

مذكرة

القصير الثاني

math

رياضيات الحادي عشر علمي

2023 - 2024

أ: سلامة علي الركاض



المتطابقات المثلثية

المتطابقات المثلثية الأساسية

Trigonometric Identities

المتطابقات المثلثية الأساسية

• متطابقات القسمة (الظل وظل التمام)

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad , \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

• متطابقات المقلوب

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad , \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad , \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

• متطابقات فيثاغورث

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad , \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$



$$\frac{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$$

أثبت صحة المتطابقة:

مثال 1

$$\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} + \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = 2 \csc\theta$$

أثبت صحة المتطابقة:

حاول أن تحل 1

$$2 \cot x \csc x = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1}$$

أثبت صحة المتطابقة:

مثال 2

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} - \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \tan x \cdot \sec x \quad \text{أثبت صحة المتطابقة:}$$

حاول أن تحل 2

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \quad \text{أثبت صحة المتطابقة:}$$

مثال 3

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = (\csc x - \cot x)^2 \quad \text{أثبت صحة المتطابقة:}$$

حاول أن تحل 3



أثبت صحة المتطابقة:

مثال 4

4 حاول أن تحل

كراسة التمارين

في التمارين (1-14)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(1) $(\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$

(2) $(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$

(3) $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2 \tan x$



(4) $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

(5) $\tan x + \cot x + 2 = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$

(6) $\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = 2 \csc^2 x$

$$(7) \frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$$

$$(8) \cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cot^2 x$$

$$(9) \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$



$$(10) \quad \frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\sec x + 1}{\tan x}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

بنود موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

(1) $3 \sin x = \sin(3x)$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(2) $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(3) $\sec x - \cos x = \tan x \sin x$ تمثل متطابقة.

—

في التمارين (5-10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$

(b) $\sin x \sec^2 x$

(c) $\cos x \sec^2 x$

(d) $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4 \sin x \cos x$

(b) 2

(c) -2

(d) $4 \sin x \cos x$

(7) المقدار: $\frac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \csc x$

(b) $\sec x \sin x$

(c) $\sec x \cos x$

(d) $\sin x \cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\tan^2 x$

(b) $\cot^2 x$

(c) $\tan^2 x \sin^2 x$

(d) $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

(a) 1

(b) -1

(c) 2

(d) -2

(10) المقدار: $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $-\tan x \sin x$

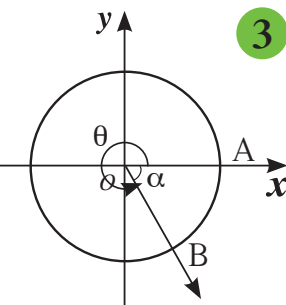
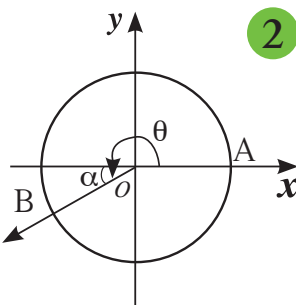
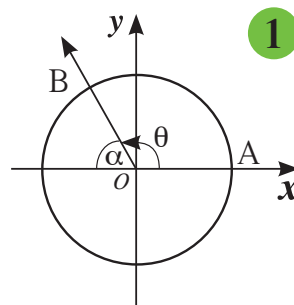
(b) $-\tan x$

(c) $\tan x \sin x$

(d) $\tan x$

حل معادلات مثلثية

زاوية الاسناد

 <p>3</p>	 <p>2</p>	 <p>1</p>	<p>الشكل</p>
<p>θ تقع في الربع ...</p>	<p>θ تقع في الربع ...</p>	<p>θ تقع في الربع ...</p>	<p>الربع من المستوى الإحداثي</p>
<p>$\alpha = 2\pi - \theta$</p>	<p>$\alpha = \dots\dots$</p>	<p>$\alpha = \dots\dots$</p>	<p>زاوية الإسناد</p>
<p>$\theta = 2\pi - \alpha$</p>	<p>$\theta = \dots\dots$</p>	<p>$\theta = \dots\dots$</p>	<p>الزاوية في الوضع القياسي</p>

حل المعادلة: $\sin x = \frac{1}{2}$

مثال توضيحي

حل المعادلة: $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$

حل المعادلة: $\sqrt{2} \cos x = 1$



حل المعادلة: $4 \sin \theta + 1 = \sin \theta$ ، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

