محمد عمر الخطيب

ملخص

[الاسئلة المقترحة من الوزارة]

لمادة

الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الدراسي الثاني

2022/2021

اسم الطالب : .....

المدرســـــة : .....

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

Khateebacademy.com

قواعد الاشتقاق (مراجعة من الفصل الأول)

#	الدالة	المشتقة	#	الدالة	المشتقة
1	c	0	15	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
2	x^n	nx^{n-1}	16	$\log_a(f)$	$\frac{f'}{f\times\ln a}$
3	$f\pm g$	$f'\pm g'$	17	$\sin x$	$\cos x$
4	$c\times f$	$c\times f'$	18	$\cos x$	$-\sin x$
5	$f\times g$	$f\times g'+g\times f'$	19	$\tan x$	$\sec^2 x$
6	$\frac{f}{g}$	$\frac{g\times f'-f\times g'}{g^2}$	20	$\cot x$	$-\csc^2 x$
7	$\frac{c}{g}$	$\frac{-c\times g'}{g^2}$	21	$\sec x$	$\sec x\tan x$
8	$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	22	$\csc x$	$-\csc x\cot x$
9	$(f)^n$	$n(f)^{n-1}\times f'$	23	$\sin^{-1}x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$(f\circ g)(x)$	$f'(g(x))\times g'(x)$	24	$\cos^{-1}x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$y=f(u)$ $u=g(x)$	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$	25	$\tan^{-1}x$	$\frac{1}{1+x^2}$
12	$g=f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(g(x))}$	26	$\cot^{-1}x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
13	a^f	$a^f\times f'\times\ln a$	27	$\sec^{-1}x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
14	e^f	$e^f\times f'$	28	$\csc^{-1}x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

محمد عمر الخطيب

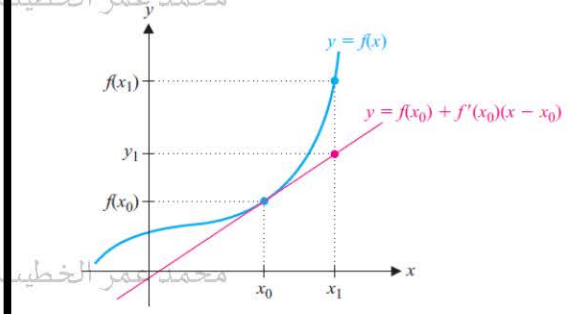
التقريبات الخطية

من اهم تطبيقات التفاضل اننا نستطيع تقريب اي دالة قابلة للاشتقاق بدالة خطية عند نقطة معينة وهذا ما يسمى بالتقريب الخطي للدالة.

التقريب الخطي (المماس) للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$

هو الدالة

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$



(1) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x_0 = 1$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{1.2}$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sqrt{1.2}$

---

(2) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x) = (x+1)^{1/3}$ عند $x_0 = 0$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[3]{1.2}$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sqrt[3]{1.2}$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\sqrt{2x+9}$ عند $x_0=0$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{8.8}$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sqrt{8.8}$

---

(2) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\dfrac{2}{x}$ عند $x=1$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\dfrac{2}{0.99}$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\dfrac{2}{0.99}$

(1) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\sin 3x$ عند $x_0=0$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sin(0.3)$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sin(0.3)$

---

(2) اوجد التقريب الخطي للدالة $f(x)=\sin x$ عند $x_0=\pi$ ثم اوجد قيمة تقريبية للعدد $\sin(3)$

اوجد التقريب الخطي للعدد $\sin(3)$

قاعدة لوبيتال

اذا كانت g, f دوال قابلة للاشتقاق في جوار النقطة c حيث $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ او $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$

فان

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(اشتق)

اوجد قيمة النهايات التالية

(1) $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}$

---

(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

---

(3) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2+2}{x^2-4}$

---

(4) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{x^2+4x+3}$

---

(5) $\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t}$

---

(6) $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{e^{3t}-1}$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة النهايات التالية

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$

---

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

---

(3) $\lim_{t\to 1}\frac{\ln(\ln t)}{\ln t}$

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة النهايات التالية

(1) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\cot x}$

---

(2) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

الاعداد (القيم) الحرجة

يعرف العدد الحرج للدالة f بانها النقطة c في مجال الدالة f والتي تكون عندها

اما: $f'(x)=0$ او $f'(x)$ غير موجودة

ملاحظة (ممكن ان تكون احدى اطراف الفترة المغلقة اذا حققت احد الشروط السابقة)

القيم القصوى (المطلقة) تحليلاً

(1) ايجاد جميع النقاط الحرجة في الفترة المغلقة المعرفة عليها الدالة

(2) ايجاد قيمة الدالة عند النقاط الحرجة واطراف الفترة المغلقة.

