معهد سمارت مايند
SMART MIND INSTITUTE

pedia

مذكّرة الـ..... لمادة

الـ.....

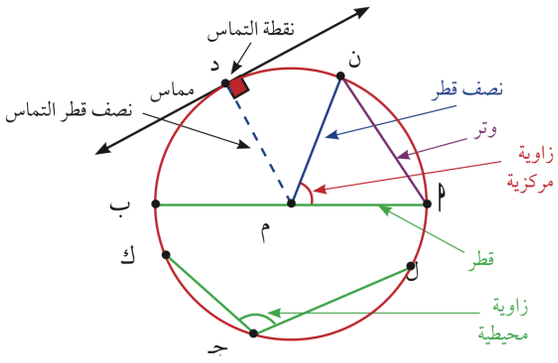
الصف الـ.....

pedia
ANDROID APP ON Google play
Download on the App Store
جميع الدروس مشروحة بالكامل في مكتبة الفيديوهات على تطبيق سبيديا

www.smartmindkw.com - www.spediaapp.com
Tel: +9651881880 – SM: @smartmindkw @spediaapp

الوحدة السادسة

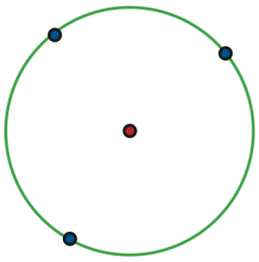
الدائرة



تعريف الدائرة : الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عند نقطة ثابتة م في المستوى بعدًا ثابتًا.
تسمى النقطة الثابتة **مركز الدائرة** ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز إليه عادة بالرمز **نق**.

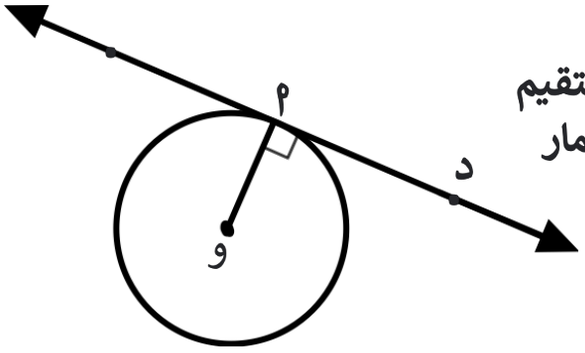
نظرية(١)

موضوعي



كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.

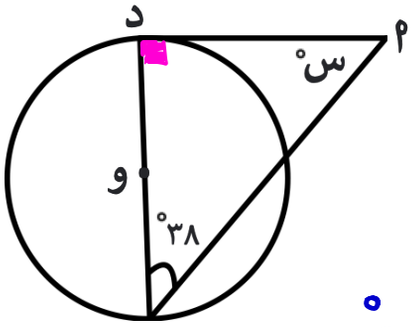
نظرية(٢)



المماس عمودي على نصف قطر التماس. إذا كان مستقيم مماسًا لدائرة ، فإنه يكون متعامداً مع نصف القطر المار بنقطة التماس.

أي أن : $\overline{\text{و أ}} \perp \overleftrightarrow{\text{د أ}}$

مثال: في الشكل المقابل ، $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة التي مركزها و
أوجد قيمة س°



الحل

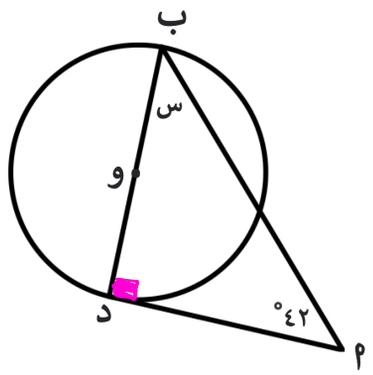
∵ $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة

$\overline{\text{د و}}$ نصف قطر

∴ ق(د̂) = ٩٠°

ق(أ̂) = ١٨٠ − (٩٠ + ٣٨) = ٥٢°

مثال: في الشكل المقابل ، $\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة التي مركزها و
أوجد قيمة سْ



الحل

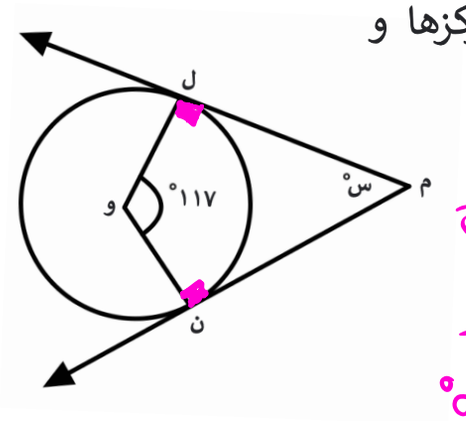
∵ $\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة

$\overline{دو}$ نصف قطر

∴ ق ($\hat{د}$) = ٩٠°

ق ($\hat{ب}$) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٢) = ٤٨°

مثال: في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{مل}$ ، $\overleftrightarrow{من}$ مماسان للدائرة التي مركزها و
أوجد قياس الزاوية ل $\hat{م}$ ن



الحل

∵ $\overleftrightarrow{مل}$ مماس للدائرة

$\overline{لو}$ نصف قطر

∴ ق ($\hat{ل}$) = ٩٠°

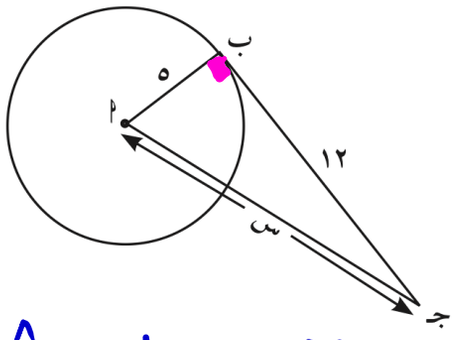
∵ $\overleftrightarrow{من}$ مماس للدائرة

$\overline{نو}$ نصف قطر

∴ ق ($\hat{ن}$) = ٩٠°

ق ($\hat{م}$) = ٣٦٠ − (١١٧ + ٩٠ + ٩٠) = ٦٣°

مثال: $\overleftrightarrow{بج}$ مماس للدائرة. أوجد قيمة س.



الحل

∵ $\overleftrightarrow{بج}$ مماس للدائرة

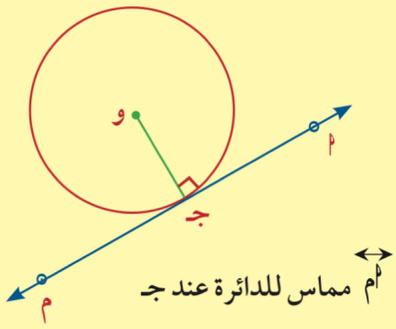
$\overline{بأ}$ نصف قطر

∴ ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ← المثلث أ ب ج قائم في الزاوية $\hat{ب}$

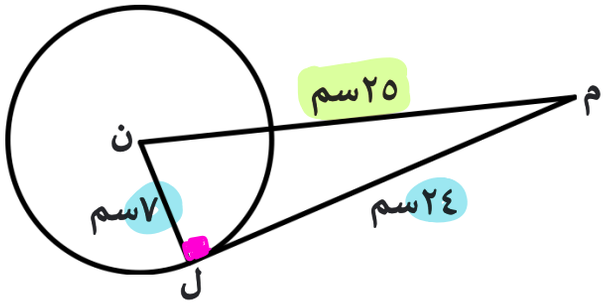
نطبق فيثاغورث س = $\sqrt{(١٢)^2 + (٥)^2}$ = ١٣

نظرية (٣)

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.



مثال: في الشكل المقابل ، ن ل = ٧سم ، ل م = ٢٤سم ، ن م = ٢٥سم
أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن.



الحل

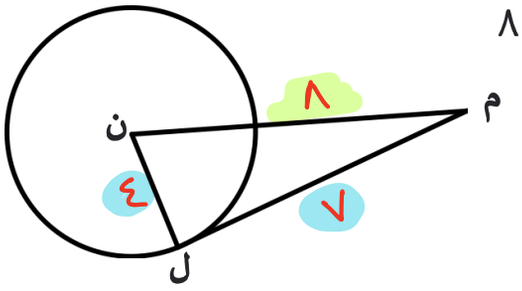
$(٧)^٢ + (٢٤)^٢ = ٦٢٥$

$(٢٥)^٢ = ٦٢٥$

⇐ المثلث م ل ن قائم الزاوية في $\hat{ل}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة

مثال: في الشكل المقابل ، ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨
فهل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة ؟ فسّر إجابتك.



الحل

$(٧)^٢ + (٤)^٢ = ٦٥$

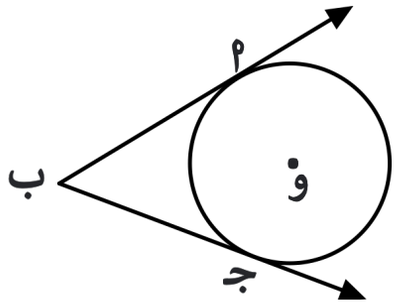
$(٨)^٢ = ٦٤$

⇐ المثلث م ل ن غير قائم الزاوية

⇐ $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ليس مماس للدائرة

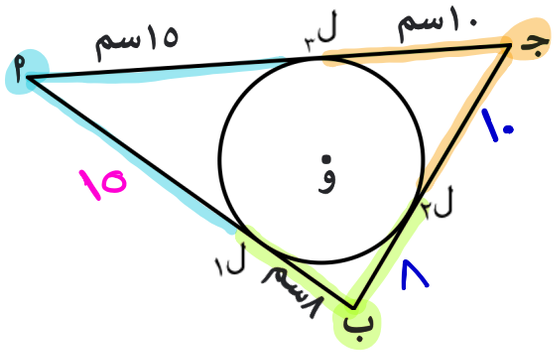
نظرية(٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.