مثال 2

حل المعادلة: $5 \sin \theta - 3 = \sin \theta$

حاول أن تحل 2

حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

مثال 3

حل المعادلة: $\tan x = 1$

حاول أن تحل 3

حل المعادلة: $2\cos\theta \sin\theta = -\sin\theta$

مثال 4



حل المعادلة: $\sin \theta \cos \theta - \cos \theta = 0$

حاول أن تحل 4

حل المعادلة: $4 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 = 0$

مثال 5

$$\cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 \quad \text{حل المعادلة:}$$

حاول أن تحل 5



كراسة التمارين

في التمارين (1-7)، حل كلاً من المعادلات التالية:

$$(1) \sin x = \frac{-1}{2}$$

$$(2) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) 2 \cos x = -1$$

(4) $\sqrt{3} \tan a = 1$

(5) $2 \cos x \sin x - \cos x = 0$

(6) $\tan^2 x = 3$



$$(7) \quad 4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$$

في التمرينين (11-12)، حلّ المعادلات التالية:

$$(11) \quad \sin^2 x - 2 \sin x = 0$$

$$(12) \quad 2 \sin^2 x + 3 \sin x = 2$$



بنود موضوعية

- (1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (a) (b)
- (2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (a) (b)
- (3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (a) (b)
- (4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$. (a) (b)
- (5) حلول المعادلة $2 \sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$. (a) (b)

في التمارين (6-11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

- (a) الأول (b) الأول أو الثالث
- (c) الثالث (d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

- (a) $-\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{7\pi}{6}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{4\pi}{3}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{3}$
- (c) $\frac{3\pi}{2}$ ، $\frac{11\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{6}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، $\frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2} \sin x \cos x - \sqrt{2} \cos x - 2 \sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

- (a) $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{7\pi}{4}$
- (c) $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ ، $\frac{7\pi}{4}$

متطابقات المجموع والفرق

متطابقات الدوال المتكافئة

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec \theta$$

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta \quad \text{أثبت أن:}$$

مثال 1

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \theta \quad \text{أثبت أن:}$$

حاول أن تحل 1

$$\csc\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\sec \theta \quad \text{أثبت أن:}$$

مثال 2

$$\sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \csc \theta \quad \text{أثبت أن:}$$

حاول أن تحل 2

متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع والفرق

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha$$

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$$

$$\sin(\beta + \alpha) = \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha$$

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha$$

$$\tan(\beta + \alpha) = \frac{\tan \beta + \tan \alpha}{1 - \tan \beta \tan \alpha}$$

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$$

مثال 3

أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلاً مما يلي:

a $\cos 15^\circ$

b $\sin 105^\circ$

c $\tan 75^\circ$

حاول أن تحل 3

أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلاً مما يلي:

a $\sin 15^\circ$

b $\cos 75^\circ$

c $\tan 105^\circ$

كراسة التمارين

في التمارين (1-3)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(1) $\sin 15^\circ$

(2) $\tan 135^\circ$

(3) $\cos 75^\circ$

مثال 4

إذا كان: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
 $\cos \beta = \frac{-12}{13}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$
 أوجد كلاً مما يلي:

a $\sin(\alpha + \beta)$

b $\cos(\alpha - \beta)$

c $\tan(\alpha - \beta)$

حاول أن تحل 4

باستخدام المعطيات من المثال (4)، أوجد كلاً مما يلي:

a $\cos(\alpha + \beta)$

b $\tan(\alpha + \beta)$

c $\sin(\beta - \alpha)$

كراسة التمارين

(4) إذا كان $\sin \gamma = \frac{4}{5}$ ، $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$

$\cos \beta = \frac{-8}{17}$ ، $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

(a) أوجد: $\sin(\beta + \gamma)$

(b) أوجد: $\cos(\beta - \gamma)$

(c) أوجد: $\tan(\gamma + \beta)$

في التمارين (5-10)، اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أو ظل الزاوية.