اختبار القيم

(3) تكون اكبر هذه القيم عظمى مطلقة وتكون اصغر هذه القيم صغرى مطلقة.

(1) اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة: $f(x)=x^3-3x+1$ على الفترة $[0,2]$ وبين نوعها

---

(2) اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة: $f(x)=x^3-3x+1$ على الفترة $[-3,2]$ وبين نوعها

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد القيم القصوى (المطلقة) للدالة : $f(x)=x^4-8x^2+2$ على الفترة $[-3,1]$ وبين نوعها

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^3-3x^2+6$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=-x^3+3x^2-3x$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^4-2x^2+1$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=x^4-3x^2+2$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة: $f(x)=(x-1)^{1/3}$ ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

(1) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=e^{x^2-1}$: ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

---

(2) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=xe^{-2x}$: ثم اوجد القيم القصوى المحلية. وبين نوعها

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

---

(3) اوجد الاعداد الحرجة للدالة $f(x)=x^2e^{-x}$: ثم اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

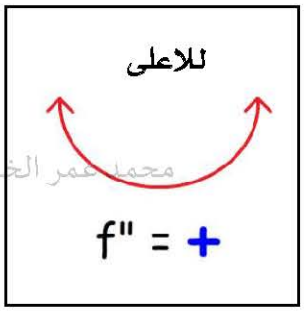
التقعر

الرسم البياني للدالة $y=f(x)$ يكون مقعراً للاعلى على الفترة المفتوحة I

(1) اذا كان منحنى الدالة يقع فوق جميع مماسته.

او (2) اذا كان $y'=f'(x)$ دالة متزايدة على الفترة المفتوحة I.

او (3) اذا كان $f''(x)>0$ على الفترة المفتوحة I.

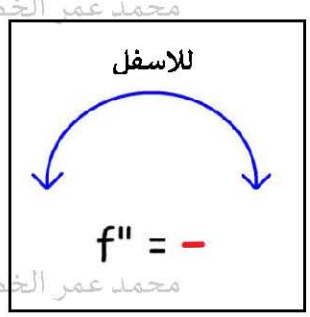


الرسم البياني للدالة $y=f(x)$ يكون مقعراً للاسفل على الفترة المفتوحة I

(1) اذا كان منحنى الدالة يقع تحت جميع مماسته.

او (2) اذا كان $y'=f'(x)$ دالة متناقصة على الفترة المفتوحة I.

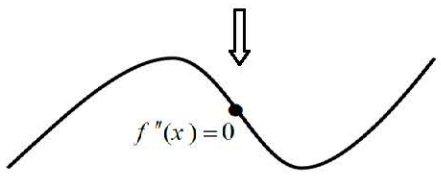
او (3) اذا كان $f''(x)<0$ على الفترة المفتوحة I.



نقطة الانعطاف

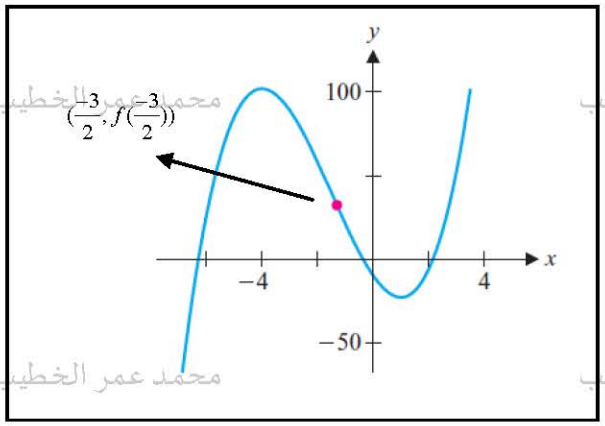
اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المفتوحة (a,b) والتمثيل البياني يغير اتجاه التقعر عند النقطة $c\in(a,b)$ فأن النقطة $(c,f(c))$ تسمى نقطة انعطاف.

ملاحظة: اذا كانت الدالة غير متصلة عند $x=c$ فانها لا تعتبر نقطة انقلاب (انعطاف)



فترات التقعر للدالة (بيانياً)

(1)اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f في الاجابة عن الأسئلة التالية



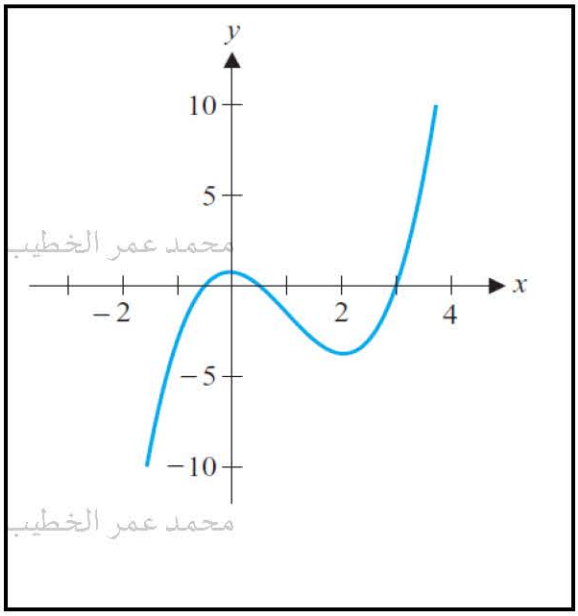
(أ) فترة التقعر للاسفل هي .....

