

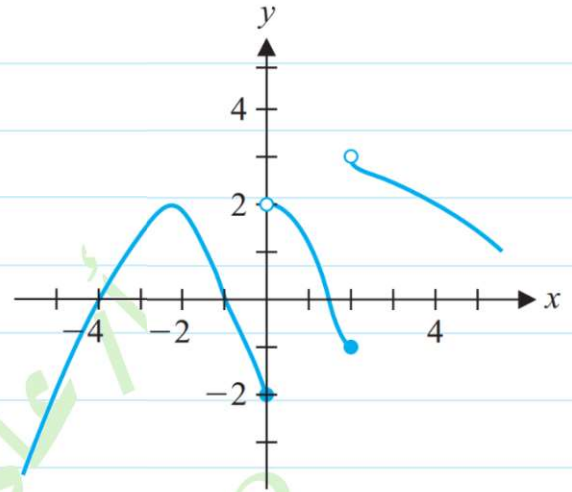
(d) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

(g) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(h) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$



8. (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

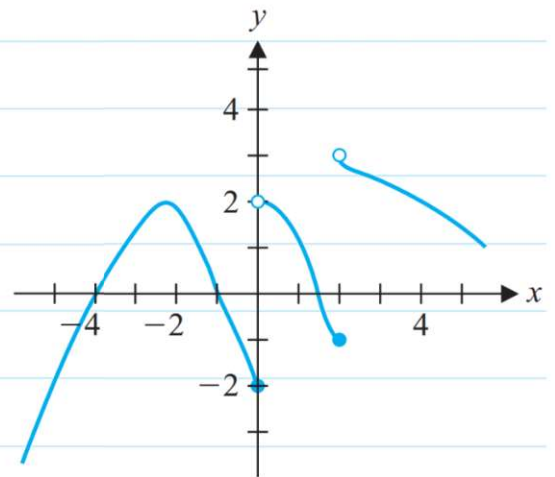
(f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(g) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

(h) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$



3	Find limits of polynomial, rational, and trigonometric functions using theorems. إيجاد نهاية الدوال كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية باستخدام نظريات النهايات	(21-28)	85
---	---	---------	----

evaluate the indicated limit, if it exists. Assume that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

21. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 2 \\ x^2 & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$ احسب كل نهاية (إن وجدت)

- A) 2
B) 3
C) 4
D) DNE

22. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{if } x < -1 \\ 3x + 1 & \text{if } x \geq -1 \end{cases}$

- A) -2
B) 2
C) 3
D) DNE

23. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{if } x < -1 \\ 3 & \text{if } -1 < x < 1 \\ 2x + 1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$

- A) -1
B) 1
C) 3
D) DNE

24. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{if } x < -1 \\ 3 & \text{if } -1 < x < 1 \\ 2x + 1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$

- A) 2
B) 3
C) 4
D) DNE



25. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$

- A) 2
B) 3
C) 4
D) DNE

Remember that: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

26. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h}$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
 $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

27. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 4}$

- A) 1
B) -1
C) 4
D) DNE

28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{5x}$

- A) 1
B) 5
C) 1/5
D) DNE



4	Use the squeeze theorem to find limits	(29-32)	85
	استخدم نظرية الشظيرة لإيجاد النهايات		87

29. Use the Squeeze Theorem to evaluate: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

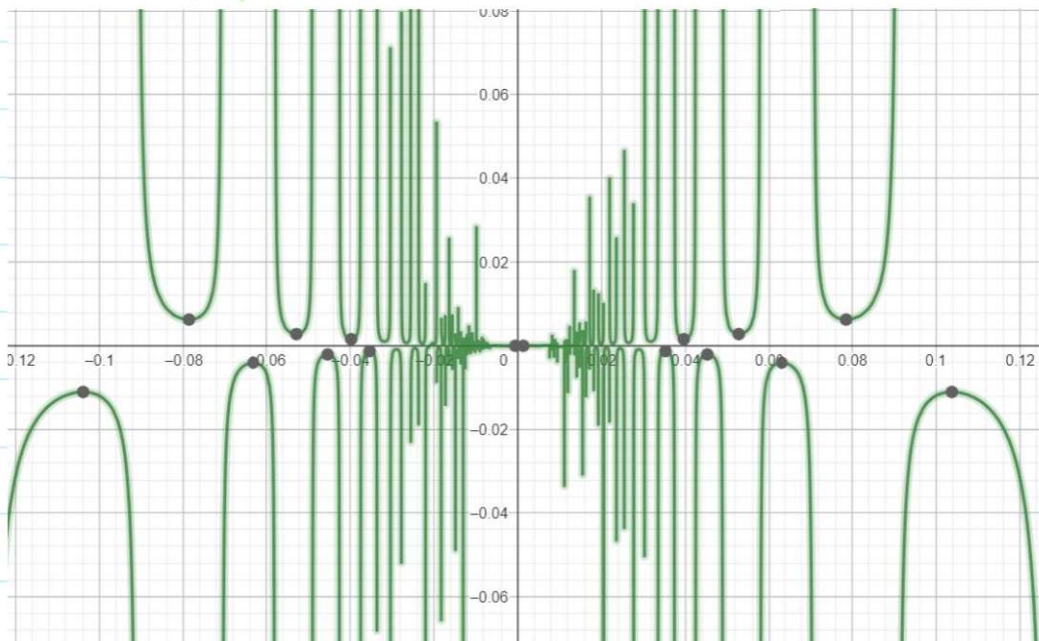
استخدم نظرية الشظيرة لإيجاد: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

30. Why can't you use the Squeeze Theorem as in exercise 29 to prove that

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sec\left(\frac{1}{x}\right) = 0$? Explore this limit graphically.

لماذا لا تستطيع استخدام نظرية الشظيرة كما في المثال 29 لإثبات أن $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sec(1/x) = 0$ استكشف هذه النهاية بيانيًا.

You cannot use the Squeeze Theorem as in exercise 29 because the secant function is not bounded between -1 and 1 like the sine function is. This is difficult to investigate graphically because of the infinitely many vertical asymptotes as x approaches 0 .



31. Use the Squeeze Theorem to evaluate: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos^2 \left(\frac{1}{x} \right)$.

استخدم نظرية الشظيرة لإيجاد $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos^2 \left(\frac{1}{x} \right)$

32. Suppose that $f(x)$ is bounded: that is, there exists a constant M such that $|f(x)| \leq M$ for all x .

Use the Squeeze Theorem to prove that $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$

افترض أنّ $f(x)$ محدودة: بمعنى أنّ هناك M ثابتة بحيث تكون $|f(x)| \leq M$ لجميع قيم x .

استخدم نظرية الشظيرة لإثبات أنّ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$

If $|g(x) + 4| \leq 2(3 - x)^4$ for all values of x , evaluate $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

إذا كان $|g(x) + 4| \leq 2(3 - x)^4$ لكل قيم x اوجد $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$



5	Use the continuity properties to study the continuity of a function or a composition of functions at a given point	95
	استخدم خصائص الاتصال لدراسة اتصال الدالة أو مجموعة الدوال عند نقطة معينة	97

Determine the intervals on which f is continuous. حدد الفترات التي تكون عندها متصلة

21. $f(x) = \sqrt{x+3}$

- A) $[3, \infty)$
 B) $(-3, \infty)$
 C) $(-\infty, 3]$
 D) $[-3, \infty)$

22. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

- A) $[3, \infty)$
 B) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
 C) $(2, \infty)$
 D) $[-2, 2]$

23. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

- A) $[2, \infty)$
 B) $(-2, \infty)$
 C) $(-\infty, 2]$
 D) $(-\infty, \infty)$

24. $f(x) = (x-1)^{3/2}$

- A) $[1, \infty)$
 B) $(-1, \infty)$
 C) $(-\infty, 1]$
 D) $[-1, \infty)$

25. $f(x) = \sin^{-1}(x+2)$

- A) $(3, 1)$
 B) $(-3, 3)$
 C) $[-3, -1]$
 D) $(-\infty, \infty)$

26. $f(x) = \ln(\sin x)$

- A) $(2n\pi, 2n\pi + \pi)$
 B) $(2n\pi, n\pi + \pi)$
 C) $(2n\pi, 2n\pi - \pi)$
 D) $(n\pi, 2n\pi + \pi)$

27. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + e^x}{x^2 - 2}$

- A) $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$
 B) $(-1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$
 C) $(-1, \infty)$
 D) $(\sqrt{2}, \infty)$

2019/2020



2018/2019

$$28. f(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

- A) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
 B) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
 C) $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$
 D) $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$



$$f(x) = \frac{\ln(1 - x^2)}{\sqrt{x}}$$

- A) $(-1, 1)$
 B) $(0, \infty)$
 C) $(1, \infty)$
 D) $(0, 1)$

$$f(x) = \ln(3x - 6)$$

- A) $(-2, \infty)$
 B) $[2, \infty)$
 C) $(2, \infty)$
 D) $(-\infty, 2)$



6	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits.	(23-32)	106
	إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات		108

In exercises 23–28, determine all horizontal and vertical asymptotes. For each side of each vertical asymptote,

determine whether $f(x) \rightarrow \infty$ or $f(x) \rightarrow -\infty$.

حدد كل خطوط التقارب الأفقية والرأسية

ولكل ناحية من خط التقارب الرأسي حدد هل

$f(x) \rightarrow -\infty$ أو $f(x) \rightarrow \infty$

23. (a) $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$

$f(x) \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow -2^-$

$f(x) \rightarrow -\infty$ as $x \rightarrow -2^+$

$f(x) \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow 2^-$

$f(x) \rightarrow -\infty$ as $x \rightarrow 2^+$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$

$f(x) \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow 2^-$ and $x \rightarrow -2^+$.

$f(x) \rightarrow -\infty$ as $x \rightarrow 2^+$ and $x \rightarrow -2^-$.



24. (a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

(b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

(b) The function is only defined in $(-2, 2)$.

Two one-sided vertical asymptotes at

$x = \pm 2$. $f(x) \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow 2^-$, and

$f(x) \rightarrow -\infty$ as $x \rightarrow -2^+$.

No horizontal asymptotes.

25. $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

$f(x) \rightarrow -\infty$ as $x \rightarrow 3^-$,

$f(x) \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow 3^+$,

$f(x) \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow -1^-$, and

$f(x) \rightarrow -\infty$ as $x \rightarrow -1^+$.



26. $f(x) = \frac{1-x}{x^2+x-2}$

Vertical asymptote at $x = -2$.

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ as } x \rightarrow -2^-.$$

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ as } x \rightarrow -2^+ \text{ and } x \rightarrow -2^-.$$

Again, we have

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x}{x^2+x-2} = 0$$

So there is a horizontal asymptote at $y = 0$.

- A) Vertical asymptotes at $x = -2$,
No horizontal asymptote
- B) Vertical asymptotes at $x = -2, x = 1$
No horizontal asymptote
- C) Vertical asymptotes at $x = -2, x = 1$,
Horizontal asymptote at $y = 0$
- D) Vertical asymptotes at $x = -2$,
Horizontal asymptote at $y = 0$

27. $f(x) = 4 \tan^{-1} x - 1$

The function is continuous for all x , so no vertical asymptotes. We have

الدالة متصلة لجميع قيم x وبالتالي ليس لها خطوط تقارب رأسية

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} 4 \tan^{-1} x - 1 &= 4(\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x) - 1 \\ &= 4(\pi/2) - 1 \\ &= 2\pi - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{and } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 \tan^{-1} x - 1 &= 4(\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x) - 1 \\ &= 4(-\pi/2) - 1 = -2\pi - 1, \end{aligned}$$

so there are horizontal asymptotes at $y = 2\pi - 1$ and $y = -2\pi - 1$.