(5) $\sin 42^\circ \cos 17^\circ - \cos 42^\circ \sin 17^\circ$

(6) $\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{5}$

(7) $\frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ}$

(8) $\cos \frac{\pi}{7} \cos x + \sin \frac{\pi}{7} \sin x$

(9) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$

(10) $\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$

بنود موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad (1)$$

(a) (b)

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad (2)$$

$$(3) \cos\left(h + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos h$$

(a) (b)

$$(4) \tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12} = 14$$

(a) (b)

في التمارين (5-11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

$$(5) \tan \frac{7\pi}{12} \text{ تساوي:}$$

(a) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$

(b) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$

(c) $2 + \sqrt{3}$

(d) $-2 - \sqrt{3}$

$$(6) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ تساوي:}$$

(a) $\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$

(b) $\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$

(d) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$

$$(7) \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) \text{ تساوي:}$$

(a) $1 + \tan h$

(b) $\frac{1 - \tan h}{1 + \tan h}$

(c) $\frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}$

(d) $1 - \tan h$

$$(8) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ تساوي:}$$

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

(b) $\sqrt{2}(\cos x + \sin x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$

(d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$



(9) $\cos 94^\circ \cos 18^\circ + \sin 94^\circ \sin 18^\circ$ تساوي:

- | | |
|----------------------|---------------------|
| (a) $\cos 112^\circ$ | (b) $\cos 76^\circ$ |
| (c) $\sin 112^\circ$ | (d) $\sin 76^\circ$ |

(10) $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{3}$ تساوي:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| (a) $\cos \frac{4\pi}{21}$ | (b) $\sin \frac{4\pi}{21}$ |
| (c) $\cos \frac{10\pi}{21}$ | (d) $\sin \frac{10\pi}{21}$ |

(11) $\frac{\tan \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{3}}{1 + \tan \frac{\pi}{5} \tan \frac{\pi}{3}}$ تساوي:

- | | |
|--|--|
| (a) $\tan \frac{2\pi}{15}$ | (b) $\tan \frac{8\pi}{15}$ |
| (c) $\tan \left(\frac{-8\pi}{15} \right)$ | (d) $\tan \left(\frac{-2\pi}{15} \right)$ |

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

متطابقات ضعف الزاوية

أولاً : جيب تمام ضعف الزاوية

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

مثال 1 أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$

حاول أن تحل 1

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$



$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

مثال 2

إذا كان $\cos x = \frac{3}{5}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

حاول أن تحل 2

إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

ثانياً : جيب ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

مثال 3

إذا كان: $\sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، فأوجد $\sin 2\theta$.

إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، فأوجد $\sin 2\theta$.

حاول أن تحل 3

ثالثاً : ظل ضعف الزاوية

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$



مثال 4

إذا كان: $\tan \theta = -1 + \sqrt{2}$ ، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

حاول أن تحل 4

إذا كان $\tan \theta = \sqrt{3}$ ، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

أثبت صحة المتطابقة:

مثال 5

أثبت صحة المتطابقة: $2 \cos 2\theta = 4 \cos^2 \theta - 2$

حاول أن تحل 5

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

مثال 6



أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$

حاول أن تحل 6

كراسة التمارين

في التمارين (1-4)، اكتب المقدار بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

(1) $\sin 2x + \cos x$

(2) $\sin 2x + \cos 2x$

(3) $\cos 3x$

(4) $\cos 4x$

في التمارين (5-7)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(5) $2 \csc 2x = \csc^2 x \tan x$



$$(6) \sin 3x = (\sin x)(4 \cos^2 x - 1)$$

$$(7) \cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$$

متطابقات نصف الزاوية

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

مثال 7

حاول أن تحل 7

مثال 8

في المثال (8)، أوجد: $\cos \frac{\theta}{2}$, $\tan \frac{\theta}{2}$

حاول أن تحل 8

كراسة التمارين

في التمارين (8-10)، استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من:

(8) $\sin 15^\circ$

(9) $\tan 195^\circ$

(10) $\cos 75^\circ$

(12) إذا كانت $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ، $\sin x = -\frac{12}{13}$ فأوجد $\sin \frac{x}{2}$

بنود موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$

(a)

(b)

(3) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

(a)

(b)

(4) $\cos 6x = 2 \cos^2 3x - 1$

(a)

(b)

(5) $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

(a)

(b)



في التمارين (6-8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $2 \cos^2 \frac{x}{2}$ تساوي:

(a) $\frac{1 + \cos x}{2}$

(b) $1 + \cos x$

(c) $1 + \cos 2x$

(d) $\frac{1 - \cos 2x}{2}$

(7) $\cos \frac{\pi}{8}$ تساوي:

(a) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

(b) $\sqrt{2} - 1$

(c) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

(d) $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$

(8) إذا كان: $\cos \theta = \frac{-7}{25}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ فإن $\cos \frac{\theta}{2}$ يساوي:

(a) $\frac{2}{5}$

(b) $\frac{-2}{5}$

(c) $\frac{-3}{5}$

(d) $\frac{3}{5}$