$\overline{أب} \cong \overline{جـب}$

مثال: في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أ ب جـ



الحل

- $\overline{أل_1}$ ، $\overline{أل_3}$ مماسان للدائرة

أل١ = أل٣ = ١٥ سم

- $\overline{ب ل_1}$ ، $\overline{ب ل_2}$ مماسان للدائرة

ب ل١ = ب ل٢ = ٨ سم

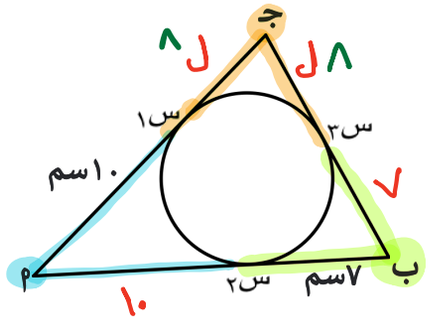
- $\overline{جـ ل_3}$ ، $\overline{جـ ل_2}$ مماسان للدائرة

جـ ل٣ = جـ ل٢ = ١٠ سم

المحيط = ١٥ + ١٥ + ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠

= ٦٦ سم

مثال: في الشكل المقابل، إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠سم، فأوجد طول $\overline{ب جـ}$



الحل

- ∵ $\overline{أس_1}$ ، $\overline{أس_2}$ مماسان للدائرة

∴ أس١ = أس٢ = ١٠ سم

- ∵ $\overline{ب س_2}$ ، $\overline{ب س_3}$ مماسان للدائرة

∴ ب س٢ = ب س٣ = ٧ سم

- $\overline{جـ س_1}$ ، $\overline{جـ س_3}$ مماسان للدائرة

∴ جـ س١ = جـ س٣ = ل

ل + ل + ١٠ + ١٠ + ٧ + ٧ = ٥٠

⇐ $\boxed{ل = ٨}$

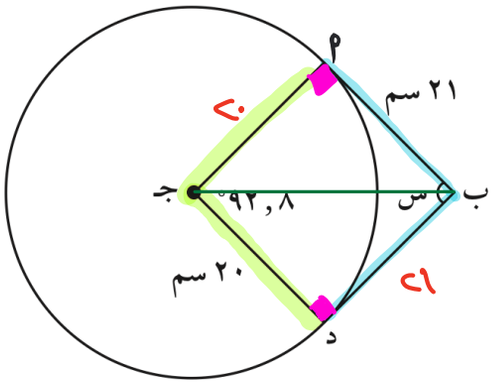
⇐ ب جـ = ٧ + ٨ = ١٥ سم

مثال: $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ مماسان للدائرة.

(أ) أوجد قيمة س.

(ب) أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ د.

(جـ) أوجد ب جـ.



الحل

(أ) ∵ $\overline{\text{ب أ}}$ مماس للدائرة

$\overline{\text{أ جـ}}$ نصف قطر

∴ ق(∠أ) = ٩٠°

∵ $\overline{\text{ب د}}$ مماس للدائرة

$\overline{\text{جـ د}}$ نصف قطر

∴ ق(∠د) = ٩٠°

ق(∠ب) = ٣٦٠° − (٩٠ + ٩٠ + ٩٢,٨) = ٨٧,٢°

(ب) ∵ $\overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ مماسان للدائرة

∴ ب أ = ب د = ٢١ سم

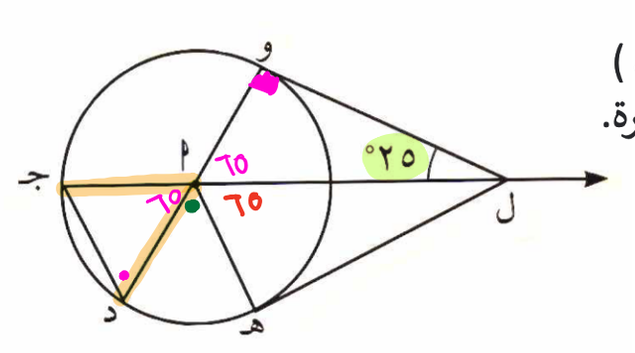
جـ د = جـ أ = ٢٠ (نصف قطر)

المحيط = ٢١ + ٢١ + ٢٠ + ٢٠ = ٨٢ سم

(جـ) نطبق فيثاغورث

ب جـ = $\sqrt{(٢١)^2 + (٢٠)^2}$ = ٢٩

مثال: في الشكل المقابل ، أوجد ق(م د̂ جـ) ، ق(هـ م̂ د)
إذا كانت ل و ، ل هـ تمسان الدائرة حيث ود قطر للدائرة.



الحل

∵ ل و مماس للدائرة

و م نصف قطر

∴ ق (و̂) = ٩٠°

ق (و م̂ ل) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٥°) = ٦٥°

ق (جـ م̂ د) = ق (و م̂ ل) = ٦٥° للتقابل بالرأس

∵ المثلث م جـ د متطابق الضلعين

∴ ق (د̂) = ق (جـ̂) = (١٨٠ − ٦٥) / ٢ = ٥٧,٥°

ق (ل م̂ هـ) = ٦٥°

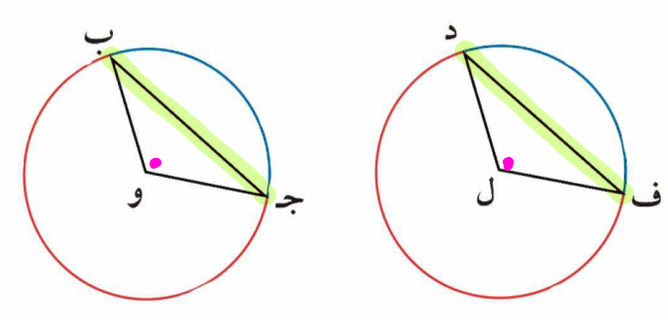
⇐ ق (هـ م̂ د) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ٥٠°

الأوتار والأقواس

نظرية(١)

في دائرة أو في دوائر متطابقة:
(١) للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.
(٢) الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.
(٣) للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.

مثال: في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان ، ب جـ ⌒ ≅ د ف ⌒ . ماذا تستنتج.



الحل

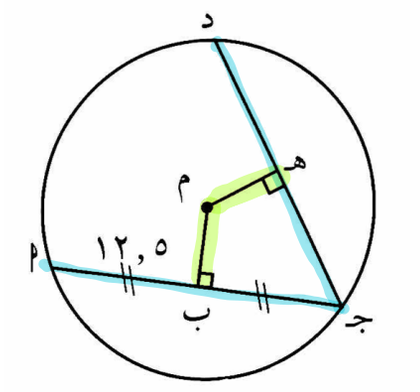
ب جـ ≅ د ف

ق (و̂) = ق (ل̂)

نظرية(٢) تساوي البعدين ← تساوي الوترين | تساوي الوترين ← تساوي البعدين

(١) الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
(٢) الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

مثال: في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ
أوجد طول جـ د . فسّر.



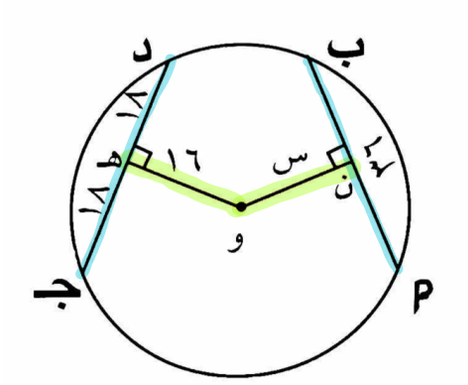
الحل

جـ أ = ١٢,٥ + ١٢,٥ = ٢٥

∵ م ب = م هـ معطى

∴ جـ د = جـ أ = ٢٥

مثال: دائرة مركزها و . أوجد قيمة س في الشكل المقابل وفسّر إجابتك.



الحل

د جـ = ١٨ + ١٨ = ٣٦

∵ ب أ = د جـ = ٣٦

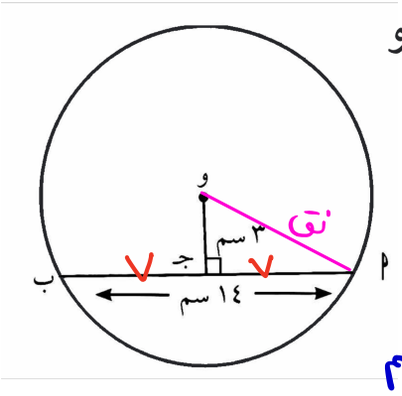
∴ و ن = و هـ = ١٦

س = ١٦

نظرية(٣) التعامد ← تساوي | التساوي ← تعامد

(١) القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.
(٢) القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًا على هذا الوتر.
(٣) العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

مثال: في الشكل المقابل ، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و



الحل

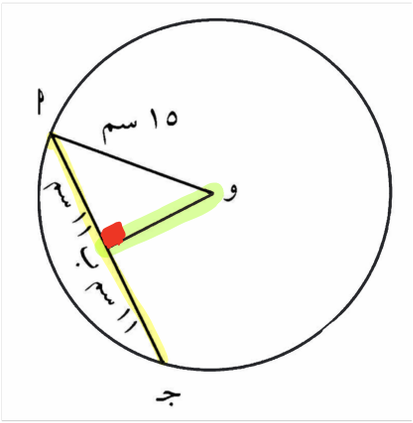
∵ $\overline{وج} \perp \overline{أب}$

∴ أج = جب = $\frac{١٤}{٢}$ = ٧ سم

نطبق فيثاغورث

نق = $\sqrt{(٧)^٢ + (٣)^٢}$ = $\sqrt{٥٨}$ سم

مثال: في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر



الحل

∵ جب = أب = ١١

∴ $\overline{وب} \perp \overline{جأ}$

⇐ المثلث وب أ قائم الزاوية في $\hat{ب}$

نطبق فيثاغورث

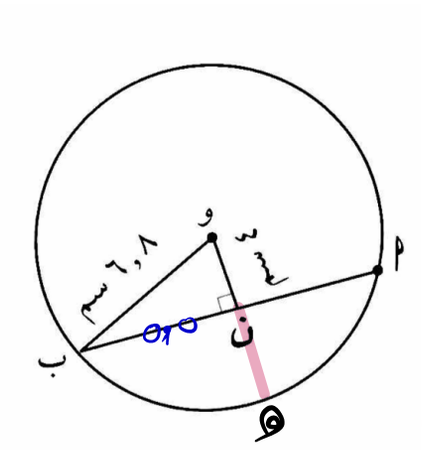
وب = $\sqrt{(١٥)^٢ - (١١)^٢}$ = ١٠,١٩ سم

