نماذج أجابة أسئله توقعات نصار 11علمى

عمل / أ . أحمد نصار

((مذكره مجانية ... المرجع: الكتاب المدرسى وكراسة التمارين وزارة التربية والتعليم الكويتية))

(1)

اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في الصورة الجبرية

ثم حوله للصورة المثلثية مستخدما السعة الأساسية

الحل :

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \times \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}$$

$$= \frac{2-2\sqrt{3}i}{3+1}$$

$$= \frac{2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x = \frac{1}{2} \quad , y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

نفرض أن α زاوية الاسناد

$$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right| = \sqrt{3}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

θ تقع في الربع الرابع

$$x > 0 \quad , y < 0$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

الصورةالمثلثية هي :

$$\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

(2)

إذا كان : $z_1 = 3 + 4i \quad , \quad z_2 = 5 - 2i$
فأوجد كلا مما يلي في الصورة الجبرية:

$\overline{3z_1 - 2\,z_2}$

الحل :

$$\overline{3z_1 - 2z_2} = \overline{3(3 + 4i) - 2(\,5 - 2i)}$$
$$= \overline{9 + 12i - 10 + 4i}$$
$$= \overline{-1 + 16i}$$
$$= -1 - 16i$$

2) $\dfrac{z_2}{z_1}$

الحل :

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5 - 2i}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i}$$
$$= \frac{15 - 20i - 6i - 8}{3^2 + 4^2}$$
$$= \frac{7 - 26i}{25}$$
$$= \frac{7}{25} - \frac{26}{25}i$$

(3)

إذا كان : $z_1 = -2 + 2i$ ، $z_2 = 1 - i$

(1) ضع z_1 في الصورة المثلثية

(2) حل المعادلة : $2z + \overline{z_1} = 3i\,(z_2)^2$

الحل :

$(1) \quad z_1 = -2 + 2i$

$x = -2 \quad ، \quad y = 2$

$$r = |z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

نفرض أن α زاوية الإسناد

$$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = |-1| = 1$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$x < 0 \quad ، \quad y > 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

الصورة المثلثية هي : $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$(2) \quad 2z + \overline{z_1} = 3i\,(z_2)^2$

$$2z + \left(\overline{-2 + 2i}\right) = 3i\,(1 - i)^2$$

$$2z + -2 - 2i = 3i\,(1 - 2i - 1)$$

$$2z + -2 - 2i = 3i\,(-2i)$$

$$2z + -2 - 2i = -6i^2$$

$$2z + -2 - 2i = 6$$

$$2z = 6 + 2 + 2i = 8 + 2i$$

$$z = 4 + i$$

(4)

(a) حول الاحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية حيث ($N(5, \frac{\pi}{4})$)

الزوج المرتب $(5, \frac{\pi}{4})$ يمثل الإحداثيات القطبية للنقطة N حيث

$r = 5, \ \theta = \frac{\pi}{4}$

$X = r\cos\theta = 5\cos\frac{\pi}{4}$

$= 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$Y = r\sin\theta = 5\sin\frac{\pi}{4}$

$= 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية

للنقطة N : $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

....

(b) إذا كان $z_2 = 3 - 5i$

(1) اوجد : z_2^{-1}

الحل :

$$z_2^{-1} = \frac{1}{3-5i} \times \frac{3+5i}{3+5i}$$

$$= \frac{3+5i}{9+25}$$

$$= \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i$$

(5)

أوجد مجموعة حل المعادلة : $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في C

الحل : نحسب المميز Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (16)^2 - 4(4)(25)$$

$$= -144$$

$$= (-1) \times (12)^2$$

$$= i^2 \times (12)^2$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - 12i}{2 \times 4} = -2 - \frac{3}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + 12i}{2 \times 4} = -2 + \frac{3}{2}i$$

مجموعة الحل = $\{-2 - \frac{3}{2}i, -2 + \frac{3}{2}i\}$

(6)

أوجد الزوج المرتب (r , θ) للنقطة $D (3\sqrt{3} , 3)$ حيث $\leqslant \theta < 2\pi$

الحل :

$$r = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{36} = 6$$

نفرض أن α زاوية الاسناد

$$\therefore \tan\alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{3}{3\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وبالتالي : $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}$

$\because \; x > 0 , \; y > 0 \longrightarrow$ $\therefore$ D تنتمي إلى الربع الأول

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

وبالتالي : الاحداثيات القطبية هي $D \left(6 , \frac{\pi}{6} \right)$

(7)

أوجد السعة و الدورة للدالة : $y = -3\cos(2x) \quad , -\pi \le x \le \pi$

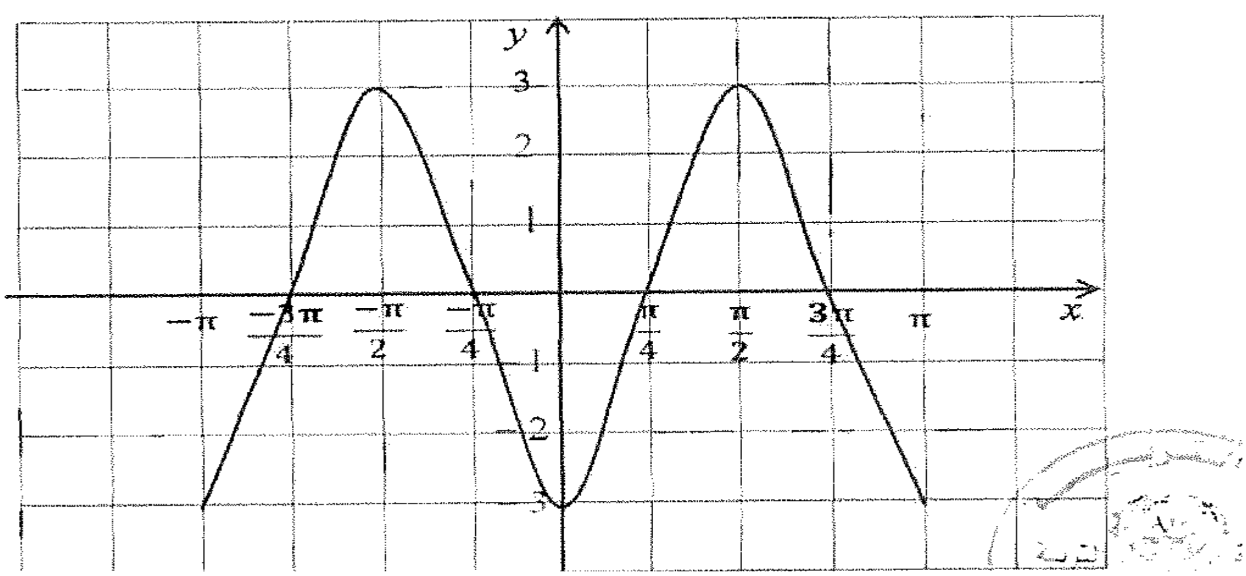
ثم ارسم بيانها

السعة : $|a| = |-3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

ربع الدورة $= \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(2x)$	1	0	-1	0	1
$y = -3\cos(2x)$	-3	0	3	0	-3