يوجد خطوط تقارب أفقية عند $y = 2\pi - 1$ و $y = -2\pi - 1$

A) No vertical asymptote, horizontal asymptote at $y = -2\pi - 1$ and $y = 2\pi - 1$

B) No vertical asymptote, horizontal asymptote at $y = 2\pi - 1$ only

C) No vertical asymptote, horizontal asymptote at $y = -2\pi - 1$ only

D) No vertical asymptote, no horizontal asymptote at



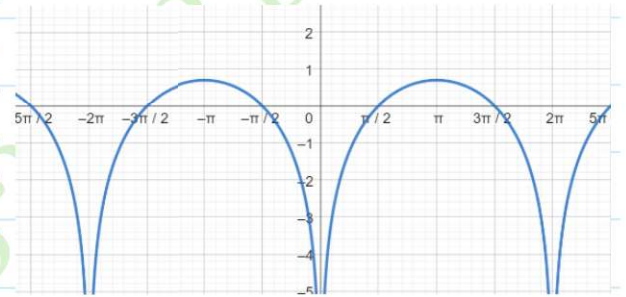
28. $f(x) = \ln(1 - \cos x)$

The function $\ln x$ has a one-sided vertical asymptote at $x = 0$, so $f(x) = \ln(1 - \cos x)$ will have a vertical asymptote whenever

$1 - \cos x = 0$, i.e., whenever $\cos x = 1$.

This happens when $x = 2k\pi$ for any integer k . Since $1 - \cos x \geq 0$ for all x , $f(x)$ is defined at all points except for these vertical asymptotes. Thus as $f(x)$ approaches any of these asymptotes (from either side), it behaves like $\ln x$ approaching 0 from the right, so $f(x) \rightarrow -\infty$ as x approaches any of these asymptotes from either side.

- A) Vertical asymptotes at $x = 2n\pi$,
No horizontal asymptote
- B) Vertical asymptotes at $x = n\pi$,
No horizontal asymptote
- C) Vertical asymptotes at $x = 2n\pi + 1$,
Horizontal asymptote at $y = 1$
- D) No Vertical asymptotes, No
Horizontal asymptote



In exercises 29–32, determine all vertical and slant asymptotes.

29. $y = \frac{x^3}{4 - x^2}$

حدد خطوط التقارب الرأسية والمائلة



- A) Vertical asymptotes at $x = \pm 2$, slant asymptote at $y = x$
- B) Vertical asymptotes at $x = \pm 2$, slant asymptote at $y = -x$
- C) Vertical asymptotes at $x = \pm 2$, horizontal asymptote at $y = 0$
- D) No vertical asymptote, no horizontal asymptote at



30. $y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$

- A) Vertical asymptotes at $x = 2$, horizontal asymptote at $y = x + 1$
 B) Vertical asymptotes at $x = 2$, slant asymptote at $y = x$
 C) Vertical asymptotes at $x = 2$, slant asymptote at $y = x + 2$
 D) No vertical asymptote, no horizontal asymptote at



31. $y = \frac{x^3}{x^2 + x - 4}$

- A) Vertical asymptotes at $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$,
slant asymptote at $y = x - 1$
 B) Vertical asymptotes at $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$,
slant asymptote at $y = x + 1$
 C) Vertical asymptotes at $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$,
slant asymptote at $y = x - 1$
 D) Vertical asymptotes at $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$,
slant asymptote at $y = x + 1$



32. $y = \frac{x^4}{x^3 + 2}$

- A) Vertical asymptotes at $x = -\sqrt[3]{2}$,
slant asymptote at $y = x$
 B) Vertical asymptotes at $x = -\sqrt[3]{2}$,
slant asymptote at $y = -x$
 C) Vertical asymptotes at $x = \sqrt[3]{2}$,
slant asymptote at $y = x$
 D) No vertical asymptotes,
slant asymptote at $y = x$



7	b) Find limits at infinity and limits that are infinite.	(9-22)	106
	إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية		108

Determine each limit (answer as appropriate, with a number, ∞ , $-\infty$ or does not exist).
حدد كل نهاية (أجب حسب الاقتضاء، بعدد أو ∞ أو $-\infty$ أو غير موجودة)

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 4x - 1}$

- ☐ 3
☐ $\frac{1}{3}$
☐ 0
☐ Does not exist

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^2 - 3x - 1}$

- ☐ 8
☐ $\frac{1}{2}$
☐ 0
☐ Does not exist

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{4 + x^2}}$

- ☐ $-\frac{1}{2}$
☐ $\frac{1}{2}$
☐ 0
☐ Does not exist

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{4x^3 - 5x - 1}$

- ☐ $-\frac{1}{2}$
☐ $\frac{1}{2}$
☐ 0
☐ Does not exist

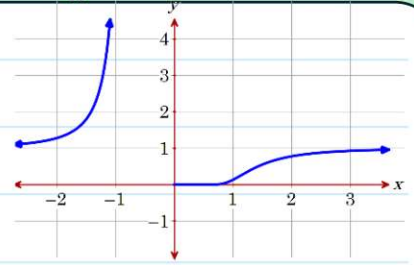
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x - 3} \right)$

- ☐ $-\infty$
☐ ∞
☐ 0
☐ Does not exist



14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x \sin x)$

15. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-2/x^3}$

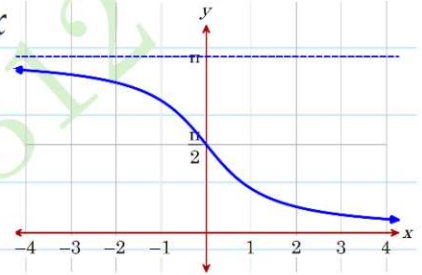


- ☐ $-\infty$
☐ ∞
☐ 0
☐ Does not exist

- ☐ $-\infty$
☐ ∞
☐ 0
☐ Does not exist

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(x+1)/(x^2+2)}$

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \cot^{-1} x$



- ☐ -1
☐ 1
☐ e
☐ Does not exist

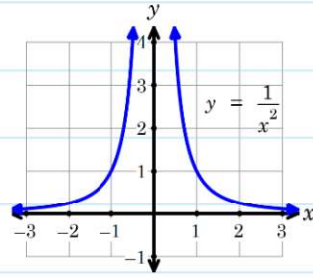
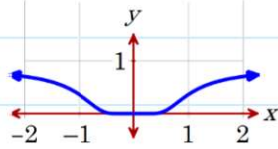
- ☐ $-\pi$
☐ π
☐ $\frac{\pi}{2}$
☐ Does not exist

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sec^{-1} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

- ☐ $-\frac{\pi}{2}$
☐ $\frac{\pi}{2}$
☐ ∞
☐ Does not exist

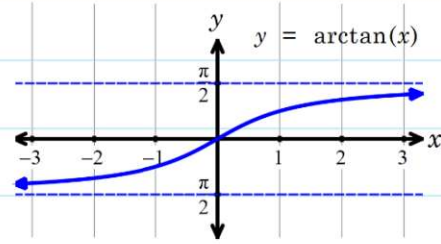


19. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(e^{-1/x^2})$



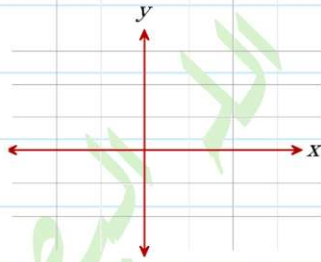
- ☐ 0
☐ 1
☐ e
☐ Does not exist

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\tan^{-1} x)$

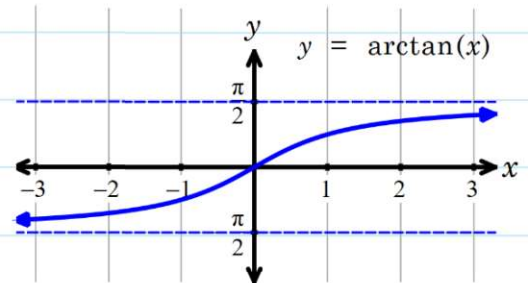
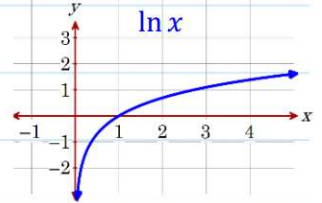


- ☐ $-\frac{\pi}{2}$
☐ $\frac{\pi}{2}$
☐ 0
☐ Does not exist

21. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} e^{-\tan x}$



22. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$



8	Link and interpret the slope of a secant line and tangent line	Example 3	136
	ربط وتفسير ميل الخط القاطع والخط المماس		138

Graphically and numerically approximate the slope of the tangent line to

$$y = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{at } x = 0.$$

First point is:

Second Point	m_{sec}	Second Point	m_{sec}
(1,)	_____ =	(-0.5,)	_____ =
(0.1,)	_____ =	(-0.1,)	_____ =
(0.01,)	_____ =	(-0.01,)	_____ =

Graphically and numerically approximate the slope of the tangent line to

$$y = e^x \quad \text{at } x = 1.$$

First point is:

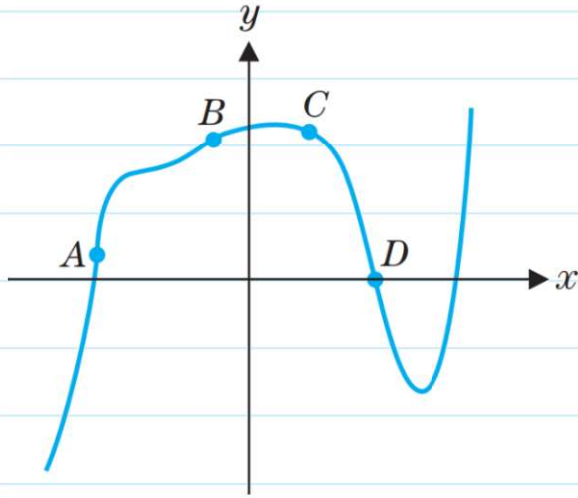
Second Point	m_{sec}	Second Point	m_{sec}
	_____ =		_____ =
	_____ =		_____ =
	_____ =		_____ =



List the points A , B , C and D in order of increasing slope of the tangent line.

(Not in EOT1)

نظّم لائحة للنقاط A ، و B ، و C ، و D تمثل اشارات قيم الميل اشارات قيم للمماسات.



9	Find the derivative of a function at a given point إيجاد المشتقة للدالة عند نقطة معينة	Example 3	145 147
---	---	-----------	------------

Find derivative of $f(x) = \frac{3}{x}$ at an unspecified value of x using

أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{3}{x}$ عند القيمة غير المحددة لـ x باستخدام

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Find derivative of $f(x) = \frac{2}{x-3}$ at an unspecified value of x using

أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{2}{x-3}$ عند القيمة غير المحددة لـ x باستخدام

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



10

Understand the relationship between continuity and differentiability

فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق

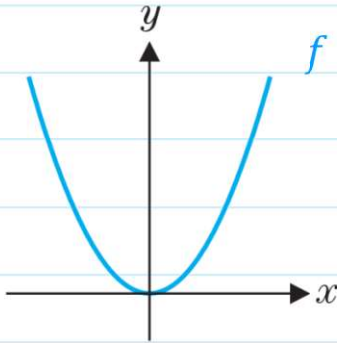
(13-18)

151

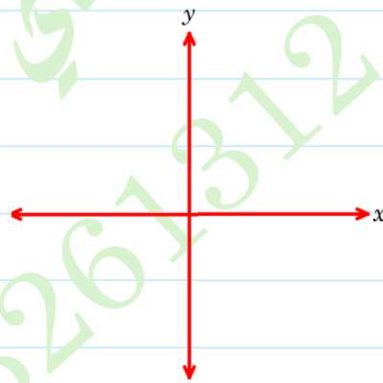
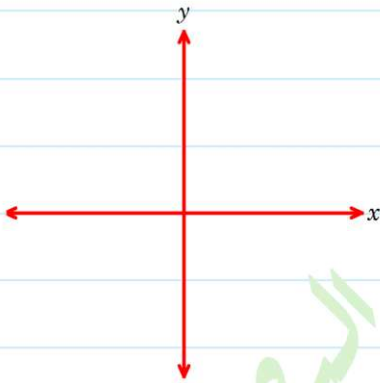
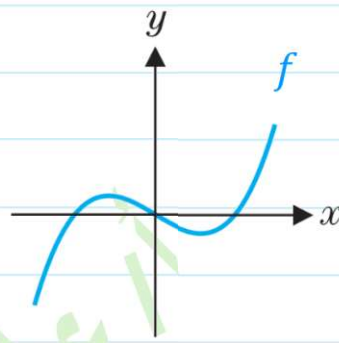
153

