صف 11 علمي
الوحدة 5
الدوال الأسية واللوغاريتمية





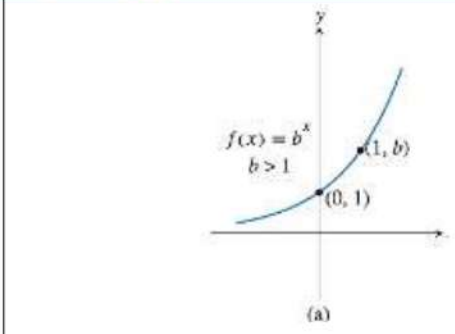
نسخة محلولة



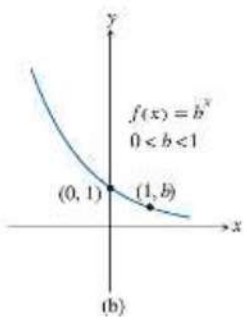
(5.1) الدوال الأسية

تعريف الدالة الأسية	$f(x) = a \times b^x$

الدوال الأسية $f(x) = b^x$

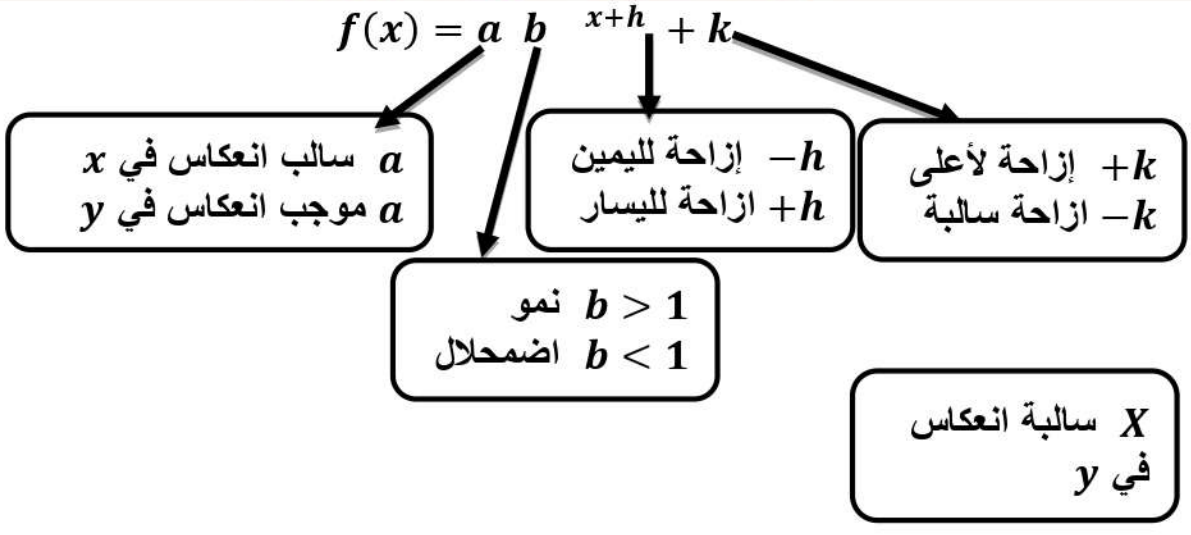


- **المجال:** $]-\infty, \infty[$
- **المدي:** $]0, \infty[$
- متصلة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية ولا فردية
- ليس لها قيم قصوى
- معادلة خط التقارب الأفقي: $y = 0$
- ليس لها خط تقارب رأسي
- f دالة متزايدة
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$



- **المجال:** $]-\infty, \infty[$
- **المدي:** $]0, \infty[$
- متصلة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية ولا فردية
- ليس لها قيم قصوى
- معادلة خط التقارب الأفقي: $y = 0$
- ليس لها خط تقارب رأسي
- دالة متناقصة
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسية



النمو الأسي والاضمحلال الأسي

نموذج النمو الأسي	نموذج الاضمحلال الأسي
$\mathbf{A(t) = a(1 + r)^t}$	$\mathbf{A(t) = a(1 - r)^t}$
$\mathbf{a > 0, b > 1, b = 1 + r}$	$\mathbf{a > 0, 0 < b < 1, b = 1 - r}$

صيغة الفائدة المركبة

صيغة الفائدة المركبة هي نموذج أسي، وتُكتب كما يلي:

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

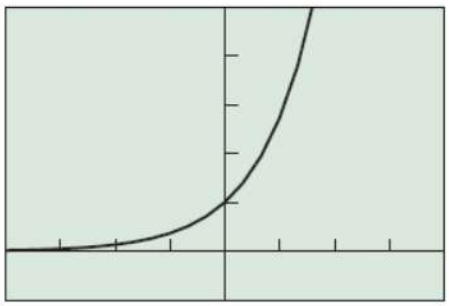
p = المبلغ الأصلي
r = نسبة الفائدة السنوية في الصورة العشرية
n = عدد فترات استحقاق الفائدة المركبة في السنة
A = جملة المبلغ
t = الزمن بالسنوات

الفائدة المركبة المتواصلة (المتصلة)

$$A = p\,e^{rt}$$

p = المبلغ الأصلي
e = الأساس الطبيعي
r = نسبة الفائدة السنوية في الصورة العشرية
A = جملة المبلغ
t = الزمن بالسنوات

الدوال الأسية الطبيعية $f(x) = e^x$



- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدي: $]0, \infty[$
- متصلة على مجالها
- متزايدة لكل قيم x
- لا يوجد تناظرلأنها ليست دالة فردية ولا زوجية
- ليس لها قيم قصوى محلية
- معادلة خط التقارب الأفقي: $y = 0$
- ليس لها خط نقارب رأسي
- السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

الدوال الأسية الطبيعية

إذا كانت الدالة

$$f(x) = a \times e^{kx}$$

السؤال رقم (1)			
• اختر الإجابة الصحيحة: - أي مما يلي دالة أسية؟			
A	$f(x) = a^2$	C	$f(x) = x^3$
B	$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$	D	$f(x) = 8^x$

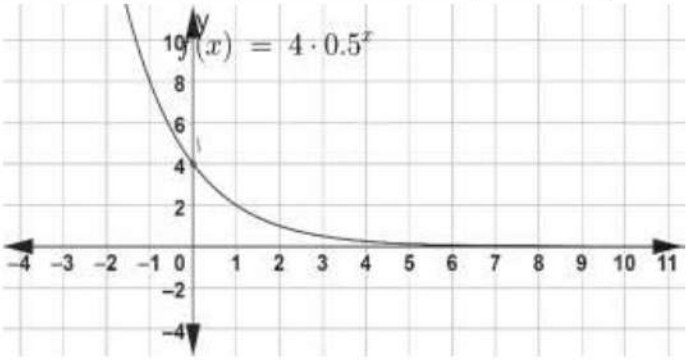
السؤال رقم (2)			
• اختر الإجابة الصحيحة: - أي النقاط مشتركة بين كل الدوال التي صيغتها $f(x) = b^x$، $(b > 0)$؟			
A	$(1, 1)$	C	$(0, 1)$
B	$(1, 0)$	D	$(0, 0)$

السؤال رقم (3)			
• اختر الإجابة الصحيحة: - معامل النمو للدالة $f(x) = 4 \times 3^x$ هو:			
A	3	C	12
B	4	D	64

السؤال رقم (4)

- مثل الدالة $f(x) = 4 \times (0.5)^x$ بيانيًا، ثم حدد الخصائص الأساسية لهذه الدالة (المجال، والمدى، والمقاطع x و y ، وخطوط التقارب، والسلوك الطرفي وفترات التزايد والتناقص).

x	-1	0	1	2
y	8	4	2	1

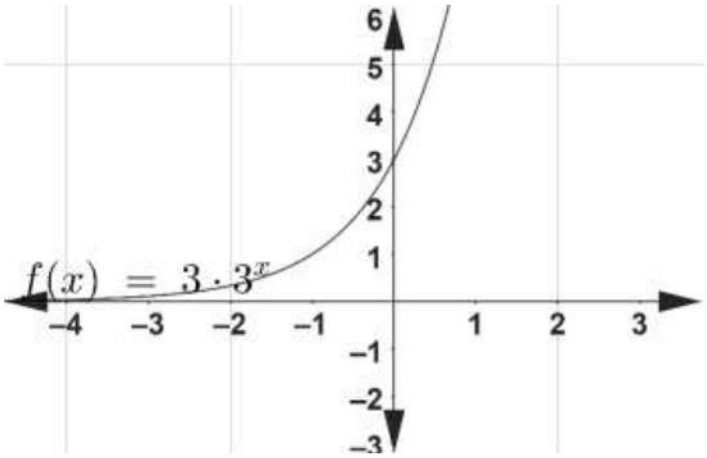


المجال	كل الأعداد الحقيقة
المدى	$y > 0$
مقطع x	لا يوجد
مقطع y	4
خطوط التقارب	$y = 0$
فترات التزايد	لا يوجد
فترات التناقص	$]-\infty, \infty[$

السؤال رقم (5)

- مثل الدالة $f(x) = 3 \times 3^x$ بيانيًا، ثم حدد الخصائص الأساسية للدوال الأسية (المجال، والمدى، والمقاطع x و y ، وخطوط التقارب، وسلوك الدالة الطرفي، وفترات التزايد والتناقص).

x	-2	-1	0	1
y	$\frac{1}{3}$	1	3	9

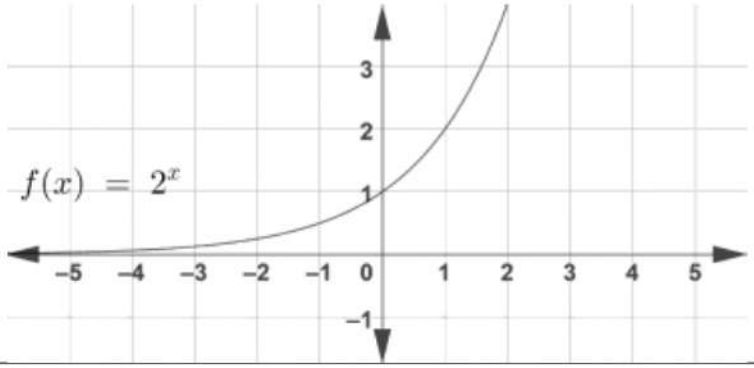


المجال	كل الأعداد الحقيقة
المدى	$y > 0$
مقطع x	3
مقطع y	لا يوجد
خطوط التقارب	$y = 0$
فترات التزايد	$]-\infty, \infty[$
فترات التناقص	لا يوجد

السؤال رقم (6)

- مثل الدالة $f(x) = (2)^x$ بيانيًا، ثم حدد الخصائص الأساسية للدوال الأسية (المجال، والمدى، والمقاطع x و y ، وخطوط التقارب، وسلوك الدالة الطرفي، وفترات التزايد والتناقص).

x	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4

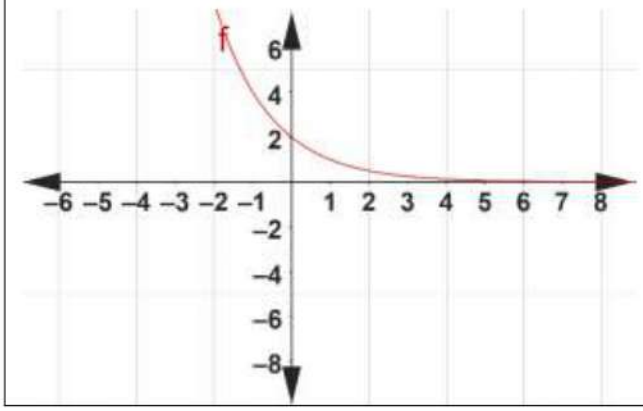


المجال	كل الأعداد الحقيقة
المدى	$y > 0$
مقطع x	1
مقطع y	لا يوجد
خطوط التقارب	$y = 0$
فترات التزايد	$]-\infty, \infty[$
فترات التناقص	لا يوجد