مثال: استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

امتحان

(أ) طول الوتر $\overline{أب}$

(ب) المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\widehat{أب}$



الحل

(أ)

نطبق فيثاغورث

ن ب = $\sqrt{(٦,٨)^٢ - (٤)^٢}$ = ٥,٥ سم

∵ $\overline{ون} \perp \overline{أب}$

∴ أن = ن ب = ٥,٥

أب = ٥,٥ + ٥,٥ = ١١ سم

(ب)

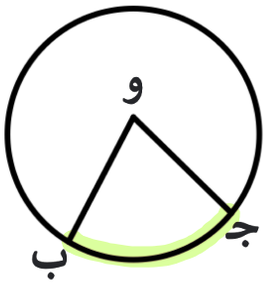
و ه = وب = ٦,٨
(نصف قطر)

ن ه = ٦,٨ − ٤

= ٢,٨ سم

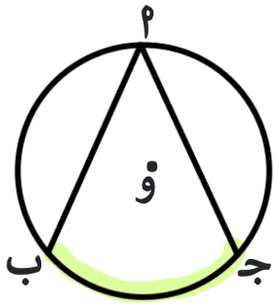
الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

زاوية مركزية



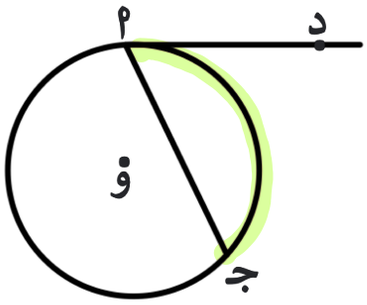
ق(جـ و̂ ب) = ق(جـ ب⌒)

زاوية محيطية



ق(جـ أ̂ ب) = ½ ق(جـ ب⌒)

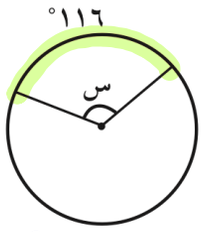
زاوية مماسية



ق(جـ أ̂ د) = ½ ق(جـ أ⌒)

مثال: أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية:

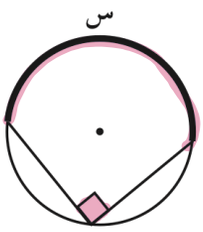
(أ)



س = ١١٦°

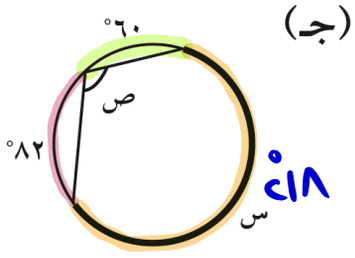
زاوية مركزية

(ب)



س = ٩٠° × ٢ = ١٨٠°

(جـ)



١٨٢°

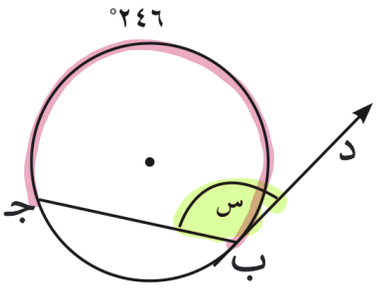
س = ٣٦٠° − (٦٠ + ٨٢)

= ١٨٢°

ص = ١٨٢° / ٢ = ١٠٩°

مثال: أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية:

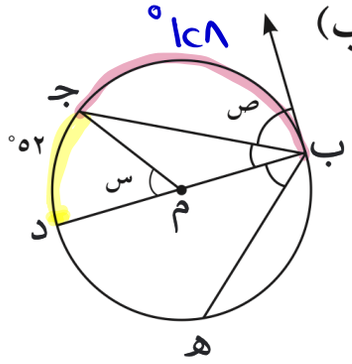
(أ)



س = ٢٤٦° / ٢ = ١٢٣°

زاوية مماسية

(ب)

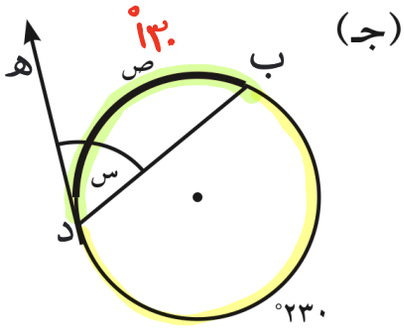


س = ٢ × ٥٢° زاوية مركزية

ق(ب جـ) = ١٨٠ − ٥٢ = ١٢٨°

ص = ١٢٨° / ٢ = ٦٤°

(جـ)



ص = ٣٦٠° − ٢٣٠°

= ١٣٠°

س = ١٣٠° / ٢ = ٦٥°

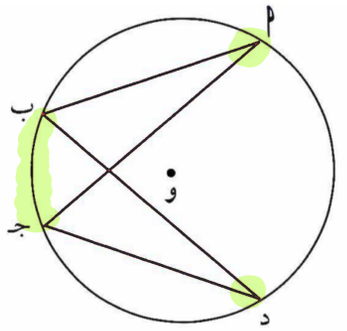
زاوية مماسية

نظرية(٣)

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.
(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

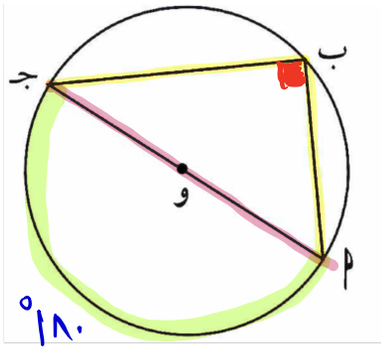
نتائج

(١) كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.



أي أن : ق ($\hat{أ}$) = ق($\hat{د}$)

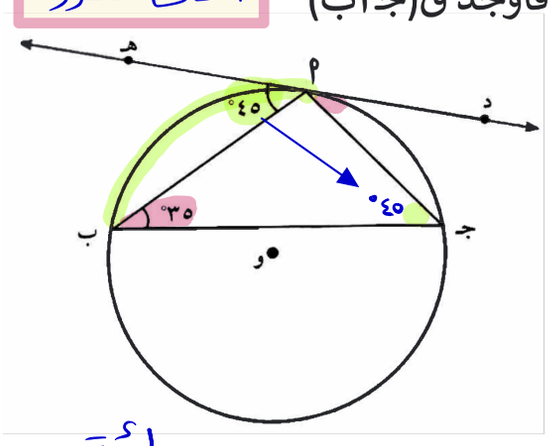
(٢) كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة



أي أن : ق ($\hat{ب}$) = ٩٠°

امتحان متكرر

مثال: في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{دهـ}$ مماسًا للدائرة عند أ فأوجد ق(جـ$\hat{أ}$ب)



الحل

ق($\hat{جـ}$) = ق($\hat{هـ أ ب}$) = ٤٥°

لأنهما تشتركان بنفس القوس $\overset{\frown}{أب}$

ق(جـ$\hat{أ}$ب) = ١٨٠ − (٤٥ + ٣٥)

= ١٠٠°

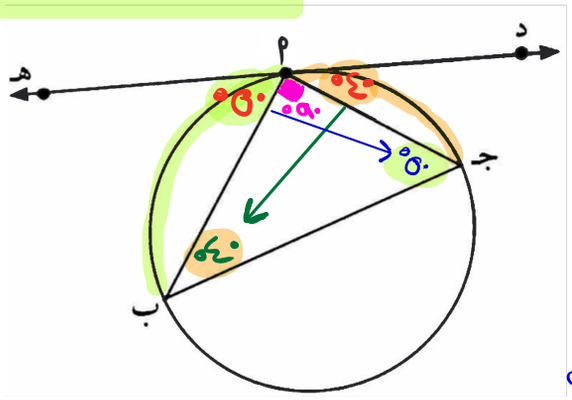
دائرة
فيها مثلث
أحد رؤوسه
يمر مماس

امتحان

مثال: في الشكل المقابل، لدينا: ق(د أ̂ جـ)= ٤٠° ، ق(هـ أ̂ ب)= ٥٠°

(أ) أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ

(ب) أثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر للدائرة.



الحل

• ق(ب̂) = ق(هـ أ̂ ب) = ٥٠°

لأنهما تشتركان بنفس القوس $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$

• ق(جـ̂) = ق(د أ̂ جـ) = ٤٠°

لأنهما تشتركان بنفس القوس $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$

ق(جـ أ̂ ب) = ١٨٠ - (٥٠ + ٤٠) = ٩٠°

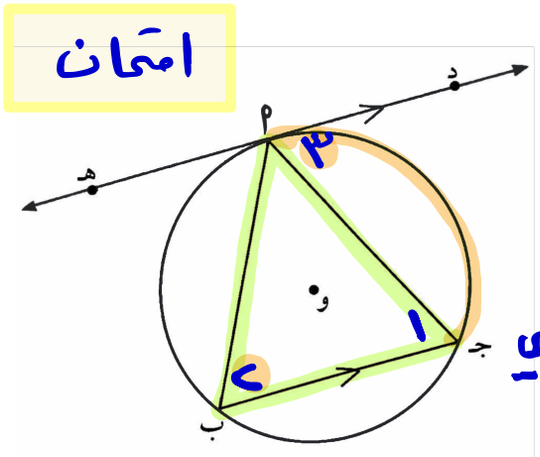
∵ ق(جـ أ̂ ب) = ٩٠ ∴ $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر للدائرة

امتحان

مثال: في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماسًا للدائرة عند النقطة أ

$\overline{\text{ب جـ}}$ وتر في الدائرة موازٍ للمماس $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$

أثبت أن المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين.



الحل

∵ ق(١̂) = ق(٣̂) للتبادل والتوازي

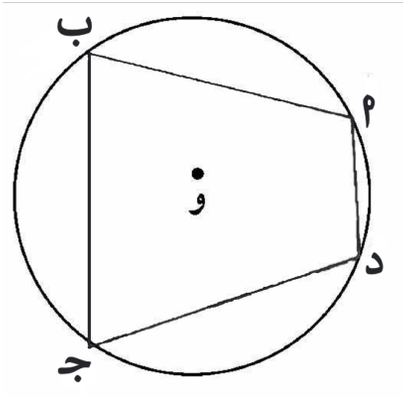
ق(٢̂) = ق(٣̂) لأنهما يشتركان بنفس القوس $\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$

∴ ق(١̂) = ق(٢̂)

⟸ المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين

نتائج

كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة) ، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.