(ب) فترة التقعر للاعلى هي .....

(ج) نقطة الانعطاف هي .....

---

(2)اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f في الاجابة عن الأسئلة التالية



(أ) اوجد الاعداد الحرجة للدالة.....

(ب) اوجد فترة التناقص للدالة.....

(ج) اوجد فترات التزايد للدالة.....

(د) اوجد القيم القصوى المحلية وبين نوعها.

.....

.....

(هـ) اوجد فترة التقعر للاسفل. .....

(و) اوجد فترات التقعر للاعلى. .....

(ي) قدر نقطة الانعطاف للدالة.....

فترات التقعر للدالة (تحليلياً)

(1) ايجاد جميع النقاط التي تجعل المشتقة الثانية تساوي صفر او غير موجودة وتعينها على خط الاعداد.

(2) دراسة اشارة المشتقة الثانية f''.

(3) تحديد سلوك الدالة f من خلال اشارة الدالة f''.

أ) اذا كانت اشارة الدالة f'' موجبة (+)على فترة فان الدالة f تكون مقعرة للاعلى على هذه الفترة.

ب) اذا كانت اشارة الدالة f'' سالبة (-)على فترة فان الدالة f تكون مقعرة للاسفل على هذه الفترة.

(1) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة

$$f(x)=x^3-3x^2+4x-1$$

---

(2) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة

$$f(x)=x^4-6x^2+2x+3$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(1) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة

$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

---

(2) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة

$$f(x)=x+3(1-x)^{1/3}$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

---

(3) اوجد فترات التقعر للاعلى وفترات التقعر للاسفل و نقاط الانعطاف للدالة

$$f(x)=\sin x-\cos x$$

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

خطوط التقارب للدوال النسبية

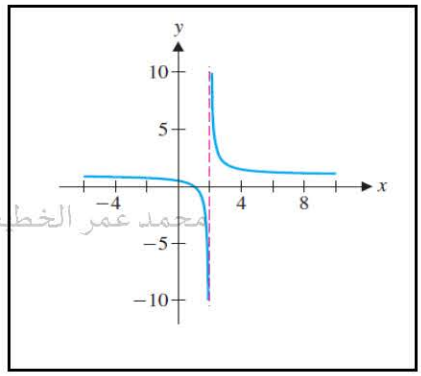
$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

(1) يجب كتابة الدالة النسبية في ابسط صورة قبل ايجاد خطوط التقارب واذا تم اختصار احد العوامل وليكن $x-a$ واختفى من المقام فان للدالة فجوة عند $x=a$ وليس خط تقارب رأسي

$x-a$ عامل غير مكرر

(2) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب رأسية عند اصفار المقام وتكون معادلتة $x=a$

(3) يكون للدالة النسبية خطوط تقارب افقية اذا كانت درجة البسط اصغر من او تساوي درجة المقام وتكون معادلتة $y=a$



(4) يكون للدالة النسبية خط تقارب مائل اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام . وتكون معادلتة $y=a\,x+b$