(8)

(a) أوجد السعة و الدورة ثم ارسم بيان الدالة :

$$y = \frac{1}{2}\cos(-x) \quad : \quad x \in [-2\pi , 2\pi]$$

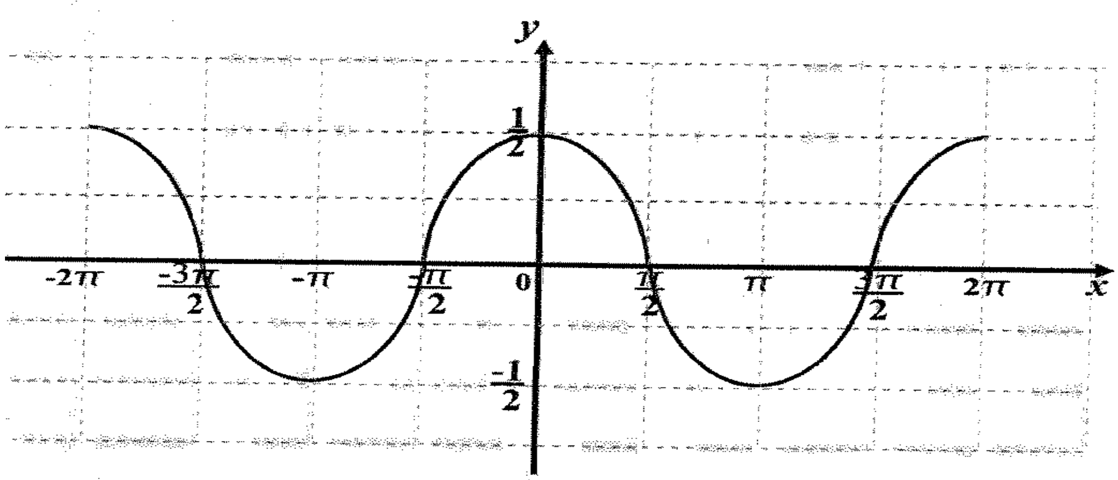
الحل :

السعة : $|a| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

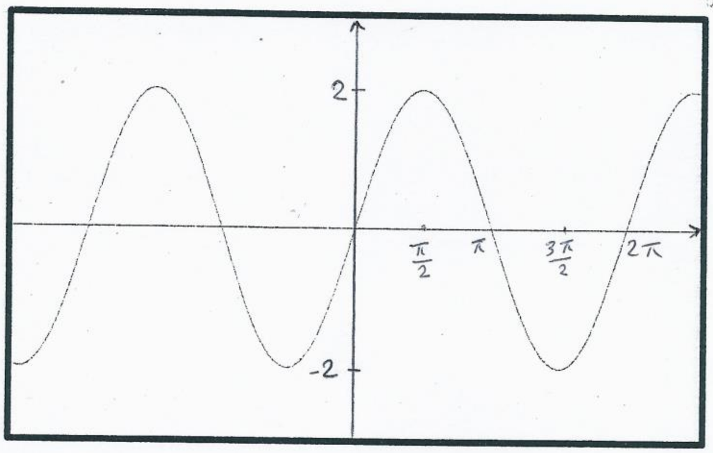
$\therefore$ ربع الدورة : $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-x$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
$\cos(-x)$	1	0	-1	0	1
$\frac{1}{2}\cos(-x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$



(9)

ⓐ $y = \sin x$



الحل الدالة دورية مجالها $\mathbb{R}$

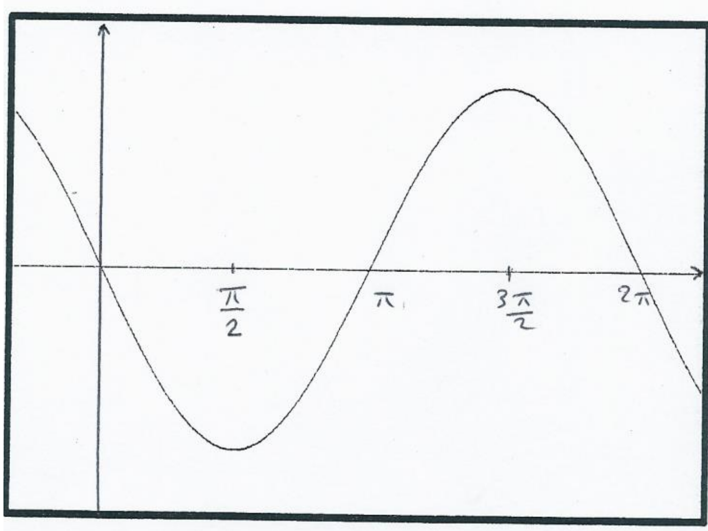
السعة: $|a| = |2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

ربع الدورة: $\frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$2\sin x$	0	2	0	-2	0

(b) $y = -3\sin x$



الحل الدالة دورية مجالها $\mathbb{R}$

السعة: $|a| = |-3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

ربع الدورة: $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$-3\sin x$	0	-3	0	3	0

(10)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = -3 - 4\,i$

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرا تربيعيا للعدد z ، فيكون $w^2 = z$

بالتعويض $(m + ni)^2 = -3 - 4i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i$

خاصية المساواة لعددين مركبين
$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 & ---\rightarrow (1) \\ 2mn = -4 & ---\rightarrow (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة: $|w|^2 = |z|$

$$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}\right)$$

$$m^2 + n^2 = 5 \qquad ---\rightarrow (3)$$

بجمع المعادلتين (3) , (1) نحصل على:

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 \\ m^2 + n^2 = 5 \end{cases}$$

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

بالتعويض في (1) نحصل على: $\therefore\ n^2 = 4 \Rightarrow n = \pm 2$

$$\begin{cases} m = 1\ ,\ m = -1 \\ n = 2\ ,\ n = -2 \end{cases}$$

من المعادلة $2mn = -4$ نستنتج أن m , n لهما إشارتان مختلفتان

$\therefore\ m = 1\ ,\ n = -2$ أو $m = -1\ ,\ n = 2$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $Z = -3 - 4\,i$