السؤال رقم (7)

- مثل الدالة $f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^x$ بيانيًا، ثم حدد الخصائص الأساسية للدوال الأسية (المجال، والمدى، والمقاطع x و y ، وخطوط التقارب، وسلوك الدالة الطرفي، وفترات التزايد والتناقص).

x	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$



المجال	كل الأعداد الحقيقة
المدى	$y > 0$
مقطع x	2
مقطع y	لا يوجد
خطوط التقارب	$y = 0$
فترات التزايد	لا يوجد
فترات التناقص	$]-\infty, \infty[$

السؤال رقم (8)

- صف عملية تحويل التمثيل البياني للدالة f إلى التمثيل البياني للدالة g

• $f(x)=3^x, g(x)=3^{x+4}$ إزاحة أفقية لليسار 4 وحدات	• $f(x)=2^x, g(x)=2^{x-3}$ إزاحة أفقية لليمين 3 وحدات
• $f(x)=2^x, g(x)=2^{5-x}$ إزاحة 5 وحدات لليمين وانعكاس في محور y	• $f(x)=4^x, g(x)=4^{-x}$ إنعكاس في محور y
• $f(x)=e^x, g(x)=e^{-2x}$ انعكاس في محور y و تضيق أفقي مقدار $\frac{1}{2}$	• $f(x)=0.5^x, g(x)=3\times 0.5^x+4$ إزاحة لأعلى 4 وحدات و تمدد رأسي 3
• $f(x)=e^x, g(x)=2e^{3-3x}$ تضيق أفقي بمقدار $\frac{1}{3}$ ، إزاحة لليمين 3 انعكاس حول x ، تمدد رأسي بمقدار 2	• $f(x)=e^x, g(x)=-e^{-3x}$ تضيق أفقي بمقدار $\frac{1}{3}$ و انعكاس حول x ثم انعكاس حول y

السؤال رقم (9)

- تم إطلاق 220 صقرًا في منطقة ما في الثاني من يناير 2016. تنمذج الدالة $f(x)=220(1.05)^x$ عدد الصقور في هذه المنطقة، لمدة x سنوات بعد 2016.

a) هل تتزايد أعداد الصقور أم تتناقص؟

يتزايد

b) في أي سنة سيصل عدد الصقور إلى 280 صقرًا.

$$220(1.05)^x = 280$$

$$(1.05)^x = \frac{280}{220}$$

$$(1.05)^x = \frac{14}{11}$$

$$x = 5$$

السؤال رقم (10)

- قدر مثمن قيمة قطعة أرض على فترة عدة سنوات منذ سنة 1950، كانت قيمة قطعة الأرض 00 31 QR سنة 1954، و 000 35 QR سنة 1955. استعمل البيانات لتكتب نموذجًا أسيًا يصف قيمة قطعة الأرض.

$$b = \frac{35000}{31000} = 1.13$$

$$a = \frac{35000}{(1.13)^5} = 19000$$

$$y = 19000(1.13)^x$$

السؤال رقم (11)

- اكتب نموذجًا أسيًا باستعمال النقاط المعطاة.

$(3,55)$ و $(4,70)$	$(7,12)$ و $(8,25)$
$\mathbf{b} = \frac{70}{55} = 1.27$ $a = \frac{55}{(1.27)^3} = 26.85$ $y = 26.85(1.28)^x$	$\mathbf{b} = \frac{25}{12} = 2.08$ $a = \frac{12}{(2.08)^7} = 0.71$ $y = 0.071(2.08)^x$

السؤال رقم (12)

- اكتب نموذجًا أسيًا لكل زوج من النقاط الآتية.

$(9,140)$ و $(10,250)$	$(6,85)$ و $(7,92)$
$\mathbf{b} = \frac{250}{140} = 1.786$ $a = \frac{140}{(1.786)^9} = 0.757$ $y = 0.757(1.786)^x$	$\mathbf{b} = 1.082$ $a = \frac{92}{1.082^7} = 53$ $y = 53(1.082)^x$

السؤال رقم (13)

أوجد جملة المبلغ، إذا عُلم المبلغ الأصلي P، نسبة الفائدة r، الزمن t، وفترة التراكم المعطاة.

$p = QR\ 1\ 000$، $r = 2.8\%$، $t = 5$ سنوات، فائدة مركبة متصلة.	$p = QR\ 16\ 000$، $r = 4\%$، $t = 25$ سنة، فائدة مركبة متصلة.
$A = 1000\ e^{0.028\times 5}$	$A = 16000\ e^{0.04\times 25}$
$= 1150.27$	$= 43492.51$

السؤال رقم (14)

- يريد جاسم استثمار مبلغ $QR\ 3\ 000$ في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة معدلها 3%، تستحق شهريًا.

ما قيمة رصيد جاسم بعد 10 سنوات؟	ما قيمة رصيد جاسم بعد 100 سنة؟
$= 3000\left(1+\frac{0.03}{12}\right)^{10(12)}$	$= 3000\left(1+\frac{0.03}{12}\right)^{100(12)}$
$= 4048.06$	$= 60031.45$

السؤال رقم (15)

- تعرف دانة أن أعداد الرسائل الإلكترونية التي ترسلها تزداد بشكل أسي، وقد سجلت الرسائل الإلكترونية التي أرسلتها سنويًا ابتداءً من عام 2009، أوجد النموذج الأسي الذي يصف البيانات.



$$y = a \cdot b^x$$

$$b = \frac{14\ 00}{1000} = 1.4$$

$$1400 = a(1.4)^7$$

$$a = \frac{1400}{(1.4)^7} = 133$$

دالة النموذج الأسي $y = 133(1.4)^x$

السؤال رقم (3)

- تريد ثريا استثمار مبلغ $5\,000\ QR$ في حساب مصرفي بفائدة سنوية معدلها 4%، كم سيصبح رصيد ثريا في حسابها المصرفي بعد 3 سنوات إذا كانت الفائدة مركبة سنوية، أو نصف سنوية، أو ربع سنوية، أو شهرية؟

	صيغة الفائدة المركبة	الرصيد بعد 3 سنوات (QR)
سنوية	$A = 5\,000\left(1 + \frac{0.04}{1}\right)^{3(1)}$	$5\,624.32$
نصف سنوية	$A = 5\,000\left(1 + \frac{0.04}{2}\right)^{3(2)}$	$5\,630.81$
ربع سنوية	$A = 5\,000\left(1 + \frac{0.04}{4}\right)^{3(4)}$	$5\,634.13$
شهرية	$A = 5\,000\left(1 + \frac{0.04}{12}\right)^{3(12)}$	$5\,636.36$

(5.2) اللوغاريتمات

لوغاريتم x ذو الأساس b	$b^y = x$ ، $\log_b x = y$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات	
• $\log 1 = 0$	• $\log_b 1 = 0$
• $\log 10 = 1$	• $\log_b b = 1$
• $\log 10^y = y$	• $\log_b b^y = y$
• $10^{\log x} = y$	• $b^{\log_b x} = x$
• $Ln\ 1 = 0$	• $Ln\ e = 1$
• $Ln\ e^y = y$	• $e^{Ln\ x} = x$

السؤال رقم (1)

- اكتب العبارة في الصورة اللوغاريتمية.

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$16 = 4^2$	$\log_4 16 = 2$
$1000 = 10^3$	$\log_{10} 1000 = 3$
$7^2 = 49$	$\log_7 49 = 2$
$y = a^x$	$\log_a y = x$
$25 = 5^2$	$\log_5 25 = 2$
$y = 3^x$	$\log_3 y = x$
$e^{-3} \approx 0.0498$	$ln\ 0.0498 = -3$
$e^x = 343$	$ln\ 343 = x$

السؤال رقم (2)

- اكتب العبارة في الصورة الأسية.

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$10^{-2} = \frac{1}{100}$	$\log \frac{1}{100} = -2$
$8^2 = 64$	$\log_8 64 = 2$
$e^5 = 148.41$	$\ln 148.41 \approx 5$
$2^{-5} = \frac{1}{32}$	$\log_2 \frac{1}{32} = -5$
$4^x = 6$	$\log_4 6 = x$
$3^2 = y$	$\log_3 y = 2$

السؤال رقم (3)

- أوجد قيمة المقدار اللوغاريتمي.

$\log_6(216)$ $= \log_6 6^3 = 3 \log_6 6 = 3$	$\log_5 \frac{1}{125}$ $= \log_5 \frac{1}{5^3}$ $= \log_5 5^{-3} = -3$
$\log_2 32$ $\log_2 2^5 = 5 \log_2 7 = 5$	$\log_3 3^4$ $4 \log_3 3 = 4$
$\log_8 \frac{1}{64}$ $\log_8 8^{-2} = -2$	$\log_9 729$ $= \log_9 9^3 = 3 \log_9 9 = 3$

السؤال رقم (4)

- حل المعادلة. قرب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$\log(7x+6)=3$ $7x+6=10^3$ $7x+6=1000$ $7x=1000-6$ $7x=994$ $x=\frac{994}{7}$ $x=142$	$2.75e^t=38.6$ $e^t=\frac{38.6}{2.75}$ $e^t=14.0364$ $t=ln\,(14.0364)=2.617$
$\ln(3x-1)=2$ $3x-1=e^2$ $3x=e^2+1$ $x=\frac{e^2+1}{3}=2.7964$	$10^{t+1}=50$ $\log 50=t+1$ $t+1=\log 50$ $t=\log 50-1$ $t=0.6990$
$1.5e^t=27$ $e^t=\frac{27}{1.5}=18$ $t=ln\,18=2.8904$	$\log(x-3)=-1$ $x-3=10^{-1}$ $x=10^{-1}+3=3.1$

السؤال رقم (5)

إذا أودع المبلغ $250\ QR$ في حساب مصرفي بفائدة سنوية متصلة معدلها 4%، ما الزمن اللازم ليصبح $600\ QR$؟ قرب الإجابة إلى أقرب سنة.

$$250\ e^{0.04t} = 600$$

$$e^{0.04t} = \frac{600}{250} = 2.4$$

$$\frac{0.04t}{0.04} = \frac{ln\ 2.4}{0.04}$$

$$t = 21.89 \approx 22$$

الزمن 22 سنة

السؤال رقم (6)

أوجد دالة المعكوس $f(x) = 3^{x+2}$ الحل $x = 3^{y+2}$ $y + 2 = \log_3 x$ $y = \log_3 x - 2$ $f(x)^{-1} = \log_3 x - 2$	أوجد دالة المعكوس $f(x) = 6^{x-1}$ الحل $x = 6^{y-1}$ $y - 1 = \log_6 x$ $y = \log_6 x + 1$ $f(x)^{-1} = \log_3 x + 1$
$y = 3\log_3 x - 2$ الحل $x = 3\log_3 y - 2$ $x + 2 = 3\log_3 y$ $\frac{x+2}{3} = \log_3 y$ $y = 3^{\frac{x+2}{3}}$ $f(x)^{-1} = 3^{\frac{x+2}{3}}$	$y = 2\log_4(x-1) + 5$ الحل $y - 5 = 2\log_4(x-1)$ $\frac{x-5}{2} = \log_4(x-1)$ $y = 4^{\frac{x-5}{2}} + 1$ $f(x)^{-1} = 4^{\frac{x-5}{2}} + 1$

السؤال رقم (7)

- إذا كانت الدالة $c(t) = 108e^{-0.08t} + 75$ تعطي درجة حرارة كوب من القهوة، بالفهرنهايت، قدم إلى سائق من نافذة مقهي قبل t دقيقة.

a) أوجد درجة حرارة القهوة لحظة تقديمها إلى السائق من النافذة

$$c(t) = 108e^{-0.08(0)} + 75$$

$$183°\text{F}$$

b) بعد كم دقيقة تصبح درجة حرارة القهوة 98 درجة فهرنهايت؟ قرب الإجابة إلى أقرب دقيقة.

$$98 - 75 = 108e^{-0.08t}$$

$$\frac{23}{108} = e^{-0.08t}$$

$$ln\ \frac{23}{108} = -0.08t$$

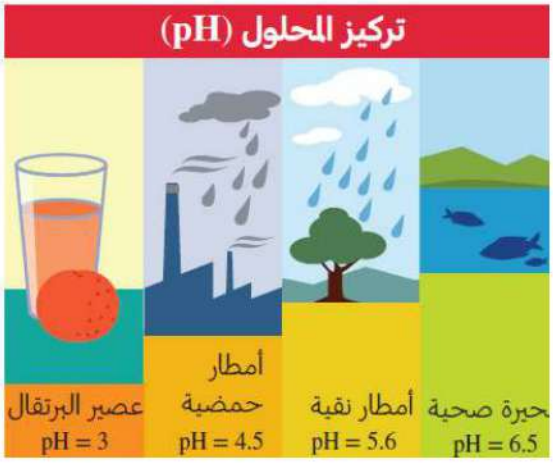
$$\left(ln\ \frac{23}{108}\right) \div -0.08 = t$$

19 دقيقة

السؤال رقم (8)

يقيس الرقم الهيدروجيني pH تركيز أيونات الهيدروجين، الذي يُرمز له بالرمز H^+، في محلول معين. يقاس هذا التركيز بوحدة المول لكل ليتر، وذلك باستعمال الصيغة : $pH = \log\frac{1}{[H^+]}$.