ونستخدم القسمة المطولة او القسمة التركيبية لايجادة

لا يجوز ان يكون للدالة خط تقارب افقي ومائل في نفس الوقت

ملاحظات لرسم الدوال النسبية

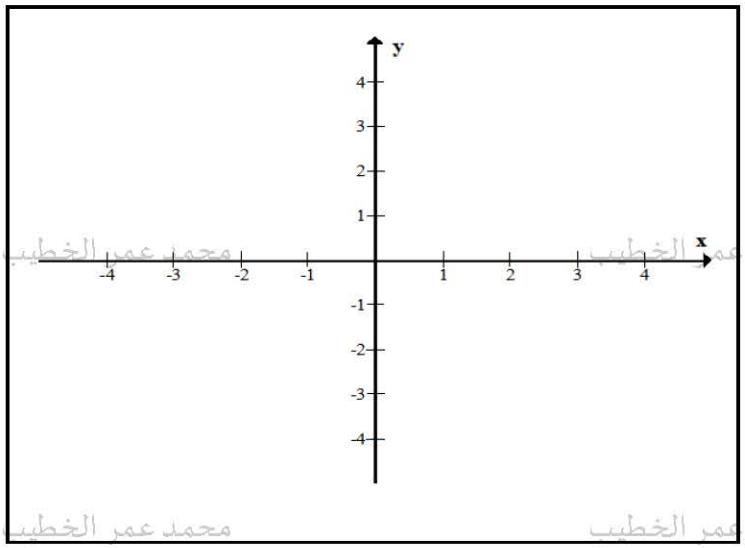
المميزات المهمة ..... تحليل الدالة

نقاط التقاطع مع المحاور

خطوط التقارب الافقية والرأسي والمائلة والفجوات

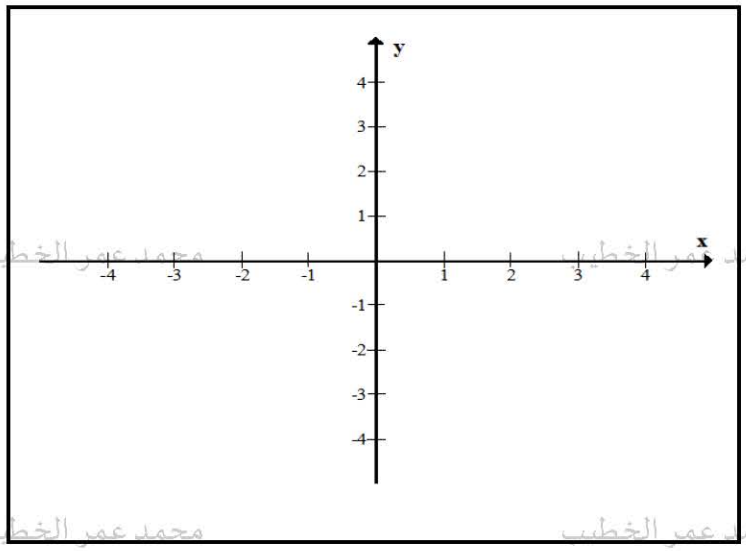
اشارة الدالة الاصلية

(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$

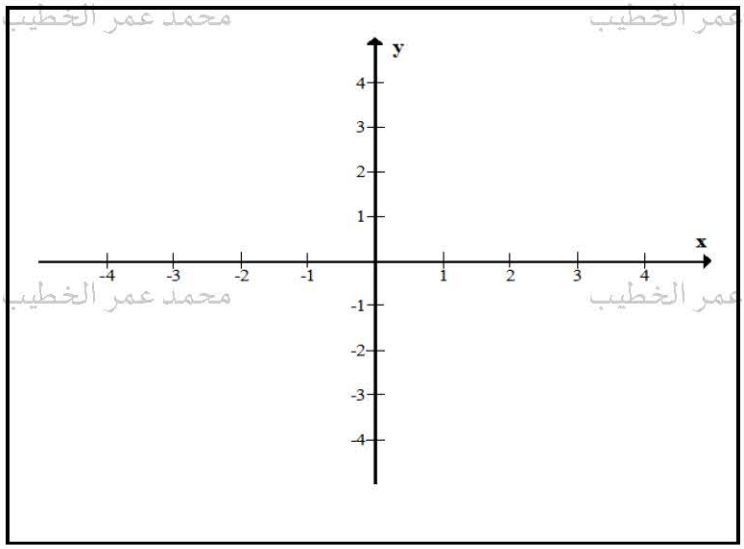


---

(2) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\frac{x^2+4}{x^3}$

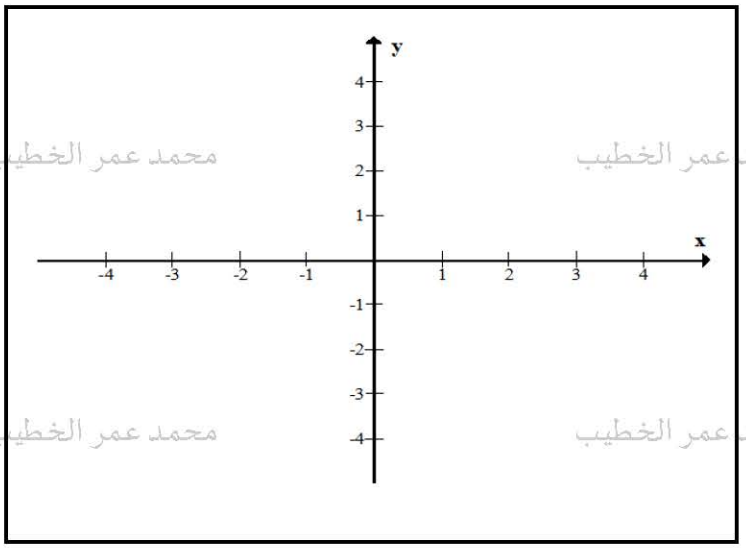


(1) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\frac{x-4}{x^3}$



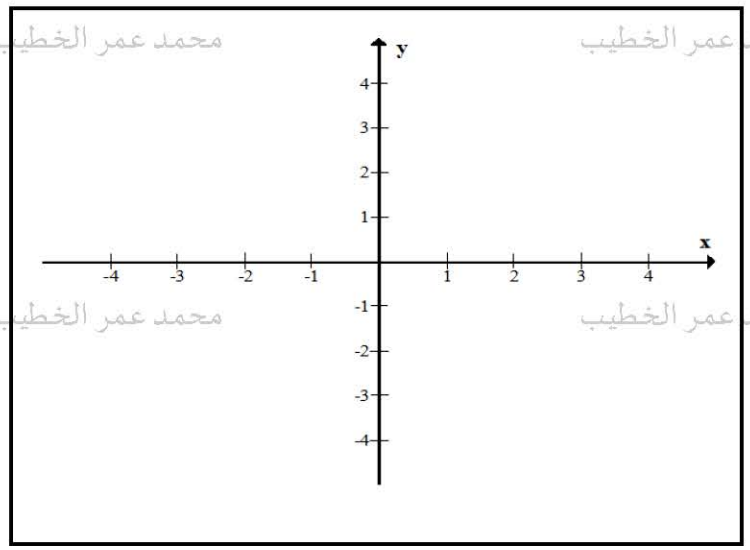
---

(2) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$

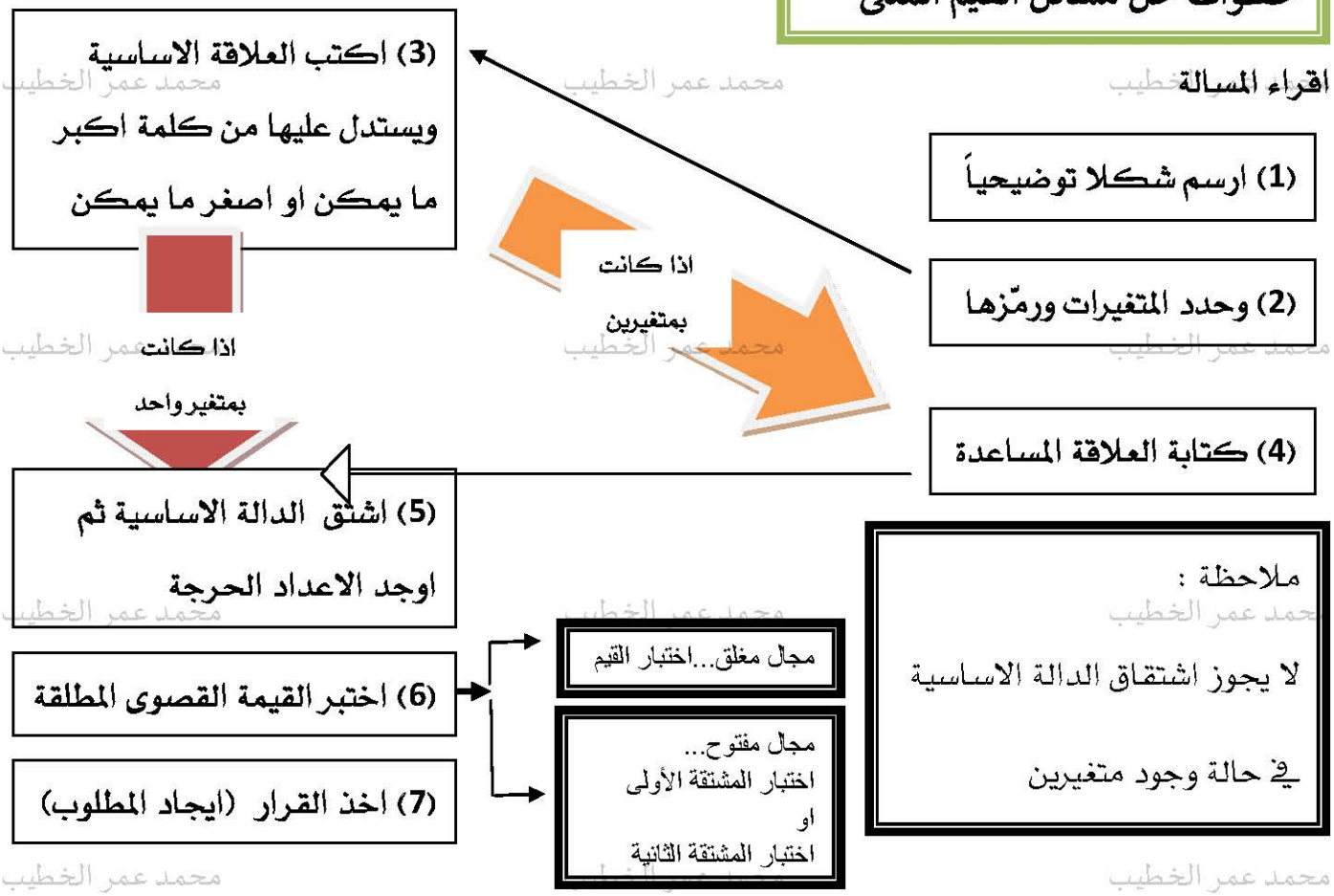


---

(3) ارسم منحنى الدالة $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$



خطوات حل مسائل القيم المثلى



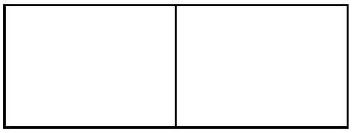
كلامات تدل على ان السؤال ...على القيم المثلى مثل .... اكبر ما يمكن ، اصغر ما يمكن ، اقصر ، اطول.....

مزرعة مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم، يراد وضع سياج طوله $96\,ft$ على الجوانب الثلاث الاخرى ما اكبر مساحة يمكن احاطتها.