هما: $w_1 = 1 - 2i\ ,\ w_2 = -1 + 2i$

(11)

أوجد مجموعة حل المعادلة في c :

$$z+\frac{4}{z}=2$$

$$z^2+4=2z$$

$$z^2-2z+4=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=(-2)^2-4(1)(4)$$

$$\Delta=-12$$

$$=12\times(-1)$$

$$=12\times i^2 \qquad\qquad i^2=-1$$

$$z=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)-2\sqrt{3}i}{2(1)}=1-\sqrt{3}i$$

$$z=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)+2\sqrt{3}i}{2(1)}=1+\sqrt{3}i$$

م.ح = $\{1-\sqrt{3}i\ ,\ 1+\sqrt{3}i\}$

(12)

اوجد مجموعة حل المعادلة : $z + i = 2\bar{z} + 1$ في C

$$\bar{z} = x - yi \quad \text{و} \quad z = x + yi$$

$$x + yi + i = 2(x - yi) + 1$$

$$x + yi + i = 2x - 2yi + 1$$

$$x + yi - 2x + 2yi = 1 - i$$

$$-x + 3yi = 1 - i$$

$$-x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = -1$$

$$3y = -1 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{3}$$

الحل مجموعة $= \left\{-1 - \frac{1}{3}i\right\}$

(13)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\overline{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$.

الحل:

لتكن $z = x + yi$ حيث x, y عددان حقيقيان.

$2z + i\overline{z} = 5 - 2i$

عوّض عن z بـ $x + yi$ $\qquad 2(x + yi) + i(\overline{x + yi}) = 5 - 2i$

مرافق $x + yi$ هو $x - yi$ $\qquad 2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 2i$

$2x + 2yi + xi - y(i)^2 = 5 - 2i$

$i^2 = -1$ $\qquad 2x + 2yi + xi + y = 5 - 2i$

تجميع الأعداد الحقيقية معًا والأعداد التخيلية معًا $\qquad 2x + y + (x + 2y)i = 5 - 2i$

خاصية تساوي عددين مركبين

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

بحل المعادلتين نحصل على:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

مجموعة الحل: $= \{4 - 3i\}$.

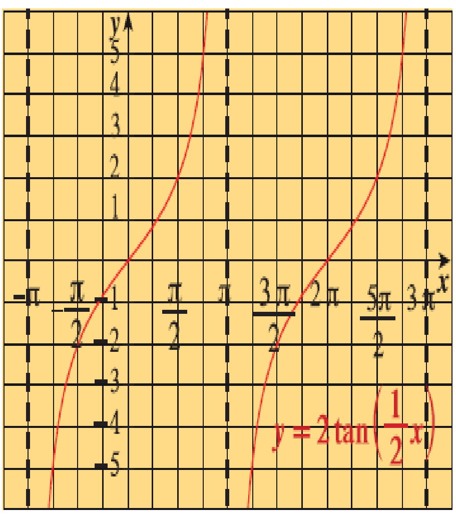
(14)

الدالة $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ هي دالة دورية.

الدورة: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{2}$

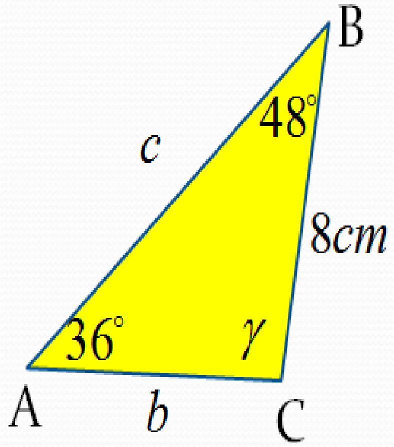
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\frac{1}{2}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف
$y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-2	0	2	غير معرف



(15)

حل المثلث ΔABC

حيث $\alpha = 36^\circ, \beta = 48^\circ, a = 8cm$



الحل

مجموع قياسات زوايا المثلث = 180

$$\gamma = 180^\circ - (36^\circ + 48^\circ)$$

$$\gamma = 96^\circ$$

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b} = \frac{\sin 96^\circ}{c}$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b} \Rightarrow \quad b = \frac{8 \times \sin 48^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 10.115cm$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 96^\circ}{c} \Rightarrow \quad c = \frac{8 \times \sin 96^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 13.536cm$$

(16)

حل ΔABC حيث: $a = 3\text{ cm}\ ,\ b = 2\text{ cm}\ ,\ \alpha = 40^\circ$

الحل:

نستخدم قانون الجيب لإيجاد β

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

عوّض

$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin\beta}{2}$$

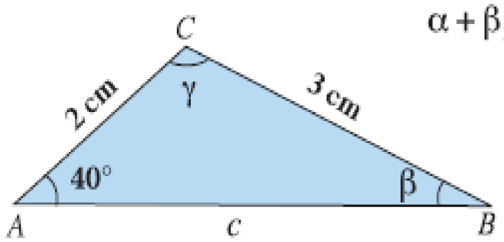
$$\sin\beta = \frac{2 \times \sin 40^\circ}{3} \implies \sin\beta \approx 0.43$$

توجد زاويتان β، $0^\circ < \beta < 180^\circ$ تحققان $\sin\beta = 0.43$

$\beta_1 \approx 25.4^\circ$ أو $\beta_2 \approx 154.6^\circ$

الحالة $\beta_2 \approx 154.6^\circ$ مرفوضة، لأن $\alpha + \beta_2 \approx 194.6^\circ$

وهو أكبر من 180°



باستخدام $\beta_1 \approx 25.4^\circ$ نحصل على:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta_1$$
$$\approx 180^\circ - 40^\circ - 25.4^\circ$$
$$\gamma \approx 114.6^\circ$$

يمكن الآن معرفة طول الضلع الثالث c

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

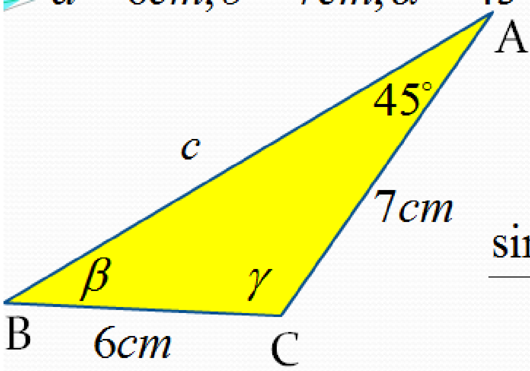
$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin 114.6^\circ}{c}$$

$$c = \frac{3\sin 114.6^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$c \approx 4.24\text{ cm}$$

(17)