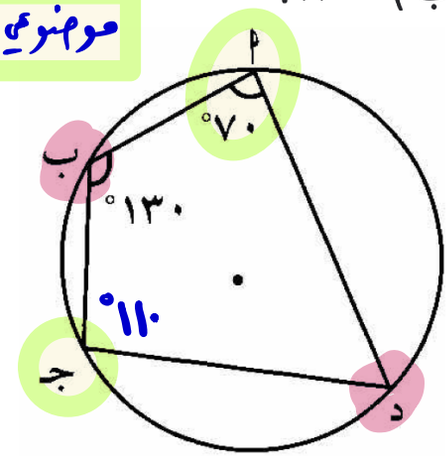


ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{جـ}$) = ١٨٠°

ق($\hat{ب}$) + ق($\hat{د}$) = ١٨٠°

مثال: أ ب جـ د رباعي دائري (محوط بدائرة). ق($\hat{أ}$) = ٧٠° ، ق($\hat{ب}$) = ١٣٠°.
أوجد ق($\hat{جـ}$) ، ق($\hat{د}$)

موضوعي



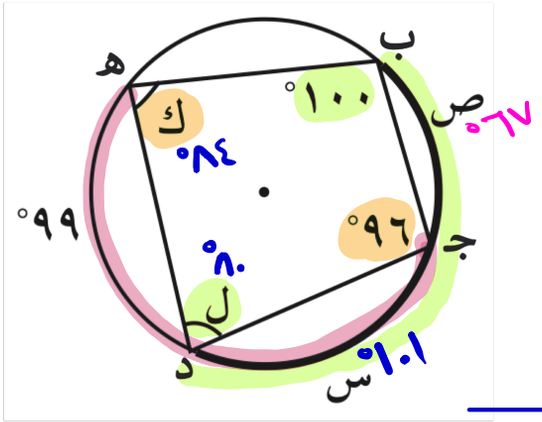
الحل

∵ أ ب جـ د رباعي دائري

ق($\hat{جـ}$) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

ق($\hat{د}$) = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

مثال: في الشكل المقابل ، أوجد قيم س ، ص ، ك ، ل.



الحل

∵ ب جـ د هـ رباعي دائري

ل = ١٨٠° − ١٠٠° = ٨٠°

ك = ١٨٠° − ٩٦° = ٨٤°

ق($\overset{\frown}{جـ هـ}$) = ق($\hat{ب}$) × ٢ = ١٠٠° × ٢ = ٢٠٠°

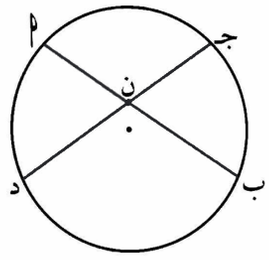
س = ٢٠٠ − ٩٩° = ١٠١°

ق($\overset{\frown}{ب د}$) = ق($\hat{هـ}$) × ٢ = ٨٤° × ٢ = ١٦٨°

ص = ١٦٨° − ١٠١° = ٦٧°

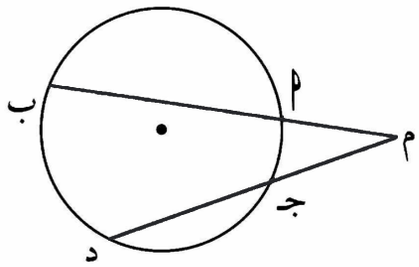
الدائرة: الأوتار المتقاطعة ، المماس

معلق



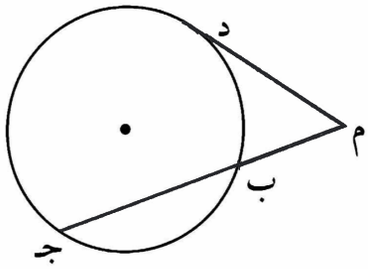
(وترين)

ن أ × ن ب = ن جـ × ن د



(قاطعين)

م أ × م ب = م جـ × م د.

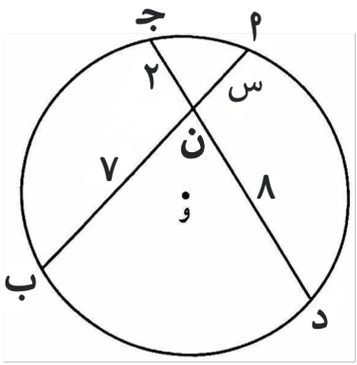


(مماس وقاطع)

(م د)^{٢} = م ب × م جـ .

مثال: في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

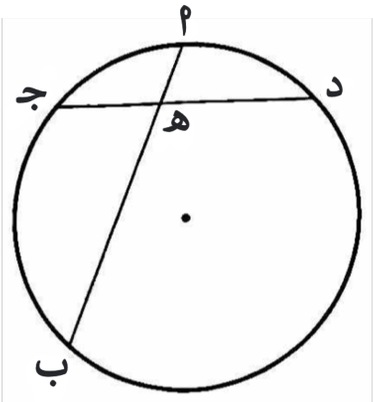
الحل



معلق

مثال: في الشكل أدناه: أ هـ =١٩، هـ د = ٤٠ ، هـ جـ = ٣٨ أوجد هـ ب.

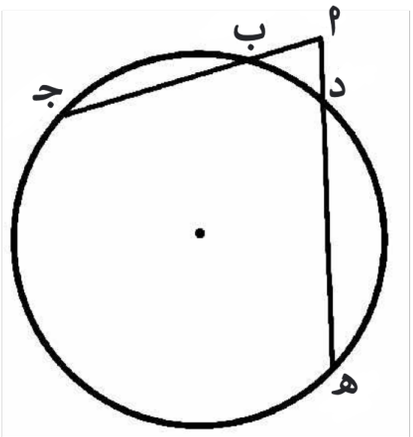
الحل



معلق

مثال: في الشكل المقابل:

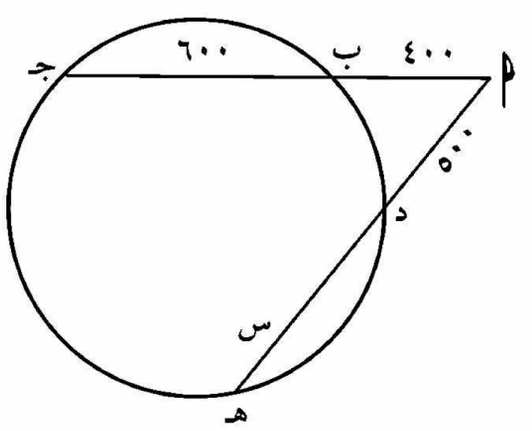
أجـ = ٢٠ ، ب جـ = ١٥ ، أهـ =٢٥ أوجد : د هـ



الحل

معلق

مثال: أوجد قيمة س.

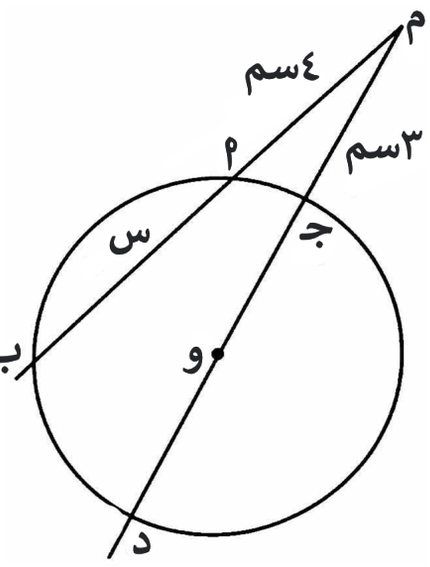


الحل

معلق

مثال: في الشكل المقابل ، دائرة مركزها و . طول نصف قطرها يساوي ٤سم

أوجد قيمة س.

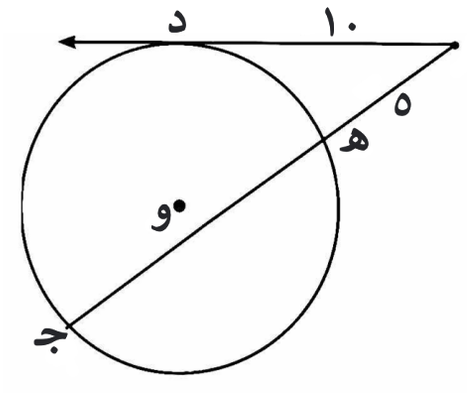


الحل

معلق

مثال: في الشكل المقابل ، $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠، م هـ = ٥ ، أوجد طول $\overline{\text{هـ جـ}}$.

