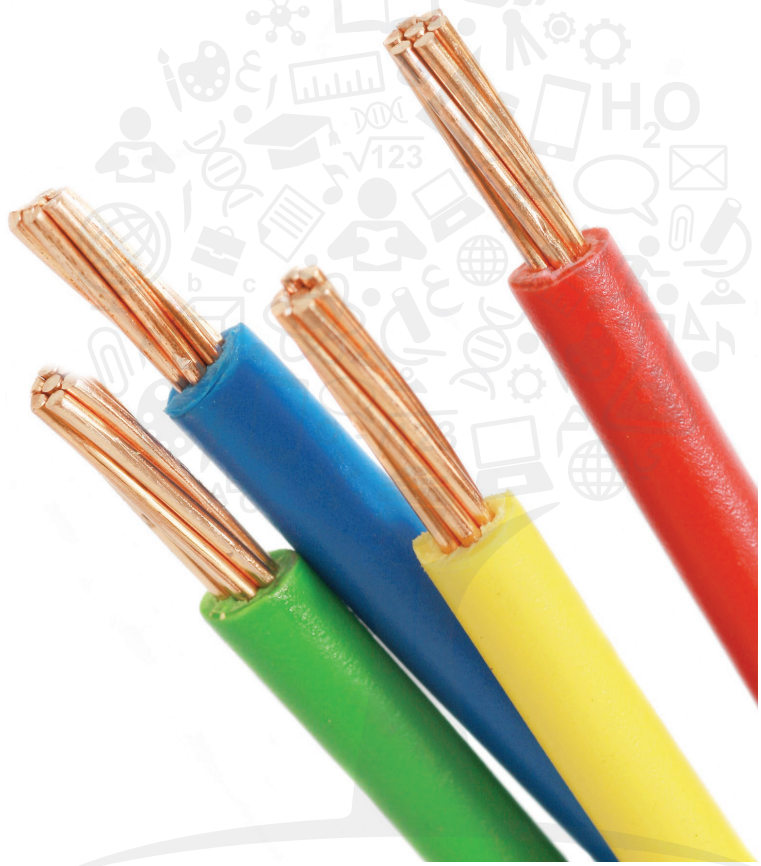
الوحدة 7

طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى



Chapter Sourced from, 7. Integration Techniques, from Calculus: Early Transcendental Functions 4e Chapter 6 © 2012 & First-Order Differential Equations, from Calculus: Early Transcendental Functions 4e Chapter 7 © 2012

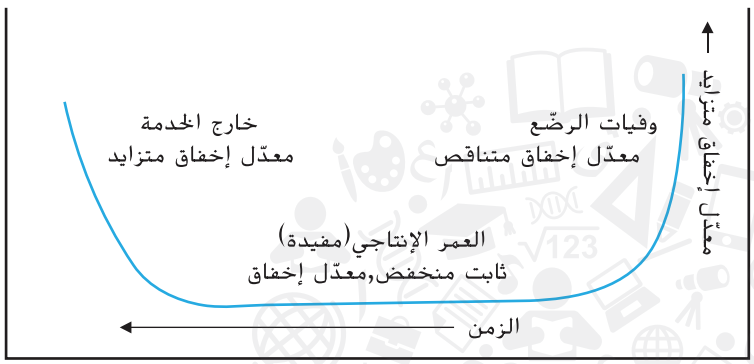
تُجري شركات الإلكترونيات اختبارات على منتجاتها بشكل ثابت للتأكد من الوثوق بها. غالبًا ما يتم استعراض العمر الافتراضي لأحد المكوّنات الإلكترونية على أنّ لها ثلاث مراحل، كما هو موضّح من قِبل ما يسمّى معدل الإخفاق المبيّن في الشكل.

يشير هذا المنحنى إلى متوسط معدل الإخفاق لأحد المكوّنات بوصفها دالة عمرية. في المرحلة الأولى (التي يُطلق عليها **وفيات الرضّع**)، ينخفض معدل الإخفاق بشكل سريع حيث يحدث إخفاق في المكوّنات التالفة بسرعة. تدخل المكوّنات التي تمر بسلام من هذه المرحلة الأولية في مرحلة ثانية مطوّلة (**مرحلة العمر الإنتاجي**) من معدل الإخفاق الثابت. وتُظهر المرحلة الثالثة زيادة في معدل الإخفاق حيث تصل المكوّنات إلى النهاية الفيزيائية من دورة عمرها.

يحظى معدل الإخفاق الثابت لمرحلة العمر الإنتاجي بالعديد من النتائج المثيرة للاهتمام. أولًا، تُعد الإخفاقات "بدون ذاكرة"، بمعنى أنّ احتمال أنّ المكوّن يدوم ساعة أخرى، أمرًا مستقلًا عن عمر المكوّن. قد يكون المرجّح أن يستمر مكوّن عمره 40 ساعة لمدة ساعة أخرى مثل مكوّن عمره 10 ساعات فقط. تتمتع بهذه الخاصية غير العادية المكوّنات الإلكترونية مثل المصابيح، خلال مرحلة العمر الإنتاجي.

برنامج محمد بن راشد للتعليم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



يشير معدل الإخفاق الثابت أيضًا إلى أنّ إخفاقات المكوّن تتبع ما يسمّى التوزيع الأسي. (انظر التمرين 73 في تمارين مراجعة في نهاية هذه الوحدة). يتطلّب حساب الإحصاءات للتوزيع الأسي طرائق تكامل أكثر تطورًا من تلك التي نوقشت حتى الآن. على سبيل المثال، يعطى وسط (متوسط) العمر الافتراضي لمكوّنات إلكترونية معيّنة بالتكامل $\int_0^\infty cxe^{-cx}dx$، لعدد ثابت ما $c > 0$. لإيجاد قيمته، سنحتاج أولًا إلى التوسّع في مفهومنا عن التكامل لتضمين التكاملات المعتلّة مثل تلك، حيث يكون حد واحد أو اثنان من حدود التكامل لانهائيّة. نعالج هذا في الدرس 7.6. ثمة تحدٍّ آخر أيضًا وهو أنّنا لا نعرف في الحاضر أي دالّة أصلية لـ $f(x) = xe^{-cx}$. في الدرس 7.2، نقدّم طريقة فعّالة تسمّى التكامل بالأجزاء والذي يمكن استخدامه لإيجاد دوال أصلية من مثل هذه الدوال.

تقدّم لنا طرائق التكامل الجديدة التي تم توضيحها في هذه الوحدة مجموعة واسعة من الأدوات المستخدمة في حل مسائل لا حصر لها تحظى باهتمام المهندسين والرياضيين والعلماء.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 7-1

مراجعة الصيغ وطرائق التكامل

في هذا الدرس الموجز، نعرض معًا جميع صيغ التكامل وطريقة تكامل واحدة (التكامل بالتعويض) الذي قمنا بتطويره سابقاً. نحن نستخدم هذه لتطوير بعض الصيغ العامة الأخرى، بالإضافة إلى حل مسائل التكامل الأكثر تعقيدًا. أولًا، تطلع إلى الجدول التالي لصيغ التكامل الأساسية المطوّرة في الوحدة 4.

$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad \text{for } r \neq -1$ (قاعدة القوّة)	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c, \quad \text{for } x \neq 0$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$
$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c$
$\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$	$\int \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + c$

تذكّر أنّ كل واحدة من هذه تتبع قاعدة اشتقاق مناظرة لها. حتى الآن، توسّعنا بهذه القائمة قليلًا باستخدام طريقة التعويض، كما في المثال 1.1.

المثال 1.1 تعويض بسيط

جـــد قيمة $\int \sin(ax)\,dx$، حيث $a \neq 0$.

الحل يتمثّل الاختيار الأوضح هنا بأن تكن $u = ax$، حيث أنّ $du = a\,dx$. يعطينا ذلك

$$\int \sin(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int \underbrace{\sin(ax)}_{\sin u}\underbrace{a\,dx}_{du} = \frac{1}{a}\int \sin u\,du$$

$$= -\frac{1}{a}\cos u + c = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$$

لا توجد حاجة إلى حفظ القواعد العامة مثل تلك الواردة في المثالين 1.1 و 1.2، على الرغم من أنّه غالبًا ما يكون مناسبًا القيام بذلك. يمكنك إعادة إنتاج القواعد العامة في أي زمن كنت في حاجة إليها باستخدام التعويض.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المثال 1.2 تعميم قاعدة تكامل أساسية

جـــد قيمة $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$، حيث $a \neq 0$.

الحل لاحظ أنّ ذلك مماثلٌ تقريبًا لـ $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ويمكننا كتابة

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$$

الآن، لتكن $u = \frac{x}{a}$. فيكون $du = \frac{1}{a}\,dx$ وإذًا،

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}_{1+u^2}\underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}u + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

لن يحل التعويض جميع ما تواجه من صعوبات في التكامل، كما نري في المثال 1.3.

المثال 1.3 مكامل يجب إيجاد مفكوكه

جـــد قيمة $\int (x^2-5)^2\,dx$.

الحل قد يكون الدافع الأول هو تعويض $u = x^2 - 5$. مع ذلك، فشل هذا الأمر، حيث لا يوجد لدينا $du = 2x\,dx$ في التكامل. (يمكننا فرض الثابت 2 في التكامل، لكن لا يمكننا وضع x هناك). من ناحية أخرى، يمكنك دائمًا تفكيك ذات الحدّين للحصول على

$$\int (x^2-5)^2\,dx = \int (x^4 - 10x^2 + 25)\,dx = \frac{x^5}{5} - 10\frac{x^3}{3} + 25x + c$$

يتمثّل المغزى من المثال 1.3 بالتأكد من أنّك لم تغفل طرائق أبسط. القاعدة الأكثر عمومية في التكامل هي الاستمرار في المحاولة. في بعض الأحيان، ستحتاج إلى القيام ببعض العمليات الجبرية قبل أن تتمكّن من التعرّف على شكل المكامل.

المثال 1.4 تكامل حيث يجب علينا إكمال المربع

جـــد قيمة $\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}\,dx$.

الحل قد لا يتبادر الكثير إلى الذهن هنا. لا يعمل التعويض إما للمقام بأكمله أو الكمية تحت الجذر التربيعي. (لم لا؟) إذًا، ما الذي تبقّى للقيام به؟ تذكّر أنّه ثمة أساسًا شيئين فقط يمكنك إجراؤهما على كثير الحدود التربيعي: إما تحليله إلى العوامل أو إكمال المربع. هنا، القيام بما سبق يلقي بعض الضوء على التكامل. لدينا

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{-5-(x^2-6x+9)+9}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\,dx$$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لاحظ كيف يبدو ذلك مثل $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + c$. إذا قمنا بإخراج الـ 4 الموجودة في الجذر التربيعي كعامل مشترك، نحصل على

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}}\,\frac{1}{2}\,dx$$

بأخذ $u = \frac{x-3}{2}$، لدينا $du = \frac{1}{2}\,dx$ ولذلك،

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}}}_{\sqrt{1-u^2}}\,\underbrace{\frac{1}{2}\,dx}_{du} = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= \sin^{-1} u + c = \sin^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + c$$

المثال 1.5 يوضّح قيمة المثابرة.

المثال 1.5 تكامل يتطلب بعض التخيّل

جـــد قيمة $\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}\,dx$.

الحل كما هو الحال مع معظم التكاملات، لا يمكنك إيجاد قيمة ذلك كما هو موضّح. ومع ذلك، فإنّ البسط هو مشتقّة قريبة جدًا من المقام (ولكن ليس تمامًا). بإدراك أنّه يمكنك إكمال المربع في المقام، للحصول على

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}\,dx = \int \frac{4x+1}{2(x^2+2x+1)-2+10}\,dx = \int \frac{4x+1}{2(x+1)^2+8}\,dx$$

الآن، يبدو المقام بالكاد مثل المقام في $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$. بإخراج 8 كعامل مشترك من المقام، نحصل على

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}\,dx = \int \frac{4x+1}{2(x+1)^2+8}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{4x+1}{\frac{1}{4}(x+1)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{4x+1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

الآن، بأخذ $u = \frac{x+1}{2}$، لدينا $du = \frac{1}{2}\,dx$ و $x = 2u-1$ ولذلك،

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{4x+1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\overbrace{4x+1}^{4(2u-1)+1}}{\underbrace{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}_{u^2+1}}\,\underbrace{\frac{1}{2}\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{4(2u-1)+1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{4}\int \frac{8u-3}{u^2+1}\,du$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

$$= \frac{4}{4}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du - \frac{3}{4}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \ln(u^2+1) - \frac{3}{4}\tan^{-1} u + c$$

$$= \ln\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1\right] - \frac{3}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

كان المثال 1.5 مرهقًا، ولكن واضح إلى حد معقول. تتمثّل المشكلة في التكامل بالتعرّف على ماهية الأجزاء الموجودة في تكامل معيّن ومعرفة طريقة إعادة كتابة التكامل في صيغة أكثر انتشارًا.

تمارين 7.1

تمارين كتابية

.1 في المثال 1.2، اشرح كيف ينبغي عليك معرفة كتابة المقام في صورة $a^2\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$. هل ستبقى هذه خطوة أولى جيدة إذا كان البسط x بدلًا من 1؟ ماذا ستفعل إذا كان المقام $\sqrt{a^2-x^2}$ ؟

.2 في كلا المثالين 1.4 و 1.5، أكملنا المربع ووجدنا دوال أصلية تتضمّن $\sin^{-1} x$، $\tan^{-1} x$ و $\ln(x^2+1)$. صف بإيجاز كيف أنّ وجود x في البسط أو جذر تربيعي في المقام يؤثّر على كون أي من هذه الدوال سيكون في الدالة الأصلية.

في التمارين 1–40، جـــد قيمة التكامل.

1. $\int e^{ax}\,dx,\ a \neq 0$
2. $\int \cos(ax)\,dx,\ a \neq 0$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,\ a>0$
4. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx,\ a>0$
5. $\int \sin 6t\,dt$
6. $\int \sec 2t \tan 2t\,dt$
7. $\int (x^2+4)^2\,dx$
8. $\int x(x^2+4)^2\,dx$
9. $\int \frac{3}{16+x^2}\,dx$
10. $\int \frac{2}{4+4x^2}\,dx$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$
12. $\int \frac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$
13. $\int \frac{4}{5+2x+x^2}\,dx$
14. $\int \frac{4x+4}{5+2x+x^2}\,dx$
15. $\int \frac{4t}{5+2t+t^2}\,dt$
16. $\int \frac{t+1}{t^2+2t+4}\,dt$
17. $\int e^{3-2x}\,dx$
18. $\int \frac{3}{e^{6x}}\,dx$
19. $\int \frac{4}{x^{1/3}(1+x^{2/3})}\,dx$
20. $\int \frac{2}{x^{1/4}+x}\,dx$
21. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
22. $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx$
23. $\int_0^{\pi} \cos x e^{\sin x}\,dx$
24. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x e^{\tan x}\,dx$
25. $\int_{-\pi/4}^{0} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$
26. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 t}\,dt$
27. $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$
28. $\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$
29. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
30. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$
31. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$
32. $\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$
33. $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$
34. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx$
35. $\int_{-2}^{-1} \frac{\ln x^2}{x}\,dx$
36. $\int_1^3 e^{2\ln x}\,dx$
37. $\int_3^4 x\sqrt{x-3}\,dx$
38. $\int_0^1 x(x-3)^2\,dx$
39. $\int_1^4 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx$
40. $\int_{-2}^{0} xe^{-x^2}\,dx$

في التمارين 41–46، تم إعطاؤك زوجًا من التكاملات. جـــد قيمة التكامل الذي يمكن إجراؤه باستخدام الطرائق التي تمت تغطيتها حتى الآن (لا يمكن استخدام الأخرى).

41. $\int \frac{5}{3+x^2}\,dx$ and $\int \frac{5}{3+x^3}\,dx$
42. $\int \sin 3x\,dx$ and $\int \sin^3 x\,dx$
43. $\int \ln x\,dx$ and $\int \frac{\ln x}{2x}\,dx$
44. $\int \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$ and $\int \frac{x^4}{1+x^8}\,dx$
45. $\int e^{-x^2}\,dx$ and $\int xe^{-x^2}\,dx$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

46. $\int \sec x\, dx$ and $\int \sec^2 x\, dx$

47. جـــد $\int_0^2 f(x)\, dx$، حيث $f(x) = \begin{cases} x/(x^2+1) & x \le 1 \\ x^2/(x^2+1) & x > 1 \end{cases}$

48. أعِد العمل على المثال 1.5 من خلال إعادة كتابة التكامل في صورة $\int \frac{4x+4}{2x^2+4x+10}\, dx - \int \frac{3}{2x^2+4x+10}\, dx$ وإكمال المربع في التكامل الثاني.

49. جـــد $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx$، $\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$، $\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$ و $\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx$. وعموماً أعط صيغة $\int \frac{x^n}{1+x^2}\, dx$ لأي عدد صحيح موجب n. تمامًا بقدر ما تستطيع.

50. جـــد $\int \frac{x}{1+x^4}\, dx$، $\int \frac{x^3}{1+x^4}\, dx$ و $\int \frac{x^5}{1+x^4}\, dx$. وعموماً أعط صيغة $\int \frac{x^n}{1+x^4}\, dx$ لأي عدد صحيح موجب فردي n. تمامًا بقدر ما تستطيع.

تمارين استكشافية

1. جـــد $\int xe^{-x^2}\, dx$، $\int x^3e^{-x^2}\, dx$ و $\int x^5e^{-x^2}\, dx$. وعموماً أعط صيغة $\int x^ne^{-x^2}\, dx$ لأي عدد صحيح موجب فردي n.

2. في العديد من الحالات، يجب التوسّع مع التكامل كما قمنا بتعريفه إلى **تكامل ريمان–شتيلتيز** الذي تم اعتباره في هذا التمرين. للدالتين f و g، لتكن P هي تجزئة عادية لـ $[a, b]$ بنقاط القيم $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ وعرّف المجاميع $R(f, g, P) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$. التكامل $\int_a^b f(x)\, dg(x)$ يساوي نهاية المجموع $R(f, g, P)$ عندما $n \to \infty$. إذا كانت النهاية موجودة وتساوي العدد نفسه لكل قيم النقاط c_i. (a) أثبت أنّه إذا كان g' موجودة، إذًا $\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\, dx$.

(b) إذا كانت $g(x) = \begin{cases} 1 & a \le x \le d \\ 2 & d < x \le b \end{cases}$ لعدد ثابت d حيث $a < d < b$.

(c) جـــد قيمة $\int_a^b f(x)\, dg(x)$. جـــد دالة $g(x)$ بحيث يكون $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dg(x)$ موجودًا.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 7-2

التكامل بالأجزاء

إلى الآن، ستكون قد أدركت أنّ هناك العديد من التكاملات التي لا يمكن إيجاد قيمها باستخدام الصيغ الأساسية أو التكامل بالتعويض. فعلى سبيل المثال،

$$\int x \sin x \, dx$$

لا يمكن إيجاد قيمتها بما تعرفه حتى الآن.

وقد لاحظنا أنّ كل قاعدة إشتقاق تعطي قاعدة تكامل مناظرة لها. إذًا، لأجل قاعدة الضرب:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

يعطينا التكامل لطرفي هذه المعادلة

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\, dx = \int f'(x)g(x)\, dx + \int f(x)g'(x)\, dx$$

بتجاهل ثابت التكامل، يكون التكامل على الطرف الأيسر من المعادلة ببساطة $f(x)g(x)$. يقدّم إذًا حل التكامل الثاني على الطرف الأيمن من المعادلة

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

تسمّى هذه القاعدة **التكامل بالأجزاء**. باختصار، تسمح لنا هذه القاعدة الجديدة باستبدال تكامل معطى بآخر أسهل. سنترك للأمثلة مهمة إقناعك بفاعلية هذه الطريقة. أولًا، من المناسب دائمًا كتابة

الملاحظات التاريخية

بروك تايلور (1685–1731)

عالم رياضيات إنجليزي يرجع إليه الفضل في ابتكار التكامل بالأجزاء. قدّم تايلور مساهمات هامة في الاحتمال ونظرية المغناطيسية واستخدام خطوط التلاشي في المنظور الخطي. ومع ذلك، فقد اشتهر بنظرية تايلور (انظر القسم 8.7)، حيث قام بتعميم نتائج نيوتن وهالي وبيرنولي وغيرهم. إنّ المأساة في حياته الشخصية (كلتا زوجتيه توفيتا أثناء الولادة) واعتلال صحته عملت على الحد من الناتج الرياضي لعالم الرياضيات الرائع هذا.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

هذا باستخدام المفهوم $u = f(x)$ و $v = g(x)$. إذًا،

$$du = f'(x)\,dx \qquad \text{و} \qquad dv = g'(x)\,dx$$

حيث تصبح خوارزمية التكامل بالأجزاء.

التكامل بالأجزاء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{2.1}$$

لتطبيق التكامل بالأجزاء، تحتاج إلى القيام بخيار حكيم لـ u و dv بحيث يكون التكامل على الطرف الأيمن من (2.1) هو تكامل تستطيع إيجاد قيمته.

المثال 2.1 التكامل بالأجزاء

جـــد قيمة $\int x \sin x\,dx$.

الحل أولًا، لاحظ أنّ هذا ليس واحدًا من تكاملاتنا الأساسية ولا يوجد تعويض واضح سيفيد. لاستخدام التكامل بالأجزاء، ستحتاج إلى اختيار u (شيء للإشتقاق) و dv (شيء للتكامل). إذا أخذنا

$$dv = \sin x\,dx \qquad \text{و} \qquad u = x$$

إذًا $du = dx$ وتكامل dv، نحصل على

$$v = \int \sin x\,dx = -\cos x + k$$

عند إجراء التكامل بالأجزاء، نقوم بإسقاط ثابت التكامل هذا. (فكّر في سبب منطقية القيام بذلك.) أيضًا، عادةً نكتب هذه المعلومات باعتبارها كتلة:

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \sin x\,dx \\ du &= dx & v &= -\cos x \end{aligned}$$

يعطينا ذلك

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} &= \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ &= -x\cos x - \int (-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x + c \end{aligned} \tag{2.2}$$

إنها مسألة بسيطة لإشتقاق التعبير على الطرف الأيمن من (2.2) والتحقق مباشرةً من أنّك قد وجدت في الواقع دالّة أصلية لـ $x \sin x$. ■

يتوجّب عليك سريعًا إدراك أنّ اختيار u و dv مهم. لاحظ النتيجة إذا قمنا بتبديل اختيار u و dv كما في المثال 2.2.

المثال 2.2 اختيار خطأ لـ u و dv

لنأخذ $\int x \sin x\,dx$ كما في المثال 2.1، لكن هذه المرة اعكس اختيار u و dv.

الحل هنا، لتكن

$$\begin{aligned} u &= \sin x & dv &= x\,dx \\ du &= \cos x\,dx & v &= \tfrac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

يعطينا ذلك

$$\int \underbrace{(\sin x)}_{u}\,\underbrace{x\,dx}_{dv} = uv - \int v\,du = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الذي لاحظ أنّ التكامل الأخير لا نعرف كيف نقوم بحسابه بطريقة أفضل من الطريقة الأصلية. في الحقيقة، لقد جعلنا الموقف أسوأ حيث أنّ قوّة x في التكامل الجديد أعلى منها في التكامل الأصلي. ■

ملحوظة 2.1

عند استخدام التكامل بالأجزاء، ضع في اعتبارك أنّك تقوم بتقطيع المكامل إلى جزأين. إنّ واحدة من هذه الأجزاء، المناظرة مع u، تفاضلها والأخرى، المناظرة dv، سيتم تكاملها. بما أنّه يمكنك اشتقاق كل دالة تمر عليها، ينبغي عليك اختيار dv التي تعرف دالّتها الأصلية واختر الاثنين اللتين سينتج عنهما تكامل أسهل. إن أمكن، اختيار $u = x$ ينتج عنه $du = dx$ البسيط. ستتعلّم أفضل ما يمكن القيام به من خلال العمل على الكثير من المسائل. حتى وإن كنت لا تعلم كيفية انتهاء المسألة، حاول القيام بأي شيء!

المثال 2.3 مكامل مع حد إفرادي

جـــد قيمة $\int \ln x\, dx$.

الحل قد يبدو هذا بسيطًا، ولكنه ليس واحدًا من التكاملات الأساسية، وليست هناك تعويضات واضحة من شأنها تبسيطه. يترك لنا هذا التكامل بالأجزاء. تذكر أنّه ينبغي عليك اختيار u (لإيجاد تفاضلها) و dv (ليتم تكاملها). من الواضح أنّه لا يمكنك الاختيار $dv = \ln x\, dx$، حيث أنّ المسألة هنا الهدف منها إيجاد طريقة لتكامل هذا الحد. لذلك، حاول

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x$$

يعطينا التكامل بالأجزاء الآن

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = uv - \int v\, du = x \ln x - \int x\left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$= x \ln x - \int 1\, dx = x \ln x - x + c$$

■

في كثير من الأحيان، ينتج عن التكامل بالأجزاء تكامل لا يمكننا إيجاد قيمته مباشرةً، ولكن بدلًا من ذلك، نستطيع إيجاد تكامل بتكرار التكامل بالأجزاء مرة واحدة أو أكثر.

المثال 2.4 التكامل بتكرار بالأجزاء

جـــد قيمة $\int x^2 \sin x\, dx$.

الحل بالتأكيد، لا يمكنك إيجاد قيمة هذا كما هو عليه ولا يوجد تبسيط أو تعويض واضح من شأنه أن يفيد. نختار

$$u = x^2 \qquad dv = \sin x\, dx$$
$$du = 2x\, dx \qquad v = -\cos x$$

بهذا الاختيار، يقدّم التكامل بالأجزاء

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\sin x\, dx}_{dv} = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx$$

بالطبع، لا يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل الأخير كما هو عليه، ولكن يمكننا القيام بذلك باستخدام التكامل بالأجزاء. نختار الآن

$$u = x \qquad dv = \cos x\, dx$$
$$du = dx \qquad v = \sin x$$

بتطبيق التكامل بالأجزاء على التكامل الأخير، لدينا الآن

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2 \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x\, dx}_{dv}$$
$$= -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int \sin x\, dx\right)$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

■

ملحوظة 2.2

في التكامل بالأجزاء الثاني في المثال 2.4، إذا قمت باختيار $u = \cos x$ و $dv = x\, dx$، إذًا سيترك لك التكامل بالأجزاء فقط الاستنتاج الأقل من مذهل حيث يساوي التكامل الذي بدأت به نفسه. (قم بتجربة ذلك كتمرين).

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

استنادًا إلى عملنا في المثال 2.4، حاول معرفة عدد التكاملات بالأجزاء المطلوبة لإيجاد قيمة $\int x^n \sin x\, dx$، لكل عدد صحيح موجب n. (سيكون هناك المزيد من أجل ذلك، بما في ذلك اختصار، في التمارين.)

يعيدك تكرار التكامل بالأجزاء في بعض الأحيان إلى التكامل الذي بدأت به. يمكن أن يكون ذلك خبرًا سيئًا (انظر الملاحظة 2.2)، أو يمكن أن يقدّم لنا طريقة ذكية لإيجاد قيمة التكامل، كما في المثال 2.5.

المثال 2.5 تكرار التكامل بالأجزاء المتطور

جـــد قيمة $\int e^{2x} \sin x\, dx$.

الحل لا تعمل أي من الطرائق الأولى على هذا التكامل. للتكامل بالأجزاء، يوجد خياران قابلان للتطبيق لـ u و dv. نأخذ:

$$u = e^{2x} \qquad dv = \sin x\, dx$$
$$du = 2e^{2x}\, dx \qquad v = -\cos x$$

(الاختيار المقابل مناسب أيضًا. قم بتجربة ذلك كتمرين). يعطي التكامل بالأجزاء

$$\int \underbrace{e^{2x}}_{u} \underbrace{\sin x\, dx}_{dv} = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\, dx$$

يتطلب التكامل المتبقي مرة أخرى تكاملًا بالأجزاء. نختار

$$u = e^{2x} \qquad dv = \cos x\, dx$$
$$du = 2e^{2x}\, dx \qquad v = \sin x$$

فهي تتبع الآن

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin x\, dx &= -e^{2x}\cos x + 2\int \underbrace{e^{2x}}_{u} \underbrace{\cos x\, dx}_{dv}\\ &= -e^{2x}\cos x + 2\left(e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\, dx\right)\\ &= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\, dx \qquad (2.3)\end{aligned}$$

لاحظ أنّ السطر الأخير يتضمّن التكامل الذي بدأنا به. بالتعامل مع التكامل $\int e^{2x}\sin x\, dx$ باعتباره القيمة المجهولة، يمكننا إضافة $4\int e^{2x}\sin x\, dx$ إلى طرفي المعادلة (2.3)، مما يعطي

$$5\int e^{2x}\sin x\, dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x + K$$

حيث أضفنا ثابت التكامل K إلى الطرف الأيمن. بقسمة كلا الطرفين على 5 إذًا نحصل على

$$\int e^{2x}\sin x\, dx = -\frac{1}{5}e^{2x}\cos x + \frac{2}{5}e^{2x}\sin x + c$$

حيث استبدلنا ثابت التكامل العشوائي $\frac{K}{5}$ بـ c. ■

لاحظ أنّه لأي عدد صحيح موجب n، سيتطلب التكامل $\int x^n e^x\, dx$ تكاملًا بالأجزاء. في هذه المرحلة، ينبغي ألا يكون مفاجئًا إذا أخذنا لـ

$$u = x^n \qquad dv = e^x\, dx$$
$$du = nx^{n-1}\, dx \qquad v = e^x$$

ملحوظة 2.3

للتكاملات مثل $\int e^{2x}\sin x\, dx$ (أو تكاملات ذات صلة مثل $\int e^{-3x}\cos 2x\, dx$)، سينتج عن تكرار التكامل بالأجزاء كما في المثال 2.5 دالّة أصلية. الاختيار الأول لـ u و dv يرجع لك (أي الاختيارين سيكون مناسبًا) لكن اختيارك لـ u و dv في التكامل بالأجزاء الثاني يجب أن يكون متسقًا مع اختيارك الأول. على سبيل المثال، في المثال 2.5، اختيارنا الأولي لـ $u = e^{2x}$ يلزمنا باستخدام $u = e^{2x}$ للتكامل بالأجزاء الثاني أيضًا. لمعرفة السبب، أعد العمل على التكامل الثاني حيث تأخذ $u = \cos x$ ولاحظ ما سيحدث!

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إنّ تطبيق تكامل بالأجزاء يعطينا

$$\int \underbrace{x^n}_{u} \underbrace{e^x\,dx}_{dv} = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx \qquad (2.4)$$

لاحظ أنّه إذا $n-1>0$. فسنحتاج إلى إجراء تكامل بالأجزاء مرة أخرى. في الواقع، سنحتاج إلى إجراء إجمالي n تكاملات بالأجزاء لإكمال العملية. يتمثّل الحل البديل بتطبيق الصيغة (2.4) (التي يُطلق عليها **صيغة الاختزال**) بشكل متكرّر لإيجاد قيمة تكامل معيّن. نوضّح ذلك في المثال 2.6.

المثال 2.6 استخدام صيغة اختزال

جـــد قيمة التكامل $\int x^4e^x\,dx$.

الحل لإجراء أربعة تكاملات بالأجزاء هي مضيعة للوقت. ومع ذلك، يمكننا استخدام صيغة الاختزال (2.4) بشكل متكرّر لإيجاد قيمة التكامل بسهولة نسبية، على النحو التالي. من (2.4)، حيث $n=4$، نحصل على

$$\int x^4e^x\,dx = x^4e^x - 4\int x^{4-1}e^x\,dx = x^4e^x - 4\int x^3e^x\,dx$$

بتطبيق (2.4) مرة أخرى، حيث $n=3$، يعطينا

$$\int x^4e^x\,dx = x^4e^x - 4\left(x^3e^x - 3\int x^2e^x\,dx\right)$$

الأن، يجب عليك ملاحظة أنّه يمكننا الحل بتطبيق صيغة الاختزال مرتين أخريين. وبذلك نحصل على

$$\int x^4e^x\,dx = x^4e^x - 4x^3e^x + 12x^2e^x - 24xe^x + 24e^x + c$$

حيث نترك تفاصيل الحسابات المتبقية لك. ■

لاحظ أنّه لإيجاد قيمة التكامل المحدود، فمن الممكن دائمًا تطبيق التكامل بالأجزاء على التكامل المناظر غير المحدود ثم ببساطة إيجاد قيمة الدّالة الأصلية من الناتج بين حدود التكامل. مع ذلك، كلما كان الأمر ممكنًا (أي، عندما يتضمّن التكامل بشكل كبير)، يجب عليك تطبيق التكامل بالأجزاء مباشرةً على التكامل المحدود. لاحظ أنّ خوارزمية التكامل بالأجزاء للتكاملات المحدودة هي ببساطة

التكامل بالأجزاء لتكامل محدود

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} u\,dv = uv\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} v\,du}$$

حيث كتبنا حدود التكامل، علينا تذكيرك بأنّ هذه تشير إلى قيم x. (تذكّر أنّنا قمنا باشتقاق صيغة التكامل بالأجزاء من خلال أخذ u و v ليكون كلاهما دالتين لـ x).

المثال 2.7 التكامل بالأجزاء لتكامل محدود

جـــد قيمة $\int_1^2 x^3 \ln x\,dx$.

الحل مرة أخرى، بما أنّ استخدام الطرائق الأولى هو بدون فائدة، نجرّب التكامل بالأجزاء. بما أنّنا لا نعلم كيف نقوم بتكامل $\ln x$ (باستثناء التكامل بالأجزاء)، نختار:

$$u = \ln x \qquad dv = x^3\,dx$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{1}{4}x^4$$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ومنه، لدينا

$$\int_1^2 \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{x^3 dx}_{dv} = uv\Big|_1^2 - \int_1^2 v\,du = \frac{1}{4}x^4 \ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^4\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}(2^4 \ln 2 - 1^4 \ln 1) - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3 dx$$

$$= \frac{16 \ln 2}{4} - 0 - \frac{1}{16}x^4\Big|_1^2 = 4 \ln 2 - \frac{1}{16}(2^4 - 1^4)$$

$$= 4 \ln 2 - \frac{1}{16}(16 - 1) = 4 \ln 2 - \frac{15}{16}$$

يُعد التكامل بالأجزاء أقوى أداة في مجموعة التكامل الخاصة بنا. من أجل إتقان استخدامه، ستحتاج إلى العمل على العديد من المسائل. نحن نقدّم تشكيلة واسعة من هذه المسائل في مجموعة التمارين التالية.

تمارين 7.2

تمارين كتابية

1. ناقش أفضل استراتيجية خاصة بك لتحديد أي جزء من المكامل يجب أن يكون u وأي جزء يجب أن يكون dv.

2. نحصل على التكامل بالأجزاء من قاعدة ناتج الضرب للمشتقات. قم باشتقاق طريقة تكامل يتم الحصول عليه من قاعدة ناتج القسمة. ناقش بإيجاز سبب عدم فائدة القاعدة.

في التمارين 28–1، جـــد قيمة التكاملات.