حل المثلث ΔABC حيث $a = 6cm, b = 7cm, \alpha = 45^\circ$



قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{6} = \frac{\sin\beta}{7} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{6} = \frac{\sin\beta}{7} \Rightarrow \sin\beta = \frac{7\times\sin 45^\circ}{6}$$

$$\sin\beta \approx 0.824$$

إما $\beta_1 \approx 55.58^\circ$

$$\gamma_1 \approx 180^\circ - (45^\circ + 55.58^\circ) =$$

$$\gamma_1 \approx 79.42^\circ$$

إما $\beta_2 \approx 180^\circ - 55.58^\circ \approx 124.42^\circ$

$$\alpha + \beta_2 = 45^\circ + 124.42^\circ = 169.42^\circ$$

$$169.42^\circ < 180^\circ$$

$$\gamma_2 \approx 180^\circ - 169.42^\circ =$$

$$\gamma_2 \approx 10.58^\circ$$

إما $\gamma_1 \approx 79.42^\circ$

إما $\gamma_2 \approx 10.58^\circ$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{6} = \frac{\sin 79.42^\circ}{c}$$

$$c = \frac{6\times\sin 79.42^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$c \approx 9.73cm$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{6} = \frac{\sin 10.58^\circ}{c}$$

$$c = \frac{6\times\sin 10.58^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$c \approx 1.82cm$$

(18)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\csc\theta$

الحل :

الطرف الأيسر

يتم عمل توحيد مقامات

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+1+\cos^2\theta+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

وبأستخدام متطابقه فيثاغورث

$$=\frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$=2\csc\theta$$

(19)

أثبت صحة المتطابقة: $2\cot x\csc x = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1}$

الحل:

نبسط الطرف الأيمن إلى صورة الطرف الأيسر

أوجد مقامًا مشتركًا

$$\frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1} = \frac{(\sec x + 1) + (\sec x - 1)}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}$$

بسّط

$$= \frac{2\sec x}{\sec^2 x - 1}$$

$$\boxed{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \frac{2\sec x}{\tan^2 x}$$

استخدم متطابقة المقلوب

$$= 2\sec x\cot^2 x$$

بسّط

$$= \frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{2\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= 2\cot x\csc x$$

$\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(20)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$

الحل:

نبدأ بالطرف الأيسر ونصل إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب كل من البسط والمقام في $(1+\sin x)$

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{\cos x}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$=\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$\boxed{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$$

متطابقة فيثاغورث

$$=\frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$$

اختصار العامل المشترك

$$=\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(21)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

الحل :

$$\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \frac{\csc^2\theta - 1}{1+\csc\theta}$$

$$= \frac{(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1)}{1+\csc\theta}$$

$$= \csc\theta - 1$$

$$(\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - 1$$

$$= \csc\theta - 1$$

$$\therefore \frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$$

(22)

أثبت أن: $\dfrac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=\sin x+\sin x\tan^2 x$

الحل :

توحيد مقامات

$$\frac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=\frac{\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}+\cos x}$$

القسمه = الضرب فى المقلوب

$$=\frac{(1+\sin x)}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$sec\theta=\frac{1}{cos\theta}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$1+tan^2\theta=sec^2\theta$$

$$=\sin x(1+\tan^2 x)$$

$$=\sin x+\sin x\tan^2 x$$

نستنتج أن: $\dfrac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=\sin x+\sin x\tan^2 x$

(23)

حل المعادلة: $2\cos x+\sqrt{3}=0$

الحل:

$$2\cos x+\sqrt{3}=0$$
$$2\cos x=-\sqrt{3}$$
$$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\therefore\ \cos\alpha=|\cos x|$$
$$=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{6}$$
$$\because\ \cos x<0$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث

عندما x تقع في الربع الثاني: $x=\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

$$\therefore\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

وعندما x تقع في الربع الثالث: $x=\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

$$=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة: $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$، حيث $k\in\mathbb{Z}$

(24)

حل المعادلة: $4\sin\theta + 1 = \sin\theta$، حيث $0 \le \theta < 2\pi$

الحل:

$$4\sin\theta + 1 = \sin\theta$$

فصل المتغير $4\sin\theta - \sin\theta = -1$

بسّط $3\sin\theta = -1$

$$\sin\theta = -\frac{1}{3}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\therefore\ \sin\alpha = |\sin\theta| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.34 \text{ radians}$$

$\because\ \sin\theta < 0 \quad \therefore\ \theta$ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما θ تقع في الربع الثالث

$$\therefore\ \theta \approx \pi + 0.34$$

$$\approx 3.4816 \quad , \quad 3.4816 \in [0, 2\pi)$$

عندما θ تقع في الربع الرابع

$$\therefore\ \theta \approx 2\pi - 0.34$$

$$\approx 5.9432 \quad , \quad 5.9432 \in [0, 2\pi)$$

حل المعادلة: $\theta \approx 5.9432$ أو $\theta \approx 3.4816$

ملاحظة:

$$2\pi \approx 6.2832$$

(25)

حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

الحل:

$$\tan x = \sqrt{3}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$$\therefore \quad \tan\alpha = |\tan x|$$
$$= |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\because \quad \tan x > 0 \quad \therefore \quad x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

ولكن الدالة $\tan x$ هي دالة دورية ودورتها π

فيكون: $\tan(\pi + x) = \tan x$

ومنه يكون حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(26)

حل المعادلة: $2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

الحل:

$2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta\sin\theta + \sin\theta = 0$

$\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

تحليل إلى عوامل

$\sin\theta = 0$ أو $2\cos\theta + 1 = 0$

خاصية الضرب في الصفر

$\sin\theta = 0$ أو $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ أو $\sin\theta = 0$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\therefore \cos\alpha = |\cos\theta|$

$= \left|-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because \cos\theta < 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث.

عندما تقع θ في الربع الثاني:

$\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore \theta = \pi + \alpha + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\therefore \theta = 0$ أو $\theta = \pi$

$\therefore \theta = 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

حل المعادلة: $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$ أو $\theta = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(27)

حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

الحل :

$\cos\theta(\sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta = 1$

$\cos\theta = 0$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

$, \quad \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$

أو

$\sin\theta = 1$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

(28)

المعادلة: $4\sin^2 x-8\sin x+3=0$ هي معادلة تربيعية في $\sin x$

بالتحليل:

$(2\sin x-1)(2\sin x-3)=0$

$2\sin x-1=0$ أو $2\sin x-3=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$ أو $\sin x=\frac{3}{2}$

أو

$\sin x=\frac{3}{2}$

$\because$ $y=\sin x$ مداها $[-1\,,1]$

$\frac{3}{2}\notin[-1,1]$

$\therefore$ $\sin x=\frac{3}{2}$ ليس لها حل

$\sin x=\frac{1}{2}$

نأخذ $\sin x=\frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$\therefore\ \sin\alpha=|\sin x|$

$=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{6}$

$\because$ $\sin x>0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني.