أوجد تركيز أيونات الهيدروجين في الأمطار الحمضية.



$$4.5 = \log\frac{1}{[H^+]},$$

$$\frac{1}{[H^+]} = 10^{4.5} \quad , \quad [H^+] = \frac{1}{10^{4.5}}$$

$$[H^+] = 10^{-4.5}$$

$$= 0.000316$$

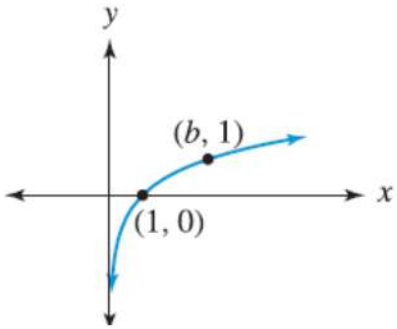
السؤال رقم (9)

- أوجد قيمة المقدار من دون استعمال الحاسبة.

• $5^{\log_5 8}$ 8	• $7^{\log_7 3}$ $= 3$
• $10^{\log 14}$ $= 14$	• $10^{\log(0.5)}$ $= \frac{1}{2}$

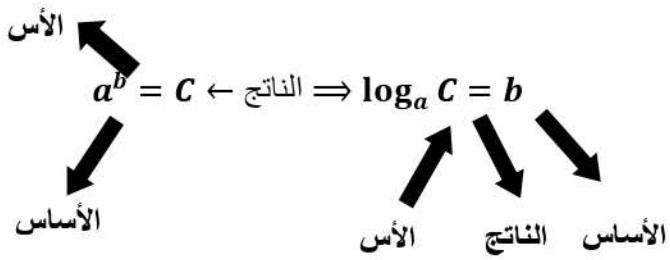
(5.3) الدوال اللوغاريتمية

الدوال اللوغاريتمية $b > 1، f(x) = \log_b x$

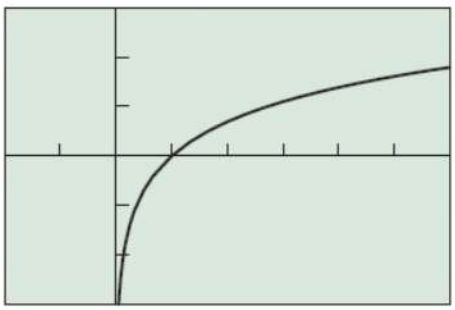


- المجال: $]0, \infty[$
- المدي: $]-\infty, \infty[$
- متصلة على مجالها
- متزايدة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية أو فردية
- ليس لها قيم قصوى
- خط التقارب الرأسي: $x = 0$
- ليس لها خط تقارب أفقية
- السلوك الطرفي: $\lim_{x \to \infty} \log_b x = \infty$

تمثيل الدوال اللوغاريتمية باستعمال التحويلات



الدوال اللوغاريتمية $b > 1، f(x) = \log_b x$



- المجال: $]0, \infty[$
- المدي: $]-\infty, \infty[$
- متصلة على مجالها
- متزايدة على مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية ولا فردية
- ليس لها قيم قصوى
- خط التقارب الرأسي: $x = 0$
- ليس لها خط تقارب أفقية
- السلوك الطرفي: $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$

السؤال رقم (1)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

أي العبارات بالنسبة للدالة $f(x) = \ln x$ خاطئة؟

A	متزايدة في مجالها.	C	متصلة في مجالها.
B	متناظرة حول نقطة الأصل.	D	لها خط تقارب أسي.

السؤال رقم (2)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

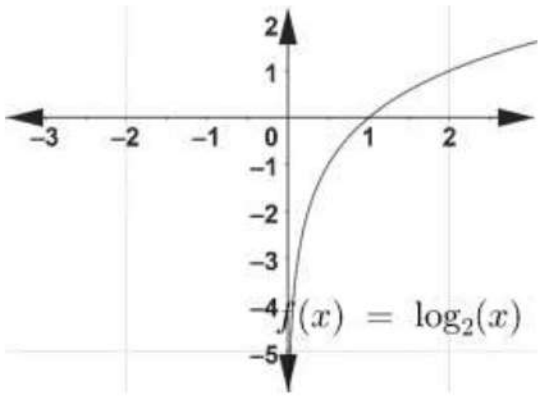
أي الدوال التالية هي معادلة معكوس الدالة $f(x) = 2 \times 3^x$؟

A`	$f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{x}{2}\right)$	C	$f^{-1}(x) = 2\log_3(x)$
B	$f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{x}{3}\right)$	D	$f^{-1}(x) = 3\log_2(x)$

السؤال رقم (3)

مثل الدالة $y = \log_2 x$ بيانيًا، ثم حدد المجال والمدى والمقطع x وخط التقارب لهذه الدالة، فترات التزايد و التناقص

x	0.25	0.5	1	2
y	-2	-1	0	1

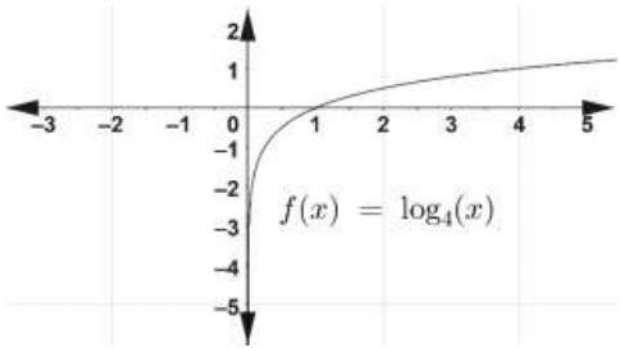


المجال	$y > 0$
المدى	كل الأعداد الحقيقة
مقطع x	1
خط التقارب	$x = 0$
فترات التزايد و التناقص	تزايد $]0, \infty[$

السؤال رقم (4)

مثل الدالة $y = \log_4 x$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداها، وكذلك المقاط ع وخطوط التقارب، إن وجدت. ثم صِف السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

x	0.25	0.5	1	2
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

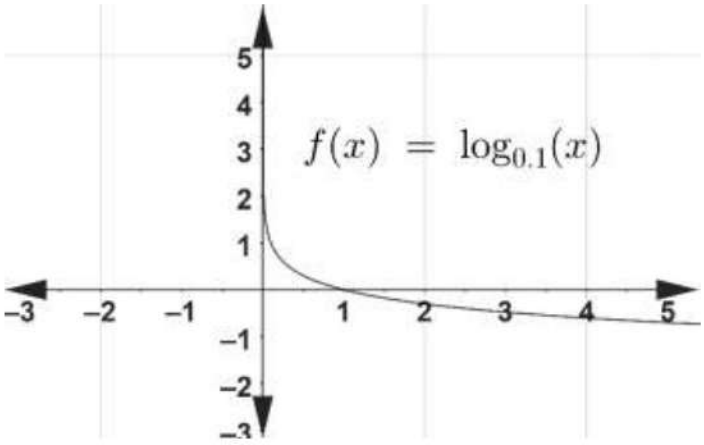


المجال	$y > 0$
المدى	كل الأعداد الحقيقة
مقطع x	1
خط التقارب	محور y
فترات التزايد و التناقص	$]0 , \infty[$تزايد

السؤال رقم (5)

مثل الدالة $y = \log_{0.1} x$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداها، وكذلك المقاط ع وخطوط التقارب، إن وجدت. ثم صِف السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

x	0.01	0.1	1	10
y	2	1	0	1



المجال	$y > 0$
المدى	كل الأعداد الحقيقة
مقطع x	1
خط التقارب	محور y
فترات التزايد و التناقص	تناقص $]0 , \infty[$

السؤال رقم (6)

- صِف التمثيل البياني للدالة بدلالة تحويلات الدالة الرئيسة لكل دالة .

الدالة	الإزاحة
$\log_6 x + 1$	إزاحة لأعلى وحدة واحدة
$g(x) = \frac{1}{2}\log_6 x$	تضيق رأسي
$g(x) = \log_6(-x)$	انعكاس حول محور y
$g(x) = -\ln(x + 0.5)$	انعكاس حول محور x، إزاحة 0.5 لليسار
$g(x) = \log_2(x - 5)$	إزاحة لليمين 5 وحدات
$g(x) = \log_2(x + 3) + 1$	إزاحة لليسار 3 وحدات، وحدة لأعلى
$g(x) = \log_2(x + 2) - 3$	إزاحة لليسار 2 وحدة، 3 وحدات لأسفل

السؤال رقم (7)

- أوجد معادلة معكوس الدالة.

