

Ch6

KeyConcept Inverse and Determinant of a 2×2 Matrix

Let $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. A is invertible if and only if $ad - cb \neq 0$.

If A is invertible, then $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

The number $ad - cb$ is called the **determinant** of the 2×2 matrix and is denoted

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

KeyConcept Determinant of a 3×3 Matrix

Let $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Then $\det(A) = |A| = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$.

المفهوم الأساسي محدد مصفوفة 3×3

افترض $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. إذا $\det(A) = |A| = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

المفهوم الأساسي معكوس ومحدد المصفوفة 2×2

افترض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. يكون للمصفوفة A معكوس فقط إن كان $ad - cb \neq 0$ وهو $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

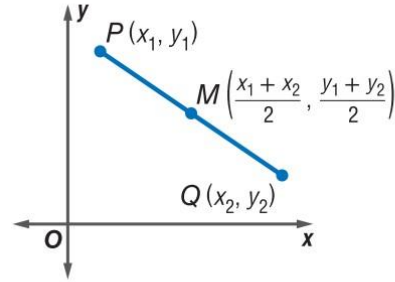
العدد $ad - cb$ يُسمى **مُحدّد** المصفوفة 2×2 ويُعبّر عنه بواسطة $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

Ch7

KeyConcept Midpoint Formula

Words If a line segment has endpoints $P(x_1, y_1)$ and $Q(x_2, y_2)$, then the midpoint of the segment has coordinates $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

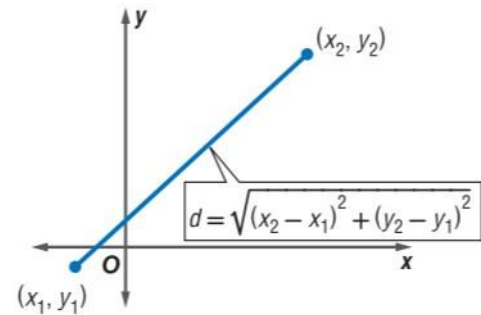
Model



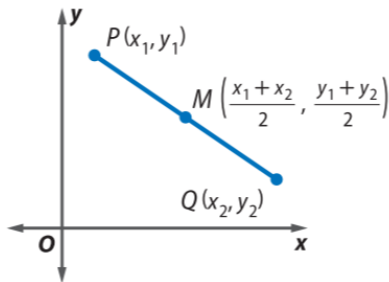
KeyConcept Distance Formula

Words The distance between two points with coordinates (x_1, y_1) and (x_2, y_2) is given by $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Model



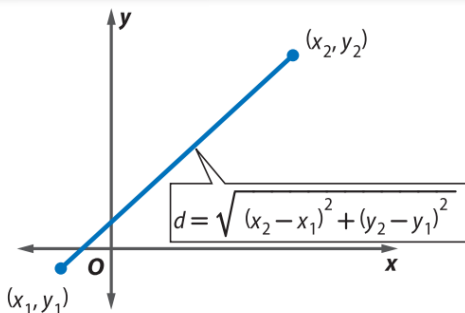
المفهوم الأساسي صيغة نقطة منتصف قطعة مستقيمة



النموذج

الشرح إذا كان لقطعة مستقيمة النقطتان $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$. فإن إحداثيات نقطة المنتصف لهذه القطعة المستقيمة هي $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

المفهوم الأساسي صيغة المسافة بين نقطتين في المستوى



النموذج

الشرح المسافة بين نقطتين لهما الإحداثيات (x_1, y_1) و (x_2, y_2) تُعطى بالعلاقة: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

KeyConcept Equations of Parabolas

Form of Equation	$y = a(x - h)^2 + k$	$x = a(y - k)^2 + h$
Direction of Opening	upward if $a > 0$, downward if $a < 0$	right if $a > 0$, left if $a < 0$
Vertex	(h, k)	(h, k)
Axis of Symmetry	$x = h$	$y = k$
Focus	$\left(h, k + \frac{1}{4a}\right)$	$\left(h + \frac{1}{4a}, k\right)$
Directrix	$y = k - \frac{1}{4a}$	$x = h - \frac{1}{4a}$
Length of Latus Rectum	$\left \frac{1}{a}\right $ units	$\left \frac{1}{a}\right $ units

المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع المكافئة

$x = a(y - k)^2 + h$	$y = a(x - h)^2 + k$	صيغة المعادلة
لليمين إذا كانت $a > 0$, إلى اليسار إذا كانت $a < 0$	للأعلى إذا كانت $a > 0$, للأسفل إذا كانت $a < 0$	اتجاه الفتحة
(h, k)	(h, k)	الرأس
$y = k$	$x = h$	محور التماثل
$\left(h + \frac{1}{4a}, k\right)$	$\left(h, k + \frac{1}{4a}\right)$	البؤرة
$x = h - \frac{1}{4a}$	$y = k - \frac{1}{4a}$	الدليل
$\left \frac{1}{a}\right $ وحدة	$\left \frac{1}{a}\right $ وحدة	طول الوتر البؤري العمودي