عندما x تقع في الربع الأول

$\therefore\ x=\alpha+2k\pi=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

عندما x تقع في الربع الثاني

$\therefore\ x=(\pi-\alpha)+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

$=\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi$

$=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

حل المعادلة: $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

(29)

حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

الحل :

بالتحليل لمعادلة من الدرجه الثانيه $(\cos x + 1)(\cos x + 2) = 0$

كل قوس يتم مساواته ب صفر $\cos x = -2$ أو $\cos x = -1$

ليس لها حل $x = \pi + 2k\pi$

حل المعادلة $x = \pi + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(30)

ABC مثلث فيه $a = 3 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$

أوجد : (1) قياس أكبر زاوية

(2) مساحة سطح المثلث ABC مستخدماً قاعدة هيرون

الحل:

(1) قياس أكبر زاوية هو β لأنها تقابل أطول ضلع

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2\,(3)\,(7)} = \frac{-1}{7}$$

$$\therefore \beta \approx 98.21^\circ$$

(2)

$$s = \frac{1}{2}\,(a + b + c)$$

$$= \frac{1}{2}\,(3 + 8 + 7) = 9$$

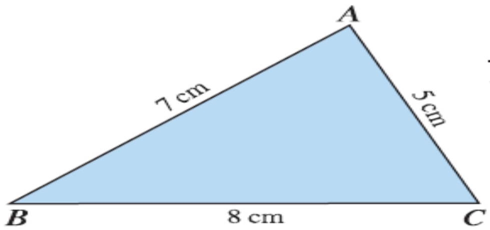
$$\text{Area} = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-3)(9-8)(9-7)}$$

$$= \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(31)

بدون أستخدام قاعدة هيرون :

أوجد مساحة المثلث ABC حيث $a = 8\text{ cm}$ ، $b = 5\text{ cm}$ ، $c = 7\text{ cm}$



الحل:

ليكن α قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين $\overline{AC}$, $\overline{AB}$

باستخدام قانون جيب التمام يمكننا إيجاد $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \frac{25 + 49 - 64}{2 \times 5 \times 7} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$$

$$\because \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\therefore \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

في كل مثلث، جيب الزاوية هو موجب

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

نوجد مساحة المثلث ABC باستخدام:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{Area} = 10\sqrt{3} \approx 17.32$$

(32)

حل ΔABC حيث: $a = 4\text{ cm}\ ,\ b = 3\text{ cm}\ ,\ c = 6\text{ cm}$

الحل:

يتوجب علينا إيجاد قياسات الزوايا الثلاث في ΔABC

نستخدم قانون جيب التمام:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 36 - 16}{2 \times 3 \times 6} = \frac{29}{36}$$

$$\therefore\ \alpha \approx 36.4^\circ$$

كذلك:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

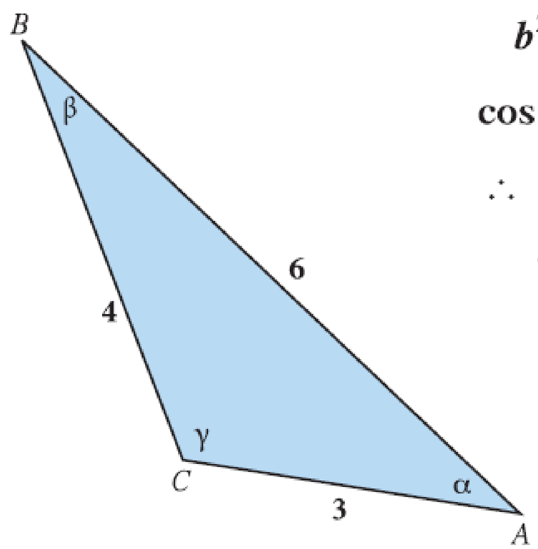
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{16 + 36 - 9}{2 \times 4 \times 6} = \frac{43}{48}$$

$$\therefore\ \beta \approx 26.4^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma \approx 180^\circ - 36.4^\circ - 26.4^\circ$$

$$\approx 117.2^\circ$$



(33)

الحل :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25} \longrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

α زاوية حادة

$$\therefore \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin^2\beta = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2$$

$$\sin^2\beta = \frac{49}{625} \qquad \sin\beta = \pm\frac{7}{25}$$

β زاوية حادة

$$\therefore \sin\beta = \frac{7}{25}$$

(1) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{24}{25}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{7}{25}\right)$$

$$= \frac{117}{125}$$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta$

$$= \frac{24}{25}$$

(34)

إذا كان: $\sin\alpha = \frac{4}{5}\ ,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-12}{13}\ ,\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلًّا مما يلي:

a $\sin(\alpha+\beta)$ b $\cos(\alpha-\beta)$ c $\tan(\alpha-\beta)$

الحل:

نوجد أولًا: $\tan\beta\ ,\ \tan\alpha\ ,\ \sin\beta\ ,\ \cos\alpha$

متطابقة فيثاغورث
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

تعويض
$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

فصل المتغير
$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$

بسّط
$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$

$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ أو $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\because\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0$

$\therefore\ \cos\alpha = \frac{3}{5}$

متطابقة فيثاغورث
- $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

تعويض
$\sin^2\beta + \left(\frac{-12}{13}\right)^2 = 1$

فصل المتغير
$\sin^2\beta = 1 - \frac{144}{169}$

بسّط
$\sin^2\beta = \frac{25}{169}$

$\sin\beta = -\frac{5}{13}$ أو $\sin\beta = \frac{5}{13}$

$\because\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\beta < 0$

$\therefore\ \sin\beta = \frac{-5}{13}$

تابع الحل :

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{3}$
- $\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\frac{-5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \dfrac{5}{12}$

a
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$$
$$= \frac{-48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65}$$

b
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$$
$$= \frac{-36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$

c
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$= \frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{12}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{12}\right)}$$
$$= \frac{\frac{11}{12}}{\frac{56}{36}} = \frac{33}{56}$$

(35)

اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أو ظل الزاوية.