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = y - 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x + 1 = y$$

$$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$$

$f(x) = 5^{(x-3)}$

$$x = 5^{y-3}$$

$$\log_5 x = y - 3$$

$$y = \log_5 x + 3$$

$$f^{-1}(x) = \log_5 x + 3$$

$f(x)=6^{(x+7)}$ $x=6^{y+7}$ $\log_6 x=y+7$ $\log_6 x-7=y$ $f^{-1}(x)=\log_6 x-7$	$f(x)=\log_2(8x)$ $x=\log_2 8y$ $\frac{2^x}{8}=\frac{8y}{8}$ $y=\frac{2^x}{8}$ $f^{-1}(x)=\frac{2^x}{8}$
$f(x)=\ln(x+3)-1$ $x=ln(y+3)-1$ $x+1=ln(y+3)$ $e^{x+1}=y+3$ $e^{x+1}-3=y$	$f(x)=4\log_2(x-3)+2$ $x=4\log_2(y-3)+2$ $\frac{x-2}{4}=\frac{4}{4}\log_2(y-3)$ $\frac{x-2}{4}=\log_2(y-3)$ $2^{\frac{x-2}{4}}=y-3$ $f^{-1}(x)=2^{\frac{(x-2)}{4}}+3$

السؤال رقم (8)

تستعمل إحدى الشركات الدالة أدناه للربط بين إيرادات المبيعات R وتكاليف الإعلانات a (بآلاف الريالات).
ما معادلة معكوس هذه الصيغة؟ أي معادلة هي الأسهل استعمالًا لإيجاد قيمة a المناسبة لقيمة R معينة؟

تمثل R الإيرادات بآلاف الريالات.
وتمثل a تكاليف الإعلانات بآلاف الريالات.

$$R = 12\log(a + 1) + 25$$

$$a = 12\log(R + 1) + 25$$

$$\frac{a - 25}{12} = \frac{12}{12}\log(R + 1)$$

$$\frac{a - 25}{12} = \log(R + 1)$$

$$R + 1 = 10^{\frac{a-25}{12}} - 1$$

المعادلة الأولى

يمكن تقدير ارتفاع طائرة y، بالأقدام، بعد t دقيقة من إقلاعها باستعمال الدالة
$y = 5\,000\,ln(0.5t) + 8\,000$.
أوجد قيمة t بدلالة y. متي يكون من السهل استعمال المعادلة الجديدة التي كتبتها بدلًا من المعادلة الأصلية؟

$$y = 5000\,ln(0.5t) + 8000$$

$$\frac{y - 8000}{5000} = \frac{\cancel{5000}}{\cancel{5000}}\,ln(0.5t)$$

$$\frac{y - 8000}{5000} = ln(0.5t)$$

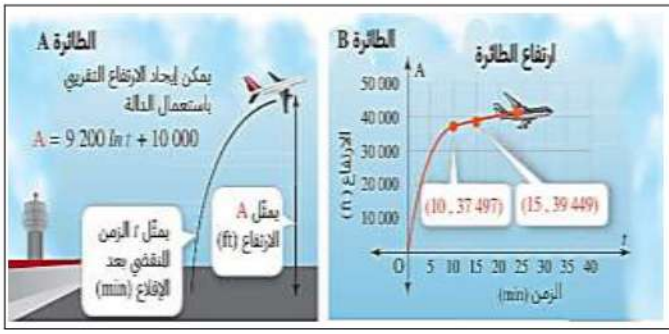
$$\frac{e^{\frac{y-8000}{5000}}}{0.5} = \frac{\cancel{0.5}t}{\cancel{0.5}}$$

$$\frac{e^{\frac{y-8000}{5000}}}{0.5} = t$$

عند إيجاد الزمن

السؤال رقم (9)

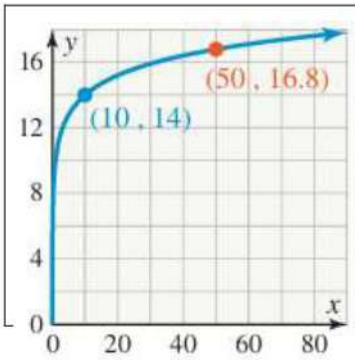
- يمكن استعمال الدوال اللوغاريتمية لإيجاد الارتفاع التقريبي لطائرة بمرور الزمن. أي من الطائرتين يظهر ارتفاعها معدل التغير الأكبر في الفترة $10 \le t \le 15$؟



A	B
$\frac{34914 - 31184}{15 - 10}$	$\frac{39449 - 37496}{15 - 10}$
$= 764$	$= 390$

السؤال رقم (12)

- **أوجد متوسط معدل التغير للدالة الممثلة بيانيًا أدناه في الفترة $10 \le x \le 50$، ثم قارن بينه وبين متوسط معدل التغير للدالة $y = 3\log x + 12$ في نفس الفترة.**



متوسط التغيير للتمثيل البياني $= \frac{16.8-14}{50-10} = 0.07$

$y_1 = 3\log(10) + 12 = 15$

$y_2 = 3\log(50) + 12 = 17$

متوسط التغيير للدالة y

$\frac{17-15}{50-10} = 0.05$

(5.4) خصائص اللوغاريتمات

خصائص اللوغاريتمات

• قاعدة الضرب:	$\log_b(RS) = \log_b R + \log_b S$
• قاعدة القسمة:	$\log_b \frac{R}{S} = \log_b R - \log_b S$
• قاعدة القوة:	$\log_b R^c = \mathrm{c}\log_b R$

صيغة تغيير الأساس اللوغاريتمات

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

السؤال رقم (1)

• اختر الإجابة الصحيحة:

$\log 12 =$

A	$3\log 4$	C	$\log 3 + \log 4$
B	$4\log 3$	D	$\log 3 \times \log 4$

السؤال رقم (2)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

$\ln x^5 =$

A	$5\ln x$	C	$2\ln x^3$
B	$x\ln 5$	D	$3\ln x^2$

السؤال رقم (3)

- كيف يمكنك استعمال خواص اللوغاريتمات لفك المقدارين التاليين؟

$\log_5(a^2b^7)$ $\log_5 a^2 + \log_5 b^7$ $2\log_5 a + 7\log_5 b$	$\ln\left(\frac{25}{3}\right)$ $\log 25 - \log 3$ $\log 5^2 - \log 3$ $2\log 5 - \log 3$
$\log_7\left(\frac{r^3t^4}{v}\right)$ $= \log_7 r^3 + \log_7 t^4 - \log_7 v$ $= 3\log_7 r + 4\log_7 t - \log_7 v$	$\ln\left(\frac{7}{225}\right)$ $= ln\ 7 - ln\ 225$ $ln\ 7 - ln\ 15^2$ $ln\ 7 - 21\ ln\ 15$ $= ln\ 7 - 2\ ln\ 5 - 2\ ln\ 3$

السؤال رقم (4)

- استعمل خواص اللوغاريتمات لتوضح أن بالإمكان كتابة $pH = \log[H^+]$ في الصورة $pH = -\log\frac{1}{[H^+]}$

$$pH = -\log[H^+]^{-1}$$

$$pH = \log[H^+]$$

السؤال رقم (5)

- اكتب المقدار مستعملًا اللوغاريتم الطبيعي فقط.

• $\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$	• $\log_2(a+b) = \frac{\ln(a+B)}{\ln 2}$

السؤال رقم (6)

- استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة المقدار في صورة لوغاريتم واحد.

$9\ln X - 6\ln y$ $ln\frac{x^9}{y^6}$	$\log_5 6 + \frac{1}{2}\log_5 y$ $\log_5 6y^{\frac{1}{2}} = \log_5\left(6\sqrt{y}\right)$
$8\log_3 2 + 5\log_3 c + 7\log_3 d$ $\log_3\left(2^8\ c^5\ d^7\right)$ $\log_3 256c^5d^7$	$\frac{1}{3}\ln 27 - 3\ln(2y)$ $ln\left(\frac{27^{\frac{-1}{3}}}{2^3y^3}\right) = ln\left(\frac{3}{8y^3}\right)$
$\ln 7 + \ln 2$ $ln(2 \times 7) = ln14$	$4\log_4 m + 3\ \log_4 n - \log_4 p$ $\log_4\left(\frac{m^4n^3}{p}\right)$
$3\ln 2 - 2\ln 5$ $= ln2^3 - ln5^2$ $ln\left(\frac{8}{25}\right)$	$5\log_2 c - 7\ \log_2 n$ $= \log_2 c^5 - \log_2 n^7$ $\log_2\left(\frac{c^5}{n^7}\right)$

السؤال رقم (7)	
افترض أن x, y عددان موجبان $ln\, x^5 - 2ln\,(xy)$ في صورة لوغاريتم واحد الحل $ln\frac{x^5}{x^2y^2} = ln\frac{x^3}{y^2}$	استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة اللوغاريتم غي صورة فرق أو مجموع أو مضاعفات لوغايتم $\ln(\frac{\sqrt{x^2+5}}{x})$ الحل $\ln(\frac{(x^2+5)^{\frac{1}{2}}}{x})$ $= \ln\,(x^2+5)^{\frac{1}{2}} - x$ $= \frac{1}{2}\ln\,(x^2+5) - lnx$
افترض أن x, y عددان موجبان في صورة لوغاريتم واحد $2\log_5 y - 4\log_5 xy$ الحل $\log_5 \frac{y^2}{x^4y^4}$ $\log_5 \frac{1}{x^4y^2}$	استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة اللوغاريتم غي صورة فرق أو مجموع أو مضاعفات لوغايتم $\log xy^2$ الحل $\log x + 2\log y$
	$\log \frac{y}{x^2}$ الحل $\log y - 2\log x$

(5-5) المعادلات الأسية واللوغاريتمية

السؤال رقم (1)

- أوجد جميع حلول المعادلة. قرب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$7^{3x} = 54$

$$\frac{\log_7 54}{3} = \frac{3x}{3}$$

$$x = 2.0494$$

$3^{2-3x} = 3^{5x-6}$

$$5x - 6 = 2 - 3x$$

$$5x + 3x = 2 + 6$$

$$\frac{8x}{8} = \frac{8}{8} = x = 1$$

$4^{3x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}$

$$2^{2(3x-1)} = 2^{-(x+5)}$$

$$6x - 2 = -x - 5$$

$$6x + x = -5 + 2$$

$$7x = -3$$

$$x = \frac{-3}{7} = -4286$$

$25^{x^2} = 125^{x+3}$

الحل

$$5^{x2} = 5^{3(x+3)}$$

$$2x^2 = 3x + 9$$

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-9)(2)}}{2(2)}$$

$2x + 3 = 0$, $x - 3 = 0$

$$\frac{2x}{2} = \frac{-3}{2} \qquad x = -3$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

$$2e^x + 5e^x - 3 = 0$$

الحل

$2e^{2x} + 5e^x - 3 = 0$, $e^x = y$

$2y^2 + 5y - 3 = 0$

$(2y - 1)(y + 3) = 0$

$2y = 1 , y = -3$

$y = \frac{1}{2} , y = -3$

$e^x = \frac{1}{2}$, $e^x = -3$

$x = ln\frac{1}{2}$, $x = ln(-3)$ مرفوض

$$\frac{e^x + 3e^{-x}}{4} = 1$$

الحل

$e^x + 3e^{-x} = 4$, $e^x = y$

$y + 3y^{-1} = 4$ بالضرب في y

$y^2 + 3 = 4y$

$y^2 - 4y + 3 = 0$

$(y - 3)(y - 1) = 0$

$y = 3 , y = 1$

$e^x = 3$, $e^x = 1$

$x = ln\,3$, $x = ln1$

$4^{2x+1} = 4^{3x-5}$

$2x + 1 = 3 \times -5$

$2x - x = -5 - 1$

$-x = -6$

$x = 6$

$6^{x-2} = 216$

$6^{x-2} = 6^3$

$x - 2 = 3$

$x = 3 + 2 = 5$

$2^{3x-2} = 5$

$\log_2 5 = 3x - 2$

$\frac{3x}{3} = \frac{\log_2 5 + 2}{3}$, $x = 1.4406$

$4 + 5^{6-x} = 15$

$5^{6-x} = 15 - 4$

$5^{6-x} = 11$

$\log_5 11 = 6 - x$

$x = 6 - \log_5 11$

$x = 4.5101$

$6^{3x+1} = 9^x$

$$\log 6^{3x+1} = \log 9^x$$

$$(3x+1)\log 6 = x \log 9$$

$$(3x+1)\,0.8 = 0.95\,x$$

$$2.4x + 0.8 = 0.95\,x$$

$$2.4x - 0.95\,x = \ 0.8$$

$$1.45\,x = \ 0.8$$

$$x = -0.5638$$

$-3 = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 12$

$$-3 + 12 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$9 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 9 = x$$

$$x = -3.1699$$

$3^{2x-3} = 4^x$

$$\log 3^{2x-3} = \log 4^x$$

$$(2x-3)\log 3 = x \log 4$$

$$2x\log 3 - 3\log 3 = x \log 4$$

$$2x\log 3 - x \log 4 = 3\log 3$$

$$x(2\log 3 - \log 4) = 3\log 3$$

$$x = \frac{3\log 3}{21\log 3 - \log 4} = 4.0643$$

$4^{x+2} = 8^{x-1}$

$$2^{2(x+2)} = 2^{3(x-1)}$$

$$2^{2x+4} = 2^{3x-3}$$

$$2x + 4 = 3x - 3$$

$$2x - 3x = -3 - 4$$

$$\frac{-x}{-1} = \frac{-7}{-1} \qquad x = 7$$

السؤال رقم (2)

- أوجد جميع حلول المعادلة. قرب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف.