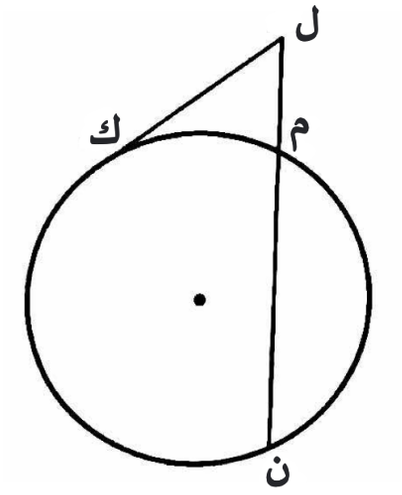
الحل



معلق

مثال: في الشكل المقابل: $\overline{\text{ل ك}}$ مماس الدائرة. ل ك = ٨ ، ل م = ٤. أوجد : م ن

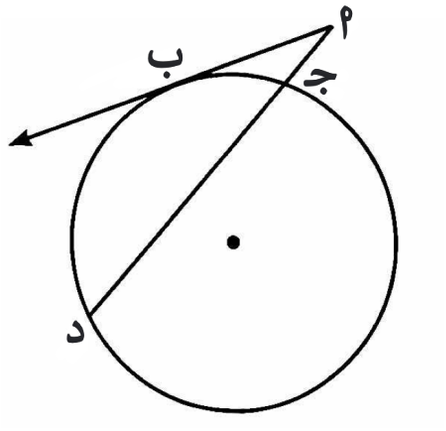
الحل



معلق

مثال: في الشكل المقابل ، $\overline{\text{أب}}$ مماس للدائرة. أب = ١٢ ، جـ د = ٣٢. أوجد أجـ

الحل



معلق

الوحدة السابعة

المصفوفات

تعريف:

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

ملاحظة : الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر

رتبة المصفوفة:

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان **رتبة المصفوفة** وتكتب م x ن

موضوعي

مثال: اكتب رتبة كل مصفوفة ممايلي:

أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ ٧- & ٣- & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

الرتبة = ٣×٣

ب = $\begin{bmatrix} ٣- & \frac{٢}{٣} & ٤- \end{bmatrix}$

الرتبة = ١×٣

جـ = $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$

الرتبة = ٤×١

مثال: اكتب رتبة كل مصفوفة ممايلي:

أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٠,٥ & ٢- \end{bmatrix}$

الرتبة = ٢×٣

ب = $\begin{bmatrix} ١٠ & ٣ & ٨- \end{bmatrix}$

الرتبة = ١×٣

جـ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٥- & ١ \\ ٩ & ٠,٦ \end{bmatrix}$

الرتبة = ٣×٢

ترميز عناصر المصفوفة :

موضوعي

مثال: في المصفوفة: ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ١ & ١٢ \\ ٣,٥ & ٢ & ٦ & ٢ \\ -٤ & ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر ممايلي:

ب٢٢ = ٦ ب١٣ = ١ ب٢٣ = ٠

ب١١ = ١٢ ب٤٣ = -٤ ب٢١ = ١

أنواع المصفوفات

المربعة	المستطيلة	الأفقية	العمودية
عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة	عدد الصفوف لايساوي عدد الأعمدة	المصفوفة تتكون من صف واحد	المصفوفة تتكون من عمود واحد

مثال: صنف كلًا من المصفوفات التالية:

أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٥ & ٠ \\ ٠ & ٤ & ٧ \\ ٣ & ٢ & ٨ \end{bmatrix}$

مصفوفة مربعة

د = $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ١,٤ \\ ١٢ & ٨ & ٥ \end{bmatrix}$

مصفوفة مستطيلة

جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & -٥ \end{bmatrix}$

مصفوفة أفقية

ب = $\begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$

مصفوفة عمودية

المصفوفات المتساوية:

امتحان

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

مثال: إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٢س - ٥ & ٤ \\ ٣ & ٣ص + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & ص + ١٨ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

الحل

∵ المصفوفتان متساويتان

٢س − ٥ = ٢٥

٢س = ٢٥ + ٥

$\frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}} = \frac{٣٠}{٢}$

$\boxed{س = ١٥}$

٣ص + ١٢ = ص + ١٨

٣ص − ص = ١٨ − ١٢

$\frac{\cancel{٢}ص}{\cancel{٢}} = \frac{٦}{٢}$

$\boxed{ص = ٣}$

مثال: إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & ٤ص - ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س + ٨ & ٥ \\ ٣ & -ص \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

الحل

∵ المصفوفتان متساويتان

س + ٨ = ٣٨

س = ٣٨ − ٨

$\boxed{س = ٣٠}$

٤ص − ١٠ = −ص

٤ص + ص = ١٠

$\frac{\cancel{٥}ص}{\cancel{٥}} = \frac{١٠}{٥}$

$\boxed{ص = ٢}$

جمع وطرح المصفوفات:

لجمع أي مصفوفتين يجب أن تكونا من الرتبة نفسها.

مثال: أوجد ناتج مايلي:

$$\begin{bmatrix} -١٢ & ٢٤ \\ -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -١ \\ -٥ & ٤ \\ ١ & -٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٥ & ٣٢ \\ -٨ & ٩ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٧ \\ -٢ & ١ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & -١٢ & ٧ \\ -٨ & -٤ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ -٣ & ١٤ \end{bmatrix}$$

مثال: إذا كانت: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -٢ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$

فأوجد: $٥\underline{أ}$ ، $٥\underline{ب} - ٤\underline{أ}$ ، $\underline{أ} + ٦\underline{ب}$

الحل

$$٥\underline{أ} = ٥ \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٥ & -٢٠ \\ ٢٥ & ٢٠ & ١٥ \end{bmatrix}$$

$$٥\underline{ب} - ٤\underline{أ} = ٥ \times \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -٢ & -١ & ٣ \end{bmatrix} - ٤ \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ١٠ \\ -١٠ & -٥ & ١٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ١٢ & -١٦ \\ ٢٠ & ١٦ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٨ & -٧ & ٦ \\ -٣٠ & -١١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ} + ٦\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} + ٦ \times \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -٢ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٦ & ١٢ \\ -١٢ & -٦ & ١٨ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٩ & ٨ \\ -٧ & -٢ & ١١ \end{bmatrix}$$

حل المعادلة المصفوفية:

امتحان

مثال: حل المعادلة التالية: $-٣\text{س} + \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ & ٨ \\ -١٩ & -١٨ & ١٠ \end{bmatrix}$

الحل

$$-٣\text{س} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ & ٨ \\ -١٩ & -١٨ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\frac{-٣\text{س}}{-٣} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{-٣} & \frac{٠}{-٣} & \frac{٩}{-٣} \\ \frac{-٢١}{-٣} & \frac{-١٥}{-٣} & \frac{٦}{-٣} \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ & -٣ \\ ٧ & ٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

امتحان

مثال: حل المعادلة: $٤\text{س} + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل

$$٤\text{س} + \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٤\text{س} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\frac{٤\text{س}}{٤} = \begin{bmatrix} \frac{٤}{٤} & \frac{-٨}{٤} \\ \frac{٨}{٤} & \frac{٠}{٤} \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات:

تكون مصفوفة الضرب معرفة إذا كان:

عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

ملاحظة: عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

مثال: أوجد ناتج الضرب: $\begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$

الحل

ننسخ المصفوفة الأولى مرتين

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ٩ & ٢٩- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠\times٠ + ٣\times١- & ٥\times٠ + ٣-\times١- \\ ٠\times٤- + ٣\times٣ & ٥\times٤- + ٣-\times٣ \end{bmatrix}$$

امتحان

مثال: أوجد ناتج $\underline{أ} \times \underline{ب}$ حيث $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤- & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$, $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$

الحل

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٤- & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠\times٤ + ٣\times٢- & ٠\times٠ + ٣\times١ \\ ١-\times٤ + ٤-\times٢- & ١-\times٠ + ٤-\times١ \\ ١\times٤ + ٢\times٢- & ١\times٠ + ٢\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦- \\ ٤- & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية:

ترتبط كل مصفوفة مربعة أ بعدد حقيقي يسمى **محدد أ**

ويرمز إلى هذا العدد بالرمز |أ| ويقرأ **محدد المصفوفة أ**.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{bmatrix}$ هو أ د − ب جـ

نكتب $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{vmatrix}$ = أ د − ب جـ

ملاحظة: تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر بالمصفوفة المنفردة.

مثال: إذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢\text{س} \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

الحل

المصفوفة المنفردة ⇐ المحدد = صفر

(٥ × ٢س) − (١٠ × −٤) = ٠

١٠س − (−٤٠) = ٠

١٠س + ٤٠ = ٠

$\frac{١٠\text{س}}{١٠} = \frac{-٤٠}{١٠}$

$\boxed{\text{س} = -٤}$

مثال: أوجد النظير الضربي للمصفوفة التالية: ن = $\begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

تبديل اماكن

تغيير اشارات

الحل

دوماً

$\text{ن}^{-١} = \frac{١}{(٣ \times ٦) - (٩ \times ١)} \times \begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

$= \frac{١}{٩} \times \begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٣} & -١ \\ -\frac{١}{٩} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix}$

حل نظام من معادلتين خطيتين

الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة

معلق

استخدام قاعدة كرامر (المحددات)

مثال: حل النظام: $\begin{cases} \text{س} + \text{ص} = ٣ \\ \text{س} - \text{ص} = ٧ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

<u>الحل</u>

معلق

مثال: استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{cases}$

الحل

معلق

مثال: استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$

الحل

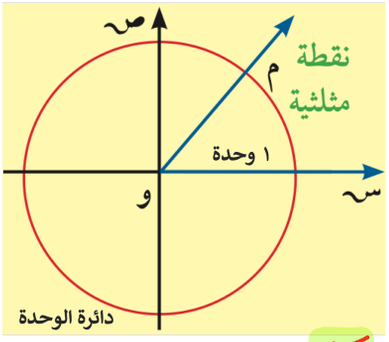
معلق

الوحدة الثامنة

حساب المثلثات

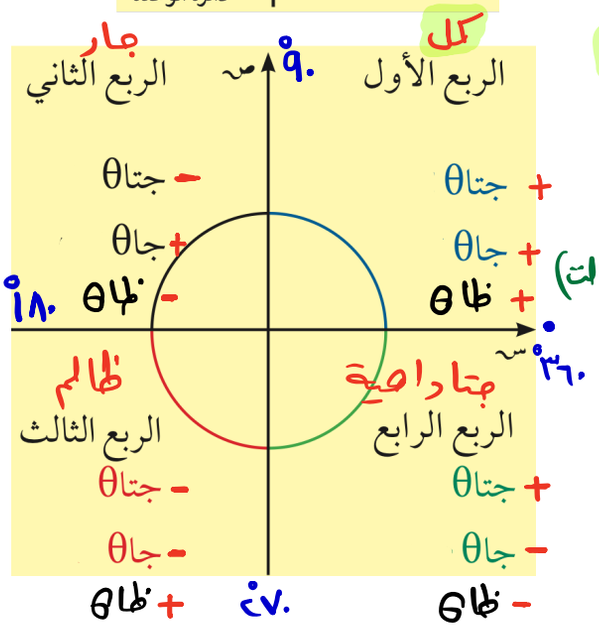
دائرة الوحدة:

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و ، وطول نصف قطرها واحد وحدة.



النقطة المثلثية:

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.