Use the graph of f to sketch a graph of f' .استخدم الرسم البياني للدالة f لرسم التمثيل البياني للمشتقة f'

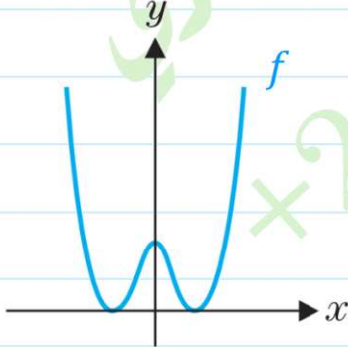
13. (a)



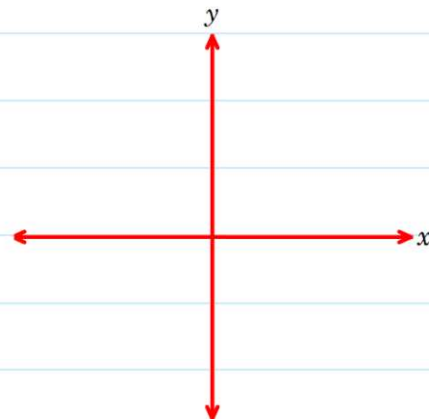
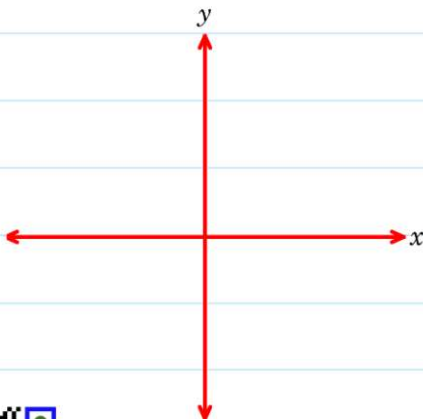
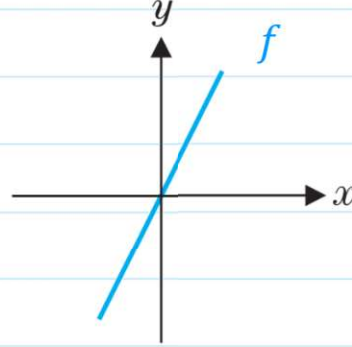
(b)



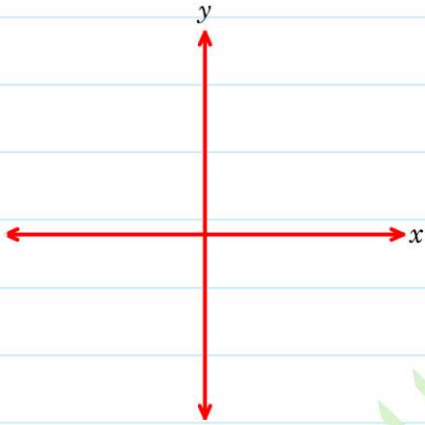
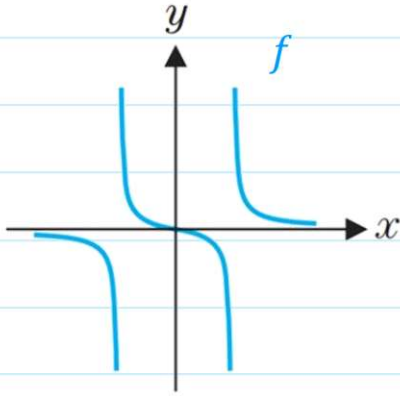
14. (a)



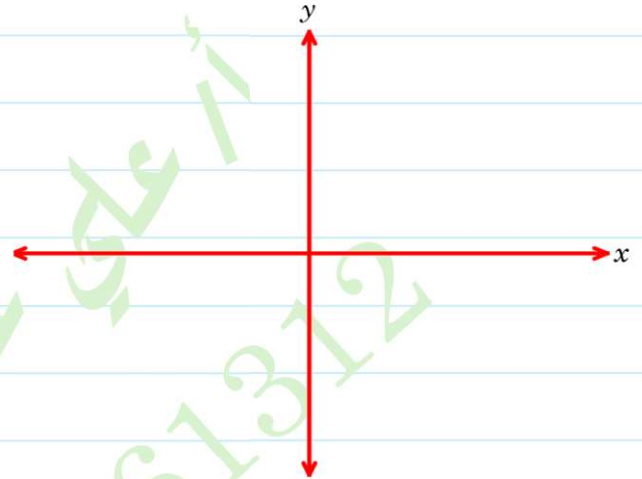
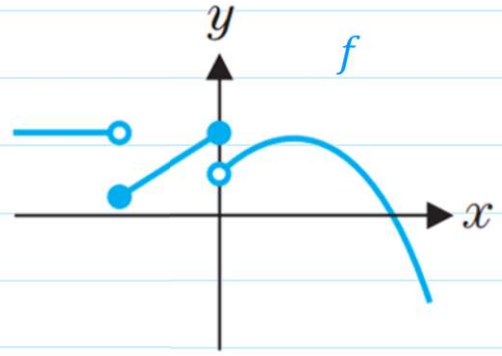
(b)



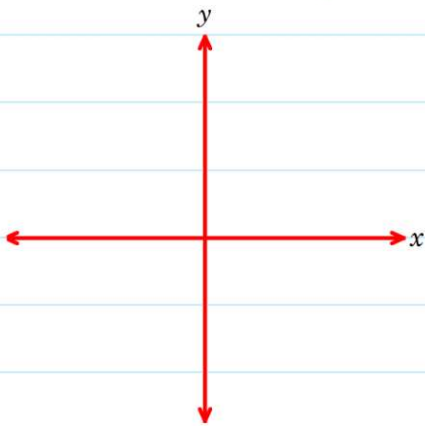
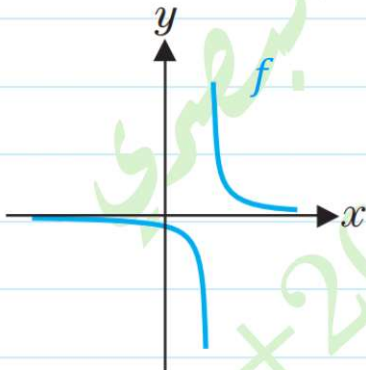
15. (a)



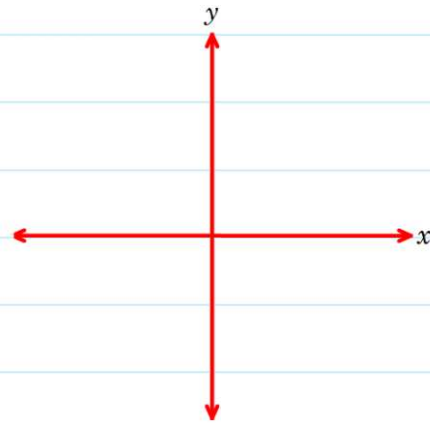
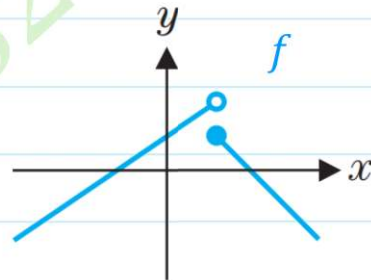
(b)



16. (a)



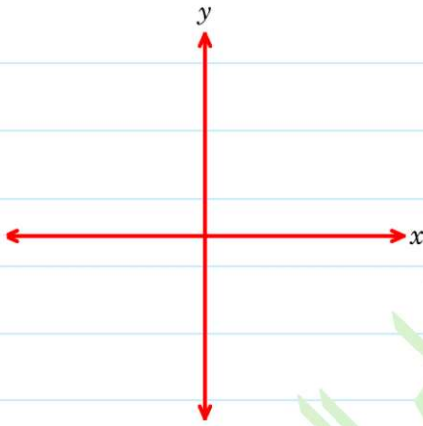
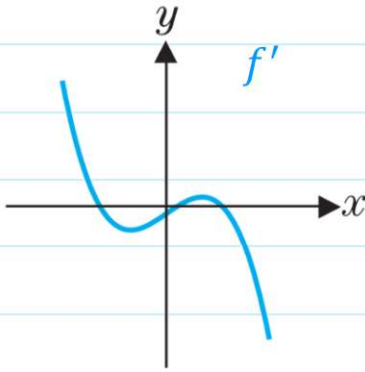
(b)



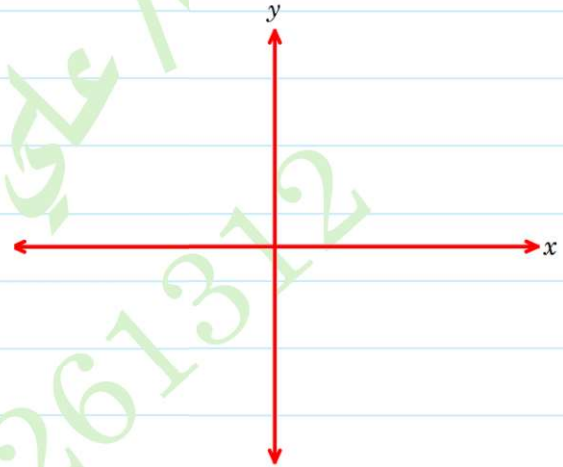
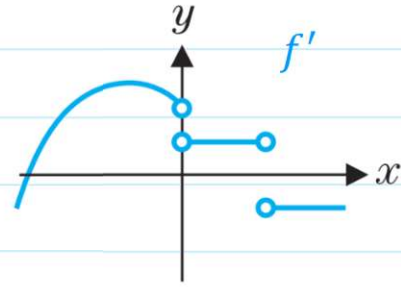
Use the given graph of f' to sketch a plausible graph of a continuous function f .

