تم تحميل الملف
من موقع بداية

بداية
beadaya.com | موقع بداية التعليمي

للمزيد اكتب
في جوجل
Google



موقع بداية التعليمي كل ما يحتاجه **الطالب والمعلم**
من ملفات تعليمية، حلول الكتب، توزيع المنهج،
بوربوينت، اختبارات، ملخصات، اختبارات إلكترونية،
أوراق عمل، والكثير...

حمل التطبيق

GET IN ON Google Play

Download on the App Store

المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات

الصف الثالث المتوسط

الفصل الدراسي الثالث



قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

يوزع مجانا وللبيع

الفصل الثامن: الدوال التربيعية

٨-١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

١) استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة ص = س^{٢} + ٣ بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها.

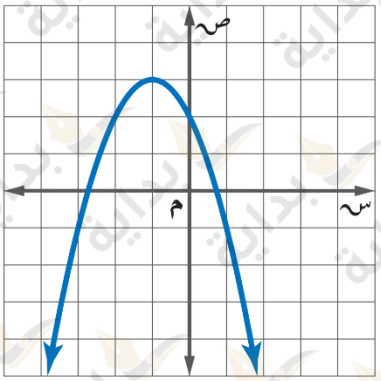
س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٧	٤	٣	٤	٧



- المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
- المدي = { ص | ص ≤ ٣ }

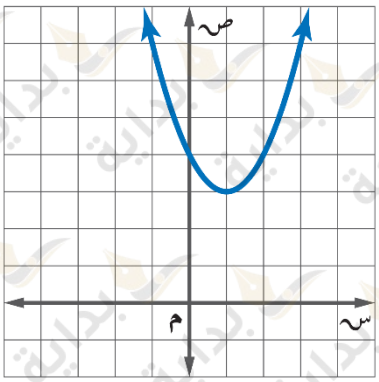
٢) أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للتمثيل البياني الآتي:

٢أ)



- الرأس = (-١ ، ٣)
- محور التماثل س = -١
- المقطع الصادي = ٢

٢ب)



- الرأس = (١ ، ٣)
- محور التماثل س = ١
- المقطع الصادي = ٤

٣) أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للدوال التالية:

أ) ص= -٣س^{٢} + ٦س + ٥

س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{-٦}{٢ \times -٣}$ = $\frac{-٦}{-٦}$ = ١

معادلة محور التماثل هي س = ١

عند س = ١

ص = -٣ + ٦ – ٥ = -٢

∴ الرأس هي (١ ، -٢)

∴ المقطع الصادي عند النقطة (٠ ، جـ)

∴ المقطع الصادي هو -٥

ب) ص = ٢س^{٢} + ٢س + ٢

س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{-٢}{٢ \times ٢} = \frac{-١}{٢}$

معادلة محور التماثل هي س = $\frac{-١}{٢}$

عند س = $\frac{-١}{٢}$

ص = ٢ × $\frac{١}{٤}$ - ٢ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ = $\frac{٣}{٢}$

∴ الرأس هي ($\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$)

∵ المقطع الصادي عند النقطة (٠ ، جـ)

∴ المقطع الصادي هو -٥

---

٤) ليكن د (س) = ٢س^{٢} - ٤س – ١

٤أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

قيمة صغري لأن أ = ٢ وهي قيمة موجبة إذن المنحني مفتوح لأعلي.

٤ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

القيمة الصغري هي -٣

س = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٤)}{٢ \times ٢} = ١$

ص = ٢ – ٤ – ١ = -٣

٤ج) حدد مجال الدالة ومداها.

- المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية
- المدي = { ص | ص ≤ ٣ }

---

٥) مثل الدوال التالية بيانياً:

أ) د(س) = -٢س^{٢} + ٢س – ١

س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{-٢}{٢- \times ٢} = \frac{-٢}{-٤} = \frac{١}{٢}$

معادلة محور التماثل هي س = $\frac{١}{٢}$

وعند س = $\frac{١}{٢}$

ص = -٢ × $\frac{١}{٤}$ + ٢ × $\frac{١}{٢}$ - ١ = - $\frac{١}{٢}$

∴ الرأس هي ($\frac{١}{٢}$ ، - $\frac{١}{٢}$)

ب) د(س) = ٣س^{٢} - ٦س + ٢

س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{-(-٦)}{٢ \times ٣} = \frac{-٢}{-٤} = ١$

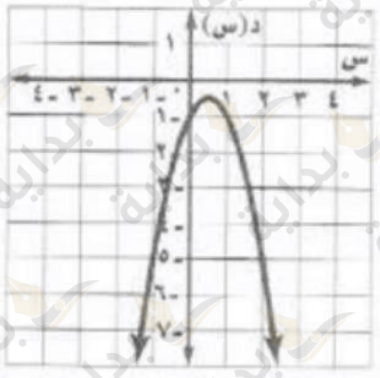
معادلة محور التماثل هي س = ١

وعند س = ١

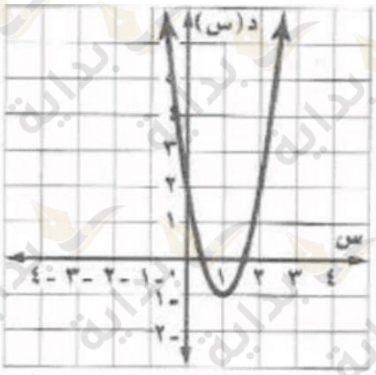
ص = ٣ – ٦ + ٢ = -١

∴ الرأس هي (١، - ١)

وبما أن أ قيمة سالبة فالتمثيل مفتوح لأسفل لذا الرأس تمثل قيمة عظمي والمقطع الصادي هو قيمة ج = -١٠



وبما أن أ قيمة موجبة فالتمثيل مفتوح لأعلي لذا الرأس تمثل قيمة صغري والمقطع الصادي هو قيمة ج = ٢



٦) رمي الرمح: يشارك علي في مسابقة رمي الرمح، ويمكن تمثيل ارتفاع الرمح (ص) بالأقدام بعد (س) ثانية، بالمعادلة ص= -١٦س^{٢} +٦٤س + ٦

أ) مثل مسار هذا الرمح بيانيا.

$س = \frac{-ب}{٢أ}$

$س = \frac{-٦٤}{٢\times-١٦} = ٢$

معادلة محور التماثل هي س = ٢

وعند س = ٢

ص = -١٦ × ٤ + ٦٤ × ٢ + ٦ = ٧٠

إذن الرأس هي (٢ ، ٧٠)

وبما أن أ قيمة سالبة فالتمثيل مفتوح لأسفل لذا الرأس تمثل قيمة عظمي

والمقطع الصادي هو قيمة ج = ٦

ب) ما الارتفاع الذي أطلق منه الرمح؟

٦ أقدام

جـ) ما أقصى ارتفاع يصله الرمح؟

٧٠ قدماً

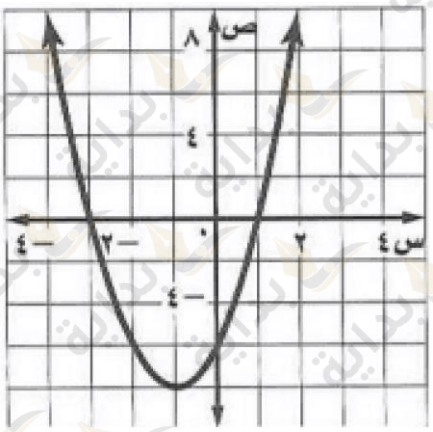
تأكد

مثال ١ : استعمل جدول القيم، لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:

١) ص = ٢س^{٢} + ٤ س – ٦

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدي = { ص | ص ≤ -٨ }

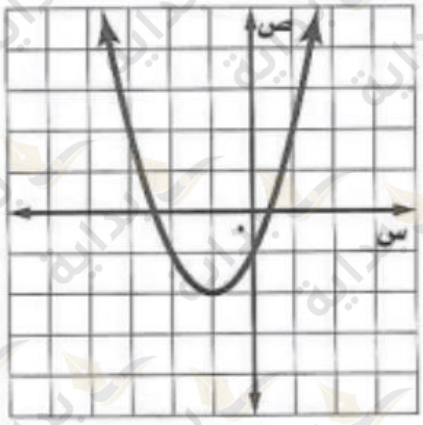


س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٠	-٦	-٨	-٦	٠	١٠

٢) ص = س^{٢} + ٢س – ١

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدي = { ص | ص ≤ -٢ }

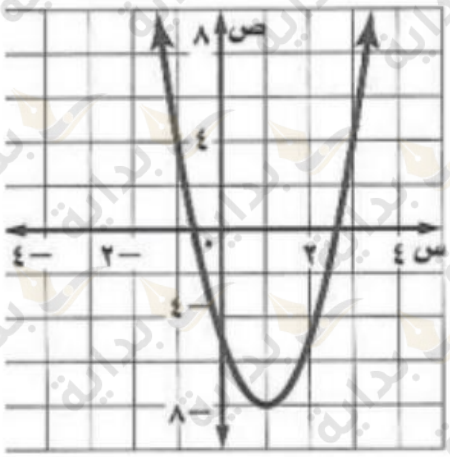


س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٢	-١	-٢	-١	٢	٧

٣) ص = ٣ س^{٢} – ٦س – ٥

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

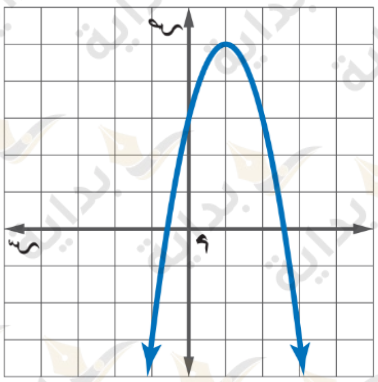
المدي = { ص | ص ≤ -٨ }



س	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	١٩	٤	-٥	-٨	-٥	٤

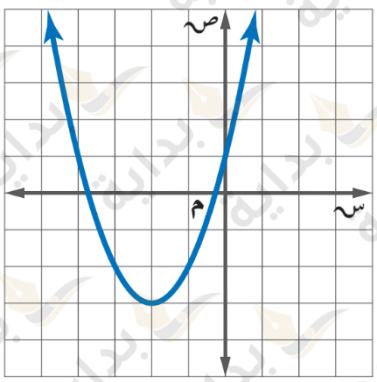
مثال ٢ : أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:

٤)



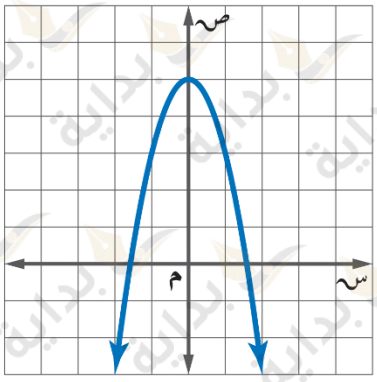
- الرأس (-١ ، ٥)
- محور التماثل س = -١
- المقطع الصادي = ٣

٥)



- الرأس (-٢ ، -٣)
- محور التماثل س = -٢
- المقطع الصادي = ١

٦)



- الرأس (٠ ، ٥)
- محور التماثل س = ٠
- المقطع الصادي = ٥

مثال ٣: أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل دالة فيما يأتي:

٧) ص = - س^{٢} + ٢س + ١

س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{-٢}{-١ \times ٢}$ = ١

معادلة محور التماثل هي س = ١

وعند س = ١

ص = ١ – ٤ + ٥ = ٢

إذن الرأس هي (١ ، ٢)

المقطع الصادي هو قيمة ج = ١

٨) ص = س^{٢} – ٤س + ٥

س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{-(-٤)}{١ \times ٢}$ = ٢

معادلة محور التماثل هي س = ٢

وعند س = ٢

ص = ٤ – ٢×٤ + ٥ = ١

إذن الرأس هي (٢ ، ١)

المقطع الصادي هو قيمة ج = ٥

٩) ص = ٤س^{٢} – ٨س + ٩

س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{٨}{٤ \times ٢}$ = ١

معادلة محور التماثل هي س = ١

وعند س = ١

ص = ٤ – ٨ + ٩ = ٥

إذن الرأس هي (١ ، ٥)

المقطع الصادي هو قيمة ج = ٩

مثال ٤: في الأسئلة ١٠ - ١٢ أجب عما يأتي:

أ) حدد فيما إذا كان للدالة قيمة صغرى أم قيمة عظمى.

ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

جـ) حدد مجال الدالة ومداها.

١٠) ص = - س^{٢} – ٢س + ٢

أ) عظمي، بما أن أ قيمة سالبة فالتمثيل مفتوح لأسفل لذا الرأس تمثل قيمة عظمي.

ب) س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{٢}{-١ \times ٢}$ = -١

معادلة محور التماثل هي س = -١

وعند س = -١

ص = -١ + ٢ + ٢ = ٣

إذن الرأس هي (-١ ، ٣)

١١) ص = -٣س^{٢} + ٦س + ٣

أ) عظمي، بما أن أ قيمة سالبة فالتمثيل مفتوح لأسفل لذا الرأس تمثل قيمة عظمي.

ب) س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{-٦}{-٣ \times ٢}$ = ١

معادلة محور التماثل هي س = ١

وعند س = ١

ص = -٣ + ٦ + ٣ = ٦

إذن الرأس هي (١ ، ٦)

١٢) ص = -٢س^{٢} + ٨س – ٦

أ) عظمي، بما أن أ قيمة سالبة فالتمثيل مفتوح لأسفل لذا الرأس تمثل قيمة عظمي.

ب) س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{-٨}{-٢ \times ٢}$ = ٢

معادلة محور التماثل هي س = ٢

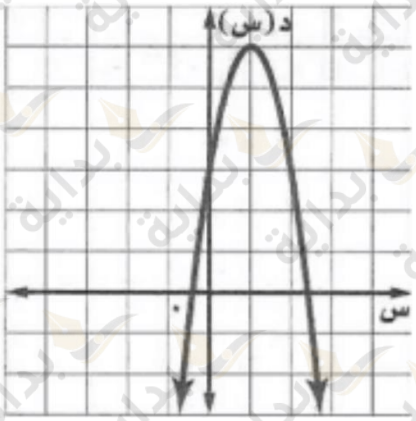
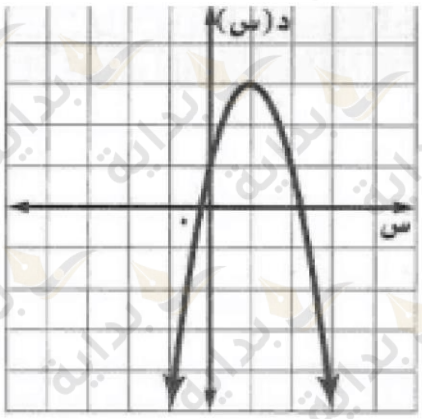
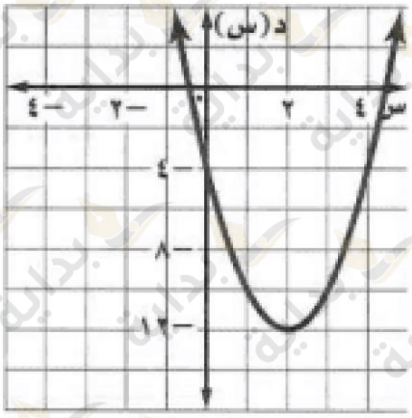
وعند س = ٢

ص = -٨ + ١٦ – ٦ = ٢

إذن الرأس هي (٢ ، ٢)

القيمة العظمي هي الإحداث الصادي للرأس وتساوي ٣	القيمة العظمي هي الإحداث الصادي للرأس وتساوي ٦	القيمة العظمي هي الإحداث الصادي للرأس وتساوي ٢
ج) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية المدي = { ص | ص ≥ ٣ }	ج) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية المدي = { ص | ص ≥ ٦ }	ج) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية المدي = { ص | ص ≥ ٢ }

مثال ٥: مثِّل كل دالة فيما يأتي بيانيا:

١٣) د(س) = - ٣س^{٢} + ٦س + ٣	١٤) د(س) = -٢س^{٢} + ٤س + ١	١٥) د(س) = ٢س^{٢} – ٨س - ٤
س = $\frac{-ب}{٢أ}$	س = $\frac{-ب}{٢أ}$	س = $\frac{-ب}{٢أ}$
س = $\frac{-٦}{٢ \times -٣}$ = ١	س = $\frac{-٤}{٢ \times -٢}$ = ١	س = $\frac{٨}{٢ \times ٢}$ = ٢
معادلة محور التماثل هي س = ١	معادلة محور التماثل هي س = ١	معادلة محور التماثل هي س = ٢
وعند س = ١	وعند س = ١	وعند س = ٢
ص = -٣ + ٦ + ٣ = ٦	ص = -٢ + ٤ + ١ = ٣	ص = ٢×٤ – ٢×٨ – ٤ = -١٢
إذن الرأس هي (١ ، ٦)	إذن الرأس هي (١ ، ٣)	إذن الرأس هي (٢ ، -١٢)
وبما أن أ قيمة سالبة فالتمثيل مفتوح لأسفل لذا الرأس تمثل قيمة عظمي.	وبما أن أ قيمة سالبة فالتمثيل مفتوح لأسفل لذا الرأس تمثل قيمة عظمي.	وبما أن أ قيمة موجبة فالتمثيل مفتوح لأعلي لذا الرأس تمثل قيمة صغري.
المقطع الصادي هو قيمة ج = ٣	المقطع الصادي هو قيمة ج = ٣	المقطع الصادي هو قيمة ج = -٤
		

مثال ٦: ١٦) كرة : يقذف ياسر كرة في الهواء، وفق المعادلة ص = -١٦س^{٢} + ١٦س + ٥ حيث تمثل (ص) ارتفاع الكرة بالأقدام بعد (س) ثانية.

أ) مثل هذه الدالة بيانياً.

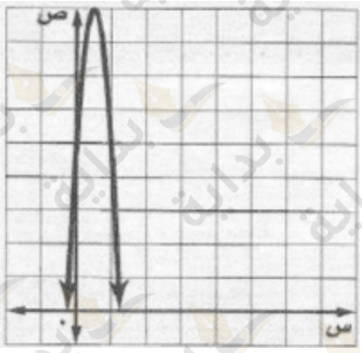
$$س = \frac{-ب}{٢أ}$$

$$س = \frac{-١٦}{٢ \times -١٦} = \frac{١}{٢}$$

$$وعند\ س = \frac{١}{٢}$$

$$ص = -١٦ \times \frac{١}{٤} + ١٦ \times \frac{١}{٢} + ٥ = -٤ + ٨ + ٥ = ٩$$

إذن الرأس هي $(\frac{١}{٢} ، ٩)$



ب) ما الارتفاع الذي قذفت منه الكرة؟ ٥ أقدام.

ج) ما أقصى ارتفاع تصله الكرة من سطح الأرض؟ ٩ أقدام.

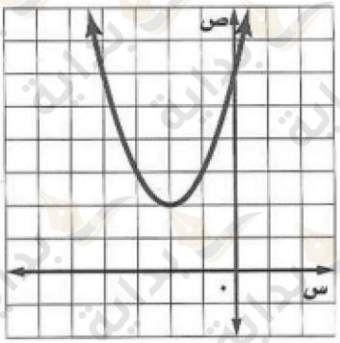
تدرب وحل المسائل

مثال ١: استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها.

١٧) ص = س^{٢} + ٤س + ٦

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

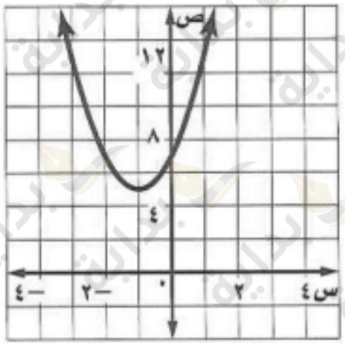
المدي = {ص | ص ≤ ٢}



س	٤-	٣-	٢-	١-	٠
ص	٦	٣	٢	٣	٦

١٨) ص = ٢س^{٢} + ٤س + ٧

المجال = ح ، المدي = {ص | ص ≤ ٥}

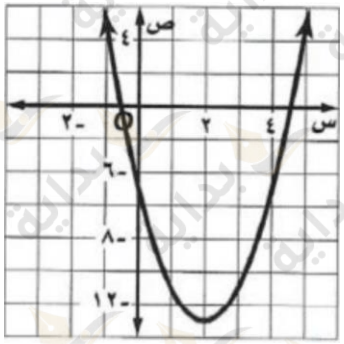


س	٣-	٢-	١-	٠	١
ص	١٣	٧	٥	٧	١٣

١٩) ص = ٢س^{٢} ــ ٨س ــ ٥

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

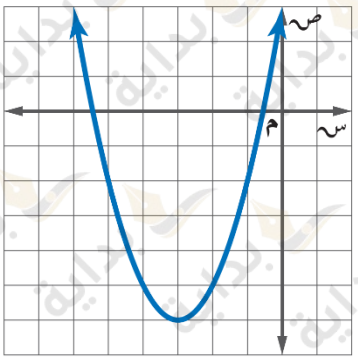
المدي = {ص | ص ≤ -١٣}



س	٤	٣	٢	١	٠
ص	٥-	١١-	١٣-	١١-	٥-

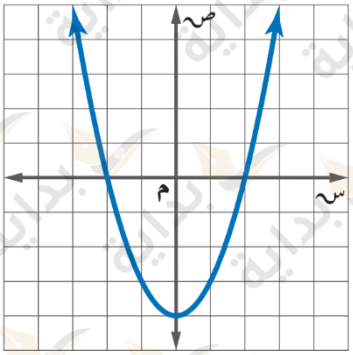
مثال ٢ : أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:

٢٠)



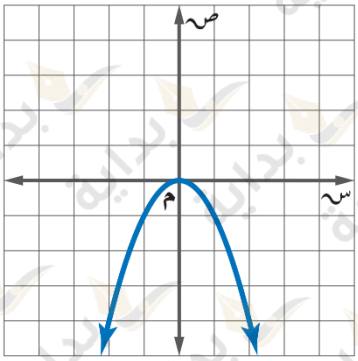
- الرأس (-٣ ، -٦)
- محور التماثل س = -٣
- المقطع الصادي = ٤

٢١)



- الرأس (٠ ، -٤)
- محور التماثل س = ٠
- المقطع الصادي = -٤

٢٢)



- الرأس (٠ ، ٠)
- محور التماثل س = ٠
- المقطع الصادي = ٠

مثال ٣ : أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل دالة فيما يلي:

٢٣) ص = س^{٢} + ٨س + ١٠

س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{-٨}{٢ \times ١}$ = -٤

معادلة محور التماثل هي س = -٤

وعند س = -٤

ص = ١٦ – ٣٢ + ١٠ = -٦

إذن الرأس هي (-٤ ، -٦)

المقطع الصادي هو قيمة ج = ١٠

٢٤) ص = ٢س^{٢} + ١٢س + ١٠

س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{-١٢}{٢ \times ٢}$ = -٣

معادلة محور التماثل هي س = -٣

وعند س = -٣

ص = ١٨ – ٣٦ + ١٠ = -٨

إذن الرأس هي (-٣ ، -٨)

المقطع الصادي هو قيمة ج = ١٠

٢٥) ص = -٣س^{٢} – ٦س + ٧

س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{٦}{٢ \times -٣}$ = -١

معادلة محور التماثل هي س = -١

وعند س = -١

ص = -٣ + ٦ + ٧ = ١٠

إذن الرأس هي (-١ ، ١٠)

المقطع الصادي هو قيمة ج = ٧

مثال ٤ : في الأسئلة ٢٦ - ٢٨، أجب عما يأتي:

أ) حدد فيما إذا كان للدالة قيمة صغرى أو قيمة عظمى.

ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

جـ) حدد مجال الدالة ومداها؟

٢٦) ص = -٢س^{٢} – ٨س + ١

أ) قيمة عظمي، لأن أ = -٢ وهي قيمة سالبة إذن المنحني مفتوح لأسفل.

ب) القيمة العظمي هي ٩

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-(-٨)}{٢ \times -٢}$ = -٢

ص = -٨ + ١٦ + ١ = ٩

ج) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدي = { ص | ص ≥ ٩ }

٢٧) ص = س^{٢} + ٤س - ٥

أ) قيمة صغري، لأن أ = ١ وهي قيمة موجبة إذن المنحني مفتوح لأعلي.

ب) القيمة الصغري هي -٩

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٤}{٢ \times ١}$ = -٢

ص = ٤ – ٨ – ٥ = -٩

ج) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدي = { ص | ص ≤ ٩ }

٢٨) ص = ٣س^{٢} + ١٨س – ٢١

أ) قيمة صغري، لأن أ = ٣ وهي قيمة موجبة إذن المنحني مفتوح لأعلي.

ب) القيمة الصغري هي -٤٨

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-١٨}{٢ \times ٣}$ = -٣

ص = ٢٧ – ٥٤ – ٢١ = -٤٨

ج) المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدي = { ص | ص ≤ -٤٨ }

مثال ٥ : مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً:

٢٩) د(س) = -٣س^{٢} + ٦س - ٤

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٦}{٢ \times -٣}$ = ١

معادلة محور التماثل هي س = ١

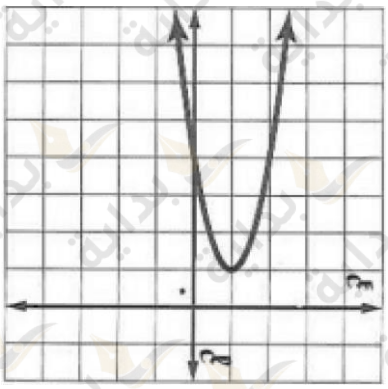
وعند س = ١

ص = -٣ + ٦ – ٤ = -١

إذن الرأس هي (١ ، -١)

وبما أن أ قيمة سالبة فالتمثيل مفتوح لأسفل لذا الرأس تمثل قيمة عظمي.

المقطع الصادي هو قيمة ج = -٤



٣٠) د(س) = -٢س^{٢} - ٤س - ٣

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-(-٤)}{٢ \times -٢}$ = -١

معادلة محور التماثل هي س = -١

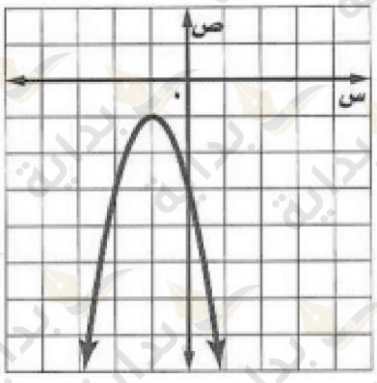
وعند س = -١

ص = -٢ + ٤ - ٣ = -١

إذن الرأس هي (-١ ، -١)

وبما أن أ قيمة سالبة فالتمثيل مفتوح لأسفل لذا الرأس تمثل قيمة عظمي.

المقطع الصادي هو قيمة ج = -٣



٣١) د(س) = ٣س^{٢} – ١٢س + ٥

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-(-١٢)}{٢ \times ٣}$ = ٢

معادلة محور التماثل هي س = ٢

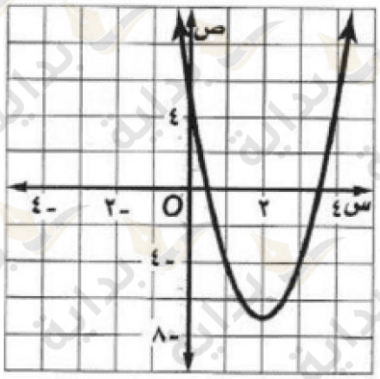
وعند س = ٢

ص = ١٢ – ٢٤ + ٥ = -٧

إذن الرأس هي (٢ ، -٧)

وبما أن أ قيمة موجبة فالتمثيل مفتوح لأعلي لذا الرأس تمثل قيمة صغري.

المقطع الصادي هو قيمة ج = ٥



٣٢) **كرة قدم:** قذف حارس المرمى الكرة من مستوى سطح الأرض إلى الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٩٠ قدما في الثانية، والدالة ع = -١٦ن^{٢} + ٩٠ن تمثل ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية.

أ) ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟

ع = -١٦ن + ٩٠ن = -١٦×١ + ٩٠×١ = ٧٤ قدماً.

ب) متى تكون الكرة على ارتفاع ١٢٦ قدماً؟

١٢٦ = -١٦ن^{٢} + ٩٠ن

١٦ن^{٢} - ٩٠ن + ١٢٦ = ٠

٨ن^{٢} - ٤٥ن + ٦٣ = ٠

$$ن = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٤٥ \pm \sqrt{(-٤٥)^{٢} - ٤ \times ٨ \times ٦٣}}{٨ \times ٢}$$

$$ن = \frac{٤٥+٩}{١٦} = ٣,٤ \approx ٣ \text{ ثوان تقريباً} \quad ، \quad ن = \frac{٤٥-٩}{١٦} = ٢,٦٣ \text{ ثانية تقريباً}$$

جـ) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ ١٢٦,٦ قدم تقريباً.

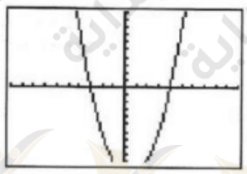
---

٣٣) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة حل المعادلات التربيعية باستعمال جداول القيم.

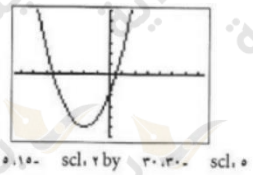
أ) **جبرياً:** حدد الدالة المرتبطة بكل معادلة فيما يأتي، ثم انسخ الجدول وأكمله.

المعادلة	الدالة المرتبطة	الأصفار
س^{٢} – س = ١٢	ص = س^{٢} – س - ١٢	-٣ ، ٤
س^{٢} + ٨س = ٩	ص = س^{٢} + ٨س - ٩	-٩ ، ١
س^{٢} = ١٤س - ٢٤	ص = س^{٢} - ١٤س + ٢٤	٢ ، ١٢
س^{٢} + ١٦س = -٢٨	ص = س^{٢} + ١٦س + ٢٨	-١٤ ، -٢

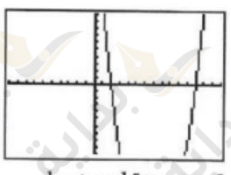
ب) **بيانياً:** مثل كل دالة مرتبطة باستعمال الحاسبة البيانية.



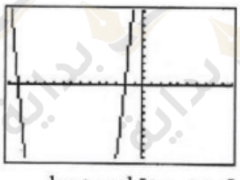
by ١ :scl [١٠ ، ١٠-]
١ :scl [١٠ ، ١٠-]
ص = س^{٢} - س -١٢



by ٢ :scl [١٥ ، ١٥-]
٥ :scl [٣٠ ، ٣٠-]
ص = س^{٢} + ٨س - ٩



by ١ :scl [١٥ ، ١٠-]
١ :scl [١٠ ، ١٠-]
ص = س^{٢} - ١٤س + ٢٤



by ١ :scl [١٠ ، ١٥-]
١ :scl [١٠ ، ١٠-]
ص = س^{٢} + ١٦س + ٢٨

جـ) تحليليا: استعمل قيم الجدول الموجودة على حاسبتك لتحديد أصفار كل دالة مرتبطة، ثم اكتب الأصفار في الجدول أعلاه.

الدالة المرتبطة	الأصفار
ص = س^{٢} – س - ١٢	٤ ، ٣-
ص = س^{٢} + ٨س - ٩	١ ، ٩-
ص = س^{٢} - ١٤س + ٢٤	١٢ ، ٢
ص = س^{٢} + ١٦س + ٢٨	٢- ، ١٤-

د) لفظياً :وضح العلاقة بين عدد حلول المعادلة وأصفار الدالة المرتبطة بها؟

عدد أصفار الدالة يساوي درجتها ويساوي عدد حلول المعادلة.

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٤) مسألة مفتوحة: اكتب دالة تربيعية معادلة محور التماثل لتمثيلها البياني هي س = - $\frac{٣}{٨}$

خطوات عملك.

ص = ٤س^{٢} + ٣س + ٥

٣٥) اكتشف الخطأ: تحاول عبير ومنى إيجاد محور التماثل للقطع المكافئ، فأيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

منى

ص = -س^{٢} – ٤س + ٦

س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{٤}{(-١)٢-}$

س = ٢

عبير

ص = -س^{٢} – ٤س + ٦

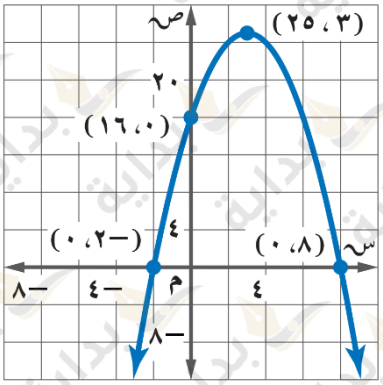
س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{-٤}{(-١)٢}$

س = -٢

إجابة عبير هي الإجابة الصحيحة لأن منى نسيت إشارة السالب مع ٤-.

٣٦) تحدٍّ: اكتب معادلة التمثيل البياني المجاور باستعمال محور التماثل وأحد المقطعين السينيين.



بما أن المنحني لأسفل إذن أ قيمة سالبة.

الرأس = (٣ ، ٢٥)، س = ٣ ، ص = ١٦

ص = -٣س^{٢} + ٨س -٢س + ١٦

ص = -٣س^{٢} + ٦س + ١٦

---

٣٧) تبرير: إذا كان رأس قطع مكافئ هو النقطة (٢ ، ٠)، واحدي نقاطه (٥ ، ٩)، فأوجد نقطة أخرى عليه، واشرح طريقة إيجادها.

(-١ ، ٩)، أمثل النقاط المعطاة وارسم القطع المكافئ المار بها أجد انعكاس النقطة (٥ ، ٩) حول المستقيم س = ٢

---

٣٨) اكتب: وضح كيفية إيجاد محور التماثل لمعادلة الدالة التربيعية، ثم فسر الخصائص الأخرى للتمثيل البياني التي يمكنك اشتقاقها منه، وكيف توصلت إليها.

أجد قيم أ، ب من الصورة القياسية وأعوض ذلك في معادلة محور التماثل س = $\frac{-ب}{٢أ}$ وهذا يعطي الإحداثي السيني ولإيجاد القيمة العظمي أو الصغرى للدالة أعوض في المعادلة الأصلية.

تدريب على اختبار

٣٩) هندسة: دائرة مساحتها ٣٦ط وحدة مربعة، إذا زاد نصف قطرها إلى مثليه، فكم تصبح مساحة الدائرة الجديدة؟

أ) ٧٢ط وحدة مربعة

جـ) ١٢٩٦ط وحدة مربعة

ب) ١٤٤ط وحدة مربعة

د) ٩ط وحدة مربعة



أ = ٣٦ط

الاختيار الصحيح: ب) ١٤٤ط وحدة مربعة

٣٦ نق = ط نق^{٢} ، نق = ٦ سم

نصف القطر الجديد = ٢ × ٦ = ١٢ سم

مساحة الدائرة = ط (١٢)^{٢} = ١٤٤ط

٤٠) ما المدي الدالة د (س) = -٤س^{٢} – $\frac{١}{٢}$ ؟

أ) جميع الأعداد الصحيحة التي تقل عن أو تساوي $\frac{١}{٢}$

ب) جميع الأعداد الصحيحة غير السالبة

جـ) جميع الأعداد الحقيقية

د) جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي - $\frac{١}{٢}$

الاختيار الصحيح: د) جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي - $\frac{١}{٢}$

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعا كاملا، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحللها :

٤١) ٤س^{٢} + ٤س + ١

نعم تشكل مربعا كاملا

٤س^{٢} + ٢س + ٢س + ١=

٢س (٢س + ١) + (٢س+ ١)

= (٢س + ١)^{٢}

٤٢) ٤س^{٢} – ٢٠ س + ٢٥

نعم تشكل مربعا كاملا ،

٤س^{٢} + ١٠س + ١٠س + ٢٥

٢س (٢س – ٥) – ٥ (٢س – ٥)

= (٢س – ٥)^{٢}

٤٣) ٩س^{٢} + ٨س + ١٦

لا

مهارة سابقة: أوجد المقطع السيني للتمثيل البياني لكل معادلة فيما يأتي:

٤٤) س + ٢ص = ١٠

س + ٢ص = ١٠

عند ص = ٠

س + ٠ = ١٠

س = ١٠

٤٥) ٢س – ٣ص = ١٢

٢س – ٣ص = ١٢

عند ص = ٠

٢س – ٣ × ٠ = ١٢

٢س =١٢

س = ٦

٤٦) ٣ص – ص = -١٨

٣س – ص = -١٨

عند ص = ٠

٣س = -١٨

٣س ÷ ٣ = - ١٨ ÷ ٣

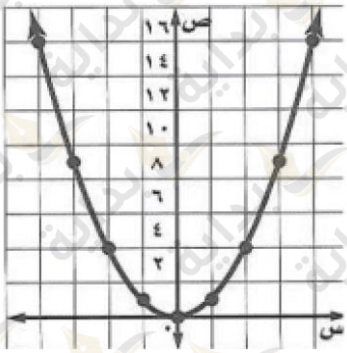
س = - ٦

استعمل الدالة التربيعية ص = س^{٢}

١) أنشئ جدولاً للدالة مشابهاً للجدول الوارد في النشاط مستعملا قيم س: -٤، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ثم أوجد قيم ص عند كل قيمة من قيم س.

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	١٦	٩	٤	١	٠	١	٤	٩	١٦

٢) مثل بيانيا الأزواج المرتبة على ورقة مربعات، وصل بين النقاط بمنحنى، ثم صف تزايد الدالة وتناقصها.



تتزايد الدالة عندما س ≤ ٠ ، وتتناقص عندما س > ٠

٣) أوجد معدل التغير في كل عمود بدءا من س= -٣، وقارن بين معدلات التغير عندما تتزايد الدالة، وعندما تتناقص.

معدل التغير عندما تتناقص الدالة هو عكس معدل التغير عندما تتزايد.

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	١٦	٩	٤	١	٠	١	٤	٩	١٦
معدل التغير	٠	-٧	-٥	-٣	-١	١	٣	٥	٧

٤) تحد: إذا أسقط جسم من ارتفاع ١٠٠قدم في الهواء فإنه يسقط بمعدل يمكن تمثيله بالدالة د (س) = -١٦س^{٢} + ١٠٠ مع تجاهل مقاومة الهواء، حيث تمثل د (س) ارتفاع الجسم بالأقدام بعد (س) ثانية، أنشئ جدولاً للقيم كمًا في الجدول الوارد في تمرين١، ً ١واختر قيمًا مناسبة لـ (س) ، وأكمل الجدول بقيم س، ص ومعدلات التغير، ثم قارن بين هذه المعدلات، وصف الأنمًاط التي تلاحظها.

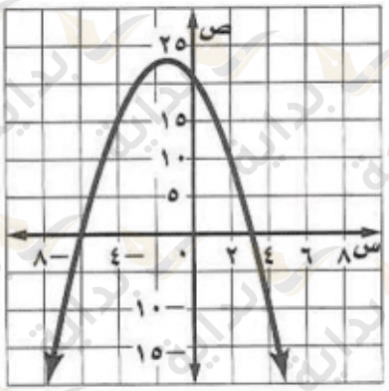
تكون لمعدل التغير عندما تتزايد الدالة القيمة المطلقة نفسها عن تناقص الدالة.