1. $\int x \cos x\, dx$
2. $\int x \sin 4x\, dx$
3. $\int xe^{2x} dx$
4. $\int x \ln x\, dx$
5. $\int x^2 \ln x\, dx$
6. $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$
7. $\int x^2 e^{-3x} dx$
8. $\int x^2 e^{x^3}\, dx$
9. $\int e^x \sin 4x\, dx$
10. $\int e^{2x} \cos x\, dx$
11. $\int \cos x \cos 2x\, dx$
12. $\int \sin x \sin 2x\, dx$
13. $\int x \sec^2 x\, dx$
14. $\int (\ln x)^2\, dx$
15. $\int x^3 e^{x^2} dx$
16. $\int \frac{x^3}{(4 + x^2)^{3/2}}\, dx$
17. $\int \cos x \ln(\sin x)\, dx$
18. $\int x \sin x^2 dx$
19. $\int_0^1 x \sin 2x\, dx$
20. $\int_0^\pi 2x \cos x\, dx$
21. $\int_0^1 x^2 \cos \pi x\, dx$
22. $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx$
23. $\int_1^{10} \ln 2x\, dx$
24. $\int_1^2 x \ln x\, dx$
25. $\int e^{ax} x^2\, dx,\ a \neq 0$
26. $\int x \sin(ax)\, dx,\ a \neq 0$
27. $\int x^n \ln x\, dx,\ n \neq -1$
28. $\int \sin(ax) \cos(bx)\, dx,\ a \neq 0,\ b \neq 0$

29. يستخدم عدة صيغ للتكامل (يُطلق عليها اسم صيغ الاختزال) لجعل عملية إجراء عدة تكاملات بالأجزاء آلية. أثبت أنّه لأي عدد صحيح موجب n.

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

(استخدم التكامل بالأجزاء مع $u = \cos^{n-1} x$ و $dv = \cos x\, dx$).

30. استخدم التكامل بالأجزاء لتثبت أنّه لأي عدد صحيح موجب n

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx$$

في التمارين 38–31، جـــد قيمة التكامل باستخدام صيغ الاختزال من التمارين 29 و 30 و (2.4).

31. $\int x^3 e^x\, dx$
32. $\int \cos^5 x\, dx$
33. $\int \cos^3 x\, dx$
34. $\int \sin^4 x\, dx$
35. $\int_0^1 x^4 e^x\, dx$
36. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\, dx$
37. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\, dx$
38. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\, dx$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

39. وفقًا للتمارين 38–36 والتكاملات المشابهة، خمّن صيغة لـ $\int_0^{\pi/2} \sin^m x\, dx$. (ملحوظة: ستحتاج إلى صيغ عديدة لـ m الفردية ولـ m الزوجية.)

40. خمّن صيغة لـ $\int_0^{\pi/2} \cos^m x\, dx$.

في التمارين 50–41، جـــد قيمة التكامل باستخدام التكامل بالأجزاء والتعويض. (كما أوصينا في النص، "قم بتجربة شيء ما!")

41. $\int \cos^{-1} x\, dx$

42. $\int \tan^{-1} x\, dx$

43. $\int \sin \sqrt{x}\, dx$

44. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

45. $\int \sin(\ln x)\, dx$

46. $\int x \ln(4 + x^2)\, dx$

47. $\int e^{6x} \sin(e^{2x})\, dx$

48. $\int \cos \sqrt[3]{x}\, dx$

49. $\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}} dx$

50. $\int_0^1 x \tan^{-1} x\, dx$

51. كم مرّة سيكون هناك حاجة إلى إجراء تكامل بالأجزاء لإيجاد قيمة $\int x^n \sin x\, dx$ (حيث n هي عدد صحيح موجب)؟

52. كم عدد المرات التي ستكون هناك حاجة إلى إجراء تكامل بالأجزاء لإيجاد قيمة $\int x^n \ln x\, dx$ (حيث n هي عدد صحيح موجب)؟

في التمرينين 53 و 54، اذكر اسم الطريقة من تحديد ما إذا كان يمكن استخدام التعويض أو التكامل بالأجزاء لإيجاد قيمة التكامل.

53. (a) $\int x \sin x^2\, dx$ (b) $\int x^2 \sin x\, dx$

(c) $\int x \ln x\, dx$ (d) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

54. (a) $\int x^3 e^{4x}\, dx$ (b) $\int x^3 e^{x^4}\, dx$

(c) $\int x^{-2} e^{4/x}\, dx$ (d) $\int x^2 e^{-4x}\, dx$

55. يروي فيلم *Stand and Deliver* قصة معلم الرياضيات جايمي إسكالانتي، الذي طوّر برنامج بارز للمستوى المتقدم من حساب التفاضل والتكامل في داخل مدينة لوس أنجلوس. في أحد المشاهد، يوضّح إسكالانتي لطالب كيفية إيجاد قيمة التكامل $\int x^2 \sin x\, dx$. ويقوم بتكوين مخطط كالتالي:

	$\sin x$	
x^2	$-\cos x$	+
$2x$	$-\sin x$	−
2	$\cos x$	+

عند ضرب كل صف بكامله، تكون الدّالة الأصلية $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$. اشرح كيفية الحصول على نتائج كل عمود وسبب نجاح الطريقة في هذه المسألة.

في التمارين 61–56، استخدم الطريقة الموجودة بالتمرين 55 لإيجاد قيمة التكامل.

56. $\int x^4 \sin x\, dx$

57. $\int x^4 \cos x\, dx$

58. $\int x^4 e^x\, dx$

59. $\int x^4 e^{2x} dx$

60. $\int x^5 \cos 2x\, dx$

61. $\int x^3 e^{-3x} dx$

62. يجب أن تدرك أنّ الطريقة الموجودة في التمرين 55 لا تنجح دائمًا، خاصة إذا كان لكل من عمودي المشتقّة والدالة الأصلية قوّة x. وضّح أنّ الطريقة لا تنجح على $\int x^2 \ln x\, dx$.

63. أثبت أنّ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\, dx = 0$ و $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\, dx = 0$ للأعداد الصحيحة الموجبة $m \neq n$.

64. أثبت أنّ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\, dx = 0$ للأعداد الصحيحة الموجبة m و n و $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\, dx = \pi$، لأي عدد صحيح موجب n.

65. جـــد جميع الأخطاء في محاولة الإثبات (غير الصحيحة) التالية $0 = -1$. ابدأ بـ $\int e^x e^{-x} dx$ ثم طبق التكامل بالأجزاء مع $u = e^x$ و $dv = e^{-x} dx$. يُعطي هذا $\int e^x e^{-x} dx = -1 + \int e^x e^{-x} dx$. ثم اقسم على $\int e^x e^{-x} dx$ للحصول على $0 = -1$.

66. جـــد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x\sqrt{\sin x}$ و $y = 0$ $(0 \le x \le \pi)$ حول المحور x.

67. جـــد قيمة $\int e^x \left(\ln x + \frac{1}{x}\right) dx$ باستخدام التكامل بالأجزاء على $\int e^x \ln x\, dx$.

68. عمّم الطريقة المستخدمة في التمرين 67 على أي تكامل من الصيغة $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx$. أثبت نتيجتك بدون استخدام التكامل بالأجزاء.

69. على فرض أنّ f و g هي دوال تحقق $f(0) = g(0) = 0$، $f(1) = g(1) = 0$ ومشتقات من الرتبة الثانية متصلة f'' و g''. استخدم التكامل بالأجزاء مرتين لتوضيح أنّ

$$\int_0^1 f''(x)g(x)\, dx = \int_0^1 f(x)g''(x)\, dx$$

70. على فرض أنّ f هي دالةلها مشتقّة متصلة من الرتبة الثانية. أثبت أنّ $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(x)(b-x)\, dx$. استخدم هذه النتيجة لتثبت أنّ $|\sin b - b| = |\int_a^b (b-x)\sin x\, dx|$ واستنتج أنّ الخطأ في التقريب $\sin x \approx x$ هو $\frac{1}{2}x^2$ على أقصى تقدير.

تمارين استكشافية

1. يمكن استخدام التكامل بالأجزاء لحساب معاملات دالة مهمة يطلق عليها اسم متسلسلة فورييه. هنا، ستكتشف ما وراء بعض من هذه الجلبة. ابدأ بحساب $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx$ لعدد صحيح موجب غير محدّد n. اكتب القيم المحدّدة لـ a_1، a_2، a_3 و a_4 ثم كوّن الدالة

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \sin 4x$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

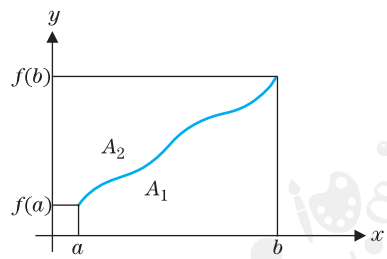
قارن التمثيل البياني لـ $y = x$ و $y = f(x)$ على الفترة $[-\pi, \pi]$. من كتابة a_1 من خلال a_4، ينبغي أن تلاحظ نمطًا جيدًا. استخدمه لتكوّن الدالة.

$$g(x) = f(x) + a_5 \sin 5x + a_6 \sin 6x + a_7 \sin 7x + a_8 \sin 8x$$

قارن التمثيل البياني لـ $y = x$ و $y = g(x)$ على الفترة $[-\pi, \pi]$.
هل من المدهش أنّه يمكنك جمع دوال sine مع بعضها البعض والحصول على ما يشابه خط مستقيم؟ يتضح أنّه يمكن استخدام متسلسلة فورييه لإيجاد تقريبين cosine و sine لأي دالة متصلة على فترة مغلقة.

2. فرضًا أنّ f هي دالة متزايدة متصلة على $[a, b]$ مع $0 \le a < b$ و $f(x) \ge 0$. لتكن A_1 هي المساحة تحت $y = f(x)$ من $x = a$ إلى $x = b$ ولتكن A_2 هي المساحة على يسار $y = f(x)$ من $f(a)$ إلى $f(b)$. أثبت أنّ $A_1 + A_2 = bf(b) - af(a)$

و $\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy$. استخدم هذه النتيجة لإيجاد قيمة $\int_0^{\pi/4} \tan^{-1} x\,dx$.



برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 7-3

طرائق تكامل الدوال المثلثية

تكاملات تتضمّن قوى الدوال المثلثية

غالبًا ما يتضمّن إيجاد قيمة تكامل يحتوي مكامله على قوى دالة مثلثية واحدة أو أكثر إجراء تعويض ذكي. تُعدّ هذه التكاملات شائعةً بشكل كافٍ لتقديمها هنا كمجموعة.

أولًا نضع في الاعتبار التكاملات بالصيغة

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

حيث يكون m و n عددين صحيحين موجبين.

الحالة 1: m أو n هي عدد صحيح فردي موجب

إذا كان m عددًا فرديًا، إعزل أولاً واحد من عوامل $\sin x$. (ستحتاج ذلك من أجل du.) ثم إستبدل أي من عوامل $\sin^2 x$ باستخدام $1 - \cos^2 x$ وقم بإجراء التعويض $u = \cos x$. وبالمثل، إذا كان n عددًا فرديًا، قم أولًا بعزل واحد من عوامل $\cos x$. (ستحتاج ذلك من أجل du.) ثم استبدل أي من عوامل $\cos^2 x$ باستخدام $1 - \sin^2 x$ وقم بإجراء التعويض $u = \sin x$.

نوضّح هذا للحالة التي يكون فيها m عدد فردي في المثال 3.1.

المثال 3.1 تعويض نوعي

جـــد قيمة $\int \cos^4 x \sin x \, dx$.

الحل بما أنّه لا يمكنك إيجاد قيمة هذا التكامل كما هو، يجب إجراء تعويض. (إرشاد: ابحث عن حدود تكون مشتقات لحدود أخرى). هنا، لنأخذ $u = \cos x$. فتكون $du = -\sin x \, dx$. يعطينا

$$\int \cos^4 x \sin x \, dx = -\int \underbrace{\cos^4 x}_{u^4} \underbrace{(-\sin x) \, dx}_{du} = -\int u^4 \, du$$

$$= -\frac{u^5}{5} + c = -\frac{\cos^5 x}{5} + c \qquad \text{بما أن } u = \cos x$$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بينما لم يكن هذا المثال الأول تحديًا على وجه الخصوص، فسوف يعطيك فكرة عن كيفية تعاملك مع مثال 3.2.

المثال 3.2 مكامل مع قوّة فرديّة لـ Sine

جـــد قيمة $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx$.

الحل هنا، لنأخذ $u = \cos x$. فتكون $du = -\sin x\, dx$ بحيث أنّ:

$$\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx = \int \cos^4 x \sin^2 x \sin x\, dx = -\int \cos^4 x \sin^2 x(-\sin x)\, dx$$

$$= -\int \underbrace{\cos^4 x(1-\cos^2 x)}_{u^4(1-u^2)} \underbrace{(-\sin x)\, dx}_{du} = -\int u^4(1-u^2)\, du$$

بما أن $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$،
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$= -\int (u^4 - u^6)\, du = -\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\right) + c$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

بما أن $u = \cos x$

يمكن تطبيق الأفكار المستخدمة في المثال 3.2 على أي تكامل بالصيغة المحدّدة.

المثال 3.3 مكامل مع قوّة فرديّة لـ Cosine

جـــد قيمة $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x\, dx$.

الحل لاحظ أنّه يمكننا إعادة كتابة ذلك في صورة

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x\, dx = \int \sqrt{\sin x} \cos^4 x \cos x\, dx = \int \sqrt{\sin x}\,(1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx$$

بتعويض $u = \sin x$. فتكون $du = \cos x\, dx$. لدينا

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x\, dx = \int \underbrace{\sqrt{\sin x}\,(1-\sin^2 x)^2}_{\sqrt{u}(1-u^2)^2} \underbrace{\cos x\, dx}_{du}$$

$$= \int \sqrt{u}(1-u^2)^2\, du = \int u^{1/2}(1-2u^2+u^4)\, du$$

$$= \int (u^{1/2} - 2u^{5/2} + u^{9/2})\, du$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} - 2\left(\frac{2}{7}\right)u^{7/2} + \frac{2}{11}u^{11/2} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sin^{3/2} x - \frac{4}{7}\sin^{7/2} x + \frac{2}{11}\sin^{11/2} x + c.$$

بما أن $u = \sin x$

بالنظر إلى أبعد من تفاصيل عملية الحساب الموجودة هنا، يجب أن تلاحظ النقطة الأساسية: أنّه يتم حساب جميع التكاملات من هذه الصيغة بالطريقة نفسها في الأساس.

الحالة 2: m و n عددان صحيحان زوجيان موجبان

في هذه الحالة، يمكننا استخدام صيغ نصف الزاوية لـ sine و cosine (موضّحة في الهامش) لاختصار الأسس في المكامل.

نوضّح هذه الحالة في المثال 3.4.

ملاحظات

صيغ نصف الزاوية

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المثال 3.4 تكامل الدوال المثلثية لـ Sine

جـــد قيمة $\int \sin^2 x\,dx$.

الحل باستخدام صيغة نصف الزاوية، يمكننا إعادة كتابة التكامل في صورة

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx$$

يمكننا إيجاد قيمة هذا التكامل الأخير باستخدام التعويض $u = 2x$. فتكون $du = 2\,dx$. يعطينا ذلك

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int \underbrace{(1-\cos 2x)}_{1-\cos u}\underbrace{2\,dx}_{du} = \frac{1}{4}\int (1-\cos u)\,du$$

$$= \frac{1}{4}(u-\sin u)+c = \frac{1}{4}(2x-\sin 2x)+c. \qquad \text{بما أن } u = 2x$$

مع بعض التكاملات، تحتاج الى تطبيق صيغ نصف الزاوية عدة مرات، كما في المثال 3.5.

المثال 3.5 تكامل قوّة زوجيّة لـ Cosine

جـــد قيمة $\int \cos^4 x\,dx$.

الحل باستخدام صيغة نصف الزاوية لـ cosine، لدينا

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$

باستخدام صيغة نصف الزاوية مرة أخرى، على الحد الأخير في المكامل، نحصل على

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int \left[1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]dx$$

$$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$$

حيث نترك تفاصيل التكامل الأخير كتمرين.

إنّ هدفنا التالي يقوم على وضع استراتيجية لإيجاد قيمة التكاملات بالصيغة

$$\int \tan^m x \sec^n x\,dx$$

حيث يكون m و n عددين صحيحين.

الحالة 1: m هي عدد صحيح فردي موجب

إعزل أولاً واحد من عوامل $\sec x \tan x$. (ستحتاج هذا من أجل du.) ثم إستبدل أي من عوامل $\tan^2 x$ باستخدام $\sec^2 x - 1$ وقم بإجراء التعويض $u = \sec x$.

نوضّح ذلك في المثال 3.6.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المثال 3.6 تكامل قوّة فرديّة لدالة الظل

جـــد قيمة $\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$.

الحل عند البحث عن حدود هي مشتقات لحدود أخرى، نعيد كتابة التكامل في صورة

$$\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x\, (\sec x \tan x)\, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x\, (\sec x \tan x)\, dx$$

حيث استخدمنا متطابقة فيثاغورس

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

يجب أن تلاحظ التعويض الآن. لنأخذ $u = \sec x$. فتكون $du = \sec x \tan x\, dx$ وبالتالي،

$$\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx = \int \underbrace{(\sec^2 x - 1) \sec^2 x}_{(u^2-1)u^2} \underbrace{(\sec x \tan x)\, dx}_{du}$$

$$= \int (u^2 - 1)u^2 du = \int (u^4 - u^2)\, du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + c$$ بما أن $u = \sec x$

الحالة 2: n هي عدد صحيح زوجي موجب

أولًا، إعزل واحد من عوامل $\sec^2 x$. (ستحتاج هذا من أجل du). ثم إستبدل أي عوامل متبقية $\sec^2 x$ باستخدام $1 + \tan^2 x$ وقم بإجراء التعويض $u = \tan x$.
نوضّح ذلك في المثال 3.7.

المثال 3.7 تكامل قوّة زوجيّة للقاطع

جـــد قيمة $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx$.

الحل حيث $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$، نعيد كتابة التكامل في صورة

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx = \int \tan^2 x(1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx$$

نفترض الآن أنّ $u = \tan x$. فتكون $du = \sec^2 x\, dx$ و

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \int \underbrace{\tan^2 x(1 + \tan^2 x)}_{u^2(1+u^2)} \underbrace{\sec^2 x\, dx}_{du}$$

$$= \int u^2(1 + u^2)\, du = \int (u^2 + u^4)\, du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c$$ بما أن $u = \tan x$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الحالة 3: m هو عدد صحيح زوجي موجب و n هو عدد صحيح فردي موجب

استبدل أيًا من عوامل $\tan^2 x$ بـ $\sec^2 x - 1$ ثم استخدم صيغة اختزال خاصة (معطاة في التمرين) لإيجاد قيمة التكاملات من الصيغة $\int \sec^n x\, dx$. ستتم تغطية هذه الحالة المعقّدة بإيجاز في التمارين. يعتمد الجزء الأكبر من هذا على المثال 3.8.

المثال 3.8 تكامل غير عادي

جـــد قيمة التكامل $\int \sec x\, dx$.

الحل يعتمد إيجاد دالة أصلية هنا على رؤية غير عادية. لاحظ أنّه إذا ضربنا المكامل بالكسر $\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$ (وهو بالطبع مساويًا لـ 1)، نحصل على

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right) dx$$
$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

انظر إلى القيمة في البسط هي تمامًا مشتقّة المقام. أي إنّ،

$$\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x) = \sec x \tan x + \sec^2 x$$

لنأخذ $u = \sec x + \tan x$ يعطينا

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$
$$= \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + c$$
$$= \ln|\sec x + \tan x| + c \quad \text{بما أن } u = \sec x + \tan x$$

التعويض مع الدوال المثلثية

إذا كان تكامل يحتوي على حد بالصيغة $\sqrt{a^2 - x^2}$، $\sqrt{a^2 + x^2}$ أو $\sqrt{x^2 - a^2}$، لبعض $a > 0$. غالبًا ما يمكنك إيجاد قيمة التكامل بتعويض يتضمّن دالة مثلثية (ومن هنا جاءت تسمية التعويض مع الدوال المثلثية).

أولًا، على فرض أنّ مكامل يحتوي على حد بالصيغة $\sqrt{a^2 - x^2}$، لبعض $a > 0$. لتكن $x = a \sin\theta$، حيث $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$، يمكننا حذف الجذر التربيعي، كالتالي:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a\sin\theta)^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}$$
$$= a\sqrt{1 - \sin^2\theta} = a\sqrt{\cos^2\theta} = a\cos\theta$$

بما أن لـ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$، $\cos\theta \ge 0$. يُعدّ المثال 3.9 نموذجيًا لكيفية استخدام هذه التعويضات.

ملاحظة

يمكن كذلك تبسيط الحدود بالصيغة $\sqrt{a^2 - x^2}$ عن طريق التعويض $x = a\cos\theta$، باستخدام قيد مختلف لـ θ.

المثال 3.9 تكامل يتضمّن $\sqrt{a^2 - x^2}$

جـــد قيمة $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4 - x^2}}\, dx$.

الحل يجب عليك دائمًا التفكير أولًا إذا بالإمكان إجراء تكامل مباشرة بالتعويض أو بالأجزاء. بما أنّ أيًا من هذه الطرائق لا تقدّم مساعدة هنا، نأخذ التعويض مع الدوال المثلثية. تذكّر أنّ الهدف

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المباشر هنا هو حذف الجذر التربيعي. إنّ التعويض الذي سيحقق هذا الأمر هو

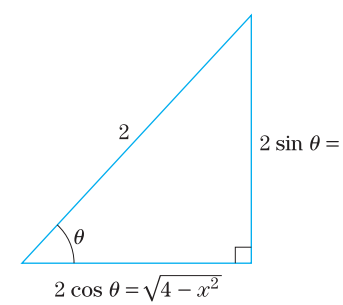
$$x = 2\sin\theta \qquad \text{لكل} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

(لماذا نحتاج إلى متباينات تامة هنا؟) يعطينا ذلك

$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

وبالتالي،

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{(2\sin\theta)^2\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}}\,2\cos\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\,d\theta \\
&= \int \frac{\cos\theta}{(2\sin^2\theta)\,2\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta \\
&= \int \frac{\cos\theta}{4\sin^2\theta\cos\theta}\,d\theta \qquad \text{بما أن } 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \csc^2\theta\,d\theta = -\frac{1}{4}\cot\theta + c \qquad \text{بما أن } \frac{1}{\sin^2\theta} = \csc^2\theta
\end{aligned}$$



الشكل 7.1

تُعدّ المسألة الوحيدة المتبقية هنا كتابة الدالة الأصلية بدلالة المتغير θ. عند التحويل مجددًا إلى المتغيّر الأصلي $x = 2\sin\theta$، نحتّك على رسم مخطط، كما في الشكل 7.1. بما أنّ التعويض كان $x = 2\sin\theta$. لدينا $\sin\theta = \frac{x}{2} = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ ولهذا نقوم بتسمية الوتر 2. $2\sin\theta$ هو الضلع المقابل للزاوية θ. وفقًا لنظرية فيثاغورس، يكونّ الضلع المجاور $\sqrt{4-x^2}$، كما هو مشار إليه. لذا، لدينا

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

ومنه

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{1}{4}\cot\theta + c = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$$

بعد ذلك، على فرض أنّ مكامل يحتوي على حد بالصيغة $\sqrt{a^2+x^2}$، لبعض $a > 0$. بأخذ $x = a\tan\theta$، حيث $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$، نحذف الجذر التربيعي، كالتالي:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2+x^2} &= \sqrt{a^2+(a\tan\theta)^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta} \\
&= a\sqrt{1+\tan^2\theta} = a\sqrt{\sec^2\theta} = a\sec\theta
\end{aligned}$$

بما أنّ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$، $\sec\theta > 0$. يتسم المثال 3.10 بكونه نموذجيًا لكيفية استخدام هذه التعويضات.

المثال 3.10 تكامل يتضمّن $\sqrt{a^2+x^2}$

جـــد قيمة التكامل $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الحل يمكنك حذف الجذر التربيعي بأخذ أنّ $x = 3\tan\theta$. لكل $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. يعطينا ذلك $dx = 3\sec^2\theta d\theta$. بحيث تكون

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{9+(3\tan\theta)^2}}\,3\sec^2\,d\theta \\
&= \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9+9\tan^2\theta}}\,d\theta \\
&= \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sqrt{1+\tan^2\theta}}\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta \qquad \text{بما أن } 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta \\
&= \int \sec\theta\,d\theta \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c
\end{aligned}$$

من المثال 3.8. لم ننته هنا بعد نظرًا إلى أنّه لا يزال علينا التعبير عن التكامل بدلالة المتغيّر الأصلي x. لاحظ أنّه لدينا $x = 3\tan\theta$. بحيث تكون $\tan\theta = \frac{x}{3}$. يتبقى فقط الحل لإيجاد قيمة $\sec\theta$. على الرغم من أنّه يمكنك إجراء ذلك باستخدام مثلث، كما في المثال 3.9. فإنّ الطريقة الأبسط لهذا الإجراء هي التعرّف على ذلك لـ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$$\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}$$

ويترك هذا الأمر لنا

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx &= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c \\
&= \ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} + \frac{x}{3}\right| + c
\end{aligned}$$

في النهاية،على فرض أن مكامل يحتوي على حد بالصيغة $\sqrt{x^2-a^2}$. لبعض $a > 0$. بأخذ $x = a\sec\theta$. حيث $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. نحذف الجذر التربيعي، كما يأتي:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2-a^2} &= \sqrt{(a\sec\theta)^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} \\
&= a\sqrt{\sec^2\theta - 1} = a\sqrt{\tan^2\theta} = a\,|\tan\theta|
\end{aligned}$$

لاحظ الحاجة إلى القيم المطلقة على فرض أن مكامل يحتوي، حيث $\tan\theta$ يمكن أن يكون موجبًا وسالبًا على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. يتسم المثال 3.11 بكونه نموذجيًا لكيفية استخدام هذه التعويضات.

المثال 3.11 تكامل يتضمّن $\sqrt{x^2-a^2}$

جـــد قيمة التكامل $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx$، لكل $x \geq 5$.

الحل هنا، لتكن أنّ $x = 5\sec\theta$. لكل $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. حيث نختار النصف الأول من المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. بحيث تكون $x = 5\sec\theta > 5$. (إذا كان لدينا $x < -5$. فسوف نختار

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

$\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ يعطينا ذلك $dx = 5\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ ويصبح التكامل عندئذ:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\, dx &= \int \frac{\sqrt{(5\sec\theta)^2-25}}{5\sec\theta}\,(5\sec\theta\tan\theta)\, d\theta \\
&= \int \sqrt{25\sec^2\theta - 25}\,\tan\theta\, d\theta \\
&= \int 5\sqrt{\sec^2\theta - 1}\,\tan\theta\, d\theta \\
&= 5\int \tan^2\theta\, d\theta \qquad \text{بما أن } \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta \\
&= 5\int (\sec^2\theta - 1)\, d\theta \\
&= 5(\tan\theta - \theta) + c
\end{aligned}$$

في النهاية، لاحظ بما أنّ $x = 5\sec\theta$. لكل $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$. لدينا

$$\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2 - 1} = \frac{1}{5}\sqrt{x^2-25}$$

و $\theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)$. لدينا الآن

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\, dx &= 5(\tan\theta - \theta) + c \\
&= \sqrt{x^2-25} - 5\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + c
\end{aligned}$$

ستجد عددًا من التكاملات الإضافية التي تتطلب التعويض مع الدوال المثلثية في التمارين. تتمثّل الفكرة الرئيسية هنا بملاحظة أنّه يمكنك حذف حدود معيّنة للجذر تربيعي في مكامل باستخدام تعويض مع الدوال المثلثية يتم اختياره بعناية.

نلخّص التعويضات مع الدوال المثلثية التي تم عرضها هنا في الجدول التالي.

التعبير	التعويض مع الدوال المثلثية	الفترة	المتطابقة
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin\theta$	$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$	$1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan\theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta$	$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

التمارين 7.3

تمارين كتابية

1. على فرض أنّ أحد الأصدقاء أثناء دراسة حساب التفاضل والتكامل أخبرك انّه يوجد في هذا الدرس قواعد عديدة أكثر من القدرة على الحفظ. ساعد صديقك على إيضاح أنّ كل قاعدة تشير إلى الحالة التي ستنجح فيها تعويضات معيّنة. وبالتالي، ينجح تعويض $u(x)$ إذا كان التعبير $u'(x)$ يظهر في المكامل ويصبح التكامل الناتج أسهل في إجراء التكامل له. لكل من القواعد المغطاة في النص، حدّد $u'(x)$ ووضّح سبب أنّ n يجب أن يكون عددًا فرديًا (أو أيما تنص عليه القاعدة) لكي يكون المكامل المتبقي مقبولاً. بدون حفظ القواعد، يمكنك تذكّر عدد صغير من التعويضات المقبولة وترى أيًا منها تناسب مسألة معطاة.

2. في النص، نقترح أنّه عندما يحتوي المكامل على حد بالصيغة $\sqrt{4-x^2}$، يمكنك محاولة إجراء التعويض مع الدوال المثلثية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

$x = 2\sin\theta$. يجب أن نعترف الآن بأنّ هذا لا ينجح دائمًا. بعد إجراء تعويض، كيف يسعك معرفة ما إذا كان التعويض قد نجح أم لا؟

في التمارين 1–44، جـــد قيمة التكاملات.

1. $\int \cos x \sin^4 x\, dx$
2. $\int \cos^3 x \sin^4 x\, dx$
3. $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \sin^3 2x\, dx$
4. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 3x \sin^3 3x\, dx$
5. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x\, dx$
6. $\int_{-\pi/2}^{0} \cos^3 x \sin x\, dx$
7. $\int \cos^2 (x+1)\, dx$
8. $\int \sin^4 (x-3)\, dx$
9. $\int \tan x \sec^3 x\, dx$
10. $\int \cot x \csc^4 x\, dx$
11. $\int x \tan^3 (x^2+1) \sec (x^2+1)\, dx$
12. $\int \tan (2x+1) \sec^3 (2x+1)\, dx$
13. $\int \cot^2 x \csc^4 x\, dx$
14. $\int \cot^2 x \csc^2 x\, dx$
15. $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \sec^4 x\, dx$
16. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^4 x \sec^2 x\, dx$
17. $\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx$
18. $\int (\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx$
19. $\int_{-\pi/3}^{0} \sqrt{\cos x} \sin^3 x\, dx$
20. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^2 x \csc^4 x\, dx$
21. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\, dx$
22. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\, dx$
23. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\, dx$
24. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$
25. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$
26. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$
27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\, dx$
28. $\int x^3\sqrt{x^2-1}\, dx$
29. $\int \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$
30. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$
31. $\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\, dx$
32. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\, dx$
33. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\, dx$
34. $\int x^3\sqrt{8+x^2}\, dx$
35. $\int \sqrt{16+x^2}\, dx$
36. $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$
37. $\int_0^1 x\sqrt{x^2+8}\, dx$
38. $\int_0^2 x^2\sqrt{x^2+9}\, dx$
39. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$
40. $\int \frac{x+1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$
41. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x}}\, dx$
42. $\int \frac{2}{\sqrt{x^2-6x}}\, dx$
43. $\int \frac{x}{\sqrt{10+2x+x^2}}\, dx$
44. $\int \frac{2}{\sqrt{4x-x^2}}\, dx$

في التمارين 45 و 46، جـــد قيمة التكامل باستخدام كل من التعويضان $u = \tan x$ و $u = \sec x$ وقارن النتائج.

45. $\int \tan x \sec^4 x\, dx$
46. $\int \tan^3 x \sec^4 x\, dx$

47. (a) أثبت أنّه لأيّ عدد صحيح $n > 1$، توجد لدينا صيغة الاختزال

$$\int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\, dx$$

جـــد قيمة (b) $\int \sec^3 x\, dx$، (c) $\int \sec^4 x\, dx$ و (d) $\int \sec^5 x\, dx$.

48. تعطى مساحة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالتكامل $\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$. احسب هذا التكامل.

49. أثبت أنّ $\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$ وجـــد قيمة $\int \csc^3 x\, dx$.

50. أثبت أنّ $\int \frac{1}{\cos x - 1}\, dx = \csc x + \cot x + c$ و $\int \frac{1}{\cos x + 1}\, dx = \csc x - \cot x + c$.

51. جـــد قيم الدوال الأصلية في الأمثلة 3.2، 3.3، 3.5، 3.6 و 3.7 باستخدام CAS الخاص بك. وفقًا لهذه الأمثلة، خمّن ما إذا كان CAS الخاص بك يستخدم طرائق التكامل نفسها التي نجريها أم لا. في الحالات التي يعطيك فيها CAS الخاص بك دالة أصلية عما نعطيه، أعط رأيك بأي دالة أصلية تبدو أبسط.

52. (a) يعطي CAS نتيجة $-\frac{1}{7}\sin^2 x\cos^5 x - \frac{2}{35}\cos^5 x$ كدالة أصلية في المثال 3.2. جـــد c بحيث يساوي هذا الدالة الأصلية $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + c$.

(b) يعطي CAS نتيج $-\frac{2}{15}\tan x - \frac{1}{15}\sec^2 x\tan x + \frac{1}{5}\sec^4 x\tan x$ كدالة أصلية في المثال 3.7. جـــد c بحيث يساوي هذا الدالة الأصلية الخاص بنا لـ $\frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c$.

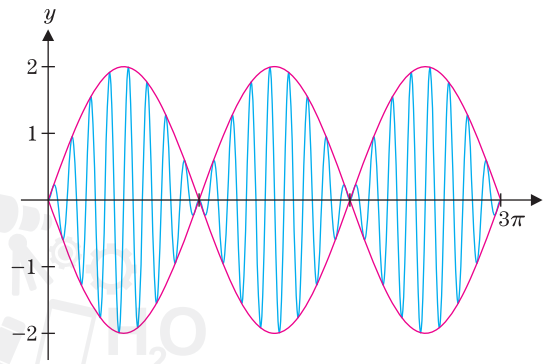
53. في دائرة المكيف، يكون للتردّد صيغة $i(t) = I\cos(\omega t)$ للعددين الثابتين I و ω. يتم تعريف الطاقة في صورة Ri^2 لعدد ثابت R. جـــد القيمة المتوسطة للطاقة بإجراء تكامل على الفترة $[0, 2\pi/\omega]$.

تمارين استكشافية

1. في الدرس 6.2، طُلب منك إيضاح أنّه للعددين الصحيحين الموجبين m و n حيث $m \neq n$، $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\, dx = 0$ و $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\, dx = 0$. وأيضًا، فإنّ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\, dx = \pi$. في النهاية، $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\, dx = 0$، لأي عددين صحيحين موجبين m و n. سنستخدم هذه الصيغ لشرح الطريقة التي يمكن من خلالها ضبط جهاز راديو على محطة AM.
يرسل جهاز راديو تعديل السعة الموجة (أو AM) إشارة (مثال: موسيقى) تُعدّل التردّد الخاص بمقدّم الخدمة. على سبيل المثال، إذا كانت الإشارة $2\sin t$ والتردد الخاص بمقدّم الخدمة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

16. إذًا يرسل جهاز الراديو الإشارة المعدّلة $2\sin t\sin 16t$. يوضّح الشكل التمثيلين البيانيين $y = 2\sin t$، $y = -2\sin t$ و $y = 2\sin t\sin 16t$.



يتذبذب التمثيل البياني $y = 2\sin t\sin 16t$ بسرعة مماثلة لـ $\sin 16t$ الخاصة بمقدم الخدمة، ولكن سعة الموجة تتغيّر بين $2\sin t$ و $-2\sin t$ (ومن هنا جاء المصطلح تعديل سعة الموجة). إنّ المسألة الخاصة بجهاز الراديو هي ضبط التردّد 16 واستعادة الإشارة $2\sin t$. تكمن الصعوبة في أنّ المحطات الإذاعية الأخرى تبثّ في زمن واحد. يتلقى جهاز الراديو جميع الإشارات مختلطة مع بعضها البعض. لرؤية الكيفية التي يعمل بها هذا، على فرض أنّ محطة ثانية تبثّ الإشارة $3\sin t$ بالتردّد 32. تكون الإشارة المجمّعة التي يتلقّاها جهاز الراديو $2\sin t\sin 16t + 3\sin t\sin 32t$.

