

الرياضيات

الصف الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الأول

"لا تبحث عن الحل الأسرع ... بل عن الفهم الذي لا يُنسى"

للحصول على المذكرة المحولة اشترك في قناتي اليوتيوب والتليجرام
وسيصلك كل ما هو جديد



اضغط هنا

للاضمام لجروب التليجرام

YouTube

اضغط هنا

للاشتراك في قناة اليوتيوب



HOSAMBAYOUMI195



رياضيات



إعداد: أ. حسام بيومي

أولاً : البنود المقاليةالسؤال الأول:

(a) أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

الحل:

بالتعويض المباشر عن $x = -2$ نحصل على $\frac{0}{0}$ (صيغة غير معينة)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

; $x \neq -2$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)}{(x-2)}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow -2} (x-2)} = \frac{-2+1}{-4}$$

$$= \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

نهاية المقام (شرط المقام)

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x-2) = -2-2 = -4 \neq 0$$

(b) لتكن الدالة $f : f(x) = |x-3| + 2x$ أوجد إن أمكن: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

الحل:

النهاية من جهة اليمين

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x-3) = 3(3)-3 = 6$$

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+3) = 3+3 = 6$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

فك المطلق

$$f(x) = \begin{cases} +(x-3) + 2x & : x \geq 3 \\ -(x-3) + 2x & : x < 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-3+2x & : x \geq 3 \\ -x+3+2x & : x < 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x-3 & : x \geq 3 \text{ يمين} \\ x+3 & : x < 3 \text{ يسار} \end{cases}$$



لتكن: $f(x) = 2x^2 - 3$, $g(x) = \sqrt{x+4}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$ الحل:

أولا ندرس اتصال الدالة f عند $x = -2$

الدالة f كثيرة حدود متصلة على R

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = -2$

بالتعويض عن $x = -2$

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 5$$

ثانيا ندرس اتصال الدالة g عند $x = 5$

بفرض أن $h(x) = x + 4$

(a) الدالة h متصلة عند $x = 5$

$$h(5) = 5 + 4 = 9 > 0 \quad (b)$$

$\therefore$ الدالة g متصلة عند $x = 5$

من أولا وثانيا نجد أن الدالة $g \circ f$ متصلة عند $x = -2$

ثانياً: البنود الموضوعية

ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = 2$$

(a)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = 0$$

(a)

(b)

(a)

(b)

الدالة $f: f(x) = x^2 + |x-1|$ متصلة عند $x = 3$



أولاً : البنود المقاليةالسؤال الأول:

(a) أوجد:

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\because x \rightarrow -\infty$$

$$\therefore |x| = -x$$

نهاية ما تحت الجذر

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{9}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9}{x^2}$$

$$= 1 - 0 = 1 > 0$$

نهاية المقام

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{9}{x^2}\right)}$$

$$= \sqrt{1} = 1 \neq 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{9}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{5}{x}\right)}{|x| \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}$$

$$= \frac{x \left(3 - \frac{5}{x}\right)}{-x \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} - \frac{\left(3 - \frac{5}{x}\right)}{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}; x \neq 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(- \frac{3 - \frac{5}{x}}{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} \right)$$

$$= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3 - \frac{5}{x}}{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} \right)$$

$$= - \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{5}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = - \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x}}{1}$$

$$= \frac{3 - 0}{1}$$

$$= - \frac{3}{1} = -3$$

(b) أوجد : $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2(2 - x))$

الحل:

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x^3)$$

$$= 2(3)^2 - (3)^3$$

$$= -9$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \quad \text{أوجد:}$$

الحل: بالضرب في مرافق المقام

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

نهاية المقام

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

$$= 1 + 1 = 2 \neq 0$$

ثانيًا: البنود الموضوعية

ظلّ رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 5}{2x^4 + x^2 - 2} =$$

(a) ∞

(b) $\frac{1}{2}$

(c) 0

(d) $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17) =$$

(a) 17

(b) -17

(c) 9

(d) -9

(10) لتكن الدالة $f: \sqrt{x^2 + 7}$ ، $g(x) = x^2 - 3$ فإن: $(f \circ g)(0)$ يساوي:

(a) 4

(b) -4

(c) 1

(d) -1



أولاً : البنود المقاليةالسؤال الأول:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x}$$

(a) أوجد:

الحل:

$$\frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x} = \frac{\cos x \tan x}{3x} - \frac{2x \cos x}{3x} = \cos x \cdot \frac{\tan x}{3x} - \frac{2}{3} \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\tan x}{3x} - \frac{2}{3} \cos x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\tan x}{3x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \cos x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{3x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$= -\frac{1}{3}$$

(b) إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 5} = 3$ أوجد قيمة كل من الثابتين a, b

الحل:

$$\because 3 \neq 0$$

يجب أن تكون درجة حدوية البسط = درجة حدودية المقام (الدرجة الأولى)

$$ax^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx + 3}{2x + 5} = \frac{b}{2}$$

$$\frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6$$



ابحث اتصال الدالة $f : f(x) = x^2 + |x|$ عند $x = -1$

الحل:

بفرض أن:

$$g(x) = x^2$$

الدالة g (كثيرة حدود).

متصلة على R

الدالة g متصلة عند $x = -1$

$$h(x) = |x|$$

الدالة h (مطلق x).