(1) قطعة ارض مستطيلة الشكل مساحتها $1800\,ft^2$ ، اوجد طول اصغر سياج ممكن احاطة الارض به من الجوانب االثلاث فقط

---

(2) يراد عمل سياج حول اسطبل للخيول مستطيل الشكل ومقسوم الى حضرتين متلاصقين ومتطابقين في المساحة اذا كان طول السياج $120\,ft$ اوجد ابعاد الاسطبل كامل لتكون مساحتة اكبر ما يمكن



(1) صالة عرض مستطيلة الشكل مساحتها $800\ ft^2$ ،بها ثلاث ابواب من ثلاث جوانب عرض الباب الأول $10\,ft$ ،ومن الجهتين الباقية بابيين بعرض $6\,ft$ لكل منهم ، اوجد طول اصغر جدار ممكن احاطة المعرض به من الجوانب الاربعة.(بدون الابواب)

---

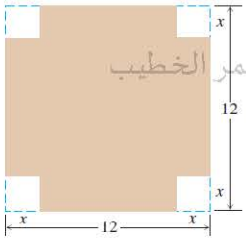
(2) بين ان المستطيل ذي المساحة العظمى الذي محيطة قيمة ثابتة p يكون مربع طول ضلعة $\frac{p}{4}$ ومساحتة $A=\frac{p^2}{16}$.

---

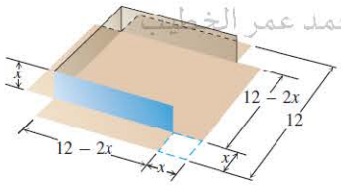
(3) بين ان المستطيل ذي المحيط الاصغر ومساحتة قيمة ثايتة A يكون مربع طول ضلعة $\sqrt{A}$ ومحيطة $4\sqrt{A}$.

(1) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورقة مربعة الشكل طول ضلها $12in$

وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة عند الرؤوس، اوجد اكبر حجم للصندوق.



(a)



---