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	-١٥٦	-٤٤	٣٦	٨٤	١٠٠	٨٤	٣٦	-٤٤	١٥٦
معدل التغير	٠	١١٢	٨٠	٤٨	١٦	-١٦	-٤٨	-٨٠	-١١٢

٨ - ٢ حل المعادلات التربيعية بيانياً

١) حل المعادلات التالية بيانياً:

أ) - س^{٢} - ٣س + ١٨ = ٠



حل المعادله هو س = -٦ و س = ٣

تحقق:

التعويض عن س = ٣ في المعادلة الأصلية

- س^{٢} - ٣س + ١٨ = ٠

- (٣)^{٢} - ٣(٣) + ١٨ = ٠

- ١٨ + ١٨ = ٠ √

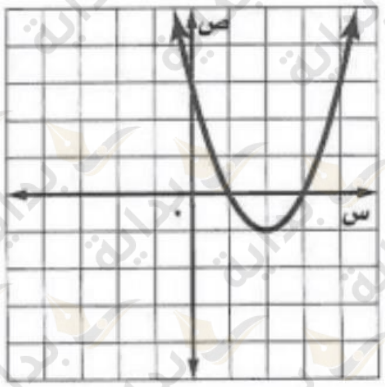
التعويض عن س = -٦ في المعادلة الأصلية

- س^{٢} - ٣س + ١٨ = ٠

- (-٦)^{٢} - ٣(-٦) + ١٨ = ٠

- ٣٦ + ٣٦ = ٠ √

ب) س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠



حل المعادلة هو س = ١ و س = ٣

تحقق:

التعويض عن س = ١ في المعادلة الأصلية

س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠

(١)^{٢} - ٤(١) + ٣ = ٠

- ٣ + ٣ = ٠ √

التعويض عن س = ٣ في المعادلة الأصلية

س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠

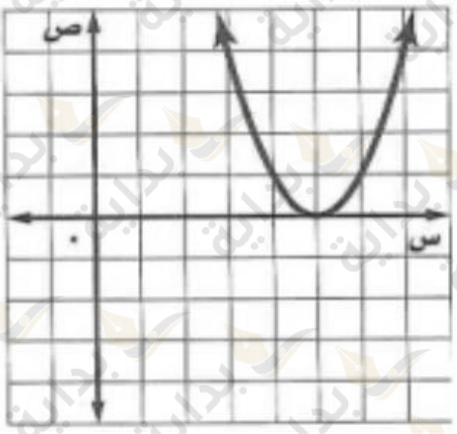
(٣)^{٢} - ٤(٣) + ٣ = ٠

- ٩ + ٩ = ٠ √

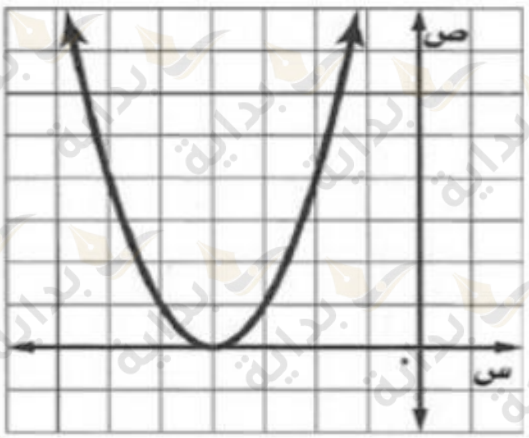
---

٢) حل المعادلات التالية بيانيا:

أ) س^{٢} + ٢٥ = ١٠س



ب) س^{٢} = -٨س - ١٦



المعادلة لها وحل وحيد عند س = ٥

تحقق: حل المعادلة بالتحليل إلي عوامل

س^{٢} - ١٠س + ٢٥ = ٠

(س – ٥) (س – ٥) = ٠

س = ٥

المعادلة لها وحل وحيد عند س = -٤

تحقق: حل المعادلة بالتحليل إلي عوامل

س^{٢} + ٨س + ١٦ = ٠

(س + ٤) (س + ٤) = ٠

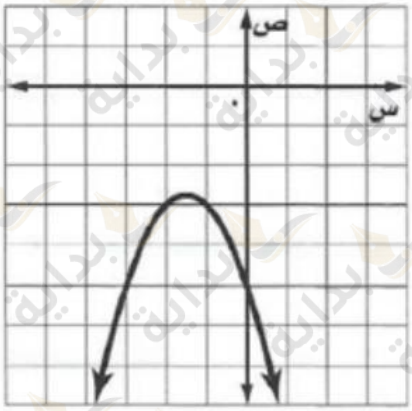
س = -٤

٣) حل المعادلات التالية بيانيا:

أ) -س^{٢} – ٣س = ٥

- س^{٢} – ٣ س – ٥ = ٠

التمثيل البياني ليس له مقطع سيني لذا فليس للمعادلة جذور حقيقية وبالتالي يكون مجموعة الحل ∅



تحقق:

لا يوجد عوامل للعدد ٥ طرحها ٣

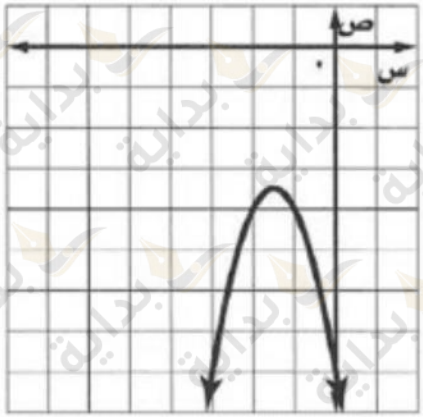
إذن الحل = ∅

ب) -٢س^{٢} - ٨ = ٦س

- ٢س^{٢} – ٦س – ٨ = ٠

- س^{٢} – ٣س – ٤ = ٠

التمثيل البياني ليس له مقطع سيني لذا فليس للمعادلة جذور حقيقية وبالتالي يكون مجموعة الحل ∅

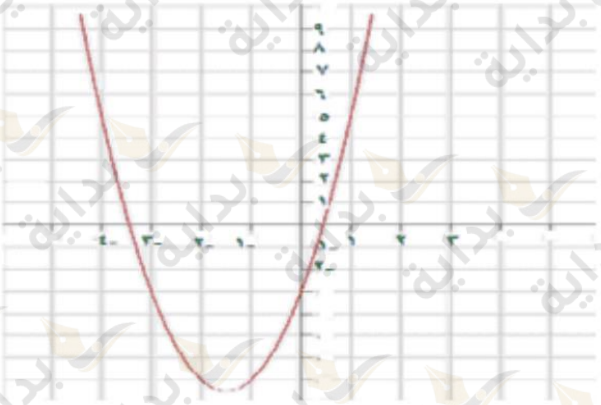


تحقق:

لا يوجد عوامل للعدد ٤ طرحها ٣

إذن الحل = ∅

٤) حُل المعادلة ٢س^{٢} + ٦س - ٣ = ٠ بيانيًّا. وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرها إلى أقرب جزء من عشرة.



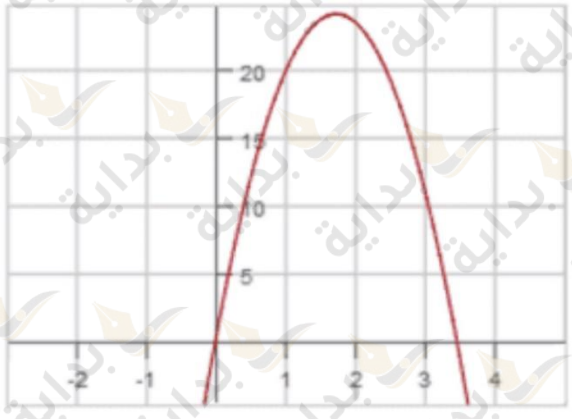
يقطع المقطعان السينيان بين ١ ، ٠ وبين -٣ ، -٤

س	٠,٦	٠,٥	٠,٤	٠,٣	٠,٢	٠,١
ص	١,٣٢	٠,٥	-٠,٢٨	-١,٢	-٠,٦٨	-٢,٣٨

س	-٣,٦	-٣,٥	-٣,٤	-٣,٣	-٣,٢	-٣,١
ص	٤٤,٥٢	٤٢,٥	-٠,٢٨	٣٨,٥٨	-١,٧٢	-٢,٣٨

الجذران هما ٠,٤ ، -٣,٤

٥) إذا ركل سعد الكرة من ارتفاع قدمين من الأرض إلى أعلى بسرعة ٥٥ قدمًا / ثانية. فكم تبقى الكرة في الهواء تقريبًا؟



٣,٥ ثانية

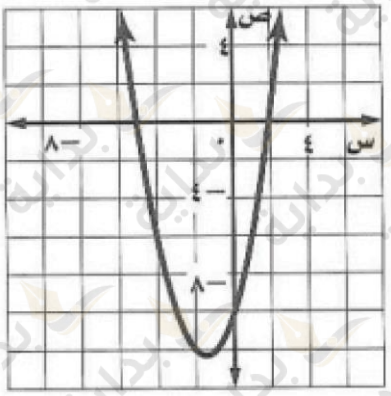
ع$_{٢}$ = -١٦ن^{٢} + ٥٥ن + ١

$$ع = \frac{-١٦ن + ٥٥ن + ١}{٢} = -٨ن^{٢} + \frac{٥٥}{٢}ن + \frac{١}{٢}$$

تأكد

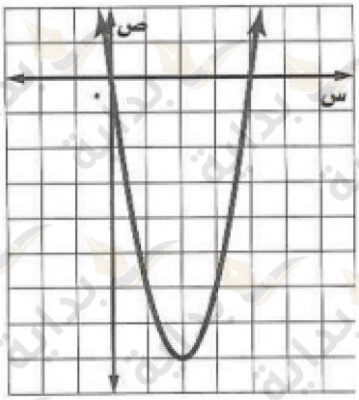
الأمثلة ١-٣: حل كل معادلة فيما يلي بيانياً:

١) $س^{٢} + ٣س - ١٠ = ٠$



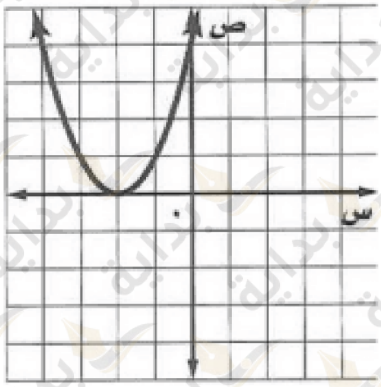
حل المعادلة هو س = ٥- و س = ٢

٢) $٢س^{٢} - ٨س = ٠$



حل المعادلة هو س = ٤ و س = ٠

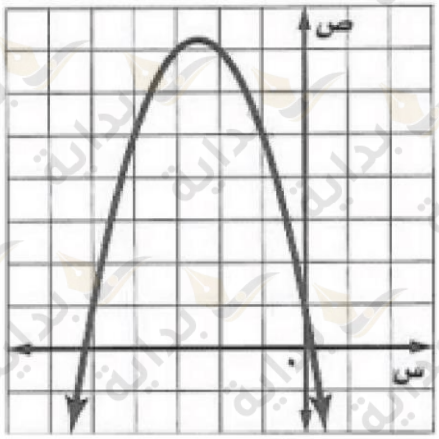
٣) $س^{٢} + ٤س = ٤-$



حل المعادلة هو ٢-

مثال ٤: حُل كل معادلة فيما يأتي بيانياً، وإذا لم تكن الجذور أعدادا صحيحة، فقدرها إلى أقرب جزء من عشرة:

٤) $-س^{٢} - ٥س + ١ = ٠$

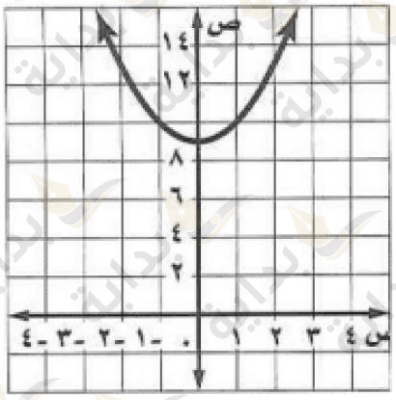


س	٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦	٠,٥	٠,٤	٠,٣	٠,٢	٠,١
ص	٢,٦٩-	٢,٣٦-	٢,٠١-	١,٦٤-	١,٢٥-	٠,٨٤-	٠,٤١-	٠,٠٤	٠,٥١

س	٥,٩-	٥,٨-	٥,٧-	٥,٦-	٥,٥-	٥,٤-	٥,٣-	٥,٢-	٥,١-
ص	٤,٣١-	٣,٦٤-	٢,٩٩-	٢,٣٦-	١,٧٥-	١,١٦-	٠,٥٩-	٠,٠٤-	٤,٤٩

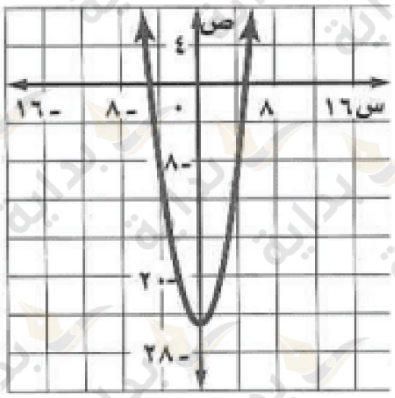
الجذران هما: ٥,٢- ، ٠,٢

٥) $-٩ = س^{٢}$



التمثيل البياني ليس له مقطع سيني لذا فليس للمعادلة جذور حقيقية وبالتالي يكون مجموعة الحل $\emptyset$

٦) $س^{٢} = ٢٥$

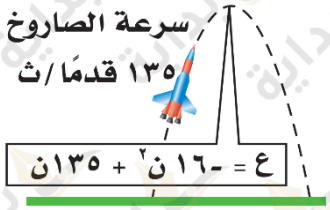


$س^{٢} - ٢٥ = ٠$

$(س - ٥)(س + ٥) = ٠$

$س = ٥ ، س = -٥$

مثال ٥: معرض العلوم: إذا صمم نواف نموذجا لصاروخ يمكنه أن ينطلق في الهواء وفق المعادلة المبينة في الشكل، حيث (ع) ارتفاع الصاروخ بالأقدام بعد (ن) ثانية من انطلاقه، فكم يبقى الصاروخ في الهواء تقريبا؟



$-١٦ ن^{٢} + ١٣٥ن = ٠$

$- ن (١٦ن - ١٣٥) = ٠$

$ن = ٠$

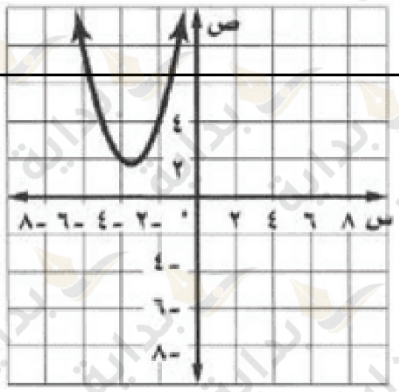
$١٦ن = ١٣٥ \quad ن = \frac{١٣٥}{١٦} \approx ٨,٤$ ثانية تقريباً

يبقى الصاروخ في الهواء ٨,٤ ثانية تقريباً.

تدرب وحل المسائل

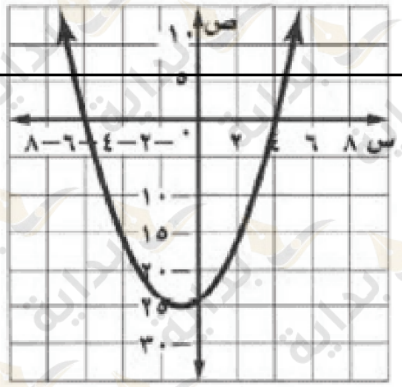
الأمثلة ١-٣: حل كل معادلة فيما يلي بيانياً:

٨) $س^{٢} + ٧س + ١٤ = ٠$



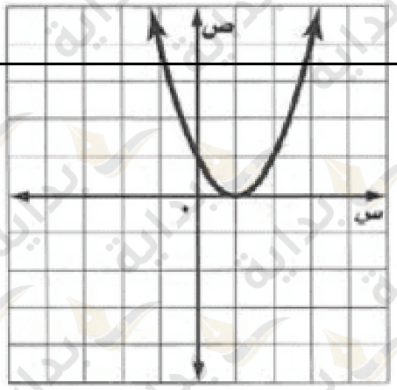
التمثيل البياني ليس له مقطع سيني لذا فليس للمعادلة جذور حقيقية وبالتالي يكون مجموعة الحل $\emptyset$

٩) $٢س^{٢} + ٢س - ٢٤ = ٠$



س = ٤ ، ٦-

١٠) $س^{٢} = ٢س - ١$

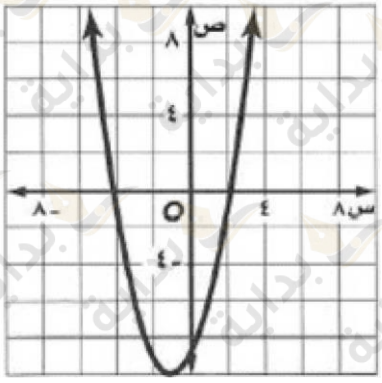


المقطع السيني للدالة عند س = ١

∴ حل المعادلة س = ١

مثال ٤: حُل كل معادلة فيما يأتي بيانياً، وإذا لم تكن الجذور أعدادا صحيحة، فقدرها إلى أقرب جزء من عشرة:

١١) $س^{٢} + ٢س - ٩ = ٠$

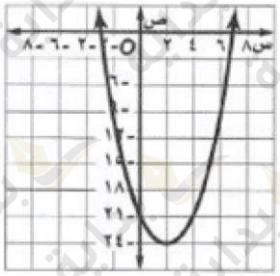


س	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١
ص	١,٥٦	٠,٨٩	٠,٢٤	٠,٣٩-

س	٤,٥-	٤,٤-	٤,٣-	٤,٢-	٤,١-
ص	٢,٢٥	١,٥٦	٠,٨٩	٠,٢٤	٠,٣٩-

الجذران هما ٢,٢ ، ٤,٢-

١٢) س^{٢} – ٤س = ٢٠

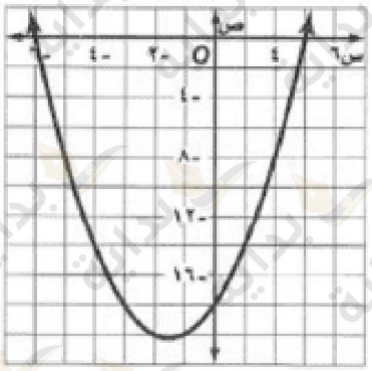


س	٦,٩	٦,٨	٦,٧	٦,٦	٦,٥	٦,٤	٦,٣	٦,٢
ص	٠,٠١	٠,٩٦-	١,٩١-	٢,٨٤-	٣,٧٥-	٤,٦٤-	٥,٥١-	٦,٣٦-

س	٢,٩-	٢,٨-	٢,٧-	٢,٦-	٢,٥-	٢,٤-	٢,٣-	٢,٢-	٢,١-
ص	٠,٠١	٠,٩٦-	١,٩١-	٢,٨٤-	٣,٧٥-	٤,٦٤-	٢٣,٩٦-	٢,٢-	٢٣,٩٩-

الجذران هما ٦,٩ ، ٢,٩-

١٣) س^{٢} + ٣س = ١٨



س = ٣ ، ٦-

مثال ٥: ١٤) أفعوانيه: ترتفع أفعوانيه براكبيها إلى الأعلى، ثم تنزل بهم إلى الأسفل وفق المعادلة:
ع = -١٦ ن^{٢} + ١٨٥ن، حيث (ع) الارتفاع بالأقدام بعد (ن) ثانية، فكم ثانية تستغرق الأفعوانية للعودة إلى الأسفل؟

-١٦ ن^{٢} + ١٨٥ن = ٠

١٦ ن^{٢} = ١٨٥ن

ن = $\frac{١٨٥}{١٦}$ = ١١,٦ ثانية تقريباً

تستغرق ١١,٦ ثانية تقريباً.

استعمل التحليل إلى العوامل لتحديد عدد المرات التي يقطع فيها التمثيل البياني محور السينات في كل دالة مما يأتي، ثمّ حدد أصفار كل منها:

١٥) ص = س^{٢} – ٨س + ١٦	١٦) ص = س^{٢} + ٣س + ٤	١٧) ص = س^{٢} + ١٢س + ٣٢
س^{٢} – ٨س + ١٦ = ٠	قيمة ب^{٢} – ٤أجـ سالبة	س^{٢} + ١٢س + ٣٢ = ٠
(س – ٤)(س – ٤) = ٠	∴ لا يوجد جذور حقيقية لهذه الدالة.	(س + ٤)(س + ٨) = ٠
س = ٤		س = -٤ ، س = -٨
عدد المقاطع السينية = ١		عدد المقاطع السينية = ٢

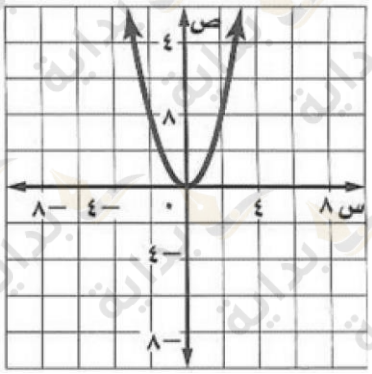
١٨) نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية لإيجاد عددين مجموعهما ٩ وناتج ضربهما ٢٠.

س^{٢} + ٩س + ٢٠ = ٠

العددان هما ٥ ، ٤

١٩) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذه المسألة كيفية تفسير العلاقة بين الدوال التربيعية وتمثيلاتها البيانية.

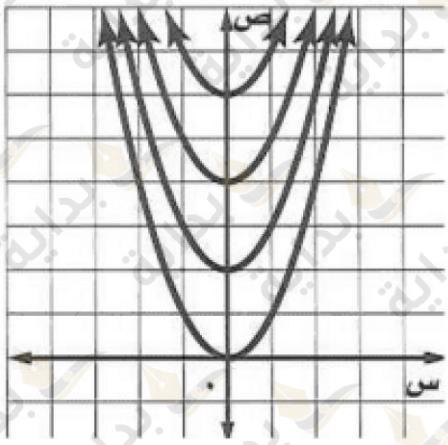
أ) بيانياً: مثل الدالة ص = س^{٢}



ب) تحليلياً: اكتب إحداثيات الرأس وإحداثيات نقطتين على التمثيل.

تحليلاً: (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (-١ ، ١)

جـ) بيانياً: مثل الدوال ص= س^{٢} + ٢، ص = س^{٢} + ٤، ص = س^{٢} + ٦ بيانيا على المستوى الإحداثي السابق نفسه.



د) تحليلياً: اكتب إحداثيات الرأس وإحداثيات نقطتين على كل من هذه التمثيلات التي لها الإحداثيات السينية نفسها. ماذا تستنتج؟

ص= س^{٢} + ٢:

(٠ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (-١ ، ٥)

ص = س^{٢} + ٤:

(٠ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (-١ ، ٥)

ص = س^{٢} + ٦:

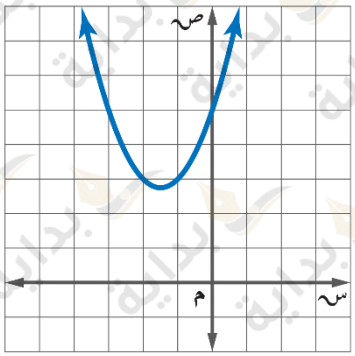
(٠ ، ٦) ، (١ ، ٧) ، (-١ ، ٧)

يمكن الحصول علي التمثيلات البيانية للدوال

ص= س^{٢} + ٢، ص = س^{٢} + ٤، ص = س^{٢} + ٦

بانسحاب التمثيل البياني للدالة ص = س^{٢} إلي الأعلى ٢، ٤، ٦، وحدات علي الترتيب.

مسائل مهارات التفكير العليا



٢٠) اكتشف الخطأ: يقوم معاذ وأحمد بإيجاد عدد الأصفار الحقيقية للدالة الممثلة بالشكل المجاور، فيقول معاذ إنه ليس لهذه الدالة أصفار حقيقية؛ لأنه لا يوجد لتمثيلها البياني مقاطع سينية. بينما يقول أحمد: إن لها صفرا حقيقياً واحداً؛ لأن للتمثيل البياني للدالة مقطعاً صادياً. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك .

معاذ إجابته صحيحة، أصفار الدالة التربيعية هي المقاطع السينية للتمثيل وبما أن التمثيل لايقطع محور السينات فلا توجد مقاطع سينية ولا أصفار.

٢١) **مسألة مفتوحة:** صف مسألة من واقع الحياة يتم فيها قذف جسم في الهواء، واكتب معادلة تمثل ارتفاع الجسم بالنسبة للزمن، وحدد الفترة الزمنية التي يمكثها الجسم في الهواء.

قذفت كرة تنس في الهواء وفق المعادلة ع = -١٦ن^{٢} + ٢٥ن + ٢

تبقي الكرة في الهواء ١,٦ ثانية تقريباً.

-١٦ن^{٢} + ٢٥ن + ٢ = ٠

$$ن = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{أ٢}$$

$$ن = \frac{-٢٥ \pm \sqrt{٢٥^{٢} - ٤ \times -١٦ \times ٢}}{-١٦ \times ٢}$$

$$ن = \frac{-٢٥ - ٧٥٣}{-١٦ \times ٢} = ١,٦$$

---

٢٢) **تحدٍ:** اكتب معادلة تربيعية لها الجذور المذكورة في كل مما يأتي:

أ) جذر مكرر مرة واحدة.

س^{٢} + ٨س + ١٦ = ٠

ب) جذر نسبي (غير صحيح) واحد، وجذر صحيح واحد.

٢س^{٢} – ٢٣س + ٤٥ = ٠

جـ) جذران صحيحان مختلفان ومتعاكسان جمعياً.

س^{٢} – ٤ = ٠

---

٢٣) **اكتب:** وضح كيف تقرب جذور المعادلة التربيعية عندما لا تكون أعدادا صحيحة.

مثل أولاً الدالة المرتبطة بيانياً ثم حدد العددين الصحيحين المتتاليين اللذين يقطع التمثيل البياني محور السينات بينهما وأنشئ جدولا بقيم بالأعشار بين هذين العددين الصحيحين ثم عين الموقع الذي تتغير عنده إشارة الدالة فتكون قيمة س التي تكون عندها قيمة الدالة أقرب إلي الصفر هي أفضل تقدير لجذر المعادلة.

تدريب على اختبار

٢٤) إذا حصل إبراهيم على الدرجة ٥٠ في اختبار درجته العظمى ٨٠. فما النسبة المئوية لدرجته في الاختبار؟

أ) ٦٢,٥ %　　ج) ١,٦ %

ب) ٦,٢٥ %　　د) ٠,١٦ %

$\frac{٥٠ \times ١٠٠}{٨٠}$ = ٦٢,٥ %　≪ الاختيار الصحيح: أ) ٦٢,٥ %

---

٢٥) تمثل الصيغة ف = $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} المسافة (ف) بالأمتار التي يقطعها جسم يسقط على كوكب سقوطاً حراً بعد (ن) ثانية. اكتب الصيغة بدلالة المتغير جـ، الذي يمثل تسارع الجاذبية.

أ) جـ = $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} – ف　　ج) جـ = ف - $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}

ب) جـ = ٢ف - ن^{٢}　　د) جـ = $\frac{٢ف}{ن^{٢}}$

الاختيار الصحيح: د) جـ = $\frac{٢ف}{ن^{٢}}$

مراجعة تراكمية

أوجد إحداثيات الرأس، ومعادلة محور التماثل، وبيّن إذا كان الرأس يمثل قيمة عظمى أم قيمة صغرى، ثم مثل الدالة بيانيا:

٢٦) ص = ٣س^{٢}

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٠}{٢ \times أ}$ = ٠

معادلة محور التماثل هي س = ٠

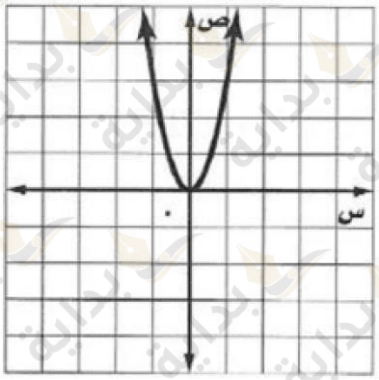
وعند س = ٠

ص = ٠

إذن الرأس هي (٠ ، ٠)

وبما أن أ قيمة موجبة فالتمثيل مفتوح لأعلي لذا الرأس تمثل قيمة صغرى.

المقطع الصادي هو قيمة ج = ٠



٢٧) ص = س^{٢} - ٦س - ٨

س = $\frac{٦}{٢ \times ١}$ = ٣

معادلة محور التماثل هي س = ٣

وعند س = ٣

ص = -١٧

إذن الرأس هي (٣ ، -١٧)

وبما أن أ قيمة موجبة فالتمثيل مفتوح لأعلي لذا الرأس تمثل قيمة صغرى.

المقطع الصادي هو قيمة ج = -٨



٢٨) ص = -٤س^{٢} – ٨س + ٥

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٨}{٢ \times -٤}$ = -١

معادلة محور التماثل هي س = -١

وعند س = -١

ص = ٩

إذن الرأس هي (-١ ، ٩)

وبما أن أ قيمة سالبة فالتمثيل مفتوح لأسفل لذا الرأس تمثل قيمة عظمي.

٢٩) ص = ٣س^{٢} + ٢س + ١

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٢}{٢ \times ٣}$ = $-\frac{١}{٣}$

معادلة محور التماثل هي س = $-\frac{١}{٣}$

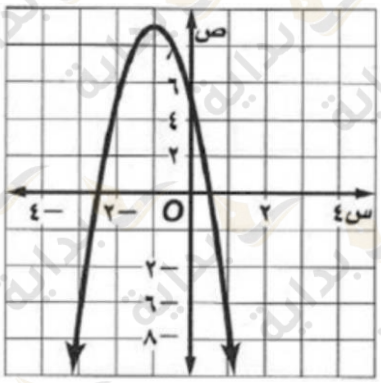
وعند س = $-\frac{١}{٣}$

ص = $\frac{٢}{٣}$

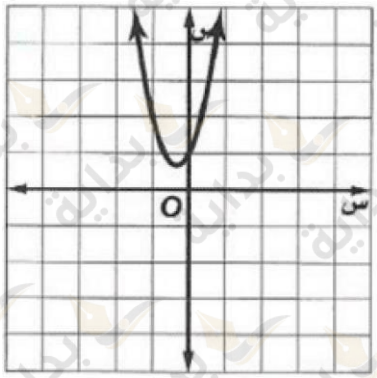
إذن الرأس هي ($-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$)

وبما أن أ قيمة موجبة فالتمثيل مفتوح لأعلي لذا الرأس تمثل قيمة صغري.

المقطع الصادي هو قيمة ج = ٥



المقطع الصادي هو قيمة ج = ١



حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)

٣٠) $٢س^{٢} = ٣٢$

$٢س^{٢} = ٣٢$

$٢س^{٢} - ٣٢ = ٠$

$٢(س^{٢} - ١٦) = ٠$

$٢(س - ٤)(س + ٤) = ٠$

س = ٤ س = -٤

تحقق:

عند س = ٤ $٢ \times ١٦^{٢} - ٣٢ = ٠$ ✓

عند س = -٤ $٢ \times ١٦^{٢} - ٣٢ = ٠$ ✓

٣١) $(س - ٤)^{٢} = ٢٥$

$(س - ٤)^{٢} = ٢٥$

$س - ٤ = \pm \sqrt{٢٥}$

س − ٤ = ٥

س = ٩ س = -١

تحقق:

عند س = ٩

$(٩ - ٤)^{٢} - ٢٥ = ٠$

٢٥ − ٢٥ = ٠ ✓

عند س = -١

$(-١ - ٤)^{٢} - ٢٥ = ٠$

٢٥ − ٢٥ = ٠ ✓

٣٢) ٤س^{٢} – ٤س + ١ = ١٦

٤س^{٢} – ٤س + ١ – ١٦ = ٠

٤س^{٢} – ٤س - ١٥ = ٠

٤س^{٢} + ٦س – ١٠س - ١٥ = ٠

٢س(٢س + ٣) – ٥(٢س + ٣) = ٠

(٢س – ٥) (٢س + ٣) = ٠

س = $\frac{٥}{٢}$ ، س = $\frac{-٣}{٢}$

تحقق:

عند س = $\frac{٥}{٢}$

٤س^{٢} – ٤س - ١٥ = ٠

٤($\frac{٥}{٢}$)^{٢} – ٤($\frac{٥}{٢}$) - ١٥ = ٠ √

عند س = $\frac{-٣}{٢}$

٤س^{٢} – ٤س - ١٥ = ٠

٤($\frac{-٣}{٢}$)^{٢} – ٤($\frac{-٣}{٢}$) - ١٥ = ٠ √

٣٣) ٢س^{٢} + ١٦س = -٣٢

٢س^{٢} + ١٦س + ٣٢ = ٠

س^{٢} + ٨س + ١٦ = ٠

س^{٢} + ٤س + ٤س + ١٦ = ٠

س(س + ٤) + ٤(س + ٤) = ٠

(س + ٤)(س + ٤) = ٠

س = -٤

تحقق:

عند س = -٤

س^{٢} + ٨س + ١٦ = ٠

(-٤)^{٢} + ٨(-٤) + ١٦ = ٠ √

مهارة سابقة: حدد ما إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعا كاملاً، اكتب "نعم" أو "لا" ، وإذا كانت كذلك فحللها.

٣٤) ١٦س^{٢} – ٢٤س + ٩ نعم; (٤س – ٣)^{٢}	٣٥) ٩س^{٢} + ٦س + ١ نعم; (٣س + ١)^{٢}	٣٦) ٢٥س^{٢} -٦٠س + ٣٦ نعم; (٥س – ٦)^{٢}
٣٧) س^{٢} – ٨س + ٨١ لا; لا تمثل مربعاً كاملاً	٣٨) ٣٦س^{٢} – ٨٤س + ٤٩ نعم; (٦س – ٧)^{٢}	٣٩) ٤س^{٢} – ٣س + ٩ لا; لا تمثل مربعاً كاملاً

اختبار منتصف الفصل

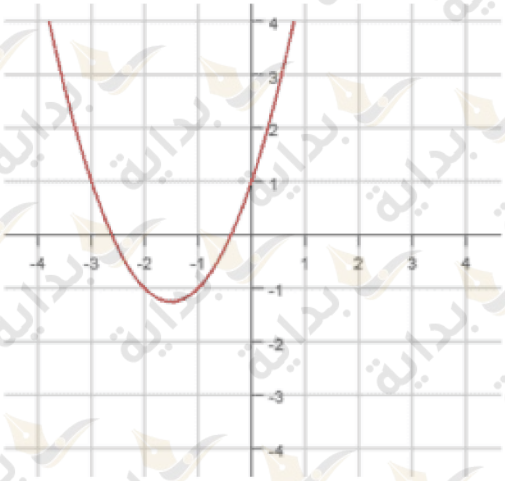
الفصل ٨

الدرسان ٨-١ و ٨-٢

استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها: (الدرس ٨-١)

١) ص = س^{٢} + ٣س + ١

س	ص
١	٥
٠	١
١-	١-
٢-	١-
٣-	١

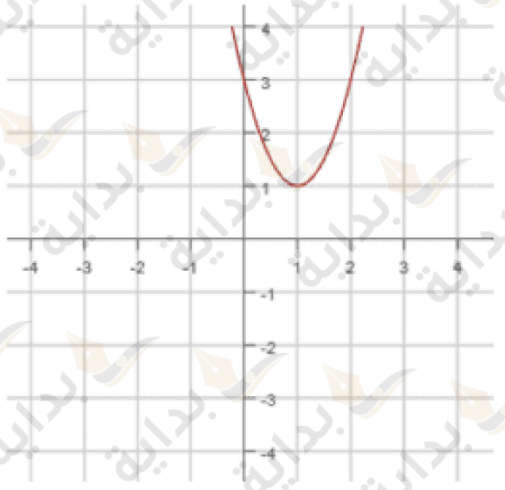


المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدي: { ص | ص ≤ ١- }

٢) ص = ٢س^{٢} - ٤س + ٣

س	ص
٣	٩
٢	٣
١	١
٠	٣
١-	٩

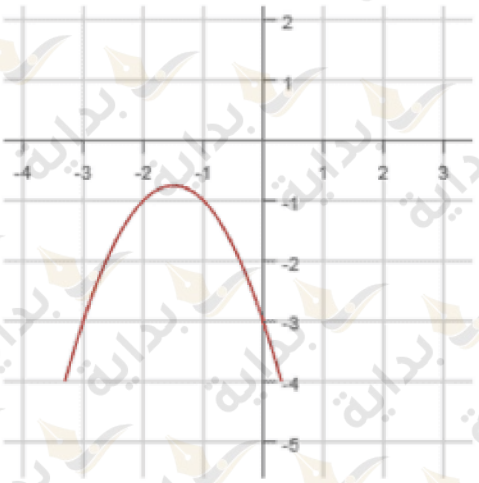


المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدي: { ص | ص ≤ ١ }

٣) ص = ـ ـ س^{٢} ـ ٣س ـ ٣

س	ص
١	٧-
٠	٣-
١-	١-
٢-	١-
٣-	٣-

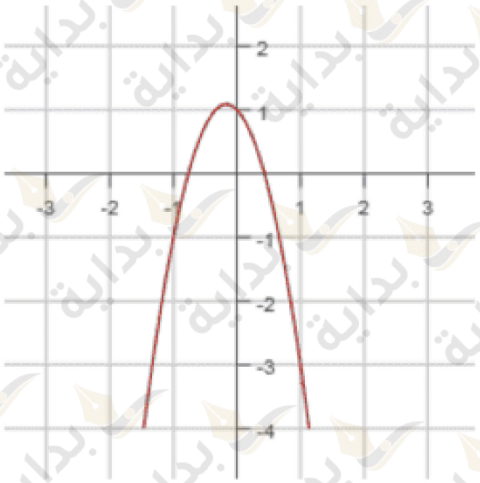


المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدي: { ص | ص ≤ -١ }

٤) ص = ـ ـ ٣س^{٢} ـ س + ١

س	ص
١	٣-
٠	١
١-	١-
٢-	٩-



المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدي: { ص | ص ≤ ١ }

إذا كانت: ص = س^{٢} ـ ٥س + ٤ (الدرس ٨-١)

٥) اكتب معادلة محور التماثل.

$$س = \frac{ب}{٢أ} = \frac{-٥}{٢}$$

٦) أوجد الرأس، وحدد ما إذا كان يمثل نقطة صغرى أو عظمى.

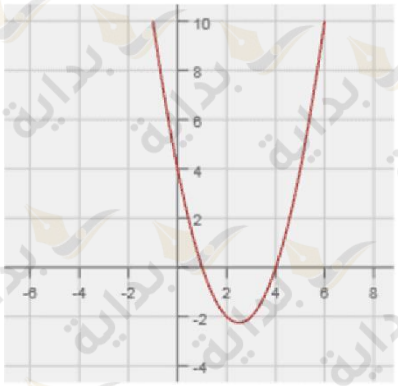
$$ص = (\frac{-٥}{٢})^{٢} - ٥(\frac{-٥}{٢}) + ٤$$

$$ص = \frac{٢٥}{٤} + \frac{٢٥}{٢} + ٤ = ٢٢,٧٥$$

نقطة الرأس: (-٢,٥ ، ٢٢,٧٥)

بما أن معامل س٢ موجب، فالتمثيل البياني مفتوح لأعلي ويكون للدالة قيمة صغرى.

٧) مثِّل الدالة بيانياً.



٨) كرة: تم ركل كرة من على سطح الأرض بسرعة ٩٠ قدماً / ثانية، إذا كانت المعادلة:

ع = -١٦ن^{٢} + ٩٠ن، تعبرعن ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية من إطلاقها. (الدرس ٨-١)

أ) أوجد ارتفاع الكرة بعد ثانية من إطلاقها.

ع = -١٦(١)^{٢} + ٩٠(١) = ٧٤ قدماً

ب) متى تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع؟

الزمن (ثانية)	الإرتفاع (قدم)
٠	٠
١	٧٤
٢	١١٦
٣	١٢٦
٤	١٠٤
٥	٥٠
٦	-٣٦

تصل الكرة إلي أقصي ارتفاع بعد ٣ ثواني.

جـ) متى يكون ارتفاع الكرة عن سطح الأرض مساوياً للصفر؟ وضح معنى ذلك.

يكون ارتفاع الكرة عن سطح الأرض مساوياً للصفر عندما ن = صفر ثانية

ع = -١٦(٠)^{٢} + ٩٠(٠) = ٠

٩) اختيار من متعدد: التمثيل البياني للدالة: ص = ٢س^{٢} – ٣س + ١ (الدرس ٨-١)

أ) مفتوحٌ إلي أعلي وله قيمة عُظْمى.

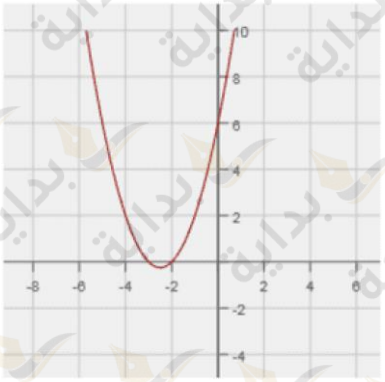
ب) مفتوحٌ إلي أعلي وله قيمة صُغْرى.

جـ) مفتوحٌ إلى أسفل وله قيمة عُظْمى.

د) مفتوحٌ إلى أسفل وله قيمة صُغْرى.

حُل كل معادلة فيما يأتي بيانياً، وإذا لم تكن الجذور أعداداً صحيحة فقدرها إلى أقرب جزء من عشرة: (الدرس ٨-٢)

١٠) س^{٢} + ٥س + ٦ = ٠



(س + ٢) (س + ٣) = ٠

س = -٢ ، س = -٣

١١) س^{٢} + ٨ = -٦س

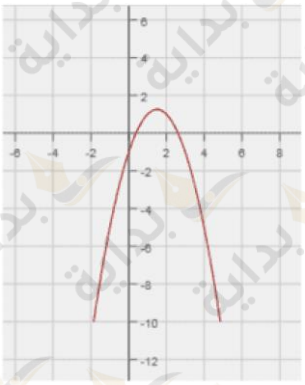


س^{٢} + ٦س + ٨ = ٠

(س + ٢) (س + ٤) = ٠

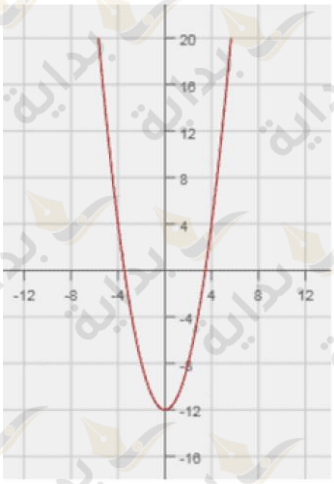
س = -٢ ، س = -٤

١٢) – س^{٢} + ٣س - ١ = ٠



س ≈ ٢,٦ ، س ≈ ٠,٤

١٣) س^{٢} = ١٢



س ≈ ٣,٥ ، س ≈ -٣,٥

---

١٤) كرة البيسبول: المعادلة ع = -١٦ن^{٢} + ١٢٠ن، تمثل ارتفاع كرة البيسبول بعد ن ثانية من ضربها، أوجد الوقت الذي تبقى فيه الكرة في الهواء؟ (الدرس ٨-٢)



بما أن المقطع السيني الموجب للتمثيل هو ٧,٥ تقريباً، بقيت الكرة ٧,٥ ثانية في الهواء تقريباً.