استخدم الرسم البياني المعطى للمشتقة f' لرسم شكل بياني معقول للدالة المتصلة f

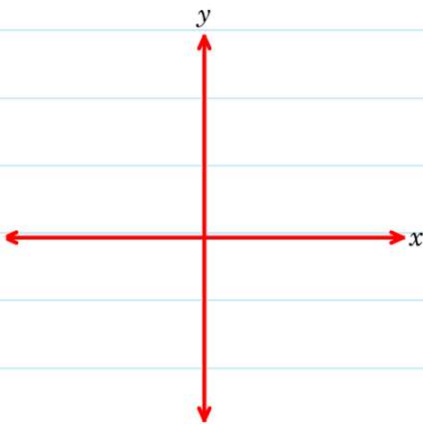
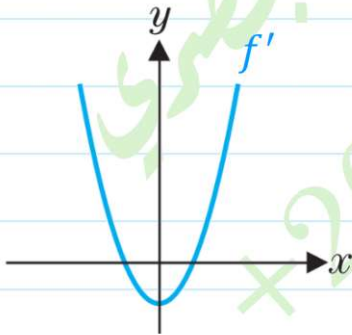
17. (a)



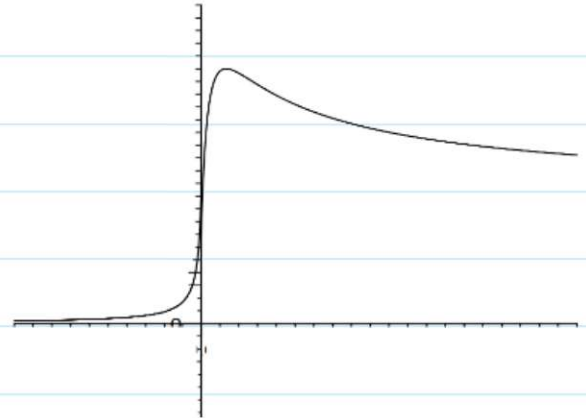
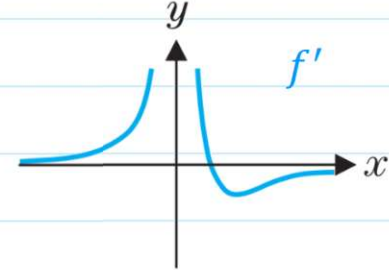
(b)



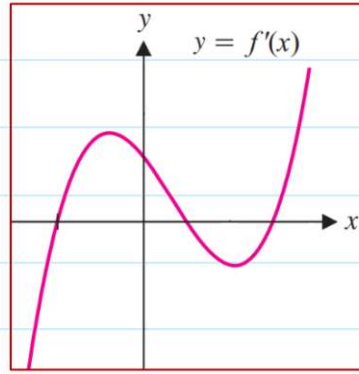
18. (a)



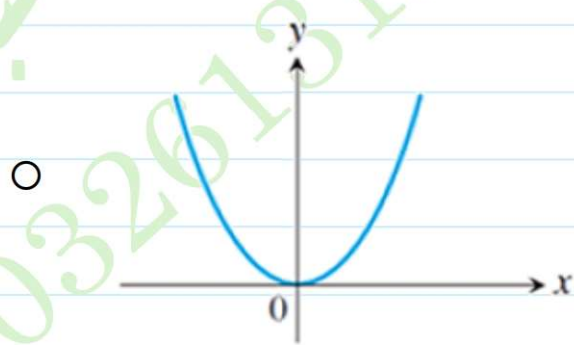
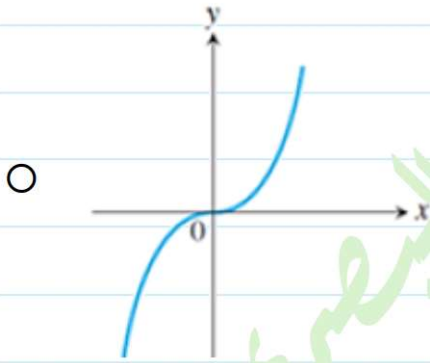
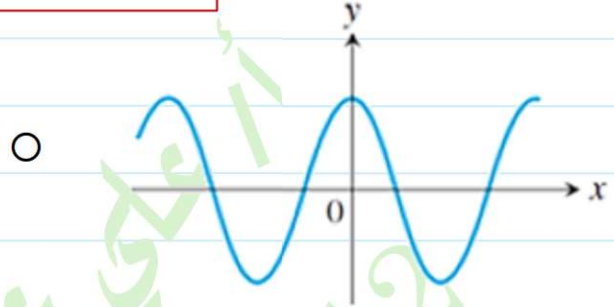
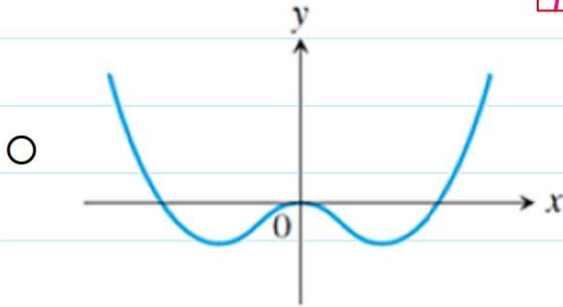
(b)



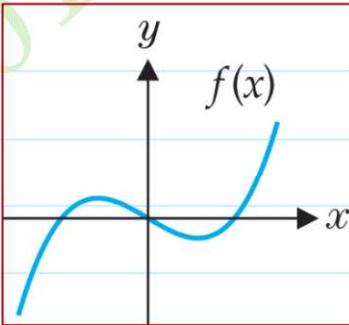
Use the graph of $y = f'(x)$ to sketch a graph of $y = f(x)$



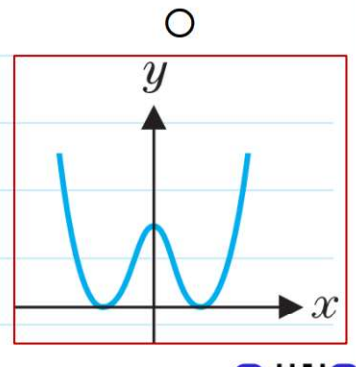
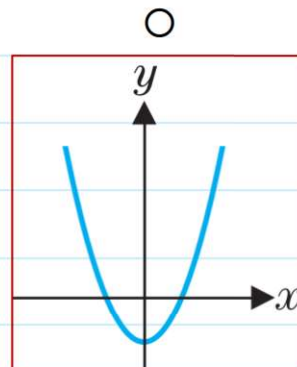
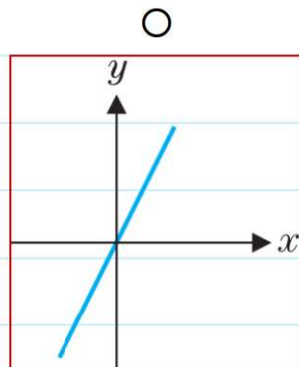
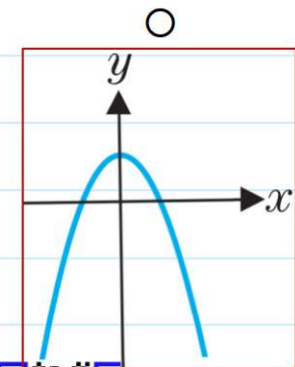
استخدم التمثيل البياني لـ $y = f'(x)$ لرسم التمثيل البياني لـ $y = f(x)$



Use the graph of $y = f(x)$ to sketch a graph of $y = f'(x)$

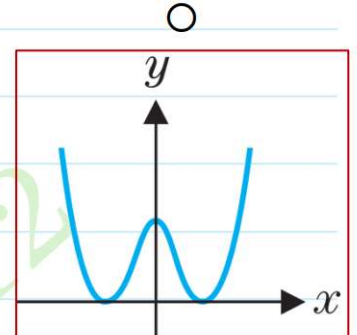
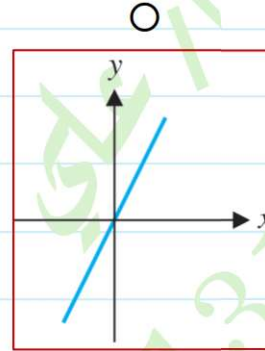
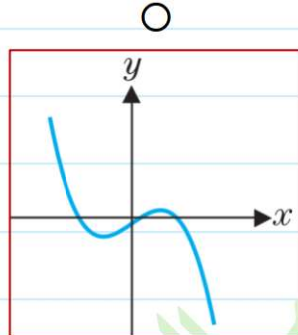
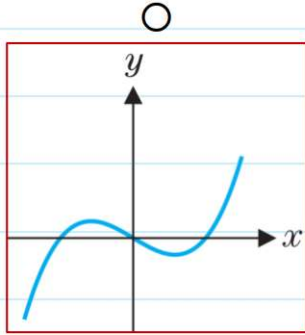
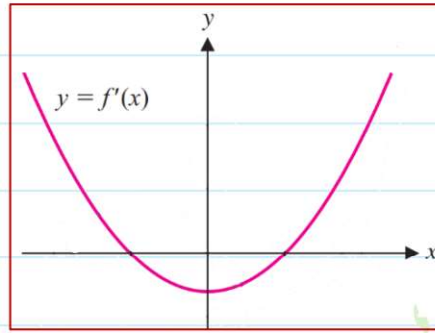


استخدم التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ لرسم التمثيل البياني لـ $y = f'(x)$



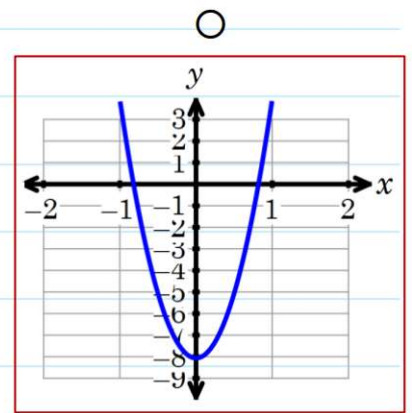
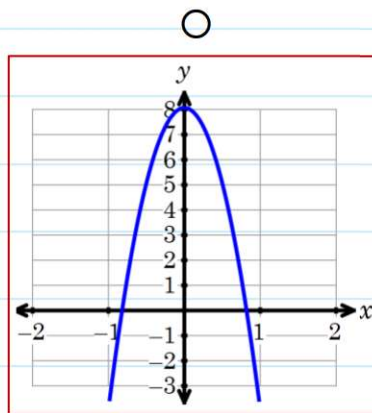
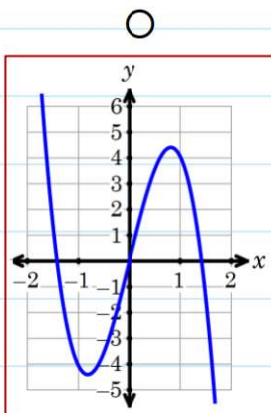
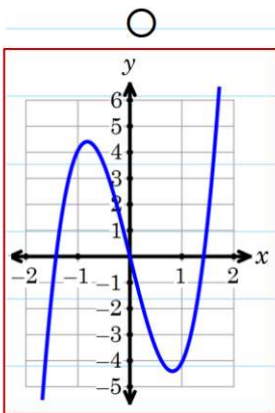
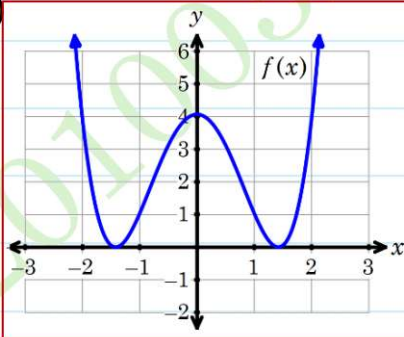
Use the graph of $y = f'(x)$ to sketch a graph of $y = f(x)$

استخدم التمثيل البياني لـ $y = f'(x)$ لرسم التمثيل البياني لـ $y = f(x)$



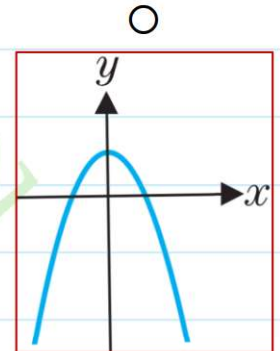
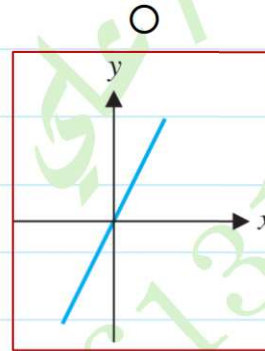
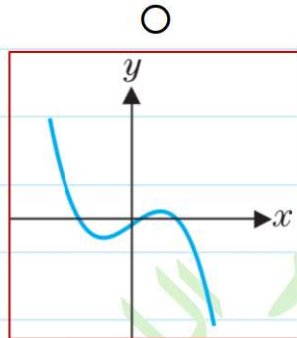
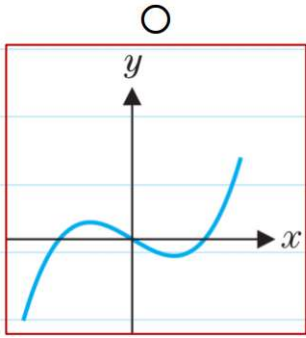
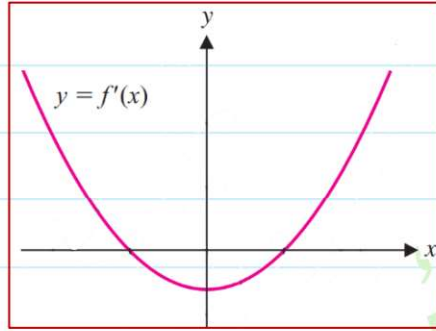
Use the graph of $y = f(x)$ to sketch a graph of $y = f'(x)$

استخدم التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ لرسم التمثيل البياني لـ $y = f'(x)$



Use the given graph of $f'(x)$ to determine a plausible graph of continuous function $f(x)$

استخدم التمثيل البياني الموضح أدناه لـ $f'(x)$ لرسم تمثيل بياني معقول لدالة متصلة $f(x)$



11	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.	(21-24)	161
	استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية		163

In exercises 21–24, use the given position function to find the velocity and acceleration functions.