$2\ln(3x-2)=\ln(5x+6)$

$ln(3x-2)^2=ln(5x+6)$

$ln(9x^2-12x+4)=ln(5x+6)$

$9x^2-12x-5x+4-6=0$

$9x^2-17x-2=0$

$$x=\frac{-(-17)\pm\sqrt{(-17)^2-4(9)(-2)}}{2(9)}$$

$x=\frac{-1}{9}$ مرفوض $, x=\ 2$

الحل 2

$\log_2(4x+5)=\log_2 x^2$

$4x+5=x^2$

$x^2-4x-5=0$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-5)}}{2(-4)}$$

$x+1=0 \quad x-5=0$

$x=-10$

$x=5$

$\ln(5x-2)=\ln(x-1)$

$5x-2=x-1$

$5x-x=-1+2$

$\frac{4x}{4}=\frac{1}{4}$

مرفوض

$x=\frac{1}{4}=0.25$

$\log_4(x^2-2x)=\log_4(3x+8)$

$x^2-2x-3x-8=0$

$x^2-5x-8=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(-8)}}{2(1)}$$

$x=-1.27, \qquad 6.275$

$\ln(2x^2+5x)=\ln(2x+7)$

$$2x^2+5x=2x+7$$

$$2x^2+5x-2x-7=0$$

$$2x^2+3x-7=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{(+3)^2-4(2)(-7)}}{2(2)}$$

$$x=-2.766,\quad x=\quad 1.262$$

$2\log(x+1)=\log(x+1)$

$$\log(x+1)^2=\log(x+1)$$

$$x^2+2x+1=x+1$$

$$x^2+x=0$$

$$x(x+1)=0$$

$$x=0$$

$x+1=0$ مرفوض

$$\boxed{x=0}$$

$\log_2 x+\log_2(x-3)=2$

$$\log_2 x(x-3)=2$$

$$x(x-3)=2^2$$

$$x^2-3x-4=0$$

$$(x+1)(x-4)=0$$

$x=-1$ مرفوض

$$\boxed{x=4}$$

صف 11 علمي
الوحدة السادسة
الدوال الدائرية وخصائصها

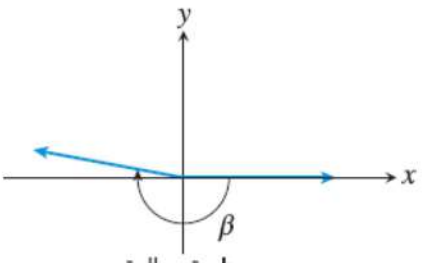




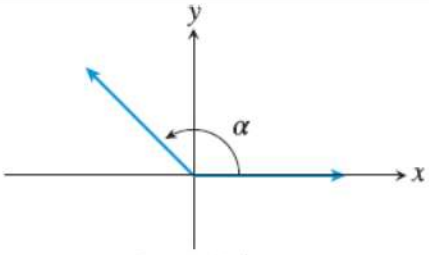
نسخة محلولة



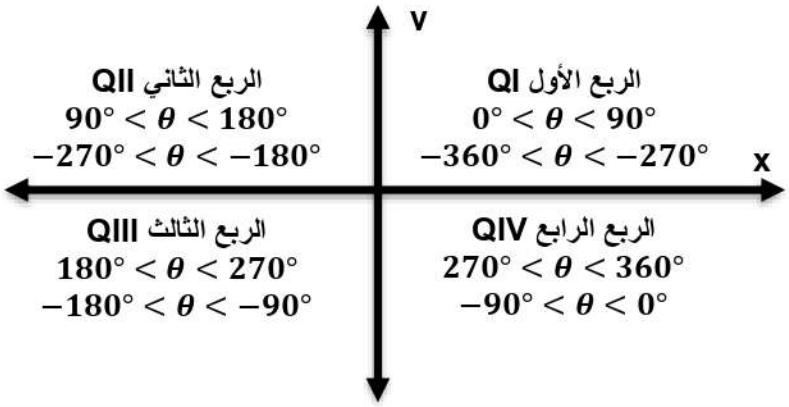
(6.1) النسب المثلثية للزوايا



زاوية سالبة
(مع اتجاه عقارب الساعة)
(b)

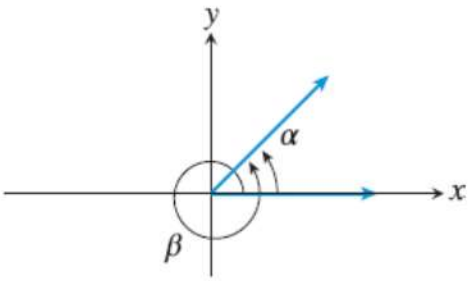


زاوية موجبة
(عكس اتجاه عقارب الساعة)
(a)

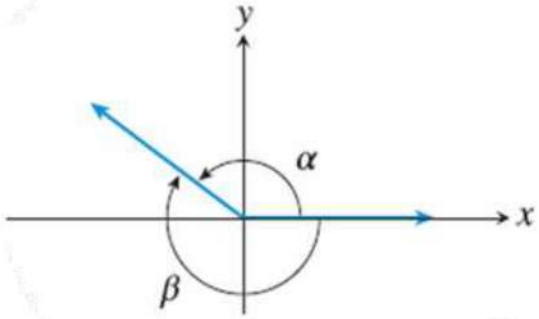


الزوايا المتطارفة

هما زاويتين الفرق بينهما من مضاعفات العدد 360 أو 2π

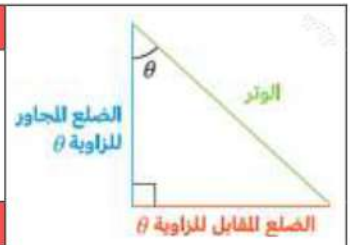


(b)



(a)

الظل	جيب التمام	الجيب
$tan\ \theta$ $= \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}}$	$cos\ \theta$ $= \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$	$sin\ \theta$ $= \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}$
ظل تمام	**القاطع**	**قاطع تمام**
$cot\ \theta$ $= \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الضلع المقابل}}$	$sec\ \theta$ $= \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المجاور}}$	$sin\ \theta$ $= \frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الضلع المقابل}}$

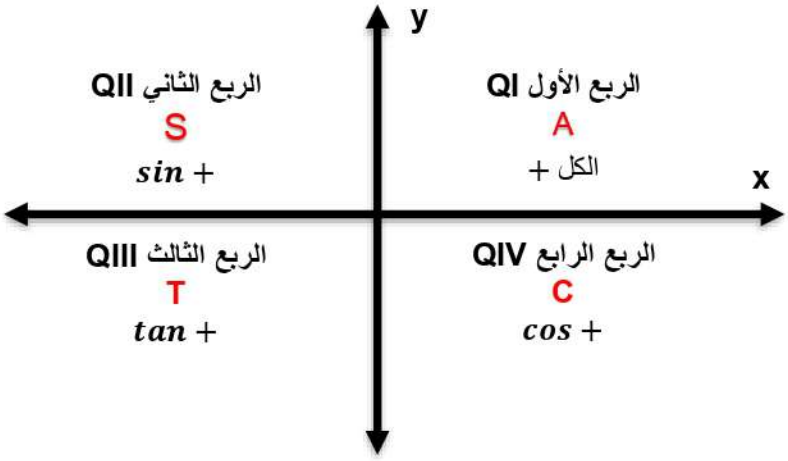


تذكير

قانون المسافة بين نقطتين يمكننا إيجاد المسافة d بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) من خلال القاعدة:

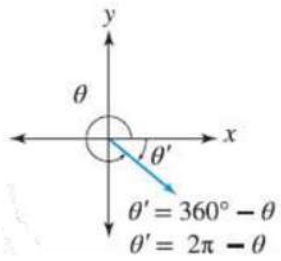
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

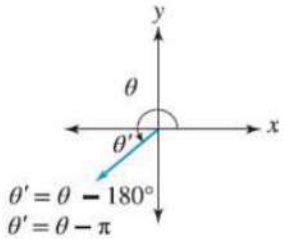
إشارة الدوال المثلثية

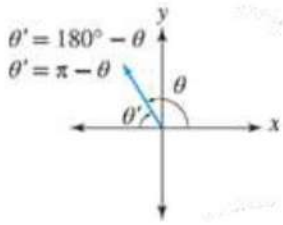


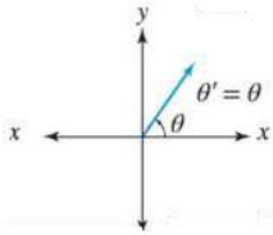
الزاوية المرجعية والمثلث المرجعي

هما زاويتان هي الزاوية الحادة المرسومة بين ضلع الانتهاء ومحور x

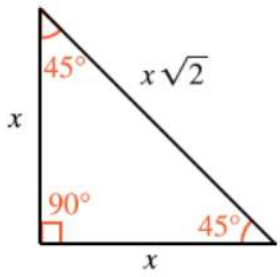




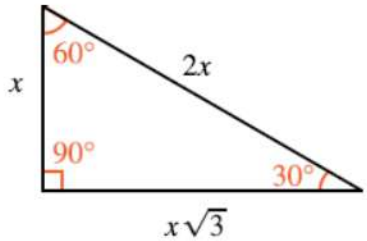




المثلثات القائمة الخاصة



المثلث 45°–45°–90°

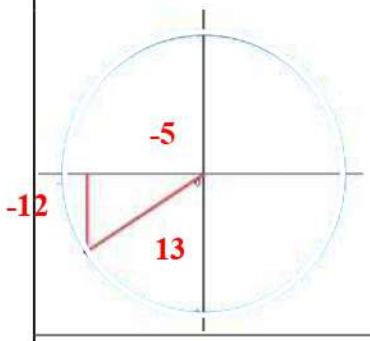


المثلث 30°–60°–90°

السؤال رقم (1)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

إذا كان $\cos\theta = \frac{-5}{13}$ و $\tan\theta > 0$ ،أوجد $\sin\theta$



A	$-\frac{12}{13}$	C	$-\frac{5}{12}$
B	$\frac{5}{13}$	D	$\frac{5}{12}$

السؤال رقم (2)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

أي من قياسات الزوايا التالية لها نفس ضلع الانتهاء لزاوية في الوضع القياسي قياسها $530°$ ؟

530-360 = 170

A	$370°$	C	$170°$
B	$10°$	D	$-10°$

السؤال رقم (3)

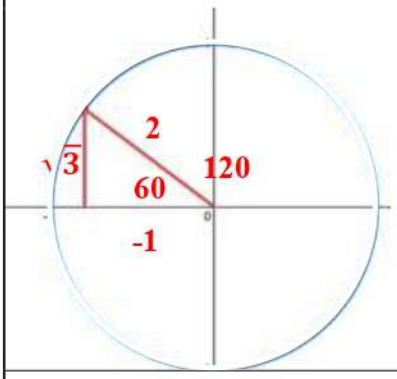
• اختر النقطة التي تقع على ضلع الانتهاء: -

• $\theta = 45°$

A	$(2,2)$	C	$(1,\sqrt{3})$
B	$(\sqrt{3},1)$		

السؤال رقم (4)

• اختر النقطة التي تقع على ضلع الانتهاء: -



• $\theta = \frac{2\pi}{3}$

A	$(-1, 1)$	C	$(-1, \sqrt{3})$
B	$(-\sqrt{3}, 1)$		

السؤال رقم (5)

• اكمل الجدول التالي .