استعمل التحليل إلى عوامل؛ لتحديد عدد المرات التي يقطع فيها التمثيل البياني محور السينات في كل دالة مما يأتي، ثم حدد أصفار كل منها: (الدرس ٨-٢)

١٥) ص = س^{٢} – ٣س + ٢

س^{٢} – ٣س + ٢ = ٠

(س – ٢) (س – ١) = ٠

يقطع محور السينات مرتين عند النقط (١ ، ٠) ، (٢ ، ٠)

س – ٢ = ٠ أو س – ١ = ٠

س = ٢ أو س = ١

١٦) ص = س^{٢}

يقطع محور السينات مرة عند النقطة (٠ ، ٠)

١٧) ص = س^{٢} + ٤س + ٤

(س + ٢)^{٢} = ٠

س = -٢

يقطع محور السينات مرة عند النقطة (-٢ ، ٠)

١٨) ص = س^{٢} + س + ٣

لا يقطع محور السينات

٨ - ٣ حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

١) أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود ر^{٢} – ٨ر - ٢ر+ جـ مربعاً كاملًا

$\frac{١}{٢}$ العدد ٨ = ٤

$٤^{٢}$= ١٦

ج = ١٦

---

٢) حل المعادلة: س^{٢} – ١٢س + ٣ = ٨ بإكمال المربع

س^{٢} – ١٢س + ٣ = ٨

س^{٢} – ١٢س = ٥

$(\frac{-١٢}{٢})^{٢}$ = ٣٦

س^{٢} - ١٢س + ٣٦ = ٥ + ٣٦

س^{٢} – ١٢س + ٣٦ = ٤١

(س - ٦)^{٢} = ٤١

س = $\pm \sqrt{٤١}$

س = -٠,٤،

س = ٤, ١٢ تقريباً

---

٣) حل المعادلة: ٣س^{٢} – ٩س – ٣ = ٢١ بإكمال المربع

$\frac{٣س^{٢} - ٩س - ٩س}{٣} = \frac{٢٣}{٣}$

س^{٢} – ٣س – ١ = ٧

س^{٢} – ٣س = ٨

$(\frac{-٣}{٢})^{٢}$ = $\frac{٩}{٤}$

$س^{٢} - ٣س + \frac{٩}{٤} = ٨ + \frac{٩}{٤}$

$(س - \frac{٣}{٢})^{٢} = ١٠,٢٥$

$س = \frac{٣}{٢} \pm \sqrt{١٠,٢٥}$

$س \approx -١,٧$

$س \approx ٤,٧$

---

٤) زي رياضي: أراد أحد الفرق الرياضية شراء زي خاص بلاعبي كرة القدم، إذا أمكن تمثيل تكلفة الزي الرياضي بالمعادلة: ك = ٠,٢س^{٢} + ٤,٨س + ٣٥٠، حيث (ك) ثمن (س) قطعة من هذا الزي، فما عدد القطع التي يمكن شراؤها بمبلغ ٩٨٠ ريالاً؟

$٠,٢س^{٢} + ٤,٨ س + ٣٥٠ = ٩٨٠$

$س^{٢} + ٢٤س + ١٧٥٠ = ٤٩٠٠$

$س^{٢} + ٢٤س + ١٧٥٠ - ١٧٥٠ = ٤٩٠٠ - ١٧٥٠$

$س^{٢} + ٢٤س = ٣١٥٠$

$س + ٢٤س + ١٤٤ = ٣١٥٠ + ١٤٤$

$(س + ١٢)^{٢} = ٣٢٩٤$

$س + ١٢ = \pm \sqrt{٣٢٩٤}$

$س = -١٢ + \sqrt{٣٢٩٤}$

عدد القطع = ٤٥ قطعة

مثال ١ : أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعاً كاملاً:

١) س^{٢} – ١٨س + جـ

$\frac{١}{٢}$ العدد ١٨ = ٩

٩^{٢} = ٨١

جـ = ٨١

٣) س^{٢} + ٩س + جـ

$\frac{١}{٢}$ العدد ٩ = $\frac{٩}{٢}$

$(\frac{٩}{٢})^{٢} = \frac{٨١}{٤}$

جـ = $\frac{٨١}{٤}$

٢) س^{٢} + ٢٢س + جـ

$\frac{١}{٢}$ العدد ٢٢ = ١١

١١^{٢} = ١٢١

جـ = ١٢١

٤) س^{٢} – ٧س + جـ

$\frac{١}{٢}$ العدد ٧ = $\frac{٧}{٢}$

$(\frac{٧}{٢})^{٢} = \frac{٤٩}{٤}$

جـ = $\frac{٤٩}{٤}$

المثالان ٢،٣ : حل كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقرباً الحل إلي أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

٥) س^{٢} + ٤س = ٦

س^{٢} + ٤س = ٦

$(\frac{٤}{٢})^{٢}$ = ٤

س^{٢} + ٤س + ٤ = ٦ + ٤

(س + ٢)^{٢} = ١٠

(س + ٢) = $\pm \sqrt{١٠}$

س = ٢- $\pm \sqrt{١٠}$

س = ٥,٢-

س = ١,٢

٦) س^{٢} – ٨س = ٩-

س^{٢} – ٨س = ٩-

$(\frac{-٨}{٢})^{٢}$ = ١٦

س^{٢} – ٨س + ١٦ = ٩- + ١٦

(س + ٤)^{٢} = ٧

(س + ٤) = $\pm \sqrt{٧}$

س = ٤- $\pm \sqrt{٧}$

س = ٦,٦٤-

س = ١,٣-

٧) ٤س^{٢} + ٩س – ١ = ٠

س = -٢,٤ ، ٠,١

$\frac{٤س^{٢}+٩س-١}{٤} = \frac{٠}{٤}$ قسمة الطرفين علي ٤

$س^{٢} + \frac{٩}{٤}س - \frac{١}{٤} = ٠$

$س^{٢} + \frac{٩}{٤}س - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$

$س^{٢} + \frac{٩}{٤}س = \frac{١}{٤}$

$س^{٢} + \frac{٩}{٤}س + \frac{٨١}{٦٤} = \frac{١}{٤} + \frac{٨١}{٦٤}$

$(س + \frac{٩}{٨})^{٢} = \frac{٩٧}{٦٤}$

$س + \frac{٩}{٨} = \pm\sqrt{\frac{٩٧}{٦٤}}$

$س = -\frac{٩}{٨} + \sqrt{\frac{٩٧}{٨}} \approx ٠,١$

$س = -\frac{٩}{٨} - \sqrt{\frac{٩٧}{٨}} \approx -٢,٤$

٨) -٢س^{٢} + ١٠س + ٢٢ = ٤

-٢س^{٢} + ١٠س + ٢٢ = ٤

-٢س^{٢} + ١٠س + ٢٢ - ٢٢ = ٤ – ٢٢

-٢س^{٢} + ١٠س = -١٨

- س^{٢} + ٥س = -٩ × -١

س^{٢} + ٥س = ٩

$(\frac{٥}{٢})^{٢} = ٦,٢٥ = \frac{٢٥}{٤}$

س^{٢} - ٥س + $\frac{٢٥}{٤}$ = ٩ + $\frac{٢٥}{٤}$

$(س - \frac{٥}{٢})^{٢} = ١٥,٢٥$

$س - \frac{٥}{٢} = \pm\sqrt{١٥,٢٥}$

$س = \frac{٥}{٢} \pm \sqrt{١٥,٢٥}$

س = ٦,٤

س = -١,٤

مثال ٤ : ٩) إنشاءات: يبني إسماعيل صالة مستطيلة الشكل خلف منزل عائلته، مساحتها ١٤٤ متراً مربعاً، وطولها يزيد على عرضها بمقدار ١٠ أمتار، فما بُعدا الصالة؟

بفرض أن الطول يساوي س ∴ العرض = س + ١٠

مساحة المستطيل = الطول × العرض

س(س + ١٠) = ١٤٤

$س^{٢}$ + ١٠س = ١٤٤

$س^{٢}$ + ١٠س – ١٤٤ = ٠

(س – ٨) (س + ١٨) = ٠

س – ٨ = ٠ س + ١٨ = ٠

س = ٨ س = -١٨ ×

∴ الطول = ٨ أمتار

العرض = ٨ + ١٠ = ١٨ متراً

تدرب وحل المسائل

مثال١ : أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعاً كاملاً:

١٠) $س^{٢}$ + ٢٦س + جـ $\frac{١}{٢}$ العدد ٢٦ = ١٣ $١٣^{٢}$ = ١٦٩ ج = ١٦٩	١١) $س^{٢}$ - ٢٤س + جـ $\frac{١}{٢}$ العدد ٢٤ = ١ $١٢^{٢}$ = ١٤٤ ج = ١٤٤
١٢) $س^{٢}$ - ١٩س + جـ $\frac{١}{٢}$ العدد ١٩ = $\frac{١٩}{٢}$ $(\frac{١٩}{٢})^{٢}$ = $\frac{٣٦١}{٤}$ ج = $\frac{٣٦١}{٤}$	١٣) $س^{٢}$ - ٢٢س + جـ $\frac{١}{٢}$ العدد ٢٢ = ١١ $١١^{٢}$ = ١٢١ ج = ١٢١

١٤) $س^{٢} - ١٥س + جـ$

$\frac{١}{٢}$ العدد ١٥ = $\frac{١٥}{٢}$

$(\frac{١٥}{٢})^{٢} = \frac{٢٢٥}{٤}$

$جـ = \frac{٢٢٥}{٤}$

١٥) $س^{٢} - ١٣س + جـ$

$\frac{١}{٢}$ العدد ١٣ = $\frac{١٣}{٢}$

$(\frac{١٣}{٢})^{٢} = \frac{١٦٩}{٤}$

$جـ = \frac{١٦٩}{٤}$

المثالان ٢، ٣: حل كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريا:

١٦) $س^{٢} + ٦س - ١٦ = ٠$

$س^{٢} + ٦س = ١٦$

$(\frac{٦}{٢})^{٢} = ٩$

$س^{٢} + ٦س + ٩ = ١٦ + ٩$

$(س + ٣)^{٢} = ٢٥$

$س + ٣ = \sqrt{٢٥}$

$س + ٣ = \pm ٥$

$س = ٢$

$س = -٨$

١٧) $س^{٢} - ٢س - ١٤ = ٠$

$س^{٢} - ٢س = ١٤$

$(\frac{-٢}{٢})^{٢} = ١$

$س^{٢} - ٢س + ١ = ١٤ + ١$

$(س - ١)^{٢} = ١٥$

$س - ١ = \pm \sqrt{١٥}$

$س \approx ٤,٩$

$س \approx -٢,٩$

١٨) $س^{٢} - ٨س - ١ = ٨$

$س^{٢} - ٨س - ١ = ٨$

$س^{٢} - ٨س - ١ + ١ = ٨ + ١$

$س^{٢} - ٨س = ٩$

$(-\frac{٨}{٢})^{٢} = ١٦$

$س^{٢} - ٨س + ١٦ = ١٦ + ٩$

$(س - ٤)^{٢} = ٢٥$

$س - ٤ = \pm \sqrt{٢٥}$

$س = ٤ \pm ٥$

$س = ٩$

$س = -١$

١٩) $س^{٢} + ٣س + ٢١ = ٢٢$

$س^{٢} + ٣س = ٢٢ - ٢١$

$س^{٢} + ٣س = ١$

$(\frac{٣}{٢})^{٢} = \frac{٩}{٤} = ٢,٢٥$

$س^{٢} + ٣س + \frac{٩}{٤} = ١ + \frac{٩}{٤}$

$(س + \frac{٣}{٢})^{٢} = \frac{١٣}{٤}$

$س + \frac{٣}{٢} = \sqrt{\frac{١٣}{٤}}$

$س = \sqrt{\frac{١٣}{٤}} - \frac{٣}{٢} = ٠,٣$

$س = -\sqrt{\frac{١٣}{٤}} - \frac{٣}{٢} = -٣,٣$

٢٠) $س^{٢} - ٢س + ٧ = ٥$

$\emptyset$

٢١) $٣س^{٢} + ١٢س + ٨١ = ١٥$

$٣س^{٢} + ١٢س + ٨١ = ١٥$

$٣س^{٢} + ١٢س + ٨١ - ٨١ = ١٥ - ٨١$

$٣س^{٢} + ١٢س = -٦٦$

$(\frac{١٢}{٢})^{٢} = ٣٦$

$٣س^{٢} + ١٢س + ٣٦ = -٦٦ + ٣٦$

$٣س^{٢} + ١٢س + ٣٦ = -٣٠ \div ٣$

$س^{٢} + ٤س + ١٢ = -١٠$

$\emptyset$

مثال ٤ : ٢٢) **ثقافة مالية:** يمكن تمثيل سعر سهم معين (س) بالمعادلة التربيعية:

س = ٣,٥ن - ٠,٠٥ن^{٢} حيث (ن) عدد الأيام بعد شراء الأسهم، فمتى يصبح سعر السهم ٦٠ ريالاً؟

٦٠ = ٣,٥ن – ٠,٠٥ن ^{٢}

٠,٠٥ن^{٢} – ٣,٥ ن + ٦٠ = ٠ قسمة طرفي المعادلة على ٠,٠٥

ن^{٢} – ٧٠ ن + ١٢٠٠ = ٠

(ن – ٤٠) (ن – ٣٠) = ٠

ن = ٤٠ ، ن = ٣٠

إذن يصبح السعر ٦٠ ريالاً في اليوم الأربعين واليوم الثلاثين بعد الشراء

هندسة: أوجد قيمة س في كل شكل مما يأتي، وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

٢٣) م = ٤٥ سم ^{٢}



مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

٤٥ = $\frac{١}{٢}$ (س + ٨) × س

٤٥ = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٤ × س

$\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٤س – ٤٥ = ٠

س^{٢} + ٨ س – ٩٠ = ٠

٢٤) م = ١١٠ سم^{٢}



مساحة المستطيل = الطول × العرض

(س + ٥) × ٢س = ١١٠

٢س^{٢} + ١٠س = ١١٠

٢س^{٢} + ٢٢س – ١٠س – ١١٠ = ٠

٢س(س + ١١) – ١٠(س + ١١) = ٠

(س + ١١)(٢س - ١٠) = ٠

٢س – ١٠ = ٠

س = ٥

$س^{٢} + ٨ س = ٩٠$

$(\frac{٨}{٢})^{٢} = ١٦$

$س^{٢} + ٨ س + ١٦ = ٩٠ + ١٦$

$(س + ٤)^{٢} = ١٠٦$

$(س + ٤) = \pm \sqrt{١٠٦}$

$س = ١٠٦ - ٤$ $\quad$ $س = ٦,٢$

---

٢٥) نظرية الأعداد: عددان صحيحان زوجيان متتاليان ناتج ضربهما ٢٢٤، فما هما؟

$س (س + ٢) = ٢٢٤$

$س^{٢} + ٢س = ٢٢٤$

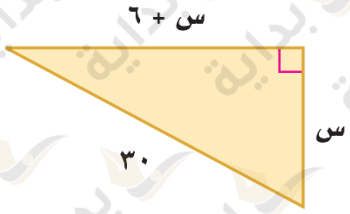
$س^{٢} + ٢س - ٢٢٤ = ٠$

$(س + ١٦) (س - ١٤) = ٠$

العددان هما ١٤، ١٦

---

٢٦) هندسة: أوجد مساحة المثلث المجاور .



مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

باستخدام نظرية فيثاغورث

$(٣٠)^{٢} = (س + ٦)^{٢} + (س)^{٢}$

$٩٠٠ = س^{٢} + ٣٦ + ١٢س + س^{٢}$

$٨٦٤ = ٢س^{٢} + ١٢س$

$٢س^{٢} + ١٢س - ٨٦٤ = ٠$

$س^{٢} + ٦س - ٤٣٢ = ٠$

$(س - ١٨) (س + ٢٤) = ٠$

$س - ١٨ = ٠$ $\quad$ $س = ١٨$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × (١٨ + ٦) × ١ = ٢١٦ سم^{٢}

٢٧) علم الفلك: يُعبر عن ارتفاع جسم بعد ثانية من سقوطه بالمعادلة ل = - $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}، حيث (ل) الارتفاع الابتدائي، (جـ) التسارع الناتج عن الجاذبية، فإذا كان تسارع الجاذبية على سطح كوكب المريخ ٣,٣٧ م/ث^{٢}، وعلى سطح الأرض ٩,٨م/ث^{٢}، وسقط الجسم من ارتفاع ابتدائي مقداره ١٢٠متراً فوق سطح كل من الكوكبين، فأجب عن السؤالين الآتيين:

أ) أي الكوكبين يصل الجسم إلى سطحه أو لا؟

الأرض، لأن سرعة كوكب الأرض أكبر من سرعة كوكب المريخ.

ب) كم يستغرق الجسم للوصول إلى سطح كل من الكوكبين مقربا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة؟

- $\frac{١}{٢}$ × (٣,٣٧) ن^{٢} + ١٢٠ = ٠	- $\frac{١}{٢}$ × (٩,٨) ن^{٢} + ١٢٠ = ٠
$\frac{١}{٢}$ × (٣,٣٧) ن^{٢} = ١٢٠	$\frac{١}{٢}$ × (٩,٨) ن^{٢} = ١٢٠
ن^{٢} = ٧١,٢١	ن^{٢} = ٢٤,٤٨
ن = $\sqrt{٧١,٢١}$ ← ن = ٨,٤٣	ن = $\sqrt{٢٤,٤٨}$ ← ن = ٤,٩
المريخ = ٨ ثواني تقريباً	الأرض = ٤,٩ ثواني تقريباً

٢٨) أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود: س^{٢} + جـ س + ٢٢٥ مربعاً كاملًا.

لإيجاد الحد الأوسط = ٢ × جذر الحد الأول × جذر الحد الثاني

الحد الأوسط = ٢ × ١ × ١٥ = ٣٠

ج = -٣٠، ٣٠

٢٩) رسم : إذا كان لدي أحمد إطار طوله ٦٠ بوصة، وعرضه ٤ بوصات، ويرغب في زيادة بعدي الإطار علي أن تكون الزيادة في الطول تعادل ١٠ أمثال الزيادة في العرض ؛ لتناسب قطعة قماش مساحتها ٤٨٠ بوصة مربعة . فما بعدا الإطار الجديد؟

س = ٦٠ ص = ٤

بفرض أن الطول والعرض الجديد بعد الزيادة هو جـ و د

جـ = س + ١٠ع د = ص + ع

جـ = ٦٠ + ١٠ع د = ٤ + ع

٤٨٠ = (٦٠ + ١٠ع) (٤ + ع)

٢٤٠ + ٦٠ع + ٤٠ع + ١٠ع^{٢} = ٤٨٠

ع^{٢} + ١٠ع – ٢٤ = ٠ ÷ ١٠

(ع + ١٢) (ع – ٢) = ٠

ع = ٢

ع = - ١٢

ج = ٦٠ + ١٠ × ٢ = ٨٠ سم د = ٤ + ٢ = ٦ سم

---

٣٠) تمثيلات متعددة: سوف تستكشف في هذه المسألة خاصية للمعادلات التربيعية.

أ) جدوليا: انسخ الجدول المجاور وأكمل العمود الثاني

ثلاثية الحدود	ب^{٢} – ٤ أ جـ	عدد الجذور
س^{٢} – ٨س + ١٦	٠	١
٢س – ١١س + ٣	٩٧	
٣س^{٢} + ٦س + ٩	-٧٢	
س^{٢} – ٢س + ٧	-٢٤	
س^{٢} + ١٠س + ٢٥	٠	
س^{٢} + ٣س - ١٢	٥٧	

ب) جبريا :اكتب كل ثلاثية حدود على صورة معادلة طرفها الأيمن يساوي صفر، وحلها بإكمال المربع، وأكمل العمود الثالث في الجدول بكتابة عدد جذور كل معادلة

ثلاثية الحدود	ب^{٢} – ٤ أ جـ	عدد الجذور
س^{٢} – ٨س + ١٦	٠	١
٢س – ١١س + ٣	٩٧	٢
٣س^{٢} + ٦س + ٩	-٧٢	٠
س^{٢} – ٢س + ٧	-٢٤	٠
س^{٢} + ١٠س + ٢٥	٠	١
س^{٢} + ٣س - ١٢	٥٧	٢

س^{٢} – ٨س + ١٦ = ٠

س^{٢} – ٨س = -١٦

$(-\frac{٨}{٢})^{٢}$ = ١٦

س^{٢} – ٨س + ١٦ = ١٦ – ١٦

(س – ٤)^{٢} = ٠

(س – ٤) (س – ٤) = ٠

س = ٤

٢س^{٢} – ١١س + ٣ = ٠

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

$س = \frac{١١ \pm \sqrt{(-١١)^{٢} - ٤ \times ٢ \times ٣}}{٤}$

$س = \frac{١١ \pm \sqrt{٩٧}}{٤}$

$س = \frac{١١ + \sqrt{٩٧}}{٤}$ = ٥,٢

$س = \frac{١١ - \sqrt{٩٧}}{٤}$ = ٠,٣

٣س^{٢} + ٦س + ٩ = ٠

ب^{٢} – ٤ أ ج

$(٦)^{٢}$ – ٤ × ٣ × ٩ = ٣٦ – ١٠٨

$(٦)^{٢}$ – ٤ × ٣ × ٩ = -٧٢

المعادلة ليس لها حلول حقيقية لأن قيمة ب ^{٢} – ٤ أ ج قيمة سالبة

$س^{٢} - ٢س + ٧ = ٠$

$س^{٢} - ٢س = -٧$

$ب^{٢} - ٤ أ ج$

$-٢^{٢} - ٤ \times ١ \times ٧ = ٤ - ٢٨ = -٢٤$

$٦^{٢} - ٤ \times ٣ \times ٩ = -٧٢$

المعادلة ليس لها حلول لأن قيمة $ب^{٢} - ٤ أ ج$ قيمة سالبة

$س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠$

$س^{٢} + ١٠س = -٢٥$

$(\frac{١٠}{٢})^{٢} = ٢٥$

$س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = -٢٥ + ٢٥$

$س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠$

$(س + ٥)^{٢} = ٠$

$(س + ٥) = \sqrt{٠}$

$(س + ٥) = ٠$

$س = -٥$

$س^{٢} + ٣س - ١٢ = ٠$

$س^{٢} + ٣س = ١٢$

$(\frac{٣}{٢})^{٢} = \frac{٩}{٤}$

$س^{٢} + ٣س + \frac{٩}{٤} = ١٢ + \frac{٩}{٤}$

$س^{٢} + ٣س + \frac{٩}{٤} = ١٤,٢٥$

$(س + \frac{٣}{٢})^{٢} = ١٤,٢٥$

س + $\frac{٣}{٢}$ = $\pm\sqrt{١٤,٢٥}$

س = -٣,٣

س = ٢,٣

جـ) لفظياً: قارن عدد الجذور لكل معادلة بالنتيجة في العمود ب ٢ – ٤ أ جـ، وهل هناك علاقة بينهما؟ وإن كانت هناك علاقة فنصفها.

إذا كان ب٢ – ٤ أ ج سالباً فلا توجد حلول حقيقية، وإذا كان صفراً فهناك حل واحد، وإذا كان موجباً فهناك حلان.

د) تحليلاً: تنبأ بعدد حلول ٢س٢ – ٩س – ١٥ = ٠، وتحقق من صحة تنبئك بحل المعادلة.

س = $\frac{-\text{ ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$

س = $\frac{٩ \pm \sqrt{٩^{٢} - ٤ \times ٢ \times -١٥}}{٤}$

س = $\frac{٩ \pm \sqrt{٣٩-}}{٤}$

بما أن إشارة ب ٢ – ٤ أ ج سالبة فلا توجد حلول حقيقية؛ لأن الجذر التربيعي لعدد سالب لا يكون حقيقياً.

٣١) تحد: اشتق معادلة محور التماثل بإكمال المربع للمعادلة ص = أ س^{٢}+ ب س + جـ ، أ ≠ ٠،
وأعد كتابة المعادلة على الصورة ص= أ(س ـ هـ) ^{٢}+ ك

ص = أ س^{٢} + ب س + ج

ص = أ (س^{٢} + $\frac{ب}{أ}$ س) + ج ،

ص = أ [س^{٢} + $\frac{ب}{أ}$ س + ($\frac{ب}{٢أ}$)^{٢}] + ج – أ ($\frac{ب}{٢أ}$)^{٢}

ص = أ [س + ($\frac{ب}{٢أ}$)]^{٢} + $\frac{4أ ج – ب^{٢}}{4أ}$

ص = أ [س - ($\frac{-ب}{٢أ}$)]^{٢} + $\frac{4أ ج – ب^{٢}}{4أ}$

وتكتب المعادلة الأخيرة على الصورة

ص = أ (س – هـ)^{٢} + ك حيث هـ = $\frac{-ب}{٢أ}$ ،

ك = $\frac{4أ ج – ب^{٢}}{4أ}$

محور التماثل هو س = $\frac{-ب}{٢أ}$

---

٣٢) تبرير: حدد عدد حلول المعادلة س ^{٢}+ ب س = جـ إذا كانت جـ < - ($\frac{ب}{٢}$)^{٢}. فسر إجابتك.

لا يوجد، إذا أضفت (- $\frac{ب}{٢}$)^{٢} إلى كل من طرفي المتباينة وطرفي المعادلة فسوف تحصل على

س^{٢} + ب س + ($\frac{ب}{٢}$)^{٢} = ج + ($\frac{ب}{٢}$)^{٢}، ج + ($\frac{ب}{٢}$)^{٢} < ٠ وبما أن الطرف الأيمن للمعادلة الأخيرة هو مربع كامل، فلا يمكن أن يساوي عدداً سالباً إذن لا توجد حلول حقيقية.

٣٣) حدد العبارة التي تختلف عن العبارات الثلاث الأخرى. وفسر إجابتك.

$ن^{٢} - ن + \frac{١}{٤}$ $ن^{٢} + ن + \frac{١}{٤}$ $ن^{٢} - \frac{٢}{٣} ن + \frac{١}{٩}$ $ن^{٢} + \frac{١}{٣} ن + \frac{١}{٩}$

$ن^{٢} + \frac{١}{٣} ن + \frac{١}{٩}$ ، هي ثلاثية الحدود الوحيدة التي لا تمثل مربعاً كاملاً.

---

٣٤) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة تربيعية حلها الوحيد هو ٤.

$(س - ٤)^{٢} = ٠$

$س^{٢} - ٨س + ١٦ = ٠$

---

٣٥) اكتب: قارن بين الطرق الآتية: إكمال المربع، التمثيل البياني، التحليل للعوامل التي تستعمل لحل المعادلة: $س^{٢} - ٥س - ٧ = ٠$

بما أن المعامل الرئيسي يساوي ١ فإن طريقة إكمال المربع هي الأفضل ويمكن تمثيل الدالة المرتبطة باستعمال الحاسبة البيانية وهذه الطريقة مناسبة للتقدير فقط أما التحليل فغير ممكن.

---

٣٦) إذا كان طول مستطيل يساوي ثلاثة أمثال عرضه ومساحته ٧٥ سنتمتراً مربعاً. فما طوله؟

أ) ٢٥ سم ب) ١٥ سم ج) ١٠ سم د) ٥ سم

مساحة المستطيل = الطول × العرض

نفرض أن العرض = ص

إذن الطول = ٣ ص

$٧٥ = ٣ ص^{٢}$

$ص^{٢} = ٢٥$

$ص = \sqrt{٢٥}$

ص = ٥

الطول = ٣ × ٥ = ١٥

الاختيار الصحيح: ب) ١٥ سم

٣٧) إجابة قصيرة: يمكن تمثيل عدد سكان إحدى المدن بالمعادلة ص = ٢٢٠٠٠ + ١٢٠٠ن، حيث (ص) عدد السكان، (ن) عدد السنوات بعد عام ١٤٣٨هـ، ما عدد السنوات اللّازمة بعد عام ١٤٣٨هـ ليصبح عدد سكانها ٢٨٠٠٠نسمة؟

٢٨٠٠٠ = ٢٢٠٠٠ + ١٢٠٠ن

١٢٠٠ ن = ٢٨٠٠٠ – ٢٢٠٠٠ = ٦٠٠٠

ن = ٥ إذن عدد السنوات = ٥ سنوات

مراجعة تراكمية

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً:

٣٨) $\frac{أ^{٦}}{أ^{٣}}$

$أ^{٦-٣} = أ^{٣}$

٣٩) $\frac{٤^{٧}}{٤^{٥}}$

$٤^{٧-٥} = ٤^{٢} = ١٦$

٤٠) $\frac{جـ^{٣} د^{٤}}{جـ د^{٧}}$

$جـ^{٣-١} د^{٤-٧} = جـ^{٢} د^{-٣} = \frac{جـ^{٢}}{د^{٣}}$

حل كلاً من المتباينات الآتية:

٤١) | ٣ – ٢ص | ≤ ٨

| ٣ – ٢ص | ≤ ٨

-٢ص ≤ ٨ – ٣

-٢ص ≤ ٥

ص ≥ $-\frac{٥}{٢}$

ص ≥ -٢,٥

٢ص ≥ ٨ + ٣

٢ص ≥ ١١

ص ≥ $\frac{١١}{٢}$

ص ≤ ٥,٥

{ ص | ص ≤ ٥,٥ أو ص ≥ -٢,٥ }

٤٢) | ٥ب – ٢ | ≥ ١٣

| ٥ب – ٢ | ≥ ١٣

٥ب ≥ ١٣ + ٢

٥ب ≥ ١٥

ب ≥ $\frac{١٥}{٥}$

ب ≥ ٣

-٥ب ≤ ١٣ – ٢

٥ب ≤ -١١

ب ≤ $-\frac{١١}{٥}$

ب ≤ -٢,٢

{ ب | -٢,٢ ≥ ب ≥ ٣ }

احسب قيمة $\pm$ ب ^{٢} – ٤ أ جـ في كل من الحالات التالية:

٤٣) أ = ٢، ب = - ٥ ، جـ = ٢

$= \pm \sqrt{(-٥)^{٢} - ٤ (٢) (٢)}$

$= \pm \sqrt{٢٥ - ١٦} = \pm \sqrt{٩} = \pm ٣$

٤٤) أ = ١ ، ب = ١٢، جـ = ١١

$= \pm \sqrt{(١٢)^{٢} - ٤ (١) (١١)}$

$= \pm \sqrt{١٤٤ - ٤٤} = \pm \sqrt{١٠٠} = \pm ١$

٤٥) أ = ٢ ، ب = -٤ ، جـ = -٦

$= \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤ (٢) (-٦)}$

$= \pm \sqrt{١٦ + ٤٨} = \pm \sqrt{٦٤} = \pm ٨$

٤٦) أ = ٣ ، ب = ١ ، جـ = ٢

$= \pm \sqrt{(١)^{٢} - ٤ (٣) (٢)}$

$= \pm \sqrt{١ - ٢٤} = \pm \sqrt{٢٣}$

١) حل المعادلة باستعمال القانون العام:

أ) ٢س^{٢} + ٩س = ١٨

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٩ \pm \sqrt{(٩)^{٢} - ٤ \times ٢ \times -١٨}}{٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٩ \pm \sqrt{٢٢٥}}{٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٩ + ١٥}{٢ \times ٢} = \frac{٣}{٢}$$

$$س = \frac{-٩ - ١٥}{٢ \times ٢} = -٦$$

ب) ٤س^{٢} – ٢٤س + ٣٥ = ٠

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{٢٤ \pm \sqrt{(-٢٤)^{٢} - ٤ \times ٤ \times ٣٥}}{٤ \times ٢}$$

$$س = \frac{٢٤ \pm \sqrt{١٦}}{٨}$$

$$س = \frac{٢٤ + ٤}{٨} = \frac{٧}{٢}$$

$$س = \frac{٢٤ - ٤}{٨} = \frac{٥}{٢}$$

٢) حل المعادلة ٣س^{٢} – ٢س – ٩ = ٠ باستعمال القانون العام، مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريا:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{٢ \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ \times ٣ \times -٩}}{٣ \times ٢}$$

$$س = \frac{٢ \pm \sqrt{١١٢}}{٦}$$

$$س = \frac{٢ + ١٠,٦}{٦} = ٢,١$$

$$س = \frac{٢ - ١٠,٦}{٦} = -١,٤$$

٣) حل المعادلة:

أ) $٢س^{٢} - ١٧ س + ٨ = ٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{١٧ \pm \sqrt{(-١٧)^{٢} - ٤ \times ٢ \times ٨}}{٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{١٧ \pm \sqrt{٢٢٥}}{٤}$$

$$س = \frac{١٧ + ١٥}{٤} = ٨$$

$$س = \frac{١٧ - ١٥}{٤} = \frac{١}{٢}$$

ب) $٤س^{٢} - ٤س - ١١ = ٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{٤ \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤ \times ٤ \times -١١}}{٤ \times ٢}$$

$$س = \frac{٤ \pm \sqrt{١٩٢}}{٨}$$

$$س = \frac{٤ + \sqrt{١٩٢}}{٨} \approx ٢,٢$$

$$س = \frac{٤ - \sqrt{١٩٢}}{٨} \approx -١,٢$$

٤) أوجد قيمة المميز للمعادلات التالية ثم حدد عدد حلولها الحقيقية:

أ) $٢س^{٢} + ١١ س + ١٥ = ٠$

$ب^{٢} - ٤ أ جـ = (١١)^{٢} - ٤ \times ٢ \times ١٥ = ١$

بما أن المميز موجب إذن يوجد حلان حقيقيان.

ب) $٩س^{٢} - ٣٠س + ٢٥ = ٠$

$ب^{٢} - ٤ أ جـ = (-٣٠)^{٢} - ٤ \times ٩ \times ٢٥ = ٠$

بما أن المميز يساوي صفر إذن يوجد حل حقيقي واحد.

تأكد

المثالان ١ ، ٢: حل كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

١) $س^{٢} - ٢س - ١٥ = ٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{٢ \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times -١٥}}{٢ \times ١}$$

$$س = \frac{٢ \pm \sqrt{٦٤}}{٢}$$

$$س = \frac{٢ + ٨}{٢} = ٥$$

$$س = \frac{٢ - ٨}{٢} = -٣$$

٢) $س^{٢} - ٨س = -١٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س^{٢} - ٨س + ١٠ = ٠$$

$$س = \frac{٨ \pm \sqrt{(-٨)^{٢} - ٤ \times ١ \times ١٠}}{٢ \times ١}$$

$$س = \frac{٨ \pm \sqrt{٢٤}}{٢}$$

$$س = \frac{٨ + \sqrt{٢٤}}{٢} \approx ٦,٤$$

$$س = \frac{٨ - \sqrt{٢٤}}{٢} \approx ١,٦$$

٣) $٥س^{٢} + ٥ = -١٣س$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$٥س^{٢} + ١٣س + ٥ = ٠$$

$$س = \frac{-١٣ \pm \sqrt{(١٣)^{٢} - ٤ \times ٥ \times ٥}}{٢ \times ٥}$$

$$س = \frac{-١٣ \pm \sqrt{٦٩}}{٢}$$

$$س = \frac{-١٣ + \sqrt{٦٩}}{٢} = -٠,٥$$

$$س = \frac{-١٣ - \sqrt{٦٩}}{٢} = -٢,١$$

مثال ٣: حل كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

٤) $٢س^{٢} + ١١س - ٦ = ٠$

التحليل إلي العوامل

$٢س^{٢} + ١٢ - س - ٦ = ٠$

$= ٢س (س + ٦) - (س + ٦)$

$= (س + ٦) (٢س - ١)$

$س + ٦ = ٠$

$س = -٦$

$٢س = ١$

$س = \frac{١}{٢}$

٥) $٢س^{٢} - ٣س - ٦ = ٠$

القانون العام

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

$س = \frac{٣ \pm \sqrt{(-٣)^{٢} - ٤ \times ٢ \times -٦}}{٢ \times ٢}$

$س = \frac{٣ \pm \sqrt{٥٧}}{٤}$

$س = \frac{٣ + \sqrt{٥٧}}{٤} \approx ١,١٣$

$س = \frac{٣ - \sqrt{٥٧}}{٤} \approx -٢,٦٣$

٦) $٩س^{٢} = ٢٥$

التحليل إلي عوامل

$٩س^{٢} - ٢٥ = ٠$

$(٣س - ٥) (٣س + ٥) = ٠$

$٣س - ٥ = ٠$

$س = \frac{٥}{٣}$

$س = -\frac{٥}{٣}$

مثال ٤: أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي ثم حدد عدد حلولها الحقيقية:

٧) $س^{٢} - ٩س + ٢١ = ٠$	٨) $٩س^{٢} + ٢٤س = -١٦$	٩) $٣س^{٢} - س = ٨$
$ب^{٢} - ٤ أ جـ = (-٩)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٢١ = -٣$	$ب^{٢} - ٤ أ جـ = (٢٤)^{٢} - ٤ \times ٩ \times ١٦ = ٠$	$ب^{٢} - ٤ أ جـ = (-١)^{٢} - ٤ \times ٣ \times -٨ = ٩٧$
-٣ ، لا توجد حلول حقيقية لأن قيمة المميز سالبة	٠ ، حل حقيقي واحد	٩٧ ، حلان حقيقيان

١٠) **منصة القفز:** يقفز خالد من فوق منصة القفز، حيث تمثل المعادلة ل = $-١٦ن^{٢} + ٢,٤ن + ٦$، ارتفاع خالد (ل) بعد (ن) من الثواني، استعمل المميز لتحديد ما إذا كان خالد سيصل إلي ارتفاع ٢٠ قدماً . فسر إجابتك.

$٢٠ = -١٦ن^{٢} + ٢,٤ن + ٦$

$-١٦ن^{٢} + ٢,٤ن - ١٤ = ٠$

$ب^{٢} - ٤أجـ = (٢,٤)^{٢} - ٤ \times -١٦ \times -١٤ = ٨٩٠,٢٤$

لا يوجد حل حيث أن المميز سالب، لذا فلن يصل خالد إلي ٢٠ قدماً.

تدرب وحل المسائل

المثالان ١، ٢: حل كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

١١) $٤س^{٢} + ٥س - ٦ = ٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٥ \pm \sqrt{(-٥)^{٢} - ٤ \times ٤ \times -٦}}{٢ \times ٤}$$

$$س = \frac{-٥ \pm \sqrt{١٢١}}{٨}$$

$$س = \frac{-٥ + ١١}{٨} \approx \frac{٣}{٤}$$

$$س = \frac{-٥ - ١١}{٨} \approx -٢$$

١٢) $س^{٢} + ١٦ = ٠$

$س^{٢} = -١٦$

$\emptyset$

١٣) $٦س^{٢} - ١٢س + ١ = ٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{١٢ \pm \sqrt{(-١٢)^{٢} - ٤ \times ٦ \times ١}}{٢ \times ٦}$$

$$س = \frac{١٢ \pm \sqrt{١٢٠}}{١٢}$$

$$س = \frac{١٢ + \sqrt{١٢٠}}{١٢} \approx ١,٩$$

$$س = \frac{١٢ - \sqrt{١٢٠}}{١٢} \approx ٠,٠٩$$

١٤) $٥س^{٢} - ٨س = ٦$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{٨ \pm \sqrt{(-٨)^{٢} - ٤ \times ٥ \times -٦}}{٢ \times ٥}$$

$$س = \frac{٨ \pm \sqrt{١٨٤}}{١٠}$$

$$س = \frac{٨ + \sqrt{١٨٤}}{١٠} \approx ٢,٢$$

$$س = \frac{٨ - \sqrt{١٨٤}}{١٠} \approx -٠,٦$$

١٥) $٥س^{٢} + ٢١س = -١٨$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-٢١ \pm \sqrt{(-٢١)^{٢} - ٤ \times ٥ \times ١٨}}{٢ \times ٥}$$

$$س = \frac{-٢١ \pm \sqrt{٨١}}{١٠}$$

$$س = \frac{-٢١ + ٩}{١٠} \approx -١,٢$$

$$س = \frac{-٢١ - ٩}{١٠} \approx -٣$$

١٦) $٢س^{٢} = ١٢س - ١٨$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{١٢ \pm \sqrt{(-١٢)^{٢} - ٤ \times ٢ \times ١٨}}{٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{١٢}{٤}$$

$$س = ٣$$

مثال ٣: حل كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

١٧) $٢س^{٢} - ٨س = ١٢$

القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{٨ \pm \sqrt{(-٨)^{٢} - ٤ \times ٢ \times -١٢}}{٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{٨ \pm \sqrt{١٦٠}}{٤}$$

$$س = \frac{٨ + \sqrt{١٦٠}}{٤} \approx ٥,٢$$

$$س = \frac{٨ - \sqrt{١٦٠}}{٤} \approx -١,٢$$

١٨) $٣س^{٢} - ٢٤س = -٣٦$

التحليل إلي العوامل

$$٣س^{٢} - ٢٤س + ٣٦ = ٠$$

$$س^{٢} - ٨س + ١٢ = ٠$$

$$(س + ٢)(س - ٦) = ٠$$

$$س = -٢$$

$$س = ٦$$

١٩) $س^{٢} - ٣س = ١٠$

التحليل إلي العوامل

$س^{٢} - ٣س - ١٠ = ٠$

$(س + ٢)(س - ٥) = ٠$

$س = -٢$

$س = ٥$

مثال ٤: أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي ثم حدد عدد حلولها الحقيقية:

٢٠) $س^{٢} - س = ٣$

$س^{٢} - \frac{٤}{٥}س - ٣ = ٠$

$ب^{٢} - ٤أجـ = (-\frac{٤}{٥})^{٢} - ٤ \times ١ \times -٣$

$= ١٢,٦٤$

حلان حقيقيان

٢١) $٩س^{٢} + ٢٤س = -١٦$

$٠,٥س^{٢} - ٢س + ٢ = ٠$

$ب^{٢} - ٤أجـ = (-٢)^{٢} - ٤ \times ٠,٥$

$\times ٢ = ٠$

حل حقيقي واحد

٢٢) $٣س^{٢} - س = ٨$

$٢,٠س^{٢} - ١,٥س + ٢,٩ = ٠$

$ب^{٢} - ٤أجـ = (-١,٥)^{٢}$

$- ٤ \times ٠,٢ \times ٢,٩ = -٠,٠٧$

لا يوجد حلول حقيقية

٢٣) **مرور:** تمثل المعادلة ف = ٠,٠٠٧ ع^{٢} + ٠,١٩ المسافة (ف) بالأمتار التي تقطعها سيارة تسير بسرعة (ع) كلم/ ساعة للتوقف تماماً بعد استعمال المكابح، فإذا كانت حدود السرعة القصوى في أحد الشوارع ٨٠ كلم/ساعة، وتوقفت سيارة منذر بعد ٥٥ متراً من استعماله المكابح، فهل كانت سرعته تزيد على السرعة القصوى؟ فسر تبريرك .