سنقوم بتحليل هذه الإشارة. وتتمثّل الخطوة الأولى بإعادة كتابة الإشارة باستخدام المتطابقة

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\cos(B-A) - \frac{1}{2}\cos(B+A)$$

إذًا تساوي الإشارة

$$f(t) = \cos 15t - \cos 17t + \frac{3}{2}\cos 31t - \frac{3}{2}\cos 33t$$

إذا كان جهاز الراديو "يدرك" أنّ الإشارة بالصيغة $c\sin t$، لبعض الأعداد الثابتة c، يمكنه تحديد العدد الثابت c بالتردّد 16 بحساب التكامل $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 15t\,dt$ والضرب في $2/\pi$. أثبت أنّ $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 15t\,dt = \pi$، بحيث يكون العدد الثابت الصحيح $c = \pi(2/\pi) = 2$. إذًا تكون الإشارة $2\sin t$. لاستعادة الإشارة المرسلة من قِبَل المحطة الثانية، احتسب $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 31t\,dt$ واضرب في $2/\pi$. أثبت أنّك قمت باستعادة إشارة $3\sin t$ صحيحة وكاملة.

.2 في هذا التمرين، نشتق نتيجة مهمة يطلق عليها اسم **ناتج ضرب واليس**. عرّف التكامل $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ لعدد صحيح موجب n. (a) أثبت أنّ $I_n = \frac{n}{n-1} I_{n-2}$. (b) أثبت أنّ $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2^2 4^2 \cdots (2n)^2 2}{3^2 5^2 \cdots (2n-1)^2 (2n+1)\pi}$. (c) بما أنّ $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$، استنتج $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 4^2 \cdots (2n)^2}{3^2 5^2 \cdots (2n-1)^2 (2n+1)}$.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 7-4

تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية

في هذا الدرس، نقدّم طريقة لإعادة صياغة بعض الدوال النسبية يمكن أن تكون مفيدة للغاية في التكامل بالإضافة إلى تطبيقات أخرى. ونبدأ بنظرة بسيطة. لاحظ أنّ

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-5} = \frac{3(x-5)-2(x+2)}{(x+2)(x-5)} = \frac{x-19}{x^2-3x-10} \qquad (4.1)$$

لذلك، على فرض أنّك أردت إيجاد قيمة تكامل الدالة على الطرف الأيمن من (4.1). في حين أنّه ليس من الواضح كيفية إيجاد قيمة هذا التكامل، من السهل إيجاد قيمة تكامل الدالة (مكافئة) على الطرف الأيسر في (4.1). من (4.1)، لدينا

$$\int \frac{x-19}{x^2-3x-10}\,dx = \int \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-5}\right)dx = 3\ln|x+2| - 2\ln|x-5| + c$$

المكامل، $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-5}$

يسمّى **تفكيك الكسور الجزئية** للمكامل الأول. وعموماً، إذا كانت العوامل الثلاثة $a_1x + b_1$، $a_2x + b_2$ و $a_3x + b_3$ جميعها واضحة (أي، لا يُعدّ أي منها مضاعف عدد ثابت للآخر)، إذًا يمكننا أن نكتب

$$\boxed{\frac{a_1x+b_1}{(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)} = \frac{A}{a_2x+b_2} + \frac{B}{a_3x+b_3}}$$

وذلك لاختيار العددين الثابتين A و B وتحديدهما. لاحظ أنّه إذا أردت إيجاد تكامل هذا التعبير، سيكون من السهولة للغاية إيجاد تكامل الكسور الجزئية على الطرف الأيمن.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المثال 4.1 الكسور الجزئية: العوامل الخطية متمايزة

جـــد قيمة $\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx$.

الحل أولًا، لاحظ أنّه لا يمكنك إيجاد قيمة هذا كما هو عليه وكل الطرائق السابقة التي استخدمناها لا تساعد. (فكِّر في كل واحدة من تلك لهذه المسألة). ومع ذلك، يمكننا إجراء تفكيك للكسور الجزئية، كما يأتي:

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

بضرب كلا طرفي هذه المعادلة في المقام المشترك $(x-1)(x+2)$، نحصل على

$$1=A(x+2)+B(x-1) \tag{4.2}$$

نود حل هذه المعادلة لأجل A و B. الفكرة الأساسية هي أن تحقق هذه المعادلة كل قيم x. وخصوصاً لـ $x=1$. لاحظ أنّه من (4.2)، نحصل على

$$1=A(1+2)+B(1-1)=3A$$

لذلك $A=\frac{1}{3}$. بالمثل، بأخذ $x=-2$، نحصل على

$$1=A(-2+2)+B(-2-1)=-3B$$

لذلك $B=-\frac{1}{3}$. وبالتالي، نحصل على

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx &= \int \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+2}\right)\right]dx\\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+c\end{aligned}$$

يمكننا إجراء الخطوات نفسها التي قمنا بها في المثال 4.1 كلما كان لتعبير نسبي مقام يتم تحليله إلى n من العوامل الخطية المتمايزة، على النحو التالي. إذا كانت درجة $P(x)<n$ وعوامل (a_ix+b_i)، حيث $i=1,2,\ldots,n$ جميعها متمايزة، إذًا يمكننا كتابة

الكسور الجزئية: العوامل الخطية المتمايزة

$$\boxed{\frac{P(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)}=\frac{c_1}{a_1x+b_1}+\frac{c_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{c_n}{a_nx+b_n}}$$

لأجل بعض الأعداد الثابتة c_1، c_2،....، c_n.

المثال 4.2 الكسور الجزئية: ثلاثة عوامل خطية مختلفة

جـــد قيمة $\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x}\,dx$.

الحل مرة أخرى، لا تساعدنا الطرائق السابقة، ولكن يمكننا إعادة كتابة المكامل باستخدام الكسور الجزئية. لدينا

$$\frac{3x^2-7x-2}{x^3-x}=\frac{3x^2-7x-2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

الضرب في المقام المشترك $x(x-1)(x+1)$، نحصل على

$$3x^2-7x-2=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1) \tag{4.3}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في هذه الحالة، لاحظ أنّه بأخذ $x = 0$، نحصل على

$$-2 = A(-1)(1) = -A$$

لذلك $A = 2$. وبالمثل، بأخذ $x = 1$، نجد أنّ $B = -3$ وبأخذ $x = -1$، نجد أنّ $C = 4$. وبالتالي، لدينا:

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1}\right) dx$$

$$= 2\ln|x| - 3\ln|x-1| + 4\ln|x+1| + c$$

ملحوظة 4.1

إذا كان البسط لتعبير نسبي له الدرجة نفسها أو أعلى من درجة المقام، يجب عليك أولًا إجراء قسمة مطولة وإتباع هذا بتحليل كسور جزئية للكسر (العادي) المتبقي.

المثال 4.3 الكسور الجزئية حيث يتطلب إجراء قسمة مطولة

جـــد التكامل غير المحدود لـ $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}$ باستخدام تفكيك كسور جزئية.

الحل بما أنّ درجة البسط أكبر من درجة المقام، أقسم أولًا:

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^2 - 2x - 8\,\overline{)\,2x^3 - 4x^2 - 15x + 5} \\ \underline{2x^3 - 4x^2 - 16x} \\ x + 5 \end{array}$$

وبالتالي، نحصل على

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8} = 2x + \frac{x+5}{x^2 - 2x - 8}$$

يمكن تفكيك الكسر العادي المتبقي كما يأتي:

$$\frac{x+5}{x^2 - 2x - 8} = \frac{x+5}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

من السهولة إيجاد: $A = \frac{3}{2}$ و $B = -\frac{1}{2}$. (يُترك هذا في شكل تمرين). لدينا الآن

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}\,dx = \int \left[2x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}\right)\right] dx$$

$$= x^2 + \frac{3}{2}\ln|x-4| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + c$$

إذا كان المقام الخاص بتعبير نسبي يحتوي على عوامل خطية مكررة، يكون التفكيك كما يأتي. إذا كانت درجة $P(x)$ أصغر من n، إذًا يمكننا كتابة

الكسور الجزئية:
العوامل الخطية المكررة

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{c_1}{ax+b} + \frac{c_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(ax+b)^n}$$

للأعداد c_1، c_2،.... c_n تحدّد لاحقًا

المثال 4.4 مطابق

المثال 4.4 كسور جزئية تحتوي على عامل خطي مكرر

استخدم تفكيك الكسور الجزئية لإيجاد دالة أصلية لـ

$$f(x) = \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الحل أولًا، لاحظ أنّ هناك عاملًا خطيًا مكررًا في المقام. لدينا

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

بالضرب في المقام المشترك $x(x+1)^2$، نحصل على

$$5x^2+20x+6=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$$

بأخذ $x=0$، نجد أنّ $A=6$. وبالمثل، بأخذ $x=-1$، نجد أنّ $C=9$. لتحديد قيمة B، نعوّض قيمة مناسبة لـ x، مثلًا $x=1$. (للأسف، لاحظ عدم وجود اختيار x من شأنه أن يجعل الحدين اللذين يحتويان على A و C قيمة كليهما صفر، بدون أن يجعل أيضًا الحد الذي يحتوي على B صفرًا). ينبغي عليك إيجاد أنّ $B=-1$. لذا، يوجد لدينا

$$\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx=\int\left[\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\right]dx$$

$$=6\ln|x|-\ln|x+1|-9(x+1)^{-1}+c$$

يمكننا التوسّع في تفكيك الكسور الجزئية إلى تعابير نسبية مقاماتها تحتوي على عوامل تربيعية غير قابلة للاختزال (أي عوامل تربيعية ليست لها تحليل حقيقي إلى العوامل). إذا كانت درجة $P(x)$ أصغر من n (درجة المقام) وكل العوامل في المقام متمايزة، إذًا يمكننا كتابة

الكسور الجزئية:
العوامل التربيعية غير القابلة للاختزال

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\cdots(a_nx^2+b_nx+c_n)}\\&=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}\end{aligned}}\qquad(4.4)$$

فكّر في هذا بدلالة المقامات التربيعية غير القابلة للاختزال في تفكيك كسور جزئية للحصول على بسوط خطّية، في حين أنّ المقامات الخطية لها قيم بسط ثابت. إذا كنت تعتقد أنّ هذا يبدو فوضويًا، فأنت على حق، ولكن فقط في الجبر الأمر فوضوي (ويمكنك دائمًا استخدام CAS للقيام بعملية جبرية لك). ينبغي عليك ملاحظة أنّ الكسور الجزئية على الطرف الأيمن من (4.4) تم تكاملها بسهولة نسبيًا باستخدام التعويض جنبًا إلى جنب مع الإكمال الممكن للمربع.

المثال 4.5 كسور جزئية مع عامل تربيعي

استخدم تفكيك الكسور الجزئية لإيجاد دالة أصلية لـ $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3+x}$.

الحل أولًا، لاحظ أنّ

$$\frac{2x^2-5x+2}{x^3+x}=\frac{2x^2-5x+2}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الضرب في المقام المشترك $x(x^2+1)$ يعطينا

$$\begin{aligned} 2x^2-5x+2 &= A(x^2+1)+(Bx+C)x \\ &= (A+B)x^2+Cx+A \end{aligned}$$

بدلًا من تعويض الأعداد لـ x (لاحظ أنه لا توجد قيم مناسبة لإدخالها، باستثناء $x=0$)،بدلًا من ذلك نطابق المعاملات المشابهه لقوى x:

$$\begin{aligned} 2 &= A+B \\ -5 &= C \\ 2 &= A \end{aligned}$$

ومنه نجد $B=0$ ولذلك،

$$\int \frac{2x^2-5x+2}{x^3+x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2+1}\right)dx = 2\ln|x|-5\tan^{-1}x+c$$

وكثيرًا ما يؤدّي تفكيك الكسور الجزئية التي تتضمن حدود تربيعية غير قابلة للاختزال إلى تعابير تحتاج إلى مزيد من العمل (مثل إكمال المربع) قبل أن نتمكن من إيجاد دالّة أصلية. نوضّح ذلك في المثال 4.6.

المثال 4.6 كسور جزئية مع عامل تربيعي

استخدم تفكيك الكسور الجزئية لإيجاد دالة أصلية لـ

$$f(x)=\frac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)}$$

الحل أولًا، لاحظ أنّ العامل التربيعي في المقام لا يتحلل إلى العوامل ولذلك، التفكيك الصحيح هو

$$\frac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

بالضرب في $(x+2)(x^2+2x+5)$، نحصل على

$$5x^2+6x+2=A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x+2)$$

بمطابقة المعاملات المشابهة لقوى x، نحصل على

$$\begin{aligned} 5 &= A+B \\ 6 &= 2A+2B+C \\ 2 &= 5A+2C \end{aligned}$$

ستحتاج إلى حل هذه بالحذف. ونتركها كتمرين لتثبت أن: $A=2$، $B=3$ و $C=-4$. بالتكامل، لدينا

$$\int \frac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+2}+\frac{3x-4}{x^2+2x+5}\right)dx \qquad (4.5)$$

تكامل الحد الأول ينفّذ بسهولة، ولكن ماذا عن الحد الثاني؟ بما أن المقام لا يتحلل إلى العوامل، لديك عدد قليل جدًا من الخيارات. حاول التعويض في المقام، لتكن $u=x^2+2x+5$،

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لذا $du = (2x+2)\,dx$. لاحظ أنّه يمكننا كتابة تكامل الحد الثاني كما يأتي:

$$\int \frac{3x-4}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{3(x+1)-7}{x^2+2x+5}\,dx = \int \left[\left(\frac{3}{2}\right)\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} - \frac{7}{x^2+2x+5}\right] dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}\,dx - \int \frac{7}{x^2+2x+5}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \int \frac{7}{x^2+2x+5}\,dx. \tag{4.6}$$

بإكمال المربع في مقام التكامل المتبقية، نحصل على

$$\int \frac{7}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{7}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{7}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

(نترك تفاصيل هذا التكامل السابق كتمرين). بالنظر في هذا مع (4.5) و(4.6)، يوجد لدينا الآن

$$\int \frac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)}\,dx = 2\ln|x+2| + \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{7}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

ملحوظة 4.2

تتضمّن معظم Regular CAS أوامر لتفكيك كسور جزئية. ومع ذلك، فإننا ندعوكم إلى العمل على التمارين الموجودة في هذا الدرس يدوياً. بمجرد أن تكون لديك فكرة عن طريقة إجراء هذه التفكيكات، وبكل الوسائل، استخدم CAS الخاص بك للقيام بهذا العمل الكادح لك. حتى ذلك الوقت، تحلّى بالصبر واعمل بدقة يدوياً.

تم استكشاف التعابير النسبية بالعوامل التربيعية المتكررة غير القابلة للاختزال في المقام في التمارين. إنّ الفكرة هذه هي نفسها فكرة التفكيكات السابقة، ولكن العملية الجبرية فيها أكثر فوضوية.

باستخدام هذه التقنيات التي تمت تغطيتها في هذا الدرس، يجب أن تكون قادرًا على تفكيك الكسور الجزئية لدالة نسبية، حيث يمكن دائمًا تحليل كثيري الحدود إلى العوامل خطية وتربيعية، قد تكون بعضها مكررة.

ملخص موجز لطرائق التكامل

الى الآن، نتوقّف لحظة لنلخّص بإيجاز ما تعلّمناه عن طرائق التكامل. في حين يمكنك إيجاد مشتقة لأي دالة يمكنك كتابتها، بالكاد حالفنا الحظ مع التكاملات. لا يمكن إيجاد قيم عدد كبير من التكامل بالضبط، في حين يمكن إيجاد قيم تكامل أخرى فقط بالتعرّف على الطريقة التي قد تؤدي إلى حل. مع أخذ هذه الأمور في الاعتبار، نقدم الآن بعض الإرشادات لإيجاد قيمة التكاملات.

التكامل بالتعويض: $\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$

ما الذي يجب أن تبحث عنه:

1. تركيب الصيغة $f(u(x))$. حيث يحتوي المكامل أيضًا على $u'(x)$ ؛ على سبيل المثال،

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \underbrace{\cos(x^2)}_{\cos u}\,\underbrace{2x\,dx}_{du} = \int \cos u\,du$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2. تركيبات الصيغة $f(ax+b)$ ؛ على سبيل المثال.

$$\int \frac{\overbrace{x}^{u-1}}{\underbrace{\sqrt{x+1}}_{\sqrt{u}}}\underbrace{dx}_{du} = \int \frac{u-1}{\sqrt{u}}\,du$$

التكامل بالأجزاء: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

ما الذي يجب أن تبحث عنه: نواتج لأنواع مختلفة من الدوال: x^n، $\cos x$، e^x ؛ على سبيل المثال.

$$\int 2x\cos x\,dx \qquad \begin{cases} u = x & dv = \cos x\,dx \\ du = dx & v = \sin x \end{cases}$$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx$$

التعويض مع الدوال المثلثية:

ما الذي يجب أن تبحث عنه:

1. حدود مثل $\sqrt{a^2-x^2}$ ؛ لنأخذ $x = a\sin\theta\ (-\pi/2 \le \theta \le \pi/2)$ فيكون $dx = a\cos\theta\,d\theta$ و $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta} = a\cos\theta$ ؛ على سبيل المثال.

$$\int \frac{\overbrace{x^2}^{\sin^2\theta}}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\cos\theta}}\underbrace{dx}_{\cos\theta\,d\theta} = \int \sin^2\theta\,d\theta$$

2. حدود مثل $\sqrt{x^2+a^2}$ ؛ لنأخذ $x = a\tan\theta\ (-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ فيكون $dx = a\sec^2\theta\,d\theta$ و $\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\tan^2\theta + a^2} = a\sec\theta$ ؛ على سبيل المثال.

$$\int \frac{\overbrace{x^3}^{27\tan^3\theta}}{\underbrace{\sqrt{x^2+9}}_{3\sec\theta}}\underbrace{dx}_{3\sec^2\theta\,d\theta} = 27\int \tan^3\theta\sec\theta\,d\theta$$

3. حدود مثل $\sqrt{x^2-a^2}$ ؛ لنأخذ $x = a\sec\theta$. حيث $\theta \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ فيكون $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ و $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = a\tan\theta$ ؛ على سبيل المثال.

$$\int \underbrace{x^3}_{8\sec^3\theta}\underbrace{\sqrt{x^2-4}}_{2\tan\theta}\underbrace{dx}_{2\sec\theta\tan\theta\,d\theta} = 32\int \sec^4\theta\tan^2\theta\,d\theta$$

الكسور الجزئية:

ما الذي يجب أن تبحث عنه: الدوال النسبية؛ على سبيل المثال.

$$\int \frac{x+2}{x^2-4x+3}\,dx = \int \frac{x+2}{(x-1)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}\right)dx$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمارين كتابية

.1 هناك اختصار لتحديد الأعداد الثابتة للحدود الخطية في تفكيك الكسور الجزئية. على سبيل المثال، لنأخذ

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

لإكمال A، قم بأخذ الكسر الأصلي على الطرف الأيسر وتغطية $x+1$ في المقام وعوّض x بـ -1: $A = \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{2}{3}$. وبالمثل، لحل B، قم بتغطية $x-2$ وعوّض x بـ 2: $B = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$.

اشرح سبب صحّة هذه التقنية على هذا التفكيك وعدم صحّته في تفكيك: $\frac{x-1}{(x+1)^2(x-2)}$.

.2 للكسور الجزئية، هناك فرق كبير بين الدوال التربيعية التي يمكن تحليلها إلى حدود خطية والدوال التربيعية غير القابلة للاختزال. تذكر أنّ الدوال التربيعية يمكن تحليلها إلى العوامل في صورة $(x-a)(x-b)$ فقط إذا كانت a و b أصفار الدالة. اشرح كيف يمكنك استخدام الصيغة التربيعية لتحديد ما إذا كانت دالة تربيعية معيّنة غير قابلة للاختزال.

في التمارين 1–20، جـــد تفكيك الكسور الجزئية والدالة الأصلية. إذا كان لديك CAS متاح، فاستخدمه للتحقق من إجابتك.

1. $\frac{x-5}{x^2-1}$
2. $\frac{5x-2}{x^2-4}$
3. $\frac{6x}{x^2-x-2}$
4. $\frac{3x}{x^2-3x-4}$
5. $\frac{-x+5}{x^3-x^2-2x}$
6. $\frac{3x+8}{x^3+5x^2+6x}$
7. $\frac{5x-23}{6x^2-11x-7}$
8. $\frac{3x+5}{5x^2-4x-1}$
9. $\frac{x-1}{x^3+4x^2+4x}$
10. $\frac{4x-5}{x^3-3x^2}$
11. $\frac{x+2}{x^3+x}$
12. $\frac{1}{x^3+4x}$
13. $\frac{4x^2-7x-17}{6x^2-11x-10}$
14. $\frac{x^3+x}{x^2-1}$
15. $\frac{2x+3}{x^2+2x+1}$
16. $\frac{2x}{x^2-6x+9}$
17. $\frac{x^3-4}{x^3+2x^2+2x}$
18. $\frac{4}{x^3-2x^2+4x}$
19. $\frac{3x^3+1}{x^3-x^2+x-1}$
20. $\frac{2x^4+9x^2+x-4}{x^3+4x}$

في التمارين 21–36، جـــد قيمة التكامل.

21. $\int \frac{x^3+x+2}{x^2+2x-8}\,dx$
22. $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x-6}\,dx$
23. $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}\,dx$
24. $\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$
25. $\int \frac{4x^3-1}{x^4-x}\,dx$
26. $\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$
27. $\int \frac{4x-2}{16x^4-1}\,dx$
28. $\int \frac{3x+7}{x^4-16}\,dx$
29. $\int \frac{x^3+x}{3x^2+2x+1}\,dx$
30. $\int \frac{x^3-2x}{2x^2-3x+2}\,dx$
31. $\int \frac{4x^2+3}{x^3+x^2+x}\,dx$
32. $\int \frac{4x+4}{x^4+x^3+2x^2}\,dx$
33. $\int x^2 \sin x\,dx$
34. $\int xe^{2x}\,dx$
35. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x-4}\,dx$
36. $\int \frac{2e^x}{e^{3x}+e^x}\,dx$

.37 في هذا التمرين، نجد تفكيك الكسور الجزئية لـ $\frac{4x^2+2}{(x^2+1)^2}$. إنّ صيغة هذا التفكيك هي

$$\frac{4x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

بالضرب في $(x^2+1)^2$، نحصل على

$$\begin{aligned} 4x^2+2 &= (Ax+B)(x^2+1)+Cx+D \\ &= Ax^3+Bx^2+Ax+B+Cx+D \end{aligned}$$

كما في المثال 4.5، نطابق المعاملات المشابهة لقوى x. لأجل x^3، نحصل على $A=0$. لأجل x^2، نحصل على $B=4$. ونطابق معاملات x والثوابت لإنهاء التفكيك.

في التمارين 38–40، جـــد تفكيك الكسور الجزئية. (راجع التمرين 37).

38. $\frac{x^3+2}{(x^2+1)^2}$
39. $\frac{4x^2+3}{(x^2+x+1)^2}$
40. $\frac{x^4+x^3}{(x^2+4)^2}$

.41 في كثير من الأحيان، يمكن تطبيق أكثر من طريقة تكامل. جـــد قيمة $\int \frac{3}{x^4+x}\,dx$ في الطرائق الآتية. أولًا، استخدم التعويض $u = x^3+1$ والكسور الجزئية. ثانيًا، استخدم التعويض $u = \frac{1}{x}$ وجـــد قيمة التكامل الناتج. أثبت أنّ الإجابتين متساويتان.

.42 جـــد قيمة $\int \frac{2}{x^3+x}\,dx$ في الطرائق الآتية. أولًا، استخدم التعويض $u = x^2+1$ والكسور الجزئية. ثانيًا، استخدم التعويض $u = \frac{1}{x}$ وجـــد قيمة التكامل الناتج. أثبت أنّ الإجابتين متساويتان.

في التمرينين 43 و 44 اذكر الطريقة بتحديد ما إذا كان يمكن إيجاد قيمة التكامل باستخدام التعويض أو التكامل بالأجزاء أو الكسور الجزئية.

43. (a) $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$ (b) $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$ (c) $\int \frac{x+1}{x^2-1}\,dx$ (d) $\int \frac{2}{x^2+1}\,dx$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

44. (a) $\int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$ (b) $\int \frac{2x+2}{(x+1)^2}\,dx$

(c) $\int \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx$ (d) $\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx$

45. جـــد قيمة $\int \sec^3 x\,dx$ بإعادة كتابة المكامل في صورة $\frac{\cos x}{\cos^4 x}$ بالقيام بالتعويض $u = \sin x$ واستخدام الكسور الجزئية.

تمارين استكشافية

1. عند تطوير التكامل المحدود، أخذنا في اعتبارنا نواتج جمع مثل $\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i^2+i}$. لنواتج جمع مشابهة، نهتم بشكل خاص بالنهاية عندما $n \to \infty$. اكتب عدة حدود للمجموع وحاول تخمين قيمة النهاية. تبين أنّ هذا هو واحد من نواتج الجمع القليلة التي يوجد لها صيغة دقيقة، لأنّ هذا **ناتج جمع تلسكوبي**. لمعرفة معنى هذا، اكتب تفكيك الكسور الجزئية لـ $\frac{2}{i^2+i}$. باستخدام صيغة الكسور الجزئية، اكتب عدة حدود للمجموع ولاحظ كم الإلغاء الموجود. صِف بإيجاز سبب كون المصطلح تلسكوبي ملائمًا وحدد $\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i^2+i}$. ثم جـــد النهاية عندما $n \to \infty$. أعد هذه العمليةلناتج الجمع التلسكوبي $\sum_{i=2}^{n} \frac{4}{i^2-1}$.

2. استخدم التعويض $u = x^{1/4}$ لإيجاد قيمة $\int \frac{1}{x^{5/4}+x}\,dx$.

استخدم تعويضات مشابهة لإيجاد قيمة $\int \frac{1}{x^{1/4}+x^{1/3}}\,dx$.

$\int \frac{1}{x^{1/5}+x^{1/7}}\,dx$ و $\int \frac{1}{x^{1/4}+x^{1/6}}\,dx$. جـــد صيغة التعويض للتكامل العام $\int \frac{1}{x^p+x^q}\,dx$.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 7-5

جداول التكامل وأنظمة الحاسوب الجبرية

اسأل أي شخص بحاجة إلى إيجاد قيم عدد أكبر من التكاملات كجزء من عملهم (وهذا يشمل المهندسين وعلماء الرياضيات والفيزياء وغيرهم) وسيخبرونك بأنهم قد قاموا بشكل واسع باستخدام جداول التكامل و/أو وأنظمة الحاسوب الجبرية. تُعتبَر هذه أدوات فعالة للغاية لمستخدمي الرياضيات المحترفين. مع ذلك، فهي لا تحل محل تعلم كافّة طرائق التكامل الأساسية. لاستخدام جدول، يجب عليك أولًا في كثير من الأحيان إعادة كتابة التكامل بصيغة واحد من التكاملات في الجدول. قد يتطلب منك هذا إجراء بعض العمليات الجبرية أو إجراء تعويض. في حين سيخبر CAS عن وجود دالة أصلية، سيقدمها أحيانًا بصيغة غير ملائمة. الأهم من ذلك، سيخبر CAS من وقت لآخر عن إجابة (على الأقل من الناحية الطريقة) غير صحيحة. وسنشير إلى بعض من هذه العيوب في الأمثلة الآتية.

استخدام جداول التكامل

لقد قمنا بتضمين جدول صغير للتكاملات غير المحدودة في الجزء الأخير من الكتاب.

المثال 5.1 استخدام جدول تكامل

استخدم جدول لإيجاد قيمة $\int \frac{\sqrt{3+4x^2}}{x}\,dx$.

الحل بالتأكيد، يمكنك إيجاد قيمة هذا التكامل باستخدام تعويض مع الدوال المثلثية. مع ذلك، إذا نظرت في جدول التكامل الخاص بنا، ستجد

$$\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + c \qquad (5.1)$$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

وللأسف، فإنّ التكامل في السؤال ليس تمامًا بالصيغة (5.1). مع ذلك، يمكننا إثبات هذا بالتعويض $u = 2x$، فيكون $du = 2\,dx$. ذلك يعطينا

$$\int \frac{\sqrt{3+4x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{3+(2x)^2}}{2x}(2)\,dx = \int \frac{\sqrt{3+u^2}}{u}\,du$$

$$= \sqrt{3+u^2} - \sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+u^2}}{u}\right| + c$$

$$= \sqrt{3+4x^2} - \sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+4x^2}}{2x}\right| + c$$

يُسمى عدد من الصيغ الموجودة في الجدول **صيغ الاختزال**. تأخذ هذه الصيغ الصورة

$$\int f(u)\,du = g(u) + \int h(u)\,du$$

حيث يكون التكامل الثاني أبسط من الأول. يتم كثيرًا تطبيقها بشكل متكرر، كما في المثال 5.2.

المثال 5.2 استخدام صيغة اختزال

استخدم صيغة اختزال لإيجاد قيمة $\int \sin^6 x\,dx$.

الحل يجب أن تدرك أنّه يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل باستخدام طرائق تكامل تعرفها مسبقًا. (كيف؟) مع ذلك، لأي عدد صحيح $n \geq 1$، توجد لدينا صيغة الاختزال

$$\int \sin^n u\,du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u\,du \tag{5.2}$$

(انظر العدد 59 في جدول التكاملات الموجود على الغلاف الأخير للكتاب). إذا طبّقنا (5.2) حيث $n = 6$، نحصل على

$$\int \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\int \sin^4 x\,dx$$

بتطبيق صيغة الاختزال نفسها (هذه المرة مع $n = 4$) لإيجاد قيمة $\int \sin^4 x\,dx$، نحصل على

$$\int \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\int \sin^4 x\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx\right)$$

وأخيرًا، لأجل $\int \sin^2 x\,dx$، يمكننا استخدام (5.2) مرة أخرى (مع $n = 2$) أو إيجاد قيمة التكامل باستخدام صيغة نصف الزاوية. نختار السابق هنا ونحصل على

$$\int \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x + \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}\int dx\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{5}{16}\sin x\cos x + \frac{5}{16}x + c$$

يجب أن نذكّرك في هذه المرحلة أنّ هناك العديد من الطرائق المختلفة لإيجاد دالة أصلية. إنّ الدوال الأصلية التي يتم إيجادها باستخدام وسائل متعددة قد تبدو مختلفة تمامًا، على الرغم من أنها متكافئة. على سبيل المثال، لاحظ أنّه إذا كان لدالة أصلية الصيغة $\sin^2 x + c$، إذًا تكون الدالة الأصلية المكافئة هي $-\cos^2 x + c$، حيث يمكننا كتابة

$$\sin^2 x + c = 1 - \cos^2 x + c = -\cos^2 x + (1 + c)$$

وأخيرًا، حيث إنّ c هو عدد ثابت عشوائي، وهكذا $1 + c$. في المثال 5.2، لاحظ أنّ أول ثلاثة حدود لها جميعًا عوامل $\sin x\cos x$، والتي تساوي $\frac{1}{2}\sin 2x$. باستخدام هذا ومتطابقات أخرى، يمكنك

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أن تثبت أنّ الحل الذي قدّمناه في المثال 5.2 يكافئ الحلّ التالي الذي تم الحصول عليه من CAS مشهور:

$$\int \sin^6 x\,dx = \frac{5}{16}x - \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{192}\sin 6x + c$$

لذلك، لا داعي لأن تُصاب بالذعر إذا كانت إجابتك تختلف عن الإجابة الموجودة في الجزء الأخير من الكتاب. قد تكون كلتا الإجابتين صحيحتين. إذا كنت غير متأكد، جـــد مشتقة إجابتك. إذا حصلت على المكامل، تكون إجابتك صحيحة.

سترغب في بعض الأحيان في تطبيق صيغ اختزال مختلفة عند نقاط مختلفة في مسألة معطاة.

المثال 5.3 إجراء تعويض قبل استخدام صيغة اختزال

جـــد قيمة $\int x^3 \sin 2x\,dx$.

الحل من جدولنا (انظر العدد 63)، لدينا صيغة الاختزال

$$\int u^n \sin u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du \tag{5.3}$$

من أجل استخدام (5.3)، يجب علينا أولًا إجراء التعويض $u = 2x$، فيكون $du = 2\,dx$، مما يعطينا

$$\int x^3 \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x)^3}{2^3}\sin 2x(2)\,dx = \frac{1}{16}\int u^3 \sin u\,du$$
$$= \frac{1}{16}\left(-u^3\cos u + 3\int u^2 \cos u\,du\right)$$

حيث استخدمنا صيغة الاختزال (5.3) مع $n = 3$. الآن، لإيجاد قيمة هذا التكامل الأخير، نستخدم صيغة الاختزال (العدد 64 في الجدول الخاص بنا)

$$\int u^n \cos u\,du = u^n \sin u - n\int u^{n-1}\sin u\,du$$

مع $n = 2$ للحصول على

$$\int x^3 \sin 2x\,dx = -\frac{1}{16}u^3\cos u + \frac{3}{16}\int u^2 \cos u\,du$$
$$= -\frac{1}{16}u^3\cos u + \frac{3}{16}\left(u^2 \sin u - 2\int u \sin u\,du\right)$$

بتطبيق صيغة الاختزال الأولى (5.3) مرة أخرى (هذه المرة، مع $n = 1$)، نحصل على

$$\begin{aligned}
\int x^3 \sin 2x\,dx &= -\frac{1}{16}u^3\cos u + \frac{3}{16}u^2\sin u - \frac{3}{8}\int u\sin u\,du \\
&= -\frac{1}{16}u^3\cos u + \frac{3}{16}u^2\sin u - \frac{3}{8}\left(-u\cos u + \int u^0 \cos u\,du\right) \\
&= -\frac{1}{16}u^3\cos u + \frac{3}{16}u^2\sin u + \frac{3}{8}u\cos u - \frac{3}{8}\sin u + c \\
&= -\frac{1}{16}(2x)^3\cos 2x + \frac{3}{16}(2x)^2\sin 2x + \frac{3}{8}(2x)\cos 2x - \frac{3}{8}\sin 2x + c \\
&= -\frac{1}{2}x^3\cos 2x + \frac{3}{4}x^2\sin 2x + \frac{3}{4}x\cos 2x - \frac{3}{8}\sin 2x + c
\end{aligned}$$

كما سنرى في المثال 5.4، تتطلب بعض التكاملات تبصّرًا قبل استخدام جدول تكامل.

المثال 5.4 إجراء تعويض قبل استخدام جدول تكامل

جـــد قيمة $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الحل لن تجد هذا التكامل أو مقارب له على وجه الخصوص في جدول التكامل الخاص بنا. ومع ذلك، مع قليل من المحاولات، يمكننا إعادة كتابة هذا بصيغة أبسط. أولًا، استخدم صيغة ضعف الزاوية لإعادة كتابة بسط المكامل. نحصل على

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx = 2\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx$$

تذكر أن تكون دائمًا ملماً بالحدود التي هي مشتقات من حدود أخرى. هنا، لنأخذ $u = \cos x$، فيكون $du = -\sin x\,dx$ وإذًا،

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx = 2\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx = -2\int \frac{u}{\sqrt{4u - 1}}\,du$$

من جدولنا (انظر العدد 18)، لاحظ أنّ

$$\int \frac{u}{\sqrt{a + bu}}\,du = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu} + c \tag{5.4}$$

لنأخذ $a = -1$ و $b = 4$ في (5.4)، لدينا

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx = -2\int \frac{u}{\sqrt{4u - 1}}\,du = (-2)\frac{2}{3(4^2)}(4u + 2)\sqrt{4u - 1} + c$$
$$= -\frac{1}{12}(4\cos x + 2)\sqrt{4\cos x - 1} + c$$

التكامل باستخدام نظام حاسوب جبري

تُعدّ أنظمة الحاسوب الجبرية بعضًا من الأدوات الجديدة الأقوى التي ظهرت على مسرح الرياضيات في السنوات الـ 25 الماضية. وهي تدير السلسلة انطلاقاً من الآلات الحاسبة المحمولة إلى أنظمة البرمجيات القوية.