الزاوية	زاوية متطارفه	زاوية مرجعية
$150°$	$150 - 360 = -210$ $360 + 150 = 510$	$180 - 150 = 30$
$210°$	$210 - 360 = -150$ $360 + 210 = 570$	$210 - 180 = 30$
$310°$	$310 - 360 = -50$ $360 + 310 = 670$	$360 - 310 = 50$
$\frac{\pi}{6} = 30$	$30 - 360 = -330$ $360 + 30 = 390$	30
$\frac{\pi}{3} = 60$	$60 - 360 = -300$ $360 + 60 = 420$	60
$-30°$	$-30 - 360 = -390$ $360 - 30 = 330$	$360 - 30 = 330$

السؤال رقم (6)

- حدد الإشارة (- أو +) للقيم المعطاة من دون استعمال الحاسبة.

الزاوية	الإشارة
$sin110°$	+
$tan150°$	−
$sec\,300°$	+
$sin\,\frac{\pi}{6}$	+
$cos\frac{5\pi}{3}$	+
$tan\,-30°$	−

السؤال رقم (6)

- تقع النقطة p على ضلع الانتهاء للزاوية θ.
أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. إذا كانت النسبة غير معرفة، اكتب: غير معرفة"

$p(3,4)$

الإجابة:

$$\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$	$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$
$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{5}{4}$	$\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{5}{3}$
$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$	$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$

- تقع النقطة p على ضلع الانتهاء للزاوية θ.
أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. إذا كانت النسبة غير معرفة، اكتب: غير معرفة"

$p(-4,-6)$

الإجابة:

$$\sqrt{(-4)^2+(-6)^2}=2\sqrt{13}$$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-6}{2\sqrt{13}}$	$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-4}{2\sqrt{13}}$
$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{2\sqrt{13}}{-6}$	$\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{2\sqrt{13}}{-4}$
$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-6}{-4}$	$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-4}{-6}$

- تقع النقطة p على ضلع الانتهاء للزاوية θ.
أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. إذا كانت النسبة غير معرفة، اكتب: غير معرفة"

$p(-3,0)$

الإجابة:

$$\sqrt{(-3)^2+(0)^2}=3$$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=0$	$\cos\theta=\frac{x}{r}=-1$
$\csc\theta$ غير	$\sec\theta=\frac{r}{x}=-1$
$\tan\theta=\frac{y}{x}=0$	$\cot\theta$ غير

- تقع النقطة p على ضلع الانتهاء للزاوية θ.
أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ. إذا كانت النسبة غير معرفة، اكتب: غير معرفة"

$p(0,5)$

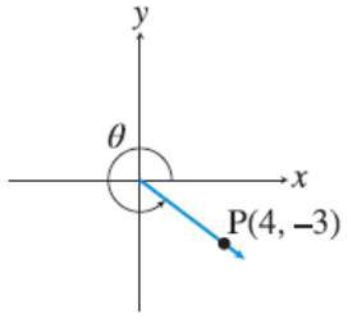
الإجابة:

$$\sqrt{(3)^2+(0)^2}=5$$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=0$	$\cos\theta=\frac{x}{r}=-1$
$\csc\theta$ غير	$\sec\theta=\frac{r}{x}=-1$
$\tan\theta=\frac{y}{x}=0$	$\cot\theta$ غير

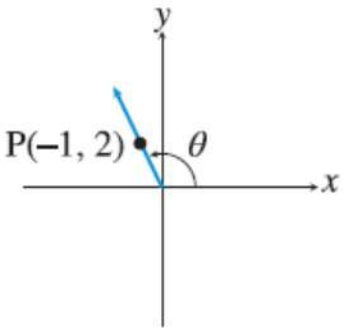
السؤال رقم (7)

- أوجد قيم النسب المثلثية الست للزاوية θ.



$$\sqrt{(4)^2+(-3)^2}=5$$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-3}{5}$	$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{4}{5}$
$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{-5}{3}$	$\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{5}{4}$
$\tan\theta=\frac{y}{x}=-\frac{3}{4}$	$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-4}{3}$



$$\sqrt{(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{5}$$

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{5}}$
$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{5}}{-1}$
$\tan\theta=\frac{y}{x}=-\frac{2}{1}$	$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-1}{2}$

السؤال رقم (8)

- في كل مما يلي، أوجد زاوية موجبة وزاوية سالبة تكون لهما الزاوية المرجعية المعطاة.

- $10°$ في الربع الثالث.

$$180+10=190$$

$$10-180=-170$$

- $15°$ في الربع الأول.

$$15-360=-345$$

$$360+15=375$$

السؤال رقم (9)

- أوجد قيمة الزاوية في الوضع القياسي التي لها الزاوية المرجعية المعطاة.

- $15°$ في الربع الثاني.

$$180-15=165$$

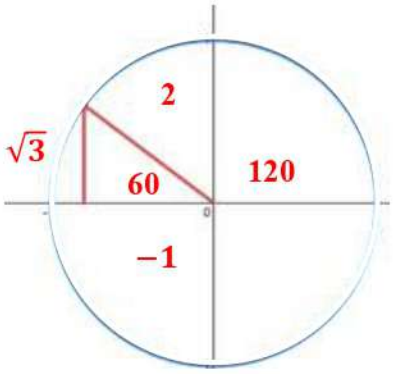
- $75°$ في الربع الرابع.

$$360-75=285$$

السؤال رقم (10)

- أوجد القيمة من دون استعمال الحاسبة، عبر استعمال النسب في مثلث مرجعي.

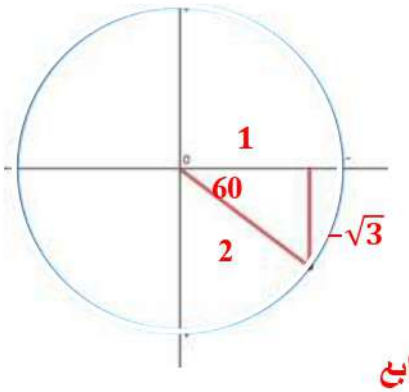
- $\cos 120°$



الزاوية في الربع الثاني

$$\cos 120 = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$

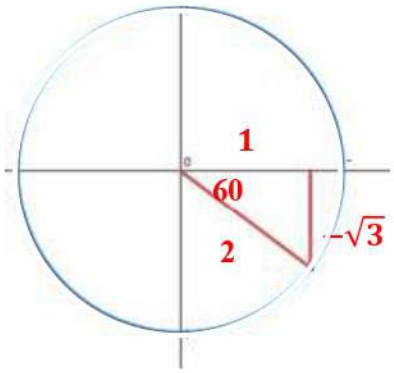
- $\tan 300°$



الزاوية في الربع الرابع

$$\tan 300 = -\tan 60 = -\sqrt{3}$$

- $\sin 600°$

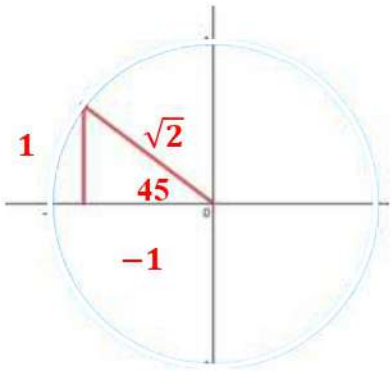


الزاوية في الربع الرابع

$$\sin 600 = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\csc \frac{3\pi}{4}$

الزاوية في الربع الثاني

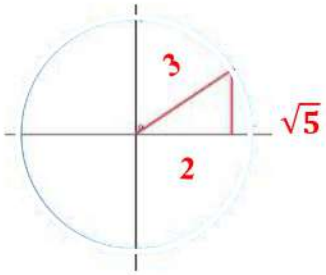


$$\csc 135 = \sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

السؤال رقم (11)

a) أوجد $\sin\theta$ و $\tan\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$ و $\cot\theta > 0$.

$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

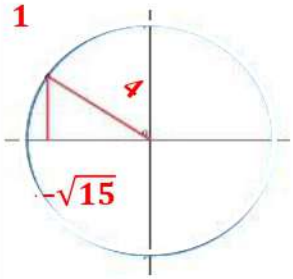


الزاوية في الربع الأول

$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

أوجد $\cos\theta$ و $\cot\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ و $\tan\theta < 0$.

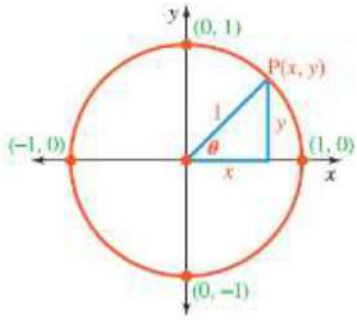


$\cos\theta = \frac{-\sqrt{15}}{4}$

$\tan\theta = -\sqrt{15}$

(6.2) دائرة الوحدة

دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوي وحدة واحدة وبالتالي فإن معادلتها هي $x^2 + y^2 = 1$



الصفة الدورية للنسب المثلثية

زوايا قياسها معرف بالراديان	زوايا قياسها معرف بالدرجات
$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$	$\cos(\theta + 360°k) = \cos\theta$
$\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$	$\sin(\theta + 360°k) = \sin\theta$
$\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$	$\tan(\theta + 360°k) = \tan\theta$

السؤال رقم (1)			
• اختر الإجابة الصحيحة: - أي القيم التالية تساوي $tan\left(\frac{4\pi}{6}\right)$؟			
A	$-\sqrt{3}$	C	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
B	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	D	$\frac{-1}{2}$

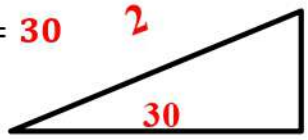
السؤال رقم (2)			
• اختر الإجابة الصحيحة: - ما مدى الدالة $f(t) = (sin\ t)^2 + (cos\ t)^2$ ؟			
A	$\{1\}$	C	$[-1, 1]$
B	$[0, 1]$	D	$[0, 2]$

السؤال رقم (3)

• أوجد $sin\ \theta$ و $cos\ \theta$ من دون استعمال الحاسبة.

الإجابة:

$\theta = \frac{\pi}{6} = 30$



الزاوية في الربع الأول

$\sqrt{3}$

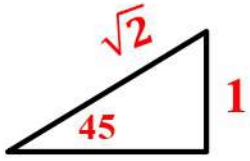
$sin\ 30 = \frac{1}{2}$

$tan\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

• أوجد $sin\ \theta$ و $cos\ \theta$ من دون استعمال الحاسبة.