ف = ٠,٠٠٧ $\times$ (٨٠)^{٢} + ٠,١٩ $\times$ ٨٠

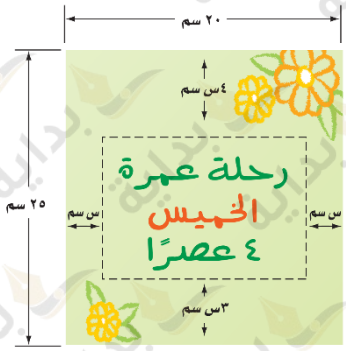
ف = ٦٠

المسافة للسرعة القصوى = ٦٠ متراً

والمسافة لـ منذر = ٥٥ متراً

إذن سرعة منذر لا تزيد عن السرعة القصوى

٢٤) إعلان: يعد راشد ملصقا للإعلان عن رحلة عمرة، ويريد أن يغطي جزءاً من المساحة بنصوص كتابية.



أ) أكتب معادلة لمساحة القسم النصي.

(٢٠ – ٢س) (٢٥ – ٧س) = ٣٧٥

ب) حل المعادلة باستعمال القانون العام.

(٢٠ – ٢س) (٢٥ – ٧س) = ٠

٥٠٠ – ١٤٠س – ٥٠س + ١٤س^{٢} = ٠

٥٠٠ – ١٩٠س + ١٤س^{٢} = ٠

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{١٩٠ \pm \sqrt{٢١٩٠^{٢} - ٤ \times ١٤ \times ٥٠٠}}{٢٨}$$

$$س = \frac{١٩٠ \pm \sqrt{٨١٠٠}}{٢٨}$$

$$س = \frac{١٩٠ \pm ٩٠}{٢٨}$$

$$س = \frac{١٩٠ + ٩٠}{٢٨} = ١٠$$

$$س = \frac{١٩٠ - ٩٠}{٢٨} = ٣,٥٧$$

جـ) كم يجب أن تكون هوامش الملصق؟

هوامش الملصق ٧س، ٢س أي ٧٠، ٢٠

حدد دون استعمال التمثيل البياني عدد المقاطع السينية لكل دالة فيما يأتي:

٢٥) ٤,٢٥ س + ٣ = - ٣ س^{٢}

٣ س ^{٢} + ٤,٢٥ س + ٣ = ٠

ب ^{٢} – ٤أجـ = (٤,٢٥)^{٢} – ٤ × ٣ × ٣ ≈ -١٧,٩

قيمة المميز سالبة، إذن لا يوجد مقاطع سينية لهذه المعادلة

صفر

---

٢٦) س^{٢} + $\frac{٢}{٢٥}$ = $\frac{٣}{٥}$ س

٢٥ س^{٢} – ١٥ س + ٢ = ٠

ضرب طرفي المعادلة × ٢٥

٢٥ س^{٢} + ٥ س – ١٠ س + ٢ = ٠

٥ س (٥ س + ١) – ٢ (٥ س + ١) = ٠

(٥ س – ٢) (٥ س + ١) = ٠

س = - $\frac{١}{٥}$

س = $\frac{٢}{٥}$

عدد المقاطع السينية = ٢

٢٧) ٠,٢٥ س^{٢} + س = -١

ضربي طرفي المعادلة × ١٠٠

٢٥ س^{٢} + ١٠٠ س + ١٠٠ = ٠

س= $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

س = $\frac{-١٠٠ \pm \sqrt{١٠٠^{٢} - ٤ \times ٢٥ \times ١٠٠}}{٢ \times ٢٥}$

= $\frac{-١٠٠}{٢ \times ٢٥}$ = -٢

عدد المقاطع السينية = ١

حل كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

٢٨) $-٢ س^{٢} - ٧ س = -١,٥$

$-٢ س^{٢} - ٧ س + ١,٥ = ٠$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$

$س = \frac{٧ \pm \sqrt{(-٧)^{٢} - ٤ \times -٢ \times ١,٥}}{٢ \times -٢}$

$س = \frac{٧ \pm \sqrt{٦١}}{-٤}$

$س = \frac{٧ + \sqrt{٦١}}{٤} = ٣,٧$

$س = \frac{٧ - \sqrt{٦١}}{٤} = -٠,٢$

٢٩) $٢,٣ س^{٢} - ١,٤ س = ٦,٨$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$

$٢,٣ س^{٢} - ١,٤ س - ٦,٨ = ٠$

$س = \frac{٤,١ \pm \sqrt{(-١,٤)^{٢} - ٤ \times ٢,٣ \times ٦,٨}}{٢ \times ٢,٣}$

$س = \frac{١,٤ \pm \sqrt{٦٤,٥٢}}{٤,٦}$

$س = \frac{١,٤ + \sqrt{٦٤,٥٢}}{٤,٦} = ٢,٠٥$

$س = \frac{١,٤ - \sqrt{٦٤,٥٢}}{٤,٦} = -١,٤$

٣٠) $س^{٢} - ٢ س = ٥$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$

$س^{٢} - ٢ س - ٥ = ٠$

$س = \frac{٢ \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times -٥}}{٢ \times ١}$

$س = \frac{٢ \pm \sqrt{٢٤}}{٢}$

$س = \frac{٢ + \sqrt{٢٤}}{٢} = ٣,٤$

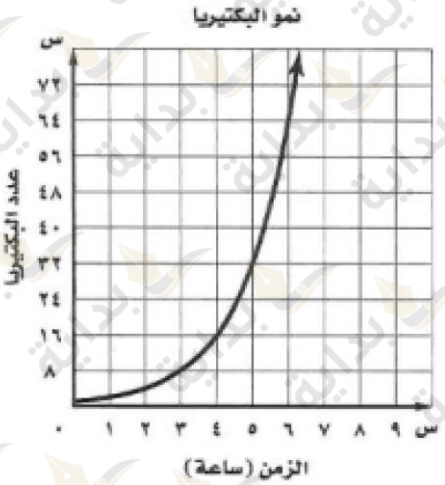
$س = \frac{٢ - \sqrt{٢٤}}{٢} = -١,٤$

٣١) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف الدوال الأسية في هذه المسألة:

أ) **جدولياً: انسخ الجدول الاتي وأكمله:**

الزمن (ساعة)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد البكتيريا	$١ = ٢^{٠}$	$٢ = ٢^{١}$	$٤ = ٢^{٢}$	$٨ = ٢^{٣}$	$١٦ = ٢^{٤}$	$٣٢ = ٢^{٥}$	$٦٤ = ٢^{٦}$

ب) **بيانياً: مثل المعلومات المعطاة في الجدول بيانياً باستعمال النقاط (الزمن، عدد البكتيريا)، وهل التمثيل خطي أم تربيعي أم غير ذلك؟**



التمثيل البياني ليس خطيا ولا تربيعياً.

ج) **تحليلياً: ماذا يحدث لعدد البكتيريا كل ساعة؟ اكتب دالة تمثل هذا النمط.**

يتضاعف عدد البكتيريا كل ساعة د (س) = $٢^{س}$

٣٢) تحد: أوجد جميع قيم ك التي تجعل للمعادلة ك: " ٢س^{٢} – ٣ س + ٥ ك = ٠ " حلين حقيقيين.

ك $< \frac{٩}{٤٠}$

٢ س^{٢} – ٣ س + ٥ ك = ٠

ب^{٢} – ٤ أ ج = (- ٣)^{٢} – ٤ × ٢ × ٥ك

= ٩ – ٤٠ ك

٩ – ٤٠ ك = ٠

ك = $\frac{٩}{٤٠}$

ك $< \frac{٩}{٤٠}$

تبرير: بين فيما إذا كان عدد الحلول الحقيقية لكل مما يأتي حلان، أو حل واحد، أو لا يوجد حل:

٣٣) التمثيل البياني لدالة تربيعية لا تحتوي على مقطع سيني.

لا يوجد حل

٣٤) التمثيل البياني لدالة تربيعية تمس محور السينات.

حل واحد

٣٥) التمثيل البياني لدالة تربيعية تقطع محور السينات مرتين.

حلان

٣٦) قيمتا كل من أ، ب أكبر من صفر، وقيمة جـ أصغر من صفر في الصيغة القياسية للدالة التربيعية.

حلان

---

٣٧) مسألة مفتوحة: اكتب ٣ دوال تربيعية على أن يكون مميز الأولى موجب، ومميز الثانية سالباً، ومميز الثالثة صفراً.

المميز موجب للدالة د (س) = س^{٢} – ٤

المميز سالب للدالة د (س) = س^{٢} + ٤

المميز صفر للدالة د (س) = س^{٢} – ٨ س + ١٦

٣٨) اكتب: وضح طرق حل المعادلات التربيعية، واعط مثالاً مختلفاً لكل طريقة. فسر إجابتك.

التحليل طريقة سهلة عندما تكون ثلاثية الحدود قابلة للتحليل

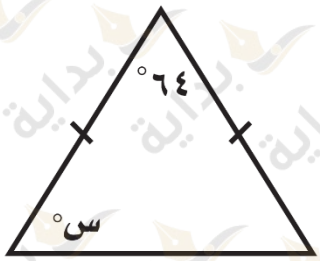
التمثيل البياني: يعطي فقط جذورا تقريبية لإيجاد الجذر التربيعي طريقة سهلة

عندما تكون المعادلة من الشكل أ س^{٢} + ب = ٠

إكمال المربع: طريقة مضمونة لحل جميع المعادلات التربيعية

القانون العام: طريقة مضمونة لحل جميع المعادلات التربيعية

تدريب على اختبار



٣٩) إجابة قصيرة: إذا علمت أن المثلث المجاور متطابق الضلعين، فما قيمة س؟

زوايا المثلث = ١٨٠°

وبما أن المثلث متطابق الضلعين إذن زوايا القاعدة متساوية

س = ٦٤°

أو س = $\frac{١٨٠ - ٦٤}{٢}$ = ٥٨°

٤٠) ما حلول المعادلة التربيعية ٦هـ^{٢} + ٦هـ = ٧٢؟

أ) ٣ أو -٤ جـ) لا يوجد حلول حقيقية

ب) -٣ أو ٤ د) ١٢ أو -٤٨

٦هـ^{٢} + ٦هـ – ٧٢ = ٠

هـ^{٢} + هـ – ١٢ = ٠

(هـ – ٣) (هـ + ٤) = ٠

هـ = ٣

هـ = -٤

الاختيار الصحيح: أ) ٣ أو -٤

مراجعة تراكمية

حل كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع مقرباً الحل إلي أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

(الدرس ٨–٣)

٤١) $٦س^{٢} - ١٧س + ١٢ = ٠$

$٦س^{٢} - ١٧س = -١٢$

$س^{٢} - \frac{١٧}{٦}س = ٢-$

$(\frac{-١٧}{١٢})^{٢} = \frac{٢٨٩}{١٤٤}$

$س^{٢} - \frac{١٧}{١٢}س + \frac{٢٨٩}{١٤٤} = ٢ + \frac{٢٨٩}{١٤٤}$

$س^{٢} - \frac{١٧}{٦}س + \frac{٢٨٩}{١٤٤} = \frac{٥٧٧}{١٤٤}$

$(س - \frac{١٧}{١٢})^{٢} = \frac{٥٧٧}{١٤٤}$

$س - \frac{١٧}{١٢} = \pm\sqrt{\frac{٥٧٧}{١٤٤}} = ٣,٤$

$س = -٠,٥٨$

٤٢) $س^{٢} - ٩س = -١٢$

$س^{٢} - ٩س = -١٢$

$(\frac{-٩}{٢})^{٢} = \frac{٨١}{٤}$

$س^{٢} - ٩س + \frac{٨١}{٤} = -١٢ + \frac{٨١}{٤}$

$(س - \frac{٩}{٢})^{٢} = \frac{٣٣}{٤}$

$س - \frac{٩}{٢} = \sqrt{\frac{٣٣}{٤}}$

$س = ٧,٣٧$ ، $س = ١,٦٢$

٤٣) $٤س^{٢} = ٢٠س - ٢٥$

$٤س^{٢} - ٢٠س = -٢٥$

$س^{٢} - ٥س = -\frac{٢٥}{٤}$

$(\frac{-٥}{٢})^{٢} = \frac{٢٥}{٤}$

$س^{٢} - ٥س + \frac{٢٥}{٤} = -\frac{٢٥}{٤} + \frac{٢٥}{٤}$

$س^{٢} - ٥س + \frac{٢٥}{٤} = ٠$

$(س - \frac{٥}{٢})^{٢} = ٠$

$س = \frac{٥}{٢}$

لتكن ص = س^{٢} – ٥س + ٤. (الدرس ٨–١)

٤٤) اكتب معادلة محور التماثل.

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٥}{١ \times ٢} = ٢,٥$

معادلة محور التماثل عند س = ٢,٥

٤٥) أوجد إحداثيات نقطة الرأس، وهل هي نقطة عظمي أم صغري؟

عند س = ٢,٥

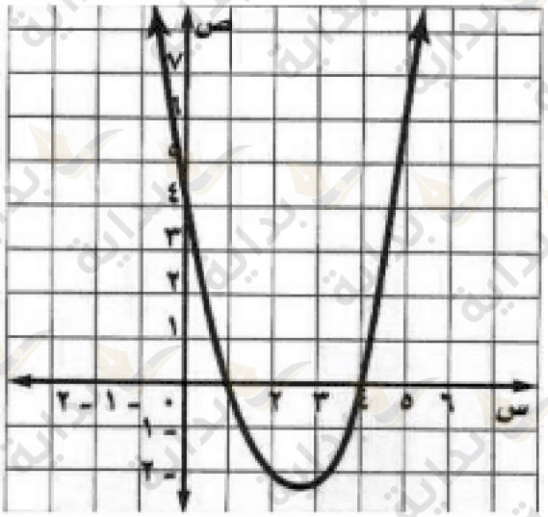
ص = (٢,٥)^{٢} – ٥ × ٢,٥ + ٤

ص = ٦,٢٥ – ١٢,٥ + ٤

ص = -٢,٢٥

(٢,٥، -٢,٥) نقطة صغري

٤٦) مثل الدالة البيانية؟



٤٧) حدد مجال الدالة ومداها

المجال = جميع الأعداد الحقيقية

المدي = { ص | ص ≤ -٢٥، ٢ }

أوجد ناتج كل مما يأتي:

٤٨) $\sqrt{١٠٠}$ $\sqrt{١٠٠} = \pm ١٠$	٤٩) $\sqrt{\frac{٩}{١٦}}$ $\sqrt{\frac{٩}{١٦}} = \pm \frac{٣}{٤}$	٥٠) $\sqrt{٠,٠١}$ $\sqrt{٠,٠١} = \pm ٠,١$
٥١) $\sqrt[٤]{\frac{٤}{٣}}$ $\sqrt[٤]{\frac{٤}{٣}} = \pm \frac{٢}{٣}$	٥٢) $\frac{٢}{\sqrt{١٦}}$ $\frac{٢}{\sqrt{١٦}} = \pm \frac{٢}{٤}$	٥٣) $\sqrt{٨١}$ $\sqrt{٨١} = \pm ١٠$

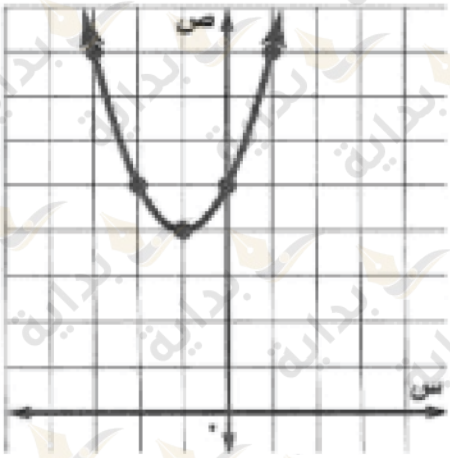
الفصل ٨

اختبار الفصل

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالتين الآتيتين بيانياً، وحدد مجالهما ومداهما:

١) ص = س^{٢} + ٢س + ٥

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٨	٥	٤	٥	٨	١٣

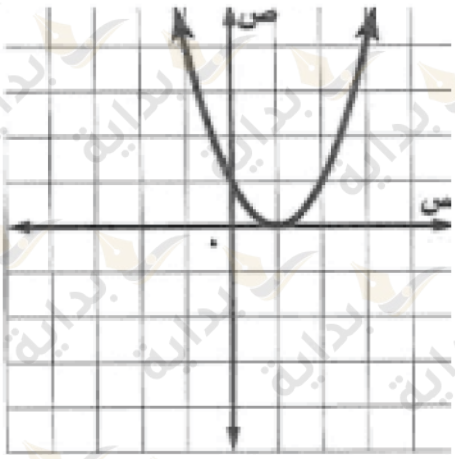


المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدي: { ص | ص > ٤ }

٢) ص = ٢س^{٢} - ٣س + ١

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	١٥	٦	١	٠	٣	١٠



المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدي: { ص | ص > ١ }

إذا كانت: ص = س^{٢} – ٧س + ٦

٣) حدد ما إذا كان يمثل نقطة صغرى أو عظمى.

قيمة صغرى لأن قيمة أ قيمة موجبة.

٤) أوجد القيمة العظمي أو الصغرى للدالة.

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٧}{١\times٢} = ٣,٥$

س = ٣,٥

ص = (٣,٥)^{٢} – ٧×٣,٥ + ٦ = ٦,٢٥-

القيمة الصغرى = ٦,٢٥-

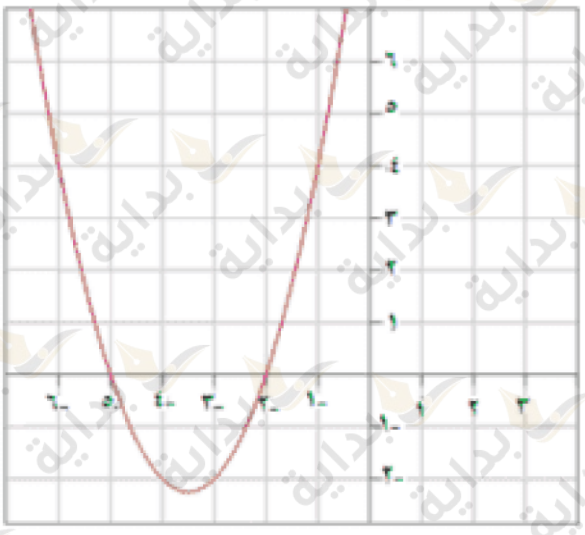
٥) حدد مجال الدالة ومداها.

المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدي: { ص | ص ≤ ٦,٢٥- }

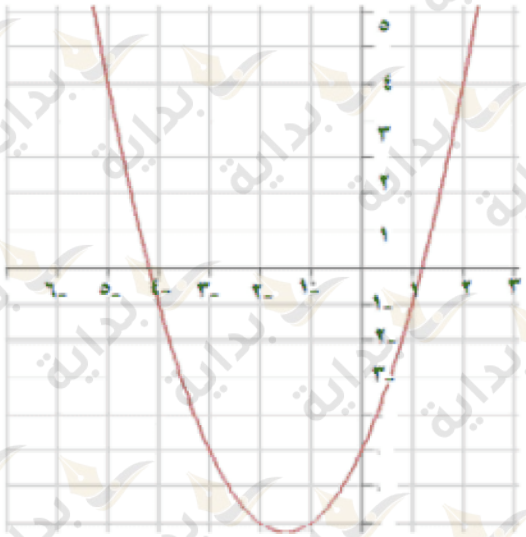
حل كل من المعادلتين الآتيتين بيانياً، وإذا لم تكن الجذور أعداداً صحيحة فقدرها إلى أقرب جزء من عشرة:

٦) س^{٢} + ٧س + ١٠ = ٠



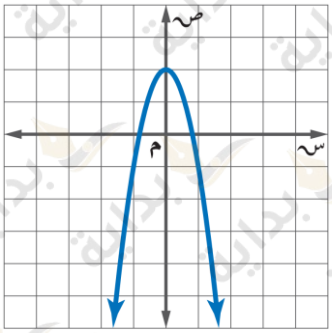
س = ٥-، ٢-

٧) س^{٢} – ٥ = ٣-س



س = ٤,٢-، ١,٢

٨) **اختيار من متعدد:** أي المعادلات الآتية تعبرعن الدالة الممثلة بيانياً أدناه؟



أ) ص = -٣س^{٢}

ب) ص = ٣س^{٢} + ١

جـ) ص = س^{٢} + ٢

د) ص = -٣س^{٢} + ٢

حل كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال إكمال المربع:

٩) س^{٢} - س - ٦ = ٠

س^{٢} - س - ٦ = ٠

(س – ٣) (س + ٢) = ٠

س = ٣ ، س = -٢

١٠) ٢س^{٢} – ٣٦ = -٦س

٢س^{٢} + ٦س – ٣٦ = ٠

س^{٢} + ٣س – ١٨ = ٠

س^{٢} + ٣س = ١٨

$(\frac{٣}{٢})^{٢} = \frac{٩}{٤}$

س^{٢} + ٣س + $\frac{٩}{٤}$ = ١٨ + $\frac{٩}{٤}$

$(س + \frac{٣}{٢})^{٢}$ = ٢٠,٢٥

$س + \frac{٣}{٢}$ = ±٤,٥

$س = ٤,٥ - \frac{٣}{٢}$ س = ٣

$س = -٤,٥ - \frac{٣}{٢}$ س = -٦

حل كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام، مقرباً الحل إلي أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

١١) $س^{٢} - س - ٣٠ = ٠$

$س^{٢} - س - ٣٠ = ٠$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$

$س = \frac{١ \pm \sqrt{(-١)^{٢} - ٤ \times ١ \times -٣٠}}{٢ \times ١}$

$س = \frac{١ \pm \sqrt{١٢١}}{٢}$

$س = \frac{١ + ١١}{٢} = ٦$

$س = \frac{١ - ١١}{٢} = -٥$

١٢) $٢س^{٢} + س - ١٥ = ٠$

$٢س^{٢} + س - ١٥ = ٠$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$

$س = \frac{-١ \pm \sqrt{(١)^{٢} - ٤ \times ٢ \times -١٥}}{٢ \times ٢}$

$س = \frac{١ \pm \sqrt{١٢١}}{٤}$

$س = \frac{١ + ١١}{٤} = ٣$

$س = \frac{١ - ١١}{٤} = -٢,٥$

---

١٣) **كرة سلة:** سدد نواف كرة السلة نحو المرمى، وفق المعادلة ع= $-١٦ن^{٢} + ٦٠ن + ٣٠$ تمثل (ع) ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية، كم تبقى الكرة في الهواء؟

ع = $-١٦ن^{٢} + ٦٠ن + ٣٠$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$

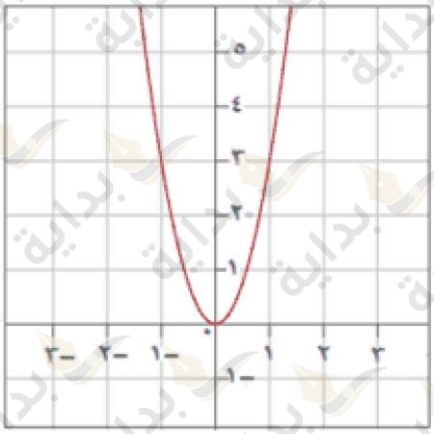
$ن = \frac{-٦٠ \pm \sqrt{(٦٠)^{٢} - ٤ \times -١٦ \times ٣٠}}{٢ \times -١٦}$

$ن = \frac{-٦٠ \pm ٤\sqrt{٣٤٥}}{-٣٢}$

$ن = \frac{-٦٠ - ٤\sqrt{٣٤٥}}{-٣٢} = ٤,٢$

٤,٢ ثانية تقريباً

١٤) مثل الدالة: ص = ٣س^{٢} بيانياً، وأوجد المقطع الصادي، وحدد مجالها ومداها.



المقطع الصادي = صفر

المجال = جميع الأعداد الحقيقية

المدي = { ص | ص > ٠ }

---

١٥) اختيار من متعدد: أي مما يلي يُعد تحليلاً تاما للعبارة ٤س^{٢} – ٨س – ١٢ إلي عواملها؟

أ) ٤(س – ٣) (س + ١)

ب) (٤س + ١٢) (س – ١)

جـ) ٤(س + ٣) (س - ١)

د) (س – ٣) (٤س + ٤)

---

١٦) أوجد مساحة المستطيل أدناه.



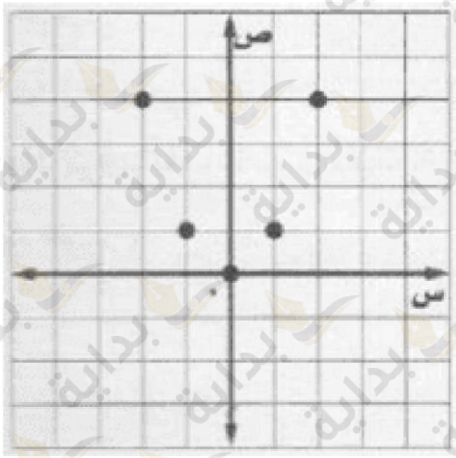
مساحة المستطيل = الطول × العرض

= (س + ٣) (س + ١٢)

= س^{٢} + ١٢س + ٣س + ٣٦

= (س^{٢} + ١٥س + ٣٦) سم^{٢}

١٧) مثل مجموعة الأزواج المرتبة الآتية بيانياً:{ (-٢ ، ٤)،(-١ ، ١)،(٠ ، ٠)،(١ ، ١)،(٢ ، ٤) }، وحدد فيما إذا كانت تمثل دالة خطية أم تربيعية.

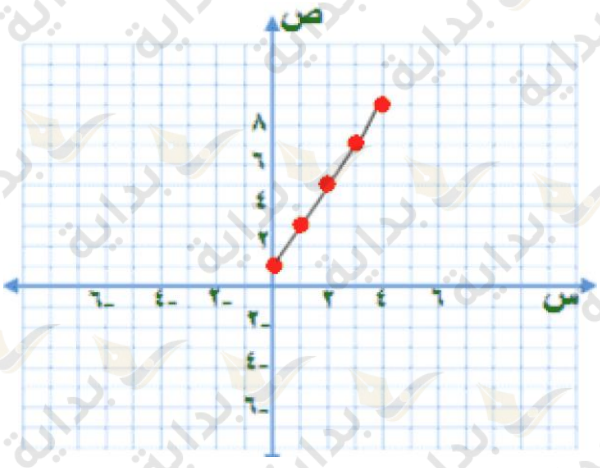


دالة تربيعية

---

١٨) ابحث عن النمط في الجدول الآتي لتحديد أفضل نموذج دالة لوصف البيانات: خطية أم تربيعية. فسر إجابتك.

س	٠	١	٢	٣	٤
ص	١	٣	٥	٧	٩



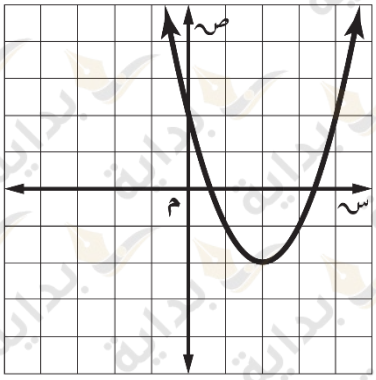
الدالة خطية

الاختبار التراكمي

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١) ما إحداثيا رأس القطع المكافئ الممثل أدناه؟



أ) (٢ ، ٠)
ب) (٠ ، ٢)
جـ) (-٢ ، ٢)
د) (٢ ، -٢)

الاختيار الصحيح: د) (٢ ، -٢)

٢) اكتب معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{٩}{١٠}$ ومقطعه الصادي ٣ بصيغة الميل والمقطع.

أ) ص = ٣س + $\frac{٩}{١٠}$
ب) ص = $\frac{٩}{١٠}$ س + ٣
جـ) ص = $\frac{٩}{١٠}$ س - ٣
د) ٣س - $\frac{٩}{١٠}$

ص = أ س + ب

حيث أ تمثل قيمة الميل و ب تمثل الجزء المقطوع من محور الصادات

الاختيار الصحيح: ب) ص = $\frac{٩}{١٠}$ س + ٣

٣) اذا كانت مساحة المستطيل أدناه ٣ س^{٢} + ١٩ س – ١٤ وحدة مربعة فكم وحدة عرضه ؟

أ) س + ٧ جـ) س + ٢

ب) س – ٧ د) س – ٢

مساحة المستطيل = (٣ +) (س + ١٢)

= ٣ س ^{٢} + ١٩ س – ١٤

= ٣ س ^{٢} + ٢ س + ٢١ س – ١٤

= س (٣ س + ٢) – ٧ (٣ س + ٢)

= ٣ (+ ٢) (س – ٧)

الاحتيار الصحيح : ب ( ) – ٧)

٤) اكتب عبارة تمثل مساحة المستطيل أدناه.

أ) ١٠ ب^{٥} جـ^{٥} – ٣ ب جـ جـ) ٢ب^{٥} جـ^{٥} – ٣ب^{٢} جـ^{٣}

ب) ١٠ ب^{٥} جـ^{٥} – ١٥ ب^{٢} جـ^{٣} د) ١٠ ب ^{٤} جـ ^{٦} – ١٥ ب جـ ^{٢}

مساحة المستطيل = الطول × العرض

(١٢ ب ^{٤} ج ^{٣} – ٣ ب ج) × ٥ ب ج ^{٢}

١٠ ب ^{٥} ج^{٥} – ١٥ ب^{٢} ج^{٣}

الاختيار الصحيح : ب) ١٠ ب ^{٥} ج^{٥} – ١٥ ب^{٢} ج ^{٣}

٥) حل المعادلة التربيعية : س^{٢} – ٢ س – ١٥ = ٠

أ) -١ ، ٤ جـ) ٣ ، -٥

ب) -٣ ، ٥ د) Ø

س ^{٢} – ٢ س – ١٥ = ٠

) + ٣) (س – ٥) = ٠

س = -٣

س = ٥

الاختيار الصحيح : ب) – ٣ ، ٥

٦) ما قيمة ر التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين (-٤ ، ٨) ، (ر ، ١٢) يساوى $\frac{٤}{٣}$.

أ) -٤ جـ) ٢

ب) -١ د) ٣

$$\frac{٨ - ١٢}{-٤ - ر} = \frac{٤}{٣}$$

$$\frac{-٤}{-٤ - ر} = \frac{٤}{٣}$$

-١٦ – ٤ ر = -١٢

- ٤ ر = -١٢ + ١٦

- ٤ ر = ٤

ر = -١

الاختيار الصحيح : ب) – ١

اجب عن الأسئلة الاتية :

٧) استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية :

٢ س^{٢} – ٦ س + ٣ = ٠

٢ س^{٢} – ٦ س + ٣ = ٠

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{٦ \pm \sqrt{(-٦)^{٢} - ٤ \times ٢ \times ٣}}{٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{٦ \pm \sqrt{١٢}}{٤}$$

$$س = \frac{٦ + \sqrt{١٢}}{٤} = ٢,٤$$

$$س = \frac{٦ - \sqrt{١٢}}{٤} = ٠,٦$$

٨) استعمل التمثيل البياني الآتي للمعادلة التربيعية للإجابة عن الأسئلة أدناه.

أ) ما إحداثيا الرأس؟

(١ ، ٤)

ب) ما إحداثيا نقطة التقاطع مع المحور الصادي؟

ص = ٣

جـ) ما معادلة محور التماثل؟

س = ١

د) حل المعادلة التربيعية المرافقة.

س = ٣، س = -١

٩) ثمن ٥ دفاتر و ٣ أقلام ١٩,٥ ريالاً، وثمن ٤ دفاتر و ٦ أقلام ٢١ ريالاً، استعمل هذه المعطيات في الأجابة عما يأتي:

أ) اكتب نظاماً من المعادلات يمثل هذا الموقف.

بفرض أن الدفاتر س والأقلام ص

٥س + ٣ص = ١٩,٥

٤س + ٦ص = ٢١

ب) حل نظام المعادلات، ما ثمن كل من الدفتر والقلم؟

٥س + ٣ص = ١٩,٥ × ٢

٤س + ٦ص = ٢١ × -١

١٠س + ٦ص = ٣٩

-٤س – ٦ص = -٢١

٦س = ١٨

س = ٣

٣٠ + ٦ص = ٣٩

٦ص = ٣٩ ـ ٣٠

٦ص = ٩

ص = $\frac{٩}{٦}$ = $\frac{٣}{٢}$

١٠) يبين الجدول الآتي الأجرة الكلية لقارب مدة (ن) ساعة.

عدد الساعات (ن)	الأجرة الكلية (ج)
١	٤٥ ريالاً
٢	٧٠ ريالاً
٣	٩٥ ريالاً
٤	١٢٠ ريالاً

أ) اكتب دالة تمثل هذا الموقف.

ن = ج + ٢٥

ب) ما أجرة القارب مدة ٧ ساعات؟

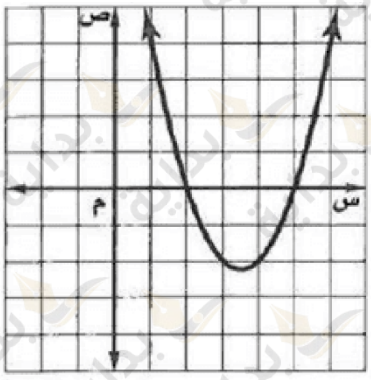
عند ن = ٥ الأجرة الكلية = ١٢٠ + ٢٥

عند ن = ٦ الأجرة الكلية = ١٤٥ + ٢٥

عند ن = ٧ الأجرة الكلية = ١٧٠ + ٢٥ = ١٩٥

أجب عن السؤال الآتي موضحاً خطوات الحل:

١١) استعمل المعادلة وتمثيلها البياني للإجابة عن الأسئلة الآتية:



أ) حلل العبارة $س^{٢} - ٧س + ١٠$ إلى عواملها الأولية.

$س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$

$س^{٢} - ٢س - ٥س + ١٠ = ٠$

$س(س - ٢) - ٥(س - ٢) = ٠$

$(س - ٥)(س - ٢)$

ب) ماحل المعادلة: $س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$؟

$س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$

$س^{٢} - ٢س - ٥س + ١٠ = ٠$

$س(س - ٢) - ٥(س - ٢) = ٠$

$(س - ٥)(س - ٢) = ٠$

$(س - ٥) = ٠$

$س = ٥$، $س = ٢$

جـ) ماذا تلاحظ على التمثيل البياني للدالة التربيعية؟ وأين يقطع تمثيلها محور السينات؟ وما العلاقة بين هذه القيم وحل المعادلة $س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$؟ فسر إجابتك.

ان الدالة لها قيمة صغرى عند (٣,٥ ، -٢) ويقطع تمثيلها محور السينات عند ٢ ، ٥ والعلاقة بين هذه القيم وحل المعادلة أن النقط الذي يقطع فيها المنحنى محور السينات هي حل المعادلة أي أنها يمكن استخدام الشكل البياني لإيجاد حل المعادلة بدلاً من تحليل المعادلة.

الفصل التاسع: المعادلات الجذرية والمثلثات

التهيئة للفصل ٩

أوجد الجذر التربيعي لكل مما يأتي، مقرباً الجواب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر:

١) $\sqrt{٨٢}$	٢) $\sqrt{٢٦}$	٣) $\sqrt{١٥}$	٤) $\sqrt{٩٩}$
$\sqrt{٨٢} = ٩,٠٦$	$\sqrt{٢٦} = ٥,١٠$	$\sqrt{١٥} = ٣,٨٧$	$\sqrt{٩٩} = ٩,٩٥$

٥) صندوق الرمل : إذا صنع إسحاق صندوقاً رملياً قاعدته مربعة الشكل مساحتها ١٠٠ قدم مربعة. فما طول ضلع قاعدة الصندوق؟

طول الضلع = $\sqrt{١٠٠}$

= ١٠ أقدام

بسط كل عبارة فيما يأتي:

٦) (٢١ س + ١٥ ص) – (٩ س – ٤ ص)	٧) ١٣س – ٥ص + ٢ص
٢١س + ١٥ص – ٩س + ٤ص	١٣س + (-٥ص + ٢ص)
٢١س – ٩س + ١٥ص + ٤ص	١٣س – ٣ص
١٢س + ١٩ص	
٨) (١٠أ – ٥ب) + (٦أ + ٥ب)	٩) ٦م + ٥ن + ٤ – ٣م – ٢ن + ٦
١٠أ + ٦أ – ٥ب + ٥ب	٦م – ٣م + ٥ن – ٢ن + ٤ + ٦
١٦أ	٣م + ٣ن + ١٠

حل كل معادلة فيما يأتي:

١٠) ٢س^{٢} – ٤س = صفر

٢س^{٢} – ٤س = ٠

٢س (س^{٢}- ٢) = ٠

س = ٠ ، ٢

١١) ٢س^{٢} + ٧س – ٥ = -١

٢س^{٢} + ٧س – ٥ = -١

٢س^{٢} +٧س – ٤ = ٠

٢س^{٢} – س + ٨س – ٤ = ٠

(س + ٨) (٢س – ١) = ٠

س = -٤، س = $\frac{١}{٢}$

١٢) هندسة: إذا كانت مساحة المستطيل المجاور ٩٠ سم^{٢}، فما قيمة س؟



مساحة المستطيل = الطول × العرض

= س × (س – ١)

س^{٢} – س = ٩٠

س^{٢} – س – ٩٠ = ٠

(س – ١٠) (س + ٩) = ٠

س = ١٠

استعمل الضرب التبادلي لتحديد إذا كانت النسبتان الآتيتان تشكلان تناسباً، واكتب "نعم" أو "لا":

١٣) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$

$\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٤}{٩}$

٩ × ٢ = ٤ × ٣

١٨ ≠ ١٢

لا يشكلان تناسباً

١٤) $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١٥}{٢٠}$

$\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١٥}{٢٠}$

١٥ × ٤ = ٢٠ × ٣

٦٠ = ٦٠

نعم يشكلان تناسباً

١٥) خرائط: إذا مثلت مسافة ١٠ كلم سنتمتراً واحداً على الخريطة، فما المسافة بين مدينتين على الخريطة إن كانت المسافة بينهما ٥٠ كلم؟

$\frac{١٠}{١}$ = $\frac{٥٠}{س}$

س = ٥٠ ÷ ١٠ = ٥ سنتمترات

٩-١ تبسيط العبارات الجذرية

بسط العبارات الآتية:

(أ) $\sqrt{٥٤}$

$\sqrt{٥٤} = \sqrt{٢ \times ٣ \times ٣ \times ٣}$

$= \sqrt{٦} \times \sqrt{٣^{٢}}$

$= ٦ \times ٣$

$= ٣\sqrt{٦}$

(ب) $\sqrt{١٨٠}$

$\sqrt{٥٤} = \sqrt{٥ \times ٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣}$

$= \sqrt{٥} \times \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٣^{٢}}$

$= ٥ \times ٣ \times ٢$

$= ٦\sqrt{٥}$

بسط العبارات الآتية:

٢أ) $\sqrt{٥} \times \sqrt{١٠}$

$\sqrt{٥} \times \sqrt{١٠} = \sqrt{٥} \times \sqrt{٥ \times ٢}$

$= \sqrt{٥} \times \sqrt{٥} \times \sqrt{٢}$

$= \sqrt{٥^{٢}} \times \sqrt{٢}$

$= ٥\sqrt{٢}$

٢ب) $\sqrt{٦} \times \sqrt{٨}$

$\sqrt{٦} \times \sqrt{٨} = \sqrt{٢ \times ٣ \times ٢} \times \sqrt{٢ \times ٢ \times ٢}$

$= \sqrt{٢} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢}$

$= \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٣}$

$= ٤\sqrt{٣}$

بسط العبارات الآتية:

٣أ) $\sqrt{٣٢ر^{٢} ك^{٤} ت^{٥}}$

$\sqrt{٣٢ر^{٢} ك^{٤} ت^{٥}} = \sqrt{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ر^{٢} \times ك^{٤} \times ت^{٥}}$

$= \sqrt{٢^{٤}} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{ر^{٢}} \times \sqrt{ك^{٤}} \times \sqrt{ت^{٥}}$

$= ٤ | ر | ك^{٢} ت^{٢} \sqrt{٢ت}$

٣ب) $\sqrt{٥٦ س ص^{١٠} ك^{٥}}$

$= \sqrt{٧ \times ٢ \times ٢ \times ٢} \times \sqrt{س} \times \sqrt{ص^{٢} \times ص^{٢} \times ص^{٢} \times ص^{٢} \times ص^{٢}} \times \sqrt{ك^{٤} \times ك}$

$= ك^{٢} |ص^{٥}|^{٢} \sqrt{١٤ س ك}$

---

٤) بسط العبارة: $\frac{\sqrt{٦ ص}}{\sqrt{١٢}}$

$\frac{\sqrt{٦ ص}}{\sqrt{١٢}} = \frac{\sqrt{٦ ص}}{\sqrt{١٢}} \times \frac{\sqrt{١٢}}{\sqrt{١٢}}$

$= \frac{\sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٣^{٢}} \times \sqrt{ص}}{١٢}$

$= \frac{٢ \times \sqrt{٢} \times ٣ \times \sqrt{ص}}{١٢}$

$= \frac{\sqrt{٢ ص}}{٢}$

---

٥) بسط العبارات الآتية:

أ) $\frac{٣}{\sqrt{٢} + ٢}$

$\frac{٣}{\sqrt{٢} + ٢} = \frac{٣}{\sqrt{٢} + ٢} \times \frac{\sqrt{٢} - ٢}{\sqrt{٢} - ٢}$