تركز الأمثلة التالية على بعض المشاكل النادرة التي قد تواجهها عند استخدام CAS. نحن نعترف بأننا تعمدّنا البحث عن أخطاء CAS. والخبر السار هو أنّ الأخطاء لم تكن شائعة جدًا وأن CAS الذي تستخدمه لن يقوم بالضرورة بأيٍ منها. كن على علم أنّ هذه عيوب في البرامج والإصدار التالي من CAS الخاص بك قد يقضيٍ عليها تمامًا. كمستخدم ذكي للتكنولوجيا، تحتاج إلى أن تكون على دراية بالأخطاء الشائعة ولديك مهارات حساب التفاضل والتكامل للتعرف على الأخطاء عند حدوثها.

أول شيء تلاحظه عند استخدام CAS لإيجاد قيمة تكامل غير محدود هو أنه يقدم عادةً دالة أصلية، بدلًا من الأكثر عمومية (التكامل غير المحدود) من خلال ترك ثابت التكامل (عيب صغير في هذا البرنامج القوي للغاية).

المثال 5.5 **عيب في بعض أنظمة الحاسوب الجبرية**

استخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int \frac{1}{x}\,dx$.

الحل العديد من CAS تعمل على إيجاد قيمة

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

(في الواقع، يخبر أحد أنظمة CAS بشأن التكامل بوصفه اللوغاريتم x، (حيث يستخدم $\ln x$ ليرمز إلى اللوغاريتم الطبيعي). ولا يعمل ذلك فقط على إغفال ثابت التكامل، لكن

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لاحظ أن الدالة الأصلية هذه صالحة فقط لـ $x > 0$. تعطي آلة حاسبة شهيرة دالة أصلية الأكثر عمومًا

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

والذي بالرغم من إستمراره في إغفال ثابت التكامل، يكون صالحًا على الأقل لكل $x \neq 0$. ومن ناحية أخرى، تقوم بشكل صحيح جميع CAS التي اختبرناها بإيجاد قيمة

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = -\ln 2$$

بالرغم من أنّ الدالة الأصلية المعلنة $\ln x$ لم يتم تعريفها في حدود التكامل.

في بعض الأحيان تكون الدالة الأصلية المبلَّغ عنه بواسطة CAS غير صالحة، كما هو مكتوب، لأي قيم حقيقية لـ x، كما في المثال 5.6. (في بعض الحالات، تقدّم CAS دالة أصلية صحيحة للحالة الأكثر تقدّمًا لدالة متغيّر مركب).

المثال 5.6 دالة أصلية غير صحيحة

إستخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int \frac{\cos x}{\sin x - 2}\,dx$.

الحل يعرض أحد أنظمة CAS الدوال الأصلية غير الصحيحة

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - 2}\,dx = \ln(\sin x - 2)$$

للوهلة الأولى، قد لا يبدو أنّ هذا الأمر خطأً، لا سيما وأنّ قاعدة السلسلة تشير إلى أنّها صحيحة على الأرجح:

$$\frac{d}{dx}\ln(\sin x - 2) = \frac{\cos x}{\sin x - 2} \qquad \text{هذا خطأ}$$

يُعدّ الخطأ أكثر أهمية (وغير ملحوظ) من إساءة استخدام قاعدة السلسلة. لاحظ أنّ التعبير $\ln(\sin x - 2)$ غير معرّف لجميع القيم الحقيقية لـ x، حيث $\sin x - 2 < 0$ لكل x. إنّ القاعدة العامة للدالة الأصلية التي تنطبق هنا هي

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

حيث تكون القيمة المطلقة مهمة. الدالة الأصلية الصحيحة هي $\ln|\sin x - 2| + c$، الذي يمكن أيضًا كتابته في صورة عندما $\ln(2 - \sin x) + c$ بما أنّ $2 - \sin x > 0$ لكل قيم x.

ربما أكثر الأخطاء شيوعًا التي ستواجهك هي في الواقع أخطاؤك الخاصة. إذا كنت أدخلت على CAS الخاص بك مسألة في صيغة خاطئة، فقد يحلّ مسألة مختلفة عما كنت تقصدها. تم في المثال 5.7 توضيح خطأ بسيط لكن شائع.

المثال 5.7 مشكلة يخطئ فيها CAS في فهم ما تدخله

إستخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int 4x\,8x\,dx$.

الحل بعد إدخال المكامل في صورة $4x8x$، قدّم أحد أنظمة CAS الإجابة الفردية

$$\int 4x8x\,dx = 4x8xx$$

يمكنك إيجاد قيمة التكامل بسهولة (أولًا، أعِد كتابة المكامل في صورة $32x^2$) لتبيّن أنّ ذلك غير صحيح. لكن أين كان الخطأ؟ نظرًا إلى الطريقة الغريبة التي استخدمناها لكتابة المكامل، فسّرها CAS باعتبارها أربعة أمثال متغيّر اسمه $x8x$، وهو غير مرتبط بمتغيّر التكامل x. إنّ صيغة إجابته هي على الشكل $\int 4c\,dx = 4cx$.

لن تكون صيغة دالة أصلية المعلن عنها بواسطة CAS دائمًا هي الأكثر ملاءمة.

المثال 5.8 صيغة غير ملائمة لدالّة أصلّية

استخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int x(x^2+3)^5\,dx$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الحل العديد من CAS تعمل على إيجاد قيمة

$$\int x(x^2+3)^5\,dx = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{3}{2}x^{10} + \frac{45}{4}x^8 + 45x^6 + \frac{405}{4}x^4 + \frac{243}{2}x^2$$

بينما يقدّم آخرون التعبير الأبسط من ذلك بكثير

$$\int x(x^2+3)^5\,dx = \frac{(x^2+3)^6}{12}$$

تُعَدّ الإجابتان متكافئتين، على الرغم من اختلافهما بثابت. ■

سيقوم CAS عادةً بإجراء حتى التكاملات المطوّلة بسهولة.

اليوم في الرياضيات

جان سي يوكوز (–1957)

عالم رياضيات فرنسي حصل على ميدالية فيلدز لإسهاماته في الأنظمة الديناميكية.

المثال 5.9 بعض التكاملات الجيدة لاستخدام CAS

استخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int x^3 \sin 2x\,dx$ و $\int x^{10} \sin 2x\,dx$.

الحل باستخدام CAS، يمكنك الحصول بخطوة واحدة

$$\int x^3 \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x^3 \cos 2x + \frac{3}{4}x^2 \sin 2x + \frac{3}{4}x \cos 2x - \frac{3}{8} \sin 2x + c$$

بنفس الجهد الذي يمكنك الحصول فيه على

$$\begin{aligned}\int x^{10} \sin 2x\,dx = &-\frac{1}{2}x^{10} \cos 2x + \frac{5}{2}x^9 \sin 2x + \frac{45}{4}x^8 \cos 2x - 45x^7 \sin 2x \\ &- \frac{315}{2}x^6 \cos 2x + \frac{945}{2}x^5 \sin 2x + \frac{4725}{4}x^4 \cos 2x \\ &- \frac{4725}{2}x^3 \sin 2x - \frac{14{,}175}{4}x^2 \cos 2x + \frac{14{,}175}{4}x \sin 2x \\ &+ \frac{14{,}175}{8} \cos 2x + c\end{aligned}$$

إذا أردت، يمكنك حتى إيجاد قيمة

$$\int x^{100} \sin 2x\,dx$$

على الرغم من أنّ عددًا كبيرًا من الحدود يجعل عرض النتيجة محظورًا. فكّر في القيام بذلك يدويًا، باستخدام 100 تكاملٍ بالأجزاء أو من خلال تطبيق صيغة اختزال 100 مرة. ■

يجب أن تكون قد فهمت الفكرة الآن: يمكن لنظام CAS إجراء عمليات حسابية متكرّرة (عددية أو رمزية) لا يمكن تصوّر إجرائك لها يدوياً على الإطلاق. من الصعب العثور على دالة لها دالة أصلية أولى لا يمكن لنظام CAS الخاص بك العثور عليها. لنأخذ المثال التالي لتكاملٍ صعب.

المثال 5.10 تكامل صعب للغاية

جـــد قيمة $\int x^7 e^x \sin x\,dx$.

الحل فكّر في ما الذي ستحتاج إليه لإيجاد قيمة هذا التكامل يدوياً ثم استخدم نظام حاسوب جبري. على سبيل المثال، يقوم أحد أنظمة CAS بعرض دالة أصلية كما يأتي:

$$\begin{aligned}\int x^7 e^x \sin x\,dx = &\left(-\frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{2}x^6 - \frac{21}{2}x^5 + 105x^3 - 315x^2 + 315x\right) e^x \cos x \\ &+ \left(\frac{1}{2}x^7 - \frac{21}{2}x^5 + \frac{105}{2}x^4 - 105x^3 + 315x - 315\right) e^x \sin x\end{aligned}$$

لا تحاول إجراء ذلك يدويًا إلا إذا كان لديك الكثير من الوقت والصبر. ومع ذلك، بناء على تجربتك، لاحظ أنّ صيغة الدالة الأصلية غير مثيرة للدهشة. (على كل حال، أي نوع من الدوال يمكن أن يكون له $x^7 e^x \sin x$ كدالة أصلية خاصة بها؟) ■

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ما وراء الصيغ

قد تتساءل لماذا أضعنا الكثير من الزمن في العمل على طرائق التكامل في الزمن الذي يمكنك أن تدع CAS دائمًا القيام بالعمل نيابةً عنك. لا، إنها ليست لتحضيرك في حال غرقت سفينتك على ضفاف جزيرة مهجورة بدون وجود CAS معك. يمكن لنظام CAS الخاص بك حلّ تقريبًا جميع المسائل الحسابية التي تبدو في هذا الدرس. إنّما وفي حالات نادرة، قد تكون الإجابة الناتجة بواسطة CAS غير صحيحة أو مضلّلة وتحتاج إلى أن تكون مستعدًا لذلك. الأهم من ذلك، يتطلّب العديد من الأفكار الهامة في العلوم والهندسة فهمًا لأساليب التكامل الأساسية.

تمارين 7.5

تمارين كتابية

.1 على فرض أنّه قد تم تعيينك من قبل شركة لتطوير نظام CAS جديد. ضع الخطوط العريضة لاستراتيجية تكامل رمزي. قم بتضمين أحكام تتعلّق بالصيغ في جدول التكاملات في الجزء الأخير من الكتاب وطرائق التكامل المتنوّعة التي درستها.

.2 ناقشنا في الدرس أهمية معرفة القواعد العامة للتكامل. فكّر في التكامل في المثال 5.4، $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx$. هل يمكن لنظام CAS الخاص بك إيجاد قيمة هذا التكامل؟ العديد من التكاملات مثل هذه والتي تظهر في التطبيقات (يوجد أصعب منها في التمارين الاستكشافية)، يجب عليك القيام ببعض العمل قبل أن تدَعَ التكنولوجيا تنهي مهمتك. لهذا الغرض، ناقش أهمية التعرّف على الصيغ الأساسية وفهم طريقة عمل التعويض.

في التمارين 1–28، استخدم جدول التكاملات في الجزء الأخير من الكتاب لإيجاد دالة أصلية. ملاحظة: عند التحقّق من الجزء الأخير من الكتاب أو CAS للحصول على إجابات، احذر من الدوال التي تبدو مختلفة للغاية ولكنها متكافئة (من خلال متطابقات الدوال المثلثية، على سبيل المثال).

1. $\int \frac{x}{(2+4x)^2}\,dx$
2. $\int \frac{x^2}{(2+4x)^2}\,dx$
3. $\int e^{2x}\sqrt{1+e^x}\,dx$
4. $\int e^{3x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$
5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$
6. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x(3+2\sin x)}\,dx$
7. $\int_0^1 t^8\sqrt{4-t^6}\,dt$
8. $\int_0^{\ln 4} \sqrt{16-e^{2t}}\,dt$
9. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}}\,dx$
10. $\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{x\sqrt{x^4-9}}{x^2}\,dx$
11. $\int \frac{\sqrt{6x-x^2}}{(x-3)^2}\,dx$
12. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x\sqrt{8\tan x - \tan^2 x}}\,dx$
13. $\int \tan^6 u\,du$
14. $\int \csc^4 u\,du$
15. $\int \frac{\cos x}{\sin x\sqrt{4+\sin x}}\,dx$
16. $\int \frac{x^5}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$
17. $\int x^3\cos x^2\,dx$
18. $\int x\sin 3x^2\cos 4x^2\,dx$
19. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$
20. $\int \frac{x\sqrt{1+4x^2}}{x^4}\,dx$
21. $\int \frac{\sin^2 t\cos t}{\sqrt{\sin^2 t+4}}\,dt$
22. $\int \frac{\ln\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$
23. $\int \frac{e^{-2/x^2}}{x^3}\,dx$
24. $\int x^3 e^{2x^2}\,dx$
25. $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$
26. $\int e^{5x}\cos 3x\,dx$
27. $\int e^x\tan^{-1}(e^x)\,dx$
28. $\int (\ln 4x)^3\,dx$

.29 تحقّق من CAS الخاص بك مقابل جميع الأمثلة الموجودة في هذا الدرس. ناقش أي أخطاء يقوم بها CAS، إن وجدت.

.30 اعرف كيف يقوم CAS الخاص بك بإيجاد قيمة $\int x\sin x\,dx$ إذا لم تتمكّن من ترك مسافة بين x و $\sin x$.

.31 اجعل CAS الخاص يقوم بإيجاد قيمة $\int(\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1})\,dx$. إذا حصلت على إجابة، اشرح سبب كونها خاطئة.

.32 لمعرفة ما إذا كان نظام CAS الخاص بك "يعرف" التكامل بالأجزاء، قم بتجربة $\int x^3\cos 3x\,dx$ و $\int x^3e^{5x}\cos 3x\,dx$. لمعرفة ما إذا كان "يعرف" صيغ الاختزال، قم بتجربة $\int \sec^5 x\,dx$.

.33 لإيجاد عدد طرائق تكامل الدوال المثلثية التي "يعرفها" نظام CAS الخاص بك، قم بتجربة $\int \sin^6 x\,dx$، $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$ و $\int \tan^4 x\sec^3 x\,dx$.

.34 اعرف إذا كان نظام CAS الخاص بك لديه أوامر خاصة (مثل، APART in Mathematica) لتفكيك كسور جزئية. أيضًا، قم بتجربة $\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx$ و $\int \frac{3x}{(x^2+x+2)^2}\,dx$

.35 لمعرفة ما إذا كان نظام CAS الخاص بك "يعرف" طريقة التعويض، قم بتجربة $\int \frac{1}{x^2(3+2x)}\,dx$ و $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x(3+2\sin x)}\,dx$. حاول معرفة الأمور التي لا يستطيع CAS الخاص بك القيام بها: ابدأ بصيغة أساسية مثل $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}x + c$ وقم بتعويض دالتك المفضلة. مع $x = e^u$، يصبح التكامل السابق $\int \frac{e^u}{e^u\sqrt{e^{2u}-1}}\,du$، الذي يمكنك استخدامه لاختبار نظام CAS الخاص بك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

36. لحساب مساحة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$، لاحظ أنّ الربع الأيمن العلوي من القطع الناقص معطى بالصيغة

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

لكل $0 \le x \le a$. لذلك، مساحة القطع الناقص هي $4b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$. قم بتجربة هذا التكامل على CAS الخاص بك. إنّ الفرضيّة (الضمنية) التي نقوم بها عادةً هي $a > 0$، لكن ينبغي ألا يقوم نظام CAS الخاص بك بهذه الفرضيّة نيابةً عنك. هل يقدّم لك نظام CAS الخاص بك πab أو $\pi b|a|$ ؟

37. اشرح بإيجاز معنى قيام CAS الخاص بك بإعادة $\int f(x)\, dx$ عند طلب إيجاد قيمة $\int f(x)\, dx$.

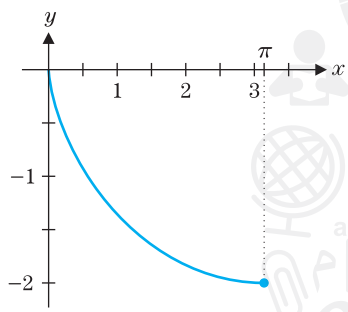
تمارين استكشافية

1. يستكشف هذا التمرين جانبين من مسألة مشهورة للغاية تدعى مسألة منحنى الزمن الأقصر. تخيّل خرزة تنزلق إلى أسفل في سلك رفيع يمتد في شكل ما من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(\pi, -2)$. فرضًا أنّ الجاذبية تسحب الخرزة لأسفل ولكن لا يوجد أي احتكاك أو قوة أخرى تؤثر على الخرزة. يكون من السهل تحليل هذا الموقف باستخدام **المعادلات الوسيطية** حيث لدينا دوال $x(u)$ و $y(u)$ مع الأخذ في الاعتبار موقع الخرزة الأفقي والرأسي بدلالة المتغيّر u. إنّ أمثلة المسارات التي قد تتبعها الخرزة هي $\begin{cases} x(u) = \pi u \\ y(u) = -2u \end{cases}$ و $\begin{cases} x(u) = \pi u \\ y(u) = 2(u-1)^2 - 2 \end{cases}$ و $\begin{cases} x(u) = \pi u - \sin \pi u \\ y(u) = \cos \pi u - 1 \end{cases}$ في كل الحالات، تنطلق الخرزة من نقطة الأصل $(0, 0)$ لـ $u = 0$ وتنتهي عند $(\pi, -2)$ لأجل $u = 1$. مثّل كل مسار بيانيًا على حاسبة بيانية. المسار الأول هو مستقيم والثاني قطع مكافئ والثالث منحنى خاص يسمى دويري. يبلغ الزمن الذي تستغرقه خرزة للانتقال في مسار معيّن

$$T = \frac{1}{\sqrt{g}}\int_0^1 \sqrt{\frac{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2}{-2y(u)}}\, du$$

حيث g هو ثابت الجاذبية. احسب هذه الكمية للمستقيم والقطع المكافئ. اشرح سبب اعتبار القطع المكافئ بمثابة مسار أسرع للخرزة لتنزلق، على الرغم من أنّ المستقيم أقصر في المسافة. (فكّر أي تلٍّ سيكون أسرع للتزلج عليه نزولًا). يمكن إثبات أنّ الدويري هو أسرع مسار ممكن. حاول إحضار CAS الخاص بك لحساب الزمن الأمثل. بمقارنة التمثيلات البيانية للقطع المكافئ والدويري، ما هي الميزة المهمة الموجودة لدى الدويري في بداية المسار؟

2. اتضح أنّ الدويري المذكور في التمرين الاستكشافي 1 له ميزة مدهشة، بالإضافة إلى توفيره أسرع زمن (والذي هو أساسًا ما يعنيه المصطلح منحنى الزمن الأقصر). المسار موضّح في الشكل.



على فرض أنّه بدلًا من بدء انتقال الخرزة من النقطة $(0, 0)$، يبدأ انزلاق الخرزة من المنتصف لأسفل المسار عند $x = c$. كيف ستتم مقارنة زمن بلوغ الجزء السفلي من $x = c$ بالزمن الكلي من $x = 0$ ؟ لاحظ أنّ الإجابة ليست واضحة، حيث إنّ كلما بدأت من أسفل، ستقل السرعة التي ستكتسبها الخرزة. إذا كانت $x = c$ مقابلة لـ $u = a$، يتم إعطاء زمن بلوغ الجزء السفلي بالصيغة $\frac{\pi}{\sqrt{g}}\int_a^1 \sqrt{\frac{1 - \cos \pi u}{\cos a\pi - \cos \pi u}}\, du$. إذا $a = 0$ (وهي أنّ الخرزة تبدأ من الجزء العلوي)، يكون الزمن $\pi/\sqrt{g}$ (التكامل يساوي 1). إذا كان لديك نظام CAS جيد للغاية، حاول إيجاد قيمة التكامل للعديد من قيم a بين 0 و 1. إذا لم يتمكّن نظام CAS الخاص بك التعامل معه، قم بتقريب التكامل عدديًا. ينبغي أن تكتشف الحقيقة المدهشة حول أنّ التكامل دائمًا يساوي 1. يقوم أيضًا الدويري بحل مسألة **الزمن المتشابه**.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 7-6

نمذجة المعادلات التفاضلية

مسائل النمو والتضاؤل

في هذا العصر، ندرك جميعًا كيفية تسبّب العدوى عن طريق الكائنات الحية الدقيقة مثل الإشريكية القولونية (إي كولاي) في نقل المرض. يمكن للعديد من الكائنات الحية (مثل إي كولاي)) أن تتكاثر في أجسادنا بمعدل سريع جدًا، ساحقةً دفاعات أجسادنا الطبيعية بسبب إنتاجها لكمية هائلة من السموم. ويبيّن الجدول في الهامش عدد بكتيريا إي كولاي (بملايين من البكتيريا في كل مللتر) في مزرعة مختبر يتم قياسها كل نصف ساعة خلال فترة التجربة. لقد وضعنا مخططًا لعدد البكتيريا في كل مللتر مقابل الزمن في الشكل 7.2. ما هذا الشيء الذي يمكن أن تقول عنه أنّه يشبه التمثيل البياني؟ إذا قلت "دالة أسية"، فتخمينك صحيح. لقد أظهر تحليل دقيق للبيانات التجريبية أنّ العديد من المجتمعات تنمو بمعدل يتناسب مع مستواها الحالي. تتم ملاحظة هذا الأمر بسهولة تامة في المستنبتات البكتيرية، حيث تتكاثر البكتيريا بالانشطار الثنائي البسيط (أي أنّ كل خلية تتكاثر بالانقسام إلى خليتين). وفي هذه الحالة، يتناسب المعدل الذي تنمو به المستنبتات البكتيرية طرديًا مع المجتمع الحالي (حتى يحين الزمن الذي تصبح فيه الموارد نادرةً أو يصبح الاكتظاظ عاملًا مقيدًا). وإذا كانت $y(t)$ تمثّل عدد البكتيريا في مزرعةٍ ما عند الزمن t، فإنّ معدل التغيّر في المجتمع بمعلومية الزمن يصبح $y'(t)$. إذًا، بما أنّ $y'(t)$ متناسب مع $y(t)$، فيكون لدينا

الزمن (ساعات)	عدد البكتيريا (مليون لكل mL)
0	1.2
0.5	2.5
1	5.1
1.5	11.0
2	23.0
2.5	45.0
3	91.0
3.5	180.0
4	350.0

$$y'(t) = ky(t) \tag{6.1}$$

لبعض التناسب الثابت k (**النمو ثابت**). بما أنّ المعادلة (6.1) تتضمّن اشتقاقًا لدالة مجهولة، فإنّنا نطلق عليها **المعادلة التفاضلية**. إنّ هدفنا هو حلّ المعادلة التفاضلية، أي، إيجاد الدالة $y(t)$. فرضًا أنّ $y(t) > 0$ (وهذه الفرضية معقولة، لأنّ $y(t)$ تمثّل مجتمعًا)، فيكون لدينا

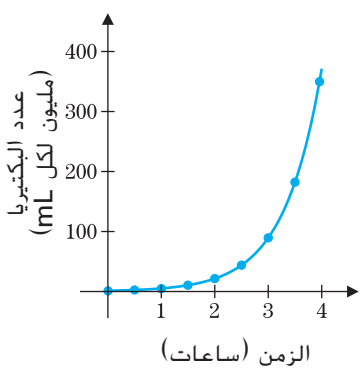
$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k \tag{6.2}$$

مع تكامل كلٍ من طرفي المعادلة (6.2) بالنسبة إلى t، فإنّنا نحصل على

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int k\,dt \tag{6.3}$$

وبالتعويض $y = y(t)$ في التكامل على الطرف الأيسر ولدينا $dy = y'(t)\,dt$. تصبح المعادلة (1.3) على الصورة

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$$



الشكل 7.2
نمو البكتيريا

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بإجراء هذه التكاملات، فإنّنا نحصل على

$$\ln|y| + c_1 = kt + c_2$$

حيث c_1 و c_2 عددين ثابتين للتكاملين. بطرح c_1 من كلا الطرفين، نحصل على

$$\ln|y| = kt + (c_2 - c_1) = kt + c$$

لعدد ثابت معيّن c. بما أنّ $y(t) > 0$، فإنّنا نحصل على

$$\ln y(t) = kt + c$$

وبأخذ أُسُس طرفي المعادلة، نجد أنّ

$$y(t) = e^{\ln y(t)} = e^{kt+c} = e^{kt}e^{c}$$

بما أنّ c عدد ثابت إفتراضي، فإنّنا نكتب $A = e^c$ ونحصل على

$$y(t) = Ae^{kt} \tag{6.4}$$

نشير إلى (6.4) على أنّه **الحل العام** للمعادلة التفاضلية (6.1). لكل $k > 0$، فإنّ المعادلة (6.4) تُسمّى **قانون النمو الأُسي** ولكل $k < 0$، فتُسمّى المعادلة **قانون التضاؤل الأُسي**. (فكّر في الفرق).

في المثال 6.1، رأينا كيفية توقّع قانون النمو الأسي لعدد الخلايا في مستنبت بكتيري.

المثال 6.1 النمو الأسي لمستعمرة بكتيريا

مستنبت بكتيري ملقّح حديثًا بكتيريا عقدية A (مجموعة مشتركة من الكائنات الحية الدقيقة التي تسبّب التهاب الحلق) تتكوّن من 100 خلية. عندما تم فحص المستنبت بعد 60 دقيقة، ثبت أنّه ثمة 450 خلية حية. فرضًا أنّ النمو أسي، حدّد عدد الخلايا في أيّ زمن t (يُقاس بالدقائق) وجـــد الزمن المضاعف.

الحل النمو الأسي يعني أنّ

$$y'(t) = ky(t)$$

$$y(t) = Ae^{kt} \tag{6.4}$$

حيث A و k هما عددان ثابتان يجب تحديدهما. إذا وضعنا الزمن الابتدائي عند $t = 0$، فسنجد أنّ

$$y(0) = 100 \tag{6.5}$$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تُسمّى المعادلة (6.6) **الشرط الإبتدائي**. بوضع $t = 0$ في (6.5)، فإنّنا نحصل الآن على

$$100 = y(0) = Ae^0 = A$$

$$y(t) = 100\, e^{kt}$$

يمكننا استخدام الملاحظة الثانية لتحديد قيمة ثابت النمو k. لدينا

$$450 = y(60) = 100\, e^{60k}$$

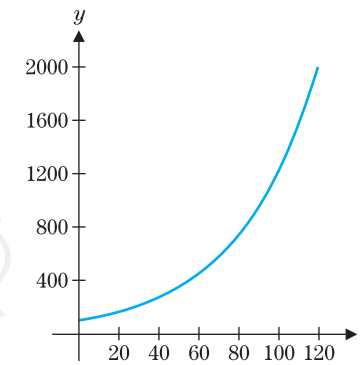
وبقسمة كلا الطرفين على 100 وأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين، فإنّنا نحصل على

$$\ln 4.5 = \ln e^{60k} = 60k$$

$$k = \frac{\ln 4.5}{60} \approx 0.02507$$

لدينا الآن قانون يمثّل عدد الخلايا الحالية عند أيّ زمن t:

$$y(t) = 100\, e^{kt} = 100 \exp\left(\frac{\ln 4.5}{60} t\right)$$



الشكل 7.3

$y = 100\, e^{\left(\frac{\ln 4.5}{60} t\right)}$

في الشكل 7.3، أنظر التمثيل البياني للنمو البكتيري المخطط خلال أول 120 دقيقة. يوجد سؤال إضافي آخر مهم لعلماء الأحياء المجهرية وهو **مضاعفة الزمن**، أي الزمن الذي يستغرقه عدد الخلايا لكي يتضاعف. يمكننا إيجاد ذلك بالحل لإيجاد الزمن t الذي عنده $y(t) = 2y(0) = 200$. لدينا

$$200 = y(t) = 100 \exp\left(\frac{\ln 4.5}{60} t\right)$$

وبقسمة كلا الطرفين على 100 وأخذ اللوغاريتمات، نحصل على

$$\ln 2 = \frac{\ln 4.5}{60} t$$

$$t = \frac{60 \ln 2}{\ln 4.5} \approx 27.65$$

إذًا، الزمن المضاعف لمستنبت بكتيريا عقدية A يبلغ حوالي 28 دقيقة. يعتمد الزمن المضاعف للخلية البكتيرية على سلالة معيّنة من البكتيريا، وكذلك نوعية وكمية الإمدادات الغذائية ودرجة الحرارة والعوامل البيئية الأخرى. وعلى الرغم من ذلك، لا يعتمد ذلك على الجماعة الأحيائية الإبتدائية. وهنا، يمكنك بكل سهولة التحقّق من وصول عدد الجماعة الأحيائية إلى 400 في زمن:

$$t = \frac{120 \ln 2}{\ln 4.5} \approx 55.3$$

(يساوي تمامًا ضعف الزمن الذي يستغرقه هذا العدد للوصول إلى 200).

أي أنّ عدد أفراد المجتمع الإبتدائي يتضاعف من 100 إلى 200 في حوالي 28 دقيقة وتضاعف مرة أخرى (إلى 400) في 28 دقيقة أخرى وهكذا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تتوافق العديد من الظواهر الفيزيائية مع قوانين النمو أو التضاؤل الأسي. على سبيل المثال، أظهرت التجارب أنّ معدّل تضاؤل أحد العناصر المشعّة يتناسب طرديًا مع الكمية الحالية. (تذكّر أنّ العناصر المشعّة هي عناصر غير مستقرة كيميائيًا وتتحلّل تدريجيًا إلى عناصر أخرى، أكثر استقرارًا). لتكن $y(t)$ هي كمية (كتلة) أحد العناصر المشعّة الحالية عند الزمن t. سنجد إذًا أنّ معدل تغيّر (معدل تضاؤل) $y(t)$ يساوي

$$y'(t) = ky(t) \tag{6.7}$$

لاحظ أنّ (6.7) هي تحديدًا المعادلة التفاضلية نفسها مثل (1.1)، التي واجهتك في المثال 6.1 لنمو البكتيريا ولذلك، من (1.4)، نجد أنّ

$$y(t) = Ae^{kt}$$

لكل الأعداد الثابتة A و k (هنا، يجب تحديد **ثابت التضاؤل**)

ومن الشائع مناقشة معدل التضاؤل للعناصر المشعّة بدلالة نصف العمر، الزمن المطلوب لنصف الكمية الإبتدائية للاضمحلال إلى عناصر أخرى. على سبيل المثال، لقد حسب العلماء أنّ فترة نصف العمر للكربون-14 (^{14}C) هي 5730 عامًا تقريبا. أي أنّه إذا كان لديك اليوم جرامان من ^{14}C وعُدت بعد 5730 عامًا، فسيكون لديك 1g تقريبًا من ^{14}C المتبقي. إنّ طول مدة نصف العمر والحقيقة التي تقرّر أنّ الكائنات الحية تمتص ^{14}C باستمرار ممّا يجعل قياسات ^{14}C مفيدة في تحديد التاريخ باستخدام الكربون المشع. (انظر التمرين الموضوع للاطلاع على مزيد من المعلومات حول هذا التطبيق المهم).

المثال 6.2 الاضمحلال الإشعاعي

إذا كان لديك 50 g من ^{14}C اليوم، فما مقدار الكمية المتبقّية بعد 100 عام؟

الحل لتكن $y(t)$ هي الكتلة (بالجرام) من ^{14}C الآن عند الزمن t. إذًا، لدينا

$$y'(t) = ky(t)$$

وكما رأينا بالفعل،

$$y(t) = Ae^{kt}$$

الشرط الإبتدائي هو $y(0) = 50$. إذًا

$$50 = y(0) = Ae^0 = A$$

و

$$y(t) = 50\,e^{kt}$$

لإيجاد ثابت الاضمحلال k، نستخدم نصف العمر:

$$25 = y(5730) = 50\,e^{5730k}$$

وبقسمة كلا الطرفين على 50 وبأخذ اللوغاريتمات، نجد أنّ

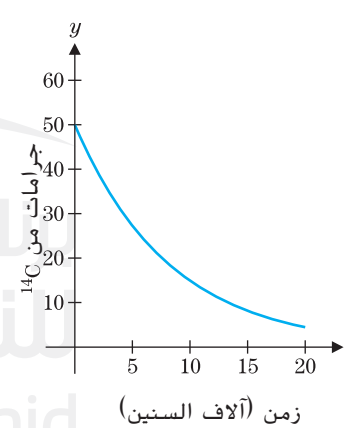
$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{5730k} = 5730k$$

حيث

$$k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{5730} \approx -1.20968 \times 10^{-4}$$

يمكن رؤية تمثيل بياني لكتلة ^{14}C كدالة للزمن، في الشكل 7.4. لاحظ أنّ الجدول الزمني الكبير موضّح. ويجب أن يمنحك ذلك فكرة عن معدل تضاؤل ^{14}C البطيء جدًا. وأخيرًا، لاحظ أنّه إذا بدأنا باستخدام 50 g إذًا ستكون الكمية المتبقية بعد 100 عام تساوي

$$y(100) = 50\,e^{100k} \approx 49.3988 \text{ g}$$



الشكل 7.4
تضاؤل ^{14}C

يوجد مبدأ فيزيائي يشبه مبادئ الرياضيات وهو **قانون نيوتن للتبريد**. إذا كان إدخال كائن ساخن في محيط بارد (أو بطريقة مكافئة، كائن بارد في محيط دافئ)، فإنّ المعدل الذي يبرد به الكائن (أو يصبح دافئًا) لا يتناسب مع درجة حرارته، ولكن بدلًا من ذلك، فإنّه يتناسب مع الفرق في درجة الحرارة بين الكائن والمناطق المحيطة به. وبطريقة استخدام الرموز، لتكن $y(t)$ تمثّل درجة حرارة الكائن عند الزمن t ولتكن T_a تمثّل درجة الحرارة المحيطة (درجة **الحرارة المحيطة**، التي نفترض أنّها ثابتة)، فسنحصل على المعادلة التفاضلية

$$y'(t) = k[y(t) - T_a] \tag{6.8}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لاحظ أنّ المعادلة (6.8) ليست هي المعادلة التفاضلية نفسها التي تصف النمو أو التضاؤل الأُسي. (قارن بينهما؛ ما الفرق؟) وحتى مع ذلك، يمكننا أن نقترب من إيجاد حل بالطريقة نفسها. وفي حالة التبريد، فنحن نفترض أنّ

$$T_a < y(t)$$

(لماذا تُعدّ هذه الفرضية مقبولة؟) إذا قسمنا كلا طرفي المعادلة (6.8) على $y(t) - T_a$ ومن ثم أجرينا عملية التكامل لكلا الطرفين، فإنّنا نحصل على

$$\int \frac{y'(t)}{y(t) - T_a}\, dt = \int k\, dt = kt + c_1 \tag{6.9}$$

لاحظ أنّه يمكننا إجراء التكامل على الطرف الأيسر بالتعويض $u = y(t) - T_a$، حيث $du = y'(t)\, dt$. إذًا، سنجد أنّ

$$\int \frac{y'(t)}{y(t) - T_a}\, dt = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + c_2 = \ln|y(t) - T_a| + c_2$$
$$= \ln[y(t) - T_a] + c_2,$$

بما أنّ $y(t) - T_a > 0$. من المعادلة (6.9)، فإنّنا نحصل على

$$\ln[y(t) - T_a] = kt + c \quad \text{أو} \quad \ln[y(t) - T_a] + c_2 = kt + c_1$$

حيث دمجنا ثابتي التكامل. وبأخذ الأسس في كلا الطرفين، فإنّنا نحصل على

$$y(t) - T_a = e^{kt+c} = e^{kt}e^{c}$$

أخيرًا، وبغرض سهولة العمل، فإنّنا نكتب $A = e^c$، لنحصل على

$$y(t) = Ae^{kt} + T_a$$

حيث A و k هما عددان ثابتان يجب تحديدهما.

سنوضّح قانون نيوتن للتبريد في المثال 6.3.