مثال: حدد إشارة جاθ ، جتاθ في كل ممايلي:

موضوعي

- $\theta = ١٣٥°$ الربع الثاني

جاθ (موجبة) ، جتاθ (سالبة)

- $\theta = \frac{٧\pi}{٦} = \frac{٧ \times ١٨٠}{٦} = ٢١٠°$ (الربع الثالث)

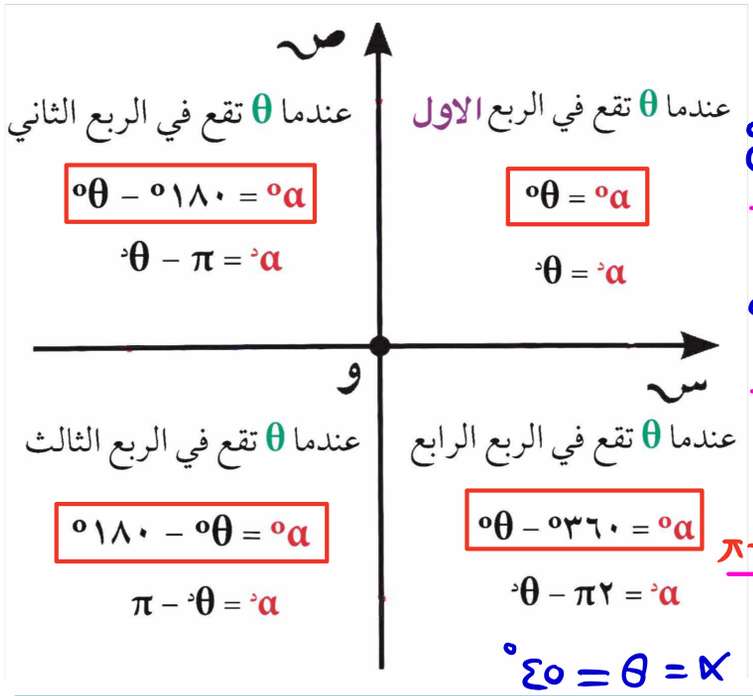
جاθ (سالبة) ، جتاθ (سالبة)

- $\theta = ٣٠٥°$ الربع الرابع

جاθ (سالبة) ، جتاθ (موجبة)

زاوية الإسناد: $\boxed{\alpha}$ موضوعي

مثال: أوجد قياس زاوية الإسناد لكل ممايلي:



- $١٢٥°$ الربع الثاني

$\alpha = ١٨٠ - \theta = ١٨٠ - ١٢٥ = ٥٥°$

- $٢١٥°$ الربع الثالث

$\alpha = \theta - ١٨٠ = ٢١٥ - ١٨٠ = ٣٥°$

- $\frac{١١\pi}{٦} = \frac{١١ \times ١٨٠}{٦} = ٣٣٠°$ ربع رابع

$\alpha = ٣٦٠ - \theta = ٣٦٠ - ٣٣٠ = ٣٠°$

$\frac{\pi}{٦} = \frac{\pi \times ١٨٠}{١٨٠}$

- $٤٥°$ الربع الأول

$\alpha = \theta = ٤٥°$

امتحان

مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان: جتا ٤٠° ≈ ٠,٧٦٦ فأوجد جتا ٢٢٠°

الحل

شرح: زاوية ربع ثاني ← ١٨٠ - .....
زاوية ربع ثالث ← ١٨٠ + ...
زاوية ربع رابع ← ٣٦٠ - .....

الفراغ
الكبير - الصغير

جتا ٢٢٠ = جتا(١٨٠ + ٤٠) = - جتا ٤٠ = - ٠,٧٦٦

ربع ثالث

مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد: جتا ٢٤٠°

الحل

جتا ٢٤٠ = جتا(١٨٠ + ٦٠) = - جتا ٦٠ = $-\frac{١}{٢}$

ربع ثالث

مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد: جا ٣٣٠°

الحل

جا ٣٣٠° = جا(٣٦٠ - ٣٠) = - جا ٣٠ = $-\frac{١}{٢}$

ربع رابع

مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد: ظا $\frac{٢\pi}{٣}$

$\frac{٢ \times ١٨٠}{٣} = ١٢٠$

الحل

ظا ١٢٠° = ظا(١٨٠° - ٦٠°) = - ظا ٦٠ = $-\sqrt{٣}$

ظا $\frac{٢\pi}{٣}$ = ظا(π - $\frac{١}{٣}\pi$) = - ظا $\frac{١}{٣}\pi$ = $-\sqrt{٣}$

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

قوانين السالب

قانون: تختفي

جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(−θ) = −ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

قوانين π

قانون:

جتا(π − θ) = −جتاθ π تحافظ

جا(π − θ) = جاθ

وبالتالي ظا(π − θ) = −ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

قانون:

جتا(π + θ) = −جتاθ

جا(π + θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(π + θ) = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

قوانين $\frac{\pi}{2}$

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = جتاθ $\frac{\pi}{2}$ تحول

جتا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = جاθ جا ← جتا

ظا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = ظتاθ جتا ← جا

ظا ← ظتا

شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = −جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = −ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

www.smartmindkw.com - www.spediaapp.com
Tel: +9651881880 – SM: @smartmindkw @spediaapp

مثال: أكمل إذا كان:

موضوعي

(أ) جام = ٠,٣ فإن جا(– م) = ... – جام = – ٠,٣

(ب) جتال = ٠,٣٨ فإن جتا(– ل) = ... جتال = ٠,٣٨

(جـ) ظاس = ٣,١٤ فإن ظا(– س) = ... – ظاس = – ٣,١٤

(د) جتا(– ص) = $\frac{١}{٤}$ فإن جتاص = ... $\frac{١}{٤}$

مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان: ظاθ = $\frac{٣}{٥}$، أوجد ظا (π – θ)

الحل

ظا (π – θ) = – ظاθ = – $\frac{٣}{٥}$

مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان: جتاس = $\frac{٤}{٥}$، فأوجد جتا (π – س)

الحل

جتا (π – س) = – جتاس = – $\frac{٤}{٥}$

مثال: بسّط التعبير التالي لأبسط صورة:

امتحان

جتا (π – θ) – جتا (–θ) + جا (π + θ) + جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

الحل

= – جتاθ – جتاθ + – جاθ + جاθ

= – جتاθ – جتاθ – جاθ + جاθ

= – ٢ جتاθ

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س).

الحل:

= جاس + جتاس + −جاس + جتاس

$\frac{\pi}{2}$ تعكس ٩٠ π تحافظ ١٨٠

= ~~جاس~~ + جتاس − ~~جاس~~ + جتاس

= ٢ جتاس

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = −θ + ٢ك π (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

مثال: حل المعادلة: جتاس = $\frac{١}{٢}$

الحل

معلق

مثال: حل المعادلة: ٢ جتاس − $\sqrt{٣}$ = ٠

الحل

معلق

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π ، (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

مثال: حل المعادلة: ٢ جاس = $\sqrt{٢}$

الحل

معلق

مثال: حل المعادلة: ٢ جاس − ١ = ٠

الحل

معلق

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك $\in$ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

مثال: حل المعادلة: **ظاس = $\sqrt{٣}$**

<u>الحل</u>

معلق

مثال: حل المعادلة: $\sqrt{٣}$ **ظاس = ١**

<u>الحل</u>

معلق

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

المتطابقات المثلثية الأساسية

$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

$\text{ظتا}\theta = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ او $\text{ظتا}\theta = \frac{١}{\text{ظا}\theta}$ حيث المقام $\neq ٠$

$\text{قا}\theta = \frac{١}{\text{جتا}\theta}$

$\text{قتا}\theta = \frac{١}{\text{جا}\theta}$

سؤال امتحان أكيد

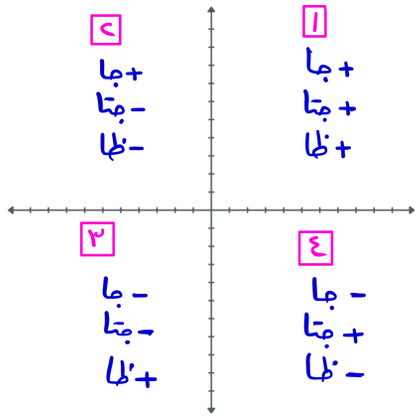
متطابقات فيثاغورث

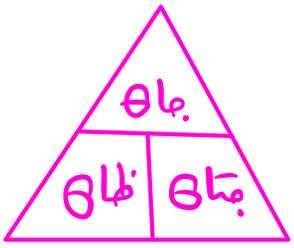
- $\text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta = ١$
- $١ + \text{ظا}^٢\theta = \text{قا}^٢\theta$
- $١ + \text{ظتا}^٢\theta = \text{قتا}^٢\theta$

مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان $\text{جا}\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ ، ظاθ

الحل

- $\text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta = ١$
- الزاوية تقع في الربع الأول
- $\text{جتا}\theta = +\sqrt{١ - (\frac{٣}{٥})^٢} = \frac{٤}{٥}$
- $\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\frac{٣}{٥}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٣}{٤}$





مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جتا θ = ٥/١٣ ، جا θ > ٠ فأوجد جا θ ، ظا θ

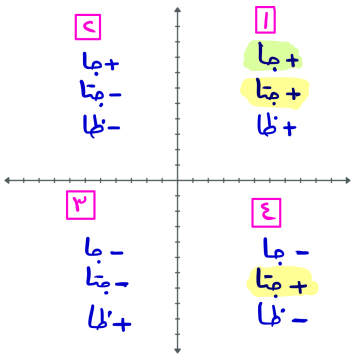
الحل

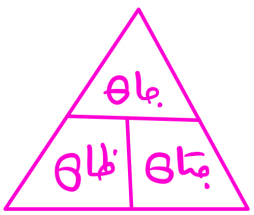
- جا² θ + جتا² θ = ١

- الزاوية تقع في الربع الأول

- جا θ = + √(١ − (٥/١٣)²) = ١٢/١٣

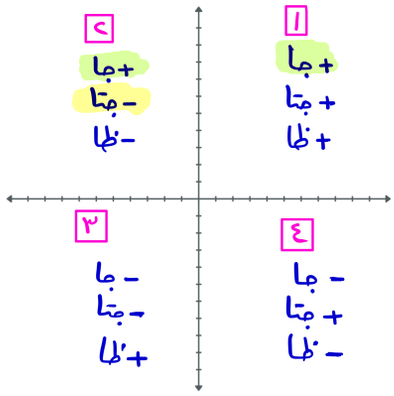
- ظا θ = جا θ / جتا θ = (١٢/١٣) / (٥/١٣) = ١٢/٥