استخدم الدالة المكانية لإيجاد كل من دالة السرعة ودالة التسارع (العجلة)

21. $s(t) = -16t^2 + 40t + 10$

22. $s(t) = -4.9t^2 + 12t - 3$

23. $s(t) = \sqrt{t} + 2t^2$

24. $s(t) = 10 - \frac{10}{t}$



12	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems.	(37-42)	161
	استخدام قواعد التفاضل والمشتقات العليا في حل المشكلات الحياتية		163

37. Determine the value(s) of x for which the tangent line to $y = x^3 - 3x + 1$ is at an angle of 45° with the x -axis. assuming that the angles are measured counterclockwise.

أوجد جميع قيم x والتي يشكل عندها المماس للمنحنى الدالة $y = x^3 - 3x + 1$ زاوية قياسها 45° مع المحور x على فرض أن الزاوية مقاسه باتجاه معاكس لعقارب الساعة.

- ☐ $x = -\sqrt{2}, x = -1$
☐ $x = 1, x = \sqrt{2}$
☐ $x = -1, x = 1$
☐ $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

38. Find all values of x for which the tangent lines to $y = x^3 + 2x + 1$ and $y = x^4 + x^3 + 3$ are **parallel**

أوجد جميع قيم x التي عندها يكون المماسان على $y = x^3 + 2x + 1$ و $y = x^4 + x^3 + 3$ متوازيان.



38. Find all values of x for which the tangent lines to $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$ and

$y = -\frac{1}{4}x^4 - x + 3$ are **perpendicular**

أوجد جميع قيم x التي عندها يكون المماسان على $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$ و $y = -\frac{1}{4}x^4 - x + 3$

متعامدان.

39. Find a second-degree polynomial
(of the form $ax^2 + bx + c$) such that

أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثانية
(بالصيغة $ax^2 + bx + c$) بحيث يكون

(a) $f(0) = -2$, $f'(0) = 2$ and $f''(0) = 3$.

(b) $f(0) = 0$, $f'(0) = 5$ and $f''(0) = 1$



40. b) Find a general formula for the n^{th} derivative $f^{(n)}(x)$ for

أوجد صيغة عامة لإيجاد المشتقة من الرتبة $f^{(n)}(x)$ للدالة

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

- ☐ $(n+1)! x^{-(n+2)}$
- ☐ $(-1)^n (n+1)! x^{n-2}$
- ☐ $(-1)^n (n+1)! x^{-n+2}$
- ☐ $(-1)^n (n+1)! x^{-(n+2)}$

40. a) Find a general formula for the n^{th} derivative $f^{(n)}(x)$ for

أوجد صيغة عامة لإيجاد المشتقة من الرتبة $f^{(n)}(x)$ للدالة

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Solution:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) x^{-(2n-1)/2}, \text{ where } 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \dots n \text{ times} = 2^n$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \times \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n}\right) x^{-(2n-1)/2} \quad \text{multiply by } (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \dots)$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2n-2)}{2^n \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)}\right) x^{-(2n-1)/2}$$

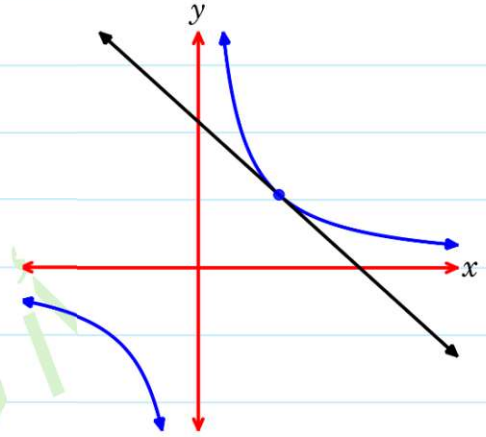
The pattern is:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!} x^{-\frac{2n-1}{2}}$$



41. Find the area of the triangle bounded by $x = 0$, $y = 0$ and the tangent line to $y = \frac{1}{x}$ at $x = 1$

أوجد مساحة المثلث الذي يحدده $y = 0$ و $x = 0$ والمماس على $y = \frac{1}{x}$ عند $x = 1$



Repeat at $x = 2$

Show that you get the same area using the tangent line to $y = \frac{1}{x}$ at any $x = a > 0$.

وضح أنك تحصل على المساحة نفسها باستخدام المماس على $y = \frac{1}{x}$ عند أي قيمة $x = a > 0$

In general, at $x = a > 0$ the equation of the tangent line is $y = -\left(\frac{1}{a^2}\right)x + \frac{2}{a}$. The tangent line intersects the axes at $\left(0, \frac{2}{a}\right)$ and $(2a, 0)$.

Thus, the area of the triangle is $\frac{1}{2}(2a)\left(\frac{2}{a}\right) = 2$.

42. Show that the result of exercise 41 does not hold for $y = \frac{1}{x^2}$. That is, the area of the triangle bounded by $x = 0$, $y = 0$ and the tangent line to $y = \frac{1}{x^2}$ at $x = a > 0$ does depend on the value of a .

وضح أن نتيجة التمرين 41 لا تنطبق على $y = \frac{1}{x^2}$. أي أن مساحة المثلث المحدود بـ $x = 0$ و $y = 0$ والمماس على $y = \frac{1}{x^2}$ عند $x = a$ تعتمد على قيمة a .

For $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, we have $f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$. Thus, the slope of the tangent line at $x = a$ is $-\frac{2}{a^3}$. When $a = 1$, the slope of the tangent line at $(1, 1)$ is -2 , and the equation of the tangent line is $y = -2x + 3$. The tangent line intersects the axes at $(0, 3)$ and $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Thus the area of the triangle is $\frac{1}{2}(3)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

When $a = 2$, the slope of the tangent line at $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ is $-\frac{1}{4}$, and the equation of the tangent line is $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. The tangent line intersects the axes at $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ and $(3, 0)$. Thus the area of the triangle is $\frac{1}{2}(3)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8}$. Since $\frac{9}{4} \neq \frac{9}{8}$, we see that the result for exercise 41 does not hold here.



13	Apply the chain rule for differentiation	(31-38)	177
	تطبيق قاعدة السلسلة في الاشتقاق		179

31. if $h(x) = f(g(x))$. Find $h'(1)$ where

$$f(1) = 3, g(1) = 2, f'(1) = 4, f'(2) = 3, g'(1) = -1 \text{ and } g'(3) = 5$$

إذا كان: $h(x) = f(g(x))$ أوجد $h'(1)$ حيث

$$g'(3) = 5 \text{ و } g'(1) = -1 \text{ و } f'(2) = 3 \text{ و } f'(1) = 4 \text{ و } g(1) = 2 \text{ و } f(1) = 3$$

32. If $h(x) = f(g(x))$. Find $h'(2)$

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	1	3	-1	4
3	4	-2	-3	2

33. A function f is an **even function** if $f(-x) = f(x)$ for all x and is an **odd function** if $f(-x) = -f(x)$ for all x . Prove that the derivative of an even function is odd and the derivative of an odd function is even.
- الدالة f تكون دالة زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$ لكل x وتكون دالة فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$ لكل x . إثبت أن مشتقة دالة الزوجية هي دالة فردية، وأن مشتقة دالة الفردية هي دالة زوجية.

As a temporary device given any f , set $g(x) = f(-x)$. Then by the chain rule,

$$g'(x) = f'(-x)(-1) = -f'(x).$$

In the even case $g(x) = f(x)$ this reads $f'(-x) = -f'(x)$ and shows $f'(x)$ is odd.

In the odd case $g(x) = -f(x)$ and therefore $g'(x) = -f'(x)$, this reads $-f'(x) = -f'(-x)$, or $f'(x) = f'(-x)$ and shows $f'(x)$ is even.



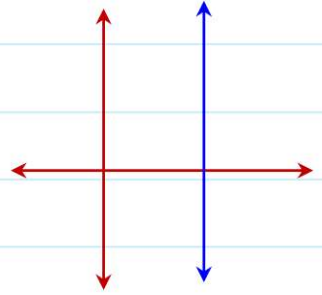
34. If the graph of a differentiable function f is symmetric about the line $x = a$, what can you say about the symmetry of the graph of f' ? إذا كان التمثيل البياني للدالة القابلة للإشتقاق f متماثلاً حول المستقيم $x = a$ ، فماذا يمكنك القول عن تماثل التمثيل البياني لـ f' ؟

To say that $f(x)$ is symmetric about the line $x = a$ is the same as saying that $f(a+x) = f(a-x)$.

Taking derivatives (using the chain rule), we have

$$\frac{d}{dx} f(a+x) = f'(a+x)$$

$$\frac{d}{dx} f(a-x) = f'(a-x)(-1) = -f'(a-x).$$



Thus, $f'(a+x) = -f'(a-x)$ and the graph of $f'(x)$ is symmetric through the point $(a, 0)$.



Find the derivative where f is an unspecified differentiable function.

أوجد المشتقة للدالة f حيث الدالة f دالة غير محددة قابلة للاشتقاق

35. (a) $f(x^2)$ (b) $[f(x)]^2$ (c) $f(f(x))$

- | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|
| ☐ $2f(x^2)$ | ☐ $2f(x)$ | ☐ $f'(f(x))$ |
| ☐ $2xf(x^2)$ | ☐ $2f'(x)f(x)$ | ☐ $f'(f(x))f(x)$ |
| ☐ $2xf'(x^2)$ | ☐ $2f'(x)$ | ☐ $f'(f(x))f'(x)$ |
| ☐ $2f'(x^2)$ | ☐ $f'(x)f'(x)$ | ☐ $f'(f'(x))$ |

36. (a) $f(\sqrt{x})$ (b) $\sqrt{f(x)}$ (c) $f(xf(x))$

- | | | |
|--|---|---|
| ☐ $2f(\sqrt{x})$ | ☐ $\frac{2f'(\sqrt{x})}{\sqrt{f(x)}}$ | ☐ $(1+f'(x)) \cdot f(xf(x))$ |
| ☐ $2\sqrt{x}f(\sqrt{x})$ | ☐ $\frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{f(x)}}$ | ☐ $(f(x) + xf'(x)) \cdot f'(xf(x))$ |
| ☐ $\frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ | ☐ $\frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ | ☐ $(f(x) + f'(x)) \cdot f'(xf(x))$ |
| ☐ $\frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ | ☐ $\frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ | ☐ $f'(x) \cdot f'(xf(x))$ |



Find the derivative where f is an unspecified differentiable function.