المثال 6.3 قانون نيوتن لتبريد فنجان من القهوة

تبلغ درجة حرارة فنجان من القهوة السريعة 80°C عندما يُسكب طازجًا. بعد دقيقتين في غرفة درجة حرارتها 20°C، تم تبريد القهوة حتى وصلت إلى 75°C. جـــد درجة الحرارة في أي زمن t وجـــد الزمن الذي تصل فيه درجة حرارة القهوة إلى 50°C.

الحل لتكن $y(t)$ هي درجة حرارة القهوة عند الزمن t فنجد أنّ

$$y'(t) = k[y(t) - 20]$$

متابعةً لما ذكر أعلاه، يمكننا الحصول على

$$y(t) = Ae^{kt} + 20$$

لاحظ أنّ الشرط الإبتدائي هنا هي درجة الحرارة الإبتدائية، $y(0) = 80$. يعطينا ذلك

$$80 = y(0) = Ae^0 + 20 = A + 20$$

حيث $A = 60$ و $y(t) = 60\, e^{kt} + 20$

ويمكننا الآن استخدام درجة الحرارة الثانية التي تمّ قياسها لإيجاد حل للعدد الثابت k. لدينا

$$75 = y(2) = 60\, e^{2k} + 20$$

بطرح 20 من كلا طرفي المعادلة والقسمة على 60، فإنّنا نحصل على

$$e^{2k} = \frac{75 - 20}{60} = \frac{55}{60}$$

وبأخذ اللوغاريتمات من كلا الطرفين، فإنّنا نحصل على $2k = \ln\left(\frac{55}{60}\right)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ومن ثم،

$$k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{55}{60}\right) \approx -0.0435056$$

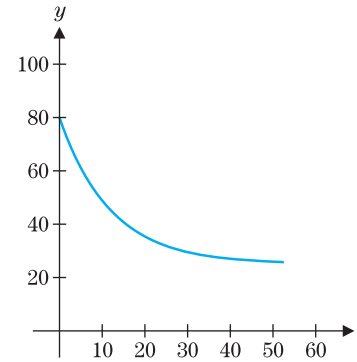
تمّ عرض رسم بياني لدرجة الحرارة المخططة مقابل الزمن في الشكل 7.5. من الشكل 7.5، قد تلاحظ انخفاض درجة الحرارة في ما يبدو إلى 50°C بعد حوالي 16 دقيقة. يمكننا إيجاد حل ذلك بطريقة رمزية بإيجاد الزمن t حيث أن

$$50 = y(t) = 60\,e^{kt} + 20$$

ليس من الصعب حل ذلك للحصول على

$$t = \frac{1}{k}\ln\frac{5}{6} \approx 15.93 \text{ دقيقة}$$

التفاصيل متروكة كتمرين.



الشكل 7.5
درجة حرارة القهوة

المرابحة المركّبة

إذا وافق أحد المصارف أن يدفع لك مرابحة 8% (سنويًا) على مبلغ استثمارك AED 10,000. إذًا في نهاية العام، سيكون لديك

$$\text{AED } 10{,}000 + (0.08)\text{AED } 10{,}000 = \text{AED } 10{,}000(1 + 0.08) = \text{AED } 10{,}800$$

من ناحية أخرى، إذا وافق البنك على دفع المرابحة مرتين في العام بالمعدل السنوي 8% نفسه، سوف تكون الفائدة $\frac{8}{2}\%$ مرتين كل عام. في نهاية العام، ستحصل على

$$\begin{aligned}\text{AED } 10{,}000\left(1 + \frac{0.08}{2}\right)\left(1 + \frac{0.08}{2}\right) &= \text{AED } 10{,}000\left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^2 \\ &= \text{AED } 10{,}816\end{aligned}$$

و بالاستمرار على هذا النمط، لاحظ أنّ دفع الفائدة (المركبة) شهريًا سوف يكون $\frac{8}{12}\%$ كل شهر (فترة)، ينتج عن ذلك رصيد قدره

$$\text{AED } 10{,}000\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{12} \approx \text{AED } 10{,}830.00$$

علاوة على ذلك، إذا كانت المرابحة تزداد يوميًا، فسيكون معك في نهاية المطاف

$$\text{AED } 10{,}000\left(1 + \frac{0.08}{365}\right)^{365} \approx \text{AED } 10{,}832.78$$

لا بد أن يكون واضحًا أنّه كلما زاد عدد المرات الذي تتضاعف فيها المرابحة المركّبة، سوف تكون المرابحة أكبر. لنطرح سؤالًا معقولًا عما إذا كان هناك نهاية لقيمة المرابحة يمكن أن يعود على استثمار معيّن بمقدار محدد من المرابحة. إذا كانت n هي عدد المرات في السنة التي تزداد فيه المرابحة، فنريد حساب النسبة المئوية السنوية للمردود (APY) مع **فائدة مركّبة مستمرة**.

$$\text{APY} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{0.08}{n}\right)^n - 1$$

لتحديد هذه النسبة، يجب مراجعة ذلك (انظر الوحدة 2)

$$e = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

لاحظ أنّه إذا جعلنا التغيّر في المتغيّر $n = 0.08m$. فسنحصل على

$$\begin{aligned}\text{APY} &= \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{0.08}{0.08m}\right)^{0.08m} - 1 \\ &= \left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{0.08} - 1 \\ &= e^{0.08} - 1 \approx 0.083287\end{aligned}$$

ومع المرابحة المركبة المستمرّة، سيكون ربحك حينئذٍ حوالي 8.3% أو

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

$$\text{AED } 10{,}000(e^{0.08} - 1) \approx \text{AED } 832.87$$

في المرابحة، سيصل إستثمارك إلى قيمة إجمالية AED 10,832.87. وعمومًا، على فرض أنّك تستثمر AEDP بمرابحة سنويّة r، مركّبة n مرات كل عام. إذًا ستكون قيمة استثمارك بعد t سنوات هي

$$\text{AED}P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

بمرابحة مركّبة مستمرّة (أي بأخذ النهاية عندما $n \to \infty$)، فيكون:

$$\text{AED}Pe^{rt} \tag{6.10}$$

وبدلًا من ذلك، إذا كان $y(t)$ هو قيمة استثمارك بعد سنوات t بمرابحة مركّبة مستمرّة، سيكون معدل التغيّر $y(t)$ متناسبًا مع $y(t)$. أي إنّ،

$$y'(t) = ry(t)$$

حيث r هو معدّل المرابحة السنوية. من (6.4)، لدينا

$$y(t) = Ae^{rt}$$

لاستثمار إبتدائي يُقدّر بـ AEDP، نجد أنّ

$$\text{AED}P = y(0) = Ae^0 = A$$

حيث

$$y(t) = \text{AED}Pe^{rt}$$

وهذا هو الشيء نفسه مثل (6.10).

المثال 6.4 مقارنة بين انواع المرابحة المركّبة

إذا استثمرت AED 7000 بمعدّل مرابحة سنوية 5.75%، قارن قيمة استثمارك بعد 5 سنوات بأنواع مختلفة لزمن المرابحة المركّبة.

الحل مع مرابحة مركّبة سنويّة، تصبح القيمة

$$\text{AED } 7000\left(1 + \frac{0.0575}{1}\right)^5 \approx \text{AED } 9257.63$$

مع مرابحة مركّبة شهريّة، تصبح القيمة

$$\text{AED } 7000\left(1 + \frac{0.0575}{12}\right)^{12(5)} \approx \text{AED } 9325.23$$

مع مرابحة مركّبة يوميّة، نحصل على

$$\text{AED } 7000\left(1 + \frac{0.0575}{365}\right)^{365(5)} \approx \text{AED } 9331.42$$

وأخيرًا، بمرابحة مركّبة مستمرّة، تصبح القيمة

$$\text{AED } 7000\, e^{0.0575(5)} \approx \text{AED } 9331.63$$

الرياضيات المستخدمة لوصف مرابحة مركّبة تنطبق أيضا على الحسابات التي تتناقص قيمتها.

المثال 6.5 انخفاض قيمة الأصول

(a) على فرض أنّ قيمة أحد الأصول هي AED 10,000 تتناقص باستمرار بمعدل ثابت 24% في كل عام. جـــد قيمته بعد 10 سنوات؛ وبعد 20 سنة. (b) قارن بين هذه القيم وأحد الأصول قيمته AED 10,000 ولن يكون له قيمة خلال 20 عامًا باستخدام الانخفاض الخطي.

الحل القيمة $v(t)$ لأي كمية تتغيّر بمعدّل ثابت r تصبح $v' = rv$. هنا، $r = -0.24$، حيث

$$v(t) = Ae^{-0.24t}$$

بما أنّ قيمة الأصل الإبتدائية هي 10,000، فيصبح لدينا

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

$$10{,}000 = v(0) = Ae^0 = A$$

ولدينا الآن

$$v(t) = 10{,}000\, e^{-0.24t}$$

وعند الزمن $t = 10$، تصبح قيمة الأصل

$$\text{AED } 10{,}000\, e^{-0.24(10)} \approx \text{AED } 907.18$$

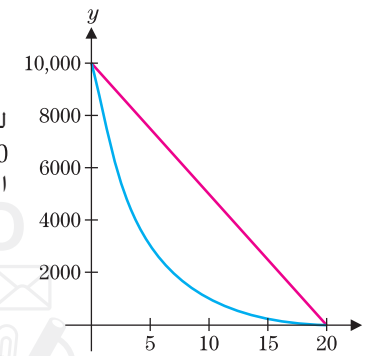
وعند الزمن $t = 20$، تنخفض القيمة إلى

$$\text{AED } 10{,}000\, e^{-0.24(20)} \approx \text{AED } 82.30$$

للجزء (b)، إنّ التناقص الخطي يعني أنّنا نستخدم دالةً خطية $v(t) = mt + b$ لقيمة الاصل. نبدأ من $v(0) = 10{,}000$ وننتهي عند $v(20) = 0$. من $v(0) = 10{,}000$ يصبح لدينا $b = 10{,}000$ وباستخدام النقاط $(0, 10{,}000)$ و $(20, 0)$، يمكننا حساب الميل $m = \dfrac{10{,}000}{-20} = -500$. يصبح لدينا حينئذٍ

$$v(t) = -500t + 10{,}000$$

عند الزمن $t = 10$، $v(10) = \text{AED } 5000$. لاحظ أنّ هذا إلى حد كبير أكثر من حوالي AED 900 تلك القيمة التي يعطينا إياها التناقص الأُسي. وعند الزمن $t = 20$. مع ذلك، تصل قيمة التناقص الخطي عند AED 0 إلى أقل من قيمة التناقص الأسي عند AED 82.30. يوضّح التمثيل البياني في الشكل 7.6 هذه المقارنات.



الشكل 7.6

التناقص الخطي مقابل التناقص الأسي

ما بعد الصيغ

مع فهم أساسي للمعادلات التفاضلية، يمكنك نمذجة مجموعة متنوّعة من الظواهر الفيزيائية التي تنشأ في الاقتصاد والعلوم والهندسة. إنّ فهم الفرضيّات التي تدخل في النموذج يسمح لك بتفسير معنى الحل في سياق المشكلة الأصلية. علاوة على ذلك، فإنّ جزءًا من قوة الرياضيات يكمن في عموميتها. وفي هذه الحالة، قد تعمل معادلة تفاضلية معيّنة على نمذجة مجموعة من الظواهر المختلفة اختلافًا كبيرًا. وبهذا المعنى، فإنّنا نستفيد من علمنا بقليل من الرياضيات. وبعد إيجاد حل لمضاعفة الزمن في المثال 6.1، إذا تم إخبارك أنّ قيمة الاستثمار أو حجم الورم تم نمذجتها بالمعادلة نفسها، فلن تحتاج إلى إعادة حل أي معادلات لإيجاد أزمنة مضاعفة الاستثمار أو حجم الورم.

التمارين 7.6

تمارين كتابية

.1 تتسم الدالة الخطية بالميل الثابت. إذا أظهر عدد سكان زيادة عددية ثابتة عامًا بعد عام، فسّر لماذا يمكن تمثيل عدد السكان بدالة خطية. إذا أظهر عدد السكان زيادةً مئوية ثابتةً بدلًا من ذلك، فسّر لماذا يمكن تمثيل عدد السكان بدالة أُسية.

.2 إذا كان لعدد السكان معدل مواليد ثابت ومعدل وفاة ثابت (أصغر من معدل المواليد)، فصِفْ ما سيبدو عليه السكان مع مرور الزمن. في الولايات المتحدة، هل معدل الوفيات في زيادة أم تناقص أم يبقى كما هو؟ لماذا إذن يوجد اهتمام بشأن الحد من معدل المواليد؟

.3 اشرح، من الناحية المالية، لماذا معدل مرابحة معيّن كلما زاد عدد مرات المرابحة المركّبة، زِاد المال في الحساب في نهاية العام.

.4 في أمثلة النمو والتضاؤل، اتضح أنّ الثابت A مساوٍ للقيمة الإبتدائية. في أمثلة التبريد، اتضح أنّ الثابت A غير مساوٍ للقيمة الإبتدائية. اشرح سبب اختلاف أمثلة التبريد.

في التمارين 8–1، جـــد حلًا للمعادلة التفاضلية المعطاة تحقق الشرط الإبتدائي المشار إليه.

1. $y' = 4y, y(0) = 2$

2. $y' = 3y, y(0) = -2$

3. $y' = -3y, y(0) = 5$

4. $y' = -2y, y(0) = -6$

5. $y' = 2y, y(1) = 2$

6. $y' = -y, y(1) = 2$

7. $y' = y - 50, y(0) = 70$

8. $y' = -0.1y - 10, y(0) = 80$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تتضمّن التمارين 14–9 النمو الأسيّ.

9. على فرض أنّ مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 400 خلية. وبعد ساعة واحدة، يتضاعف عدد أفراد المجتمع إلى 800. (a) حدّد عدد أفراد المجتمع بسرعة بعد 3 ساعات. (b) جـــد معادلة للمجتمع في أيّ زمن. (c) كم سيكون عدد أفراد المجتمع بعد 3.5 ساعات؟

10. على فرض أنّ مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 100 خلية. وبعد ساعتين، تضاعف عدد أفراد المجتمع إلى 400. (a) حدّد عدد الأفراد بعد 6 ساعات. (b) جـــد معادلة للمجتمع في أيّ زمن. (c) كم سيكون عدد الأفراد بعد 7 ساعات؟

11. على فرض أنّ مستنبت بكتيري يتضاعف تعداده كل 4 ساعات. إذا كان عدد أفراد المجتمع 100 في البداية، (a) فحدّد سريعًا متى تصل إلى 400. (b) جـــد معادلة للمجتمع في أي زمن. (c) حدّد الزمن الذي يصل فيه عدد الأفراد إلى 6000.

12. على فرض أنّ مستنبت بكتيري يتضاعف تعداده ثلاث مرات كل 5 ساعات. إذا كان عدد أفراد المجتمع 200 في البداية، (a) حدّد سريعًا متى تصل إلى 5400. (b) جـــد معادلة للمجتمع في أيّ زمن. (c) حدّد متى يصل عدد الأفراد إلى 20,000.

13. على فرض أنّ تعداد إي كولاي يتضاعف كل 20 دقيقة. أزال علاج للعدوى 90% من إي كولاي الحالية وهو الزمن المناسب لإنجاز ما يلي. بدأ أفراد المجتمع بالعدد 10^8، ونمت لمدة T دقيقة، وتم تطبيق العلاج فعاد التعداد إلى العدد 10^8. جـــد الزمن T.

14. تشير الأبحاث التي قام بها ميدوز وميدوز وراندرز وبهرينز إلى أنّ كوكب الأرض به حاليًا 12950×10^3 km² من اليابسة صالحة للزراعة. تطلّب التعداد السكاني العالمي في عام 1950 إلى 4047×10^6 km² للتغذي عليهم، واحتاج التعداد في عام 1980 إلى 8094×10^6 km² إذا كانت المساحة المطلوبة تنمو بنسبة مئوية ثابتة، ففي أيّ سنة سيصل تعداد السكان إلى القيمة العظمى للعدد الذي يمكن تحمّله؟

15. على فرض أنّ كمية ما تزداد بطريقة أسيّة (أي عدد الخلايا في مستنبت بكتيري) بمعدل نمو r. أثبت أنّ ضعف الزمن هو $\frac{\ln 2}{r}$.

16. على فرض أنّ كمية ما تتناقص بطريقةٍ أُسيّة بثابت تضاؤل r. أثبت أنّ نصف العمر هو $\frac{\ln 2}{r}$. ما أوجه الفرق بين نصف العمر هنا وضعف الزمن في التمرين 15؟

تتضمّن التمارين 22–17 التضاؤل الأسيّ.

17. يعتبر الأسترونتيوم–90 أحد النظائر المشعّة الخطيرة. وبسبّب تشابهه مع الكالسيوم، تمتصه العظام البشرية بكل سهولة. ويبلغ نصف العمر الأسترونتيوم–90 حوالي 28 عامًا. إذا امتصّت العظام كميّةً منه نتيجة تعرّضها لانفجار نوويّ، فما النسبة المئوية التي ستبقى بعد مرور (a) 84 عامًا؟ (b) 100 عام؟

18. إنّ نصف العمر لليورانيوم ^{235}U هو حوالي 0.7×10^9 عامًا. إذا تم دفن 50 جرامًا في أحد مواقع النفايات النووية، فما الكمية المتبقية بعد مرور (a) 100 عام؟ (b) 1000 عام؟

19. إنّ نصف العمر للمورفين في دماء الإنسان هو 3 ساعات. إذا كان في البداية هناك 0.4 mg مورفين في مجرى الدم، فجـــد معادلة للكمية الموجودة في مجرى الدم في أي زمن. متى تنخفض الكمية لأقل من (a) 0.1 mg؟ (b) 0.01 mg؟

20. كرّر التمرين 19 إذا كان نصف العمر 2.8 ساعة.

21. إنّ تقدير العلماء لتاريخ إحدى الأحافير التي تحتوي على 20% من الكمية الأصلية من كربون–14. ومتذكّرًا أنّ نصف العمر يبلغ 5730 عامًا، فكم يبلغ عمر الأحفورة تقريبًا؟

22. إذا كان عمر إحدى الأحافير مليون عام، فكم تبلغ النسبة المئوية للكمية المتبقية من الكربون–14؟

تتضمّن التمارين من 23 إلى 28 قانون نيوتن في التبريد.

23. وضع وعاء حساء درجة حرارته 93°C (ساخنة جدًا) في غرفة درجة حرارتها 21°C. بعد دقيقة واحدة بُرّد الحساء حتى وصلت درجة حرارته إلى 82°C. فمتى تصل درجة الحرارة إلى 49°C (ضمناً)؟

24. تم تقديم وعاء أصغر من الحساء في درجة حرارة 93°C ثم بُرّد إلى 71°C في دقيقة واحدة. ما هي درجة الحرارة (بارد جدًا) التي سيكون عليها هذا الحساء عندما يصل الوعاء المذكور في التمرين 23 إلى 49°C (ضمناً)؟

25. تم صبّ مشروب مثلّج في درجة حرارة 10°C. وبعد دقيقتين من وضعه في غرفة درجة الحرارة بها 21°C، ارتفعت درجة حرارته إلى 13°C. (a) جـــد درجة حرارة المشروب عند أي زمن t. (b) كم ستبلغ درجة الحرارة بعد 10 دقائق؟ (c) متى سيتم تسخين المشروب حتى 19°C؟

26. بعد 20 دقيقة من تقديم فنجان قهوة سريعة في درجة حرارة، ما زالت القهوة على درجة سخونة مرتفعة عند 71°C. وبعد دقيقتين، انخفضت الحرارة إلى 70°C. فخمّن صديقك، الذي ما زالت قهوته على درجة سخونة مرتفعة، أنّه طالما أنّ درجة الحرارة تنخفض بمتوسط درجة واحدة في الدقيقة، فقد تم تقديمها عند درجة حرارة 82°C. (a) اشرح ما الخطأ في هذا المنطق. (b) هل كانت الحرارة عند التقديم أعلى أو أقل من 82°C؟ (c) جـــد درجة الحرارة الفعلية عند التقديم إذا علمت أنّ درجة حرارة الغرفة 20°C.

27. بالعودة إلى فنجان القهوة المذكور في مثال 6.3، على فرض أنّ الهدف هو تبريد القهوة حتى 49°C في 5 دقائق. فما هي درجة الحرارة التي يجب تقديم القهوة عندها؟

التمارين من 29 إلى 32 تتضمّن المرابحة المركّبة.

28. إذا استثمرتَ AED 1000 بمعدّل مرابحة سنوية 8%، قارن بين قيمة الاستثمار بعد عام واحد مع انواع المرابحة المركبة الآتية: سنويًا، شهريًا، يوميًا، مستمرة.

29. كرّر التمرين 29 لقيمة الاستثمار بعد 5 سنوات.

30. استثمر الشخص A مبلغ AED 10,000 في عام 1990 واستثمر الشخص B مبلغ AED 20,000 في عام 2000. (a) فإذا كان معدّل المرابحة السنويّة لكلا الشخصين 12% (مرابحة مركّبة مستمرّة)، فما قيم الاستثمارات في 2010؟ (b) كرّر مع معدّل مرابحة سنويّة 4%. (c) حدّد معدّل المرابحة السنويّة حيث يتساوى استثمار الشخص A بالضبط مع استثمار الشخص B. (إرشاد: تريد من الشخص A أن يمتلك AED 20,000 في عام 2000).

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

31. اشترى أحد المؤلفين مجموعة من البطاقات التجارية لكرة السلة في عام 1985 بمبلغ AED 34. وفي عام 1995، كان " السعر الإجمالي " لهذه المجموعة AED 9800. (a) فرضًا انه يوجد نسبة مئوية ثابتة للعائد على هذا الاستثمار، فجـــد معادلة استحقاق المجموعة عند الزمن t سنة (حيث $t = 0$ يناظر 1985). (b) عند معدل العائد هذا، فما هو المبلغ المستحَق للمجموعة في 2005؟ (c) اشترى هذا المؤلف أيضًا مجموعة من بطاقات البيسبول في عام 1985، تكلّفت AED 22. في 1995، كان الربح من هذه المجموعة AED 32. باستخدام معدل الربح هذا، ما هو الربح العائد للمجموعة في 2005؟

32. على فرض أنّ قيمة أحد الأصول AED 40,000 تتناقص بنسبة مئوية ثابتة 10% . جـــد قيمته بعد (a) 10 سنوات؛ وبعد (b) 20 سنة. قارن بين هذه القيم وأحد الأصول الذي تبلغ قيمته AED 40,000 ويصبح بلا قيمة خلال 20 عاماً باستخدام التناقص الخطي.

33. على فرض أنّ قيمة أحد الأصول AED 400,000 تتناقص بنسبة مئوية ثابتة تبلغ 40%. جـــد قيمته بعد (a) 5 سنوات؛ وبعد (b) 10 سنوات. قارن بين هذه القيم وأحد الأصول الذي تبلغ قيمته AED 40,000 ويصبح بلا قيمة خلال 10 أعوام باستخدام التناقص الخطي.

تتضمّن التمارين من 35 إلى 38 معدلات الضريبة.

34. في عام 1975، كانت الضرائب على الدخل الذي يتراوح بين AED 16,000 و AED 16,000 تُقدّر بـ 28%. وفي عام 1988، كانت الضرائب على الدخل الذي يتراوح بين AED 16,000 و AED 20,000 تُقدّر بـ 15%. وهذا يجعل الأمر يبدو كما لو كانت الضرائب قد انخفضت إلى حد كبير بين عامي 1975 و 1988. مع أخذ التضخم في الاعتبار، اشرح بإيجاز لماذا تُعدّ هذه المقارنة غير صحيحة.

35. لجعل المقارنة في التمرين 35 أكثر إنصافًا قليلًا، لاحظ أنّ ضريبة الدخل الذي يزيد عن AED 30,000 كانت 28% في عام 1988، وافترض أنّ متوسط التضخم بلغ 5.5% بين عامي 1975 و 1988. حدّد مبلغ AED 16,000 للتضخم بحساب قيمته بعد تزايد مستمر بنسبة 5.5% لمدة 13 عامًا. وبناء على هذا الحساب، كيف يمكن مقارنة المعدلات الضريبية؟

36. على فرض أنّ هيكلية ضريبة الدخل على النحو التالي: تُفرض ضريبة بنسبة 15% على أوّل AED 30,000، وبنسبة 28% على ما تبقّى. احسب الضريبة T_1 على دخل مقداره AED 40,000. افترض الآن أنّ التضخّم بلغ 5% وتتلقّى زيادة تكلفة معيشة (5%) إلى AED 42,000. احسب الضريبة T_2 على هذا الدخل. لمقارنة قيم الضرائب، عليك ضبط الضريبة T_1 مع التضخّم (أضِف 5%).

37. في التمرين 37، ظلّ قانون الضرائب كما هو، ولكنّ الضريبة المستحقّة (المنضبطة مع التضخّم) لم تظلّ كما هي. اشرح باختصار سبب حدوث ذلك. ما الذي يجب عمله لتظل الضريبة المستحقّة ثابتة؟

38. باستخدام بيانات المجتمع البكتيري في بداية هذا الجزء، حدّد x لترمز إلى الزمن و y لتمثّل اللوغاريتم الطبيعي للمجتمع. ارسم نقاط البيانات (x, y) واعط رأيك على كيفية إغلاق البيانات لكونها خطية. خذ نقطتين نموذجيتين وجـــد معادلة للخط المستقيم المار بالنقطتين. ثم جـــد دالة المجتمع $p(x) = e^{y(x)}$.

39. (a) كما فعلنا في التمرين 39، جـــد نموذجًا أُسيًا لبيانات المجتمع (0, 10) و(1, 15) و(2, 22) و(3, 33) و(4, 49). (b) جـــد نموذجًا أُسيًا لبيانات المجتمع (0, 20) و(1, 16) و(2, 13) و(3, 11) و(4, 9).

40. استخدام أسلوب التمرين 39 لإعداد نموذج أسي على البيانات التالية التي تمثّل النسبة المئوية لسكان الولايات المتحدة مُصنفين على أنّهم يعيشون في المزارع الريفية (البيانات من مكتب التعداد الأمريكي).

السنة	1960	1970	1980	1990
نسبة مؤوية لسكان المزرعة	7.5	5.2	2.5	1.6

41. استخدم أسلوب التمرين 39 لإعداد نموذج أسي للبيانات التالية التي تمثّل النسبة المئوية لسكان الولايات المتحدة مُصنّفين على أنهم يعيشون في المناطق الحضرية (البيانات من مكتب التعداد الأمريكي).

السنة	1960	1970	1980	1990
نسبة مؤوية لسكان المزرعة	69.9	73.5	73.7	75.2

42. أثبت أنّه لأي عدد ثابت c، $y = x - \frac{1}{2} + ce^{-2x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' + 2y = 2x$.

43. أثبت أنه لأي عدد ثابت c، $y = \sqrt{3x^2 + c}$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' = 3x/y$.

التطبيقات

44. يفيد موقع على شبكة الإنترنت أنّ العقاقير المضادة للاكتئاب مثل أميتربتيلين لها نصف العمر داخل الجسم البشري من 31 إلى 46 ساعة. لجرعة 150 mg، قارن بين الكميات التي تبقى في مجرى الدم بعد يوم واحد لشخص له نصف العمر 31 ساعة مقابل شخص له نصف العمر 46 ساعة. هل هذا الفرق كبير؟

45. أفادت التقارير أنّ عقار "بروزاك" له نصف العمر من يومين إلى 3 أيام ولكن قد يبقى في أجهزة الجسم لأسابيع عديدة بعد توقّفك عن تناوله. ما النسبة المئوية للجرعة الأصلية التي تبقى في الجسم بعد أسبوعين إذا كان نصف العمر يومين؟ ما الكمية التي ستبقى إذا كان نصف العمر 3 أيام؟

46. يبلغ نصف العمر للمضاد الحيوي "إرتابينيم"..... 4 ساعات في مجرى الدم في الإنسان. تبلغ الجرعة 1 gm في اليوم. جـــد الكمية الموجودة في الدم ومثّلها بيانيًا t ساعة بعد تناوله $(0 \le t \le 24)$.

47. قارن إجابتك بالتمرين 47 مع دواء مماثل يُؤخذ بجرعة 1 gm أربع مرات في اليوم، ونصف العمر له ساعة واحدة. (لاحظ أنّه عليك القيام بأربع عمليات حسابية منفصلة هنا)

48. يعرض مصرف بيع أوراق نقدية ستصل قيمة استحقاقها مبلغ AED 10,000 في 10 سنوات. ما المبلغ الذي عليك دفعه الآن مقابل البنكنوت إذا كنت ترغب في الحصول على عائد 8% على استثماراتك؟ (ملحوظة: يُسمّى هذا **بالقيمة الحالية** للأوراق النقدية). بشكل عام، بيّن أنّ القيمة الحالية لشيء ما تستحق AEDP في t عامًا بمعدل فائدة سنوية ثابتة r يتم استنتاجها من AEDPe^{-rt}.

49. على فرض أنّ قيمة قطعة أرض t عامًا من الآن AED $40{,}000e^{2\sqrt{t}}$. إذا كانت نسبة التضخّم السنوي هي 6%، فجـــد t التي تزيد من قيمة استثمارك الحالي إلى القيمة العظمى: AED $40{,}000e^{2\sqrt{t}-0.06t}$

50. على فرض أنّ عملًا تجاريًا له دخل مقداره AED$P(t)$ كل عام. القيمة الحالية مع معدل مرابحة سنوية r لهذا الدخل لمدة T سنة قادمة هي $\int_0^T P(t)e^{-rt}dt$. قارن بين القيم الحالية بنسبة 5% لثلاثة أشخاص لديهم الرواتب التالية لمدة 3 سنوات: A: $P(t) = 60{,}000$ ؛ B: $P(t) = 60{,}000 + 3000t$ ؛ و C: $P(t) = 60{,}000e^{0.05t}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

51. القيمة المستقبلية لمدخول بعد T عامًا مع معدل مرابحة سنوية r يتم استنتاجها من $\int_0^T P(t)e^{r(T-t)}dt$. احسب القيمة المستقبلية للحالات الثلاثة A وB وC في التمرين 51. صِف باختصار أوجه الاختلاف بين ما تقيسه القيمة الحالية والقيمة المستقبلية.

52. إذا ربحت مبلغًا قدره "مليون درهم"، فهل تكون أفضل حالًا عند حصولك على المال الخاص بك على أربع دفعات سنوية قيمة كل دفعة AED 280,000، أم على دفعة واحدة من واحد مليون درهم؟ (a) على فرض أنّه، في بداية العام، تم تسديد مدفوعات مع معدل مرابحة سنوية 8%. كرر السابق مع معدل مرابحة سنوية نسبتها (b) 6% و (c) 10%.

53. يستخدم الكثير من المستثمرين القاعدة 72 لتقدير سريع لمدى السرعة التي ستتضاعف بها قيمة استثماراتهم. فعلى سبيل المثال، تقترح هذه القاعدة أنه عند 8% سيبلغ ضعف الزمن $\frac{72}{8} = 9$ سنة تقريبًا. احسب ضعف الزمن الفعلي. اشرح لماذا ستكون القاعدة 69 أكثر دقةً. اذكر سببًا واحدًا على الأقل لاستخدام 72 بدلًا من ذلك.

تمارين استكشافية

1. يتم تحديد كمية الكربون–14 في الغلاف الجوي إلى حد كبير بقصف الأشعة الكونية. تحافظ الكائنات الحية على مستوى ثابت من الكربون–14 من التبادلات مع البيئة. وبموت الكائن الحي، تتوقّف عملية امتصاص الكربون–14، لذا تقلّ مستويات الكربون–14 بنصف العمر 5730 عامًا. يستطيع العلماء قياس معدل التضاؤل للكربون–14. (يمكنك تصوّر عداد جيجر). إذا كانت $y(t)$ هي كمية الكربون–14 المتبقّية عند الزمن t، ومعدل التغيّر هو $y'(t) = ky(t)$. لنفترض أنّ معدل التحلّل عند زمن الوفاة هو المعدل الحالي نفسه للكائنات الحية؛ ونسمّي ذلك $ky(0)$. نسبة معدلات التحلّل هي $y(t)/y(0)$. فرضًا أن $ky(t) = -2.4$ (التحلّل في الدقيقة) و $ky(0) = -6.7$ (التحلّل في الدقيقة). حل لإيجاد قيمة t. لنفترض الآن خطأ الافتراض الخاص بالمستويات الثابتة للكربون–14. إذا تم تخفيض $ky(0)$ بنسبة 5%، فما النسبة المئوية التي يتغيّر بها تقدير الزمن t؟ إذا تمّ تخفيض $ky(t)$ بنسبة 5%، فبأيّ نسبة مئوية يتغير تقدير الزمن ؟ تقريبًا، كيف تتحوّل أخطاء في القياسات إلى أخطاء في تقدير الزمن؟

2. بدأ ثلاثة نسور في الطيران من رؤوس مثلث متساوي الأضلاع من الضلع 1. يطير كل نسر بسرعة ثابتة متوجهًا مباشرةً إلى الطائر الآخر في اتجاه حركة عقارب الساعة. تتوقّف المطاردة عندما تلتقي النسور في الوسط. ما مقدار المسافة التي يطير عليها كل نسر؟ [إرشادات: مثّل مكان كل نسر بالإحداثيات القطبية (r, θ) بمركز المثلث عند الأصل. وعن طريق التماثل، لكل نسر قيمة r نفسها؛ وإذا كانت زاوية أحد النسور هي θ، فإنّه يتوجّه إلى النسر الذي تبلغ زاويته $\theta - \frac{2\pi}{3}$. (a) ضع معادلةً تفاضلية لحركة أحد النسور موضّحًا أنّه ثمة حل إذا كان $r'(\theta) = \sqrt{3}r$. استخدم صيغة طول القوس $L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2}\, d\theta$. (b) للتعميم، افترض أنّه ثمة n نسرًا يبدأون عند رؤوس شكل منتظم n وعند الضلع s. إذا كانت هي الزاوية الداخلية من مركز n-gon إلى الرؤوس المجاورة، فأثبت أنّ مسافة طيران كل نسر تساوي $\frac{s}{1 - \cos\alpha}$. ماذا يحدث للمسافة عندما n تتزايد بلا قيود؟ اشرح هذا من خلال مسارات النسور.]

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 7-7 المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

قمنا سابقًا بحل معادلتين تفاضليتين مختلفتين:

$$y'(t) = ky(t) \quad \text{و} \quad y'(t) = k[y(t) - T_a]$$

باستخدام الطريقة نفسها بشكل أساسي. إنّ هذين المثالين يدلان على المعادلات التفاضلية التي يمكن فصلها. سندرس هذا النوع من المعادلات ببعض الإسهاب في هذا الدرس. أولًا، نفكّر في **معادلة تفاضلية عادية من الدرجة الأولى** أكثر تعميمًا

$$y' = f(x, y) \tag{7.1}$$

وهنا، المشتقّة y' لدالةٍ مجهولة $y(x)$ هي معطاة كدالة f لكل من x و y. هدفنا هو إيجاد بعض الدوال $y(x)$ (**حل**) تحقق المعادلة (7.1) على بعض الفترات، I. المعادلة من **الرتبة الأولى**، بما أنّها تتضمّن المشتقة الأولى من الدالة المجهولة. سنفكّر في الحالة التي يمكن فيها فصل x و y. نسمّي المعادلة (7.1) **قابلة للفصل** إذا تمكّنّا من فصل المتغيّرات، أي إذا تمكّنّا من كتابتها بالصيغة

$$g(y)y' = h(x)$$

حيث يوجد كل x في أحد طرفي المعادلة ويوجد كل y في الطرف الآخر.