$= \frac{\sqrt{٢} ٣ - ٦}{(\sqrt{٢})^{٢} - ٢^{٢}}$

$= \frac{\sqrt{٢} ٣ - ٦}{٢ - ٤} = \frac{\sqrt{٢} ٣ - ٦}{٢}$

ب) $\frac{٧}{\sqrt{٧} - ٣}$

$$\frac{٧}{\sqrt{٧} - ٣} = \frac{٧}{\sqrt{٧} - ٣} \times \frac{\sqrt{٧} + ٣}{\sqrt{٧} + ٣}$$

$$= \frac{٧\sqrt{٧} + ٢١}{(\sqrt{٧})^{٢} - ٣^{٢}}$$

$$= \frac{٧\sqrt{٧} + ٢١}{٢}$$

تأكد

الأمثلة ١-٣ بسط كل عبارة مما يأتي:

١) $\sqrt{٢٤}$

$\sqrt{٢٤} = \sqrt{٦ \times ٤}$

$= \sqrt{٣ \times ٢ \times ٢ \times ٢}$

$= \sqrt{٣ \times ٢ \times ٢^{٢}}$

$= ٢\sqrt{٦}$

٢) $٣\sqrt{١٦}$

$٣\sqrt{١٦} = ٣\sqrt{٤ \times ٤}$

$= ٣\sqrt{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}$

$= ٣\sqrt{٢^{٢} \times ٢^{٢}}$

$= ٣ \times ٢ \times ٢$

$= ١٢$

٣) $٢\sqrt{٢٥}$

$٢\sqrt{٢٥} = ٢\sqrt{٥ \times ٥}$

$= ٢\sqrt{٥^{٢}}$

$= ٢ \times ٥ = ١٠$

٤) $\sqrt{١٠} \times \sqrt{١٤}$

$\sqrt{١٠} \times \sqrt{١٤} = \sqrt{٧ \times ٢ \times ٥ \times ٢}$

$= \sqrt{٣٥ \times ٢^{٢}}$

$= ٢\sqrt{٣٥}$

٥) $\sqrt{٣} \times \sqrt{١٨}$

$\sqrt{٣} \times \sqrt{١٨} = \sqrt{٣ \times ٢ \times ٣ \times ٣}$

$= \sqrt{٢ \times ٣ \times ٣^{٢}}$

$= ٣\sqrt{٦}$

٦) $٣\sqrt{١٠} \times ٤\sqrt{١٠}$

$٣\sqrt{١٠} \times ٤\sqrt{١٠} = ٣ \times ٤ (\sqrt{١٠})^{٢}$

$= ١٢ \times ١٠$

$= ١٢٠$

٧) $\sqrt{٦٠ س^{٤} ص^{٧}}$

$\sqrt{٦٠ س^{٤} ص^{٧}} = \sqrt{٢ \times ٣ \times ٢ \times ٥ \times س^{٤} \times ص^{٦} \times ص}$

$= \sqrt{٢^{٢} \times ٣ \times ٥ \times س^{٤} \times ص^{٦} \times ص}$

$= ٢ س^{٢} |ص^{٣}| \sqrt{١٥ ص}$

٨) $\sqrt{٨٨ م^{٣} ب^{٢} ر^{٥}}$

$\sqrt{٨٨ م^{٣} ب^{٢} ر^{٥}} = \sqrt{٢ \times ٢ \times ٢ \times ١١ \times م^{٢} \times م \times ب^{٢}} \times \sqrt{ر \times ر^{٤}}$

$= \sqrt{٢ \times ٢ \times ٢ \times ١١ \times م^{٢} \times م \times ب^{٢}} \times \sqrt{ر^{٢} \times ر}$

$= ٢ |م| |ب| ر^{٢} \sqrt{٢٢ ر م}$

٩) $\sqrt{٩٩ أ ب^{٥} جـ^{٢}}$

$\sqrt{٩٩ أ ب^{٥} جـ^{٢}} = \sqrt{٣ \times ٣ \times ١١ \times أ \times ب^{٤} \times ب \times جـ^{٢}}$

$= ٣ب^{٢} |ج| \sqrt{١١ \times أ \times ب}$

$= ٣ب^{٢} |ج| \sqrt{١١ أب}$

مثال ٤ : اختيار من متعدد: بسط العبارة $\sqrt{\frac{٤٥}{١٠}}$

أ) $\frac{\sqrt{٥}}{١٠}$ ب) $\sqrt{\frac{٤٥٠}{١٠}}$ جـ) $\frac{\sqrt{٥٠}}{١٠}$ د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$$\sqrt{\frac{٤٥}{١٠}} = \sqrt{\frac{٥ \times ٩}{٢ \times ٥}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

الاختيار الصحيح: د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مثال ٥ : بسط كل عبارة مما يأتي:

١١) $\frac{٣}{٣+\sqrt{٥}}$

$$\frac{٣}{٣+\sqrt{٥}} = \frac{٣}{٣+\sqrt{٥}} \times \frac{٣-\sqrt{٥}}{٣-\sqrt{٥}}$$

$$= \frac{٩-٣\sqrt{٥}}{٩-٥}$$

$$= \frac{٩-٣\sqrt{٥}}{٤}$$

١٢) $\frac{٥}{٢-\sqrt{٦}}$

$$\frac{٥}{٢-\sqrt{٦}} = \frac{٥}{٢-\sqrt{٦}} \times \frac{٢+\sqrt{٦}}{٢+\sqrt{٦}}$$

$$= \frac{١٠+٥\sqrt{٦}}{٤-٦}$$

$$= \frac{١٠+٥\sqrt{٦}}{-٢}$$

١٣) $\frac{٢}{\sqrt{١٠}-١}$

$= \frac{٢}{\sqrt{١٠}-١} \times \frac{\sqrt{١٠}+١}{\sqrt{١٠}+١}$

$= \frac{٢\sqrt{١٠}+٢}{١٠-١}$

$= \frac{٢\sqrt{١٠}+٢}{٩-}$

١٤) $\frac{١}{\sqrt{١٢}+٤}$

$= \frac{١}{\sqrt{١٢}+٤} \times \frac{\sqrt{١٢}-٤}{\sqrt{١٢}-٤}$

$= \frac{\sqrt{١٢}-٤}{١٢-١٦}$

$= \frac{\sqrt{٢\times٢\times٣}-٤}{٤}$

$= \frac{٢\sqrt{٣}-٤}{٤}$

$= \frac{\sqrt{٣}-٢}{٢}$

١٥) $\frac{٤}{\sqrt{٧}-٦}$

$= \frac{٤}{\sqrt{٧}-٦} \times \frac{\sqrt{٧}+٦}{\sqrt{٧}+٦}$

$= \frac{٢٤+٤\sqrt{٧}}{٧-٣٦}$

$= \frac{٢٤+٤\sqrt{٧}}{٢٩}$

١٦) $\frac{٦}{\sqrt{١١}+٥}$

$= \frac{٦}{\sqrt{١١}+٥} \times \frac{\sqrt{١١}-٥}{\sqrt{١١}-٥}$

$= \frac{٣٠-٦\sqrt{١١}}{١١-٢٥}$

$= \frac{٣٠-٦\sqrt{١١}}{٢\times٧}$

$= \frac{٦(\sqrt{١١}-٥)}{٢\times٧}$

$= \frac{٣(\sqrt{١١}-٥)}{٧}$

$= \frac{١٥-٣\sqrt{١١}}{٧}$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١-٣ بسط كل عبارة فيما يأتي:

١٧) $\sqrt{٥٢}$

$\sqrt{٥٢} = \sqrt{١٣ \times ٢ \times ٢}$

$= ٢\sqrt{١٣}$

١٨) $\sqrt{٥٦}$

$\sqrt{٥٦} = \sqrt{٧ \times ٢ \times ٢ \times ٢}$

$= ٢\sqrt{١٤}$

١٩) $\sqrt{٧٢}$

$\sqrt{٧٢} = \sqrt{٢ \times ٣ \times ٢ \times ٣ \times ٢}$

$= \sqrt{٢^{٢} \times ٢ \times ٣^{٢}}$

$= ٦\sqrt{٢}$

٢٠) $٣\sqrt{١٨}$

$٣\sqrt{١٨} = ٣\sqrt{٢ \times ٣ \times ٣}$

$= ٣\sqrt{٢ \times ٣^{٢}}$

$= ٩\sqrt{٢}$

٢١) $\sqrt{٢٤٣}$

$\sqrt{٢٤٣} = \sqrt{٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣}$

$= \sqrt{٣ \times ٣^{٢} \times ٣^{٢}} = ٣\sqrt{٣ \times ٣}$

$= ٩\sqrt{٣}$

٢٢) $\sqrt{٢٤٥}$

$\sqrt{٢٤٥} = \sqrt{٧ \times ٧ \times ٥}$

$= \sqrt{٧ \times ٥^{٢}}$

$= ٥\sqrt{٧}$

٢٣) $\sqrt{٥} \times \sqrt{١٥}$

$\sqrt{٥} \times \sqrt{١٥} = \sqrt{٥ \times ٣ \times ٥}$

$= \sqrt{٣ \times ٥^{٢}}$

$= \sqrt{٣}٥$

٢٤) $٣\sqrt{٨} \times ٢\sqrt{٧}$

$٣\sqrt{٨} \times ٢\sqrt{٧} = ٦\sqrt{٧ \times ٢ \times ٢ \times ٢}$

$= ٦\sqrt{٧ \times ٢^{٢} \times ٢}$

$= ٦ \times ٢\sqrt{١٤}$

$= ١٢\sqrt{١٤}$

٢٥) $٤\sqrt{٢} \times \sqrt{٥}$

$٤\sqrt{٢ \times ٥} = \sqrt{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢٠}$

$= \sqrt{٢٢ \times ٢٢} \times ٢٠ = ٢ \times ٢ \times ٢٠$

$= ٨٠$

٢٦) $٣\sqrt{٢٥ت^{٢}}$

$٣\sqrt{٢٥ت^{٢}} = ٣\sqrt{٥ \times ٥ \times ت}$

$= ٣\sqrt{٢٥ \times ت^{٢}}$

$= ٣ \times ٥ت$

$= ١٥ | ت |$

٢٧) $٥\sqrt{٨١ك^{٥}}$

$٥\sqrt{٨١ك^{٥}} = ٥\sqrt{٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ك^{٤} \times ك}$

$= ٥\sqrt{٣^{٢} \times ٣^{٢} \times ك^{٤} \times ك}$

$= ٥ \times ٣ \times ٣ك^{٢}\sqrt{ك}$

$= ٤٥ك^{٢}\sqrt{ك}$

٢٨) $\sqrt{٢٨أ^{٢}ب^{٣}}$

$\sqrt{٢٨أ^{٢}ب^{٣}} = \sqrt{٢ \times ٢ \times ٧ \times أ^{٢} \times ب^{٢} \times ب}$

$= \sqrt{٢^{٢} \times ٧ \times أ^{٢} \times ب^{٢} \times ب}$

$= ٢ | أ | | ب | \sqrt{٧ب}$

٢٩) $\sqrt{٧٥ك ر^{٣}}$

$\sqrt{٧٥ك ر^{٣}} = \sqrt{٥ \times ٣ \times ٥ \times ك \times ر^{٢} \times ر}$

$= \sqrt{٥^{٢} \times ٣ \times ك \times ر^{٢} \times ر}$

$= ٥ | ر | \sqrt{٣ك ر}$

٣٠) $٤\sqrt{٦٦جـ^{٢}هـ^{٤}}$

$\sqrt{٦٦جـ^{٢}هـ^{٤}} = ٤ \times \sqrt{٢ \times ٣ \times ١١ \times جـ^{٢} \times هـ^{٤}}$

$= ٤ | ج | هـ^{٢}\sqrt{٦٦}$

٣١) $\sqrt{١٢أ ب^{٢}} \times \sqrt{١٠أ^{٥}ب}$

$\sqrt{٢ب^{٢}} \times \sqrt{١٠أ^{٥}ب} = \sqrt{٢ \times أب^{٢}} \times \sqrt{٢ \times ٥ \times أ^{٤} \times أب}$

$= ب\sqrt{٢ \times أ} \times أ^{٢}\sqrt{١٠ \times أب}$

$= ب أ^{٢}\sqrt{٢ \times ٢ \times ٥ \times أ^{٢} \times ب}$

$= ب أ^{٢}\sqrt{٢^{٢} \times ٥ \times أ^{٢} \times ب}$

$= ٢ب أ^{٢} ٢ \times أ\sqrt{٥ \times ب}$

$= ٤ | ب | | أ^{٣} | \sqrt{٥ب}$

٣٢) مكافحة حرائق: تمثل سرعة الماء (ع) الذي يضخ لمكافحة الحرائق بالمعادلة ع= $\sqrt{٢ف جـ}$ ، حيث (ف) اقصى ارتفاع للماء، (جـ) تسارع الجاذبية الأرضية (٣٢ قدماً /ث^{٢}).

أ) حل المعادلة بالنسبة لـ ف.

ع^{٢} = ٢ف ج

$$ف = \frac{ع^{٢}}{٢ج}$$

ب) إذا احتاجت إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني إلى مضخة لتضخ الماء إلى ارتفاع ٨٠ قدماً فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة ٧٠ قدماً /ث؟ فسر إجابتك.

ع^{٢}= ٢ف ج

٧٠^{٢} = ٢ × ف × ٣٢

$$ف = \frac{٧٠^{٢}}{٦٤}$$

ف≈ ٧٦,٦ قدماً

لا، المضخة المعلن عنها ستضخ ماء إلى ارتفاع أقصاه ٧٦,٦ قدما تقريباً.

جـ) تريد إدارة مكافحة الحرائق شراء مضخة تضخ الماء إلى ارتفاع ٩٠ قدماً. فهل المضخة التي تضخ الماء بسرعة ٧٧ قدماً / ث تحقق حاجة الإدارة؟ فسر إجابتك.

نعم، المضخة المعلن عنها ستضخ ماء إلى ارتفاع أقصاه ٢٩,٦ قدما تقريبا

ع^{٢} = ٢ ف ج

٧٧^{٢} = ٢ ×ف ×٣٢

ف = ٩٢,٦

المثالان ٤، ٥ بسط كل عبارة فيما يأتي:

٣٣) $\sqrt{\frac{٣٢}{ت^{٤}}}$

$= \sqrt{\frac{٣٢}{ت^{٤}}} = \frac{\sqrt{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}}{\sqrt{ت^{٤}}}$

$= \frac{\sqrt{٢^{٢} \times ٢^{٢} \times ٢}}{ت^{٢}}$

$= \frac{٢ \times ٢ \sqrt{٢}}{ت^{٢}}$

$= \frac{٤\sqrt{٢}}{ت^{٢}}$

٣٤) $\sqrt{\frac{٢٧}{م^{٥}}}$

$= \sqrt{\frac{٢٧}{م^{٥}}} = \frac{\sqrt{٣ \times ٣ \times ٣}}{\sqrt{م^{٤} \times م}}$

$= \frac{\sqrt{٣ \times ٣^{٢}}}{\sqrt{م^{٢}} \sqrt{م}}$

$= \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{م^{٢}}} \times \frac{\sqrt{م^{٢}}}{\sqrt{م^{٢}} \sqrt{م}}$

$= \frac{\sqrt{٣م^{٢}} \sqrt{٣م}}{م^{٤} \times م}$

$= \frac{\sqrt{٣م^{٣}}}{|م^{٣}|}$

٣٥) $\sqrt{\frac{٦٨ أ جـ^{٣}}{٢٧ أ^{٢}}}$

$= \sqrt{\frac{٦٨ أ جـ^{٣}}{٢٧ أ^{٢}}} = \frac{\sqrt{٢^{٢} \times ١٧ \times ج^{٢} \times ج \times أ}}{\sqrt{٣^{٣} \times أ^{٢}}}$

$= \frac{٢|ج| \sqrt{١٧ \times ج \times أ}}{|أ|^{٩}}$

٣٦) $\sqrt{\frac{٣}{١٦}} \times \sqrt{\frac{٩}{٥}}$

$= \sqrt{\frac{٣}{١٦}} \times \sqrt{\frac{٩}{٥}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢^{٢} \times ٢^{٢}}} \times \frac{\sqrt{٢^{٣}}}{\sqrt{٥}}$

$= \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٥^{٤}}} \times \frac{\sqrt{٥^{٤}}}{\sqrt{٥^{٤}}} = \frac{\sqrt{٣ \times ٥ \times ٣^{٣} \times ٢^{٢}}}{\sqrt{٥^{٤} \times ١٦}}$

$= \frac{\sqrt{١٥}}{٢٠}$

٣٧) $\frac{٩}{\sqrt{٨} - ٦}$

$= \frac{٩}{\sqrt{٨} - ٦} \times \frac{\sqrt{٨} + ٦}{\sqrt{٨} + ٦}$

$= \frac{٩}{\sqrt{٣٦} - ٨} = \frac{٩ \sqrt{٢} + ٥٤}{٢٨} = \frac{٩ \sqrt{٢} + ٥٤}{٢٨}$

$= \frac{٢٧ \sqrt{٢} + ٩}{١٤}$

---

٣٨) $\frac{٢ \sqrt{٥}}{٢ \sqrt{٧} + ٣ \sqrt{٣}}$

$= \frac{٢ \sqrt{٥}}{٢ \sqrt{٧} + ٣ \sqrt{٣}} \times \frac{٢ \sqrt{٧} - ٣ \sqrt{٣}}{٢ \sqrt{٧} - ٣ \sqrt{٣}}$

$= \frac{٤ \sqrt{٣٥} - ٦ \sqrt{١٥}}{٤ \sqrt{٤٩} - ٣ \times ٩} = \frac{٤ \sqrt{٣٥} - ٦ \sqrt{١٥}}{٤ \sqrt{٤٩} - ٢٧}$

$= \frac{٤ \sqrt{٣٥} - ٦ \sqrt{١٥}}{٤ \times ٧ - ٢٧} = ٤ \sqrt{٣٥} - ٦ \sqrt{١٥}$

---

٣٩) **طاقة حركية:** يمكن تحديد سرعة كرة بالمعادلة: ع = $\sqrt{\frac{٢ق}{ك}}$ ، حيث (ق) تشير إلى الطاقة الحركي الحركية للكرة، (ك) كتلة الكرة.

أ) بسط المعادلة معتبراً كتلة الكرة ٣ كيلو جرامات.

ع = $\sqrt{\frac{٢ق}{٣}}$

ب) إذا كانت سرعة الكرة ٧ أمتار/ ثانية، فما قيمة الطاقة الحركية للكرة بالجول؟

٧ = $\sqrt{\frac{٢ق}{٣}}$ تربيع كلا من الطرفين

$\frac{٢ق}{٣} = ٤٩$

٢ق = ٣ × ٤٩ = ١٤٧

ق = ١٤٧ ÷ ٢ = ٧٣,٥ جول

٤٠) **قفز بالمظلات:** إذا كان الزمن التقريبي (ن) بالثواني اللازم لسقوط جسم من ارتفاع (ل) بالأقدام يعطى بالمعادلة: $ن = \sqrt{\frac{ل}{١٦}}$ ، فما الارتفاع الذي سقط منه مظلي إذا كان الزمن قبل فتح المظلة كما هو موضح بالجدول الآتي:

$ن = \sqrt{\frac{ل}{١٦}}$

$ن^{٢} = \frac{ل}{١٦}$

$٢^{٤} = \frac{ل}{١٦}$

$١٦ = \frac{ل}{١٦}$

ل = ٢٥٦

$ن = \sqrt{\frac{ل}{١٦}}$

$ن^{٢} = \frac{ل}{١٦}$

$٢^{٥} = \frac{ل}{١٦}$

$٢٥ = \frac{ل}{١٦}$

ل = ٤٠٠

$ن = \sqrt{\frac{ل}{١٦}}$

$ن^{٢} = \frac{ل}{١٦}$

$٢^{٦} = \frac{ل}{١٦}$

$٣٦ = \frac{ل}{١٦}$

ل = ٥٧٦

$ن = \sqrt{\frac{ل}{١٦}}$

$ن^{٢} = \frac{ل}{١٦}$

$٢^{٧} = \frac{ل}{١٦}$

$٤٩ = \frac{ل}{١٦}$

ل = ٧٨٤

زمن السقوط	٤	٥	٦	٧
الارتفاع	٢٥٦	٤٠٠	٥٧٦	٧٨٤

مسائل مهارات التفكير العليا

٤١) تبرير: وضح كيف تحل $(٣س - ٢)^{٢} = (٢س + ٦)^{٢}$.

أولاً حذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين ثم بسط لتجد أن س = ٨

$٣س - ٢ = ٢س + ٦$

$٣س - ٢ - ٢س - ٦ = ٠$

$س - ٨ = ٠$

$س = ٨$

ثانياً: بسط الطرفين بإيجاد المعادلة التربيعية للطرفين ثم بسط ثم أوجد جذور المعادلة

$٩س^{٢} - ١٢س + ٤ = ٤س^{٢} + ٢٤س + ٣٦$

$٩س^{٢} - ١٢س + ٤ - ٤س^{٢} - ٢٤س - ٣٦ = ٠$

$٥س^{٢} - ٣٦س - ٣٢ = ٠$

$(٥س + ٤)(س - ٨) = ٠$

$س = -\frac{٤}{٥}$ و $س = ٨$

---

٤٢) مسألة مفتوحة: اكتب ثنائيتي حد على الصورة $أ\sqrt{ب} + جـ\sqrt{ف}$ ، $أ\sqrt{ب} - جـ\sqrt{ف}$ ثم أوجد ناتج ضربهما.

$(١ + \sqrt{٢})(١ - \sqrt{٢}) = ١ - ٢ = -١$

---

٤٣) تحد: استعمل خاصية قسمة الجذور التربيعية لتشتق القانون العام لحل المعادلة التربيعية من خلال حل المعادلة أ س^{٢} + ب س+ جـ = ٠ (ابدأ بإكمال المربع).

$أ س^{٢} + ب س + ج = ٠$ المعادلة الأصلية

$\frac{أ س^{٢}}{أ} + \frac{س ب}{أ} + \frac{ج}{أ} = ٠$ أقسم على أ

$س^{٢} + \frac{ب}{أ} س + \frac{ج}{أ} = ٠$

$س^{٢} + \frac{ب}{أ} س + \frac{ج}{أ} - \frac{ج}{أ} = ٠ - \frac{ج}{أ}$ أطرح $\frac{ج}{أ}$ = ٠ من الطرفين

$س^{٢} + \frac{ب}{أ} س = - \frac{ج}{أ}$

$س^{٢} + \frac{ب}{أ} س + \frac{ب^{٢}}{٤ أ^{٢}} = - \frac{٤ أ ج}{٤ أ^{٢}} + \frac{ب^{٢}}{٤ أ^{٢}}$ أكمل المربع

$س^{٢} + \frac{ب}{أ} س + \frac{ب^{٢}}{٤ أ^{٢}} = \frac{ب^{٢} - ٤ أ ج}{٤ أ^{٢}}$

$\left(س + \frac{ب}{٢أ} \right)^{٢} = \frac{ب^{٢} - ٤ أ ج}{٤ أ^{٢}}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$\left| س + \frac{ب}{٢أ} \right| = \frac{\sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$ خاصية القسمة في الجذور التربيعية

$س + \frac{ب}{٢أ} - \frac{ب}{٢أ} = - \frac{ب}{٢أ} \pm \frac{\sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$ تخلص من رمز القيمة المطلقة

$س = - \frac{ب}{٢أ} \pm \frac{\sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$ طرح $\frac{ب}{٢أ}$ من الطرفين

$س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$

٤٤) اكتب: ملخصاً تبين فيه كيف تكتب عبارة جذرية في أبسط صورة.

لا تحتوي العبارات الجذرية في أبسط صورة على جذور في مقام الكسر. لذا أنطق المقام لحذ الجذر من المقام، ثم تحقق إن كان أي من العوامل تحت الجذر مربعاً كاملاً، وإذا وجد فبسطه.

تدريب على اختبار

٤٥) إجابة قصيرة: دفع أحمد قيمة فاتورة الكهرباء أقل بِـ ٢٣ريالاً مما دفع خالد. وكان مجموع قيمة الفاتورتين ١٠٩ ريالات. اكتب معادلة يمكن استعمالها لإيجاد قيمة فاتورة خالد.

٢ج – ٢٣ = ١٠٩

٤٦) أي العبارات الآتية تكافئ: $\sqrt{١٦٠ س^{٢} ص^{٥}}$

أ) $١٦ |س| ص^{٢} \sqrt{١٠ ص}$

ب) $|س| ص^{٢} \sqrt{١٦٠ ص}$

ج) $٤ |س| ص^{٢} \sqrt{١٠ ص}$

د) $١٠ |س| ص^{٢} \sqrt{٤ ص}$

$\sqrt{١٦٠ س^{٢} ص^{٥}} = \sqrt{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٥ \times س^{٢} \times ص^{٤} \times ص}$

$= \sqrt{٢^{٢} \times ٢^{٢} \times ١٠ \times س^{٢} \times ص^{٤} \times ص}$

$= ٤ |س| ص^{٢} \sqrt{١٠ ص}$

مراجعة تراكمية

حل كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرباً الجواب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم

الأمر: (الدرس ٨-٤)

٤٧) $ر^{٢} + ٢٥ = ٠$

$ر^{٢} = -٢٥$

$\emptyset$

٤٨) $٤و^{٢} + ١٠٠ = ٠$

$$و = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$$

$$و = \frac{٤٠ \pm \sqrt{٤٠^{٢} - ١٠٠ \times ٤ \times ٤}}{٢ \times ٤}$$

$$و = \frac{٤٠ \pm ٠}{٨} = ٥$$

٤٩) $١١س^{٢} - س = ٣$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{(-١)^{٢} - ٤ \times ١١ \times -٣}}{٢ \times ١١}$$

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{١٣٣}}{٢٢}$$

$$س = \frac{١ + \sqrt{١٣٣}}{٢٢} = ٠,٦$$

$$س = \frac{١ + \sqrt{١٣٣}}{٢٢} = ٠,٦$$

$$س = \frac{١ - \sqrt{١٣٣}}{٢٢} = -٠,٥$$

حلل كل كثيرة حدود فيما يأتي، إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب أولية: (مهارة سابقة)

٥٠) ٤ – ٩أ^{٢}

٤ – ٩أ^{٢} = (٢ – ٣أ) (٢ – ٣أ)

٥١) ٤ت^{٢} – ٢٧

أولية

٥٢) س^{٣} – ٣س^{٢} – ٩س + ٢٧

س^{٣} – ٣س^{٢} – ٩س + ٢٧ = س^{٢}(س – ٣) – ٩(س – ٣)

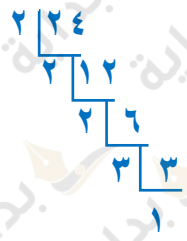
= (س^{٢} – ٩) (س – ٣)

= (س – ٣) (س – ٣) (س + ٣)

استعد للدرس الآتي

مهارة سابقة: حلل كلاً من الأعداد التالية إلى عواملها الأولية:

٥٣) ٢٤



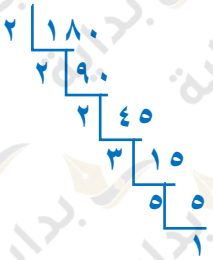
٢٤: $٢^{٣} \times ٣$

٥٤) ٨٨



٨٨: $٢^{٣} \times ١١$

٥٥) ١٨٠



١٨٠: $٢^{٢} \times ٣^{٢} \times ٥$

٥٦) ٣١

عدد أولي

٥٧) ٦٠



٦٠: $٢^{٢} \times ٣ \times ٥$

٥٨) ٩٠



٩٠: $٢^{٢} \times ٣ \times ٥$

نشاط:

العبارة	القيمة	العبارة	القيمة
$١٦^{\frac{١}{٢}}$	٤	$\sqrt{١٦}$	٤
$٢٥^{\frac{١}{٢}}$	٥	$\sqrt{٢٥}$	٥
$٦٤^{\frac{١}{٣}}$	٤	$\sqrt[٣]{٦٤}$	٤
$١٢٥^{\frac{١}{٣}}$	٥	$\sqrt[٣]{١٢٥}$	٥
$٦٤^{\frac{٢}{٣}}$	١٦	$\sqrt[٣]{٢٦٤}$	١٦
$٨١^{\frac{٣}{٤}}$	٢٧	$\sqrt[٤]{٣٨١}$	٢٧

١أ) ما الذي تلاحظه في أثناء دراستك الجدول حول قيمة العبارة التي علي الصورة $أ^{\frac{١}{ن}}$ ؟

$$أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$$

١ب) ما الذي تلاحظه حول قيمة العبارة التي علي الصورة $أ^{\frac{م}{ن}}$ ؟

$$أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$$

تمارين:

١) تذكر خاصية قوة القوة لأي عدد حقيقي أ، وأي عددين صحيحين م، ن. (أم)ن = (أم × ن).

افترض أن الأسس الكسرية تعامل معاملة أسس الأعداد الكلية، وأوجد قيمة (ب١/٢)٢.

(ب١/٢)٢ = ب١/٢ × ٢ خاصية قوة القوة

= ب١ = ب بسط

لذا، فإن ب١/٢ هو عدد مربعه يساوي ب؛ لذا فمن الممكن تعريف ب١/٢ = $\sqrt{ب}$.

استعمل طريقة مشابهة لتعريف ب١/ن.

$(ب^{\frac{1}{ن}})^{ن}$ = $ب^{\frac{1}{ن}\times ن}$ خاصية قوة القوة

= $ب^{١}$ = ب بسط

$\therefore ب^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{ب}$

٢) عرف $ب^{\frac{م}{ن}}$. برر إجابتك.

$ب^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{ب^{م}}$ أو $ب^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{ب})^{م}$

$ب^{م/ن} = (ب^{١/ن})^{م}$

$= (\sqrt[ن]{ب})^{م}$

$= (ب^{م})^{١/ن}$

$= \sqrt[ن]{ب^{م}}$

اكتب كل جذر فيما يأتي على صورة عبارة أسية باستعمال الأسس الكسرية، ثم أوجد قيمتها:

٣) $\sqrt{٣٦}$

$\sqrt{٣٦} = ٣٦^{\frac{١}{٢}} = ٦$

٤) $\sqrt{١٢١}$

$\sqrt{١٢١} = ١٢١^{\frac{١}{٢}} = ١١$

٥) $\sqrt[٤]{٢٥٦}$

$\sqrt[٤]{٢٥٦} = ٢٥٦^{\frac{١}{٤}} = ٤$

٦) $\sqrt[٥]{٣٢}$

$\sqrt[٥]{٣٢} = ٣٢^{\frac{١}{٥}} = ٢$

٧) $\sqrt[٣]{٢٨}$

$\sqrt[٣]{٢٨} = ٨^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

٨) $\sqrt[٤]{١٢٩٦}$

$\sqrt[٤]{١٢٩٦} = ١٢٩٦^{\frac{١}{٤}} = ٦$

٩) $\sqrt[٤]{٣١٦}$

$٣١٦^{\frac{٣}{٤}} = ٨ = ٤$

١٠) $\sqrt[٣]{٣٨}$

$\sqrt[٣]{٣٨} = ٣٨^{\frac{٣}{٣}} = ٨$

٩ - ٢ العمليات على العبارات الجذرية

١) بسط كل عبارة فيما يأتي:

أ) $٥\sqrt{٢} + ٧\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢}$

$٣\sqrt{٢} - ٥\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٢} = (٣ - ٥ + ٤)\sqrt{٢} = (٢)\sqrt{٢}$

ب) $٦\sqrt{١١} + ٢\sqrt{١١} - ٩\sqrt{١١}$

$٦\sqrt{١١} + ٢\sqrt{١١} - ٩\sqrt{١١} = (٦ + ٢ - ٩)\sqrt{١١} = -\sqrt{١١}$

جـ) $١٥\sqrt[٣]{١٤} - ٦\sqrt[٥]{١٤} - ١١\sqrt[٣]{١٤}$

$١٥\sqrt[٣]{١٤} - ٦\sqrt[٥]{١٤} - ١١\sqrt[٣]{١٤} = (١٥ - ١١)\sqrt[٣]{١٤} + (-١٤ + ٦)\sqrt[٥]{١٤}$

$= ٤\sqrt[٣]{١٤} - ٨\sqrt[٥]{١٤}$

د) $٤\sqrt[٣]{٣} + ٣\sqrt[٧]{٣} - ٦\sqrt[٣]{٣} + ٣\sqrt[٧]{٣}$

$٤\sqrt[٣]{٣} + ٣\sqrt[٧]{٣} - ٦\sqrt[٣]{٣} + ٣\sqrt[٧]{٣} = (٤ - ٦)\sqrt[٣]{٣} + (٣ + ٣)\sqrt[٧]{٣}$

$= -٢\sqrt[٣]{٣} + ٦\sqrt[٧]{٣}$

٢) بسط:

٢أ) $٤\sqrt{٥٤} + ٢\sqrt{٢٤}$

$٤\sqrt{٥٤} + ٢\sqrt{٢٤} = (٤\sqrt[٣]{٤} \times \sqrt{٦}) + ٢(\sqrt[٢٢]{٢ \times ٣})$

$= ١٢\sqrt{٦} + ٤(\sqrt{٢ \times ٣})$

$= ١٢\sqrt{٦} + ٤\sqrt{٦}$

$= ١٦\sqrt{٦}$

٢ب) $٤\sqrt{١٢} - ٦\sqrt{٤٨}$

$٤\sqrt{١٢} - ٦\sqrt{٤٨} = ٤(\sqrt{٢٢} \times \sqrt{٣}) - ٦(\sqrt{٦} \times \sqrt{٢ \times ٢٢})$

$= ٨\sqrt{٣} - ١٢(\sqrt{٣ \times ٢٢})$

$= ٨\sqrt{٣} - ٢٤(\sqrt{٣})$

$= -١٦\sqrt{٣}$

٢جـ) $٣\sqrt{٤٥} + \sqrt{٢٠} - \sqrt{٢٤٥}$

$٣\sqrt{٤٥} + \sqrt{٢٠} - \sqrt{٢٤٥} = ٣(\sqrt{٣} \times \sqrt{٥}) + (\sqrt{٢٢} \times \sqrt{٥}) - (\sqrt{٧} \times \sqrt{٥})$

$= ٩\sqrt{٥} + ٢(\sqrt{٥}) - ٧\sqrt{٥}$

$= ٤\sqrt{٥}$

٢د) $\sqrt{٢٤} - \sqrt{٥٤} + \sqrt{٩٦}$

$\sqrt{٢٤} - \sqrt{٥٤} + \sqrt{٩٦} = (\sqrt{٣ \times ٢ \times ٢٢}) - (\sqrt{٦ \times ٣٢}) + (\sqrt{٣ \times ٢ \times ٢٢ \times ٢٢})$

$= ٢\sqrt{٦} - ٣\sqrt{٦} + ٤\sqrt{٦}$

$= ٣\sqrt{٦}$

---

٣) بسط كل عبارة فيما يأتي:

٣أ) $٢\sqrt{٦} \times ٧\sqrt{٣}$

$٢\sqrt{٦} \times ٧\sqrt{٣} = ١٤\sqrt{٦} \times \sqrt{٣}$

$= ١٤\sqrt{٣ \times ٢} \times \sqrt{٣}$

$= ١٤\sqrt{٣ \times ٣ \times ٢}$

$= ١٤\sqrt{٢ \times ٣٢}$

$= \sqrt[2]{٤٢}$

٣ب) $٩\sqrt[٥]{} \times ١١\sqrt[١٥]{}$

$٩\sqrt[٥]{} \times ١١\sqrt[١٥]{} = ٩\sqrt[٥]{} \times ١١\sqrt[٥\times٣]{}$

$= ٩٩\sqrt[٥]{} \times \sqrt[٥]{} \times \sqrt[٣]{}$

$= ٩٩ \times ٥\sqrt[٣]{}$

$= ٤٩٥\sqrt[٣]{}$

٣جـ) $٣\sqrt[٢]{} (٤\sqrt[٣]{} + ٦\sqrt[٢]{})$

$٣\sqrt[٢]{} (٤\sqrt[٣]{} + ٦\sqrt[٢]{}) = (٣\sqrt[٢]{} \times ٤\sqrt[٣]{}) + (٣\sqrt[٢]{} \times ٦\sqrt[٢]{})$

$= ١٢\sqrt[٢\times٣]{} + ١٨\sqrt[٢]{}$

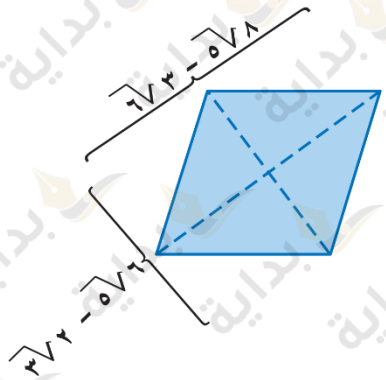
$= ١٢\sqrt[٦]{} + ٣٦$

٣د) $٥\sqrt[٣]{} (٣\sqrt[٢]{} - \sqrt[٣]{})$

$٥\sqrt[٣]{} (٣\sqrt[٢]{} - \sqrt[٣]{}) = (٥\sqrt[٣]{} \times ٣\sqrt[٢]{}) - (٥\sqrt[٣]{} \times \sqrt[٣]{})$

$= ١٥\sqrt[٢\times٣]{} - ٥\sqrt[٢٣]{}$

$= ١٥\sqrt[٦]{} - ١٥$



٤) هندسة: يمكن إيجاد مساحة معين باستعمال المعادلة م = $\frac{١}{٢}$ ق١ × ق٢، حيث ق١، ق٢ طولا قطري المعين. ما مساحة المعين في الشكل المجاور؟

م = $\frac{١}{٢}$ $(٨\sqrt[٥]{} - ٣\sqrt[٦]{}) (٦\sqrt[٥]{} - ٢\sqrt[٣]{})$

$= \frac{١}{٢} \left[٨\sqrt[٥]{} (٦\sqrt[٥]{} - ٢\sqrt[٣]{}) - ٣\sqrt[٦]{} (٦\sqrt[٥]{} - ٢\sqrt[٣]{}) \right]$

$= \frac{1}{2}$ (٤٨ × ٥ − ١٦ √١٥ − ١٨ √٣٠ + ٦ × ٣ √٢)

$= \frac{1}{2}$ (٢٤٠ − ١٦ √١٥ − ١٨ √٣٠ + ١٨ √٢)

= ١٢٠ − ٨ √١٥ − ٩ √٣٠ + ٩ √٢

√ تأكد

الأمثلة ١-٣ بسط كل عبارة فيما يأتي:

١) ٣ √٥ + ٦ √٥

٣ √٥ + ٦ √٥ = (٣ + ٦) √٥ = ٩ √٥

٢) √٧ − ٦ √٧

√٧ − ٦ √٧ = (١ − ٦) √٧ = -٥ √٧

٣) ٤ √٥ + ٢ √٢٠

٤ √٥ + ٢ √٢٠ = ٤ √٥ + ٢ √٢٢ × ٥

= ٤ √٥ + ٤ √٥ = ٨ √٥

٤) √٣ − √١٢

√٣ − √١٢ = √٣ - √٣ × ٢٢

= ٢ √٣ - √٣ = √٣

٥) $\sqrt{٨} + \sqrt{١٢} + \sqrt{١٨}$

$\sqrt{٨} + \sqrt{١٢} + \sqrt{١٨} = \sqrt{٢^{٢} \times ٢} + \sqrt{٣ \times ٢^{٢}} + \sqrt{٢ \times ٣ \times ٣}$

$= ٢\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٢}$

$= ٥\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٣}$

٦) $\sqrt{٢٧} + ٢\sqrt{٣} - \sqrt{١٢}$

$\sqrt{٢٧} + ٢\sqrt{٣} - \sqrt{١٢} = \sqrt{٣ \times ٣^{٢}} + ٢\sqrt{٣} - \sqrt{٣ \times ٢^{٢}}$

$= ٣\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} = ٣\sqrt{٣}$

٧) $٩\sqrt{٢}\ (٤\sqrt{٦})$

$٩\sqrt{٢}\ (٤\sqrt{٦}) = ٣٦\sqrt{١٢}$

$= ٣٦\sqrt{٣ \times ٢^{٢}}$

$= ٧٢\sqrt{٣}$

٨) $٣\sqrt{٣}\ (٧\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣})$

$٣\sqrt{٣}\ (٧\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣}) = ٣\sqrt{٧ \times ٣} + ٢\sqrt{٣ \times ٣}$

$= ٢١\sqrt{٣} + ٦\sqrt{٣}$

٩) $٥\sqrt{٥}\ (٢\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٢})$

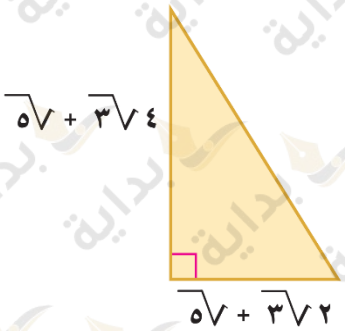
$٥\sqrt{٥}\ (٢\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٢}) = ٢\sqrt{٥ \times ٥} + ٤\sqrt{٢ \times ٥}$

$= ٥\sqrt{١٠}$

مثال ٤ ١٠) هندسة: يمكن إيجاد مساحة المثلث م باستعمال المعادلة :

م = $\frac{١}{٢}$ ق × ع، حيث (ق) طول القاعدة، (ع) ارتفاع المثلث.

احسب مساحة المثلث في الشكل المجاور.