الإجابة:

$\theta = \frac{3\pi}{4} = 135$



1

الزاوية في الربع الثاني

$180 - 135 = 45$

$sin\ 135 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$cos\ 135 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

السؤال رقم (4)

- أوجد $\tan\theta$ من دون استعمال الحاسبة.

$$\theta = \frac{-3\pi}{2} = -270 = 90$$

الإجابة:

$\tan 90 =$ معرفة غير

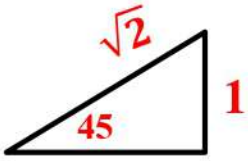
- أوجد $\tan\theta$ من دون استعمال الحاسبة.

$$\theta = 675° = -45$$

الإجابة:

الزاوية في الربع الرابع

$$\tan -45 = -1$$



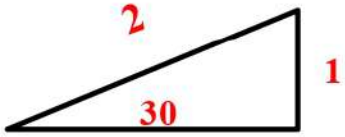
1

السؤال رقم (5)

- أوجد $\csc\theta$ و $\sec\theta$ و $\cot\theta$ من دون استعمال الحاسبة.

$$\theta = 210° = 180 + 30$$

الإجابة:



$\sqrt{3}$

الزاوية في الربع الثالث

$$\csc 30 = -\frac{2}{1}$$

$$\sec 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot 30 = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

- أوجد $\csc\theta$ و $\sec\theta$ و $\cot\theta$ من دون استعمال الحاسبة.

$$\theta = -\frac{10\pi}{4} = -450 = -90$$

الإجابة:

$$\csc\theta = -1$$

$\sec\theta$ معروف غير

$$\cot\theta = 0$$

(6.3) التمثيل البياني للدوال الدائرية

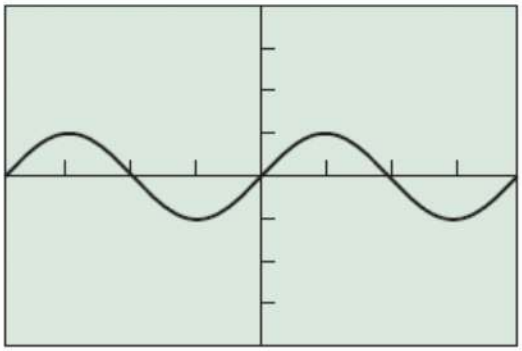
التمثيل البياني لدالة الجيب	$y = sin\ x$

دالة الجيب $f(x) = \sin x$

- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدي: $[-1, 1]$
- متصلة على مجالها
- متزايدة ومتناقصة بالتناوب في موجات دورية
- متناظرة حول نقطة الأصل، دالة فردية
- لها قيم عظمي هي 1
- لها قيمة صغري هي -1
- ليس لها خط تقارب أفقي
- ليس لها خط تقارب رأسي
- الدورة: 2π
- السعة 1
- السلوك الطرفي:

$\lim_{x\to-\infty} sin\ x$ و $\lim_{x\to\infty} sin\ x$ غير موجودتين.

(تتراوح قيمة الدالة بشكل متواصل بين -1 و 1 ولا تقترب من أي نهاية).



$[-4, 4]$ في $[-2\pi, 2\pi]$

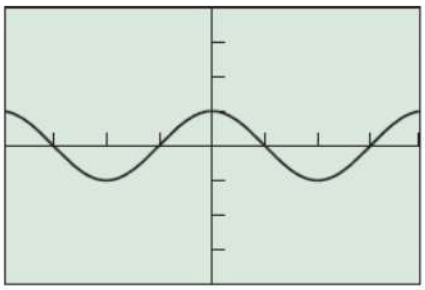
خصائص الدوال الدورية

بشكل عام، للتمثيل البياني للدوال $y = a\ sin\ bx$ ، $y = a\ cos\ bx$ الخصائص التالية:

- السعة = $|a|$
- الدورة = $\frac{2\pi}{|b|}$
- التردد = $\frac{|b|}{2\pi}$

التمثيل البياني لدالة جيب التمام	$y = cos\ x$

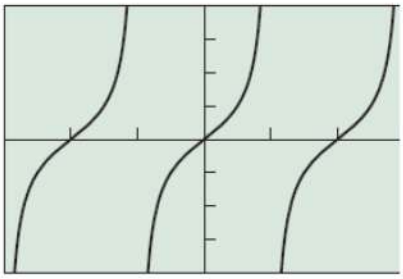
دالة جيب التمام $f(x) = cos\ x$



$[-4, 4]$ في $[-2\pi, 2\pi]$

- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدي: $[-1, 1]$
- متصلة على مجالها
- متزايدة ومتناقصة بالتناوب في موجات دورية
- متناظرة حول المحور y، دالة زوجية
- لها قيمة عظمي هي 1
- لها قيمة صغري هي -1
- ليس لها خط تقارب أفقي
- ليس لها خط تقارب رأسي
- السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} cos\ x$ و $\lim_{x\to\infty} cos\ x$ غير موجودتين.
(تتراوح قيمة الدالة بشكل متواصل بين 1 و -1 ولا تقترب من أي نهاية).

دالة الظل $f(x) = tan\ x$



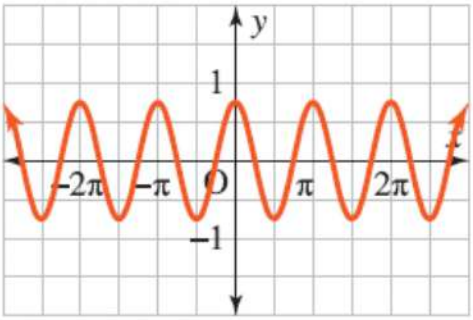
$[-4, 4]$ في $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

- المجال: كل الأعداد الحقيقية ما عدا المضاعفات الفردية للعدد $\frac{\pi}{2}$
- المدي: $]-\infty, \infty[$
- متصلة في مجالها
- متزايدة في كل فترة في مجالها
- متناظرة عبر نقطة الأصل، دالة فردية
- ليس لها قيم عظمي أو صغرى محلية
- ليس لها تقارب أفقي
- خط تقارب رأسي: $x = k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ لكل الأعداد الصحيحة الفردية k
- السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} tan\ x$ و $\lim_{x\to\infty} tan\ x$ غير موجودتين.
(تتراوح قيم الدالة بشكل متواصل بين $-\infty$ و ∞ ولا تقترب من أي نهاية).

السؤال رقم (1)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

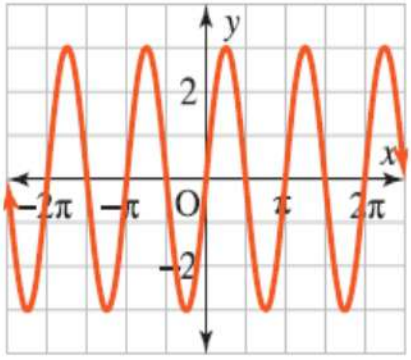
ما هي معادلة التمثيل البياني أدناه؟



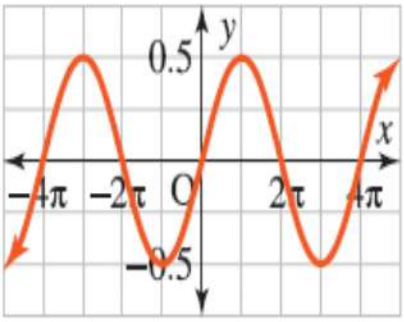
A	$y = \frac{3}{4} sin\ 2x$	C	$y = \frac{3}{4} cos\ 2x$
B	$y = \frac{3}{2} sin\ x$	D	$y = \frac{3}{2} cos\ x$

السؤال رقم (2)

• حدد المجال والمدى والقيم القصوى لكل دالة، مبينًا الدورة والسعة.



المجال
$]-\infty, \infty[$
المدى
$]-{-3,3}[$
القيمة العظمى
3
القيمة الصغرى
-3
الدورة π
السعة 3



المجال
$]-\infty, \infty[$
المدى
$]-0.5, 0.5[$
القيمة العظمى
0.5
القيمة الصغرى
-0.5
الدورة 4π
السعة 0.5

السؤال رقم (3)

• أوجد الدورة وسعة للدالة

$y = \frac{2}{3}\ sin\ x$

الإجابة:
الدورة 2π
السعة $\frac{2}{3}$

• أوجد الدورة وسعة للدالة

$y = \frac{7}{4}\ sin\ x$

الإجابة:
الدورة 2π
السعة $\frac{7}{4}$

- أوجد الدورة وسعة للدالة

$y = cos(-0.4x)$

الإجابة:

الدورة 5π

السعة 1

- أوجد الدورة وسعة للدالة

$y = cos\ (-7x)$

الإجابة:

الدورة $\frac{2\pi}{7}$

السعة 1

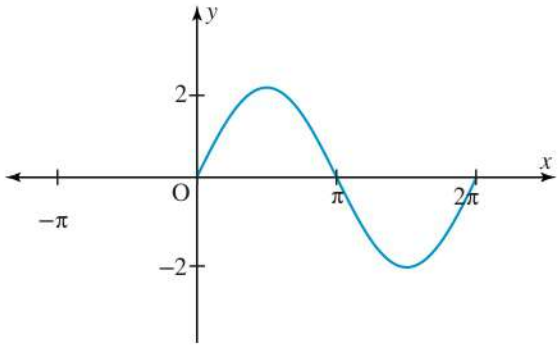
السؤال رقم (5)

- مثل دورة واحدة للدالة بيانيًا.

$y = 2\ sin\ x$

الإجابة:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0

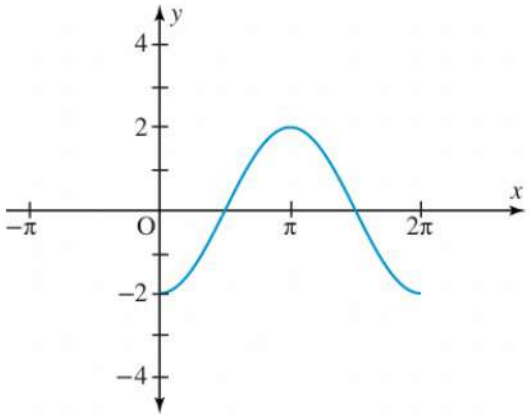


- مثل دورة واحدة للدالة بيانيًا.

$y = -2\ cos\ x$

الإجابة:

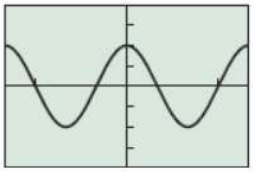
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	-2	0	2	0	-2



السؤال رقم (6)

- أوجد الدورة والسعة لكل دالة. حدد نافذة العرض التي تبين كل تمثيل بياني. استعمل معلوماتك عن التحويلات (دون استعمال الحاسبة)

$y = 2\cos 3x$



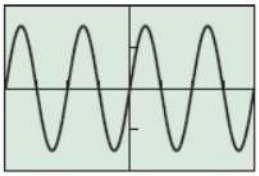
الدورة $\frac{2}{3}\pi$

السعة 2

المدى

$]-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi[$

$y = 1.5\sin 2x$



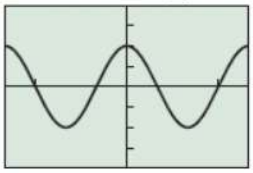
الدورة π

السعة 1.5

المدى

$]-2\pi, 2\pi[$

$y = 5\sin\frac{1}{2}x$



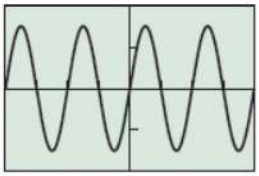
الدورة 4π

السعة 5

المدى

$]-4\pi, 4\pi[$

$y = -3\cos 2x$



الدورة π

السعة 3

المدى

$]-2\pi, 2\pi[$

(6.4) إزاحة الدوال الدائرية

خصائص الدوال الدورية

بشكل عام، للتمثيل البياني للدوال $y = a\ sin\ (b(x-h)) + k$ و $y = a\ cos\ (b(x-h)) + k$، $(a \neq 0$ و $b \neq 0)$ الخصائص التالية:

- السعة = $|a|$
- الدورة = $\frac{2\pi}{|b|}$
- التردد = $\frac{|b|}{2\pi}$

عند المقارنة بالتمثيل البياني للدالتين $y = a\ sin\ (bx)$ و $y = a\ cos\ (bx)$ يمكن إضافة الخصائص التالية:

إزاحة رأسية تساوي k وإزاحة الطور تساوي h.

السؤال رقم (1)

- قال علي إن للدالة $y = \frac{1}{2}\ cos\ \left[3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3\right]$ إزاحة طور مقدارها $\frac{\pi}{4}$ وحدة إلى اليمين وإزاحة رأسية مقدارها 3 وحدات إلى الأسفل. هل هو على صواب؟ برر إجابتك.