(2) يراد عمل صندوق على شكل شبه مكعب بدون غطاء من ورق مقوى مستطيل الشكل طول ضلها $10in$ وعرضها $6in$ وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة بطول ضلع x عند الرؤوس، اوجد قيمة x التي تحقق القيمة العظمى لحجم للصندوق

خطوات حل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن

اقراء المسالة

(1) ارسم شكلا توضيحياً

(2) حدد المتغيرات ورمّزها

(3) اكتب المعطيات والمطلوب

(4) اكتب العلاقة الاساسية التي تربط المعطيات بالمطلوب

(5) اشتق الدالة الاساسية ضمنياً بالنسبة للزمن

اشتق كل المتغيرات بالنسبة للزمن

(6) عوض المعطيات لايجاد المطلوب

ملاحظة :

(1) يجوز اشتقاق الدالة الاساسية في حالة وجود متغيرين بشرط توفر معلومات عن المتغيرات او ابحث عن علاقة مساعدة للتخلص من احدهما

(2) اذا كانت قيمة المتغير تزيد فان معدل تغيرة موجب

(3) اذا كانت قيمة المتغير تقل فان معدل تغيرة سالب

ينتشر حريق في احدى الغابات بشكل دائري ،ويتزايد طول نصف قطر الحريق بمعدل $5\ ft/\min$ اوجد معدل التغير في مساحة المنطقة المحترقة عندما يكون نصف قطر الحريق $200\ ft$.

(1) سلم طوله $10\ ft$ ، موضوع احد طرفية على جدار منزل والطرف الأخر موضوع على الارض، اذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بمعدل $3\ ft/s$ بعيداً عن الحائط

اوجد سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم عند اللحظة التي يكون فيها الطرف السفلي على بعد $6\ ft$ من الحائط.