م = $\frac{١}{٢}$ (٤√٣ + √٥) (٢√٣ + √٥)

= $\frac{١}{٢}$ [٤√٣ (٢√٣ + √٥) + √٥ (٢√٣ + √٥)]

= $\frac{١}{٢}$ (٢٤ + ٤√١٥ + ٢√١٥ + ٥)

= $\frac{١}{٢}$ (٢٩ + ٦√١٥)

= ١٤,٥ + ٣√١٥

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١-٣ بسط كل عبارة فيما يأتي:

١١) ٢√٦ + ٩√٦

٢√٦ + ٩√٦ = (٢ + ٩)√٦

= ١١√٦

١٢) ٣√٥٠ − ٣√٣٢

٣√٥٠ − ٣√٣٢ = ٣√٢ × ٥ × ٥ − ٣√٢ × ٢ × ١٦

= ١٥√٢ − ١٢√٢

= ٣√٢

١٣) $٧\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٣}$

$٧\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٣} = (٧ + ٥)\sqrt{٣} + (-٢ + ٣)\sqrt{٢}$

$= ١٢\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$

١٤) $\sqrt{٧}(٣\sqrt{٥} + \sqrt{٥})$

$\sqrt{٧}(٣\sqrt{٥} + \sqrt{٥}) = \sqrt{٧} \times ٣\sqrt{٥} + \sqrt{٧} \times \sqrt{٥}$

$= \sqrt{٣٥} + \sqrt{٣٥} = ٤\sqrt{٣٥}$

١٥) $\sqrt{٦}(٢\sqrt{١٠} + ٣\sqrt{٢})$

$\sqrt{٦}(٢\sqrt{١٠} + ٣\sqrt{٢}) = \sqrt{٦} \times ٢\sqrt{١٠} + \sqrt{٦} \times ٣\sqrt{٢}$

$= ٢\sqrt{٦٠} + ٣\sqrt{١٢}$

$= ٢\sqrt{٢ \times ٣ \times ٢ \times ٥} + ٣\sqrt{٢^{٢} \times ٣}$

$= ٢\sqrt{٣ \times ٢^{٢} \times ٥} + ٣\sqrt{٢^{٢} \times ٣}$

$= ٤\sqrt{٣ \times ٥} + ٦\sqrt{٣} = ٤\sqrt{١٥} + ٦\sqrt{٣}$

١٦) $٥\sqrt{٣}(٦\sqrt{١٠} - ٦\sqrt{٣})$

$٥\sqrt{٣}(٦\sqrt{١٠} - ٦\sqrt{٣}) = ٣٠\sqrt{٣٠} - ٣٠\sqrt{٣٠}$

$= ٣٠\sqrt{٣٠} - ٣٠ \times ٣$

$= ٣٠\sqrt{٣٠} - ٩٠$

١٧) $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})(\sqrt{١٥} + \sqrt{١٢})$

$(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})(\sqrt{١٥} + \sqrt{١٢}) = \sqrt{٣}(\sqrt{١٥} + \sqrt{١٢}) - \sqrt{٢}(\sqrt{١٥} + \sqrt{١٢})$

$= \sqrt{٥ \times ٣ \times ٣} + \sqrt{٣ \times ٢^{٢} \times ٣} - \sqrt{٣٠} - \sqrt{٢^{٢} \times ٣ \times ٢}$

$= ٣\sqrt{٥} + ٦ - \sqrt{٣٠} - ٢\sqrt{٦}$

١٨) $(٥\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٥})(٢\sqrt{١٠} - ٥)$

$= (٥\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٥})(٢\sqrt{١٠} - ٥) = ٥\sqrt{٢}(٢\sqrt{١٠} - ٥) + ٣\sqrt{٥}(٢\sqrt{١٠} - ٥)$

$= ١٠\sqrt{٥ \times ٢ \times ٢} - ٢٥\sqrt{٢} + ٦\sqrt{٥ \times ٢ \times ٥} - ١٥\sqrt{٥}$

$= ٢٠\sqrt{٥} - ٢٥\sqrt{٢} + ٣٠\sqrt{٢} - ١٥\sqrt{٥}$

$= ٥\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٢}$

مثال ٤ ١٩) هندسة: أوجد محيط ومساحة مستطيل عرضه $٢\sqrt{٧} - ٢\sqrt{٥}$ وطوله $٣\sqrt{٧} + ٣\sqrt{٥}$.

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$= (٣\sqrt{٧} + ٣\sqrt{٥})(٢\sqrt{٧} - ٢\sqrt{٥})$

$= ٢\sqrt{٧} \times (٣\sqrt{٧} + ٣\sqrt{٥}) - ٢\sqrt{٥}(٣\sqrt{٧} + ٣\sqrt{٥})$

$= ٦ \times ٧ + ٦\sqrt{٣٥} - ٦\sqrt{٣٥} - ٦ \times ٥$

$= ٤٢ - ٣٠ = ١٢$ وحدة مربعة

محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

$= (٢\sqrt{٧} - ٢\sqrt{٥}) + (٣\sqrt{٧} + ٣\sqrt{٥}) \times ٢$

$= (٥\sqrt{٧} + \sqrt{٥}) \times ٢$

$= (١٠\sqrt{٧} + ٢\sqrt{٥})$ وحدة

بسط كل عبارة فيما يأتي:

٢٠) $\sqrt{\frac{١}{٥}} - \sqrt{٥}$

$$\sqrt{\frac{١}{٥}} - \sqrt{٥} = \frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٥}} - \sqrt{٥}$$

$$= \frac{\sqrt{١} - \sqrt{٥} \times \sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$$

$$= \frac{\sqrt{٥} \times \sqrt{١} - \sqrt{٥} \times \sqrt{٥}}{\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}}$$

$$= \frac{\sqrt{٥} - ٥}{٥}$$

$$= \frac{-٤\sqrt{٥}}{٥}$$

٢١) $\sqrt{\frac{٢}{٣}} + \sqrt{٦}$

$$\sqrt{\frac{٢}{٣}} + \sqrt{٦} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} + \sqrt{٦}$$

$$= \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٣ \times ٢ \times ٣}}{\sqrt{٣}}$$

$$= \frac{\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣} \times \sqrt{٤} \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}}$$

$$= \frac{٤\sqrt{٦}}{٣}$$

٢٢) $٢\sqrt{\frac{١}{٢}} + ٢\sqrt{٢} - \sqrt{٨}$

$= ٢\sqrt{\frac{١}{٢}} + ٢\sqrt{٢} - \sqrt{٨} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} + ٢\sqrt{٢} - \sqrt{٨}$

$= \frac{٢+٤}{\sqrt{٢}} - \sqrt{٨}$

$= \frac{٦}{\sqrt{٢}} - \sqrt{٨}$

$= \frac{٦ - \sqrt{١٦}}{\sqrt{٢}} = \frac{٦ - ٤}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{٢\sqrt{٢}}{٢} = \sqrt{٢}$

٢٣) $٨\sqrt{\frac{٥}{٤}} + ٣\sqrt{٢٠} - ١٠\sqrt{\frac{١}{٥}}$

$٨\sqrt{\frac{٥}{٤}} + ٣\sqrt{٢٠} - ١٠\sqrt{\frac{١}{٥}} = ٨\frac{\sqrt{٥}}{٢} + ٣\sqrt{٤ \times ٥} - \frac{١٠}{\sqrt{٥}}$

$= ٤\sqrt{٥} + ٦\sqrt{٥} - \frac{١٠}{\sqrt{٥}} = ١٠\sqrt{٥} - \frac{١٠}{\sqrt{٥}}$

$= ١٠\sqrt{٥} - \frac{١٠}{\sqrt{٥}} = \frac{٥٠ - ١٠}{\sqrt{٥}}$

$= \frac{٤٠}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{٤٠\sqrt{٥}}{٥}$

$= ٨\sqrt{٥}$

٢٤) $(٣ - \sqrt{٥})^{٢}$

$(٣ - \sqrt{٥})^{٢} = ٩ + ٥ - ٦\sqrt{٥}$

$= ١٤ - ٦\sqrt{٥}$

٢٥) $(\sqrt{٢} + \sqrt{٣})^{٢}$

$(\sqrt{٢} + \sqrt{٣})^{٢} = ٢ + ٣ + ٢\sqrt{٦}$

$= ٥ + ٢\sqrt{٦}$

---

٢٦) **لعبة الأفعوانية:** تعبر المعادلة ع. $= \sqrt{ع^{٢} - ٦٤ل}$ عن السرعة للعبة أفعوانيه (ع) بالقدم/ ثانية في أدنى نقطة لها عند هبوطها من ارتفاع عمودي (ل) بالأقدام وبسرعة انطلاق (ع).

أ) كم تكون سرعة الأفعوانية عند قمة ارتفاعها ٢٢٥ قدماً كي تصل سرعتها إلى ١٢٠ قدماً / ثانية في أدنى نقطة لها؟

ع $= \sqrt{١٢٠^{٢} - ٦٤ \times ٢٢٥}$

= صفر قدم / ث

ب) فسر لماذا لا تكافئ المعادلة ع. = ع - $٨\sqrt{ل}$ المعادلة المعطاة؟

نأخذ في المعادلة الجذر التربيعي للفرق بين الحدين وليس الجذر التربيعي لكل حد.

---

٢٧) **استثمار:** استثمر عامر مبلغ ٢٢٥٠٠ ريال في التجارة، فأصبح المبلغ ٢٧٠٠٠ ريال بعد سنتين. يمكنك استعمال المعادلة ر $= \sqrt{\frac{ع^{٢}}{ع.}} - ١$ لإيجاد معدل الربح السنوي (ر)، حيث تمثل (ع.) المبلغ الأصلي، و (ع^{٢}) المبلغ بعد سنتين. أوجد معدل الربح السنوي للمبلغ الذي استثمره عامر؟

ر $= \sqrt{\frac{ع^{٢}}{ع.}} - ١ = \sqrt{\frac{٢٧٠٠٠}{٢٢٥٠٠}} - ١ = ١٫٠٥ - ١ = ٠٫٠٩٥$

$٠٫٠٩٥ \times ١٠٠ = ٩٫٥٪$

استثمار: ٩٫٥٪ تقريباً

٢٨) **كهرباء:** تستعمل المعادلة ت = $\frac{\sqrt{\text{قد}}}{\sqrt{\text{م}}}$ لحساب شدة التيار الكهربائي بالأمبير (ت)، حيث (قد) قدرة الجهاز بالواط، (م) المقاومة بالأوم. ما شدة التيار الكهربائي في فرن الميكروويف إذا كانت قوة التيار ٨٥٠ واط، ومقاومته ٥ أوم؟ اكتب شدة التيار في أبسط صيغة جذرية، ثم قدر قيمته إلي أقرب جزء من عشرة.

$\frac{\sqrt{٨٥٠}}{\sqrt{٥}} = \sqrt{\frac{٨٥٠}{٥}} = \sqrt{١٧٠} \approx$ ١٣ أمبير تقريباً

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٩) **تحد:** حدد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو غير صحيحة، وأعط مثالاً أو مثالاً مضاداً:

س + ص > $\sqrt{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}$ عندما س > ٠، ص > ٠

صحيحة، ١ + ١ > $\sqrt{١ + ١}$ أو ٢ > $\sqrt{٢}$

٣٠) **تبرير:** بين أنه إذا كانت أ، ب، جـ، د، أعداداً نسبية، فإن ناتج ضرب: أ$\sqrt{\text{ب}}$ + جـ $\sqrt{\text{ف}}$ ، أ$\sqrt{\text{ب}}$ – جـ $\sqrt{\text{ف}}$ ، لا يحوي جذوراً. فسر إجابتك.

(أ $\sqrt{\text{ب}}$ + ج $\sqrt{\text{ف}}$) (أ $\sqrt{\text{ب}}$ – ج $\sqrt{\text{ف}}$)

أ^٢ $\sqrt{\text{ب}^٢}$ – أج $\sqrt{\text{ب ف}}$ + - ج^٢ $\sqrt{\text{ف}^٢}$ أج $\sqrt{\text{ب ف}}$

أ^٢ ب – ج^٢ ف (هذا النمط هو فرق بين مربعين)

٣١) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة جمع جذرين ما تحت كل منهما مختلف. وفسر كيف يمكنك جمع هذين الحدين.

$\sqrt[3]{١٢} + \sqrt[3]{٢٧} = ٥\sqrt[3]{٢}$ ، بما أن تبسيط $\sqrt[3]{١٢}$ ، $٢\sqrt[3]{٣}$

وتبسيط $\sqrt[3]{٢٧}$ هو $٣\sqrt[3]{٣}$ وبما أن $٢\sqrt[3]{٣}$ ، $٣\sqrt[3]{٣}$ لهما ما تحت الجذر نفسه لذا يمكن جمعهما

---

٣٢) اكتب: صف بالخطوات كيف تضرب عبارتين جذريتين يتكون كل منهما من حدين، واكتب مثالاً يوضح ذلك.

يمكنك استعمال طريقة التوزيع بالترتيب عن طريق ضرب كل من الحدين الأولين والحدين الخارجيين والحدين الأوسطين والحدين الأخيرين ثم جمع الحدود المتشابهة وتبسيط الجذور.

تدريب على اختبار

٣٣) إجابة قصيرة: إذا كان عدد سكان مدينة ١٣٠٠٠٠ نسمة ويتزايدون بمقدار ٢٥٠٠ شخص في السنة، فإنه يمكن التعبير عن عدد سكانها بعد (س) سنة من ذلك بالمعادلة:

ع = ١٣٠٠٠٠+٢٥٠٠س. بعد كم سنة يصبح عدد سكان المدينة ١٤٥٠٠٠؟

١٤٥٠٠٠ = ١٣٠٠٠٠ + ٢٥٠٠ س

١٤٥٠٠٠ ـ ١٣٠٠٠٠ = ٢٥٠٠ س

١٥٠٠٠ = ٢٥٠٠ س

س = ١٥٠٠٠ ÷ ٢٥٠٠

س = ٦ سنوات

---

٣٤) أي مما يأتي يكافئ العبارة: ٨ (٣ – ص) + ٥ (٣ – ص)؟

أ) ٣٩ – ص

ب) ٤٠ (٣٠ – ص)

جـ) ١٣(٣ – ص)

د) ١٣ (٦ – ٢ ص)

٨ (٣ – ص) + ٥ (٣ – ص)

٢٤ – ٨ ص + ١٥ – ٥ ص

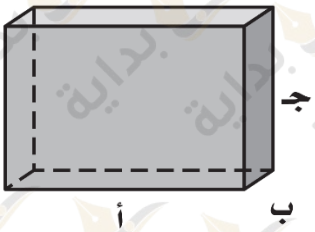
٣٩ – ١٣ ص

١٣ (٣ – ص)

الاختيار الصحيح: جـ) ١٣(٣ – ص)

---

٣٥) هندسة: أي عبارة مما يأتي تمثل مجموع أطوال الاثني عشر حرفاً للمنشور الرباعي (متوازي المستطيلات) أدناه؟



أ) ٢ (أ + ب + جـ)

ب) ٣ (أ + ب + جـ)

جـ) ٤(أ + ب + جـ)

د) ١٢ (أ + ب + جـ)

الاختيار الصحيح: جـ) ٤(أ + ب + ج)

مراجعة تراكمية

بسط كل عبارة فيما يأتي:

٣٦) $\sqrt{١٨}$

$\sqrt{١٨} = \sqrt{٣ \times ٢ \times ٣}$

$= \sqrt{٢ \times ٣^{٢}}$

$= ٣\sqrt{٢}$

٣٧) $\sqrt{٢٤}$

$\sqrt{٢٤} = \sqrt{٣ \times ٢ \times ٢^{٢}}$

$= ٢\sqrt{٣ \times ٢}$

$= ٢\sqrt{٦}$

٣٨) $\sqrt{٦٠}$

$\sqrt{٦٠} = \sqrt{٥ \times ٢ \times ٢ \times ٣}$

$= ٢\sqrt{٣ \times ٥}$

$= ٢\sqrt{١٥}$

٣٩) $\sqrt{٥٠أ^{٣}ب^{٥}}$

$\sqrt{٥٠أ^{٣}ب^{٥}} = أ\ ب^{٢}\sqrt{٥ \times ٢ \times ٥أب}$

$= ٥\ |أ|\ ب^{٢}\sqrt{٢أب}$

٤٠) $\sqrt{١٦٩س^{٤}ص^{٧}}$

$\sqrt{١٦٩س^{٤}ص^{٧}} = \sqrt{١٣ \times ١٣س^{٤}ص^{٤}ص^{٣}}$

$= ١٣\ س^{٢}\ ص^{٣}\sqrt{ص}$

٤١) $\sqrt{٦٣جـ^{٣}د^{٤}ف^{٥}}$

$\sqrt{٦٣جـ^{٣}د^{٤}ف^{٥}}$ = | ج | د^{٢} ف^{٢} $\sqrt{٧\times٣\times٣ج ف}$

= ٣ | ج | د^{٢} ف^{٢} $\sqrt{٧ج ف}$

حلل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

٤٢) س^{٢} + ١٢ س + ٢٧

س^{٢} + ١٢ س + ٢٧ = س^{٢} + ٣ س + ٩ س + ٢٧

= س (س + ٣) +٩ (س + ٣)

= (س + ٣) (س + ٩)

٤٣) ص ^{٢} + ١٣ ص +٣٠

ص ^{٢} + ١٣ ص +٣٠ = ص^{٢} + ٣ ص + ١٠ ص + ٣٠

= ص (ص+ ٣) + ١٠ (ص + ٣)

= (ص + ١٠) (ص + ٣)

٤٤) ب ^{٢} – ١٧ ب + ٧٢

ب ^{٢} – ١٧ ب + ٧٢ = ب ^{٢} – ٨ ب – ٩ ب + ٧٢

= ب (ب – ٨) – ٩ (ب – ٨)

= (ب – ٨) (ب – ٩)

٤٥) س^{٢} + ٦ س – ٧

س^{٢} + ٦ س – ٧ = س^{٢} – س + ٧ س – ٧

= س (س – ١) + ٧ (س – ١)

= (س + ٧) (س – ١)

٤٦) $ص^{٢} - ص - ٤٢$

$ص^{٢} - ص - ٤٢ = ص^{٢} + ٦ ص - ٧ ص - ٤٢$

$= ص (ص + ٦) - ٧ (ص + ٦)$

$= (ص + ٦) (ص - ٧)$

٤٧) $- ٧٢ + ٦و + و^{٢}$

$- ٧٢ + ٦و + و^{٢} = و^{٢} + ١٢و + ٦و - ٧٢$

$= و (و + ١٢) - ٦ (و + ١٢)$

$= (و + ١٢) (و - ٦)$

استعد للدرس اللاحق

حل كل معادلة فيما يأتي مقرباً الجواب أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر:

٤٨) $- ٤ جـ - ١,٢ = ٠,٨$

$- ٤ج - ١,٢ = ٠,٨$

$- ٤ج - ١,٢ = ٠,٨$

$- ٤ج = ٠,٨ + ١,٢$

$- ٤ج = ٢$

$ج = - ٠,٥$

٤٩) $- ٢,٦ك - ٣٣,٧ = ٨٤,١$

$- ٢,٦ك = ٨٤,١ + ٣٣,٧$

$- ٢,٦ك = ١١٧,٨$

$ك = - ٤٥,٣$

٥٠) ٠,٣م + ٤ = ٩,٦

٠,٣م = ٩,٦ ـ ٤

٠,٣م = ٥,٦

م = ١٨,٧

٥١) -١٠ - $\frac{ن}{٥}$ = ٦

- ١٠ - $\frac{ن}{٥}$ = ٦

- $\frac{ن}{٥}$ = ٦ + ١٠

- $\frac{ن}{٥}$ = ١٦

ن = - ٨٠

٥٢) $\frac{-٤هـ-(-٥)}{-٧}$ = ١٣

-٤هـ - (-٥) = -٧ × ١٣

-٤هـ + ٥ = - ٩١

- ٤هـ = -٩١-٥

-٤هـ = - ٩٦

هـ = ٢٤

٥٣) ٣,٦ت + ٦- ٢,٥ت = ٨

٣,٦ت + ٦- ٢,٥ت = ٨

١,١ت = ٨-٦

١,١ت = ٢

ت = ١,٨

٩ - ٣ المعادلات الجذرية

١) قيادة: تمثل المعادلة ع = $\sqrt{١٢,٣}$نق السرعة القصوى بالكيلومتر/ ساعة التي يمكن أن تسير بها سيارة بأمان على طريق منحن غير محدد الجانبين، حيث (نق) نصف قطر المنحنى بالأمتار. فإذا صمم الطريق لسرعة قصوى مقدارها ١٠٥كلم/ ساعة، فما طول نصف قطر المنحنى؟

١٠٥ = $\sqrt{٢١,٣}$نق

(١٠٥)^{٢} = ٢١,٣نق تربيع الطرفين

نق ≈ ٥١٨ متراً

تحقق:

ع = $\sqrt{٢١,٣}$نق

١٠٥ = $\sqrt{٢١,٣ \times ٥١٨}$

١٠٥ = ١٠٥ √

حل المعادلة:

٢أ) $\sqrt{جـ - ٣}$ – ٢ = ٤

$\sqrt{جـ - ٣}$ – ٢ = ٤

$\sqrt{جـ - ٣}$ = ٤ + ٢

$\sqrt{جـ - ٣}$ = ٦

($\sqrt{جـ - ٣}$)^{٢} = ٦^{٢}

جـ – ٣ = ٣٦

جـ = ٣٩

٢ب) ٤ + $\sqrt{هـ + ١}$ = ١٤

٤ + $\sqrt{٥ + ١}$ = ١٤

$\sqrt{٥ + ١}$ = ١٤ – ٤

$\sqrt{٥ + ١}$ = ١٠

($\sqrt{٥ + ١}$)^{٢} = ١٠^{٢}

٥ + ١ = ١٠٠

٥ = ١٠٠ – ١

٥ = ٩٩

٣) حل المعادلات التالية وتأكد من صحة الحل:

٣أ) $\sqrt{ت + ٥} = ت + ٣$

$\sqrt{ت + ٥} = ت + ٣$

$(\sqrt{ت + ٥})^{٢} = (ت + ٣)^{٢}$

$ت + ٥ = ت^{٢} + ٩ + ٦ت$

$ت^{٢} + ٩ + ٦ت - ت - ٥ = ٠$

$ت^{٢} + ٥ت + ٤ = ٠$

$(ت + ١)(ت + ٤) = ٠$

$ت = -١$ ✓

$ت = -٤$ ×

تحقق:

$\sqrt{ت + ٥} = ت + ٣$

$\sqrt{-١ + ٥} = -١ + ٣$

$٢ = ٢$ ✓

$\sqrt{ت + ٥} = ت + ٣$

$\sqrt{-٤ + ٥} = -٤ + ٣$

$١ = -١$ ×

٣ب) $س - ٣ = \sqrt{س - ١}$

$س - ٣ = \sqrt{س - ١}$

$(س - ٣)^{٢} = س - ١$

$س^{٢} + ٩ - ٦س = س - ١$

$س^{٢} + ٩ - ٦س - س + ١ = ٠$

$س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$

$(س - ٢)(س - ٥) = ٠$

$س = ٢$ ×

$س = ٥$ ✓

تحقق:

$س - ٣ = \sqrt{س - ١}$

$٢ - ٣ = \sqrt{٢ - ١}$

$-١ = ١$ ×

$س - ٣ = \sqrt{س - ١}$

$٥ - ٣ = \sqrt{٥ - ١}$

$٢ = \sqrt{٤}$

$٢ = ٢$ ✓

√ تأكد

مثال ١ هندسة: ما طول نصف قطر كرة سلة إذا كانت معادلة مساحة سطحها هي م = ٤ط نق^{٢} ؟

م = ٤ط نق^{٢}

$$نق = \sqrt{\frac{م}{٤ط}}$$

$$نق = \sqrt{\frac{م}{٤ط}} \times \sqrt{\frac{٤ط}{٤ط}}$$

$$نق = \sqrt{\frac{م ط}{٢ط}}$$

المثالان ٢، ٣ حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٢) $\sqrt{١٠هـ + ١} = ٢١$

$\sqrt{١٠هـ + ١} = ٢١$

$\sqrt{١٠هـ} = ٢٠$

١٠هـ = ٤٠٠

هـ = ٤٠

تحقق:

$\sqrt{١٠هـ + ١} = ٢١$

$\sqrt{١٠ \times ٤٠ + ١} = ٢١$

٢٠ + ١ = ٢١ √

٣) $\sqrt{٧ر+٢} + ٣ = ٧$

$\sqrt{٧ر+٢} = ٧ - ٣$

$\sqrt{٧ر+٢} = ٣ - ٧ = ٤$

٧ر + ٢ = ١٦

٧ر = ١٦ − ٢

٧ر = ١٤

ر = ٢

تحقق:

$\sqrt{٧ر+٢} = ٣ - ٧$

$\sqrt{١٤+٢} = ٤$

$\sqrt{١٦} = ٤ = ٤$ √

٤) $\sqrt{جـ - ٣}$ + ٥ = ٦

$\sqrt{جـ - ٣}$ + ٥ = ٦

$\sqrt{جـ - ٣}$ = ٦ − ٥ = ١

$\sqrt{جـ - ٣}$ = ١

ج − ٣ = ١

ج = ٤

تحقق:

$\sqrt{ج - ٣}$ = ١

$\sqrt{٤ - ٣}$ = ١

١ = ١ √

٥) $\sqrt{٣س - ٥}$ = س − ٥

$\sqrt{٣س - ٥}$ = س − ٥

٣س − ٥ = (س − ٥)^{٢}

س^{٢} + ٢٥ − ١٠س − ٣س + ٥ = ٠

س^{٢} − ١٣س + ٣٠ = ٠

(س − ٣) (س − ١٠) = ٠

س = ١٠ √

س = ٣ ×

تحقق:

$\sqrt{٣س - ٥}$ = س − ٥

$\sqrt{٣٠ - ٥}$ = ١٠ − ٥

٥ = ٥ √

$\sqrt{٣س - ٥}$ = س − ٥

$\sqrt{٩ - ٥}$ = ٣ − ٥

٢ = -٢ ×

---

٦) $\sqrt{٢ن + ٣}$ = ن

$\sqrt{٢ن + ٣}$ = ن

٢ن + ٣ = ن^{٢}

ن^{٢} − ٢ن − ٣ = ٠

(ن + ١) (ن − ٣) = ٠

ن = ٣ √

ن = -١ ×

تحقق:

$\sqrt{٢ن + ٣}$ = ن

$\sqrt{٦ + ٣}$ = ٣

٣ = ٣ √

$\sqrt{٢ن + ٣}$ = ن

٧) $\sqrt{أ - ٢}$ + ٤ = أ

$\sqrt{أ - ٢}$ + ٤ = أ

$\sqrt{أ - ٢}$ = أ − ٤

أ − ٢ = (أ − ٤)^{٢}

أ − ٢ = (أ^{٢} + ١٦ − ٨أ)

أ − ٢ = أ^{٢} + ١٦ − ٨أ

أ^{٢} + ١٦ − ٨أ − أ + ٢ = ٠

أ^{٢} − ٩أ + ١٨ = ٠

(أ − ٣) (أ − ٦) = ٠

أ = ٣ ×

أ = ٦ √

تحقق:

$\sqrt{أ - ٢}$ + ٤ = أ

$\sqrt{-٢ + ٣} = -١$

$-١ = ١$ ×

$\sqrt{٦ - ٢} + ٤ = ٦$

$٦ + ٤ = ٦$

$٦ = ٦$ √

$\sqrt{أ - ٢} + ٤ = أ$

$\sqrt{٣ - ٢} + ٤ = ٣$

$\sqrt{١} + ٤ = ٣$

$٥ = ٣$ ×

تدرب وحل المسائل

٨) رياضة: يمكن استعمال الدالة ع = ط $\sqrt{\frac{٩,٨ل}{٧}}$ ،لتقريب أقصى سرعة أن يركض بها شخص، حيث (ع) السرعة بالمتر/ ثانية، (ل) طول ساق الشخص بالأمتار.

أ) ما أقصى سرعة يركض بها شخص طول ساقه ١,٥ متر إلى أقرب جزء من عشرة من المتر؟

ع = ط $\sqrt{\frac{٩,٨ل}{٧}}$

ع = ط $\sqrt{\frac{٩,٨\times ١,٥}{٧}}$

ع = ط $\sqrt{٢,١}$

ع = ٤,٥ م / ث

ب) ما طول الساق لشخص سرعته القصوى ٢,٧م / ث إلى أقرب جزء من عشرة من المتر؟

ع = ط $\sqrt{\frac{٩,٨ل}{٧}}$

٢,٧ = ط $\sqrt{\frac{٩,٨\times ل}{٧}}$

$(٢,٧)^{٢} = (٣,١٤)^{٢} \frac{٩,٨ \times ل}{٧}$

$٧,٢٩ = (٣,١٤)^{٢} \frac{٩,٨ \times ل}{٧}$

٩,٨٥٩٦ × ٩,٨ × ل = ٧,٢٩ × ٧

٦٩,٦٢ × ل = ٧,٢٩ × ٧

ل = ٠,٥ م

جـ) هل تزيد السرعة القصوى أم تنقص بزيادة طول الساق؟

تزيد، كلما تزايد طول الساق تزداد قيمة ما تحت الجذر أيضاً

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٩) $\sqrt{أ} + ١١ = ٢١$

$\sqrt{أ} + ١١ = ٢١$

$\sqrt{أ} = ٢١ - ١١$

$\sqrt{أ} = ١٠$

$أ = (١٠)^{٢}$

$أ = ١٠٠$

تحقق:

$\sqrt{١٠٠} + ١١ = ٢١$

$١٠ + ١١ = ٢١$

$٢١ = ٢١$ √

١٠) $\sqrt{ن - ٣} = ٦$

$\sqrt{ن - ٣} = ٦$

$ن - ٣ = ٣٦$

$ن = ٣٦ + ٣$

$ن = ٣٩$

تحقق:

$\sqrt{٣٩ - ٣} = ٦$

$\sqrt{٣٦} = ٦$ √

١١) $\sqrt{ك + ٧} = ٣\sqrt{٢}$

$\sqrt{ك + ٧} = ٣\sqrt{٢}$

$ك + ٧ = ١٨$

$ك = ١١$

تحقق:

$\sqrt{١١ + ٧} = ٣\sqrt{٢}$

$\sqrt{١٨} = ٣\sqrt{٢}$

$\sqrt{٣ \times ٢ \times ٣} = ٣\sqrt{٢}$

$٣\sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$ √

١٢) $ص = \sqrt{١٢ - ص}$

$ص = \sqrt{١٢ - ص}$

$ص^{٢} = ١٢ - ص$

$ص^{٢} + ص - ١٢ = ٠$

$(ص - ٣)(ص + ٤) = ٠$

$ص = -٤$

$ص = ٣$

تحقق:

$ص^{٢} + ص - ١٢ = ٠$

$(-٤)^{٢} - ٤ - ١٢ = ٠$

$١٦ - ٤ - ١٢ = ٠$ √

$ص^{٢} + ص - ١٢ = ٠$

$(٣)^{٢} + ٣ - ١٢ = ٠$

$١٢ - ١٢ = ٠$ √

١٤) $\sqrt[٥]{أ - ٣} + ٤ = ١٤$

$\sqrt[٥]{أ - ٣} + ٤ = ١٤$

$\sqrt[٥]{أ - ٣} = ١٠$

$(أ - ٣)^{٢} = (١٠)^{٢}$

$أ - ٣ = ١٠٠$

$أ = ١٧٥$

$أ = ٧$

تحقق:

$\sqrt[٥]{٧ - ٣} = ١٠$

$\sqrt[٥]{٤} = ١٠$

$١٠ = ١٠$ √

١٥) $\sqrt{س^{٢} + ٩س + ١٥} = س + ٥$

$\sqrt{س^{٢} + ٩س + ١٥} = س + ٥$

$س^{٢} + ٩س + ١٥ = (س + ٥)^{٢}$

$س^{٢} + ٩س + ١٥ = س^{٢} + ١٠س + ٢٥$

$٩س + ١٥ - ١٠س - ٢٥ = ٠$

$-س - ١٠ = ٠$

$س = -١٠$

تحقق:

$\sqrt{(-١٠)^{٢} - ٩٠ + ١٥} = -١٠ + ٥$

$\sqrt{١٠ + ١٥} = -٥$

$\sqrt{٢٥} = -٥$

$٥ = -٥$

لا يوجد حل

١٦) $٦\sqrt{\frac{٥ك}{٤}} - ٣ = ٠$

$٦\sqrt{\frac{٥ك}{٤}} - ٣ = ٠$

$\frac{٦}{٢}\sqrt{٥ك} = ٣$

$\sqrt{٥ك} = ١$

$(\sqrt{٥ك})^{٢} = ١$

$ك = \frac{١}{٥}$

١٧) $\sqrt{٥س^{٢} - ٩} = ٢س$

$\sqrt{٥س^{٢} - ٩} = ٢س$

$٥س^{٢} - ٩ = ٢س$

$٥س^{٢} - ٢س - ٩ = ٠$

$٥س^{٢} - ٢س - ٩ = ٠$

$٥س^{٢} + ٣س - ١٥س - ٩ = ٠$

$٥س (س - ٣) + ٣ (س - ٣) = ٠$

$(٥س + ٣) (س - ٣) = ٠$

$س = \frac{-٣}{٥}$ ×

$س = ٣$ √

تحقق:

$\sqrt{٥(٣)^{٢} - ٩} = ٦$

$\sqrt{٤٥ - ٩} = ٦$

$\sqrt{٣٦} = ٦$

$٦ = ٦$ √

$$\frac{٣-}{٥} \times ٢ = \sqrt{٩ - {}^{٢}(\frac{٣-}{٥})٥}$$

$$\frac{٦-}{٥} = \sqrt{٩ - \frac{٩}{٢٥} \times ٥}$$

$$\frac{٦-}{٥} = ٩ - \sqrt{\frac{٩}{٥}} \quad \times$$

١٨) بندول: يطلق على الزمن(ن) بالثواني الذي يستغرقه بندول ساعة لعمل دورة كاملة الزمن الدوري. ويعبر عنه بالمعادلة: ن = ٢ط $\sqrt{\frac{ل}{٣٢}}$ ، حيث (ل) طول البندول بالأقدام.

أ) ما طول بندول ساعة زمنه الدوري ٨ ثوان؟ قرب إلى أقرب قدم؟

$$٨ = ٢ط \sqrt{\frac{ل}{٣٢}}$$

$$٦٤ = ٤ط^{٢} \times \frac{ل}{٣٢}$$

$$١٦ = ط^{٢} \times \frac{ل}{٣٢}$$

$$٣٢ \times ١٦ = ط^{٢} \times ل$$

$$٥١٢ = ط^{٢} \times ل$$

ل = ٥١,٩

٥٢ قدم تقريبا

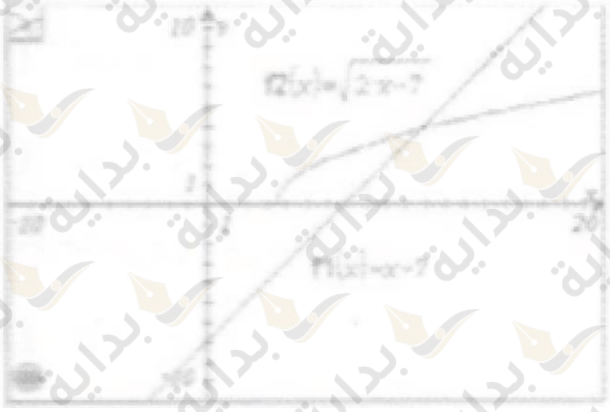
ب) هل زيادة طول البندول تزيد السرعة أم تنقصها؟ فسر إجابتك.

إذا كان الطول أكبر فان ناتج القسمة سيكون عددا أكبر من السابق وكذلك جذر ناتج القسمة سيكون أكبر من سابقه أيضا

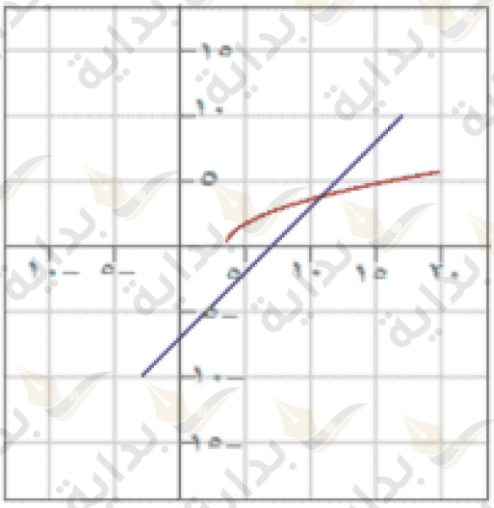
١٩) تمثيلات متعددة:

سوف تكتشف في حل المعادلة $\sqrt{٢س - ٧}$ = س – ٧ طرائق متنوعة للحل.

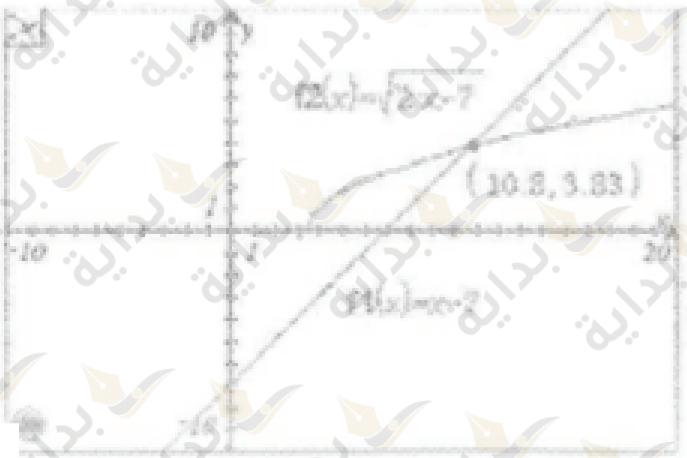
أ) بيانياً: افتح شاشة جديدة، ثم أدخل الطرف الأيمن من المعادلة على صورة ص١= $\sqrt{٢س - ٧}$.وأدخل الطرف الأيسر على صورة ص٢ = س – ٧، ثم اضغط مفتاح Add Graphs :2 .



ب) بيانياً: مثل ما يظهر على الشاشة.



جـ) تحليلياً: استعمل مفتاح المقطع من قائمة ٣: intersection point(s) ، لإيجاد نقطة التقاطع.



د) تحليلياً: حل المعادلة الجذرية جبرياً، وكيف يمكن مقارنة حلك بالحل الناتج بيانياً؟

$\sqrt{٢س - ٧} = س - ٧$

$٢س - ٧ = (س - ٧)^{٢}$

$٢س - ٧ = س^{٢} + ٤٩ - ١٤ س$

$س^{٢} + ٤٩ - ١٤س - ٢س + ٧ = ٠$

$س^{٢} - ١٦س + ٥٦ = ٠$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

$س = \frac{١٦ \pm \sqrt{٢١٦^{٢} - ٤ \times ١ \times ٥٦}}{٢أ}$

$س = \frac{١٦ \pm \sqrt{٤}^{٢}}{٢}$

س = ١٠,٨

س = ٥,٢

تحليليا: ١٠,٣٨ تقريباً، الحلان متساويان تقريباً

---

٢٠) تغليف: حجم علبة شوكولاتة أسطوانية ١٦٢ سنتمتراً مكعباً. تستعمل المعادلة $نق = \sqrt{\frac{ح}{ط ع}}$ لإيجاد نصف قطر العلبة، حيث (ح) حجم العلبة، و (ع) ارتفاعها.

أ) إذا كان نصف قطر العلبة ٢,٥ سم، فأوجد ارتفاعها إلي أقرب جزء من مئة.

$نق = \sqrt{\frac{ح}{ط ع}}$

$٢,٥ = \sqrt{\frac{١٦٢}{ط ع}}$

$$٢,٥ = \sqrt{\frac{١٦٢}{ط\ ع}}$$

$$٦,٢٥ = \sqrt{\frac{١٦٢}{ط\ ع}}$$

$$ط\ ع \times ٦,٢٥ = ١٦٢$$

$$ع = \frac{١٦٢}{ط\ ٦,٢٥}$$

$$ع = ٨,٣$$

ب) إذا كان ارتفاع العلبة ١٠ سم، فأوجد نصف قطرها إلي أقرب جزء من مئة.

$$نق = \sqrt{\frac{ح}{ط\ ع}}$$

$$نق = \sqrt{\frac{١٦٢}{ط ١٠}}$$

$$نق \approx ٢,٣$$

مسائل مهارات التفكير العليا

٢١) تبرير: بين الاختلاف في حل المعادلتين الآتيتين: ٥ = $\sqrt{س}$ + ١، ٥ = $\sqrt{س + ١}$.

يتعين عليك في المعادلة الأولي وضع جذور في طرف أولاً وذلك بطرح ١ من الطرفين ثم بتربيع الطرفين لإيجاد قيمة س أما في المعادلة الثانية فإن الجذر في طرف وحده لذا ربع الطرفين أولاً ثم اطرح ١ من كل طرف لحل المعادلة وإيجاد قيمة س

٢٢) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة جذرية تحتوي متغيراً في كلا طرفيها، ثم حل المعادلة.

$س = \sqrt{٢س - ١}$

$س^{٢} = ٢س - ١$

$س^{٢} - ٢س + ١ = ٠$

$(س - ١)(س - ١) = ٠$

$س = ١$

٢٣) تبرير: هل المعادلة الآتية صحيحة أحياناً، أم صحيحة دائماً أم غير صحيحة أبداً؟ فسر إجابتك.