أوجد المشتقة للدالة f حيث الدالة f دالة غير معددة قابلة للاشتقاق

37. (a) $f(1/x)$ (b) $1/f(x)$ (c) $f\left(\frac{x}{f(x)}\right)$

☐ $f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

☐ $f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)$

☐ $f'\left(\frac{1}{x}\right)$

☐ $-f'\left(\frac{1}{x}\right)$

(A) $h'(x) = f'\left(\frac{x}{f(x)}\right) \left(\frac{f(x) + xf'(x)}{[f(x)]^2}\right)$

(B) $h'(x) = f'\left(\frac{x}{f(x)}\right) \left(\frac{f(x) - xf'(x)}{[f(x)]^2}\right)$

(C) $h'(x) = f'\left(\frac{x}{f(x)}\right) \left(\frac{f(x) - f'(x)}{[f(x)]^2}\right)$

(D) $h'(x) = f'\left(\frac{x}{f(x)}\right) \left(\frac{f(x) - xf'(x)}{f(x)}\right)$

38. (a) $1 + f(x^2)$

(b) $[1 + f(x)]^2$

(c) $f(1 + f(x))$



14	Find the derivative of an inverse function using the Chain Rule.	(17-22)	176
	إيجاد مشتقة معكوس دالة باستخدام قاعدة السلسلة		178

Remember that:

THEOREM 5.2

If f is differentiable everywhere on its domain and has an inverse function $g = f^{-1}$, then

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))},$$

for all x in the domain of g , provided $f'(g(x)) \neq 0$.

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في أي مكان ولها دالة عكسية $g = f^{-1}$. فإن

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

لكل x في مجال g . بشرط أن يكون $f'(g(x)) \neq 0$.

17. If the function $f(x) = x^3 + 4x - 1$ has an inverse function $g(x)$ find $g'(x)$
إذا كانت الدالة $f(x) = x^3 + 4x - 1$ لها دالة عكسية $g(x)$ أوجد: $g'(x)$

A) $g'(x) = \frac{1}{3[g(x)]^2 + 4}$

B) $g'(x) = \frac{1}{3[g(x)]^2 + 4[g(x)]}$

C) $g'(x) = \frac{1}{3[g(x)]^2}$

If the function $f(x) = x^3 + 4x - 1$ has an inverse function $g(x)$ find $g'(-1)$
إذا كانت الدالة $f(x) = x^3 + 4x - 1$ لها دالة عكسية $g(x)$ أوجد: $g'(-1)$



A) $\frac{1}{7}$

B) 4

C) 7

D) $\frac{1}{4}$



18. If the function $f(x) = x^5 + 4x - 2$ has an inverse function $g(x)$ find $g'(-2)$
 إذا كانت الدالة $f(x) = x^5 + 4x - 2$ لها دالة عكسية $g(x)$ أوجد: $g'(-2)$

A) $\frac{1}{7}$

B) 4

C) 7

D) $\frac{1}{4}$

19. If the function $f(x) = x^5 + 3x^3 + x$ has an inverse function $g(x)$ find $g'(5)$
 إذا كانت الدالة $f(x) = x^5 + 3x^3 + x$ لها دالة عكسية $g(x)$ أوجد: $g'(5)$

A) $\frac{1}{12}$

B) 12

C) $\frac{1}{15}$

D) $-\frac{1}{15}$

20. If the function $f(x) = x^3 + 2x + 1$ has an inverse function $g(x)$ find $g'(-2)$
 إذا كانت الدالة $f(x) = x^3 + 2x + 1$ لها دالة عكسية $g(x)$ أوجد: $g'(-2)$

A) $\frac{1}{5}$

B) -5

C) $-\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{3}$



21. If the function $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$ has an inverse function $g(x)$ find $g'(2)$
 إذا كانت الدالة $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}$ لها دالة عكسية $g(x)$ أوجد: $g'(2)$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

22. If the function $f(x) = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}$ has an inverse function $g(x)$
 find $g'(3)$

إذا كانت الدالة $f(x) = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}$ لها دالة عكسية $g(x)$ أوجد: $g'(3)$

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{10}{3}$ C) $-\frac{3}{10}$ D) $\frac{3}{10}$ 

15	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل	(9-18)	184 186
----	--	--------	------------

Find the derivative of each function.

أوجد مشتقة كل دالة

9. $f(t) = \sin 3t \sec 3t$

10. $f(t) = \sqrt{\cos 5t \sec 5t}$

- ☐ $f'(t) = \sec^2 3t$
☐ $f'(t) = 3 \sec^2 3t$
☐ $f'(t) = \cos 3t \sec 3t \tan 3t$
☐ $f'(t) = \sec^2 3t \tan 3t$

11. $f(w) = \frac{1}{\sin 4w}$

12. $f(w) = w^2 \sec^2 3w$

13. $f(x) = 2 \sin 2x \cos 2x$

14. $f(x) = 4 \sin^2 3x + 4 \cos^2 3x$

15. $f(x) = \tan \sqrt{x^2 + 1}$



Find the derivative of each function.

أوجد مشتقة كل دالة

16. $f(x) = 4x^2 \sin x \sec 3x$

17. $f(x) = \sin^3 \left(\cos \sqrt{x^3 + 2x^2} \right)$

18. $f(x) = \tan^4(\sin^2(x^3 + 2x))$



16	Find the derivatives of natural logarithmic functions إيجاد مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية	(39-44)	194 196
----	--	---------	------------

Use logarithmic differentiation to find the derivative.

$$\frac{d}{dx} \left((f(x))^{g(x)} \right) = (f(x))^{g(x)} \left(\frac{f'(x) g(x)}{f(x)} + g'(x) \ln f(x) \right)$$

استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة

39. Use logarithmic differentiation to find the derivative of $f(x) = x^{\sin x}$,

استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة $f(x) = x^{\sin x}$

- ☐ $f'(x) = x^{\sin x} (\sin x - x \cos x)$
- ☐ $f'(x) = x^{\sin x} (\sin x + \cos x)$
- ☐ $f'(x) = x^{\sin x} (\sin x + x \cos x)$
- ☐ $f'(x) = x^{\sin x} (\cos x + x \sin x)$

40. Use logarithmic differentiation to find the derivative of $f(x) = x^{4-x^2}$, $x > 0$

استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة $x > 0$ و $f(x) = x^{4-x^2}$

- ☐ $f'(x) = x^{\sin x} (\sin x - x \cos x)$
- ☐ $f'(x) = x^{\sin x} (\sin x + \cos x)$
- ☐ $f'(x) = x^{\sin x} (\sin x + x \cos x)$
- ☐ $f'(x) = x^{\sin x} (\cos x + x \sin x)$

41. Use logarithmic differentiation to find the derivative of $f(x) = (\sin x)^x$

استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة $f(x) = (\sin x)^x$



42. Use logarithmic differentiation to find the derivative of $f(x) = (x^2)^{4x}$, $x > 0$

استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة $f(x) = (x^2)^{4x}$ و $x > 0$

43. Use logarithmic differentiation to find the derivative of $f(x) = x^{\ln x}$, $x > 0$

استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة $f(x) = x^{\ln x}$ و $x > 0$

44. Use logarithmic differentiation to find the derivative of $f(x) = x^{\sqrt{x}}$, $x > 0$

استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد مشتقة $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ و $x > 0$



17	Find the derivatives of exponential functions	(1-14)	193
			195

Differentiate each function.

اشتق كل دالة

1. $f(x) = x^3 e^x$

2. $f(x) = e^{2x} \cos 4x$

A) $(x^2 + 3)e^x$

B) $(x^3 + 3x^2)e^x$

C) $e^{2x}(\cos 4x - 4 \sin 4x)$

D) $e^{2x}(2 \cos 4x - 4 \sin 4x)$

A) $(x^2 + 3)e^x$

B) $(x^3 + 3x^2)e^x$

C) $e^{2x}(\cos 4x - 4 \sin 4x)$

D) $e^{2x}(2 \cos 4x - 4 \sin 4x)$

3. $f(t) = t + 2^t$

4. $f(t) = t 4^{3t}$

A) $1 + 2^t \ln 2$

B) $2 + 2^t \ln t$

C) $4^{3t}(1 + t \ln 4)$

D) $4^{3t}(1 + 3t \ln 4)$

A) $1 + 2^t \ln 2$

B) $2 + 2^t \ln t$

C) $4^{3t}(1 + t \ln 4)$

D) $4^{3t}(1 + 3t \ln 4)$

5. $f(x) = 2e^{4x+1}$

6. $f(x) = (1/e)^x$



Differentiate each function.

اشتق كل دالة

7. $h(x) = (1/3)^{x^2}$

8. $h(x) = 4^{-x^2}$

A) $2x \cdot 4^{-x^2} \cdot \ln 4$

B) $-2x \cdot 4^{-x^2} \cdot \ln 4$

C) $-2x \cdot 3^{-x^2} \cdot \ln 3$

D) $2x \cdot 3^{-x^2} \cdot \ln 3$

A) $2x \cdot 4^{-x^2} \cdot \ln 4$

B) $-2x \cdot 4^{-x^2} \cdot \ln 4$

C) $-2x \cdot 3^{-x^2} \cdot \ln 3$

D) $2x \cdot 3^{-x^2} \cdot \ln 3$

9. $f(u) = e^{u^2+4u}$

10. $f(u) = 3e^{\tan u}$

A) $(u + 4)e^{u^2+4u}$

B) $(2u - 4)e^{u^2+4u}$

C) $(2u + 4)e^{u^2+4u}$

D) $(u^2 + 4)e^{u^2+4u}$

A) $3 e^{\tan u} \sec^2 u$

B) $3 e^{\sec^2 u}$

C) $3 e^{\tan u} \csc^2 u$

D) $3 e^{\tan u} \ln(\tan u)$

11. $f(w) = \frac{e^{4w}}{w}$

12. $f(w) = \frac{w}{e^{6w}}$

A) $\frac{(4w + 1)e^{4w}}{w^2}$

C) $\frac{(1 - 6w)}{e^{6w}}$

B) $\frac{(4w - 1)e^{4w}}{w^2}$

D) $\frac{(1 + 6w)}{e^{6w}}$

A) $\frac{(4w + 1)e^{4w}}{w^2}$

C) $\frac{(1 - 6w)}{e^{6w}}$

B) $\frac{(4w - 1)e^{4w}}{w^2}$

D) $\frac{(1 + 6w)}{e^{6w}}$

13. $f(x) = \ln 2x$

14. $f(x) = \ln \sqrt{8x}$

A) $\frac{1}{x}$
B) $\frac{2}{x}$

C) $\frac{1}{2x}$
D) $\frac{1}{4x}$

A) $\frac{1}{x}$
B) $\frac{2}{x}$

C) $\frac{1}{2x}$
D) $\frac{1}{4x}$



18	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions	(29-32)	204
		استخدام الاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	206

Recall

$$\begin{array}{ll}
 1 \quad \frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{for } -1 < x < 1 \\
 2 \quad \frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{for } -1 < x < 1 \\
 3 \quad \frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} & \\
 4 \quad \frac{d}{dx} \cot^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2} & \\
 5 \quad \frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, & \text{for } |x| > 1 \\
 6 \quad \frac{d}{dx} \csc^{-1} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, & \text{for } |x| > 1
 \end{array}$$

Find the derivative of the given function.

أوجد المُشتقة

29. (a) $f(x) = \sin^{-1}(x^3 + 1)$

(b) $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$

- (A) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$
- (B) $\frac{\sin^{-2}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$
- (C) $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$
- (D) $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

30. (a) $f(x) = \cos^{-1}(x^2 + x)$

(b) $f(x) = \cos^{-1}(2/x)$

31. (a) $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$

(b) $f(x) = \tan^{-1}(1/x)$



A) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x^2)}$ B) $f'(x) = \frac{1}{2x(1+x^2)}$

C) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ D) $f'(x) = \frac{1}{(1+x)}$

A) $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ B) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

C) $f'(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$ D) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



Find the derivative of the given function.

أوجد المُشتقة

32. (a) $f(x) = \sqrt{2 + \tan^{-1} x}$

(b) $f(x) = e^{\tan^{-1} x}$

A) $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{2+\tan^{-1} x}}$

B) $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{2+\tan^{-1} x}}$

C) $f'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{2+\tan^{-1} x}}$

D) $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)}$

A) $f'(x) = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}$

B) $f'(x) = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1-x^2}$

C) $f'(x) = -\frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}$

D) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$



19	Learn Rolle's Theorem and use it in applications فهم نظرية رول واستخدامها في التطبيقات	Example1	214 216
----	---	----------	------------

Find a value of c satisfying the conclusion of Rolle's Theorem for $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ on the interval $[0, 1]$.