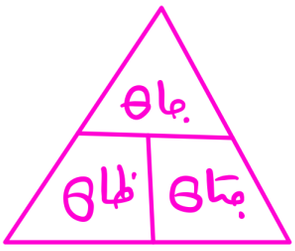


مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٧}$ ، جتاθ < ٠ فأوجد جتاθ ، ظتاθ

الحل

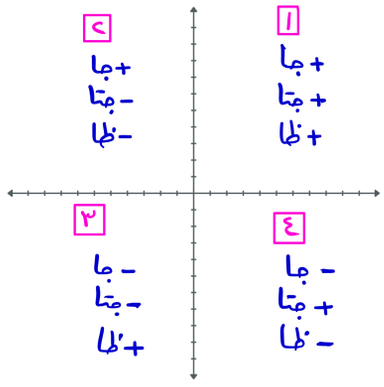


- جا^{2}θ + جتا^{2}θ = ١
- الزاوية تقع في الربع الثاني
- جتاθ = $-\sqrt{١-(\frac{٣}{٧})^2}$ = $-\frac{\sqrt{٤٠}}{٧}$
- ظتاθ = $\frac{\text{جتاθ}}{\text{جاθ}}$ = $\frac{-\frac{\sqrt{٤٠}}{٧}}{\frac{٣}{٧}}$ = $-\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$



مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان ظاθ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جاθ > ٠ فأوجد جاθ ، جتاθ

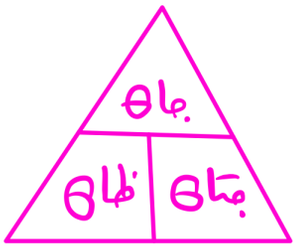
الحل



- قا^{2}θ = ١ + ظا^{2}θ
- الزاوية تقع في الربع الأول
- قاθ = $+\sqrt{١+(\frac{١٢}{٥})^2}$ = $\frac{١٣}{٥}$

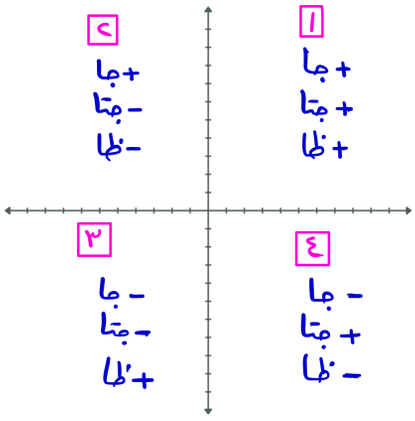
← جتاθ = $\frac{٥}{١٣}$

جاθ = جتاθ × ظاθ = $\frac{٥}{١٣} \times \frac{١٢}{٥}$ = $\frac{١٢}{١٣}$



مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان ظتا θ = $\frac{٥}{٨}$ ، جتا θ > ٠ فأوجد جا θ

الحل



ظا θ = $\frac{٨}{٥}$

• قا² θ = ١ + ظا² θ

• الزاوية تقع في الربع الأول

• قا θ = + $\sqrt{١ + (\frac{٨}{٥})^{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٨٩}}{٥}$

← جتا θ = $\frac{٥}{\sqrt{٨٩}}$

• جا θ = جتا θ × ظا θ = $\frac{٥}{\sqrt{٨٩}} \times \frac{٨}{٥}$ = $\frac{٨\sqrt{٨٩}}{٨٩}$

مثال: أثبت صحة المتطابقة: جا³ س + جاس × جتا² س = جاس

الحل

معلق

مثال: أثبت صحة المتطابقة التالية: $\frac{(\text{قا}\,\theta + ١)(\text{قا}\,\theta - ١)}{\text{جا}^{٢}\,\theta}$ = قا² θ ، حيث المقام ≠ ٠

الحل

معلق

الوحدة التاسعة الهندسة التحليلية

المسافة بين نقطتين

قانون:

المسافة بين أي نقطتين أ(س$_{١}$، ص$_{١}$)، ب(س$_{٢}$، ص$_{٢}$) تساوي $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$

مثال: أوجد المسافة بين ك(١، -٥) ، ل(٣، -٢).

الحل

معلق

مثال: أوجد المسافة بين م(-٢ ، ١) ، ن(-٧ ، ٤).

الحل

معلق

نقطة المنتصف

قانون:

إذا كانت أ(س$_{١}$، ص$_{١}$)، ب(س$_{٢}$، ص$_{٢}$)، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م(س، ص) حيث س = $\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}$ ، ص = $\frac{ص_{١} + ص_{٢}}{٢}$.

مثال: أوجد نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ حيث جـ (-١، ٥) ، د (٣، ٠)

الحل

معلق

مثال: أوجد نقطة منتصف $\overline{ك ل}$ حيث ك (-٣، -١) ، ل (٥، ٢)

الحل

معلق

تقسيم قطعة مستقيمة

تقسيم $\overline{أب}$ من الداخل من جهة أ بنسبة م : ن ، جـ (س ، ص) نقطة التقسيم حيث:

$$س = \frac{م\ س_٢ + ن\ س_١}{م + ن} \quad ، \quad ص = \frac{م\ ص_٢ + ن\ ص_١}{م + ن}$$

مثال: لتكن $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة بحيث أ(٥ ، ٤) ، ب (١٠ ، ٦) والمطلوب تقسيم $\overline{أب}$ بنسبة ٢ : ٣ من الداخل من جهة أ

الحل

معلق

مثال: إذا كان أ(٢ ، ٤) ، (٥ ، ٩) ويراد تقسيم $\overline{أب}$ من الداخل من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٣ : ٥ أوجد إحداثيات النقطة جـ

الحل

معلق

ميل الخط المستقيم

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغيير الرأسي}}{\text{التغيير الأفقي}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} \text{ ، } \text{س}_٢ - \text{س}_١ \neq ٠$$

مثال: أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(-٢ ، ١) ، ب(٥ ، ٧).

الحل

موضوعي

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{(٧) - (١)}{(٥) - (-٢)} = \frac{٦}{٧}$$

معادلة الخط المستقيم

سؤال امتحان أكيد

يوازي

يعطى معادلة

معادلة المستقيم: ص − ص$_١$ = م(س − س$_١$)

يعطى الميل جاهز

يعطى نقطتين

عمودي

مثال: اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (-٦ ، ٥).

الحل

$$\text{م} = -\frac{٢}{٣}$$

$$\text{المعادلة: ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$$

$$\text{ص} - ٥ = -\frac{٢}{٣}(\text{س} + ٦)$$

$$\text{ص} - ٥ = -\frac{٢}{٣}\text{س} - ٤$$

$$\text{ص} = -\frac{٢}{٣}\text{س} - ٤ + ٥$$

$$\text{ص} = -\frac{٢}{٣}\text{س} + ١$$

5/6/2022
بإذن الله

مثال: اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(١ ، ٣) ، ب(-٢ ، ٠)

س١ ص١ س٢ ص٢

الحل

حساب الميل

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص١} - \text{ص٢}}{\text{س١} - \text{س٢}} = \frac{(٣) - (٠)}{(١) - (-٢)} = ١$$

$$\boxed{\text{م} = ١}$$

المعادلة

$$\text{ص} - \text{ص١} = \text{م}(\text{س} - \text{س١})$$

$$\text{ص} - ٣ = ١(\text{س} - ١)$$

$$\text{ص} - ٣ = \text{س} - ١$$

$$\text{ص} = \text{س} - ١ + ٣$$

$$\text{ص} = \text{س} + ٢$$

مثال: أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين جـ (٣ ، -١) ، د(٢ ، -٢).

س١ ص١ س٢ ص٢

الحل

حساب الميل

$$\text{الميل} = \frac{\text{ص١} - \text{ص٢}}{\text{س١} - \text{س٢}} = \frac{(-١) - (-٢)}{(٣) - (٢)} = ١$$

$$\boxed{\text{م} = ١}$$

المعادلة

$$\text{ص} - \text{ص١} = \text{م}(\text{س} - \text{س١})$$

$$\text{ص} + ١ = ١(\text{س} - ٣)$$

$$\text{ص} + ١ = \text{س} - ٣$$

$$\text{ص} = \text{س} - ٣ - ١$$

$$\text{ص} = \text{س} - ٤$$

مثال: إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س +١، فأوجد:
معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢ ، -٣).

س١ ص١

الحل

حساب الميل

ص = ٢س + ١

الميل = ٢

م = الميل = ٢

المعادلة

ص - ص١ = م (س - س١)

ص + ٣ = ٢ (س - ٢)

ص + ٣ = ٢س - ٤

ص = ٢س - ٤ - ٣

ص = ٢س - ٧

مثال: إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س +٣ = ٠ ، فأوجد:
معادلة المستقيم ز العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١ ، ٤).

س١ ص١

الحل

حساب الميل

٣ص + س + ٣ = ٠

$\frac{٣ص}{٣} = \frac{-١}{٣}س - \frac{٣}{٣}$

ص = $-\frac{١}{٣}$س - ١

الميل = $-\frac{١}{٣}$

م = $\frac{-١}{الميل} = \frac{-١}{-\frac{١}{٣}} = ٣$

المعادلة

ص - ص١ = م (س - س١)

ص - ٤ = ٣ (س - ١)

ص - ٤ = ٣س - ٣

ص = ٣س - ٣ + ٤

ص = ٣س + ١

البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: أ س + ب ص + جـ = ٠، فإن البعد ف بين النقطة د (س ١، ص ١) والمستقيم ل تعطى بالصيغة: ف = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$. حفظ

مثال: أوجد البعد بين المستقيم ل: ص= -س +٣ والنقطة د(٢ ، ٥).