---

(2) سلم طوله $10\ ft$ ، موضوع احد طرفية على جدار منزل والطرف الأخر موضوع على الارض، اذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بمعدل $3\ ft/s$ بعيداً عن الحائط

اوجد معدل تغير الزاوية بين السلم والخط الافقي عندما يبعد اسفل السلم $6\ ft$ من الحائط.

قطرة ماء كروية تتبخر بمعدل $1cm^3 / \min$ وتبقى تحافظ على شكلها

(أ) اوجد معدل تناقص نصف قطر قطرة الماء عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $0.2\ cm$.

(ب) اوجد سرعة تناقص المساحة السطحية لقطرة الماء عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $0.2\ cm$.

(ج) اذا كان معدل تبخر حجم قطرة الماء يتناسب مع المساحة السطحية لها ، فبين ان معدل تغير نصف القطر ثابت عند اي لحظة

(1) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل $20m^3 / h$ وينتشر بشكل دائري بسمك $2cm$ ، اوجد معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط عندما يكون نصف القطر $10m$.

---

(2) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل 120 برميل في الدقيقة وينتشر بشكل دائري بسمك $\frac{1}{4}''$ ، اوجد معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط عندما يكون نصف القطر $300\,ft$.

$1ft^3 = 7.5$ برميل

$\frac{1}{4}'' = \frac{1}{4}in = \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} ft = \frac{1}{48}'$

---

(3) يتسرب النفط من ناقلة بحرية بمعدل $90gl / \min$ وينتشر بشكل دائري بسمك $\frac{1}{8}''$ ، اوجد معدل تزايد نصف قطر بقعة النفط عندما يكون نصف القطر $100\,ft$.

$1barel = 42g$

الاقتصاد

(1) تكلفة انتاج x قطعة هو $C(x)$ وهي دالة تراكمية

(2) التكلفة الفعلية لانتاج القطعة رقم x_n هو $C(x_n)-C(x_{n-1})$

(3) التكلفة الحدية لانتاج القطعة رقم x_n هو $C'(x_n)$

وهي دالة حدية اي تحسب قيمة التكلفة عند قطعة واحدة فقط وليست تراكمية

ملاحظة : عندما يكون الانتاج كبير فان التكلفة العفعلية لانتاج القطعة رقم x_n تقريبا يساوي التكلفة الحدية

(4) متوسط التكلفة للقطعة الواحدة يساوي $\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$

أذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.02x^2+2x+4000$

(أ) اوجد تكلفة انتاج اول 100 قطعة

(ب) اوجد تكلفة انتاج اول 1000 قطعة

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

أذا كانت دالة التكلفة لأنتاج x لعبة تعطى بالعلاقة $C(x)=0.02x^2+2x+4000$

(أ) اوجد التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(ب) اوجد التكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(ج) قارن بين التكلفة الفعلية لانتاج اللعبة رقم 100والتكلفة الحدية لانتاج اللعبة رقم 100.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(د) اوجد متوسط انتاج القطعة الواحدة عند انتاج 100 قطعة

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(هـ) اوجد متوسط انتاج القطعة الواحدة عند انتاج 1000 قطعة

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

(و) قارن بين متوسط تكلفة القطعة الواحدة عند انتاج 100 قطعة و 1000ماذا تلاحظ.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

إنتهت الوحدة الرابعة بحمد الله ... واعتذر للجميع عن أي تقصير أو خطأ.

محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب محمد عمر الخطيب

قواعد التكـامل

ملاحظة: راجع قواعد الاشتقاق

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$

$* \int (a\,x+b)^n dx = \frac{(a\,x+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(2) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

$* \int \sin(ax+b)\, dx = \frac{-\cos(ax+b)x}{a} + c$

(3) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

(4) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

(5) $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$

(6) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

(7) $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$

(8) $\int e^x\, dx = e^x + c$

$* \int e^{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$

(9) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

$* \int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

(10) $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + c$

$* \int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

$* \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(12) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$

خواص التكامل غير المحدود

يتوزع التكامل على الجمع والطرح ولا يتوزع على الضرياو والقسمة

(1) $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

(2) $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int 2\sec x \tan x \quad dx$

---

(2) $\int \sec^2 x \quad dx$

---

(3) $\int 4\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} \quad dx$

---

(4) $\int \dfrac{\cos x}{\sin x} \quad dx$

---

(5) $\int \dfrac{4x}{x^2+4} \quad dx$

---

(6) $\int \dfrac{e^x}{e^x+3} \quad dx$

---

(7) $\int \dfrac{3}{4x^2+4} \quad dx$

---

(8) $\int \dfrac{4}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \quad dx$

التطبيقات

الدالة المكانية ⟸ دالة السرعة المتجهة ⟸ دالة التسارع

بالاشتقاق

الدالة المكانية ⟹ دالة السرعة المتجهة ⟹ دالة التسارع

بالتكامل

(1) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3-12t$ والموقع الابتدائي $s(0)=3$