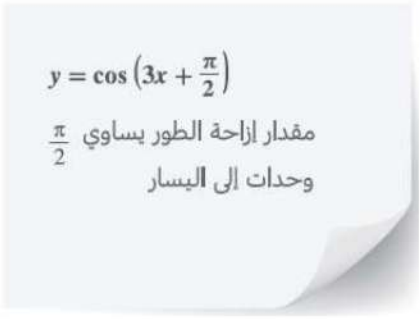
خطأ إزاحة طور مقدارها $\frac{\pi}{4}$ لليمين ، 3 وحدات للأسفل و يوجد تضيق رأسي مقداره $\frac{1}{2}$

السؤال رقم (2)

- أراد حامد أن يجد إزاحة الطور للدالة المبينة في الشكل أدناه. هل عمله صحيح؟ برر إجابتك.

خطأ إزاحة طور مقدارها $\frac{\pi}{6}$ لليسار ،

$$y = \cos 3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$



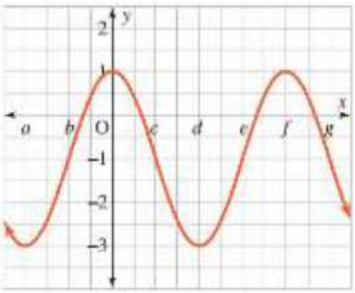
السؤال رقم (3)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

أي المعلومات التالية عن الدالة $y = \frac{3}{4} cos\left(3\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) - 5$ صحيحة؟

A	السعة هي $\frac{3}{4}$	C	الدورة هي 3
B	إزاحة الطور مقدارها $\frac{\pi}{6}$ وحدات إلى اليمين.	D	الإزاحة الرأسية مقدارها 5 وحدات إلى الأعلى.

السؤال رقم (4)



• اختر الإجابة الصحيحة: -

مثل حمد الدالة $y = 2\ sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ بيانيًا ولكنه نسي أن يحدد قيم النقاط على المحور x. اختر مما يلي قيمة d الصحيحة على المحور x :

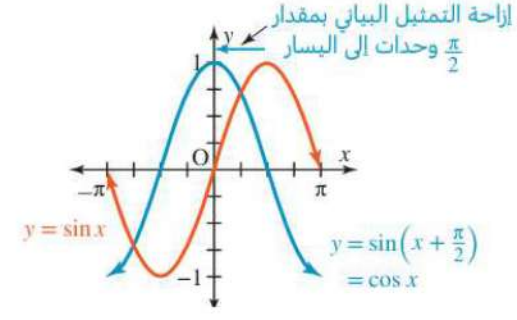
A	π	C	$\frac{\pi}{2}$
B	2π	D	$\frac{3\pi}{2}$

السؤال رقم (5)

اكتب الدالة $y = cos\ x$ في شكل إزاحة للدالة $y = sin\ x$

الحل

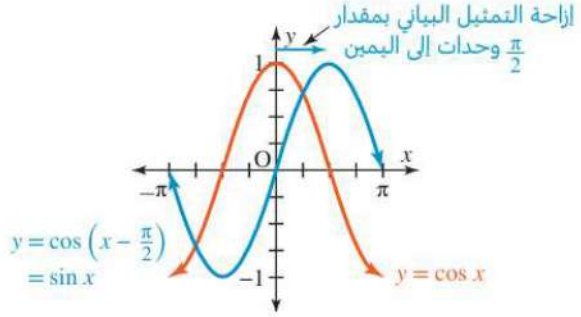
$$y = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos\ x$$



اكتب الدالة $y = sin\ x$ في شكل إزاحة للدالة $y = cos\ x$

الحل

$$y = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = sin\ x$$



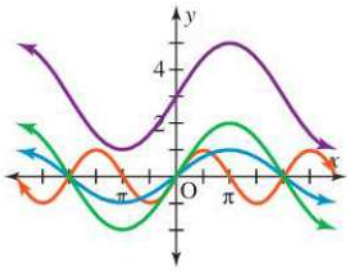
السؤال رقم (6)

ارسم التمثيل البياني للدالة

$$y = 2\ \sin\frac{x}{2} + 3$$

الحل

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0
$\grave{y}$	3	5	3	1	3



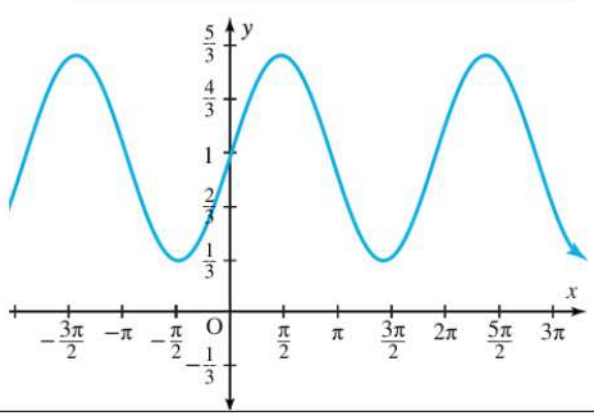
السؤال رقم (7)

ارسم التمثيل البياني للدالة

$$y = \frac{2}{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

الحل

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	1	0	-1
$\grave{y}$	1	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1



صف 11 علمي
الوحدة السابعة
المتطابقات
والمعادلات المثلثية





نسخة محلولة



(7.1) المتطابقات المثلثية

المتطابقات المثلثية الأساسية

متطابقات المقلوب

$\csc\theta = \frac{1}{\sin}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$

متطابقات ناتج القسمة

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

متطابقات فيثاغورس

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

متطابقات الزاويتين المتتامتين

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$
$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

متطابقات الدوال الفردية والدوال الزوجية

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$
$$\csc(-x) = -\csc x \qquad \sec(-x) = \sec x \qquad \cot(-x) = -\cot x$$

السؤال رقم (1)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

أي المقادير التالية ليس مساويًا للقيمة $\sin x$ كمتطابقة؟

A	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$	C	$-\sin(-x)$
B	$\sqrt{1+\cos^2 x}$	D	$\tan x \sec x$

السؤال رقم (3)

• أوجد قيمة المقدار باستعمال المتطابقات.

a) إذا كان $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-5.32$، أوجد $\cot\theta$.

الحل

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta=-5.32$$

b) إذا كان $\sin\theta=0.45$، أوجد $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=0.45$$

c) إذا كان $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=0.73$، أوجد $\cos(-\theta)$.

الحل

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(-\theta)=\cos\theta=0.73$$

d) إذا كان $\cot(-\theta)=7.89$، أوجد $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$.

الحل

$$\cot(-\theta)=-\cot(\theta)$$

$$-\tan\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cot(\theta)=7.89$$

السؤال رقم (4)

- بسط المقدار باستعمال المتطابقات الأساسية أو متطابقات فيثاغورس.

- $\cot x \tan x$

الحل

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$$

- $\tan x \cos x$

الحل

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \cos x = \sin\theta$$

- $\cot u \sin u$

الحل

$$\frac{\cos u}{\sin u} \times \sin u = \cos u$$

- $\sec y \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

الحل

$$\frac{1}{\cos y} \times \cos y = 1$$

- $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta}$

الحل

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta} = \sin\theta$$

- $\frac{1+\tan^2 x}{\csc^2 x}$

الحل

$$\frac{\sec^2\theta}{\csc^2 x} = \frac{1}{\cos^2\theta} \div \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} =$$

$$\tan^2\theta$$

السؤال رقم (5)

- أثبت صحة المتطابقة.

- $(\sin x)\,(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$

$$= \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x \times \sin x \times \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \cos x + \sin^2 x$$

- $(\cos x)\,(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$

الحل

$$= \cos x \times \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x \times \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \sin x + \cos x \times \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \sin x + \cos^2 x$$

• $(1-\tan x)^2 = \sec^2 x - 2\tan x$ $1 - 2\tan x + \tan^2 x$ $= \sec^2 x - 2\tan x$	• $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x$ $(\cos x - \sin x)^2 =$ $\cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x \sin x =$ $1 - 2\cos x \sin x$

السؤال رقم (6)

• أثبت صحة المتطابقة.

$$\frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\sin x}{1-\cos x}$$

الحل

$$\frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \div \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \div \left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \left(\frac{\cos x}{1-\cos x}\right) = \frac{\sin x}{1-\cos x}$$

• $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = 2\csc x$ $\frac{\sin^2 x + (1+\cos x)(1+\cos x)}{(\sin x)(1+\cos x)}$ $\frac{\sin^2 x + 1 + \cos^2 x + 2\cos x}{(\sin x)(1+\cos x)} =$ $\frac{2 + 2\cos x}{(\sin x)(1+\cos x)} = \frac{2(1+\cos x)}{(\sin x)(1+\cos x)}$ $\frac{2}{(\sin x)} = 2\csc x$	$\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1 - 2\cos x \sin x}{1 + 2\cos x \sin x}$ $\frac{(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)} \times \frac{(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)}$ $= \frac{(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)} \times \frac{(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)}$ $= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x \sin x}$ $= \frac{1 - 2\cos x \sin x}{1 + 2\cos x \sin x} = \frac{1 - 2\cos x \sin x}{1 + 2\cos x \sin x}$

(7.2) المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

متطابقات جيب التمام للفرق والمجموع	متطابقات الجيب للفرق والمجموع
$cos\,(u-v) = cos\,u\,cos\,v + sin\,u\,sin\,v$	$\sin(u+v) = sin\,u\,cos\,v + cos\,u\,sin\,v$
$cos\,(u+v) = cos\,u\,cos\,v - sin\,u\,sin\,v$	$sin\,(u-v) = sin\,u\,cos\,v - cos\,u\,sin\,v$

متطابقات الظل للفرق والمجموع

$tan\,(u+v) = \frac{tan\,u + tan\,v}{1 - tan\,u\,tan\,v}$	$tan\,(u-v) = \frac{tan\,u - tan\,v}{1 + tan\,u\,tan\,v}$

السؤال رقم (1)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

إذا كان $cos\,A\,cos\,B = sin\,A\,sin\,B$، فإن $cos\,(A+B)$ يساوي:

A	0	C	1
B	$cos\,A + cos\,B$	D	$cos\,B + cos\,A$

السؤال رقم (2)

• اختر الإجابة الصحيحة: -

دالة لها خاصية $f(1+2) = \frac{f(1)+f(2)}{1-f(1)f(2)}$

A	$f(x) = sin\,x$	C	$f(x) = tan\,x$
B	$f(x) = sec\,x$	D	$f(x) = e^x$

السؤال رقم (3)

- أوجد القيمة الدقيقة باستعمال متطابقة مجموع أو فرق

• $\sin 15°$ $\sin(45° - 30°)$ $= \sin 45° \cos 30°$ $- \cos 45° \sin 30°$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0.26$	• $\tan 15°$ $\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$ $\tan(45° - 30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°}$ $\tan(45° - 30°) = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1(\frac{\sqrt{3}}{3})} = 2 - \sqrt{3}$
• $\cos 75° = \cos(45° + 30°) =$ $= \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0.26$	• $\cos \frac{\pi}{12} = \cos 15° =$ $\cos(45° - 30°) =$ $\cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = 0.9$

السؤال رقم (4)

- أكتب المقدار في صورة جيب أو جيب التمام، أو ظل لزاوية.

• $\sin 42^\circ \cos 17^\circ - \cos 42^\circ \sin 17^\circ$ $\sin u \cos - \cos u \sin v = \sin(u - v)$ $\sin 42^\circ \cos 17^\circ - \cos 42^\circ \sin 17^\circ$ $= \sin(42^\circ - 17^\circ)$ $= \sin(25^\circ)$ 0.42	• $\cos 94^\circ \cos 18^\circ + \sin 94^\circ \sin 18^\circ$ $\cos 94^\circ \cos 18^\circ + \sin 94^\circ \sin 18^\circ =$ $\cos(98^\circ - 18^\circ) = \cos(80^\circ)$ $= 0.17$
• $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}$ $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2}$ $= \sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{2}\right) = -0.8$	• $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$ $= \sin\left(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{3}\right) = -0.6$
• $\frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ} = \frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ}$ $\tan(19 + 47) = \tan(66) = 2.24$	• $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3}\right)$ $= -0.44$