أوجد قيمة التي تحقق نظرية رول للدالة:
 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$
في الفترة $[0, 1]$

☐ $c = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

☐ $c = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

☐ $c = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

☐ $c = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Find a value of c satisfying the conclusion of Rolle's Theorem for $f(x) = x^2 + 1$ on the interval $[-2, 2]$.

أوجد قيمة التي تحقق نظرية رول للدالة:
 $f(x) = x^2 + 1$
في الفترة $[-2, 2]$

☐ $c = -1$

☐ $c = 0$

☐ $c = 1$

☐ $c = 2$

Find a value of c satisfying the conclusion of Rolle's Theorem for $f(x) = \sin x$ on the interval $[-\pi, 0]$.

أوجد قيمة التي تحقق نظرية رول للدالة:
 $f(x) = \sin x$
في الفترة $[-\pi, 0]$

☐ $c = -\frac{\pi}{2}$

☐ $c = -\pi$

☐ $c = -\frac{\pi}{3}$

☐ $c = -\frac{\pi}{4}$



20	Learn the Mean Value Theorem and use it in applications تعلم نظرية القيمة المتوسطة واستخدمها في التطبيقات	Example5	219 221
----	--	----------	------------

EXAMPLE 10.5 Proving an Inequality for $\sin x$

Prove that $|\sin a| \leq |a|$ for all a .

Solution First, note that $f(x) = \sin x$ is continuous and differentiable on any interval and that for any a ,

$$|\sin a| = |\sin a - \sin 0|,$$

since $\sin 0 = 0$. From the Mean Value Theorem, we have that (for $a \neq 0$)

$$\frac{\sin a - \sin 0}{a - 0} = f'(c) = \cos c, \quad (10.6)$$

for some number c between a and 0 . Notice that if we multiply both sides of (10.6) by a and take absolute values, we get

$$|\sin a| = |\sin a - \sin 0| = |\cos c| |a - 0| = |\cos c| |a|. \quad (10.7)$$

But, $|\cos c| \leq 1$, for all real numbers c and so, from (10.6), we have

$$|\sin a| = |\cos c| |a| \leq (1) |a| = |a|,$$

as desired.

مثال 10.5 إثبات متباينة $\sin x$

أثبت أن $|\sin a| \leq |a|$ for all a

الحل أولاً، لاحظ أن $f(x) = \sin x$ متصلة وقابلة للاشتقاق على أي فترة ولكل a .

$$|\sin a| = |\sin a - \sin 0|$$

بما أن: $\sin 0 = 0$. باستخدام نظرية القيمة المتوسطة، نجد أنه (إذا كان $a \neq 0$)

$$(10.6) \quad \frac{\sin a - \sin 0}{a - 0} = f'(c) = \cos c$$

للعدد c بين a و 0 . لاحظ أنه، إذا قمنا بضرب الطرفين من (10.6) في a وأخذنا القيم المطلقة، فسوف

نحصل على

$$(10.7) \quad |\sin a| = |\sin a - \sin 0| = |\cos c| |a - 0| = |\cos c| |a|$$

ولكن، $|\cos c| \leq 1$ لكل الأعداد الحقيقية c ؛ إذًا باستخدام (10.6)، نجد أن

$$|\sin a| = |\cos c| |a| \leq (1) |a| = |a|$$

وهو المطلوب.



Find a value of c satisfying the conclusion of Mean value Theorem for

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

on the interval $[0, 2]$.

أوجد قيمة التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة للدالة:

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

في الفترة $[0, 2]$

☐ $c = \frac{1 - \sqrt{7}}{3}$

☐ $c = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$

☐ $c = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$

☐ $c = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

Find a value of c satisfying the conclusion of the Mean Value Theorem for

$$f(x) = x^3 + x^2$$

on the interval $[0, 1]$.

أوجد قيمة التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة للدالة:

$$f(x) = x^3 + x^2$$

في الفترة $[0, 1]$

☐ $c = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}$

☐ $c = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$

☐ $c = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$

☐ $c = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$



الأسئلة الكتابية FRQ

21	a) Determine the continuity of a function at a given point. البحث في اتصال دالة عند نقطة معطاة	(39-41)	96 98
	b) Find limits at infinity and limits that are infinite. إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية	(33-37)	106 108

a) Determine the continuity of a function at a given point. البحث في اتصال دالة عند نقطة معطاة	(39-41)	96 98
---	---------	----------

39. Determine values of a and b that make the given function continuous.

حدد قيم a و b التي تجعل الدالة المعطاة متصلة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin x}{x} & \text{if } x < 0 \\ a & \text{if } x = 0 \\ b \cos x & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

40. Determine values of a and b that make the given function continuous.

حدد قيم a و b التي تجعل الدالة المعطاة متصلة

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + 1 & \text{if } x < 0 \\ \sin^{-1} \frac{x}{2} & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - x + b & \text{if } x > 2 \end{cases}$$



41. Determine values of a and b that make the given function continuous.

حدد قيم a و b التي تجعل الدالة المعطاة متصلة

$$f(x) = \begin{cases} a(\tan^{-1} x + 2) & \text{if } x < 0 \\ 2e^{bx} + 1 & \text{if } 0 \leq x \leq 3 \\ \ln(x - 2) + x^2 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$

Determine values of a and b that make the given function continuous.

حدد قيم a و b التي تجعل الدالة المعطاة متصلة

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & , x \leq -2 \\ ax + b & , -2 < x \leq 3 \\ -6 + \sqrt{x + 1} & , x > 3 \end{cases}$$



b) Find limits at infinity and limits that are infinite.

إيجاد النهايات التي تتوّل إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية

(33-37)

106

108

33. Suppose that the size of the pupil of a certain animal is given by $f(x)$ (mm), where x is the intensity of the light on the pupil. If $f(x) = \frac{80x^{-0.3x} + 60}{2x^{-0.3} + 5}$,

لنفترض أن حجم بؤبؤ عين حيوان ممدّد يُعطى بالعلاقة $f(x)$ (mm)، حيثما يكون x هو كثافة الضوء على بؤبؤ العين. إذا كان $f(x) = \frac{80x^{-0.3x} + 60}{2x^{-0.3} + 5}$

a) Find the size of the pupil with no light

(a) أوجد حجم بؤبؤ العين عندما لا يوجد ضوء

b) Find the size of the pupil with an infinite amount of light.

(b) أوجد حجمه مع وجود كمية لانهاية من الضوء

34. Suppose that the size of the pupil of a certain animal is given by $f(x)$ (mm), where x is the intensity of the light on the pupil. If $f(x) = \frac{80x^{-0.3x} + 60}{8x^{-0.3} + 15}$,

لنفترض أن حجم بؤبؤ عين حيوان ممدّد يُعطى بالعلاقة $f(x)$ (mm)، حيثما يكون x هو كثافة الضوء على بؤبؤ العين. إذا كان $f(x) = \frac{80x^{-0.3x} + 60}{8x^{-0.3} + 15}$

c) Find the size of the pupil with no light

(c) أوجد حجم بؤبؤ العين عندما لا يوجد ضوء

d) Find the size of the pupil with an infinite amount of light.

(d) أوجد حجمه مع وجود كمية لانهاية من الضوء



35. Modify the function in exercise 33 to find a function f such that $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 8$ and $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$.

قم بتعديل الدالة في التمرين 33 لإيجاد الدالة بحيث يكون $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 8$

$$f(x) = \frac{80x^{-0.3x} + 60}{2x^{-0.3} + 5}$$

36. Find a function of the form

$$f(x) = \frac{20x^{-0.4} + 16}{g(x)}$$

such that $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 5$ and $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$.

أوجد دالة في الشكل $f(x) = \frac{80x^{-0.3x} + 60}{2x^{-0.3} + 5}$

بحيث يكون $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$

36. Suppose that the velocity of a skydiver t seconds after jumping is given by

$$v(t) = -\sqrt{\frac{32}{k}} \frac{1 - e^{-2t\sqrt{32k}}}{1 + e^{-2t\sqrt{32k}}}$$

Find the limiting velocity with $k = 0.00064$ and $k = 0.00128$. By what factor does a skydiver have to change the value of k to cut the limiting velocity in half?

لنفترض أن سرعة لاعب القفز المر بعد t ثانية بعد القفز

تُعطى بالعلاقة $v(t) = -\sqrt{\frac{32}{k}} \frac{1 - e^{-2t\sqrt{32k}}}{1 + e^{-2t\sqrt{32k}}}$. أوجد

أقصى سرعة $k = 0.00064$ و $k = 0.00128$.

بأي عامل يتوجب على لاعب القفز المر تغيير قيمة k

لخفض أقصى سرعة إلى النصف؟



22	Apply the Product Rule on derivatives	(25-30)	169
			171

تطبيقات حياتية على قاعدة الضرب على المشتقات

25. Suppose that for some toy, the quantity sold $Q(t)$ at time t years decreases at a rate of 4%; explain why this translates to $Q'(t) = -0.04Q(t)$. Suppose also that the price increases at a rate of 3%; write out a similar equation for $P'(t)$ in terms of $P(t)$. The revenue for the toy is $R(t) = Q(t)P(t)$. Show that the revenue decreases at a rate of 1%. Explain why this is "obvious."

على فرض أن الكمية المباعة $Q(t)$ من أحد أنواع الدمى عند الزمن t مقداراً بالسنوات تتناقص بمعدل 4% اشرح السبب في أن ذلك يترجم إلى العلاقة $Q'(t) = -0.04Q(t)$. افترض أيضاً أن السعر يزداد بمعدل 3% اكتب معادلة مشابهة لـ $P'(t)$ بدلالة $P(t)$. إيرادات الدمية يساوي $R(t) = Q(t)P(t)$ بين أن الإيراد ينخفض بمعدل 1% و اشرح السبب في أن هذا "واضح"

26. As in exercise 25, suppose that the quantity sold decreases at a rate of 4%. By what rate must the price be increased to keep the revenue constant?

كما في التمرين 25 افترض أن الكمية المباعة تنخفض بمعدل 4% فما المعدل الذي يجب زيادة السعر به للحفاظ على الإيراد ثابتاً؟

$$R = P Q$$

$$R' = P Q' + P' Q$$

Revenue will be constant when the derivative is 0.

Substituting, $Q' = -0.04Q$ and, $P' = aP$ into the expression for R' gives,

$$R' = -0.04QP + aQP$$

$$R' = (-0.04 + a)QP$$

When R is constant, then $R' = 0$ therefore

$$-0.04 + a = 0$$

$$a = 0.04$$

so price must increase by 0.04 or 4%.



27. Suppose the price of an object is \$20 and 20,000 units are sold. If the price increases at a rate of \$1.25 per year and the quantity sold increases at a rate of 2000 per year, at what rate will revenue increase?

افترض أن سعر إحدى السلع AED 20 للقطعة وقد بيعت 20,000 قطعة. فإذا كان السعر يزداد بمعدل AED 1.25 في العام الواحد وتزداد الكمية المباعة بمعدل 2000 قطعة في العام الواحد، فبأي معدل سيزداد الإيراد؟

28. Suppose the price of an object is \$14 and 12,000 units are sold. The company wants to increase the quantity sold by 1200 units per year, while increasing the revenue by \$20,000 per year. At what rate would the price have to be increased to reach these goals?

افترض أن سعر القطعة AED 14 وأنه قد بيعت 12,000 قطعة. تريد الشركة زيادة الكمية المباعة بمقدار 1200 قطعة في العام مع زيادة الإيراد بمقدار AED 20,000 في العام. فما المعدل الذي يتعين زيادة السعر به لتحقيق هذين الهدفين؟



29. A baseball with mass 0.15 kg and speed 45 m/s is struck by a baseball bat of mass m kg and speed 40 m/s (in the opposite direction of the ball's motion). After the collision, the ball has initial speed $u(m) = \frac{82.5m - 6.75}{m + 0.15}$ m/s.