(2) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3e^{-t}-2$ والموقع الابتدائي $s(0)=0$

(1) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $a(t)=3\sin t+1$ و والسرعة الأبتدائية $v(0)=0$ الموقع الابتدائي $s(0)=4$

---

(2) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $a(t)=t^2+1$ و والسرعة الأبتدائية $v(0)=4$ الموقع الابتدائي $s(0)=0$

رمز المجموع (سيجما) $\sum$

اذا كانت n عدد صحيح موجب و a,b,c اعداد حقيقية فان

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(4)\quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

خواص المجموع

$$\sum_{i=1}^{n}(c\,a_i \pm d b_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i \pm d\sum_{i=1}^{n} b_i$$

اكتب كل الحدود واحسب المجموع

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{8}(i^2+2)$$

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{40}(3i-4)$$

مجموع ريمان لحساب المساحة

يسمى المقدار $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ حيث x_i هي عناصر التجزئة و c_i هي نقاط القيم

(1) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0,1]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0

---

(2) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[1,2]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$f(x)$	0.0	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4

(1) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0,0.8]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

---

(2) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0,2.6]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.0	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.2	1.4	1.0

المساحة

اذا كانت كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $f(x) \geq g(x)$ فان المساحة المحصورة بين المنحنين تعطى بالتكامل

$$A = \int_a^b [\text{الدالة الأعلى} - \text{الدالة الأسفل}]\, dx$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

ملاحظة : يمكن اعتبار محور x دالة معادلتها $y = 0$

(1) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x) = 4 - x^2$

---

(2) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوف محور x وتحت المنحنى $f(x) = 4x - x^2$

(1) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x)=x^2-4$

---

(2) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x)=x^2-4x$

---

(3) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين محور x والمنحنى $f(x)=\sin x$

حيث $0 \le x \le \pi$

محمد عمر الخطيب

القيمة المتوسطة للدالة

اذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فان القيمة المتوسطة للدالة f تساوي

$$f_{ave}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad ,f(c)=f_{ave}$$

(1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=2x+1$ على الفترة $[0,4]$ ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية

---

(2) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=x^2+2x$ على الفترة $[0,1]$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=x^2-1$ على الفترة $[1,3]$ ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية

---

(2) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=2x-x^2$ على الفترة $[0,1]$

محمد عمر الخطيب

(1) اكتب $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$ **بصورة تكامل منفرد**

---

(2) اكتب $\int_0^2 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$ **بصورة تكامل منفرد**

---

(3) اذا كان $\int_1^3 f(x)\,dx = 3$ و $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$ **فاوجد**

$$(a)\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,dx =$$

$$(b)\int_1^3 [f(x)-g(x)]\,dx =$$

$$(c)\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,dx =$$

$$(d)\int_1^3 [4f(x)-3g(x)]\,dx =$$

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الاول)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و $F(x)$ هي الدالة الاصلية لـ f فان

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_0^2 (2x-3)\,dx =$

---

(2) $\int_0^3 (x^2-2)\,dx =$

---

(3) $\int_{-1}^1 (x^3+2x)\,dx =$

---

(4) $\int_0^2 (x^3+3x-1)\,dx =$

---

(5) $\int_1^4 x\sqrt{x}+\frac{3}{x})\,dx =$

---

(6) $\int_1^2 4x-\frac{2}{x^2})\,dx =$

محمد عمر الخطيب

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الثاني)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(x)$$

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(\mathrm{g}(x))\times \mathrm{g}'(x)$$

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(\mathrm{g}(x))\times g'(x)-f(h(x))\times h'(x)$$

اوجد $f'(x)$ في كل مما يلي

(1) $f(x)=\int_1^x (t^2+2t+1)\,dt$

---

(2) $f(x)=\int_x^1 \sec t\,dt$

محمد عمر الخطيب

اوجد $f'(x)$ في كل مما يلي

(1) $f(x)=\int_{e^x}^{2-x}\sin t^2\,dt$

---

(2) $f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\sin(3t)\,dt$

---

(3) $f(x)=\int_{3x}^{\sin x}(t^2+4)\,dt$

---

(4) $f(x)=\int_{2-x}^{xe^x}e^{2t}\,dt$

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع وطرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

2) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها ال جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

3) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي حاصل ضرب او قسمة دالتين ،احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int xe^{x^{2+1}}\,dx$

---

(2) $\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(2) $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx$

(3) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

(4) $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}\,dx$

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{u}\,(\sqrt{u}+1)}\,du$

(2) $\int \frac{v}{v^2+4}\,dv$

(3) $\int \frac{4}{x(\ln x+1)^2}\,dv$

إنتهت الوحدة الخامسة بحمد الله