س١ ص١

الحل

-س - ص + ٣ = ٠

أ = -١ ، ب = -١ ، جـ = ٣

س١ = ٢ ، ص١ = ٥

$ف = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} = \frac{|-١ \times ٢ + -١ \times ٥ + ٣|}{\sqrt{(-١)^٢ + (-١)^٢}} = ٢\sqrt{٢}$

وحدة طول

مثال: أوجد البعد من النقطة د(-٤ ، -٣) إلى المستقيم ل: ٢ص = ٣س -٧

س١ ص١

الحل

ملاحظة

البعد = طول العمود

٣س - ٢ص - ٧ = ٠

أ = ٣ ، ب = -٢ ، جـ = -٧

س١ = -٤ ، ص١ = -٣

$ف = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} = \frac{|٣ \times -٤ + -٢ \times -٣ + -٧|}{\sqrt{(٣)^٢ + (-٢)^٢}} = \sqrt{١٣}$

وحدة طول

معادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة: $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

مثال: أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$

موضوعي

عكس الإشارة

المركز = (-٢ ، ٣)

نق = $\sqrt{٩}$ = ٣

مثال: أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(س - ٦)^٢ + ص^٢ = ٢٥$

الحل

المركز = (+٦ ، ٠)

نق = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

مثال: أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $س^٢ + ص^٢ - ١٦ = ٠$

الحل

$س^٢ + ص^٢ = ١٦$

المركز = (٠ ، ٠)

نق = $\sqrt{١٦}$ = ٤

مثال: أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، -٢) وطول نصف قطرها ٧ وحدات.

د هـ

الحل

د = ٣ هـ = -٢ نق = ٧

المعادلة: $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

$(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = (٧)^٢$

$(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٤٩$

مثال: أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦سم.

الحل

نق = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

(٠ ، ٠)

د = ٠

هـ = ٠

نق = ٣

المعادلة: $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

$(س - ٠)^٢ + (ص - ٠)^٢ = (٣)^٢$

$س^٢ + ص^٢ = ٩$

ملاحظة

الدائرة تمس محور الصادات	الدائرة تمس محور السينات
نق = |د|	نق = |هـ|

مثال: أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (-٤ ، -٥) وتمس محور السينات.

د هـ

الحل

د = -٤ هـ = -٥ نق = |هـ| = |-٥| = ٥

المعادلة: $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

$(س + ٤)^2 + (ص + ٥)^2 = (٥)^2$

$(س + ٤)^2 + (ص + ٥)^2 = ٢٥$

مثال: أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث أ(-٣ ، ٦) ، ب(١ ، -٢).

س١ ص١ س٢ ص٢

الحل

$د = \frac{س١ + س٢}{٢} = \frac{(-٣) + (١)}{٢} = -١$

$هـ = \frac{ص١ + ص٢}{٢} = \frac{(٦) + (-٢)}{٢} = ٢$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{(س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2}$

$= \frac{١}{٢}\sqrt{(-٣ - ١)^2 + (٦ + ٢)^2} = ٢\sqrt{٥}$

المعادلة: $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

$(س + ١)^2 + (ص - ٢)^2 = (٢\sqrt{٥})^2$

$(س + ١)^2 + (ص - ٢)^2 = ٢٠$

الصورة العامة لمعادلة الدائرة:

$$س^{٢} + ص^{٢} + ل\,س + ك\,ص + ب = ٠ \quad ، \text{ حيث ل، ك، ب ثوابت}$$

ويمكن إيجاد مركزها وحساب طول نصف قطرها من خلال:

$$\text{مركزها } \left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right)$$

$$\text{طول نصف قطرها } نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب} \quad . \quad \text{حيث } ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب > ٠$$

مثال: عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: **س^{٢} + ص^{٢} -٢س +٣ص -٤ = ٠**

<u>الحل</u>

مثال: عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: **٢س^{٢}+ ٢ص^{٢}-١٢س -٤ص -٣٠ = ٠**

<u>الحل</u>

معادلة مماس الدائرة

مثال: أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:

(س - ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٥ عند نقطة التماس **أ**(٣ ، ١).

الحل

الانحراف المعياري

معلق

$$\text{التباين} = ع^{٢} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_{ر} - \overline{س})^{٢}}{ن}$$

$$\text{ومنه الانحراف المعياري} = ع = \sqrt{ع^{٢}}$$

مثال: أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات : ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٥ ، ٣ ، ٧ ، ٢

الحل

معلق

مثال: إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو ع = ٦ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٥٤٠ ، فما عدد قيم هذه البيانات؟

الحل

معلق

مثال: إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو ع = ٤ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٤٨٠ ، فما عدد قيم هذه البيانات؟

الحل

معلق

طرق العد

مثال: تبدأ لوحات السيارات في إحدى المدن بحرفين من الحروف الأبجدية يتبعهما ثلاثة أرقام كم عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها؟ افترض أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات التراخيص.

الحل

معلق

مثال: استخدم معطيات المثال السابق، ما هو عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها إذا كان رقم الآحاد فردي؟

الحل

معلق

مثال: ما عدد الكلمات التي يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية وذلك في حال عدم تكرار أي منها؟

الحل

معلق

مثال: ما عدد الأعداد التي يمكن أن تتشكل من ٤ أرقام من أرقام النظام العشري بدون الصفر وذلك في حال عدم تكرار أي رقم؟

الحل

معلق

مثال: أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

(أ) $^{٥}ل_{٣}$

معلق

(ب) $^{١٠}ل_{٤}$

(جـ) $^{١١}ل_{٣}$

(د) $^{ن}ل_{٤}$

مثال: أوجد قيمة كل توافيق بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

(أ) $^{٧}ق_{٣}$

(ب) $^{١٠}ق_{٤}$

معلق

(جـ) $\binom{١٢}{٩}$

مثال: يوجد ثمانية متسابقين في سباق ١٠٠م جري. ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟
افترض عدم وجود تعادل بين أي متسابقين. علمًا بأن المتسابقين وصل كلا منهم إلى خط النهاية.

الحل

معلق

مثال: افترض أن ٣١ عضوًا من جمعية الرياضيات في مدرستك يريدون اختيار أربعة أشخاص لأربعة مناصب: رئيس ، نائب رئيس ، أمين السر ، أمين الصندوق.
حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

الحل

معلق

مثال: ما عدد اللجان المكونة من شخصين والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة اشخاص؟

الحل

معلق

مثال: من أجل اختيار لوائح المرشحين للانتخابات النيابية، يجب اختيار ١٠ مرشحين من بين ٥١ مرشحًا. ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن تكوينها؟

الحل

معلق

الاحتمال المشروط

في كل تجربة عشوائية، نهتم أولًا بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى **فضاء العينة ف** كل حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث أ هو:

$$\text{ل(الحدث أ)} = \frac{\text{عدد نواتج الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}} \quad \text{أي أن: ل(أ)} = \frac{\text{ن(أ)}}{\text{ن(ف)}}$$

مثال: اشترى ناصر علبة حلوى تحتوي على ١٢ قطعة بينها ٤ قطع بالشوكولاتة. يريد ناصر أخذ قطعتين من العلبة معًا عشوائيًا. فما احتمال أن يختار قطعتين بالشوكولاتة؟

الحل

معلق

قاعدة الاحتمال المشروط:

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ يسمى بالاحتمال المشروط (الشرطي)

قاعدة الاحتمال المشروط: إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ فإن:

$$ل(ب / أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$$ **حيث: ل(أ) ≠ ٠**

مثال: رمى جاسم حجر نرد منتظم ولاحظ الوجه العلوي له.
نسمي الحدث ب: الحصول على عدد أكبر من أو يساوي ٥ ، الحدث أ الحصول على عدد فردي
احسب ل(ب/أ) (احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥ بشرط أن يكون عددًا فرديًا)
الحل

معلق

العمليات على الأحداث واحتمالاتها

معلق

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين

$$ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$$

$$ل(أ \cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cup ب)$$

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث

$$ل(\overline{أ}) = ١ - ل(أ)$$

$$ل(\overline{ب}) = ١ - ل(ب)$$

$$ل(\overline{أ \cup ب}) = ١ - ل(أ \cup ب)$$

$$ل(\overline{أ \cap ب}) = ١ - ل(أ \cap ب)$$

قاعدة الاحتمال المشروط

$$ل(أ / ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$$

حيث : المقام $\neq ٠$

$$ل(ب / أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$$

إذا كان أ ، ب حدثان

متنافيان ⟵ $ل(أ \cap ب) =$ صفر

مستقلان ⟵ $ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$

مثال: إذا كان أ ، ب حدثان في فضاء العينة وكان ل(أ)= ٠,٣ ، ل(ب)= ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب)= ٠,٦
أوجد كلًا من: (أ) ل(أ ∩ ب) (ب) ل($\overline{ب}$) (جـ) ل(أ /ب)

الحل

معلق

مثال: إذا كان أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان ل(أ)= ٠,٧ ، ل(ب)=٠,٤ ، ل (أ ∩ ب)= ٠,٤
أوجد كلًا من: (أ) ل(أ ∪ ب) (ب) ل($\overline{أ}$) (جـ) ل(ب /أ)

الحل

معلق

مثال: في فضاء عينة ف لدينا حدثان أ ، ب متنافيان حيث ل(أ)= ٠,٤ ، ل(ب)= ٠,٥

(أ) احسب ل(أ ∪ ب) (ب) احسب ل($\overline{\text{أ ∪ ب}}$)

<u>الحل</u>

معلق

مثال: في فضاء عينة ف لدينا حدثان أ ، ب مستقلان حيث ل(أ)=٠,٦ ، ل(ب)=٠,٤

(أ) احسب ل(أ ∩ ب) (ب) احسب ل(أ ∪ ب) (جـ) ل($\overline{\text{أ ∩ ب}}$)

<u>الحل</u>

معلق

مثال: إذا كان أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان ل($\overline{أ}$)= ٠,٢ ، ل(أ ∪ ب)=٠,٩ ، ل (أ ∩ ب)= ٠,٤

أوجد: ل($\overline{ب}$) ، ل($\overline{أ ∩ ب}$)

الحل

معلق

مثال: في تجربة عشوائية أ ، ب حدثان حيث ل(أ)= ٠,٣ ، ل($\overline{ب}$)= ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب)= ٠,٢

أوجد احتمال كل من الأحداث التالية: (أ) ل(ب/ أ) (ب) ل(أ / ب) (جـ) ل(أ ∪ ب)

الحل

معلق