- $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$

- $\dfrac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$

الحل

$$\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$$
$$= \sin(3x - x) = \sin 2x$$

....

$$\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x} = \tan(2y + 3x)$$

(36)

أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

$$2\csc 2x = \csc^2 x \tan x$$

الحل:

$$\frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin^2 x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \csc^2 x \tan x$$

....

$$\sin 3x = (\sin x)(4\cos^2 x - 1)$$

الحل:

$$\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x \cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)\sin x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$$

....

$$\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$$

الحل:

$$\cos 4x = \cos 2(2x) = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2(2\sin x \cos x)^2 = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$$

(37)

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

الحل:

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

المقام المشترك

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

بسّط

$$= \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \cos^2\theta-\sin^2\theta$$

متطابقة الضعف

$$= \cos 2\theta = \text{الطرف الأيسر}$$

(38)

أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$\sin(3\theta) = \sin(2\theta + \theta)$$

$$= \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)$$

$$= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

(39)

إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، فأوجد $\sin 2\theta$.

الحل:

متطابقة فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \ \cos\theta < 0$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

متطابقة جيب ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = 1$$

(40)

إذا كانت: $180° < \theta < 270°$ ، $\sin\theta = -\frac{24}{25}$ ،

فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$.

الحل:

نوجد أولًا $\cos\theta$

متطابقة فيثاغورث
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

عوّض
$$\cos^2\theta + \left(\frac{-24}{25}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{49}{625}$$

لأن θ في الربع الثالث
$$\cos\theta = \frac{-7}{25}$$

نوجد الآن $\frac{\theta}{2}$
$$\because \ 180° < \theta < 270°$$

ومنه $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني
$$\therefore \ 90° < \frac{\theta}{2} < 135°$$

متطابقة نصف الزاوية
$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

عوّض، اختر الجذر الموجب، لأن $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني
$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}} = \frac{4}{5}$$

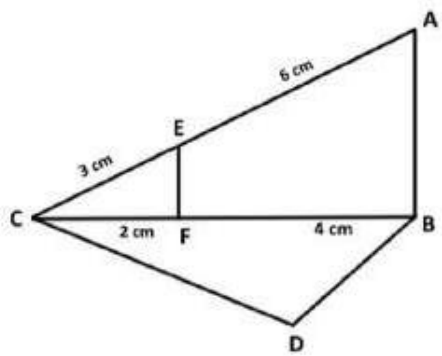
(41)

في الشكل المقابل: $\overline{AB} \perp (BCD)$

CE= 3 cm , EA = 6 cm , CF = 2 cm , FB = 4 cm

أثبت أن :

$\overline{EF} \perp \overline{BD}$



في $\blacktriangle ABC$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \overline{EF} // \overline{AB}$

$\overline{AB} \perp (DBC)$

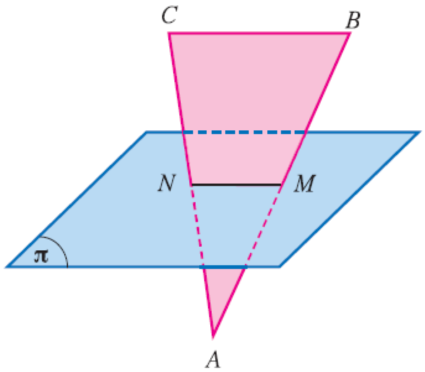
$\therefore \overline{EF} \perp (DBC)$

$\overline{DB} \subset (DBC)$

$\therefore \overline{EF} \perp \overline{BD}$

(يوجد حل أخر باستخدام تشابه المثلثات بدلا من نظريه طاليس)

(42)



في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ ،
M ، N تنتميان إلى المستوي π .
أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.

البرهان

$\because$ M منتصف $\overline{AB}$

$\because$ N منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

$\because \overleftrightarrow{MN} \subset \pi$ (معطى)

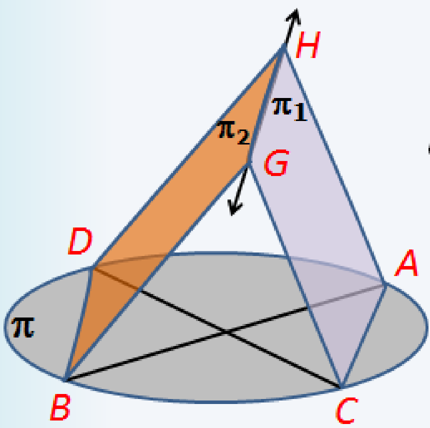
$\therefore \overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$ (نظرية)

(43)

في الشكل المقابل : $\overline{AB}\ ,\ \overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$ اثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

البرهان



∵ $\overline{AB}\ ,\ \overline{CD}$ قطران في الدائرة

∴ ينصف كل منهما الأخر و متطابقان

∴ الشكل $ACBD$ مستطيل

∵ $\overline{AC} \parallel \overline{DB}$

∵ $\overleftrightarrow{AC} \subset \pi_1 \qquad \overleftrightarrow{DB} \subset \pi_2$

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

∴ $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$

∵ $\overline{GH} \parallel \overline{AC} \qquad \overleftrightarrow{AC} \subset \pi$

∴ $\overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$

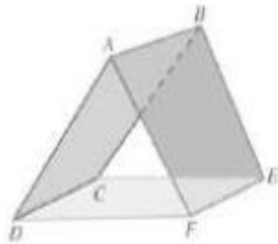
أي أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

(44)

في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$



الحل: $ABEF$ مستطيل

$$\overline{AB} \perp \overline{AF}$$

$ABCD$ مستطيل

$$\overline{AB} \perp \overline{AD}$$

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AF}$. مستقيمان متقاطعان في A فهما يعينان مستو وحيد هو (AFD)

$$\overleftrightarrow{AB} \perp (AFD) \rightarrow 1$$

$$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE} \text{ بالمثل } \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$$

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BE}$ مستقيمان متقاطعان في B فهما يعينان مستو وحيد هو (BEC)

$$\overleftrightarrow{AB} \perp (BEC) \rightarrow 2$$

$$(AFD) \parallel (BEC)$$

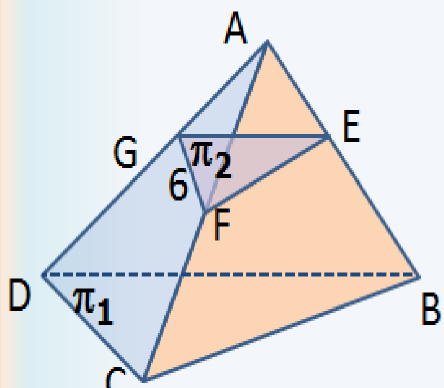
(45)

في الشكل المقابل : $ABCD$ هرم ثلاثي .