KeyConcept Equations of Circles

Standard Form of Equation	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
Center	$(0, 0)$	(h, k)
Radius	r	r

المفهوم الأساسي صور معادلة الدائرة

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	$x^2 + y^2 = r^2$	الصيغة القياسية للمعادلة
(h, k)	$(0, 0)$	المركز
r	r	نصف القطر

KeyConcept Equations of Ellipses Centered at the Origin

Standard Form	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$
Orientation	horizontal	vertical
Foci	$(c, 0), (-c, 0)$	$(0, c), (0, -c)$
Length of Major Axis	$2a$ units	$2a$ units
Length of Minor Axis	$2b$ units	$2b$ units

KeyConcept Equations of Ellipses Centered at (h, k)

Standard Form	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Orientation	horizontal	vertical
Foci	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
Vertices	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
Co-vertices	$(h, k \pm b)$	$(h \pm b, k)$

المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع الناقصة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	الصيغة القياسية
رأسي	أفقي	الاتجاه
$(0, c), (0, -c)$	$(c, 0), (-c, 0)$	البؤرتان
$2a$ وحدة	$2a$ وحدة	طول المحور الأكبر
$2b$ وحدة	$2b$ وحدة	طول المحور الأصغر

المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع الناقصة التي يقع مركزها عند (h, k)

$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	الصيغة القياسية
رأسي	أفقي	الاتجاه
$(h, k \pm c)$	$(h \pm c, k)$	البؤرتان
$(h, k \pm a)$	$(h \pm a, k)$	الرؤوس
$(h \pm b, k)$	$(h, k \pm b)$	الرؤوس المرافقة

KeyConcept Equations of Hyperbolas Centered at the Origin

Standard Form	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
Orientation	horizontal	vertical
Foci	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
Length of Transverse Axis	$2a$ units	$2a$ units
Length of Conjugate Axis	$2b$ units	$2b$ units
Equations of Asymptotes	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$

KeyConcept Equations of Hyperbolas Centered at (h, k)

Standard Form	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Orientation	horizontal	vertical
Foci	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
Vertices	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
Co-vertices	$(h, k \pm b)$	$(h \pm b, k)$
Equations of Asymptotes	$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$	$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

المفهوم الأساسي صور معادلات القطع الزائد التي مركزها نقطة الأصل

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	الصيغة القياسية
رأسي	أفقي	الاتجاه
$(0, \pm c)$	$(\pm c, 0)$	البؤرتان
$2a$ وحدات	$2a$ وحدات	طول المحور القاطع
$2b$ وحدات	$2b$ وحدات	طول المحور المرافق
$y = \pm \frac{a}{b}x$	$y = \pm \frac{b}{a}x$	معادلات خطوط التقارب

المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع الزائدة التي مركزها (h, k)

$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	الصيغة القياسية
رأسي	أفقي	الاتجاه
$(h, k \pm c)$	$(h \pm c, k)$	البؤرتان
$(h, k \pm a)$	$(h \pm a, k)$	الرؤوس
$(h \pm b, k)$	$(h, k \pm b)$	الرؤوس المرافقة
$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$	$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$	معادلات خطوط التقارب

ConceptSummary Standard Forms of Conic Sections

Conic Section	Standard Form of Equation	
Circle	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	
	Horizontal Axis	Vertical Axis
Parabola	$y = a(x - h)^2 + k$	$x = a(y - k)^2 + h$
Ellipse	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$
Hyperbola	$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$

ملخص المفهوم الصيغ القياسية لمعادلات القطوع المخروطية

الصيغة القياسية للمعادلة		قطع مخروطي
$(x - h)^2 + (y - k) = r^2$		دائرة
محور رأسي	محور أفقي	
$x = a(y - k)^2 + h$	$y = a(x - h)^2 + k$	قطع مكافئ
$\frac{(x - k)^2}{a^2} + \frac{(y - h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y - h)^2}{a^2} + \frac{(x - k)^2}{b^2} = 1$	قطع ناقص
$\frac{(x - k)^2}{a^2} - \frac{(y - h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y - h)^2}{a^2} - \frac{(x - k)^2}{b^2} = 1$	قطع زائد