ملاحظات

لا تجعل الحرف الذي يرمز إلى المتغيّر المستقل يشتتك. فكثيرًا ما نستخدم المتغيّر المستقل x، كما هو الحال في المعادلة (7,1). كلما كان المتغيّر المستقل يمثّل الزمن، فإننا نستخدم t كمتغيّر مستقل، من أجل تعزيز هذا الرابط، كما فعلنا في المثال 6,2. بالتالي، وضِعت المعادلة التي تصف الانحلال الإشعاعي على الصورة

$$y'(t) = ky(t)$$

المثال 7.1 المعادلة التفاضلية القابلة للفصل

تحديد ما إذا كانت المعادلة التفاضلية

$$y' = xy^2 - 2xy$$

قابلة للفصل.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الحل لاحظ أنّ هذه المعادلة قابلة للفصل، حيث يمكننا إعادة كتابتها على الصورة

$$y' = x(y^2 - 2y)$$

ثم القسمة على $(y^2 - 2y)$ (بافتراض أنّها لا تساوي صفرًا)، فنحصل على

$$\frac{1}{y^2 - 2y}y' = x$$

المثال 7.2 المعادلة غير القابلة للفصل

المعادلة

$$y' = xy^2 - 2x^2y$$

غير قابلة للفصل، حيث لا يمكننا فصل x و y. (جرّب ذلك بنفسك!)

في الأساس، يجب فصل المتغيّرين x و y بالضرب أو القسمة لكي تكون المعادلة قابلة للفصل. لاحظ أنّه في مثال 7.2، يمكنك التحليل إلى العوامل للحصول على $y' = xy(y - 2x)$. ولكن يمنع التعبير $y - 2x$ أن تكون المعادلة قابلة للفصل.

تُعتبَر المعادلات التفاضلية القابلة للفصل ذات أهمية نظرًا إلى وجود وسيلة بسيطة جدًا لحلها. لاحظ أنّه إذا أجرينا عملية التكامل لكلا الطرفين في المعادلة يكون:

$$g(y)y'(x) = h(x)$$

بمعلوميّة x، نجد أنّ

$$\int g(y)y'(x)\,dx = \int h(x)\,dx \qquad (7.2)$$

بما أنّ $dy = y'(x)\,dx$، فإنّ التكامل على الجانب الأيسر من (7.2) يصبح

$$\int g(y)\underbrace{y'(x)\,dx}_{dy} = \int g(y)\,dy$$

وبالتالي، من (7.2)، نجد أنّ

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx$$

لذا إذا كان يمكننا إيجاد قيمة كل من هذه التكاملات، سيصبح لدينا المعادلة التي تربط بين x و y، ولا تتضمّن y'.

المثال 7.3 حل معادلة قابلة للفصل

جـــد حل المعادلة

$$y' = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}$$

الحل بعد فصل المتغيّرات، لاحظ أننا نحصل على

$$y^2y' = x^2 + 7x + 3$$

مع تكامل كلا طرفي المعادلة بالنسبة إلى x فإننا نحصل على

$$\int y^2y'(x)\,dx = \int (x^2 + 7x + 3)\,dx$$

أو

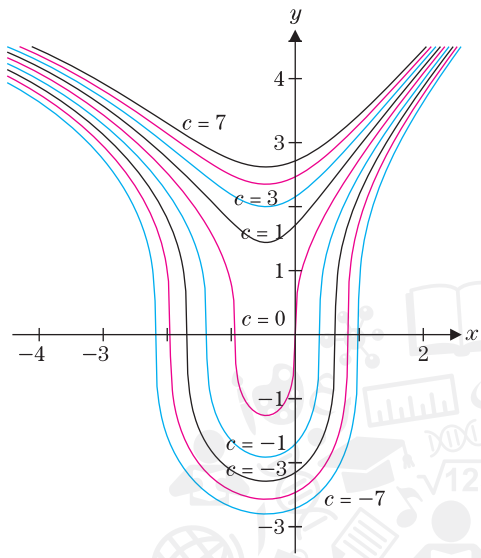
$$\int y^2dy = \int (x^2 + 7x + 3)\,dx$$

بإجراء التكاملات المشار إليها نحصل على:

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} + 3x + c$$

حيث دمجنا ثابتين من ثوابت التكامل في ثابت واحد على الطرف الأيمن.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الشكل 7.7
عائلة الحلول

بحل y، نجد أنّ

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3c}$$

لاحظ أنّ لكل قيمة من c، نحصل على حل آخر للمعادلة التفاضلية. وهذا يُسمى **مجموعة من الحلول** (أو **الحل العام**) للمعادلة التفاضلية. في الشكل 7.7، رسمنا عددًا من عائلة الحلول هذه. ■

وعمومًا، سيشمل حل معادلة قابلة للفصل من الرتبة الأولى على قيمة ثابت افتراضي (ثابت التكامل). لاختيار منحنى واحد فقط من منحنيات الحلول هذه، سنحدد نقطة واحدة يمرّ بها منحنى الحل، لنقل (x_0, y_0). إذًا، نحن نطلب ذلك

$$y(x_0) = y_0$$

وهذا يسمى **الشرط الإبتدائي** (لأنّ هذا الشرط كثيرًا ما يحدد الحالة الإبتدائية للنظام الفيزيائي). يشار إلى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى مع الشرط الإبتدائي على أنّها **مسألة قيمة إبتدائيّة** أو (IVP).

المثال 7.4 **حل مسألة قيمة إبتدائية**

حل مسألة القيمة الإبتدائيّة $y' = \dfrac{x^2 + 7x + 3}{y^2}, \quad y(0) = 3$

الحل في مثال 7.3، وجدنا أنّ الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3c}$$

من الشرط الإبتدائي لدينا:

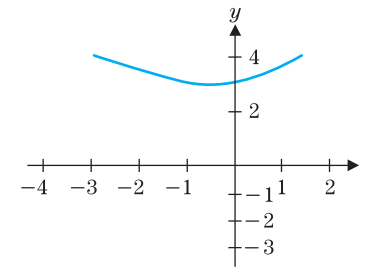
$$3 = y(0) = \sqrt[3]{0 + 3c} = \sqrt[3]{3c}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ومن ثَمّ، $c = 9$. الحل لمسألة القيمة الإبتدائية (IVP) هو:

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 27}$$

يُبيّن الشكل 7.8 تمثيلًا بيانيًا لهذا الحل. لاحظ أنّ هذا التمثيل البياني أعلاه سيتلائم مع المنحنيات التي رأيناها في الشكل 7.7. سنستكشف آثار الشروط الإبتدائيّة الأخرى في التمارين. ■



الشكل 7.8

لسنا دائمًا محظوظين، كما حدث في المثال 7.2 وفي هذا المثال، كنا قادرين على الحصول على تمثيل صريح للحل (أي وجدنا صيغةً لـ y بدلالة x). في معظم الأحيان، يجب أن نقبل بوجود تمثيل ضمني للحل، أيْ المعادلة التي تربط بين x و y والتي لا يمكن إيجاد الحل للمتغير y بدلالة x وحدها.

المثال 7.5 مسألة قيمة إبتدائية لها حل ضمني فقط

جـــد الحل لمسألة القيمة الإبتدائية الآتية:

$$y' = \frac{9x^2 - \sin x}{\cos y + 5e^y}, \quad y(0) = \pi$$

الحل لاحظ أوّلًا أنّ هذه المعادلة التفاضلية قابلة للفصل، بما أنّه يمكننا إعادة كتابتها على الصورة

$$(\cos y + 5e^y)y'(x) = 9x^2 - \sin x$$

مع تكامل كلا طرفي المعادلة بمعلوميّة x، نجد:

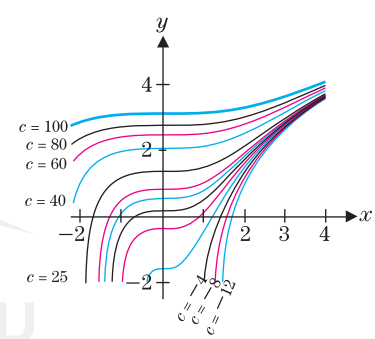
$$\int (\cos y + 5e^y)y'(x)\,dx = \int (9x^2 - \sin x)\,dx$$

أو

$$\int (\cos y + 5e^y)\,dy = \int (9x^2 - \sin x)\,dx$$

بإيجاد قيم التكاملات، فإنّنا نحصل على

$$\sin y + 5e^y = 3x^3 + \cos x + c \tag{7.3}$$



الشكل 7.9a
عائلة الحلول

لاحظ أنّه لا يوجد طريقة لحل هذه المعادلة بصورة صريحة للمتغيّر y بدلالة x. ومع ذلك، لا يزال بإمكانك رسم التمثيلات البيانية لبعض عناصر هذه العائلة من الحلول باستخدام المخطط الضمني على أداة الرسم البياني الخاصة بك. وتم رسم العديد منها في الشكل 7.9a.وعلى الرغم من عدم إيجاد حل لـ y بصورة صريحة بدلالة x، ما زال بإمكاننا استخدام الشرط الإبتدائي. بالتعويض عن $x = 0$ وعن $y = \pi$ في المعادلة (7.3)، فإننا نحصل على

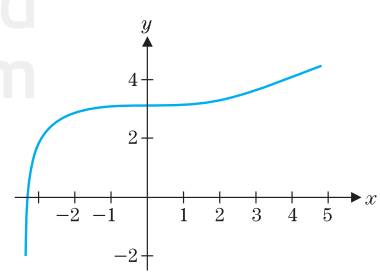
$$\sin \pi + 5e^{\pi} = 0 + \cos 0 + c$$

أو

$$5e^{\pi} - 1 = c$$

سينتج عن هذا

$$\sin y + 5e^y = 3x^3 + \cos x + 5e^{\pi} - 1$$



الشكل 7.9b
حل مسألة القيمة الإبتدائية

كتمثيل ضمني لحل مسألة القيمة الإبتدائية. وبالرغم من أنه لا يمكننا حل y بدلالة x وحدها؛ وبإعطاء أي قيمة خاصة لـ x، يمكننا استخدام طريقة نيوتن (أو بعض الطرائق العددية الأخرى) لتقريب قيمة y المناظرة. وهذا في الأساس ما تفعله أنظمة الحاسوب الجبريّة CAS (مع نقاط كثيرة جدًا) عندما تستخدمها لرسم تمثيل بياني بالطريقة الضمنيّة. يوضّح الشكل 7.9b مخططًا لحل مسألة القيمة الإبتدائيّة. ■

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نمو لوجستي

في الدرس 7.6، قدّمنا المعادلة التفاضلية

$$y' = ky$$

كنموذج لنمو المجتمع البكتيري، وصالحة للتعدادات السكانية المتزايدة مع موارد غير محدودة ومساحة غير محدودة للنمو. بالطبع، إنّ كل المجتمعات السكانية لديها عوامل تحدّ من نموها في النهاية. وهكذا، لا يوفّر هذا النموذج الخاص معلومات مفيدة بصورة عامة إلا لفترات زمنية قصيرة نسبيًا.

ملاحظات تاريخية

بيير فيرهولست (1804–1849)

عالم رياضيات بلجيكي اقترح النموذج اللوجستي للنمو السكاني. كان بيير فيرهولست أستاذًا للرياضيات في بروكسل وأجرى بحثًا عن نظرية الأعداد والإحصاءات الاجتماعية. كانت المعادلة اللوجستية من أعظم إسهاماته (وتسمى أيضًا معادلة فيرهولست) والتي منحتنا أول نموذج واقعي للسكان ذوي الموارد المحدودة. تجدر الإشارة إلى أنّ تقدير فيرهولست لتوازن السكان في بلجيكا يتطابق مع سكان بلجيكا الحاليين.

يفترض نموذج بديل للنمو السكاني أن يكون هناك قيمة عظمى لعدد السكان المستدام، M (ويُسمّى **القدرة الاستيعابية**)، والتي تحددها الموارد المتاحة. بالإضافة إلى ذلك، عندما يقترب عدد السكان من M (عندما تصبح الموارد المتاحة أكثر ندرة)، يصبح النمو السكاني بطيئًا. لنعكس الضوء على هذا الأمر، نفترض أنّ معدل النمو السكاني يتناسب سويًا مع مستوى السكان الحالي والفرق بين المستوى الحالي والقيمة العظمى، M. وهذا يعني، إذا كان $y(t)$ هو عدد السكان عند زمنٍ ما t، نفترض أنّ

$$y'(t) = ky(M - y)$$

يتم الإشارة إلى هذه المعادلة التفاضلية على أنّها **المعادلة اللوجستية**.

وهناك اثنان من الحلول الواضحة الخاصة بهذه المعادلة التفاضلية. الدوال الثابتة $y = 0$ و $y = M$ كلاهما حل لهذه المعادلة التفاضلية. وهذه تُسمّى **حلول التوازن** لأنه، على فرضيّة النمو اللوجستي، بمجرد وصول المجتمع البكتيري إلى أحد هذه المستويات، فإنها تظل هناك طوال الزمن. إذا كان $y \neq 0$ و $y \neq M$، فيمكننا حل المعادلة التفاضلية، بما أنّها قابلة للفصل

$$\frac{1}{y(M-y)}y'(t) = k \tag{7.4}$$

مع تكامل كلا طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، نحصل على

$$\int \frac{1}{y(M-y)}y'(t)\,dt = \int k\,dt$$

أو

$$\int \frac{1}{y(M-y)}\,dy = \int k\,dt \tag{7.5}$$

باستخدام الكسور الجزئية، يمكننا أن نكتب

$$\frac{1}{y(M-y)} = \frac{1}{My} + \frac{1}{M(M-y)}$$

من المعادلة (7.5)، فإننا نحصل على

$$\int \left[\frac{1}{My} + \frac{1}{M(M-y)}\right] dy = \int k\,dt$$

إجراء التكامل يعطينا

$$\frac{1}{M}\ln|y| - \frac{1}{M}\ln|M-y| = kt + c$$

بضرب كلا الطرفين في M وباستخدام الحقيقة أن $0 < y < M$، نجد أنّ

$$\ln y - \ln(M-y) = kMt + Mc$$

وبأخذ الأسس لكلا الطرفين، فإنّنا نحصل على

$$\exp[\ln y - \ln(M-y)] = e^{kMt+Mc} = e^{kMt}e^{Mc}$$

وبعد ذلك، باستخدام قوانين الأسس واللوغارتمات واستبدال الحد الثابت e^{Mc} بثابت جديد A، فإننا نحصل على

$$\frac{y}{M-y} = Ae^{kMt}$$

لحل هذه لـ y، نضرب أولًا كلا الطرفين في $(M-y)$ لنحصل على

$$\begin{aligned} y &= Ae^{kMt}(M-y) \\ &= AMe^{kMt} - Ae^{kMt}y \end{aligned}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

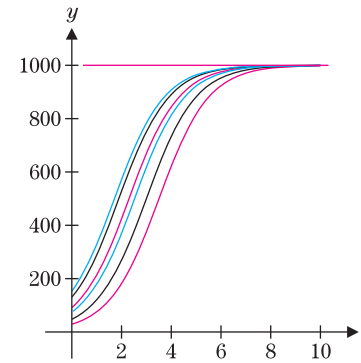
وبدمج حديّ y، نجد أنّ

$$y(1 + Ae^{kMt}) = AMe^{kMt}$$

الذي يعطينا الحل الصريح للمعادلة اللوجستية،

$$y = \frac{AMe^{kMt}}{1 + Ae^{kMt}} \tag{7.6}$$

في الشكل 7.10، رسمنا مخططًا لعدد من منحيات هذه الحلول بقيم متعددة من A (للحالة التي فيها $M = 1000$ و $k = 0.001$)، الى جانب حل التوازن $y = 1000$. يمكنك أن ترى من الشكل 7.10 أنّ النمو اللوجستيي يتكوّن من نمو أسي تقريبًا في بادئ الأمر، متبوعًا بالتمثيل البياني الذي يصبح مقعرًا لأسفل ثم يقترب من القيمة العظمى، M.



الشكل 7.10
العديد من منحنيات الحل

المثال 7.6 حل مسألة النمو اللوجستي

$M = 1000$ قيمة عظمى معطاة في المجتمع السكاني المستدام (وهذا يمكن أن يُقاس بالملايين أو بالطن، وما إلى ذلك) ومعدل نمو $k = 0.007$. جـــد تعبيرًا مناسبًا للمجتمع السكاني في أي زمن t، لمجتمعٍ سكاني إبتدائي معطى $y(0) = 350$ وبفرضيّة النمو اللوجستي.

الحل من الحل (7.6) للمعادلة اللوجستية، نجد أنّ $kM = 7$ و

$$y = \frac{1000Ae^{7t}}{1 + Ae^{7t}}$$

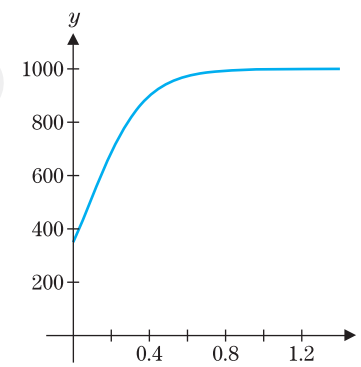
من الشرط الإبتدائي، نحصل على

$$350 = y(0) = \frac{1000A}{1 + A}$$

حل للثابت A، نحصل على $A = \frac{35}{65}$، الذي يعطينا الحل لمسألة القيمة الإبتدائيّة

$$y = \frac{35{,}000e^{7t}}{65 + 35e^{7t}}$$

تم رسم هذا الحل في الشكل 7.11. ■



الشكل 7.11
$y = \frac{35{,}000e^{7t}}{65 + 35e^{7t}}$

يجب علينا ملاحظة، وبشكل عملي، أنّ قيم M و k مجهولة ويجب تقديرها عبر دراسة وافية لمجتمع خاص. سنستكشف هذه المشاكل بتعمق أكبر في التمارين.

في المثال الأخير، سنعتبر النمو من خلال خطة استثمارية.

المثال 7.7 استراتيجيات الاستثمار لصنع مليون

يتم استثمار المال بمرابحة سنويّة 8% مركّبة مستمرّة. إذا تم الإيداع بشكل مستمر بمعدل AED 2000 سنويًا، فجـــد حجم الاستثمارات الإبتدائية المطلوبة لبلوغ مليون درهم خلال 20 عامًا.

الحل هنا، معدّل المرابحة المكتسبة هو 8% وودائع إضافية يُفترض أن تتم على أساس مستمر. إذا كان معدل الإيداع AEDd في السنة، فإنّ المبلغ $A(t)$ المودَع في الحساب بعد t سنة يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{dA}{dt} = 0.08A + d$$

هذه المعادلة قابلة للفصل ويمكن حلها بقسمة كلا الطرفين على $0.08A + d$ وإجراء عملية التكامل. لدينا

$$\int \frac{1}{0.08A + d}\, dA = \int 1\, dt$$

لذلك

$$\frac{1}{0.08} \ln |0.08A + d| = t + c$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

باستخدام $d = 2000$، نجد أنّ

$$12.5 \ln |0.08A + 2000| = t + c$$

بوضع $t = 0$ وبأخذ $A(0) = x$ سنحصل على ثابت التكامل:

$$12.5 \ln |0.08x + 2000| = c$$

لذلك

$$12.5 \ln |0.08A + 2000| = t + 12.5 \ln |0.08x + 2000| \tag{7.7}$$

لإيجاد قيمة x حيث $A(20) = 1{,}000{,}000$، نعوّض عن $t = 20$ و $A = 1{,}000{,}000$ في المعادلة (7.7) لنحصل على

$$12.5 \ln |0.08(1{,}000{,}000) + 2000| = 20 + 12.5 \ln |0.08x + 2000|$$

أو

$$12.5 \ln |82{,}000| = 20 + 12.5 \ln |0.08x + 2000|$$

يمكننا حل هذه لإيجاد x، بطرح 20 من كلا الطرفين ثم القسمة على 12.5، لنحصل على

$$\frac{12.5 \ln 82{,}000 - 20}{12.5} = \ln |0.08x + 2000|$$

وبأخذ الأسس من كلا الطرفين، فإننا نحصل الآن على

$$e^{(12.5 \ln 82{,}000 - 20)/12.5} = 0.08x + 2000$$

الحل لإيجاد ناتج x

$$x = \frac{e^{\ln 82{,}000 - 1.6} - 2000}{0.08} \approx 181{,}943.93$$

إذًا، يجب أن يكون الاستثمار الإبتدائي AED 181,943.93 (أقل من AED 200,000) لكي يستحق مبلغ مليون درهم في نهاية 20 عامًا. ■

لنكون منصفين، يجب تفسير الأعداد في مثال 7.7 (مثل معظم أعداد الاستثمار) تفسيرًا دقيقًا. وبطبيعة الحال، بعد 20 سنة من الآن، من المرجّح ألا يشتري مليون درهم ما يشتريه اليوم. على سبيل المثال، ستكون قيمة مليون درهم مع معدل تضخم 8% $\text{AED } 1{,}000{,}000e^{-0.08(20)} \approx \text{AED } 201{,}896$، وهي ليست أكبر بكثير من مبلغ AED 181,943 الاستثمار الإبتدائي المطلوب. ومع ذلك، إذا كان معدل التضخم 4% فقط، ستكون قيمة مليون درهم (بالدرهم الحالي) هي AED 449,328. الدرس هنا هو الدرس الواضح: احرص على استثمار أموالك بمعدّل مرابحة يتعدّى معدّل التضخّم.

التمارين 7.7

تمارين كتابيّة

1. ناقش أوجه الاختلاف بين حل المعادلات الجبرية (مثل، $x^2 - 1 = 0$) وحل المعادلات التفاضلية. لاحظ على وجه الخصوص نوع عنصر الرياضيات الذي تبحث عن حله.

2. المعادلة التفاضلية هي غير قابلة للفصل إذا لم تُكتب في الصورة $g(y)y' = h(x)$. إذا كان لديك معادلة لا يمكنك كتابتها بهذا الشكل، فكيف يمكنك أن تعرف ما إذا كان هذا مستحيلًا بالفعل أو أنك فقط لم ترسمها حتى الآن؟ ناقش بعض الصيغ العامة (مثل، $x + y$ و xy) التي تعطيك أدلة على إذا ما كانت المعادلة قابلة للفصل أم لا.

3. لا تبدو منحنيات الحل الموجودة في الأشكال 7.7 و 7.9a و 7.10 أنها تتقاطع. في الحقيقة، هذه المنحنيات لا تتقاطع أبدًا. إذا كانت منحنيات الحل تتقاطع عند النقطة (x_1, y_1)، فعندئذٍ ثمة حلان يتفقان مع الشرط الإبتدائي $y(x_1) = y_1$. اشرح سبب عدم حدوث ذلك. في ما يتعلق بالمعادلة اللوجستية كنموذج لنمو المجتمع، اشرح لماذا من الضروري أنْ نعرف أنّ هذا لا يحدث.

4. تحتوي المعادلة اللوجستية على حد في المعادلة التفاضلية يعمل على تباطؤ النمو السكاني عندما يتزايد المجتمع. ناقش بعض أسباب حدوث ذلك في مجتمع حقيقي (إنسان وحيوان ونبات).

في التمارين من 1 إلى 4، حدد ما إذا كانت المعادلة التفاضلية قابلة للفصل أم لا.

1. (a) $y' = (3x + 1)\cos y$ (b) $y' = (3x + y)\cos y$

2. (a) $y' = 2x(\cos y - 1)$ (b) $y' = 2x(y - x)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3. (a) $y' = x^2y + y\cos x$ (b) $y' = x^2y - x\cos y$

4. (a) $y' = 2x\cos y - xy^3$ (b) $y' = x^3 - 2x + 1$

في التمارين من 5 إلى 16، المعادلة التفاضلية قابلة للفصل. جـــد الحل العام، بصيغة صريحة إذا أمكن.

5. $y' = (x^2+1)y$

6. $y' = 2x(y-1)$

7. $y' = 2x^2y^2$

8. $y' = 2(y^2+1)$

9. $y' = \dfrac{6x^2}{y(1+x^3)}$

10. $y' = \dfrac{3x}{y+1}$

11. $y' = \dfrac{2x}{y}e^{y-x}$

12. $y' = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{x\ln x}$

13. $y' = \dfrac{\cos x}{\sin y}$

14. $y' = x\cos^2 y$

15. $y' = \dfrac{xy}{1+x^2}$

16. $y' = \dfrac{2}{xy+y}$

في التمارين 17 إلى 20، جـــد الحل العام بصيغة صريحة وارسم عدة عناصر من عائلة الحلول.

17. $y' = -xy$

18. $y' = \dfrac{-x}{y}$

19. $y' = \dfrac{1}{y}$

20. $y' = 1 + y^2$

في التمارين 21–28، جـــد حل مسألة القيمة الإبتدائيّة IVP بصورة صريحة إذا أمكن.

21. $y' = 3(x+1)^2y,\ y(0) = 1$

22. $y' = \dfrac{x-1}{y^2},\ y(0) = 2$

23. $y' = \dfrac{4x^2}{y},\ y(0) = 2$

24. $y' = \dfrac{x-1}{y},\ y(0) = -2$

25. $y' = \dfrac{4y}{x+3},\ y(-2) = 1$

26. $y' = \dfrac{3x}{4y+1},\ y(1) = 4$

27. $y' = \dfrac{4x}{\cos y},\ y(0) = 0$

28. $y' = \dfrac{\tan y}{x},\ y(1) = \dfrac{\pi}{2}$

في التمارين من 29 إلى 34، استخدم المعادلة (7.6) للمساعدة في حل مسألة القيمة الإبتدائيّة.

29. $y' = 3y(2-y),\ y(0) = 1$

30. $y' = y(3-y),\ y(0) = 2$

31. $y' = 2y(5-y),\ y(0) = 4$

32. $y' = y(2-y),\ y(0) = 1$

33. $y' = y(1-y),\ y(0) = \frac{3}{4}$

34. $y' = y(3-y),\ y(0) = 0$

35. أحيانًا تتم كتابة المعادلة اللوجستية بالصيغة $y'(t) = ry(t)(1 - y(t)/M)$. أثبت أنها مكافئة للمعادلة (7.4) التي فيها $r/M = k$. قام علماء الأحياء بقياس قيم القدرة الاستيعابية M ومعدل النمو r لمجموعة متنوعة من الأسماك. وكانت القيم التقريبية لسمك الهلبوت فقط هي $r = 0.71\ \text{year}^{-1}$ و $M = 8 \times 10^7$ kg. (a) إذا كانت الكتلة الإبتدائية لسمك الهلبوت تساوي $y(0) = 2 \times 10^7$ kg، جـــد معادلة تقيس الكتلة الأحيائية (الحيوية) للهلبوت في أي زمن. (b) ارسم التمثيل البياني للكتلة الأحيائية كدالة للزمن. (c) قدّر كم من الزمن ستستغرق الكتلة الحيوية للحصول على حدود 10% من القدرة الاستيعابية.

36. (a) جـــد حل المعادلة (7.4) إذا كان $y(t) > M$. (b) إذا ارتفعت الكتلة الأحيائية للهلبوت (انظر التمرين 35) ارتفاعًا مفاجئًا إلى 3×10^8 kg، فما الزمن الذي سيستغرقه لينخفض عدد أفراد المجتمع مرة أخرى إلى حدود 10% من القدرة الاستيعابية؟

تتعلق التمارين من 37 إلى 40 بالاستثمارات المالية.

37. (a) إذا تم إيداع الودائع بشكل مستمر في أحد الحسابات بمعدل AED 2000 سنويًا ومعدّل مرابحة سنويّة 6% مركّبة مستمرّة، جـــد حجم الاستثمارات الإبتدائيّة المطلوبة لبلوغ مليون درهم خلال 20 عامًا. بمقارنة إجابتك بالإجابة عن المثال 7.7، ما مقدار الاختلاف الذي صنعه معدّل المرابحة؟ (b) إذا تم استثمار مبلغ AED 10,000 في بداية الأمر بمعدّل مرابحة 6% مركّبة مستمرّة، فجـــد معدل الإيداع المستمر (سنويًا) اللازم لبلوغ مليون درهم خلال 20 سنة. ما مقدار الفرق الذي يحدثه الإيداع الإبتدائي؟

38. الرهن العقاري لمنزل هو قرض يجب أن يُدفع على مدى فترة محددة من الزمن. على فرض أنّه تم اقتراض مبلغ AED 150,000 بمرابحة سنوية 8%. إذا كان مقدار القسط الشهري هو AEDP، فاشرح لماذا تمثّل المعادلة $A'(t) = 0.08A(t) - 12P$، $A(0) = 150{,}000$ نموذجًا للمبلغ المستحق بعد t سنة. لتمويل عقاري مدته 30 عامًا، تم وضع دفعة الأقساط P بحيث $A(30) = 0$. (a) جـــد P. ثم احسب المبلغ الإجمالي المدفوع وقيمة المرابحة المدفوعة. (b) أعِد العمل في الجزء (a) بقرض 7.5%. هل انخفاض معدّل المرابحة بقيمة نصف بالمائة يحدث فرقًا؟ (c) أعِد العمل في الجزء (a) بتمويل عقاري مدته 15 عامًا. قارن بين الدفعات الشهرية والمبلغ الكلي المدفوع. (d) أعِدْ العمل في الجزء (a) بقرض قيمته AED 125,000. ما مقدار الفرق الذي يحدث عند عمل دفعة أولى إضافية قيمتها AED 25,000؟

39. (a) يساهم شخص بمبلغ AED 10,000 كل عام لصالح أحد صناديق التقاعد باستمرار لمدة 10 سنوات حتى سن 40 ولكنه لم يقدم دفعة إبتدائيّة أو دفعات إضافية. عند معدّل مرابحة سنويّة قيمتها 8%، ما قيمة الصندوق عند سن 65؟ (b) يساهم شخص بمبلغ AED 20,000 كل عام لصالح أحد صناديق التقاعد من سن 40 حتى سن 65 ولكنه لم يقدم دفعة إبتدائيّة. مع معدّل مرابحة سنويّة قيمتها 8% ، ما قيمة الصندوق عند سن 65؟ (c) جـــد معدّل المرابحة السنويّة r التي تتساوى عندها صناديق التقاعد لدى المستثمرين.

40. كانت نواة أحد التبرعات AED 1,000,000 وتم استثمار هذا المبلغ بمعدّل مرابحة مركّبة مستمرّة قيمتها 10%. حدد المبلغ الذي يمكن سحبه سنويًا (باستمرار) بحيث تستمر الوديعة لمدة 30 عامًا.

41. (a) في مثال 7.3، جـــد الحل المار بالنقطة $(0, 0)$ ومثله بيانيًا. (b) لاحظ أنّ مسألة القيمة الإبتدائيّة هي $y' = \dfrac{x^2+7x+3}{y^2}$ مع $y(0) = 0$. إذا عوضت عن $y = 0$ في المعادلة التفاضلية، فما هو $y'(0)$؟ صِفْ بالتمثيل البياني ما يحدث عند $x = 0$. (c) لاحظ أنّ $y'(x)$ لا توجد عند أي x لكل $y(x) = 0$. من الحل المعطى في مثال 7.4، فهذا يحدث إذا كان $x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3c = 0$. جـــد القيم c_1 و c_2 بحيث يكون لهذه المعادلة ثلاثة حلول حقيقية إذا وفقط إذا $c_1 < c < c_2$.

42. (a) مثل بيانيًا حل $y' = \dfrac{x^2+7x+3}{y^2}$ مع $c = c_2$. (انظر التمرين 41). (b) مع $c = c_2$ في التمرين 41، ناقش أنّ حل $y' = \dfrac{x^2+7x+3}{y^2}$ مع $y(0) = \sqrt[3]{3c_2}$ له نقطتان مع مماسات رأسيّة. قدّر أماكن النقاط الثلاثة مع المماسات الرأسية في التمرين 41.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمارين من 43 إلى 46 ترتبط بالتفاعلات الكيميائية ثنائية التجزئة العكسيّة، حيث يتحد الجزيئان A و B ليكوّنا جزيئين آخرين C و D والعكس صحيح. إذا كان $x(t)$ و $y(t)$ هما تركيزان لكل من C و D، بالترتيب، والتركيزات الإبتدائية لـ A، B، C، D هي a، b، c و d، بالترتيب، ثم يتم تمثيل التفاعل بواسطة

$$x'(t) = k_1(a + c - x)(b + c - x) - k_{-1}x(d - c + x)$$

لثوابت المعدل k_1 و k_{-1}.

43. إذا كان $k_1 = 1$، $k_{-1} = 0.625$، $a + c = 0.4$، $b + c = 0.6$، $c = d$ و $x(0) = 0.2$. فجد التركيز $x(t)$. مثّل بيانيًا $x(t)$ وجد مستوى التركيز النهائي.

44. كرّر تمرين 43 مع (a) $x(0) = 0.3$ و (b) $x(0) = 0.6$. اشرح باختصار ما هو الشيء المستحيل للشرط الإبتدائي في الجزء (b).

45. للتفاعل ثنائي التجزيئ مع $k_1 = 0.6$، $k_{-1} = 0.4$، $a + c = 0.5$، $b + c = 0.6$ و $c = d$. اكتب المعادلة التفاضلية لتركيز C. لِـ $x(0) = 0.2$. قم بالحل لإيجاد التركيز في أي زمن ومثل الحل بيانيًا.

46. للتفاعل ثنائي الجزيء مع $k_1 = 1.0$، $k_{-1} = 0.4$، $a + c = 0.6$، $b + c = 0.4$ و $d - c = 0.1$. اكتب المعادلة التفاضلية لتركيز C. لِـ $x(0) = 0.2$. قم بالحل لإيجاد التركيز في أي زمن ومثل الحل بيانيًا.

التمارين من 47 إلى 50 ترتبط بالنمو اللوجستي مع الحصاد. على فرض أنّ مجتمع منعزل يحقق المعادلة اللوجستية $y'(t) = ky(M - y)$. إذا تم حصاد مجتمع (بالصيد، على سبيل المثال) بمعدل R، ثم أصبح تمثيل هذا المجتمع $y'(t) = ky(M - y) - R$.

47. على فرض أنّ نوعًا من الأسماك له مجتمع يقدّر بمئات الآلاف وتتبع النموذج اللوجستي مع $k = 0.025$ و $M = 8$. (a) حدد التأثير طويل المدى على المجتمع إذا كان المجتمع الإبتدائي $[y(0) = 8]$ 800,000 ويتناقص عدد الأسماك بمعدل 20,000 كل عام بسبب الصيد. (b) كرر ذلك إذا كان معدل صيد الأسماك 60,000 في السنة.

48. لنموذج الصيد $P'(t) = 0.025P(t)[8 - P(t)] - R$، يكون عدد أفراد المجتمع ثابت إذا كان $P'(t) = P^2 - 8P + 40R = 0$. تُسمى الحلول بنقاط التوازن. قارن بين نقاط التوازن في الأجزاء (a) و (b) من التمرين 47.

49. حل نموذج المجتمع

$$\begin{aligned} P'(t) &= 0.05P(t)[8 - P(t)] - 0.6 \\ &= 0.4P(t)[1 - P(t)/8] - 0.6 \end{aligned}$$

مع $P(0) > 2$ وحدد النهاية $\lim_{t\to\infty} P(t)$. ماذا يحدث إذا كان $P(0) < 2$؟

50. يمثّل العدد الثابت 0.4 في التمرين 49 معدل النمو الطبيعي للنوع الأحيائي. بمقارنة إجابات التمارين من 47 إلى 49، ناقش كيفيّة تأثير هذا الثابت على حجم المجتمع.

التطبيقات

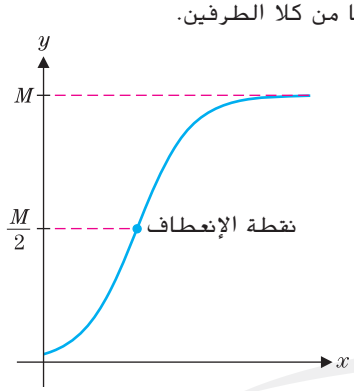
51. تتناقص قيمة إعادة البيع $r(t)$ لآلة بمعدل يتناسب مع الفرق بين السعر الحالي وقيمة الخردة S. اكتب معادلة تفاضلية لإيجاد r. إذا كان سعر بيع الآلة جديدة هو AED 14,000، وتصبح AED 8000 بعد 4 سنوات و تبلغ قيمتها كخردة AED 1000، جد معادلة لقيمة إعادة البيع في أي زمن.