متصلة على R

الدالة h متصلة عند $x = -1$

$$\therefore \text{الدالة } f : f(x) = g(x) + h(x)$$

متصلة عند $x = -1$

ثانيًا: البنود الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 + 5y + 6}{y + 2} = 5$$

(a)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 7x - 8) = \infty$$

(a)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = -2$$

(a)

(b)



أولاً : البنود المقاليةالسؤال الأول:

$$(a) \quad \text{أوجد:} \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$$

الحل:

بالتعويض المباشر عن $x=9$ نحصل على $\frac{0}{0}$ (صيغة غير معينة)

بالضرب في مرافق المقام

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}} \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(3+\sqrt{x})}{9-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(3+\sqrt{x})}{-(x-9)} \quad ; \quad x \neq 9$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} (-3 - \sqrt{x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} (-3) - \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x})$$

$$= -3 - \sqrt{9}$$

$$= -3 - 3 = -6$$

(b) ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$ حيث:

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

الحل:

$$h(x) = x + 3 \quad \text{بفرض أن:}$$

(1) الدالة h (كثيرة حدود) متصلة على R

متصلة عند $x = -1$

$$(2) \quad h(-1) = -1 + 3 = 2 > 0$$

من (1)، (2) نجد أن الدالة f متصلة عند $x = -1$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan x - 3 \sin x}{4x}$$

أوجد:

الحل:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan x}{4x} - \frac{3 \sin x}{4x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 5 \cdot \frac{\tan x}{4x} - 3 \cdot \frac{\sin x}{4x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 \cdot \frac{\tan x}{4x} - 3 \cdot \frac{\sin x}{4x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 \cdot \frac{\tan x}{4x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{\sin x}{4x} \right)$$

$$= 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{4x} - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4x}$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ثانيًا: البنود الموضوعية

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 + 1}} =$$

(a) ∞ (b) $-\infty$

(c) 3

(d) -3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-|x + 3|}{2x} =$$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) ∞ (d) $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^3 + 9x^2 + 9x}{x + 3} =$$

(a) 9

(b) 0

(c) -3

(d) -9



أولاً : البنود المقاليةالسؤال الأول:

(a) أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x + 1}$$

الحل:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\because x \rightarrow \infty$$

$$\therefore |x| = x$$

نهاية ما تحت الجذر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

$$= 2 - 0 = 2 > 0$$

نهاية الجذر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \sqrt{2} \neq 0$$

نهاية المقام

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

$$= 1 - 0 = 1 \neq 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(2 - \frac{1}{x}\right)}}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{\left(2 - \frac{1}{x}\right)}}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{\left(2 - \frac{1}{x}\right)}}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} ; x \neq 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\left(2 - \frac{1}{x}\right)}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\left(2 - \frac{1}{x}\right)}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$= \sqrt{2}$$

(b) لتكن: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4 + 2$ أوجد:

$$(1) (f \circ g)(x)$$

$$(2) (f \circ g)(0)$$

الحل:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^4 + 2) = \sqrt{x^4 + 2}$$

$$(f \circ g)(0) = \sqrt{(0)^4 + 2} = \sqrt{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$$

الحل:

بالتعويض المباشر عن $x=2$ نحصل على $\frac{0}{0}$ (صيغة غير معينة)

باستخدام القسمة التركيبية

2	-1	0	1	0	1	22
↓	-2	-4	-6	-12	-22	
	-1	-2	-3	-6	-11	0

$$\frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2} = -x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 6x - 11$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 6x - 11)}{x - 2} \quad ; \quad x \neq 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 6x - 11)$$

$$= -(2)^4 - 2(2)^3 - 3(2)^2 - 6(2) - 11$$

$$= -67$$

ثانيًا: البنود الموضوعية

ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}$$

(a)

(b)

(a)

(b)

الدالة $f: f(x) = \frac{2x+5}{x+2} - \frac{2}{x}$ متصلة عند $x = 0$

(a)

(b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - 2x + 1) = -\infty$$



أولاً : البنود المقاليةالسؤال الأول:

(a) أوجد: $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$

الحل: بالتعويض المباشر عن $x = -7$ نحصل على $\frac{0}{0}$ (صيغة غير معينة)

بتحليل البسط فرق بين مربعين

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x+4+3)(x+4-3)}{x(x+7)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x+7)(x+1)}{x(x+7)} ; x \neq -7 \\ &= \lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x+1)}{x} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -7} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow -7} x} = \frac{-7+1}{-7} \\ &= \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7} \end{aligned}$$

نهاية المقام (شروط المقام)

$$\lim_{x \rightarrow -7} x = -7 \neq 0$$

(b) أوجد: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{\cos x}$

الحل:

$$\begin{aligned} & \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x-3)}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{0-3}{1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

نهاية المقام (شروط المقام)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x &= \cos 0 \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$



لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

الحل:

بفرض أن: $g(x) = |x|$, $h(x) = x^2 - 3x + 2$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^2 - 3x + 2)$$

$$= |x^2 - 3x + 2| = f(x)$$

1- الدالة h متصلة عند $x = 0$ (كثيرة حدود)

$$h(0) = (0)^2 - 3(0) + 2 = 2 \quad \text{تعويض:}$$

2- الدالة g متصلة عند $x = 2$ (دالة مطلق x)

من (1), (2) نجد أن $(g \circ h)$ متصلة عند $x = 0$

∴ الدالة f متصلة عند $x = 0$

ثانيًا: البنود الموضوعية

ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 5 \sin^2 x}{3x^2} =$$

(a) 3

(b) 9

(c) 0

(d) ∞

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{x^2 - 4} =$$

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $-\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) $-\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x + 3}{\sqrt{9x^2 - 2x + 4}} =$$

(a) $\frac{5}{3}$

(b) $-\frac{5}{3}$

(c) $\frac{5}{9}$

(d) $-\frac{5}{9}$