المستويان π_1 ، π_2 متوازيان إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ،

$FG = 6\ cm$ فأوجد DC

البرهان



$\because \frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ $\therefore \frac{AE}{AB+EB} = \frac{1}{1+3}$

$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4}$

$\because \pi_1 // \pi_2 ,\quad ABC \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{DB}$

$ABC \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GE}$

$\therefore \overleftrightarrow{DB} // \overleftrightarrow{GE}$ $\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{1}{4}$

و بالمثل يمكن إثبات أن $\overleftrightarrow{GF} // \overleftrightarrow{DC}$

وذلك من تشابه المثلثات

(AFE, ACB)

(AGF, ADC)

$\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{GF}{DC}$

$\therefore \frac{GF}{DC} = \frac{1}{4}$ $\therefore \frac{6}{DC} = \frac{1}{4}$

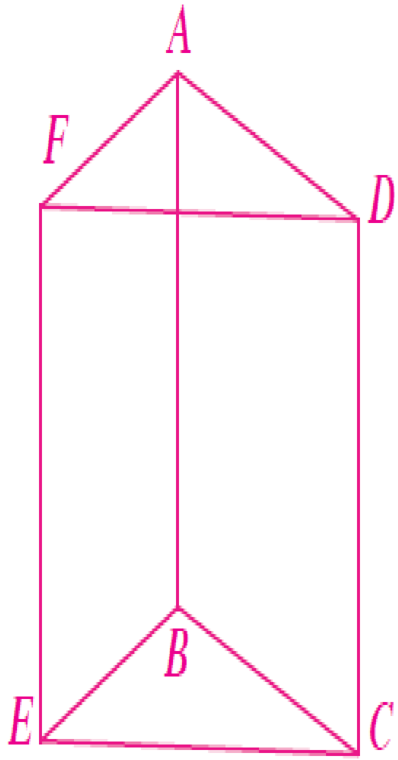
$DC = 24\ cm$

١٤

(46)

$ABEF$, $ABCD$ متوازيا أضلاع غير مستويين معًا ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$

أثبت أن: $CDFE$ متوازي أضلاع



$\because$ $AB = EF , \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

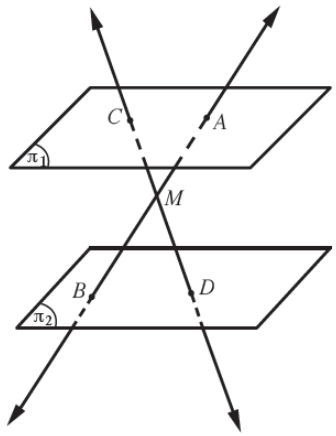
$\because$ $AB = CD , \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\because$ $EF = CD , \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

ومنه $CDFE$ متوازي الأضلاع.

(47)

في الشكل المقابل π_2, π_1 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،
حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$
أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



$\because$ $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ يتقاطعان $\therefore$ يشكلان مستويًا وهذا المستوي يقطع المستويين المتوازيين π_1، π_2 بمستقيمين متوازيين فيكون

$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ وبالتالي المثلثان: MAC، MBD متشابهان.

ومنه نستنتج: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

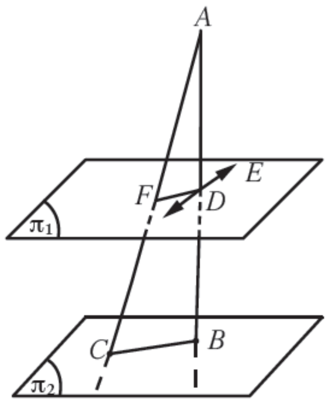
(ويتشابه المثلثان لان جميع الزوايا المتناظره متطابقه)

(48)

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي π_2 ، $\overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$

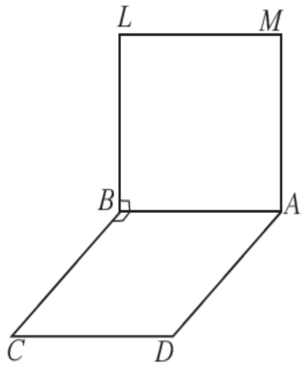
أثبت أن: $\pi_1 \parallel \pi_2$



في المثلث ABC لدينا $\overleftrightarrow{FD} \parallel \overleftrightarrow{CB}$ ولكن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ فيكون $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{FD}$ كما أن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DE}$ لذا $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ في النقطة D.

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ $\therefore$ $\pi_1 \parallel \pi_2$.

(49)



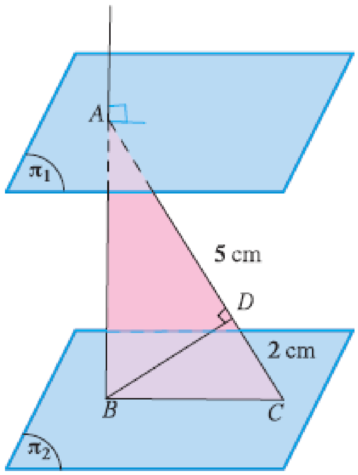
$ABCD$، $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

$\because$ $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{BA} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{LM} \perp \overleftrightarrow{BL}$ و $\overleftrightarrow{LM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ومنه $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$.

(من خواص المربع... الاضلاع المتقابله متوازيه والمتجاوره متعامده)

(50)



في الشكل المقابل، $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$, $A \in \pi_1$, $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان: $AD = 5\text{ cm}$, $DC = 2\text{ cm}$

أوجد: BD

الحل:

المعطيات:

$\pi_1 \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$AD = 5\text{ cm}$, $DC = 2\text{ cm}$

المطلوب:

إيجاد BD

البرهان:

$\because\ \pi_1 \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

$\therefore\ \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ (نظرية 7)

$\therefore$ $\overline{AB}$ عمودي على كل مستقيم في π_2

$\because\ \overline{BC} \subset \pi_2$

$\therefore\ \overline{AB} \perp \overline{BC}$

في المثلث ABC القائم الزاوية في B

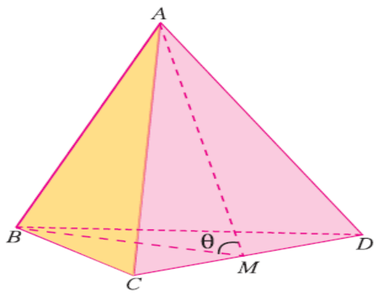
$\because\ \overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\therefore\ (BD)^2 = AD \times DC$

$= 5 \times 2 = 10$

$BD = \sqrt{10}\text{ cm}$

(51)



يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm

M منتصف $\overline{DC}$

a حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC

b أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

المعطيات: $ABCD$ هرم أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع.