52. تم ملء صومعة بحبوب قدرها $6000\ kg$. يتم شحن الحبوب بمعدل ثابت $1000\ kg$ في الشهر. تبلغ تكاليف التخزين فلسين للكيلوجرام في الشهر. لتكن $S(t)$ هي تكلفة التخزين الإجمالية لمدة t شهر. اكتب معادلة تفاضلية لإيجاد S لكل $0 \le 1 \le 6$. حِل مسألة القيمة الإبتدائية لإيجاد $S(t)$. ما هي الفاتورة الإجمالية للتخزين لمدة 6 أشهر؟

53. للمعادلة اللوجستية $y'(t) = ky(M - y)$. أثبت أنّ التمثيل البياني لـ $\frac{1}{y}y'$ كدالة لـ y ينتج عنه تمثيل بياني خطي. إذا أعطينا الميل m والتقاطع b لهذا المستقيم، إشرح كيفيّة حساب النماذج الوسيطيّة k و M. إستخدم البيانات التالية لتقدير k و M لمجتمع الأسماك. توقّع التعداد النهائي للأسماك.

t	2	3	4	5
y	1197	1291	1380	1462

54. إنها حقيقة مثيرة للاهتمام أنّ نقطة الانعطاف في حل المعادلة اللوجستية (انظر الشكل) تحدث عند $y = \frac{1}{2}M$. لإثبات صحة ذلك، لستَ مضطرًا أن تحسب اثنين من مشتقات المعادلة (7.6) وأن تحل $y'' = 0$. فهذا سيبدو سخيفًا جدًا وسيعطيك الحل بدلالة t، بدلًا من y. بدلًا من ذلك، فإن اتباع نهج أكثر بساطة سيفي بالغرض. ابدأ بالمعادلة التفاضلية $y' = ky(M - y)$ وخُذْ مشتقاتها من كلا الطرفين.



(إرشاد: استخدم قاعدة الضرب وقاعدة لسلسلة على الجانب الأيمن). يجب عليك إيجاد أنّ $y'' = ky'(M - 2y)$. ثمّ، $y'' = 0$ إذا وفقط إذا كان $y' = 0$ أو $y = \frac{1}{2}M$. قم باستبعاد $y' = 0$ بوصف سلوك الحل عند قيم التوازن.

55. يتم تمثيل السرعة المتجهة عند الهبوط لجسم ما بالمعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.002v^2$. إذا كان $v(0) = 0\ \text{m/s}$، ستزداد السرعة المتجهة إلى السرعة المتجهة النهائية. إنّ السرعة المتجهة النهائية هي حل توازن حيث يلغي سحب الهواء الصاعد بالضبط قوة الجاذبية إلى الأسفل. جد السرعة المتجهة النهائية.

56. على فرض أنّ f دالة بحيث $f(x) \ge 0$ و $f'(x) < 0$ لـ $x > 0$. وضّح أنّ مساحة المثلث أضلاعه $x = 0$، $y = 0$ والمماس لـ $y = f(x)$ عند $x = a > 0$ هو $A(a) = -\frac{1}{2}\{a^2f'(a) - 2af(a) + [f(a)]^2/f'(a)\}$. لإيجاد منحنى بحيث تكون هذه المساحة هي نفسها لأي خيار لـ $a > 0$، حل المعادلة $\frac{dA}{da} = 0$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمارين إستكشافية

.1 كائن مسافر عبر الهواء متأثّر بالجاذبية (تؤثّر رأسيًا)، ومقاومة الهواء (تعمل في الاتجاه المعاكس للسرعة) والقوى الأخرى (مثل قوة المحرّك). إنّ معادلة للحركة الأفقية لطائرة نفاثة هي $v' = c - f(v)/m$، حيث c هي الاتجاه العام للمحرك و $f(v)$ هي قوة مقاومة الهواء. لبعض نطاقات السرعة المتجهة، تتساقط بالفعل مقاومة الهواء إلى حد كبير لسرعات أعلى عندما يصبح الهواء حول الكائن مضطربًا هائجًا. فعلى سبيل المثال، على فرض أنّ $v' = 10{,}000 - f(v)$، حيث $f(v) = \begin{cases} 0.8v^2 & , \ 0 \le v \le 100 \\ 0.2v^2 & , \ 100 < v \end{cases}$. لحل مسألة القيمة الإبتدائية $v' = 10{,}000 - f(v)$، $v(0) = 0$. ابدأ بمسألة القيمة الإبتدائيّة $v' = 10{,}000 - 0.8v^2$، $v(0) = 0$. حل هذه وحدد الزمن t بحيث $v(t) = 100$. بدءًا من هذا الزمن، تصبح المعادلة $v' = 10{,}000 - 0.2v^2$. حل مسألة القيمة الإبتدائيّة $v' = 10{,}000 - 0.2v^2, v(0) = 100$. وضعْ هذا الحل مع الحل السابق ليكوّنا معًا حلًّا واحدًا صالحًا لأي زمن.

.2 حل مسائل القيمة الإبتدائيّة $\frac{dy}{dt} = 2(1-y)(2-y)(3-y)$ حيث (a) $y(0) = 0$ و (b) $y(0) = 1.5$ و (c) $y(0) = 2.5$ و (d) $y(0) = 4$. اذكر بصورة وافية قدر المستطاع كيفية اعتماد النهاية $\lim_{t\to\infty} y(t)$ على $y(0)$.

أسئلة المراجعة

تمارين كتابية

تتضمّن القائمة التالية المصطلحات التي تم تعريفها والنظريات التي تم توضيحها في هذه الوحدة. لكل مصطلح أو نظرية، (1) قدّم تعريفًا أو عبارةً دقيقةً و(2) اذكر ما تعنيه بمصطلحات عامة و(3) صِفْ أنواع المسائل التي تقترن بذلك.

التكامل بالتجزيئ	صيغة الاختزال
تفكيك الكسور الجزئية	CAS
التكامل المعتل	تكامل متقارب
تكامل متباعد	اختبار مقارنة

صواب أم خطأ

اذكر ما إذا كانت كل عبارة صوابًا أم خطأً واشرح السبب بإيجاز. إذا كانت العبارة خطأً، حاول "تصحيحها" بتعديل العبارة الموضّحة إلى العبارة الجديدة الصحيحة.

.1 ينجح التكامل بالأجزاء فقط للتكاملات بالصيغة $\int f(x)g(x)\,dx$.

.2 لتكامل بالصيغة $\int xf(x)\,dx$، استخدم التكامل بالأجزاء دائمًا مع $u = x$.

.3 إنّ التقنيات مع الدوال المثلثية في الدرس 6.3 هي أدوات للتعويض.

.4 إذا احتوى مكامل على عامل $\sqrt{1-x^2}$، ينبغي أن تقوم بإجراء التعويض $x = \sin\theta$.

.5 إذا كانت p و q كثيرتَيْ حدود، يمكن إذًا إيجاد قيمة أي تكامل من الصيغة $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$.

.6 من جدول تكامل واسع، لا تحتاج إلى معرفة أي تقنيّة تكامل.

.7 إذا كان لدى $f(x)$ مقارب عند $x = a$، يتباعد إذًا $\int_a^b f(x)\,dx$ لأي b.

.8 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \neq 0$، $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

في التمارين 44–1، جـــد قيمة التكامل.

1. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
2. $\int \frac{\sin(1/x)}{x^2}\,dx$
3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
4. $\int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
5. $\int x^2 e^{-3x}\,dx$
6. $\int x^2 e^{-x^3}\,dx$
7. $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$
8. $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$
9. $\int \frac{x^3}{4+x^4}\,dx$
10. $\int \frac{x}{4+x^4}\,dx$
11. $\int e^{2\ln x}\,dx$
12. $\int \cos 4x\,dx$
13. $\int_0^1 x\sin 3x\,dx$
14. $\int_0^1 x\sin 4x^2\,dx$
15. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$
16. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$
17. $\int_{-1}^1 x\sin \pi x\,dx$
18. $\int_0^1 x^2\cos \pi x\,dx$
19. $\int_1^2 x^3\ln x\,dx$
20. $\int_0^{\pi/4} \sin x\cos x\,dx$
21. $\int \cos x\sin^2 x\,dx$
22. $\int \cos x\sin^3 x\,dx$
23. $\int \cos^3 x\sin^3 x\,dx$
24. $\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx$
25. $\int \tan^2 x\sec^4 x\,dx$
26. $\int \tan^3 x\sec^2 x\,dx$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

27. $\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x\,dx$

28. $\int \tan^3 x \sec^3 x\,dx$

29. $\int \frac{2}{8+4x+x^2}\,dx$

30. $\int \frac{3}{\sqrt{-2x-x^2}}\,dx$

31. $\int \frac{2}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$

32. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

33. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

34. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$

35. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

36. $\int \frac{4}{\sqrt{x+9}}\,dx$

37. $\int \frac{x+4}{x^2+3x+2}\,dx$

38. $\int \frac{5x+6}{x^2+x-12}\,dx$

39. $\int \frac{4x^2+6x-12}{x^3-4x}\,dx$

40. $\int \frac{5x^2+2}{x^3+x}\,dx$

تمارين كتابية

41. $\int e^x \cos 2x\,dx$

42. $\int x^3 \sin x^2\,dx$

43. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

44. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

في التمارين 50–45، جـــد تفكيك الكسور الجزئية.

45. $\frac{4}{x^2-3x-4}$

46. $\frac{2x}{x^2+x-6}$

47. $\frac{-6}{x^3+x^2-2x}$

48. $\frac{x^2-2x-2}{x^3+x}$

49. $\frac{x-2}{x^2+4x+4}$

50. $\frac{x^2-2}{(x^2+1)^2}$

في التمارين 60–51، استخدم جدول التكاملات لإيجاد التكامل.

51. $\int e^{3x}\sqrt{4+e^{2x}}\,dx$

52. $\int x\sqrt{x^4-4}\,dx$

53. $\int \sec^4 x\,dx$

54. $\int \tan^5 x\,dx$

55. $\int \frac{4}{x(3-x)^2}\,dx$

56. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x(3+4\sin x)}\,dx$

57. $\int \frac{\sqrt{9+4x^2}}{x^2}\,dx$

58. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$

59. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$

60. $\int \frac{x^2}{(x^6-4)^{3/2}}\,dx$

61. يختبر أخصّائيو أمراض القلب كفاءة القلب بحقن صبغة بمعدل ثابت R داخل وريد بالقرب من القلب وقياس تركيز الصبغة في مجرى الدم لمدة T ثوانٍ. إذا تم ضخ كامل كمية الصبغة عبره، يبلغ التركيز $c(t) = R$. أحسب الحجم الإجمالي للصبغة $\int_0^T c(t)\,dt$. لتركيز عام، يتم تعريف النتاج القلبي بالصيغة $\frac{RT}{\int_0^T c(t)\,dt}$. فسّر هذه الكمية. أحسب النتاج القلبي إذا كان $c(t) = 3te^{2Tt}$.

62. لـ $\int \ln(x+1)\,dx$، يمكنك استخدام التكامل بالأجزاء مع $u = \ln(x+1)$ و $dv = 1$. قارن إجاباتك باستخدام $v = x$ في مقابل استخدام $v = x+1$.

63. أثبت أنّ القيمة المتوسطة لـ $\ln x$ على الفترة $(0, e^n)$ تساوي $n-1$ لأي عدد صحيح موجب n.

64. تتضمّن معظم أسئلة الاحتمال **احتمالات مشروطة**. على سبيل المثال، إذا علمت أنّ مصباحًا احترق بالفعل لمدة 30 ساعة، فما احتمال أن يستمر لمدة 5 ساعات أكثر على الأقل؟ يكون هذا "احتمال أن $x > 35$ إذا علمت أنّ $x > 30$" وتتم كتابته في صيغة $P(x > 35|x > 30)$. بشكل عام، للحدثَيْن A و B، $P(A|B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)}$. يتم إعطاء **دالة معدل الإخفاق** كنهاية لـ $\frac{P(x < t+\Delta t|x > t)}{\Delta t}$ عندما $\Delta t \to 0$. لأجل الـpdf $f(x)$ الخاص بالعمر الافتراضي لمصباح، فإنّ البسط هو احتمال أن يحترق المصباح ما بين الزمنين t و $t+\Delta t$. استخدم $R(t) = P(x > t)$ لإثبات أنّه يمكن كتابة دالة معدل الإخفاق في صيغة $\frac{f(t)}{R(t)}$.

65. أثبت أنّ دالة معدل الإخفاق (انظر التمرين 72) لـ pdf أسية $f(x) = ce^{-cx}$ ثابت.

66. لتوزيع الجاما $f(x) = xe^{-x}$، (a) استخدم CAS لتثبت أنّ $P(x > s+t|x > s) = e^{-t} + \frac{t}{1+s}e^{-t}$. (b) أثبت أنّ هذه دالة متناقصة لـ s (لـ t محدّد). (c) إذا كانت هذه pdf تبيّن كميات هطول المطر سنويًا في مدينة معيّنة، فسّر نتيجة الجزء (b).

67. يتم إعداد نتائج اختبارات معدل الذكاء لاتباع التوزيع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{450\pi}}e^{-(x-100)^2/450}$. وفقًا لهذا التوزيع، ما النسبة المئوية للأشخاص الذين يفترض أن يكون معدل ذكائهم بين 90 و100؟ إذا كان سيتم إعطاء نسبة 1% الأعلى من النتائج اللقب "عبقرية" فما هي أعلى درجة ينبغي أن تحصل عليها لتحصل على هذا اللقب؟

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

برنامج محمد بن راشد
للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid
Smart Learning Program

الملحق A

الوحدة 6

التمارين 6.1

1. $\frac{40}{3}$ 3. $5 - e^{-2}$ 5. $\frac{64}{3}$ 7. $\frac{27}{4}$

9. $\frac{3 - \ln 4}{2}$ 11. $5 \ln 5 - 4$ 13. 0.08235

15. 0.135698 17. 4.01449 19. $\int_0^1 (2 - 2y)\, dy = 1$

21. $\int_0^1 2x\, dx = 1$ 23. $\int_0^1 (3 - x^2 - 2x)\, dx = \frac{5}{3}$

25. $\int_1^{\ln 2} (4e^{-x} - e^x)\, dx$ 27. 35.%08 29. 93.%02

31. 3; $\int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2)\, dx = \int_{\sqrt{3}}^3 (x^2 - 3)\, dx = 2\sqrt{3}$

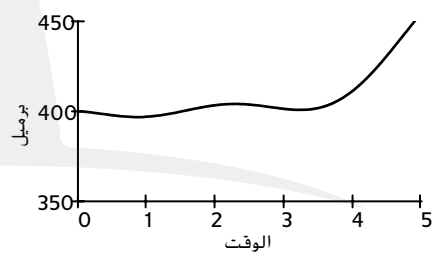
37. $L = \frac{3}{16}$ 39. (a) A_2 (b) $A_1 + A_2$ (c) A_3 (d) A_2

41. النقاط الحرجة عند $t = n\pi/2$. n عدد فردي؛ لا توجد قيم عظمى؛ نقاط الانعكاس عند $t = n\pi/2$

43. 14.4 مليون برميل 45. 2.45 مليون برميل

47. (ستختلف الإجابات)

الوقت	1	2	3	4	5
الكمية	397	403	401	412	455



49. $(q^*, p^*) = (80, 8)$؛ الفائض لدى المستهلك 80

51. بافتراض أن $C(0) = 0$:
(a) الخسارة من بيع أول 2000 عنصر
(b) الربح من بيع العناصر من 2001 إلى 5000
(c) مجموع الجزأين (a) و(b)
(d) الخسارة من بيع العناصر من 5001 إلى 6000

التمارين 6.2

1. 12 3. $\frac{56\pi}{3}$

5. (a) $\int_0^{500} \left(750 - \frac{3}{2}x\right)^2 dx = 93{,}750{,}000\,\text{ft}^3$

(b) $\int_0^{250} \left(750 - \frac{3}{2}x\right)^2 dx = 82{,}031{,}250\,\text{ft}^3$؛ متسع عند القاع

7. $\int_0^{30} \left(3 - \frac{1}{12}x\right)^2 dx = \frac{215}{2}\,\text{ft}^3$

9. $\int_0^{60} \pi[(60)60 - y)]\, dy = 108{,}000\,\pi\,\text{ft}^3$

11. $\int_0^{2\pi} \pi\left[4 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 dx = 33\pi^2 + 32\pi\,\text{in}^3$

13. $0.2467\,\text{cm}^3$ 15. $2.5\,\text{ft}^3$

17. (a) $\frac{8\pi}{3}$ (b) $\frac{28\pi}{3}$ 19. (a) $\frac{32\pi}{5}$ (b) $\frac{224\pi}{15}$

21. (a) $2\pi e^2 + 2\pi$ (b) $\pi\left(\frac{e^4}{2} + 4e^2 - \frac{9}{2}\right)$

23. (a) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{3}{2} \approx 0.637$ (b) 7.472

25. (a) $\frac{16\pi}{3}$ (b) $\frac{32\pi}{3}$ (c) $\frac{64\pi}{3}$ (d) $\frac{128\pi}{3}$
(e) $\frac{32\pi}{3}$ (f) $\frac{64\pi}{3}$

27. (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{5}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{15}$ (e) $\frac{7\pi}{6}$ (f) $\frac{13\pi}{15}$

29. $\frac{\pi h^2}{2a} = \frac{1}{2}\pi h\left(\sqrt{\frac{h}{a}}\right)^2$ 31. $\int_{-1}^1 \pi(1)^2\, dy = 2\pi$

33. $\int_{-1}^1 \pi\left(\frac{1-y}{2}\right)^2 dy = \frac{2\pi}{3}$ 35. $\int_{-r}^r \pi(r^2 - y^2)\, dy = \frac{4}{3}\pi r^3$

37. الحجم نفسه 39. (a) $\frac{16}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$

41. (a) $\frac{64}{15}$ (b) $\frac{8\pi}{15}$ (c) $\frac{16\sqrt{3}}{15}$

Chapter Sourced From, EM. End Matter/Glossary, from Calculus: Early Transcendental Functions 4e © 2012 McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة
برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

21. $\int_0^{\pi} \sqrt{1+(x\sin x)^2}\,dx \approx 4.6984$

23. $20(e-e^{-1}) \approx 47$ ft

25. 5.43 ft

27. $1.672, 1.720, 1.754 \to 2$

29. $\int_0^1 2\pi x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx \approx 3.8097$

31. $\int_0^2 2\pi(2x-x^2)\sqrt{1+(2-2x)^2}\,dx \approx 10.9655$

33. $\int_0^1 2\pi e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx \approx 229430$

35. $\int_0^{\pi/2} 2\pi\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx \approx 7.2118$

37. (a) 0.9998 (b) 0.9749

39. (a) 6π (b) 4π (c) $(\sqrt{5}+1)\pi$

41. (a) $t = 3+\sqrt{12}$ (b) $t = 3$

43. 60 ياردة؛ 60 ياردة؛ 139.4 ياردة؛ 104.55 ft/s

التمارين 6.5

1. $y(0) = 80, y'(0) = 0$ **3.** $y(0) = 60, y'(0) = 10$

5. $-8\sqrt{30}$ ft/s ≈ 30 mph **7.** $\sqrt{h}$ **9.** 78.4 مترًا

11. $-4.9t^2 + 19.6t$; 19.6 m; 4 sec; -19.6 m **13.** $8\sqrt{\frac{5}{3}}$ ft/sec

17. $10\sqrt{3} \approx 17$ sec, $490\sqrt{3} \approx 849$ m; متساويين

19. $9.0°$؛ الإرسال ليس داخل الملعب **21.** 2.59 ft

23. قفزات الكرة ($h \approx -0.62$)

25. $40\sqrt{\frac{5}{\sqrt{3}}} \approx 68$ ft/s; $20\sqrt{10} \approx 63$ ft/s

27. (a) $\frac{25}{16}\sin 4t - \frac{25}{4}t$ (b) $\frac{25}{16}\sin(4t+\pi/2) - \frac{25}{16}$

29. $d = 490t^2$ **31.** $\frac{20\pi}{\sqrt{30}} \approx 11.5$ rad/s

35. (a) هدف! ($x \approx -0.288$ عند $y = 90$)
(b) نعم ($x \approx 1.7$ عند $y = 30$)

37. 25 ft; 30.25 ft

41. أقصى خطأ مسموح به هو $0.01\text{ rad} \approx 0.6°$

43. 86.18 ft; 530.34 ft

47. (a) $v = \sqrt{2gH}$ (b) 32 ft/s
(c) 22.63 ft/s (d) 3.94 ft/s; 22.28 ft/s

التمارين 6.6

1. $\frac{15}{8}$ ft-lb **3.** $\frac{1250}{3}$ ft-lb **5.** 270,000,000 ft-lb

7. 50,000 ft-lb **9.** (a) 704,000 ft-lb (b) 16 hp

11. (a) $44{,}100\pi$ N-m (b) 9800π N-m

13. 7.07 ft **15.** $J \approx 2.113$; 133ft/s

17. أقصى دفع: $\frac{30}{e} \approx 11.036$؛ الاندفاع: $90 - \frac{270}{e^2} \approx 53.459$

19. $m = 15$ kg, $\bar{x} = \frac{16}{5}$ m؛ أثقل إلى يمين المركز

21. 0.0614 صلج, 31.5 oz

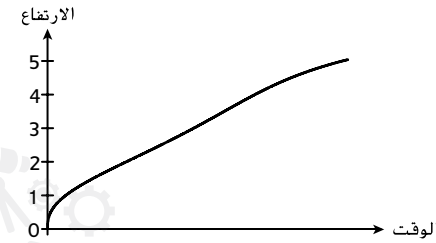
23. 16.6 in.؛ يختلف بمقدار $3\bar{x}$، الكتلة نفسها

25. 0.0614 صلج, 31.4 oz; $\bar{x} = 17.86$ in.

43. (a) $\frac{156}{625}$ (b) $\frac{39\pi}{1250}$ **45.** $\frac{5\pi}{12}$

47. باستخدام قاعدة سمبسون، 12.786

49. ستختلف الإجابات؛ احتمالية واحدة موضحة:



التمارين 6.3

1. $r = 2-x, h = x^2, V = \frac{8\pi}{3}$ **3.** $r = x, h = 2x, V = \frac{4\pi}{3}$

5. $r = x, h = \sqrt{x^2+1}, V = \frac{2\pi}{3}(17^{3/2}-1)$

7. $r = 2-y, h = 2\sqrt{1-y^2}, V = 4\pi^2$

9. $\frac{32\pi}{3}$ **11.** $\frac{128\pi}{3}$ **13.** $\frac{128\pi}{15}$ **15.** 288π

17. (a) $\frac{80\pi}{3}$ (b) 16π (c) 16π (d) $\frac{16\pi}{3}$

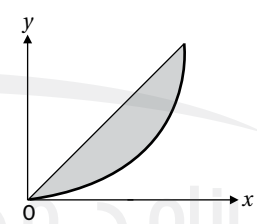
19. (a) $\frac{625\pi}{6}$ (b) $\frac{625\pi}{3}$ (c) $\frac{875\pi}{6}$ (d) $\frac{500\pi}{3}$

21. (a) $\frac{32\pi}{15}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{3\pi}{2}$ (d) $\frac{38\pi}{15}$

23. (a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{64\pi}{15}$

25. (a) 16.723 (b) 12.635 (c) 4.088 (d) 1.497

27. $x = \sqrt{y}$ و $x = y$ عند $x = 0$



29. مثل رقم 27

33. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ **35.** $\sqrt{1-\sqrt{0.9}} \approx 0.2265$

التمارين 6.4

1. 1.1; 46044743 **3.** 3.3; 72427901 **5.** $2\sqrt{5}$

7. $\frac{73\sqrt{73}-37\sqrt{37}}{54}$ **9.** $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ **11.** $\frac{33}{16}$

13. $\frac{10}{3}$ **15.** $\int_{-1}^{1}\sqrt{1+9x^4}\,dx \approx 3.0957$

17. $\int_0^2 \sqrt{1+(2-2x)^2}\,dx \approx 2.9579$

19. $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx \approx 3.8202$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

27. $\frac{1}{3}\tan^{-1} x^3 + c$ **29.** $\sin^{-1}\frac{x}{2} + c$ **31.** $\frac{1}{2}\sin^{-1} x^2 + c$

33. $\tan^{-1} x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$ **35.** $-(\ln 2)^2$ **37.** $\frac{12}{5}$

39. $\frac{72}{5}$ **41.** $\int \frac{5}{3 + x^2}\,dx = \frac{5}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$

43. $\int \frac{\ln x}{2x}\,dx = \frac{1}{4}(\ln x)^2 + c$ **45.** $\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$

47. $1 + \frac{1}{2}\ln 2 - \tan^{-1}(2) + \frac{1}{4}\pi$

49. $\tan^{-1} x + c$; $\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$; $x - \tan^{-1} x + c$; $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c$

التمارين 7.2

1. $x\sin x + \cos x + c$ **3.** $\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$

5. $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$ **7.** $-\frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + c$

9. $\frac{1}{17}e^x\sin 4x - \frac{4}{17}e^x\cos 4x + c$

11. $\frac{2}{3}\sin 2x\cos x - \frac{1}{3}\cos 2x\sin x + c$

13. $x\tan x + \ln|\cos x| + c$ **15.** $\frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

17. $\sin x\ln(\sin x) - \sin x + c$ **19.** $\frac{1}{4}\sin 2 - \frac{1}{2}\cos 2$

21. $-\frac{2}{\pi^2}$ **23.** $10\ln 20 - \ln 2 - 9$

25. $\frac{1}{a}x^2e^{ax} - \frac{2}{a^2}xe^{ax} + \frac{2}{a^3}e^{ax} + c$

27. $\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c$

31. $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$

33. $\frac{1}{3}\cos^2 x\sin x + \frac{2}{3}\sin x + c$ **35.** $9e - 24$ **37.** $\frac{8}{15}$

39. m فردي: $\frac{(m-1)(m-3)\cdots 1}{m(m-2)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2}$;

m زوجي: $\frac{(m-1)(m-3)\cdots 2}{m(m-2)\cdots 3}$

41. $x\cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + c$ **43.** $-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + c$

45. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c$

47. $\left(1 - \frac{e^{4x}}{2}\right)\cos(e^{2x}) + e^{2x}\sin(e^{2x}) + c$

49. $6(e^2 - 1)$ **51.** n مرات

53. (a) التعويض (b) الأجزاء

51. (c) الأجزاء (d) التعويض

55. العمود الأول: المشتقات؛ العمود الثاني: المشتقات العكسية

57. $x^4\sin x + 4x^3\cos x - 12x^2\sin x - 24x\cos x + 24\sin x + c$

59. $\left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^{2x} + c$

61. $-\frac{1}{3}x^3e^{-3x} - \frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + c$

67. $e^x\ln x + c$

التمارين 7.3

1. $\frac{1}{5}\sin^5 x + c$ **3.** $\frac{1}{8}$ **5.** $\frac{1}{3}$ **7.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2(x + 1) + c$

9. $\frac{1}{3}\sec^3 x + c$ **11.** $\frac{1}{6}\sec^3(x^2 + 1) - \frac{1}{2}\sec(x^2 + 1) + c$

13. $-\frac{1}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + c$ **15.** $\frac{12}{35}$ **17.** $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c$

19. $-\frac{8}{21} + \frac{25\sqrt{2}}{168}$ **21.** $-\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} + c$

23. $8\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2} + c$ **25.** π

27. 2, 4, $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{12}$, 3, $\frac{16}{3}$

29. $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$ **31.** (0, 1.6) **33.** 8,985,600 lb

35. 196,035 lb **37.** 12,252 lb

39. 10,667 hp **41.** %27.22, 20.54, 24.53 **43.** $\frac{1}{4}\rho\pi a^3b$

45. $\frac{\text{متوسط الحجم}}{\text{خشبي}} \approx 1.35$; $\frac{\text{كبير الحجم}}{\text{خشبي}} \approx 1.78$

التمارين 6.7

7. 4 **9.** $\frac{4}{1 - e^{-4}}$ **11.** $\frac{4}{\pi}$ **13.** 0.157

15. 7.77×10^{-11} **17.** $1 - e^{-3/2} \approx 0.77687$

19. $e^{-6} - e^{-12} \approx 0.00247$ **21.** 0.594 **23.** 0.9999995

25. (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0.7937$ **27.** (a) $\frac{2}{\pi}\ln 2$ (b) $\tan\frac{\pi}{8}$

29. (a) $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ (b) $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ **31.** $c = \frac{4}{1 - e^{-4b}} \to 4$

33. $c = \frac{6}{1 - e^{-6b}} \leftarrow$ المتوسط; $\frac{c}{36}[1 - (6b + 1)e^{-6b}] \to \frac{1}{6} = 6$;

35. (a) 0.0646 (b) 0.9354 (c) 0.0132 (d) 0.4147

39. $\frac{5}{2}$ **41.** $p = \frac{m}{n}$ **43.** $m = \frac{1}{b}$

47. (b) $\frac{16}{15}x^2 - \frac{4}{5}x + 1$ (b) $\frac{1}{2}$

الوحدة 6 تمارين المراجعة

1. $\frac{\pi^3}{3} + 2\pi - 2$ **3.** $\frac{1}{12}$ **5.** 1.452 **7.** $\frac{5}{6}$

9. 10,054 **11.** $\frac{98\pi}{3}$ **13.** 4.373

15. (a) $\frac{256\pi}{5}$ (b) 8π (c) $\frac{128\pi}{3}$ (d) $\frac{1408\pi}{15}$

17. (a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) 2π (c) 4π (d) $\frac{22\pi}{3}$

19. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1 + 16x^6}\,dx \approx 3.2$ **21.** $\int_{-2}^{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4}e^x}\,dx \approx 4.767$

23. $\int_0^1 2\pi(1 - x^2)\sqrt{1 + 4x^2}\,dx \approx 5.483$ **25.** -64 ft/s

27. 1.026 sec, 46.3 ft **29.** لا. قفزات الكرة

31. $64\sqrt{2}$ ft/s, $-64\sqrt{2}$ ft/s **33.** $\frac{40}{3}$ ft-lb

35. $m = \frac{112}{3}$, $\bar{x} = \frac{16}{7}$, أثقل إلى يمين $x = 2$

37. 22,630,400 lb **39.** $J \approx 1.32$;52ft/s **43.** 2

45. (a) $1 - e^{-2} \approx 0.865$ (b) $e^{-2} - e^{-4} \approx 0.117$

47. (a) $\frac{11}{15}$ (b) $\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \approx 0.786$

الوحدة 7

التمارين 7.1

1. $\frac{1}{a}e^{ax} + c$ **3.** $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ **5.** $-\frac{1}{6}\cos 6t + c$

7. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{8}{3}x^3 + 16x + c$ **9.** $\frac{3}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$

11. $\sin^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + c$ **13.** $2\tan^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + c$

15. $2\ln|t^2 + 2t + 5| - 2\tan^{-1}\left(\frac{t + 1}{2}\right) + c$

17. $-\frac{1}{2}e^{3-2x} + c$ **19.** $6\ln(1 + x^{2/3}) + c$

21. $-2\cos\sqrt{x} + c$ **23.** 0 **25.** $1 - \sqrt{2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

27. $\frac{3x}{2}\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}+\frac{9}{2}\ln\left|\frac{x}{3}+\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}\right|+c$

29. $2\ln|\sqrt{x^2-4}+x|+c$

31. $\sqrt{4x^2-9}-3\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{4x^2-9}}{3}\right)+c$

33. $\frac{3x}{2}\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}-\frac{9}{2}\ln\left|\frac{x}{3}+\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\right|+c$

35. $\frac{1}{2}x\sqrt{16+x^2}+8\ln\left|\frac{1}{4}\sqrt{16+x^2}+\frac{x}{4}\right|+c$

37. $9-\frac{16\sqrt{2}}{3}$ **39.** $\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}-\sqrt{1+x^2}+c$

41. $\sqrt{x^2+4x}-\cosh^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right)+c$

43. $\sqrt{x^2+2x+10}-\frac{1}{3}\sinh^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right)+c$

45. $\frac{1}{4}\tan^4 x+\frac{1}{2}\tan^2 x+c;\ \frac{1}{4}\sec^4 x+c$

47. (b) $\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}|\sec x+\tan x|+c$

(c) $\frac{1}{3}\sec^2 x\tan x+\frac{2}{3}\tan x+c$

(d) $\frac{1}{4}\sec^3 x\tan x+\frac{3}{8}\sec x\tan x+\frac{3}{8}\ln|\sec x+\tan x|+c$

49. $-\frac{1}{2}\cot x\csc x+\frac{1}{2}\ln|\csc x+\cot x|+c$

53. $\frac{1}{2}RI^2$

التمارين 7.4

1. $\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-1};\ 3\ln|x+1|-2\ln|x-1|+c$

3. $\frac{2}{x+1}+\frac{4}{x-2};\ 2\ln|x+1|+4\ln|x-2|+c$

5. $\frac{2}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-2}-\frac{\frac{5}{2}}{x};\ 2\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-2|-\frac{5}{2}\ln|x|+c$

7. $\frac{3}{2x+1}-\frac{2}{3x-7};\ \frac{3}{2}\ln|2x+1|-\frac{2}{3}\ln|3x-7|+c$

9. $\frac{\frac{1}{4}}{x+2}+\frac{\frac{3}{2}}{(x+2)^2}-\frac{\frac{1}{4}}{x};\ \frac{1}{4}\ln|x+2|-\frac{3}{2}(x+2)^{-1}-\frac{1}{4}\ln|x|+c$

11. $\frac{-2x+1}{x^2+1}+\frac{2}{x};\ -\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x+2\ln|x|+c$

13. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left[\frac{5}{3x+2}-\frac{3}{2x-5}\right];$

$\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}\ln|3x+2|-\frac{1}{2}\ln|2x-5|+c$

15. $\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2};\ 2\ln|x+1|-(x+1)^{-1}+c$

17. $1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2+2x+2};\ x-2\ln|x|+2\tan^{-1}(x+1)+c$

19. $3+\frac{2}{x-1}+\frac{x-2}{x^2+1};$

$3x+2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\tan^{-1}x+c$

21. $11\ln|x+4|+2\ln|x-2|+\frac{1}{2}x^2-2x+c$

23. $\ln|x+2|-3\ln|x+1|+2\ln|x|+c$ **25.** $\ln|x^4-x|+c$

27. $\frac{1}{2}\ln|2x+1|-\frac{1}{4}\ln(4x^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)+c$

29. $\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{5}{27}\ln\left|x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}\right|-\frac{2\sqrt{2}}{27}\tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

31. $3\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{7}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

33. $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+c$ **35.** $\frac{1}{2}\ln(4-\sin^2 x)+c$

37. $\frac{4}{x^2+1}-\frac{2}{(x^2+1)^2}$ **39.** $\frac{4}{x^2+x+1}-\frac{4x+1}{(x^2+x+1)^2}$

41. $\ln|x^3|-\ln|x^3+1|+c;\ -\ln|1+1/x^3|+c$

43. (a) الكسور الجزئية (b) التعويض

(c) الكسور الجزئية (d) الصيغة الأساسية

45. $\frac{1}{4(1-\sin x)}-\frac{1}{4}\ln(1-\sin x)-\frac{1}{4(1+\sin x)}+\frac{1}{4}\ln(1+\sin x)+c$

التمارين 7.5

1. $\frac{1}{8(2+4x)}+\frac{1}{16}\ln|2+4x|+c$

3. $\frac{2}{15}(3e^x-2)(1+e^x)^{3/2}+c$

5. $\frac{1}{4}x\sqrt{1/4+x^2}-\frac{1}{16}\ln\left|x+\sqrt{1/4+x^2}\right|+c$

7. $-\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\pi}{9}$ **9.** $\ln(2+\sqrt{8})-\ln(1+\sqrt{5})$

11. $\frac{-1}{x-3}\sqrt{9-(x-3)^2}-\sin^{-1}\left(\frac{x-3}{3}\right)+c$

13. $\frac{1}{5}\tan^5 u-\frac{1}{3}\tan^3 u+\tan u-u+c$

15. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4+\sin x}-2}{\sqrt{4+\sin x}+2}\right|+c$

17. $\frac{1}{2}\cos x^2+\frac{1}{2}x^2\sin x^2+c$

19. $-\frac{4}{3}(\cos x-2)\sqrt{1+\cos x}+c$

21. $\frac{1}{2}\sin t\sqrt{4+\sin^2 t}-2\ln\left(\sin t+\sqrt{4+\sin^2 t}\right)+c$

23. $\frac{1}{4}e^{-2/x^2}+c$

25. $-\sqrt{4x-x^2}+2\cos^{-1}\left(\frac{2-x}{2}\right)+c$

27. $e^x\tan^{-1}(e^x)-\ln\left(1+e^{2x}\right)+c$

التمارين 7.6

1. $2e^{4t}$ **3.** $5e^{-3t}$ **5.** $2e^{2(t-1)}$ **7.** $50+20e^t$

9. (a) 3200 (b) $400\cdot 2^t=400e^{(\ln 2)t}$ (c) 4525

11. (a) 8 ساعات (b) $100\cdot 2^{t/4}=100e^{(\ln 2/4)t}$ (c) 23.6 ساعة

13. $66.4\approx 20\frac{\ln 10}{\ln 2}$ دقيقة **17.** (a) 12.5% (b) 8.4%

19. $0.4e^{-(\ln 2/3)t}$mg؛ 15.97 ساعة؛ (a) 6 ساعات (b) 15.97 ساعة

21. 13,305 عامًا **23.** $5.72\approx\frac{\ln\left(\frac{5}{13}\right)}{\ln\left(\frac{11}{13}\right)}$ دقائق

25. (a) $70-20e^{(\ln\cdot 7/2)t}$ (b) 66.6° (c) 9.02 min

29. AED 1080, AED 1083, AED 1083.28, AED 1083.29

27. 9:46 P.M.