ConceptSummary Classify Conics with the Discriminant

Discriminant	Conic Section
$B^2 - 4AC < 0; B = 0 \text{ and } A = C$	circle
$B^2 - 4AC < 0; \text{either } B \neq 0 \text{ or } A \neq C$	ellipse
$B^2 - 4AC = 0$	parabola
$B^2 - 4AC > 0$	hyperbola

ملخص المفهوم تصنيف القطوع المخروطية باستخدام المميز

المميز	القطع المخروطي
$B^2 - 4AC < 0; B = 0 \text{ و } A = C$	دائرة
$B^2 - 4AC < 0; B \neq 0 \text{ أو } A \neq C$	قطع ناقص
$B^2 - 4AC = 0$	قطع مكافئ
$B^2 - 4AC > 0$	قطع زائد

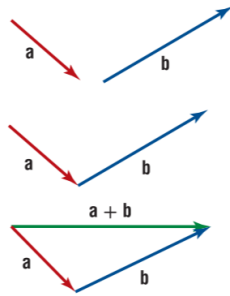
KeyConcept Finding Resultants

Triangle Method (Tip-to-Tail)

To find the resultant of a and b , follow these steps.

Step 1 Translate b so that the tail of b touches the tip of a .

Step 2 The resultant is the vector from the tail of a to the tip of b .



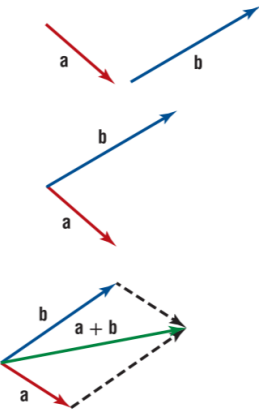
Parallelogram Method (Tail-to-Tail)

To find the resultant of a and b , follow these steps.

Step 1 Translate b so that the tail of b touches the tail of a .

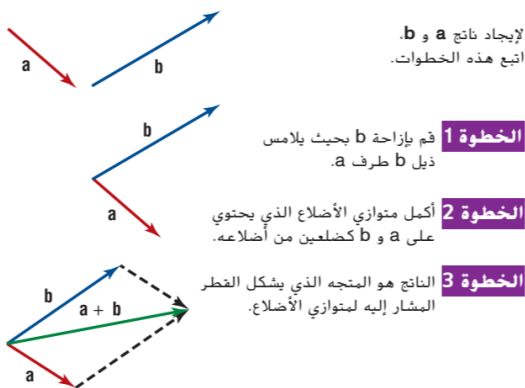
Step 2 Complete the parallelogram that has a and b as two of its sides.

Step 3 The resultant is the vector that forms the indicated diagonal of the parallelogram.

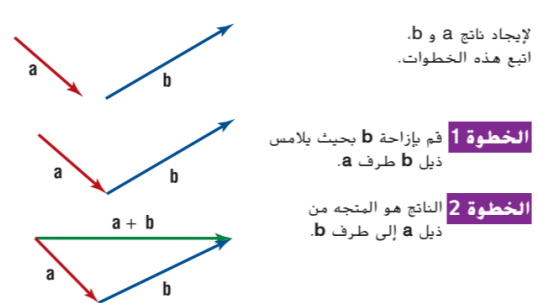


المفهوم الأساسي إيجاد النواتج

طريقة متوازي الأضلاع (الذيل إلى الذيل)



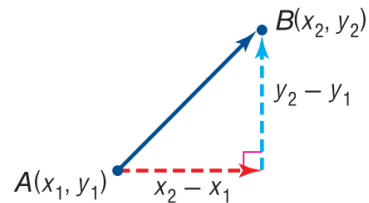
طريقة المثلث (الطرف إلى الذيل)



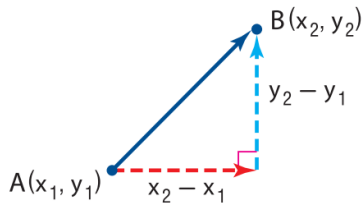
KeyConcept Component Form of a Vector

The component form of a vector $\overrightarrow{AB}$ with initial point $A(x_1, y_1)$ and terminal point $B(x_2, y_2)$ is given by

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$



المفهوم الأساسي الصورة المركبة للمتجه



يمكن إيجاد الصورة المركبة لمتجه $\overrightarrow{AB}$ نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ باستخدام

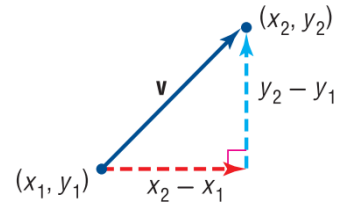
$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$