طول الحرف $= 8$ cm، M منتصف $\overline{DC}$.

a المطلوب: تحديد الزاوية المستوية بين المستويين: ADC , BDC

البرهان:

نحدّد الزاوية المستوية بين المستويين: ADC , BDC

$\overleftrightarrow{DC}$ حافة الزاوية الزوجية (1)

المثلث ADC متطابق الأضلاع.

$\because$ M منتصف $\overline{CD}$ — من خواص $\triangle$ متطابق الأضلاع

$\therefore$ $\overline{AM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث $\overline{AM} \subset (ADC)$ (2)

$\therefore$ $\overline{BM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث $\overline{BM} \subset (BDC)$ (3)

وبالمثل نجد أن: $A\widehat{M}B$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

b المطلوب

إيجاد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

البرهان:

$\because$ المثلث AMD قائم الزاوية في M.

متطابقة فيثاغورث

$$(AM)^2 = (AD)^2 - (DM)^2$$
$$(AM)^2 = 8^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2$$
$$(AM)^2 = 64 - 16 = 48$$
$$AM = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

في المستوي AMB:

$$BM = AM = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

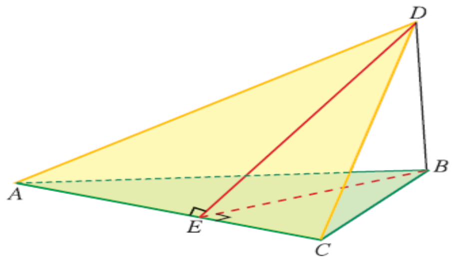
لإيجاد قياس الزاوية المستوية AMB نستخدم قانون جيب التمام في المثلث ABM.

$$(AB)^2 = (AM)^2 + (MB)^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot \cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{(AM)^2 + (MB)^2 - (AB)^2}{2AM \cdot MB}$$
$$\cos\theta = \frac{48 + 48 - 64}{2 \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}} = \frac{32}{96} = \frac{1}{3}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5287^\circ$$

أي $70^\circ 31' 43.61''$

$\therefore$ قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية حوالى $70^\circ 31' 44''$

(52)



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$DB = 5\text{ cm}$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ،$\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد:

a BE , DE

b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

الحل:

المعطيات:

D نقطة خارج (ABC) ، $m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$

$DB = 5\text{ cm}$, $AB = 10\text{ cm}$, $\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

a المطلوب: إيجاد BE , DE

البرهان:

$\because \overline{BE} \perp \overline{AC} \Rightarrow \therefore m(B\hat{E}A) = \frac{\pi}{2}$ فرضًا

$\because m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ AEB مثلث ثلاثيني — ستيني

$\therefore BE = \frac{1}{2}AB = 5\text{ cm}$ خاصيّة المثلث ثلاثيني — ستيني

$\overline{DB} \perp (ABC)$, $\overline{BE} \subset (ABC)$ فرضًا

$\therefore \overline{DB} \perp \overline{BE}$ خاصيّة المستقيم العمودي على مستو

في المستوي DBE:

المثلث DBE قائم في $\widehat{B}$، متطابق الضلعين.

$\therefore DE = BE \times \sqrt{2}$ طول الوتر في المثلث القائم متطابق الضلعين

$= 5\sqrt{2}\text{ cm}$

b المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين (BAC) , (DAC)

البرهان:

$\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين DAC ، BAC

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في المستوي BAC

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ في المستوي DAC

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين DAC ، BAC هي $\widehat{BED}$

$\because$ ΔDBE قائم في $\widehat{B}$ ومتطابق الضلعين.

$\therefore m(\widehat{BED}) = \frac{\pi}{4}$

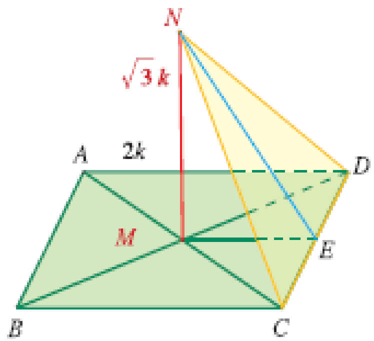
$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $= \frac{\pi}{4}$

(53)

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD



الحل:

المعطيات: $ABCD$ مستطيل، $\overline{AC} \cap \overline{DB} = \{M\}$

$AD = 2k$, $MN = \sqrt{3}\,k$, $\overline{MN} \perp (ABCD)$

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NDC

العمل: نرسم $\overline{ME}$ حيث E منتصف $\overline{CD}$

البرهان: $\overline{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين $ABCD$, NCD

$\because \overline{MN} \perp (ABCD)$, $\overline{CD} \subset (ABCD)$

$\therefore \overline{MN} \perp \overline{CD}$ (1)

في المثلث CDM المتطابق الضلعين (من خواص المستطيل)

$\because$ E منتصف $\overline{CD}$ (عملًا)

$\therefore \overline{ME} \perp \overline{CD}$ (2)

من (1), (2) نجد أن:

$\overline{CD} \perp (MNE)$, $\overline{NE} \subset (MNE)$

$\therefore \overline{NE} \perp \overline{CD}$

$\therefore$ $M\widehat{E}N$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overline{CD}$

في المثلث BCD

M منتصف $\overline{BD}$ (من خواص المستطيل)

E منتصف $\overline{CD}$ (عملًا)

$$\therefore ME = \frac{1}{2} AD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2k = k$$

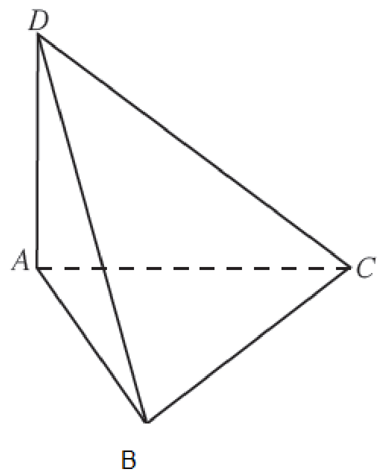
في المثلث MEN القائم الزاوية في M (من خواص المستقيم العمودي مع مستوي)

$$\tan(M\widehat{E}N) = \frac{MN}{ME} = \frac{\sqrt{3}\,k}{k} = \sqrt{3}$$

$$\therefore m(M\widehat{E}N) = 60^\circ$$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD هو 60°

(54)



ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB , \overleftrightarrow{DA} , DAC)$

$\overleftrightarrow{DA}$ هو خط تقاطع المستويين DAB , DAC

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوى ADC

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في المستوى ADB

$\therefore$ الزاوية $(B\hat{A}C)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

$\because$ المثلث ABC متطابق الأضلاع زواياه متطابقة .

$\therefore m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{3}$