تُضرب كرة بيسبول كتلتها 0.15 kg وسرعتها 45 m/s بمضرب بيسبول كتلته m kg وبسرعة 40 m/s (بعكس اتجاه حركة الكرة). بعد الاصطدام، بلغت السرعة الابتدائية للكرة $u(m) = \frac{82.5m - 6.75}{m + 0.15}$ m/s.

a) Show that $u'(m) > 0$ and interpret this in baseball terms.

برهن أن $u'(m) > 0$ وفسر ذلك وفق مصطلحات رياضة البيسبول.

Where the numerator and denominator are positive then $u'(m) > 0$. It seems to be saying that initial ball speed is an increasing function of the mass of the bat.

حيث أن البسط موجب والمقام موجب فإن $u'(m) > 0$ يبدو أنه يشير إلى أن السرعة الأولية للكرة هي دالة متزايدة لكتلة المضرب.

b) Compare $u'(1)$ and $u'(1.2)$.

قارن $u'(1)$ و $u'(1.2)$

which suggests that the rate at which this speed is increasing is decreasing.

مما يشير إلى أن معدل زيادة هذه السرعة آخذ في الانخفاض.

30. In exercise 29, if the baseball has mass M kg at speed 45 m/s and the bat has mass 1.05 kg and speed 40 m/s, the ball's initial speed is $u(M) = \frac{86.625 - 45M}{M + 1.05}$ m/s. Compute $u'(M)$ and interpret its sign (positive or negative) in baseball terms.

في التمرين 29 إذا كنت كتلة كرة البيسبول M kg وسرعتها 45 m/s وإذا كانت كتلة المضرب 1.05 kg وسرعته 40 m/s وكانت السرعة الابتدائية للكرة $u(M) = \frac{86.625 - 45M}{M + 1.05}$ m/s احسب $u'(M)$ وفسر إشارته (موجبة أو سالبة) وفق مصطلحات رياضة البيسبول.



This quantity is negative. In baseball terms, as the mass of the baseball increases, the initial velocity decreases.

هذه الكمية سالبة. في مصطلحات البيسبول، كلما زادت كتلة كرة البيسبول، انخفضت السرعة الأولية.



Suppose that the current price is AED 2.40 and 12,000 items are sold at that price. If the price is increasing at the rate of 10 dirhams per year and the quantity sold decreases at the rate of 1500 items per year, at what rate is the revenue changing?

على فرض أن السعر الحالي هو AED 2.40 وتم بيع 12,000 قطعة بهذا السعر. إذا كان السعر يزداد بمعدل 10 فلسات في العام الواحد ونقل الكمية المباعة بمعدل 1500 قطعة في العام الواحد، فبأي معدل تتغير الإيرادات؟

أ. علي عبد الله البصري
+201003261312



23	Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions	(25-30)	194
	حل المشكلات الحياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية		196

25. Find an equation of the tangent line to $f(x) = 3e^{x^2}$ at $x = 1$
 أوجد معادلة المماس للمنحنى الدالة $f(x) = 3e^{x^2}$ عند $x = 1$

26. Find an equation of the tangent line to $f(x) = 3^{x^e}$ at $x = 1$
 أوجد معادلة المماس للمنحنى الدالة $f(x) = 3^{x^e}$ عند $x = 1$

27. Find an equation of the tangent line to $f(x) = x^2 \ln x$ at $x = 1$
 أوجد معادلة المماس للمنحنى الدالة $f(x) = x^2 \ln x$ عند $x = 1$

28. Find an equation of the tangent line to $f(x) = 2 \ln x^3$ at $x = 1$
 أوجد معادلة المماس للمنحنى الدالة $f(x) = 2 \ln x^3$ عند $x = 1$



29. (a) Find all values of x for which the tangent line to $f(x) = xe^{-2x}$ is horizontal.

أوجد جميع قيم x التي يكون عندها المماس للمنحنى $f(x) = xe^{-2x}$ أفقياً.

29. (b) Find all values of x for which the tangent line to $f(x) = xe^{-3x}$ is horizontal.

أوجد جميع قيم x التي يكون عندها المماس للمنحنى $f(x) = xe^{-3x}$ أفقياً.

30. (a) Find all values of x for which the tangent line to $f(x) = x^2e^{-2x}$ is horizontal.

أوجد جميع قيم x التي يكون عندها المماس للمنحنى $f(x) = x^2e^{-2x}$ أفقياً.

30. (b) Find all values of x for which the tangent line to $f(x) = x^2e^{-3x}$ is horizontal.

أوجد جميع قيم x التي يكون عندها المماس للمنحنى $f(x) = x^2e^{-3x}$ أفقياً.



24	Find derivatives implicitly.	Example 4	199
	إيجاد المشتقات للعلاقات الضمنية		201

EXAMPLE 8.4 Finding a Second Derivative Implicitly

Find $y''(x)$ implicitly for $y^2 + 2e^{-xy} = 6$. Then find the value of y'' at the point $(0, 2)$.

Solution We begin by differentiating both sides of the equation with respect to x . We have

$$\frac{d}{dx}(y^2 + 2e^{-xy}) = \frac{d}{dx}(6).$$

By the chain rule and the product rule, we have

$$2yy'(x) + 2e^{-xy}[-y - xy'(x)] = 0. \quad (8.3)$$

Notice that we don't need to solve this for $y'(x)$. Dividing out the common factor of 2 and differentiating again, we get

$$\begin{aligned} y'(x)y'(x) + yy''(x) - e^{-xy}[-y - xy'(x)][y + xy'(x)] \\ - e^{-xy}[y'(x) + y'(x) + xy''(x)] = 0. \end{aligned}$$

Grouping all the terms involving $y''(x)$ on one side of the equation gives us

$$yy''(x) - xe^{-xy}y''(x) = -[y'(x)]^2 - e^{-xy}[y + xy'(x)]^2 + 2e^{-xy}y'(x).$$

Factoring out the $y''(x)$ on the left, we get

$$(y - xe^{-xy})y''(x) = -[y'(x)]^2 - e^{-xy}[y + xy'(x)]^2 + 2e^{-xy}y'(x),$$

$$\text{so that} \quad y''(x) = \frac{-[y'(x)]^2 - e^{-xy}[y + xy'(x)]^2 + 2e^{-xy}y'(x)}{y - xe^{-xy}}. \quad (8.4)$$

Notice that (8.4) gives us a (rather messy) formula for $y''(x)$ in terms of x , y and $y'(x)$. If we need to have $y''(x)$ in terms of x and y only, we can solve (8.3) for $y'(x)$ and substitute into (8.4). However, we don't need to do this to find $y''(0)$. Instead, first substitute $x = 0$ and $y = 2$ into (8.3) to get

$$4y'(0) + 2(-2) = 0,$$

from which we conclude that $y'(0) = 1$. Then substitute $x = 0$, $y = 2$ and $y'(0) = 1$ into (8.4) to get

$$y''(0) = \frac{-1 - (2)^2 + 2}{2} = -\frac{3}{2}.$$



Find the second derivative $y''(x)$.أوجد المشتقة الثانية $y''(x)$

23. $x^2y^2 + 3x - 4y = 5$

Find the second derivative $y''(x)$.أوجد المشتقة الثانية $y''(x)$

24. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$



Find the second derivative $y''(x)$.

أوجد المشتقة الثانية $y''(x)$

25. $y^2 = x^3 - 6x + 4 \cos y$

أ. علي عبد الله البصري
+201003261312



25	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions	(29-32)	204
	استخدام الاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية		206

Find the derivative of the given function.

أوجد مشتقة الدالة المعطاة

29. (a) $f(x) = \sin^{-1}(x^3 + 1)$

(b) $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$

30. (a) $f(x) = \cos^{-1}(x^2 + x)$

(b) $f(x) = \cos^{-1}(2/x)$

31. (a) $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$

(b) $f(x) = \tan^{-1}(1/x)$



32. (a) $f(x) = \sqrt{2 + \tan^{-1} x}$

(b) $f(x) = e^{\tan^{-1} x}$

أ. علي عبد الله البصري
+201003261312



26	Understand the Mean Value Theorem and use it in applications.	(30-40)	219
	التعرف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات		221

30. If $f'(x) < 0$ for all x , prove that $f(x)$ is a decreasing function: that is, if $a < b$, then $f(a) > f(b)$.

إذا كان $f'(x) < 0$ لكل قيم x ، فأثبت أن $f(x)$ هي دالة متناقصة: بمعنى أنه إذا كان $a < b$ ، فإن $f(a) > f(b)$.

Let $a < b$. f is differentiable on (a, b) and continuous on $[a, b]$, since it is differentiable for all x . This means that

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

For some $c \in (a, b)$. therefore $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ is negative, and $f(a) > f(b)$.

Determine whether the function is increasing, decreasing or neither.

حدد ما إذا كانت الدالة متزايدة أم متناقصة أم غير ذلك

31 $f(x) = x^3 + 5x + 1$

32. $f(x) = x^5 + 3x^3 - 1$



Determine whether the function is increasing, decreasing or neither.

حدد ما إذا كانت الدالة متزايدة أم متناقصة أم غير ذلك

33. $f(x) = -x^3 - 3x + 1$

34. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

35. $f(x) = e^x$

36. $f(x) = e^{-x}$

37. $f(x) = \ln x$

38. $f(x) = \ln x^2$



39. Suppose that $s(t)$ gives the position of an object at time t . If s is differentiable on the interval $[a, b]$, prove that at some time $t = c$, the instantaneous velocity at $t = c$ equals the average velocity between times $t = a$ and $t = b$.

على فرض أن $s(t)$ تعدد موقع جسم ما في الزمن t . وإذا كانت s قابلة للاشتقاق في الفترة $[a, b]$ ، فأثبت أنه عندما $t = c$ ، تكون السرعة اللحظية عند $t = c$ مساوية للسرعة المتجهة المتوسطة بين $t = a$ و $t = b$.

The average velocity on $[a, b]$ is $\frac{s(b) - s(a)}{b - a}$.

By the Mean Value Theorem, there exists a $c \in (a, b)$ such that $s'(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$.

Thus, the instantaneous velocity at $t = c$ is equal to the average velocity between times $t = a$ and $t = b$.

40. Two runners start a race at time 0. At some time $t = a$, one runner has pulled ahead, but the other runner has taken the lead by time $t = b$. Prove that at some time $t = c > 0$, the runners were going exactly the same speed.

بدأ عداءان سباقا في الزمن 0. وبعد مرور فترة من الزمن $t = a$ ، تصدر عداء السباق، ولكن المتسابق الثاني نزع منه صدارة السباق بمرور الزمن $t = b$. أثبت أنه عند الزمن $t = c > 0$ ، كان العداءان يجريان بالسرعة نفسها بالضبط.

Let $f(t)$ be the distance the first runner has gone after time t and let $g(t)$ be the distance the second runner has gone after time t . The functions $f(t)$ and $g(t)$ will be continuous and differentiable. Let $h(t) = f(t) - g(t)$.

At $t = 0$, $f(0) = 0$ and $g(0) = 0$ so $h(0) = 0$.

At $t = a$, $f(a) > g(a)$ so $h(a) > 0$. Similarly, at $t = b$, $f(b) < g(b)$ so $h(b) < 0$.

Thus, by the Intermediate Value Theorem, there is time $t = t_0$ for $t_0 \in (a, b)$ where $h(t_0) = 0$.

Rolle's Theorem then says that there is time $t = c$ where $c \in (0, t_0)$ such that $h'(c) = 0$. But

$h'(t) = f'(t) - g'(t)$, so $h'(c) = f'(c) - g'(c) = 0$ implies that $f'(c) = g'(c)$,

at time $t = c$ the runners are going exactly the same speed.



تم بحمد الله
بالتوفيق للجميع