KeyConcept Magnitude of a Vector in the Coordinate Plane

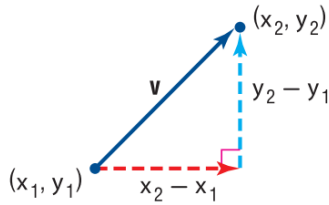
If $\mathbf{v}$ is a vector with initial point (x_1, y_1) and terminal point (x_2, y_2) , then the magnitude of $\mathbf{v}$ is given by

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

If $\mathbf{v}$ has a component form of $\langle a, b \rangle$, then $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



المفهوم الأساسي مقدار المتجه في المستوى الإحداثي



إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا نقطيًا بدايته (x_1, y_1) ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فيتم إيجاد مقدار $\mathbf{v}$ باستخدام

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

إذا كان $\mathbf{v}$ الصورة المركبة $\langle a, b \rangle$ ، إذا $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

KeyConcept Vector Operations

If $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ and $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ are vectors and k is a scalar, then the following are true.

Vector Addition $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

Vector Subtraction $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

Scalar Multiplication $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

المفهوم الأساسي العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين و k كمية عددية، فإن ما يلي صحيح.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$

جمع المتجهات

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

طرح المتجهات

$$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$$

الضرب في كمية عددية

KeyConcept Dot Product of Vectors in a Plane

The dot product of $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ and $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ is defined as $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

المفهوم الأساسي الضرب النقطي للمتجهات في مستوى

الضرب النقطي لـ $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ يعرف على أنه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

KeyConcept Orthogonal vectors

The vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ are orthogonal if and only if $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

المفهوم الأساسي المتجهات المتعامدة

يكون المتجهان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامدين فقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

KeyConcept Properties of the Dot Product

If u , v , and w are vectors and k is a scalar, then the following properties hold.

Commutative Property

$$u \cdot v = v \cdot u$$

Distributive Property

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

Scalar Multiplication Property

$$k(u \cdot v) = ku \cdot v = u \cdot kv$$

Zero Vector Dot Product Property

$$0 \cdot u = 0$$

Dot Product and Vector Magnitude Relationship

$$u \cdot u = |u|^2$$

Proof

Proof $u \cdot u = |u|^2$

Let $u = \langle u_1, u_2 \rangle$.

$$\begin{aligned} u \cdot u &= u_1^2 + u_2^2 \\ &= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \right)^2 \\ &= |u|^2 \end{aligned}$$

Dot product

Write as the square of the square root of $u_1^2 + u_2^2$.

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |u|$$

You will prove the first three properties in Exercises 70–72.

المفهوم الأساسي خواص ضرب النقطي

إذا كان u و v و w متجهات و k كمية عددية، فإن الخواص التالية تكون مُحَقَّقة.

$$u \cdot v = v \cdot u$$

خاصية التبديل

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

خاصية التوزيع

$$k(u \cdot v) = ku \cdot v = u \cdot kv$$

خاصية الضرب في كمية عددية

$$0 \cdot u = 0$$

خاصية الضرب النقطي للمتجهات الصفرية

$$u \cdot u = |u|^2$$

العلاقة بين ناتج الضرب النقطي ومقدار المتجه

البرهان

$$u \cdot u = |u|^2$$

البرهان

افترض أن $u = \langle u_1, u_2 \rangle$

$$\begin{aligned} u \cdot u &= u_1^2 + u_2^2 \\ &= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \right)^2 \\ &= |u|^2 \end{aligned}$$

الضرب النقطي

اكتب في صورة مربع الجذر التربيعي لـ $u_1^2 + u_2^2$.

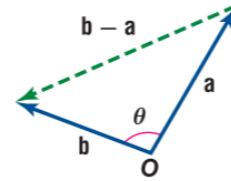
$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |u|$$

سُتَبَيَّن أولاً الخواص الثلاث في التمارين 70–72.

KeyConcept Angle Between Two Vectors

If θ is the angle between nonzero vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$, then

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$



Proof

Consider the triangle determined by $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, and $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ in the figure above.

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2$$

Law of Cosines

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

Distributive Property for Dot Products

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{a}|^2$$

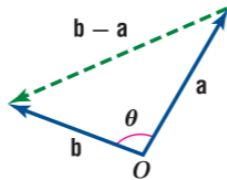
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$$

$$-2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = -2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Subtract $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ from each side.

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

Divide each side by $-2|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$.



إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين غير الصفريين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$. إذا

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

البرهان

فكر في المثلث المحدد بواسطة $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ في الشكل أعلاه.

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2$$

قانون Cosine

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

خاصية التوزيع للضرب النقطي

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{a}|^2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$$

$$-2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = -2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

اطرح $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ من كل طرف.

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

اقسم كل طرف على $-2|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$.