$\sqrt{(س - ٢)^{٢}} = س - ٢$

أحياناً، المعادلة صحيحة لقيم $س \geq ٢$، وخطأ عندما $س < ٢$

---

٢٤) تحد: حل المعادلة: $\sqrt{س + ٩} = \sqrt[٣]{س} + ٣$

$\sqrt{س + ٩} = (\sqrt[٣]{س} + ٣)^{٢}$

$س + ٩ = ٣ + س + ٢\sqrt[٣]{س}$

$٩ = ٣ + ٢\sqrt[٣]{س}$

$٦ = ٢\sqrt[٣]{س}$

$٣ = \sqrt[٣]{س}$

$٢٣ = (\sqrt[٣]{س})^{٢}$

$٩ = ٣س$

$س = ٣$

٢٥) اكتب: بعض القواعد العامة المتعلقة بحل المعادلات الجذرية، موضحاً هذه القواعد من خلال حل المعادلات جذرية.

جمع أو طرح العبارات التي ليست تحت الجذر في كل طرف، ضرب أو قسمة القيم التي ليست تحت الجذر لكل طرف ربع طرفي المعادلة وحل لإيجاد المتغير كما عملت سابقاً

تدريب على اختبار

٢٦) ما حل المعادلة: $\sqrt{س + ٣} - ١ = س - ٤$؟

أ) ١، ٦

ب) ١

جـ) -١، -٦

د) ٦

$\sqrt{س + ٣} - ١ = س - ٤$

$\sqrt{س + ٣} = س - ٤ + ١$

$\sqrt{س + ٣} = (س - ٣)^{٢}$

$س + ٣ = س^{٢} - ٦س + ٩$

$س^{٢} - ٧س + ٦ = ٠$

$(س - ٦)(س - ١) = ٠$

$س - ٦ = ٠$

$س = ٦$ √

$س = ١$ ×

الاختيار الصحيح: د) ٦

---

٢٧) أي العبارات الآتية تكافئ $\sqrt{\frac{٣٦}{٣٧}}$ ؟

أ) $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

ب) $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$

جـ) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$

د) $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$

$\frac{\sqrt{٣٦}}{\sqrt{٢٧}} = \frac{\sqrt{٣ \times ٣ \times ٢ \times ٢}}{\sqrt{٢٧}}$

$$= \frac{٣ \times ٢}{\sqrt[٣]{٣}} = \frac{\sqrt[٣]{٣}}{\sqrt[٣]{٣}} \times \frac{٦}{\sqrt[٣]{٣}}$$

$$= \frac{\sqrt[٣]{١٨}}{٢٧} = \frac{\sqrt[٣]{٢}}{٣}$$

الاختيار الصحيح: ب) $\frac{\sqrt[٣]{٢}}{٣}$

مراجعة تراكمية

بسط كل عبارة فيما يأتي:

٢٨) $\sqrt[٣]{٧} \times \sqrt[٦]{٢}$

$$\sqrt[٦]{٢} \times \sqrt[٣]{٧} = \sqrt[٣ \times ٣ \times ٢]{١٤}$$

$$= \sqrt[٢]{٣ \times ١٤}$$

$$= \sqrt[٢]{٤٢}$$

٢٩) $\sqrt{\frac{٢٧}{أ^٢}}$

$$\sqrt{\frac{٢٧}{أ^٢}} = \frac{\sqrt{٣ \times ٣ \times ٣}}{|أ|}$$

$$= \frac{\sqrt[٣]{٣}}{|أ|}$$

٣٠) $\sqrt{\frac{ج^٥}{د^٤}}$

$$\sqrt{\frac{ج^٥}{د^٤}} = \frac{\sqrt{ج^٤ \times ج}}{\sqrt{د^٤ \times د}}$$

$$= \frac{\sqrt{ج^٢ ج^٥}}{\sqrt{د^٢ د}} \times \frac{\sqrt{د}}{\sqrt{د}}$$

$$= \frac{\sqrt{ج^٢ ج^٥ د}}{|د^٣|^٢}$$

٣١) فيزياء: قذف جسم إلي الأعلى من مستوي الأرض حسب المعادلة ع = ٦٩ن – ٦١ن^{٢}، حيث (ع) تمثل ارتفاعه بالأقدام، بعد (ن) من الثواني. أوجد قيم ن عندما يكون ارتفاع الجسم ٩٦ قدماً.

ن = ١,٣ ثانية وَ ن = ٤,٧ ثوان تقريباً

حلل كل ثلاثية حدود فيما يأتي إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب (أولية).

٣٢) ٢س^{٢} + ٧س + ٥

٢س^{٢} + ٧س + ٥ = ٢س^{٢} + ٢س + ٥س + ٥

= ٢س(س + ١) + ٥(س + ١)

= (س + ١)(٢س + ٥)

٣٣) ٦ب^{٢} + ٥ب - ٦

٦ب^{٢} + ٥ب – ٦ = ٦ب^{٢} – ٤ب + ٩ب – ٦

= ٢ب(٣ب – ٢) + ٣(٣ب – ٢)

= (٣ب – ٢)(٢ب + ٣)

٣٤) ٨ك^{٢} – ١٩ك + ٩

أولية

حدد العبارات الوحيدة الحد فيما يأتي، واكتب "نعم" أو "لا"، وفسر إجابتك:

٣٥) ١٢

نعم، ١٢ عدد حقيقي فهو وحيدة حد.

٣٦) ٤س^{٣}

نعم، ٤س^{٣} هو ضرب عدد في متغير مضروباً في نفسه ثلاث مرات.

٣٧) أ – ٢ب

لا، أ – ٢ب فيه طرح، وليس ضرب أعداد ومتغيرات فقط.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: أوجد ناتج كلٌ مما يأتي:

٣٨) $٩^{٢}$

$٩^{٢} = ٩ \times ٩ = ٨١$

٣٩) $١٠^{٦}$

$١٠^{٦} = ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ = ١٠٠٠٠٠٠$

٤٠) $٤^{٥}$

$٤^{٥} = ٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤ = ١٠٢٤$

٤١) $(٨ف)^{٢}$

$(٨ف)^{٢} = ٨ف \times ٨ف = ٦٤ ف^{٢}$

٤٢) $\left(\frac{ل^{٣}}{٩}\right)^{٢}$

$\left(\frac{ل^{٣}}{٩}\right)^{٢} = \frac{ل^{٣}}{٩} \times \frac{ل^{٣}}{٩} = \frac{ل^{٦}}{١٨}$

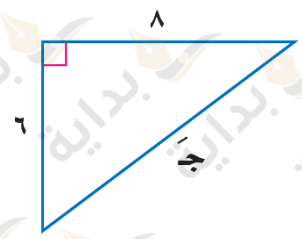
٤٣) $(١٠ص^{٢})^{٣}$

$(١٠ص^{٢})^{٣} = ١٠ص^{٢} \times ١٠ص^{٢} \times ١٠ص^{٢} = ١٠٠٠ص^{٦}$

٩ - ٤ نظرية فيثاغورث

١) أوجد طول الضلع المجهول في كل مما يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر:

١أ)



ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}

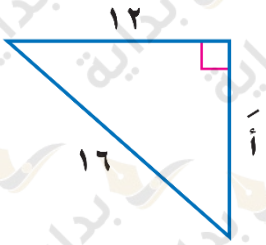
ج^{٢} = ٨^{٢} + ٦^{٢}

ج^{٢} = ١٠٠

ج = $\sqrt{١٠٠}$

ج = ١٠

١ب)



ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}

١٦^{٢} = ١٢^{٢} + أ^{٢}

٢٥٦ − ١٤٤ = أ^{٢}

أ^{٢} = ١١٢

أ = $\sqrt{١١٢}$ ≈ ١٠,٥٨

٢) لنفرض أن طول أطول ضلع في الشراع ٩م، وطول أقصر ضلع فيه ٤م. فأوجد ارتفاع الشراع.

٩^{٢} = ٤^{٢} + أ^{٢}

٨١ = ١٦ + أ^{٢}

١٦ − ٨١ = أ^{٢}

أ^{٢} = ٦٥

أ = $\sqrt{٦٥}$ ≈ ٨,١

٣) حدد إذا كانت مجموعة الأطوال الآتية تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا:

٣أ) ٣٠، ٤٠، ٥٠

ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}

٥٠^{٢} = ٤٠^{٢} + ٣٠^{٢}

٢٥٠٠ = ١٦٠٠ + ٩٠٠

٢٥٠٠ = ٢٥٠٠ √

نعم

٣ب) ٦، ١٢، ١٨

ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}

١٨^{٢} = ١٢^{٢} + ٦^{٢}

٣٢٤ = ١٤٤ + ٣٦

٣٢٤ ≠ ١٨٠

لا

√ تأكد

مثال ١ : أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم الأمر.

١)



$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$٢٢١^{٢} = ٤^{٢} + ب^{٢}$

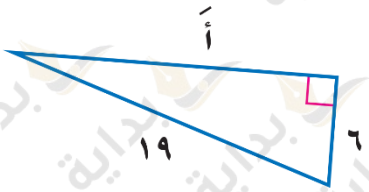
$٤٤١ - ١٦ = ب^{٢}$

$ب^{٢} = ٤٢٥$

$ب = \sqrt{٤٢٥}$

$ب = ٢٠,٦٢$

٢)



$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$١٩^{٢} = ٦^{٢} + أ^{٢}$

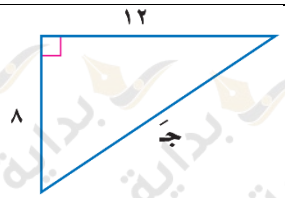
$٣٦١ - ٣٦ = أ^{٢}$

$٣٢٥ = أ^{٢}$

$أ = ١٨,٠٣$

---

٣)



$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$ج^{٢} = ١٢^{٢} + ٨^{٢}$

$ج^{٢} = ٢٠٨$

$ج = ١٤,٤٢$

مثال ٢ : ٤) **كرة قدم:** يوضح الشكل المجاور ملعب كرة قدم مستطيل الشكل.



أ) إذا كان طول قطر الملعب ١٢٥م، وعرضه ٧٥م، فكم طوله؟

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$١٢٥^{٢} = ٧٥^{٢} + ل^{٢}$

$ل^{٢} = ١٢٥^{٢} - ٧٥^{٢}$

$ل^{٢} = ١٠٠٠٠$

ل = ١٠٠م

ب) في لحظة معينة، كما في الشكل، مرر حارس المرمى الكرة إلى الظهير الأيمن الذي يبعد عنه مسافة ٣٠م، فركلها مباشرة إلى لاعب الوسط الهجومي الذي يقف على مسافة ٧٢م منه. فكم يبعد لاعب الوسط الهجومي عن حارس مرماه؟

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$١٢٥^{٢} = ٧٢^{٢} + ٣٠^{٢}$

$ل^{٢} = ٥١٨٤ + ٩٠٠$

$ل^{٢} = ٦٠٨٤$

ل = ٧٨م

مثال ٣ : حدد إذا كانت مجموعة الأطوال الآتية تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا:

٥) ٨، ١٢، ١٦

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$١٦^{٢} \stackrel{؟}{=} ١٢^{٢} + ٨^{٢}$

$٢٥٦ \stackrel{؟}{=} ١٤٤ + ٦٤$

$٢٥٦ \neq ٢٠٨$

لا؛ بما أن $ج^{٢} \neq ب^{٢} + أ^{٢}$ فإن قياسات هذه الأضلاع لا تشكل مثلثاً قائم الزاوية.

٦) ٧، ٢٤، ٢٥

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$٢٥^{٢} \stackrel{؟}{=} ٢٤^{٢} + ٧^{٢}$

$٦٢٥ \stackrel{؟}{=} ٥٧٦ + ٤٩$

$٦٢٥ = ٦٢٥$

نعم؛ بما أن $ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$ فإن قياسات هذه الأضلاع تشكل مثلثاً قائم الزاوية.

٧) ١٥، ٢٥، ٤٥

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$٤٥^{٢} \stackrel{؟}{=} ٢٥^{٢} + ١٥^{٢}$

$٢٠٢٥ \stackrel{؟}{=} ٦٢٥ + ٢٢٥$

$٢٠٢٥ \neq ٨٥٠$

لا؛ بما أن $ج^{٢} \neq ب^{٢} + أ^{٢}$ فإن قياسات هذه الأضلاع لا تشكل مثلثاً قائم الزاوية.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ : أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم الأمر:

٨)



$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$١٢^{٢} = ٢^{٢} + ب^{٢}$

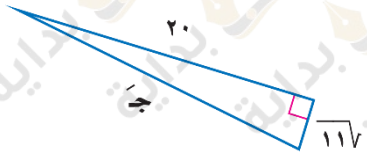
$١٤٤ = ٤ + ب^{٢}$

$ب^{٢} = ١٤٤ - ٤$

$ب = \sqrt{١٤٠}$

$ب = ١١,٨٣$

٩)



$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$ج^{٢} = ٢٠^{٢} + \sqrt{١١}^{٢}$

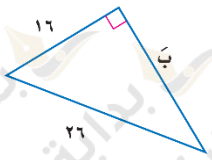
$ج^{٢} = ٤٠٠ + ١١$

$ج^{٢} = ٤١١$

$ج = \sqrt{٤١١}$

$ب = ٢٠,٢٧$

١٠)



$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$٢٦^{٢} = ١٦^{٢} + ب^{٢}$

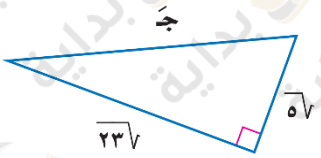
$٦٧٦ = ٢٥٦ + ب^{٢}$

$ب^{٢} = ٤٢٠$

$ب = \sqrt{٤٢٠}$

$ب = ٢٠,٤٩$

١١)



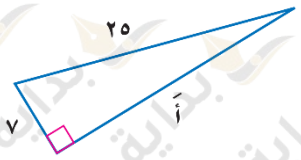
$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$ج^{٢} = (\sqrt{٥})^{٢} + (\sqrt{٢٣})^{٢}$

$ج^{٢} = ٥ + ٢٣ = ٢٨$

$ج = \sqrt{٢٨} = ٥,٢٩$

١٢)



ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}

٢٢٥ = (٧)^{٢} + أ^{٢}

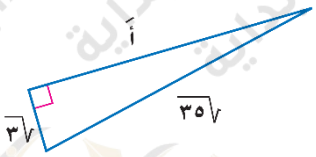
٦٢٥ = ٤٩ + أ^{٢}

أ^{٢} = ٥٧٦

أ = $\sqrt{٥٧٦}$

أ = ٢٤

١٣)



ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}

أ^{٢} = ($\sqrt{٣٥}$)^{٢} = أ^{٢} + ($\sqrt{٣}$)^{٢}

أ^{٢} = ($\sqrt{٣٥}$)^{٢} - ($\sqrt{٣}$)^{٢}

أ^{٢} = ٣٢

أ = $\sqrt{٣٢}$

أ = ٥,٦٦

١٤) تلفاز: أراد مهند شراء طاولة مستطيلة يضع عليها تلفازاً، قطر قاعدته ٢٧بوصة، فإذا كان بعدا الطاولة ٢٠بوصة و٢٦بوصة. فهل تناسب الطاولة التلفاز؟ فسر إجابتك.

ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}

ج^{٢} = ٢٠^{٢} + ٢٦^{٢}

ج = $\sqrt{١٠٧٦}$

ج = ٣٢,٨

نعم، قطر الطاولة ٣٢,٨ بوصة لذا فهي مناسبة للتلفاز

حدد إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا، ثم حدد إذا كانت تشكل ثلاثية فيثاغورس:

١٥) ٩، ٤٠، ٤١ بما أن ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢} فإن قياسات هذه الأضلاع تشكل مثلثا قائم الزاوية ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢} ٤١^{٢} ≟ ٩^{٢} + ٤٠^{٢} ١٦٨١ ≟ ٨١ + ١٦٠٠ ١٦٨١ = ١٦٨١ نعم، نعم	١٦) ٣، ٢ $\sqrt{١٠}$ ، $\sqrt{٤١}$ بما أن ج^{٢} ≠ ب^{٢} + أ^{٢} فإن قياسات هذه الأضلاع لا تشكل مثلثا قائم الزاوية ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢} (٣)^{٢} ≟ (٢ $\sqrt{١٠}$)^{٢} + ($\sqrt{٤١}$)^{٢} ٩ ≟ ٤٠ + ٤١ ٩ ≠ ٨١ لا، لا
١٧) $\sqrt{٥}$ ، ٧، ١٤ بما أن ج^{٢} ≠ ب^{٢} + أ^{٢} فإن قياسات هذه الأضلاع لا تشكل مثلثا قائم الزاوية ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢} (١٤)^{٢} ≟ ($\sqrt{٥}$)^{٢} + (٧)^{٢} ١٩٦ ≟ ٥ + ٤٩ ١٩٦ ≠ ٥٤ لا، لا	١٨) ٨، ٥، ٣١، ٣٢,٥ بما أن ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢} فإن قياسات هذه الأضلاع تشكل مثلثا قائم الزاوية ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢} (٣٢,٥)^{٢} ≟ (٣١,٥)^{٢} + (٨)^{٢} ١٠٥٦,٢٥ = ١٠٥٦,٢٥ نعم، لا
١٩) $\sqrt{٦٥}$، ٦، $\sqrt{٢}$، $\sqrt{٩٧}$ بما أن ج^{٢} ≠ ب^{٢} + أ^{٢} فإن قياسات هذه الأضلاع لا تشكل مثلثا قائم الزاوية ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢} ($\sqrt{٩٧}$)^{٢} ≟ ($\sqrt{٦٥}$)^{٢} + (٦ $\sqrt{٢}$)^{٢} ٩٧ ≟ ٦٥ + ٧٢ ٩٧ ≠ ١٣٧ لا، لا	٢٠) ١٧، ٣٣، ٩٨ بما أن ج^{٢} ≠ ب^{٢} + أ^{٢} فإن قياسات هذه الأضلاع لا تشكل مثلثا قائم الزاوية ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢} (٩٨)^{٢} ≟ (٣٣)^{٢} + (١٧)^{٢} ٩٦٠٤ ≟ ١٠٨٩ + ٢٨٩ ٩٦٠٤ ≠ ١٣٧٨ لا، لا

٢١) هندسة: أجب عن الأسئلة الآتية اعتماداً على المثلث المجاور:

أ) ما قيمة س؟

$(٢٣)^{٢} = (١١)^{٢} + (س)^{٢}$

$(٢٣)^{٢} - (١١)^{٢} = س^{٢}$

$٤٠٨ = س^{٢}$

س = ٢٠,٢٠

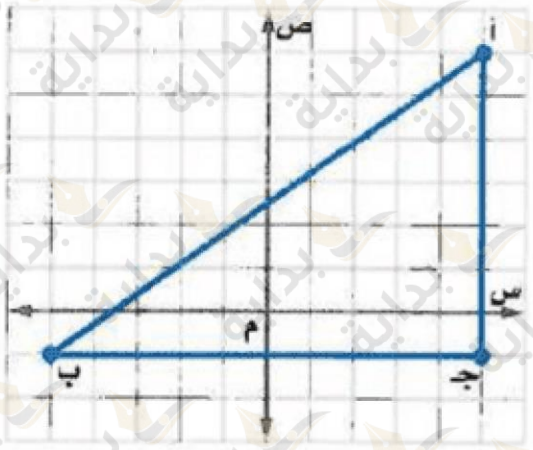
ب) ما مساحة المثلث؟

$\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

$\frac{١}{٢} \times ٢٠,٢ \times ١١ = ١١١,١$ وحدة مربعة

أوجد طول الوتر في المثلثين الآتيين وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة:

٢٢)



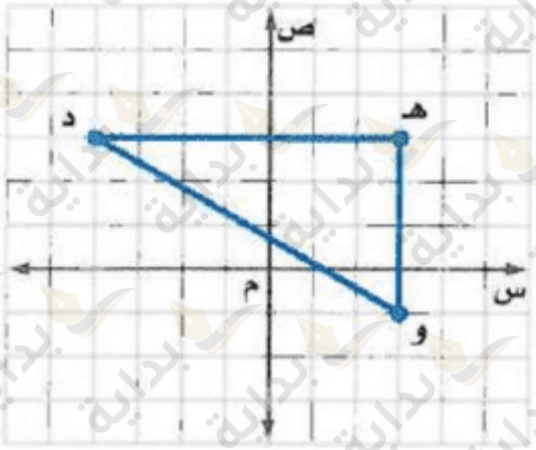
$(ج)^{٢} = (٧)^{٢} + (١٠)^{٢}$

$(ج)^{٢} = ٤٩ + ١٠٠$

$ج^{٢} = ١٤٩$

ج = ١٢,٢١

٢٣)



$(ج)^{٢} = (٧)^{٢} + (٤)^{٢}$

$(ج)^{٢} = ٤٩ + ١٦$

$ج^{٢} = ٦٥$

ج = ٨,٠٦

٢٤) هندسة: أوجد طول قطر مكعب طول ضلعه ٥ سم.

$(ج)^{٢} = (٥)^{٢} + (٥)^{٢}$

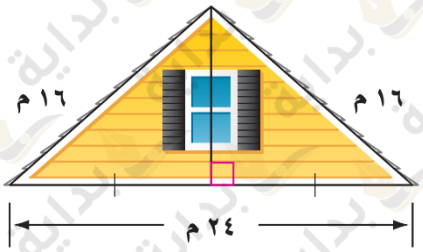
$ج = \sqrt{٢٥ + ٢٥}$

$ج = \sqrt{٥٠}$

$ج = ٢\sqrt{٥}$ سم

---

٢٥) منزل: يمثل الشكل المجاور الواجهة العلوية لمنزل عرضها ٢٤ متراً الضلعين المائلين لها ١٦ متراً. أوجد ارتفاع الواجهة مقرباً إلي أقرب جزء من عشرة من المتر.



$(١٦)^{٢} = (١٢)^{٢} + (ع)^{٢}$

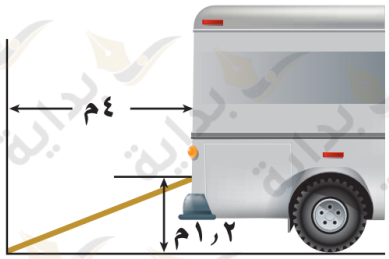
$٢٥٦ = ١٢٤ + ع^{٢}$

$ع^{٢} = ١١٢$

ع = ١٠,٦ متر

---

٢٦) شاحنات: صنع أحمد منحدراً خشبياً لسحب مجموعة صناديق على عربة ذات عجلات من مخزنة إلى الشاحنة كما في الشكل. فما طول المنحدر؟



$(ج)^{٢} = (١,٢)^{٢} + (٤)^{٢}$

ج = ٤,١٨ م تقريبا

---

٢٧) هندسة: أوجد طول قطر مربع مساحته ٢٤٢ سم^{٢}.

مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

$٢٤٢ = ل^{٢}$

$ل = \sqrt{٢٤٢}$

$(ج)^{٢} = (\sqrt{٢٤٢})^{٢} + (\sqrt{٢٤٢})^{٢}$

$(ج)^{٢} = ٢٤٢ + ٢٤٢$

$(ج)^{٢} = ٤٨٤$

ج = ٢٢ سم

إذا كان جَـ يمثل طول الوتر في المثلث القائم الزاوية، فأوجد الطول المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة إن كان ذلك ضرورياً:

٢٨) أ = س، بَ = س + ٤١، جـَ = ٨٥

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$(٨٥)^{٢} = (س + ٤١)^{٢} + (س)^{٢}$

$٧٢٢٥ = س^{٢} + ١٦٨١ + ٨٢س + س^{٢}$

$٧٢٢٥ = ٢س^{٢} + ١٦٨١ + ٨٢س$

$٢س^{٢} + ٨٢س - ٥٥٤٤ = ٠$

$س^{٢} + ٤١س - ٢٧٧٢ = ٠$

(س - ٣٦) (س + ٧٧) = ٠

س = ٣٦ ، س = -٧٧ ×

أ = ٣٦

ب = س + ٤١

ب = ٣٦ + ٤١

بَ = ٧٧

٢٩) أ = ١٢، بَ = س - ٢، جـَ = س

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$(س)^{٢} = (س - ٢)^{٢} + (١٢)^{٢}$

$س^{٢} = س^{٢} + ٤ - ٤س + ١٤٤$

٠ = -٤س + ١٤٨

٤س = ١٤٨

$س = \frac{١٤٨}{٤} = ٣٧$

جَ = ٣٧

ب = س - ٢

ب = ٣٧ - ٢

بَ = ٣٥

٣٠) أ = س - ٤٧، بَ = س، جـَ = س + ٢

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$(س + ٢)^{٢} = (س)^{٢} + (س - ٤٧)^{٢}$

$س^{٢} + ٤ + ٤س = س^{٢} + ó^{٢} + ٢٢٠٩$

- ٩٤س

$س^{٢} + ٢٢٠٩ - ٩٤س - ٤ - ٤س = ٠$

$س^{٢} - ٩٨س + ٢٢٠٥ = ٠$

(س - ٦٣) (س - ٣٥) = ٠

س = ٦٣

أ = ٦٣ - ٤٧

أ = ١٦

ج = ٦٥

٣١) أ = س - ٣٢، بَ = س - ١، جـَ = س

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$(س)^{٢} = (س - ١)^{٢} + (س - ٣٢)^{٢}$

$س^{٢} = س^{٢} + ١ - ٢س + س^{٢} + ١٠٢٤ - ٦٤س$

$١ - ٢س + س^{٢} + ١٠٢٤ - ٦٤س = ٠$

$س^{٢} - ٦٦س + ١٠٢٥ = ٠$

(س - ٤١) (س - ٢٥) = ٠

س = ٤١

ب = ٤١ - ١

بَ = ٤٠

أ = ٤١ - ٣٢

أ = ٩

ج = ٤١

٣٢) هندسة: طول أحد ضلعي مثلث قائم الزاوية أقل بمقدار ٨ سم عن طول الضلع الآخر، وطول وتره ٣٠ سم. أوجد طول كل من ضلعية.

نفرض أن الوتر ج، طول أحد الأضلاع أ = س والضلع الثالث ب = س – ٨

ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}

٣٠^{٢} = س^{٢} + (س – ٨)^{٢}

٣٠^{٢} = س^{٢} + س^{٢} + ٦٤ – ١٦س

٢س^{٢} + ٦٤ – ٩٠٠ – ١٦س = ٠

٢س^{٢} – ١٦س – ٨٣٦ = ٠

س^{٢} – ٨س – ٤١٨ = ٠

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أج}}{٢أ}$$

$$س = \frac{٨ \pm \sqrt{٨^{٢} - ٤ \times ١ \times -٤١٨}}{٢}$$

س = ٢٤,٨٣

س = أ = ٢٤,٨

ب = ٢٤,٨ – ٨

ب = ١٦,٨٣

---

٣٣) الكعبة المشرفة: باب الكعبة المشرفة مصنوع من الذهب الخالص علي هيئة مستطيل أبعاده التقريبية ٣,٢ م، ١,٧ م. فكم طول قطره؟

ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}

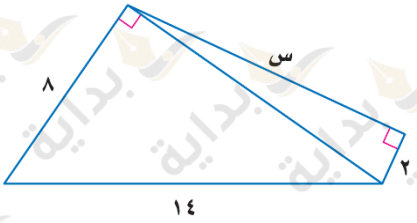
ج^{٢} = (١,٧)^{٢} + (٣,٢)^{٢}

ج^{٢} = ١٣,١٣

ج = ٣,٦

الكعبة المشرفة: ٣,٦ م تقريباً

مسائل مهارات التفكير العليا



٣٤) تحد: أوجد قيمة س في الشكل المجاور؟

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$١٤^{٢} = (٨)^{٢} + (أ)^{٢}$

$أ^{٢} = ١٣٢$

$أ = \sqrt{١٣٢}$

$ج^{٢} = س^{٢} + أ^{٢}$

$(\sqrt{١٣٢})^{٢} = (س)^{٢} + (٢)^{٢}$

$١٣٢ = (س)^{٢} + ٤$

$س^{٢} = ١٣٢ - ٤$

$س^{٢} = ١٢٨$

$س = ٨\sqrt{٢}$

---

٣٥) تبرير: أعط مثالاً مضاداً للعبارة الآتية:

" تتساوي مساحتا مثلثين قائمي الزاوية إذا تساوي طولا وتريهما "

طول وتر المثلث القائم الزاوية الذي طولا ضلعيه ٣ سم، ٤ سم هو ٥ سم ومساحته ٦ سم^{٢} وطول وتر المثلث القائم الذي طولا ضلعيه ٢ سم، $\sqrt{٢١}$ سم هو ٥ سم ايضاً ولكن مساحته $\sqrt{١٢}$ سم^{٢} والتي لا تكافئ ٦ سم^{٢}

٣٦) **اكتشف الخطأ:** يحاول حسام وحازم تحديد إن كانت الأعداد "٣٦، ٧٧، ٨٥" تشكل ثلاثية فيثاغورس. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

حسام	حازم
٢٣٦ + ٢٧٧ ≟ ٢٨٥	٢٣٦ + ٢٥٨ ≟ ٢٧٧
١٢٩٦ + ٥٩٢٩ ≟ ٧٢٢٥	١٢٩٦ + ٧٢٢٥ ≟ ٥٩٢٩
٧٢٢٥ = ٧٢٢٥	٥٩٢٩ ≠ ٩٠٢١
نعم	لا

حسام إجابته صحيحة، يجب أن يساوي مربع العدد الأكبر مجموع مربعي العددين الآخرين حيث عندها تتحقق ثلاثية فيثاغورس

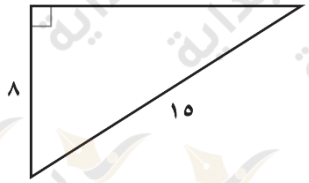
---

٣٧) **اكتب:** وضح كيف تحدد إن كانت أطوال ثلاث قطع مستقيمة تشكل مثلثاً قائم الزاوية.

بحسب معكوس نظرية فيثاغورس إذا كان ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢} فإن أ، ب، ج تشكل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية لذا تحقق إن كان مربع العدد الأكبر يساوي مجموع مربعي العددين الآخرين

تدريب على اختبار

٣٨) هندسة: أوجد الطول المجهول في الشكل أدناه.



أ) -١٧

ب) - $\sqrt{١٦١}$

جـ) $\sqrt{١٦١}$

د) ١٧

ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}

١٥^{٢} = ب^{٢} + ٨^{٢}

ب^{٢} = ١٥^{٢} – ٨^{٢}

ب^{٢} = ١٦١

ب = $\sqrt{١٦١}$

الاختيار الصحيح: ج) $\sqrt{١٦١}$

٣٩) ما حل المعادلة: س + ١ = $\sqrt{س + ١}$

أ) ٠,٣

ب) صفر

جـ) ٣

د) ليس لها حل

س + ١ = $\sqrt{س + ١}$

س^{٢} + ٢س + ١ – س – ١ = ٠

س^{٢} + س = ٠

س (س + ١) = ٠

س = ٠

س = -١

الاختيار الصحيح: ب) صفر

٤٠) **إجابة قصيرة:** يتقاضى سباك ٤٠ ريالاً عن الساعة الأولي إذا عمل خارج محله، بالإضافة إلي مبلغ ٨ ريالات عن كل $\frac{١}{٢}$ ساعة إضافية. فإذا عمل السباك ٤ ساعات، فكم ريالاً يتقاضى؟

٤ ساعات = ٤٠ + (٦ × ٨) = ٤٠ + ٤٨ = ٨٨ ريالاً

مراجعة تراكمية

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٤١) $\sqrt{١٠س} = ١٠$

$\sqrt{١٠س} = ١٠$

$(\sqrt{١٠س})^{٢} = ١٠^{٢}$

$١٠س = ١٠٠$

س = ١٠

تحقق:

$\sqrt{١٠ \times ١٠} = ١٠$

$\sqrt{١٠٠} = ١٠$

١٠ = ١٠ √

٤٢) $\sqrt{س + ١} + ٢ = ٤$

$\sqrt{س + ١} + ٢ = ٤$

$\sqrt{س + ١} = ٢$

$س + ١ = ٢^{٢}$

س + ١ = ٤

س = ٤ – ١

س = ٣

تحقق:

$\sqrt{٣ + ١} + ٢ = ٤$

$\sqrt{٤} + ٢ = ٤$

٢ + ٢ = ٤ √

---

٤٣) $\sqrt{س - ١٥} = ٣ - \sqrt{س}$

$\sqrt{س - ١٥} = ٣ - \sqrt{س}$

$(\sqrt{س - ١٥})^{٢} = (٣ - \sqrt{س})^{٢}$

$س – ١٥ = ٩ + س – ٦\sqrt{س}$

$س – ١٥ – ٩ – س + ٦\sqrt{س} = ٠$

$-٢٤ + ٦\sqrt{س} = ٠$

$٦\sqrt{س} = ٢٤$

$(\sqrt{س})^{٢} = (٤)^{٢}$

س = ١٦

تحقق:

$\sqrt{١٦ - ١٥} = ٣ - \sqrt{١٦}$

$\sqrt{١} = -١$ ×

لا يوجد حل

بسط كل عبارة فيما يأتي:

٤٤) $\sqrt{١٨} - ٤\sqrt{٢}$

$\sqrt{١٨} - ٤\sqrt{٢} = \sqrt{٣ \times ٢ \times ٣} - ٤\sqrt{٢}$

$= ٣\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٢}$

$= -\sqrt{٢}$

٤٥) $٣\sqrt{٥} - ٥\sqrt{٣} + \sqrt{٩٥}$

$٣\sqrt{٥} - ٥\sqrt{٣} + \sqrt{٩٥} = ١٢\sqrt{٥} - ٥\sqrt{٣}$

٤٦) $٤\sqrt[٣]{٦} + \sqrt[٣]{١٢}$

$٤\sqrt[٣]{٦} + \sqrt[٣]{١٢} = ٤\sqrt[٣]{٦} + \sqrt[٣]{٣ \times ٢ \times ٢}$

$= ٤\sqrt[٣]{٦} + ٢\sqrt[٣]{٦}$

$= ٤\sqrt[٣]{١٢} + ٢\sqrt[٣]{٦}$

$= ١٦\sqrt[٣]{}$

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

٤٧) (ب + ٨) (ب + ٢)

(ب + ٨) (ب + ٢)

$ب^{٢} + ٢ب + ٨ب + ١٦$

$ب^{٢} + ١٠ب + ١٦$

٤٨) (س – ٤) (س – ٩)

(س – ٤) (س – ٩)

$س^{٢} - ٩س - ٤س + ٣٦$

$س^{٢} - ١٣س + ٣٦$

٤٩) (ص + ٤) (ص – ٨)

(ص + ٤) (ص – ٨)

$ص^{٢} - ٨س + ٤ص - ٣٢$

$ص^{٢} - ٤س - ٣٢$

استعد للدرس اللاحق

حل كلاً من التناسبات الآتية:

٥٠) $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{١٢}{٣}$

$\frac{٥ \times \text{س}}{٥} = \frac{١٢ \times ٥}{٣}$

س = ٢٠

٥١) $\frac{١٢}{\text{س}} = \frac{٣}{٤}$

$\text{س} \times \frac{١٢}{\text{س}} = \frac{٣}{٤} \times \text{س}$

$\frac{٣}{٤} \times ١٢ = \frac{٣}{٣} \times \frac{٣}{٤} \times \text{س}$

س = ١٦

٥٢) $\frac{٥}{٤} = \frac{١٠}{\text{س}}$

$\text{س} \times \frac{٥}{٤} = \frac{١٠}{\text{س}} \times \text{س}$

$\text{س} \times \frac{٥}{٤} \times \frac{٤}{٥} = ١٠ \times \frac{٤}{٥}$

س = ٨

٥٣) $\frac{٣}{٥} = \frac{١٢}{\text{س} + ٨}$

$\frac{٣}{٥} = \frac{١٢}{\text{س} + ٨}$

٣س + ٢٤ = ٦٠

٣س = ٦٠ − ٢٤

٣س = ٣٦

س = ١٢

الفصل ٩

اختبار منتصف الفصل

الدروس من ٩-١ إلى ٩-٤

بسط كل عبارة فيما يأتي:

١) $٢\sqrt{٢٥}$

$٢ \times ٥ = ١٠$

٢) $\sqrt{١٢} \cdot \sqrt{٨}$

$\sqrt{٩٦} = ٤\sqrt{٦}$

٣) $\sqrt{٧٢ س ص^{٥} ع^{٦}}$

$٦ ص^{٢} ع^{٣} \sqrt{٢ س ص}$

٤) $\frac{٣}{١ + \sqrt{٥}}$

$\frac{٣(١ - \sqrt{٥})}{(١ + \sqrt{٥})(١ - \sqrt{٥})}$

$\frac{٣(١ - \sqrt{٥})}{١ - ٥} = \frac{٣ - ٣\sqrt{٥}}{-٤}$

٥) $\frac{١}{٥ - \sqrt{٧}}$

$\frac{(٥ + \sqrt{٧})}{(٥ + \sqrt{٧})(٥ - \sqrt{٧})}$

$\frac{(٥ + \sqrt{٧})}{٢٥ - ٧} = \frac{(٥ + \sqrt{٧})}{١٨}$

٦) **اختيار من متعدد:** أي القيم التالية تساوي $\sqrt{\frac{١٦}{٣٢}}$ ؟

أ) $\frac{١}{٢}$

ب) ٢

جـ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

د) ٤

$\sqrt{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

بسط كل عبارة فيما يأتي:

٧) $٣\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢}$

$= ٨\sqrt{٢}$

٨) $\sqrt{١١} - ٣\sqrt{١١}$

$= -٢\sqrt{١١}$

٩) $٦\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٥٠}$

$= ٦\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٢٥ \times ٢}$

$= ٦\sqrt{٢} + ٢٠\sqrt{٢}$

$= ٢٦\sqrt{٢}$

١٠) $\sqrt{٢٧} - \sqrt{٤٨}$

$= ٣\sqrt{٣} - \sqrt{١٦ \times ٣}$

$= ٣\sqrt{٣} - ٤\sqrt{٣}$

$= -\sqrt{٣}$

١١) $٤\sqrt{٣}(٢\sqrt{٦})$

$= ٤\sqrt{٣}(٢\sqrt{٢ \times ٣})$

$= ٢٤\sqrt{٢}$

١٢) $٣\sqrt{٢٠}(٢\sqrt{٥})$

$= ٣\sqrt{٤ \times ٥}(٢\sqrt{٥})$

$= ٦٠$

١٣) $(\sqrt{٥} + \sqrt{٧})(\sqrt{٢٠} + \sqrt{٣})$

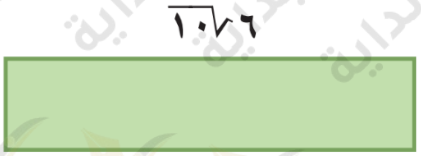
$= (\sqrt{٥} + \sqrt{٧})(\sqrt{٤ \times ٥} + \sqrt{٣})$

$= \sqrt{١٠٠} + [٢(\sqrt{١٥} + \sqrt{١٤٠})] + \sqrt{٢١}$

$= ١٠ + ٢\sqrt{١٥} + ٤\sqrt{٣٥} + \sqrt{٢١}$

$\approx ٣٠,٣$

١٤) **هندسة:** أوجد مساحة المستطيل أدناه.



مساحة المستطيل = ٣√٢ × ٦√١٠

= ٥√٣٦

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

١٥) √(٥س) – ١ = ٤

√(٥س) = ١ + ٤

√(٥س) = ٥

(√(٥س))^{٢} = ٥^{٢}

٥س = ٢٥

س = ٥

التحقق:

√(٥×٥) – ١ = ٤

٥ – ١ = ٤ √

١٦) √(ب - ٢) = ٦

(√(ب - ٢))^{٢} = ٦^{٢}

ب – ٢ = ٣٦

ب = ٣٨

التحقق:

√(٣٨ - ٢) = ٦

√٣٦ = ٦ √

١٧) √(١٥ - س) = ٤

١٥ – س = ٢٤

س = ١٥ – ١٦ = -١

التحقق:

√(١٥ - (-١)) = ٤

√١٦ = ٤ √

١٨) √(٣س^{٢} - ٣٢) = س

٣س^{٢} – ٣٢ = س^{٢}

٣س^{٢} – س^{٢} = ٣٢

٢س^{٢} = ٣٢

س^{٢} = ١٦

س = ٤

التحقق:

√(٣(٤)^{٢} - ٣٢) = ٤

$\sqrt{٤٨ - ٣٢} = ٤$

$\sqrt{١٦} = ٤$ √

١٩) $\sqrt{٢س - ١} = ٢س - ٧$

$٢س - ١ = (٢س - ٧)^{٢}$

$٢س - ١ = ٤س^{٢} - ٢٨س + ٤٩$

$٤س^{٢} = ٢س + ٢٨س - ٤٩ - ١$

$٤س^{٢} = ٣٠س - ٥٠$

$٢س^{٢} - ١٥س + ٢٥ = ٠$

$س = ٥$

$س = \frac{٥}{٢}$

$\sqrt{١٠ - ١} = ١٠ - ٧$

√

$\sqrt{٩} = ٣$

$\sqrt{٤} = -٢$

√

٢٠) $\sqrt{س + ١} + ٢ = ٤$

$س + ١ = ٢^{٢}$

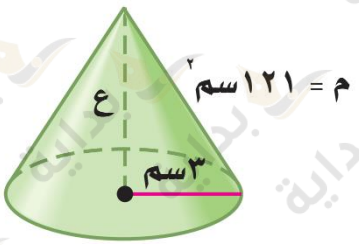
$س = ٤ - ١$

$س = ٣$

التحقق: $\sqrt{٣+١+٢} = ٤$

$٢ + ٢ = ٤$ √

٢١) هندسة: قانون المساحة الجانبية لمخروط، يعطى بالصيغة م = ط نق $\sqrt{نق^{٢} + ع^{٢}}$ ،حيث نق طول نصف قطر القاعدة، ع ارتفاع المخروط، استخدم هذه الصيغة لحساب ارتفاع المخروط أدناه.