31. (a) A = AED 110,232; B = AED 66,402
(b) A = AED 22,255; B = AED 29,836 (c) 6.9%

33. (a) AED 14,715.18 (b) AED 5413.41

37. مع تناقص خطي: 10 أعوام، AED 20,000؛ 20 عامًا . AED 0

39. AED 7300؛ AED 7860 مقابل AED 7665

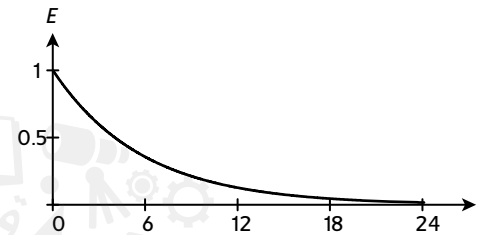
$p(x)\approx e^{1.468x+0.182}$ ؛ ستختلف الإجابات

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

41. $p(t) \approx e^{-0.055t+2.015}$. حيث t تمثل الأعوام منذ 1960

45. ليكون عمر النصف الحيوي 31 ساعة: 87.71 mg؛ ليكون عمر النصف الحيوي 46 ساعة: 104.48 mg

47. $E(t) = e^{-(\ln 2/4)t}$



49. AED 4493.29

51. A: AED 167,150.43; B: AED 179,373.42; C: AED 180,000

53. (a) المبلغ دفعة واحدة (AED 1,271,249 إلى AED 1,267,853) بعد ثلاثة أعوام
(b) 4 دفعات (AED 1,228,234 إلى AED 1,197,217) بعد ثلاثة أعوام
(c) المبلغ دفعة واحدة (AED 1,349,859 إلى AED 1,309,401) بعد ثلاثة أعوام

التمارين 7.7

1. (a) نعم (b) لا

3. (a) نعم (b) لا

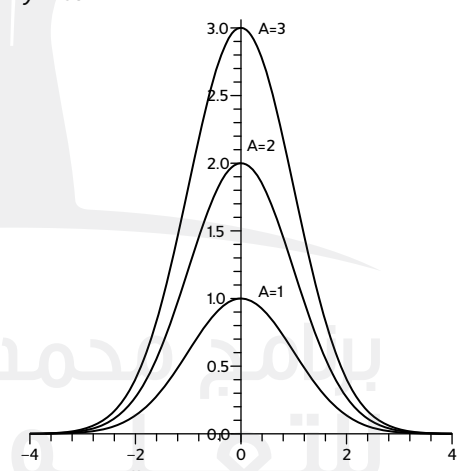
5. $y = ce^{x+x^3/3}$ **7.** $y = -\dfrac{1}{\frac{2}{3}x^3 + c}$

9. $y = \pm\sqrt{4\ln|1+x^3| + c}$

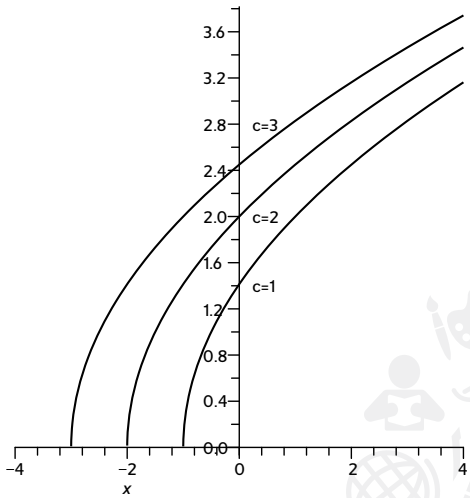
11. $(y+1)e^{-y} = 2(x+1)e^{-x} + c$

13. $\cos y = -\sin x + c$ **15.** $y = c\sqrt{1+x^2}$

17. $y = ce^{-x^2/2}$



19. $y = \pm\sqrt{2x+c}$



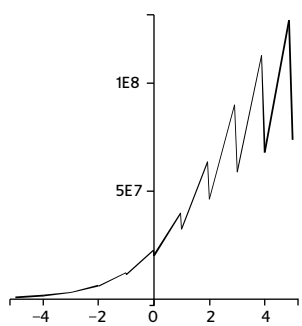
21. $y = e^{-1}e^{(x+1)^3}$ **23.** $y = \sqrt{\frac{8}{3}x^3 + 4}$ **25.** $y = (x+3)^4$

27. $\sin y = 2x^2$ **29.** $y = \dfrac{2e^{6t}}{1+e^{6t}}$

31. $y = \dfrac{20e^{10t}}{1+4e^{10t}}$ **33.** $y = \dfrac{3e^{t}}{1+3e^{t}}$

35. (a) $y = \dfrac{(8\times10^7)\,e^{0.71t}}{3+e^{0.71t}}$

(b)

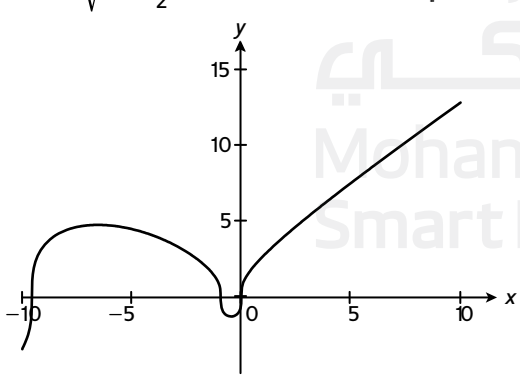


(c) 4.642 أعوام

37. (a) AED 277,901 (b) AED 25,002

39. (a) AED 1,131,949 (b) AED 998,258 (c) 10.5%

41. (a) $y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x}$ (b) مماس رأسي



(c) للمعادلة التكعيبية ثلاثة حلول حقيقية حيث

$$\frac{-217-37\sqrt{37}}{12} < c < \frac{-217+37\sqrt{37}}{12}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 7 تمارين المراجعة

1. $2e^{\sqrt{x}} + c$ **3.** $\frac{1}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$

5. $-\frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + c$ **7.** $\frac{1}{2}\tan^{-1}x^2 + c$

9. $\frac{1}{4}\ln(4+x^4) + c$ **11.** $\frac{1}{3}x^3 + c$

13. $\frac{1}{9}\sin 3 - \frac{1}{3}\cos 3$ **15.** $\frac{3\pi}{16}$ **17.** $\frac{2}{\pi}$

19. $4\ln 2 - \frac{15}{16}$ **21.** $\frac{1}{3}\sin^3 x + c$

23. $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + c$ **25.** $\frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + c$

27. $\frac{2}{3}(\sin x)^{3/2} - \frac{2}{7}(\sin x)^{7/2} + c$ **29.** $\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right) + c$

31. $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x} + c$ **33.** $-\frac{x^2}{3}\sqrt{9-x^2} - 6\sqrt{9-x^2} + c$

35. $\frac{x^2}{3}\sqrt{x^2+9} - 6\sqrt{x^2+9} + c$

37. $3\ln|x+1| - 2\ln|x+2| + c$

39. $3\ln|x| + 2\ln|x-2| - \ln|x+2| + c$

41. $\frac{1}{5}e^x\cos 2x + \frac{2}{5}e^x\sin 2x + c$ **43.** $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$

45. $\frac{\frac{4}{5}}{x-4} - \frac{\frac{4}{5}}{x+1}$ **47.** $\frac{3}{x} - \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-1}$

49. $\frac{1}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2}$

51. $\frac{1}{8}e^x(4+2e^{2x})\sqrt{4+e^{2x}} - 2\ln(e^x + \sqrt{4+e^{2x}}) + c$

53. $\frac{1}{3}\tan x\sec^2 x + \frac{2}{3}\tan x + c$

55. $\frac{4}{3(3-x)} + \frac{4}{9}\ln\left|\frac{x}{3-x}\right| + c$

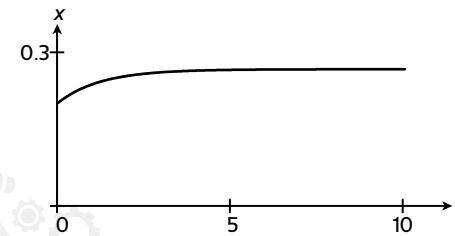
57. $-\frac{\sqrt{9+4x^2}}{x} + 2\ln\left(x + \sqrt{\frac{9}{4}+x^2}\right) + c$

59. $\sqrt{4-x^2} - 2\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + c$

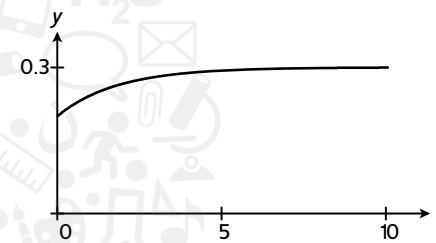
61. $RT;\ \frac{4RT^3}{3(2T^2-1)e^{2T^2}+3}$

65. c **67.** 24.75%; 135

43. $x(t) = \frac{4(11-3e^{-(4/5)t})}{5(33-e^{-(4/5)t})}$ ؛ التركيز المحدد $\frac{4}{15}$



45. $x(t) = \frac{3(14-5e^{-(27/50)t})}{5(28-e^{-(27/50)t})}$



47. (a) يقدر عدد السكان على المدى الطويل بحوالي 682,800
(b) ستموت جميع الأسماك خلال 27 عامًا

49. $x(t) = \frac{2-6ce^{0.2t}}{1-ce^{0.2t}} \to 6$ ؛ إذا كان $p(0) < 2$ ، إذًا $c > 1$
ويوجد خط تقارب رأسي

51. $r'(t) = k(S-r);\ r(t) = 1 + 13e^{-k}$ (القيم بالآلاف) حيث
$k = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{7}{13}\right) \approx -0.155$

53. $k = -m = 0.0000847,\ M = \frac{b}{k} = \frac{0.18}{k} = 2125$ **55.** 70 m/s

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الملحق B
صيغ مفيدة

الجبر

صيغة حسابية

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right)=\frac{ad}{bc}$$

صيغة محللة إلى عوامل

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

$$x^4-y^4=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

صيغة ثنائية الحد

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

الأسس

$$(x^n)^m=x^{nm}$$

$$\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$$

$$x^nx^m=x^{n+m}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$$

$$(xy)^n=x^ny^n$$

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$$

$$x^{n/m}=\sqrt[m]{x^n}$$

المستقيمات

ميل 3 لمستقيم عبر النقطتين (x_0, y_0) و(x_1, y_1)

$$m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

عبر النقطة (x_0, y_0)، الميل m

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

الميل m، المقطع y لـ b

$$y=mx+b$$

صيغة تربيعية

إذا كان $ax^2+bx+c=0$، فإن

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

المسافة

المسافة d بين النقطتين (x_1, y_1) و(x_2, y_2)

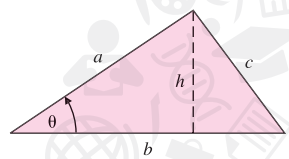
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

الهندسة

مثلث

المساحة $=\frac{1}{2}bh$

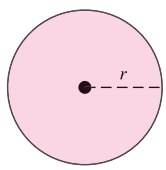
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$



دائرة

المساحة $=\pi r^2$

$$C=2\pi r$$

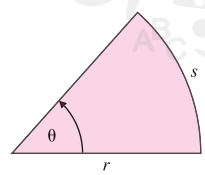


قطاع دائرة

المساحة $=\frac{1}{2}r^2\theta$

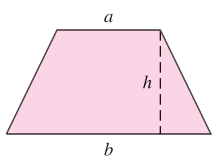
$$s=r\theta$$

(حيث θ بالراديان فقط)



شبه منحرف

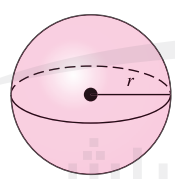
المساحة $=\frac{1}{2}(a+b)h$



كرة

الحجم $=\frac{4}{3}\pi r^3$

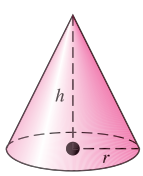
مساحة السطح $=4\pi r^2$



مخروط

الحجم $=\frac{1}{3}\pi r^2h$

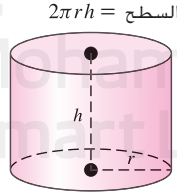
مساحة السطح $=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$



أسطوانة

الحجم $=\pi r^2h$

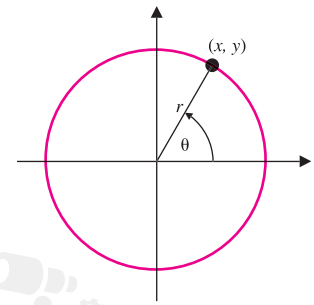
مساحة السطح $=2\pi rh$



برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

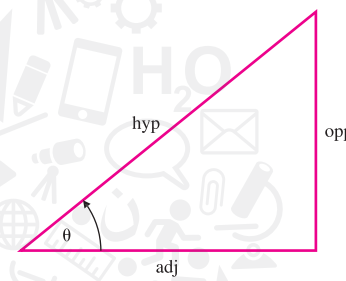
حساب المثلثات



$\sin\theta = \frac{y}{r}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$



$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

نصف الزاوية

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ $\qquad$ $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

الجمع

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ $\qquad$ $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

الطرح

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ $\qquad$ $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

المجموع

$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

ناتج الضرب

$$\sin u\sin v = \tfrac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

$$\cos u\cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u-v) + \cos(u+v)]$$

$$\sin u\cos v = \tfrac{1}{2}[\sin(u+v) + \sin(u-v)]$$

$$\cos u\sin v = \tfrac{1}{2}[\sin(u+v) - \sin(u-v)]$$

المعكوسات الضربية

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

التعريفات

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

فيثاغورس

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ $\qquad$ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\qquad$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

صيغة مشاركة

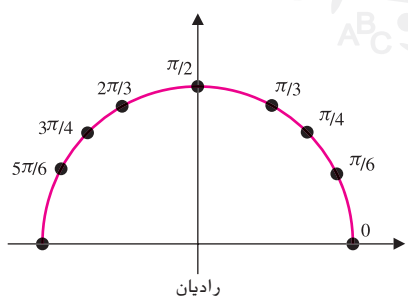
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

صيغة زوجية / فردية

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\qquad$ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

زاوية مزدوجة

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ $\qquad$ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\qquad$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$



$\cos(0) = 1$	$\sin(0) = 0$
$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
$\cos(\pi) = -1$	$\sin(\pi) = 0$
$\cos(2\pi) = 1$	$\sin(2\pi) = 0$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

صيغ المشتقات

قواعد عامة

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

قواعد الأس

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

صيغة أسية

$$\frac{d}{dx}\left[e^{rx}\right] = r\,e^{rx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{u(x)}\right] = e^{u(x)}u'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

صيغة مثلثية

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

صيغة مثلثية عكسية

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

صيغة قطوع زائدة

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

صيغة قطوع زائدة عكسية

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$$

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جدول التكاملات

صيغ تتضمن $a + bu$

1. $\int \frac{1}{a+bu}\,du = \frac{1}{b}\ln|a+bu| + c$

2. $\int \frac{u}{a+bu}\,du = \frac{1}{b^2}(a+bu-a\ln|a+bu|) + c$

3. $\int \frac{u^2}{a+bu}\,du = \frac{1}{2b^3}[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|] + c$

4. $\int \frac{1}{u(a+bu)}\,du = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + c$

5. $\int \frac{1}{u^2(a+bu)}\,du = \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| - \frac{1}{au} + c$

صيغ تتضمن $(a + bu)^2$

6. $\int \frac{1}{(a+bu)^2}\,du = \frac{-1}{b(a+bu)} + c$

7. $\int \frac{u}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu|\right) + c$

8. $\int \frac{u^2}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^3}\left(a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + c$

9. $\int \frac{1}{u(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{a(a+bu)} + \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + c$

10. $\int \frac{1}{u^2(a+bu)^2}\,du = \frac{2b}{a^3}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| - \frac{a+2bu}{a^2u(a+bu)} + c$

صيغ تتضمن $\sqrt{a + bu}$

11. $\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + c$

12. $\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{105b^3}(15b^2u^2 - 12abu + 8a^2)(a+bu)^{3/2} + c$

13. $\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}u^n(a+bu)^{3/2} - \frac{2na}{b(2n+3)}\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du$

14. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}}\,du$

15. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^n}\,du = \frac{-1}{a(n-1)}\frac{(a+bu)^{3/2}}{u^{n-1}} - \frac{(2n-5)b}{2a(n-1)}\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^{n-1}}\,du,\ n \neq 1$

16a. $\int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + c,\ a > 0$

16b. $\int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + c,\ a < 0$

17. $\int \frac{1}{u^n\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{-1}{a(n-1)}\frac{\sqrt{a+bu}}{u^{n-1}} - \frac{(2n-3)b}{2a(n-1)}\int \frac{1}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}\,du,\ n \neq 1$

18. $\int \frac{u}{\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu} + c$

19. $\int \frac{u^2}{\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{2}{15b^3}(3b^2u^2 - 4abu + 8a^2)\sqrt{a+bu} + c$

20. $\int \frac{u^n}{\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{2}{(2n+1)b}u^n\sqrt{a+bu} - \frac{2na}{(2n+1)b}\int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a+bu}}\,du$

صيغ تتضمن $\sqrt{a^2 + u^2},\quad a > 0$

21. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2+u^2} + \frac{1}{2}a^2\ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + c$

22. $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{8}u(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{1}{8}a^4\ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + c$

23. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + c$

24. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| - \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + c$

25. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du = \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + c$

26. $\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2+u^2} - \frac{1}{2}a^2\ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + c$

27. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2+u^2}}\,du = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+\sqrt{a^2+u^2}}\right| + c$

28. $\int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2+u^2}}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + c$

صيغ تتضمن $\sqrt{a^2 - u^2},\quad a > 0$

29. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{u}{a} + c$

30. $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{8}u(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{8}a^4\sin^{-1}\frac{u}{a} + c$

31. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + c$

32. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \sin^{-1}\frac{u}{a} + c$

33. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \sin^{-1}\frac{u}{a} + c$

34. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + c$

35. $\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{u}{a} + c$

36. $\int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + c$

صيغ تتضمن $\sqrt{u^2 - a^2},\quad a > 0$

37. $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + c$

38. $\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{8}u(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{1}{8}a^4\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + c$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

39. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - a\sec^{-1}\frac{|u|}{a} + c$

40. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\,du = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| - \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + c$

41. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

42. $\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2-a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

43. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{|u|}{a} + c$

44. $\int \frac{1}{u^2\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u} + c$

صيغ تتضمن $\sqrt{2au-u^2}$

45. $\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{1}{2}(u-a)\sqrt{2au-u^2} + \frac{1}{2}a^2\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + c$

46. $\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{1}{6}(2u^2-au-3a^2)\sqrt{2au-u^2} + \frac{1}{2}a^3\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + c$

47. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u}\,du = \sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + c$

48. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + c$

49. $\int \frac{1}{\sqrt{2au-u^2}}\,du = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + c$

50. $\int \frac{u}{\sqrt{2au-u^2}}\,du = -\sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + c$

51. $\int \frac{u^2}{\sqrt{2au-u^2}}\,du = -\frac{1}{2}(u+3a)\sqrt{2au-u^2} + \frac{3}{2}a^2\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + c$

52. $\int \frac{1}{u\sqrt{2au-u^2}}\,du = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + c$

صيغ تتضمن $\sin u$ أو $\cos u$

53. $\int \sin u\,du = -\cos u + c$

54. $\int \cos u\,du = \sin u + c$

55. $\int \sin^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\sin u\cos u + c$

56. $\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sin u\cos u + c$

57. $\int \sin^3 u\,du = -\frac{2}{3}\cos u - \frac{1}{3}\sin^2 u\cos u + c$

58. $\int \cos^3 u\,du = \frac{2}{3}\sin u + \frac{1}{3}\sin u\cos^2 u + c$

59. $\int \sin^n u\,du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u\,du$

60. $\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u\sin u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

61. $\int u\sin u\,du = \sin u - u\cos u + c$

62. $\int u\cos u\,du = \cos u + u\sin u + c$

63. $\int u^n\sin u\,du = -u^n\cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$

64. $\int u^n\cos u\,du = u^n\sin u - n\int u^{n-1}\sin u\,du$

65. $\int \frac{1}{1+\sin u}\,du = \tan u - \sec u + c$

66. $\int \frac{1}{1-\sin u}\,du = \tan u + \sec u + c$

67. $\int \frac{1}{1+\cos u}\,du = -\cot u + \csc u + c$

68. $\int \frac{1}{1-\cos u}\,du = -\cot u - \csc u + c$

69. $\int \sin(mu)\sin(nu)\,du = \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + c$

70. $\int \cos(mu)\cos(nu)\,du = \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + c$

71. $\int \sin(mu)\cos(nu)\,du = \frac{\cos(n-m)u}{2(n-m)} - \frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} + c$

72. $\int \sin^m u\cos^n u\,du = -\frac{\sin^{m-1} u\cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} u\cos^n u\,du$

صيغ تتضمن دوال مثلثية أخرى

73. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + c = \ln|\sec u| + c$

74. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + c$

75. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + c$

76. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + c$

77. $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + c$

78. $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + c$

79. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$

80. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + c$

81. $\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + c$

82. $\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\sin u| + c$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

83. $\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u\tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + c$

84. $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u\cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + c$

85. $\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du,\ n \neq 1$

86. $\int \cot^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du,\ n \neq 1$

87. $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u\tan u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du,\ n \neq 1$

88. $\int \csc^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\csc^{n-2} u\cot u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du,\ n \neq 1$

89. $\int \frac{1}{1 \pm \tan u}\,du = \frac{1}{2}u \pm \ln|\cos u \pm \sin u| + c$

90. $\int \frac{1}{1 \pm \cot u}\,du = \frac{1}{2}u \mp \ln|\sin u \pm \cos u| + c$

91. $\int \frac{1}{1 \pm \sec u}\,du = u + \cot u \mp \csc u + c$

92. $\int \frac{1}{1 \pm \csc u}\,du = u - \tan u \pm \sec u + c$

صيغ تتضمن دوال مثلثية عكسية

93. $\int \sin^{-1} u\,du = u\sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + c$

94. $\int \cos^{-1} u\,du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + c$

95. $\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \ln\sqrt{1+u^2} + c$

96. $\int \cot^{-1} u\,du = u\cot^{-1} u + \ln\sqrt{1+u^2} + c$

97. $\int \sec^{-1} u\,du = u\sec^{-1} u - \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + c$

98. $\int \csc^{-1} u\,du = u\csc^{-1} u + \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + c$

99. $\int u\sin^{-1} u\,du = \frac{1}{4}(2u^2-1)\sin^{-1} u + \frac{1}{4}u\sqrt{1-u^2} + c$

100. $\int u\cos^{-1} u\,du = \frac{1}{4}(2u^2-1)\cos^{-1} u - \frac{1}{4}u\sqrt{1-u^2} + c$

صيغ تتضمن e^u

101. $\int e^{au}\,du = \frac{1}{a}e^{au} + c$

102. $\int ue^{au}\,du = \left(\frac{1}{a}u - \frac{1}{a^2}\right)e^{au} + c$

103. $\int u^2e^{au}\,du = \left(\frac{1}{a}u^2 - \frac{2}{a^2}u + \frac{2}{a^3}\right)e^{au} + c$

104. $\int u^ne^{au}\,du = \frac{1}{a}u^ne^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$

105. $\int e^{au}\sin bu\,du = \frac{1}{a^2+b^2}(a\sin bu - b\cos bu)e^{au} + c$

106. $\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{1}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\sin bu)e^{au} + c$

صيغ تتضمن $\ln u$

107. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + c$

108. $\int u\ln u\,du = \frac{1}{2}u^2\ln u - \frac{1}{4}u^2 + c$

109. $\int u^n\ln u\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1}\ln u - \frac{1}{(n+1)^2}u^{n+1} + c$

110. $\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln|\ln u| + c$

111. $\int (\ln u)^2\,du = u(\ln u)^2 - 2u\ln u + 2u + c$

112. $\int (\ln u)^n\,du = u(\ln u)^n - n\int (\ln u)^{n-1}\,du$

صيغ تتضمن دوال القطوع الزائدة

113. $\int \sinh u\,du = \cosh u + c$

114. $\int \cosh u\,du = \sinh u + c$

115. $\int \tanh u\,du = \ln(\cosh u) + c$

116. $\int \coth u\,du = \ln|\sinh u| + c$

117. $\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}|\sinh u| + c$

118. $\int \operatorname{csch} u\,du = \ln|\tanh \frac{1}{2}u| + c$

119. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + c$

120. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + c$

121. $\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + c$

122. $\int \operatorname{csch} u\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + c$

123. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\,da = \sinh^{-1} a + c$

124. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\,da = \cosh^{-1} a + c$

125. $\int \frac{1}{1-a^2}\,da = \tanh^{-1} a + c$

126. $\int \frac{1}{|a|\sqrt{a^2+1}}\,da = -\operatorname{csch}^{-1} a + c$

127. $\int \frac{1}{a\sqrt{1-a^2}}\,da = -\operatorname{sech}^{-1} a + c$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

التعليم الهجين في المدرسة الإماراتية

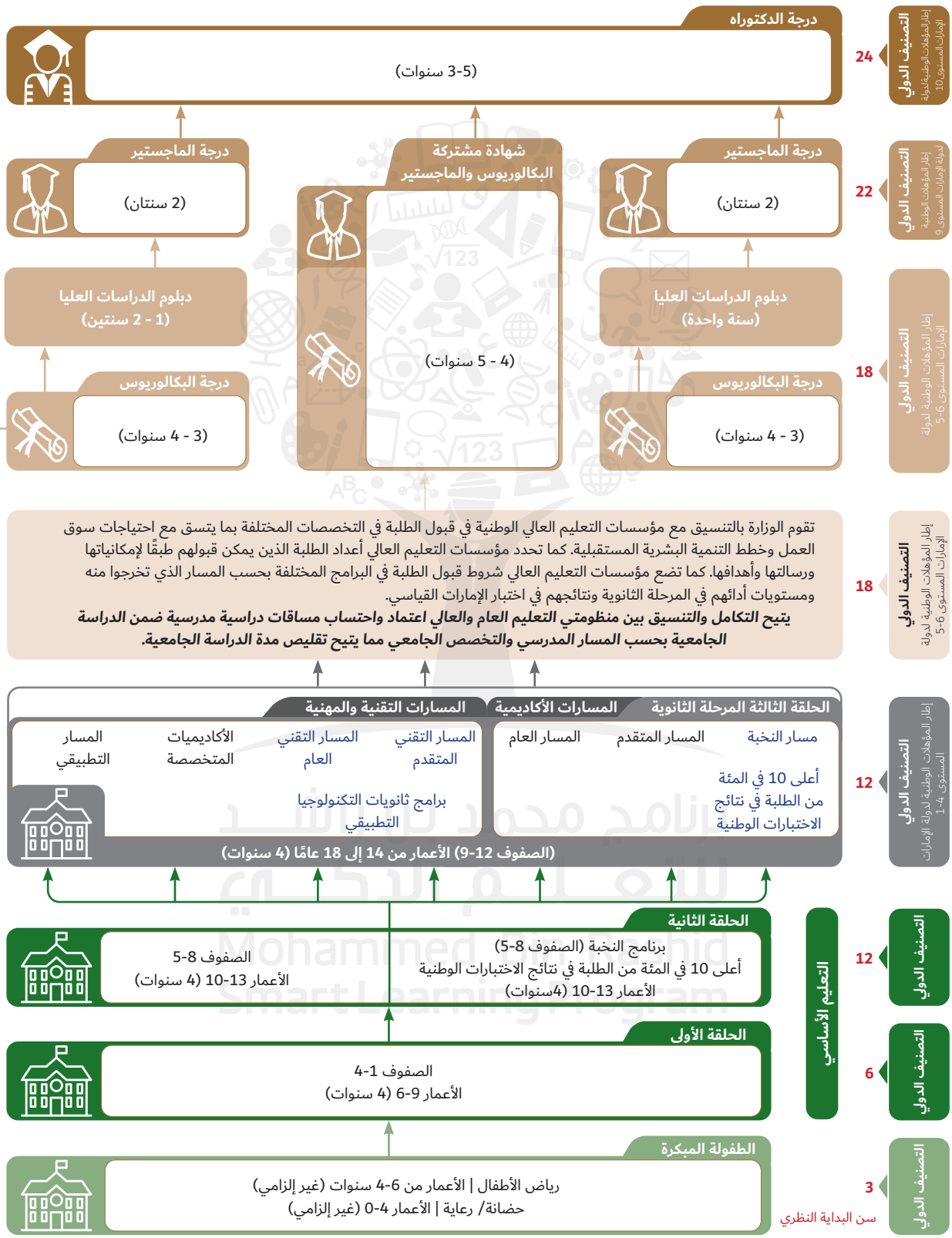
في إطار البعد الإستراتيجي لخطط التطوير في وزارة التربية والتعليم، وسعيها لتنويع قنوات التعليم وتجاوز كل التحديات التي قد تحول دونه، وضمان استمراره في جميع الظروف، فقد طبقت الوزارة خطة التعليم الهجين للطلبة جميعهم في المراحل الدراسيّة كافة.

الخطة الدراسية	ماقبل الروضة/ رياض الأطفال	الحلقة الأولى	الحلقة الثانية	الحلقة الثالثة
التعلم المدرسي	✓	✓	✓	✓
التعلم الإلكتروني – المباشر	-	-	✓	✓
التعلم الإلكتروني – الذاتي	✓	✓	✓	✓

قنوات الحصول على الكتاب المدرسي:

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

الوحدات الإلكترونيّة


التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 10
24
درجة الدكتوراه
(3-5 سنوات)
التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 9
22
درجة الماجستير
(2 سنتان)
شهادة مشتركة البكالوريوس والماجستير
(4 - 5 سنوات)
درجة الماجستير
(2 سنتان)
التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 6-5
18
دبلوم الدراسات العليا (سنة واحدة)
دبلوم الدراسات العليا (1 - 2 سنتين)
درجة البكالوريوس
(3 - 4 سنوات)
درجة البكالوريوس
(3 - 4 سنوات)
التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 6-5
18
تقوم الوزارة بالتنسيق مع مؤسسات التعليم العالي الوطنية في قبول الطلبة في التخصصات المختلفة بما يتسق مع احتياجات سوق العمل وخطط التنمية البشرية المستقبلية. كما تحدد مؤسسات التعليم العالي أعداد الطلبة الذين يمكن قبولهم طبقًا لإمكانياتها ورسالتها وأهدافها. كما تضع مؤسسات التعليم العالي شروط قبول الطلبة في البرامج المختلفة بحسب المسار الذي تخرجوا منه ومستويات أدائهم في المرحلة الثانوية ونتائجهم في اختبار الإمارات القياسي.
يتيح التكامل والتنسيق بين منظومتي التعليم العام والعالي اعتماد واحتساب مساقات دراسية مدرسية ضمن الدراسة الجامعية بحسب المسار المدرسي والتخصص الجامعي مما يتيح تقليص مدة الدراسة الجامعية.
التصنيف الدولي
إطار المؤهلات الوطنية لدولة الإمارات المستوى 4-1
12
الحلقة الثالثة المرحلة الثانوية
المسارات الأكاديمية
المسارات التقنية والمهنية
مسار النخبة
المسار المتقدم
المسار العام
المسار التقني المتقدم
المسار التقني العام
الأكاديميات المتخصصة
المسار التطبيقي
أعلى 10 في المئة من الطلبة في نتائج الاختبارات الوطنية
برامج ثانويات التكنولوجيا التطبيقي
(الصفوف 12-9) الأعمار من 14 إلى 18 عامًا (4 سنوات)
التعليم الأساسي
التصنيف الدولي
12
الحلقة الثانية
برنامج النخبة (الصفوف 8-5)
أعلى 10 في المئة من الطلبة في نتائج الاختبارات الوطنية
الأعمار 13-10 (4سنوات)
الصفوف 8-5
الأعمار 13-10 (4 سنوات)
التصنيف الدولي
6
الحلقة الأولى
الصفوف 1-4
الأعمار 9-6 (4 سنوات)
التصنيف الدولي
3
الطفولة المبكرة
رياض الأطفال | الأعمار من 6-4 سنوات (غير إلزامي)
حضانة/ رعاية | الأعمار 4-0 (غير إلزامي)
سن البداية النظري

الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

منظومة التعليم في دولة الإمارات العربية المتحدة

درجة الدكتوراه / العلوم التطبيقية
(3-5 سنوات)

درجة الماجستير / العلوم التطبيقية
(2 سنتان)

دبلوم الدراسات العليا/ العلوم التطبيقية
(1 - 2 سنتين)

درجة البكالوريوس / العلوم التطبيقية
(3 - 4 سنوات)

دبلوم / دبلوم عالي
(2 - 3 سنوات)

التعليم المستمر
- محو الأمية
- المسار التطبيقي
- المسار العام الأكاديمي
- التعليم المنزلي

برنامج تجسيري

الالتحاق بالعمل

المؤهلات المهنية
مركز التعليم والتطوير المِهْني

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

جميع الحقوق © محفوظة لوزارة التربية والتعليم. لايسمح بإعادة إصدار هذه الصفحة أو جزء منها أو تخزينها في نطاق استعادة المعلومات، أو نقله بأي شكل من الأشكال، من دون إذن مسبق من الناشر.

برنامج محمد بن راشد للتعلم الذكي
Mohammed Bin Rashid Smart Learning Program

مركز اتصال وزارة التربية والتعليم
اقتراح - استفسار - شكوى

80051115

04-2176855

www.moe.gov.ae

ccc.moe@moe.gov.ae