$١٢١ = ٣ط \sqrt{٩ + ع^{٢}}$

$(١٢١)^{٢} = ٩ط^{٢} (٩ + ع^{٢})$

$= ٨١ط^{٢} + ٩ ط^{٢} ع^{٢}$

$ع^{٢} + ٨٩ = ١٤٦٤١ - ٧٩٩$

$ع^{٢} = ١٣٦٦٤$

$ع \approx ١١٧$

٢٢) **اختيار من متعدد:** أي الأطوال التالية تشكل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

أ) ٩ ، ١٢ ، ١٥

ب) ٦ ، ٦ ، ١٢

جـ) ٣ ، ٤ ، ٨

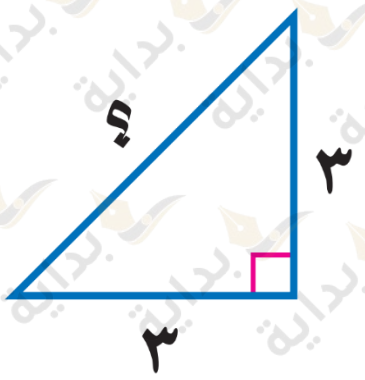
د) ٣ ، ٥ ، ٣

$١٥^{٢} = ١٢^{٢} + ٩^{٢}$

$٢٢٥ = ١٤٤ + ٨١$

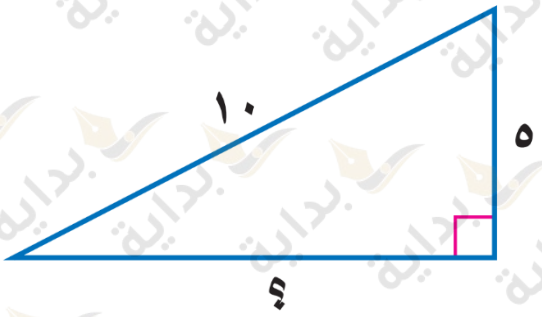
أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر:

٢٣)



$٩ + ٩ = \sqrt{١٨} \approx ٤,٢$

٢٤)



$١٠^{٢} - ٥^{٢} = \sqrt{٧٥} \approx ٨,٧$

٩-٥ المسافة بين نقطتين

أوجد المسافة بين النقطتين

أ) (٤، ٢)، (-٣، -١).

(٤، ٢) (-٣ ، -١)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(-٣ -٤)^٢ +(-١ -٢)^٢}$

ف = $\sqrt{(-٧)^٢ + (-٣)^٢}$

ف = $\sqrt{٤٩+٩}$

ف = $\sqrt{٥٨}$

ب) (-٧، -٢)، (-٥ ، -٨)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(-٥ +٧)^٢ + (-٨ +٢)^٢}$

ف = $\sqrt{٤+٣٦}$

ف = $\sqrt{٤٠}$

ف = ٢ $\sqrt{١٠}$

٢) يوصي صانعو مكبرات الصوت (الميكروفونات) بوضعها على مسافة لا تقل عن ٨ أقدام من مكان الجلوس. فإذا وضع ميكروفون في النقطة (٠،٩)، فهل غرفة صالح مناسبة لوضع الجهاز؟ فسر ذلك.

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٠ - ٧-)^٢ + (٩ - ٢-)^٢}$

ف = $\sqrt{٤٩ + ٤٩}$

ف = $\sqrt{٩٨}$

ف = ٩,٨٩

نعم، المسافة = $\sqrt{٢٢}$ = ٩,٩ أقدام تقريباً

---

٣) أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) إذا كانت المسافة بين النقطتين (٢، أ)، (-٦، ٢) تساوي ١٠ وحدات.

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٦- ٢-)^٢ + (٢ - أ)^٢}$

ف = $\sqrt{٦٤ + ٤ + أ^٢ - ٤أ}$

ف^٢ = ٦٤ + ٤ + أ^٢ – ٤أ

ف^٢ = ٦٨ + أ^٢ – ٤أ

١٠^٢ = ٦٨ + أ^٢ – ٤أ

١٠٠ – ٦٨ = أ^٢ – ٤أ

أ^٢ – ٤أ – ٣٢ = ٠

(أ – ٨) (أ + ٤) = ٠

أ = ٨ أو أ = -٤

√ تأكد

مثال١: أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١) (٦، -٢)، (١٢، ٨)

(٦، -٢)، (١٢، ٨)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(١٢ - ٦)^٢ + (-٢ - ٨)^٢}$

ف = $\sqrt{(٦)^٢ + (-١٠)^٢}$

ف = $\sqrt{٣٦ + ١٠٠}$

ف = $\sqrt{١٣٦}$

ف = ٢ $\sqrt{٣٤}$

٢) (٤، ٨)، (-٣، -٦)

(٤، ٨)، (-٣، -٦)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(-٣ - ٤)^٢ + (-٦ - ٨)^٢}$

ف = $\sqrt{(-٧)^٢ + (-١٤)^٢}$

ف = $\sqrt{٤٩ + ١٩٦}$

ف = $\sqrt{٢٤٥}$

ف = ٧ $\sqrt{٥}$

٣) (-٢، -٤)، (-٥، -٣)

(-٢، -٤)، (-٥، -٣)

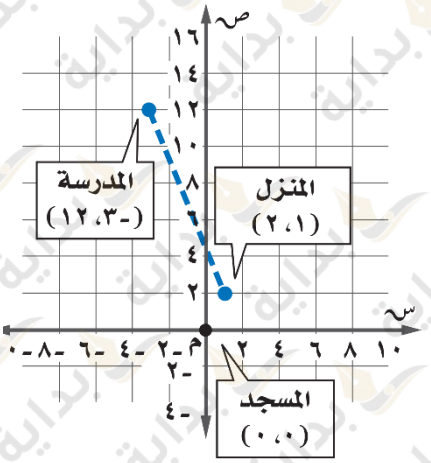
ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(-٥ + ٢)^٢ + (-٣ + ٤)^٢}$

ف = $\sqrt{(-٣)^٢ + (١)^٢}$

ف = $\sqrt{١٠}$

مثال٢: ٤) مسافات: في المستوي الإحداثي المجاور، يقع منزل عمر عند النقطة (١، ٢)، والمدرسة عند النقطة (-٣، ١٢). فإذا كان المسجد يقع عند النقطة (٠، ٠)، وطول ضلع كل مربع في المستوي الإحداثي كيلومتر واحد، فأوجد:



أ) المسافة بين منزل عمر والمدرسة.

٢ × $\sqrt{٢٩}$ = ١٠,٧٧ كلم تقريبا

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(-٣-١)^٢ + (١٢-٢)^٢}$

ف = $\sqrt{(-٤)^٢ + (١٠)^٢}$

ف = $\sqrt{١٦+١٠٠}$

ف = $\sqrt{١١٦}$

ف = ٢ $\sqrt{٢٩}$ = ١٠,٧٧ كلم تقريباً

ب) المسافة بين منزل عمر والمسجد.

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٠-١)^٢ + (٠-٢)^٢}$

ف = $\sqrt{(١)^٢ + (٢)^٢}$

ف = $\sqrt{٥}$ = ٢,٢٤ كلم تقريبا

مثال٣: في الأسئلة ٥ – ٨ أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) مستعملاً إحداثيات كل نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما.

٥) (-٥، أ)، (٣، ١)؛ ف = $\sqrt{٨٩}$

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$\sqrt{٨٩}$ = $\sqrt{(٣ +٥)^٢ + (أ - ١)^٢}$

$\sqrt{٨٩}$ = $\sqrt{٦٤ + أ^٢ + ١ - ٢أ}$

$\sqrt{٨٩}$ = $\sqrt{٦٥ + أ^٢ - ٢أ}$

٨٩ = ٦٥ + $أ^٢$ – ٢أ

$أ^٢$ – ٢أ – ٢٤ = ٠

(أ + ٤) (أ – ٦) = ٠

أ = -٤

أ = ٦

٦) (٦، أ) ، (٥، ٠)؛ ف = $\sqrt{١٧}$

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$\sqrt{١٧}$ = $\sqrt{(٥ -٦)^٢ + (أ - ٠)^٢}$

$\sqrt{١٧}$ = $\sqrt{١ + أ^٢}$

١٧ = ١ + $أ^٢$

$أ^٢$ = ١٧ – ١ = ١٦

أ = $\sqrt{١٦}$

أ = $\pm$ ٤

أ = ٤ أو أ = -٤

٧) (٥ ،٨)، (أ، ٢)؛ ف = ٣ $\sqrt{٥}$

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

٣ $\sqrt{٥}$ = (أ – ٥)^٢ + (٨ – ٢)^٢

(٣ $\sqrt{٥}$)^٢ = (أ – ٥)^٢ + (٨ – ٢)^٢

٤٥ = أ^٢ + ٢٥ – ١٠أ + ٣٦

٤٥ – ٣٦ = أ^٢ + ٢٥ – ١٠أ

٩ – ٢٥ = أ^٢ – ١٠أ

-١٦ = أ^٢ – ١٠أ

أ^٢ – ١٠أ + ١٦ = ٠

(أ – ٢) (أ – ٨) = ٠

أ = ٢

أ = ٨

أ = ٢ أو أ = ٨

٨) (أ ،٦)، (-٦، ٢)؛ ف = ٤ $\sqrt{١٠}$

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

٤ $\sqrt{١٠}$ = $\sqrt{(-٦ - أ)^٢ + (٢ -٦)^٢}$

١٦٠ = (٣٦ + أ^٢ + ١٢أ) + ١٦

١٦٠ = ٣٦ – ١٦ – أ^٢ + ١٢أ

أ^٢ + ١٢أ – ١٠٨ = ٠

(أ + ١٨) (أ – ٦) = ٠

أ = -١٨

أ= ٦

أ = ٦ أو أ = -١٨

تدرب وحل المسائل

مثال ١ : أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

٩) (٥، ٨)، (٥، ٧)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٥ - ٥)^٢ + (٧ - ٨)^٢}$

ف = $\sqrt{(٠)^٢ + (١)^٢}$

ف = $\sqrt{١}$ = ١

ف = ١

١٠) (٦، -٩)، (٩، -٩)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٩ + ٦)^٢ + (-٩ + ٩)^٢}$

ف = $\sqrt{٩ + ٠}$

ف = ٣

١١) (٣، -٣)، (٧، ٢)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٧ - ٣)^٢ + (-٣ - ٢)^٢}$

ف = $\sqrt{٤^٢ + (-٥)^٢}$

ف = $\sqrt{١٦ + ٢٥}$

ف = $\sqrt{٤١}$

١٢) (-٧، ٨)، (٣، ١٠)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٣ + ٧)^٢ + (١٠ - ٨)^٢}$

ف = $\sqrt{١٠^٢ + (٢)^٢}$

ف = $\sqrt{١٠٠ + ٤}$

ف = $\sqrt{١٠٤}$ = ٢ $\sqrt{٢٦}$

١٣) (-١١، ٩)، (٣، -٤)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٣ + ١١)^٢ + (-٤ - ٩)^٢}$

ف = $\sqrt{١٤^٢ + (-١٣)^٢}$

ف = $\sqrt{١٩٦ + ١٦٩}$

ف = $\sqrt{٣٦٥}$

١٤) (-٣، ٥)، (٥، -٣)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٥ + ٣)^٢ + (-٣ -٥)^٢}$

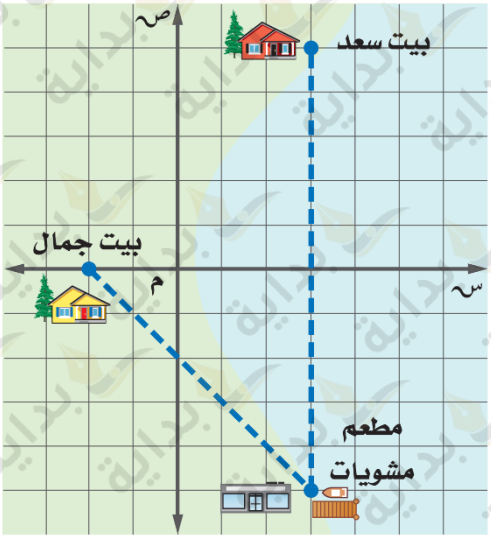
ف = $\sqrt{٨^٢ + (-٨)^٢}$

ف = $\sqrt{٦٤ + ٦٤}$

ف = $\sqrt{١٢٨}$

ف = ٨ $\sqrt{٢}$

مثال٢: ١٥) تحديد مواقع: أراد سعد وجمال أن يلتقيا في مطعم السفينة. فاستعمل سعد قاربه للوصول إلي المطعم، في حين استعمل جمال سيارته، علماً بأن طول ضلع كل مربع من المستوي الإحداثي يمثل كيلومتراً واحداً.



أ) ما المسافة التي قطعها سعد؟

(٣، ٥)، (٣، -٥)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٣ - ٣)^٢ + (-٥ - ٥)^٢}$

ف = $\sqrt{١٠٠}$

ف = ١٠

إذن المسافة التي يقطعها سعد = ١٠ كلم

ب) ما المسافة التي قطعها جمال؟

(٣، ٥)، (-٢، ٠)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(-٢ - ٣)^٢ + (٠ - ٥)^٢}$

ف = $\sqrt{٥٠}$

$\sqrt{٥٠}$ = ٧,٠٧ كلم تقريباً

إذن المسافة التي يقطعها سعد = $\sqrt{٥٠}$ = ٧,٠٧ كلم تقريباً

جـ) ما النسبة بين المسافة التي قطعها سعد إلي المسافة التي قطعها جمال؟

النسبة بين سعد وجمال = ١٠٠ : $\sqrt{٥٠}$

$$\frac{١٠}{\sqrt{٥٠}} \times \frac{\sqrt{٥٠}}{\sqrt{٥٠}} = \frac{١٠\sqrt{٥٠}}{٥٠} = \frac{\sqrt{٥٠}}{٥}$$

$$= \frac{\sqrt{٥ \times ٢ \times ٥}}{٥}$$

$$= \frac{٥\sqrt{٢}}{٥}$$

= $\sqrt{٢}$ = ١,٤١ تقريباً

مثال٣: في الأسئلة ٢٢ – ٢٥ أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ)، مستعملاً إحداثيات كل نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما:

١٦) (-٩، -٢)، (أ، ٥)؛ ف = ٧

(-٩، -٢)، (أ، ٥)؛ ف = ٧

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

٧ = $\sqrt{(أ + ٩)^٢ + (٥ + ٢)^٢}$

ف = $\sqrt{أ^٢ + ٨١ + ١٨أ + (٧)^٢}$

ف = $\sqrt{أ^٢ + ٨١ + ١٨أ + ٤٩}$

٧ = $\sqrt{أ^٢ + ١٣٠ + ٤٩}$

٤٩ = $أ^٢ + ١٣٠ + ١٨أ$

٤٩ – ١٣٠ = $أ^٢ + ١٨أ$

$أ^٢ + ١٨أ + ٨١ = ٠$

(أ + ٩) (أ + ٩) = ٠

أ = -٩

١٧) (أ، -٦)، (-٥، ٢)؛ ف = ١٠

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

١٠ = $\sqrt{(-٥ -أ)^٢ + (٢ + ٦)^٢}$

١٠ = $\sqrt{أ^٢ + ٢٥ + ١٠أ + ٦٤}$

١٠٠ = $أ^٢ + ١٠أ + ٨٩$

$أ^٢ + ١٠أ – ١١ = ٠$

(أ + ١١) (أ – ١) = ٠

أ = -١١، أ = ١

---

١٨) (أ، ٠)، (٣، ١)؛ ف = $\sqrt{٢}$

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$\sqrt{٢}$ = $\sqrt{(٣ - أ)^٢ + (٠ - ١)^٢}$

$\sqrt{٢}$ = $\sqrt{أ^٢ + ٩ - ٦أ + ١}$

٢ = $أ^٢ – ٦أ + ١٠$

$أ^٢ – ٦أ + ٨ = ٠$

(أ – ٢) (أ – ٤) = ٠

أ = ٢

أ = ٤

١٩) (٤، أ)، (٨، ٤)؛ ف = ٢ $\sqrt{٥}$

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

٢ $\sqrt{٥}$ = $\sqrt{(٨ - ٤)^٢ + (٤ - أ)^٢}$

٢٠ = $أ^٢ + ١٦ – ٨أ + ١٦$

٢٠ – ٣٢ = $أ^٢ – ٨أ$

$أ^٢ – ٨أ + ١٢ = ٠$

(أ – ٢) (أ – ٦) = ٠

أ = ٢

أ = ٦

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

٢٠) $(٤، ٢)، (٦، -\frac{٢}{٣})$

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$ف = \sqrt{(٦ - ٤)^٢ + (-\frac{٢}{٣} - ٢)^٢}$

$ف = \sqrt{(٢)^٢ + (-\frac{٢}{٣} - \frac{٦}{٣})^٢}$

$ف = \sqrt{٤ + (-\frac{٨}{٣})^٢} = \sqrt{٤ + \frac{٦٤}{٩}}$

$ف = \sqrt{\frac{٣٦ + ٦٤}{٩}} = \sqrt{\frac{١٠٠}{٩}}$

$ف = \frac{١٠}{٣} = ٣\frac{١}{٣}$

٢١) $(\frac{٤}{٥}، -١)، (٢، -\frac{١}{٢})$

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$ف = \sqrt{(٢ - \frac{٤}{٥})^٢ + (-١ + \frac{١}{٢})^٢}$

$ف = \sqrt{(\frac{١٠ - ٤}{٥})^٢ + (-\frac{١}{٢})^٢}$

$ف = \sqrt{(\frac{٦}{٥})^٢ + (-\frac{١}{٢})^٢}$

$ف = \sqrt{\frac{٣٦}{٢٥} + \frac{١}{٤}}$

$ف = \sqrt{\frac{١٤٤ + ٢٥}{١٠٠}}$

$ف = \sqrt{\frac{١٦٩}{١٠٠}}$

$ف = \frac{١٣}{١٠} = ١\frac{٣}{١٠}$

---

٢٢) $(٤\sqrt{٥}، ٧)، (٦\sqrt{٥}، ١)$

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$ف = \sqrt{(٦\sqrt{٥})^٢ + (١ - ٧)^٢}$

$ف = \sqrt{(٢\sqrt{٥})^٢ + (-٦)^٢}$

$ف = \sqrt{٢٠ + ٣٦}$

$ف = \sqrt{٥٦}$

$ف = ٢\sqrt{١٤}$

٢٣) هندسة: أوجد محيط الشكل الرباعي أ ب جـ د الذي رؤوسه أ (-٣، -٤)، ب (-١، ٤)، جـ (٤، ٥)، د (٦، -٥)، ثم قرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة.

ف(أب) = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف(أب) = $\sqrt{(-١ - (-٣))^٢ + (٤ + ٤)^٢}$

ف(أب) = $\sqrt{(٢)^٢ + (٨)^٢}$

ف(أب) = $\sqrt{٤ + ٦٤}$

ف(أب) = $\sqrt{٦٨}$

ف(ج ب) = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف(ج ب) = $\sqrt{(٤ + ١)^٢ + (٥ - ٤)^٢}$

ف(ج ب) = $\sqrt{٢٥ + ١}$

ف(ج ب) = $\sqrt{٢٦}$

ف(ج د) = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف(ج د) = $\sqrt{(٦ - ٤)^٢ + (-٥ - ٥)^٢}$

ف(ج د) = $\sqrt{(٢)^٢ + (-١٠)^٢}$

ف(ج د) = $\sqrt{٤ + ١٠٠}$

ف(ج د) = $\sqrt{١٠٤}$

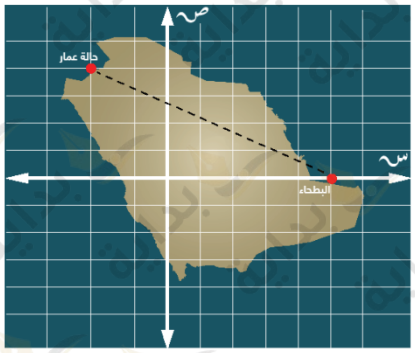
ف(أ د) = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف(أ د) = $\sqrt{(٦ + ٣)^٢ + (-٥ + ٤)^٢}$

ف(أ د) = $\sqrt{(٩)^٢ + (-١)^٢}$

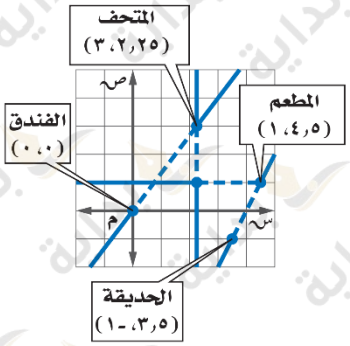
ف(أ د) = $\sqrt{٨٢}$

محيط الشكل الرباعي = $\sqrt{٨٢} + \sqrt{١٠٤} + \sqrt{٢٦} + \sqrt{٦٨}$ = ٣٢,٦ وحدات



٢٤) **منافذ المملكة:** يقع منفذ حالة عمار عند النقطة (-٢ ، ٤) ومنفذ البطحاء عند (٥ ، ٠) ما المسافة الجوية التقريبية بين المنفذين؟

مقياس الرسم: تمثل كل وحدة على الخارطة ٢٠٠ كلم.



٢٥) سياحة: يستعمل أحمد نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) كما في التمثيل المجاور للانتقال من الفندق إلى المتحف الوطني وإلى المطعم ثم إلى الحديقة العامة، ويمثل طول ضلع كل مربع من المستوي الإحداثي ٥٠٠ م. قرب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

أ) ما المسافة التي يقطعها من الفندق إلى المتحف؟

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$ف = \sqrt{(٠ - ٢,٢٥)^٢ + (٠ - ٣)^٢}$

$ف = \sqrt{١٤,٠٦٢٥} = ٣,٧٥$

$ف = \sqrt{١٤,٠٦٢٥} = ٣,٧٥ \times ٥٠٠$

$ف = ١٨٧٥$ م

ب) ما المسافة بين المتحف والمطعم؟

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$ف = \sqrt{(٤,٥ - ٢,٢٥)^٢ + (١ - ٣)^٢}$

$ف = \sqrt{٥,٠٦٢٥ + ٤} = ٣,٠١٠٣٩$

$ف = ٣,٠١٠٣٩ \times ٥٠٠$

$ف = ١٥٠٥,٢٠$ م

جـ) أوجد المسافة المباشرة من الحديقة العامة إلى الفندق.

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$ف = \sqrt{(٠ - ٣,٥)^٢ + (٠ + ١)^٢}$

$ف = \sqrt{١٢,٢٥ + ١} = ٣,٦٤$

$ف = ٣,٦٤ \times ٥٠٠$

$ف = ١٨٢٠,٠٣$ م

مسائل مهارات التفكير العليا

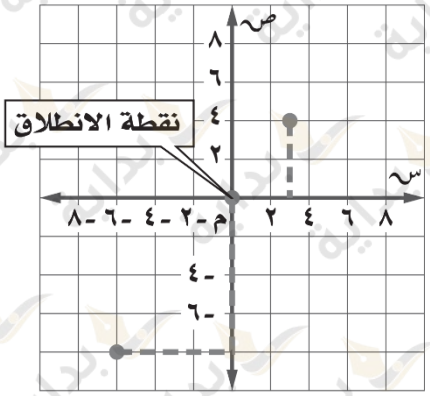
٢٦) **تحد:** إذا كانت أ (–٧ ، ٣)، ب (٤ ، ٠)، جـ (–٤ ، ٤) إحداثيات رؤوس مثلث، فناقش طريقتين مختلفتين لتحديد ما إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية أم لا.

إحدى الطرق هي إيجاد الميل لكل معكوس سالب ميل الآخر فإن المثلث قائم الزاوية، أما الطريقة الأخرى فهي إيجاد المسافة بين كل زوج من النقاط ثم تتحقق من إمكانية تطبيق معكوس نظرية فيثاغورس.

٢٧) **تبرير:** فسر لماذا تكون هناك قيمتان ممكنتان عند البحث عن الإحداثي المجهول لنقطة عند إعطاء إحداثيات نقطتين والمسافة بينهما.

يتطلب قانون المسافة بين نقطتين تربيع القيم وعند تعويض الإحداثيات والمتغير أ في القانون وتبسيطه فإن النتيجة تكون معادلة تربيعية ينتج عن حلها قيمتان ممكنتان للمتغير أ.

تدريب على اختبار



٢٨) انطلق قاربان من الموقع نفسه وفي الوقت نفسه كما في التمثيل أدناه، فاتجه أحدهما شرقا ثم شمالاً. أما الآخر فاتجه جنوباً ثم غرباً. ما المسافة بينهما؟

(٣ ، ٤) (–٦ ، –٤)

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$ف = \sqrt{(-٦ - ٣)^٢ + (-٨ - ٤)^٢}$

$ف = \sqrt{٨١ + ١٢٤} = \sqrt{٢٢٥}$

ف = ١٥

المسافة بينهما = ١٥ وحدة

مراجعة تراكمية

إذا كان جَ يمثِل طول الوتر في المثلث القائم الزاوية، فأوجد الطول المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة:

٢٩) أ = ١٦، ب = ٦٣، جـ =؟

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$ج^{٢} = ٦٣^{٢} + ١٦^{٢}$

$ج^{٢} = ٣٩٦٩ + ٢٥٦$

$ج^{٢} = ٣٩٦٩ + ٢٥٦$

$ج^{٢} = \sqrt{٩٦٦٩ + ٢٥٦}$

ج = ٦٥

٣٠) ب = ٣، أ = $\sqrt{١١٢}$، جـ =؟

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$ج^{٢} = ٣^{٢} + \sqrt{١١٢}^{٢}$

$ج^{٢} = \sqrt{٩ + ١١٢}$

$ج^{٢} = \sqrt{١٢١}$

ج = ١١

٣١) جـ = ١٤، أ = ٩، ب =؟

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$١٤^{٢} = ب^{٢} + ٩^{٢}$

$ب^{٢} = ١٤^{٢} - ٨١$

$ب = \sqrt{١١٥}$

ب =١٠,٧٢

٣٢) **طيران:** يمكن تمثيل العلاقة بين طول طائرة (ل) بالأقدام، والكتلة المناسبة لأجنحتها (ب) بالأرطال بالمعادلة ل= $\sqrt{ك ب}$ حيث (ك) ثابت التناسب، أوجد قيمة (ك) لهذه الطائرة إلى أقرب جزء من مئة.



ل = $\sqrt{ك ب}$

٢٣٢ = $\sqrt{ك ب}$

٢٣٢^{٢} = ك ب

ك = $\frac{٥٣٨٢٤}{٨٧٠٠٠٠}$

ك = ٠,٠٦

استعد للدرس اللاحق

حل كلاً من التناسبات الآتية، مقرباً الناتج إلى قرب جزء من مئة إذا لزم:

٣٣) $\frac{٤}{د} = \frac{٢}{١٠}$

٢د = ٤٠

د = ٢٠

٣٤) $\frac{٦}{٥} = \frac{ف}{١٥}$

٥ف = ٦ × ١٥

ف = ١٨

٣٥) $\frac{٢٠}{٨} = \frac{هـ}{٢١}$

٨هـ = ٢٠ × ٢١

هـ = ٥٢,٥

٣٦) $\frac{٦}{٧} = \frac{٧}{جـ}$

٦جـ = ٤٩

جـ ≈ ٨,٢

٣٧) $\frac{١٦}{٧} = \frac{٩}{م}$

١٦م = ٦٣

م ≈ ٤

٣٨) $\frac{ب}{٢} = \frac{٤٥}{٦٨}$

٦٨ب = ٩٠

ب ≈ ١,٣

٦-٩ المثلثات المتشابهة

١) حدد ما إذا كان △ أ ب جـ الذي فيه ق ∠ أ = ٦٨°، ق ∠ ب = ق ∠ جـ يشابه △ د هـ ف حيث ق ∠ هـ = ق ∠ ف= ٥٤، وبرر إجابتك.

لا، لا تتساوي قياسات الزوايا المتناظرة

لنفرض أن ق ∠ ب = ق ∠ ج = س

(ب + جـ + أ) = ١٨٠°

س + س + ٦٨ = ١٨٠°

٢س = ١٨٠ – ٦٨

٢س = ١٨٠– ٦٨

٢س = ١١٢

س = ٥٦°

ق ∠ ب = ق ∠ ج = ٥٦، ق ∠ أ = ٦٨°

قياسات زوايا المثلث لا تتساوى مع قياسات زوايا المثلث الأخر إذن المثلثان غير متشابهان.

---

٢) حدد ما إذا كان △ أ ب جـ والذي فيه أب = ٦، ب جـ = ١٦، أ جـ = ٢٠ يشابه △ ع ك ل، حيث ع ك = ٣، ك ل = ٨، ع ل = ٩. وفسر إجابتك.

لا، الأضلاع المتناظرة غير متناسبة

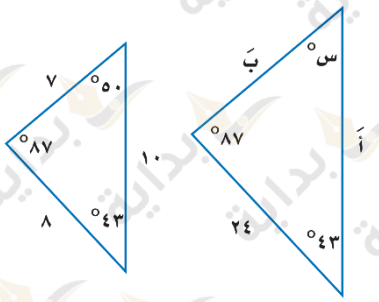
$$\frac{\text{أب}}{\text{ع ك}} = \frac{٦}{٣} = ٢$$

$$\frac{\text{ب ج}}{\text{ك ل}} = \frac{١٦}{٨} = ٢$$

$$\frac{\text{أ ج}}{\text{ع ل}} = \frac{٢٠}{٩}$$

أوجد قياسات العناصر المجهولة في المثلثين المتشابهين الآتيين:

٣أ)



س = ٥٠°

$\frac{\text{أ}}{١٠} = \frac{٢٤}{٨}$

٨أ = ٢٤٠

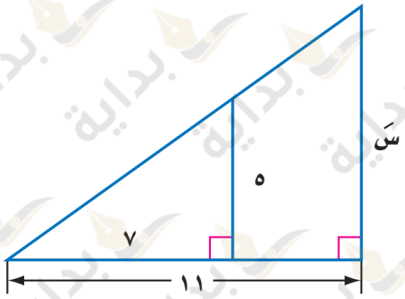
أ = ٣٠

$\frac{\text{ب}}{٧} = \frac{٢٤}{٨}$

٨ب = ١٦٨

ب = ٢١

٣ب)



$\frac{\text{س}}{٥} = \frac{١١}{٧}$

٧س = ٥٥

$\text{س} = \frac{٥٥}{٧}$

---

٤) خرائط: استعمل على خريطة المملكة مقياس رسم فيه كل ١سم تمثل ٢٥٠كلم، إذا كانت المسافة بين جدة والمدينة المنورة على الخريطة ١,٦٨سم تقريباً فكم المسافة الحقيقية بينهما؟

خرائط: ٤٢٠ كلم

$\frac{١,٦٨}{\text{س}} = \frac{١}{٢٥٠}$

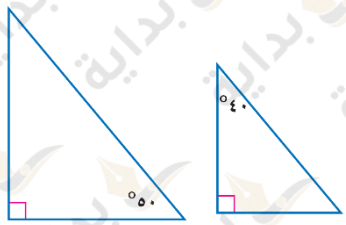
س = ٢٥٠×١,٦٨

س = ٤٢٠ كلم

√ تأكد

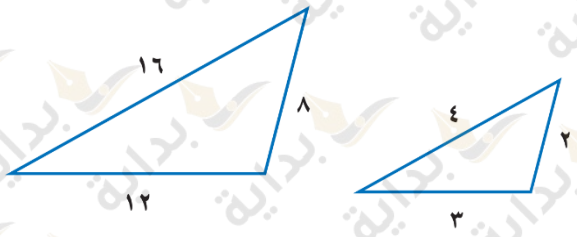
المثالان ١ ، ٢: حدد ما إذا كان كل زوج من المثلثات في السؤلين الآتيين متشابهين أم لا، وبرر إجابتك:

١)



نعم، الزوايا المتناظرة متساوية في القياس

٢)



نعم، الأضلاع المتناظرة متناسبة

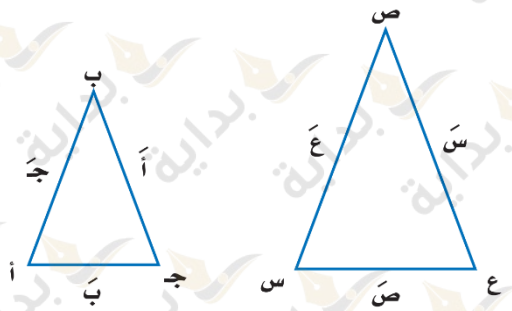
$\frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

$\frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$

$\frac{٤}{١٦} = \frac{١}{٤}$

مثال٣: في الأسئلة ٣ – ٦، إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع، فأوجد قياسات العناصر المجهولة:

٣) أَ = ٤، بَ = ٦، جَـ = ٨، سَ = ٦



$\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ع}} = \frac{\text{ب}}{\text{ص}}$

$\frac{٤}{٦} = \frac{٨}{\text{ع}}$

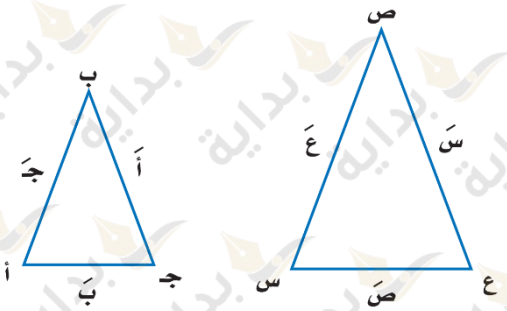
$\text{ع} = \frac{٨ \times ٦}{٤} = ١٢$

$\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\text{ص}}$

$\frac{٤}{٦} = \frac{٦}{\text{ص}}$

$\text{ص} = \frac{٦ \times ٦}{٤} = ٩$

٤) سَ = ٩، صَ = ١٥، عَ = ٢١، جـَ = ٧



$\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ع}} = \frac{\text{ب}}{\text{ص}}$

$\frac{\text{أ}}{٩} = \frac{٧}{٢١}$

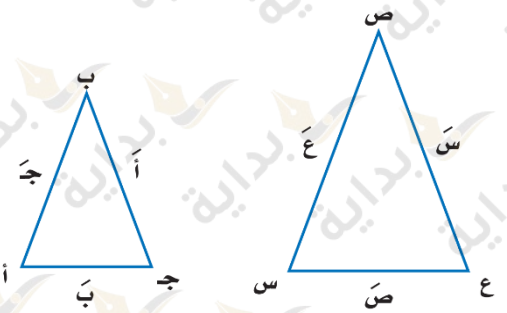
$\text{أ} = \frac{٩ \times ٧}{٢١} = ٣$

$\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ع}} = \frac{\text{ب}}{\text{ص}}$

$\frac{٣}{٩} = \frac{\text{ب}}{١٥}$

$\text{ب} = \frac{٣ \times ١٥}{٩} = ٥$

٥) أَ = ٢، بَ = ٥، سَ = ١٠، عَ = ٣٠



$\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ع}}$

$\frac{٢}{١٠} = \frac{\text{جـ}}{٣٠}$

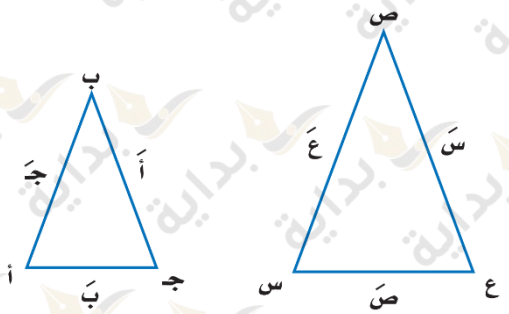
$\text{ج} = \frac{٢ \times ٣٠}{١٠} = ٦$

$\frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\text{ص}}$

$\frac{٢}{١٠} = \frac{٥}{\text{ص}}$

$\text{ص} = \frac{٥٠}{٢} = ٢٥$

٦) بَ = ٦، جَ = ١٠، سَ = ٣٠، صَ = ١٥



$\frac{أ}{٣٠} = \frac{١٠}{ع} = \frac{٦}{١٥}$

$أ = \frac{٦ \times ٣٠}{١٥} = ١٢$

$ع = \frac{١٥ \times ١٠}{٦} = ٢٥$

مثال٤: ٧) **أشجار:** ترغب مريم في إيجاد ارتفاع شجرة في حديقتها، طول ظلها متران و٦٥ سنتمتراً. فإذا كان طول مريم متر و٥٠ سنتمتراً، وطول ظلها في تلك اللحظة ٧٥ سنتمتراً. فما ارتفاع الشجرة؟

$\frac{ع}{٢,٦٥} = \frac{١,٥٠}{٧٥}$

$ع = \frac{٢,٦٥ \times ١,٥٠}{٧٥}$

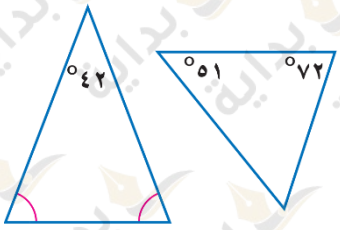
$ع = ٥,٣$

ارتفاع الشجرة = ٥ أمتار و٣٠ سنتمتراً

تدرب وحل المسائل

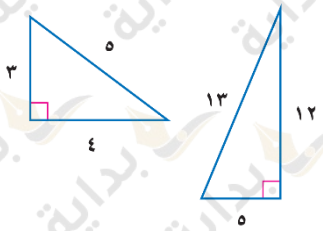
المثالان ١ ، ٢: حدد ما إذا كان كل زوج من المثلثات في السؤلين الآتيين متشابهين أم لا، وبرر إجابتك:

٨)



لا، قياسات الزوايا غير متساوية

٩)



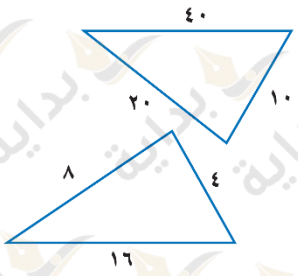
لا، الأضلاع غير متناسبة

$\frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

$\frac{١٣}{٥}$

$\frac{٥}{٤}$

١٠)



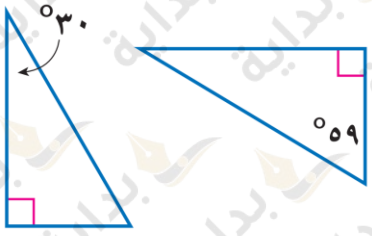
نعم، الأضلاع متناسبة

$\frac{٥}{٢} = \frac{٤٠}{١٦}$

$\frac{٥}{٢} = \frac{١٠}{٤}$

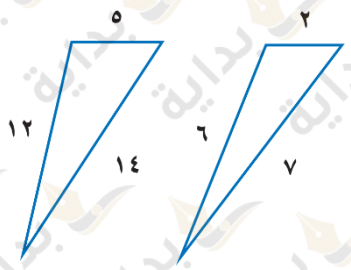
$\frac{٥}{٢} = \frac{٢٠}{٨}$

١١)



لا، قياسات الزوايا غير متساوية

١٢)



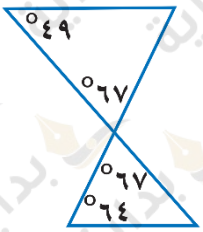
لا، الأضلاع غير متناسبة

$\frac{١٤}{٧} = ٢$

$\frac{١٢}{٦} = ٢$

$\frac{٥}{٢}$

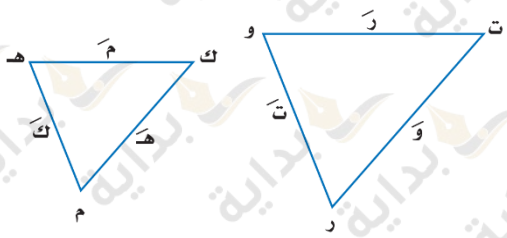
١٣)



نعم، قياسات الزوايا متساوية

مثال٣: في الأسئلة ١٤ ــ ١٨، إذا كان Δ م ك هـ ~ Δ ر ت و، فأوجد قياسات العناصر المجهولة:

١٤) مَ = ٢، كَ = ٧، هَـ = ٦، رَ = ٤



$\frac{م}{ر} = \frac{ك}{ت} = \frac{هـ}{و}$

$\frac{٢}{٤} = \frac{٧}{ت} = \frac{٦}{و}$

$ت = \frac{٤ \times ٧}{٢} = \frac{٢٨}{٢}$

ت = ١٤

$و = \frac{٤ \times ٦}{٢} = \frac{٢٤}{٢}$

و = ١٢

١٥) رَ = ٧,٥، وَ = ١٥، تَ = ٢٠، هـَ = ٦

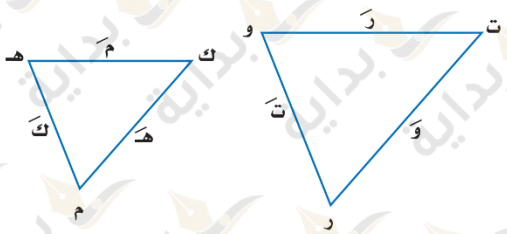
$\frac{م}{٧,٥} = \frac{ك}{٢٠} = \frac{٦}{١٥}$

$ك = \frac{٦ \times ٢٠}{١٥}$

ك = ٨

$م = \frac{٦ \times ٧,٥}{١٥}$

م = ٣



١٦) مَ = ٣,٥، كَ = ٩، تَ = ١٣,٥، وَ = ٩,٧٥

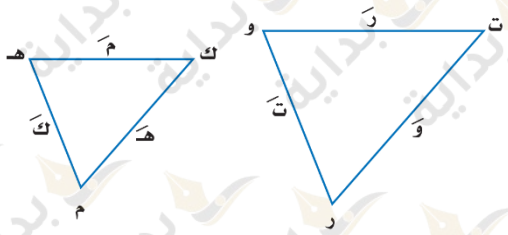
$\frac{٣,٥}{ر} = \frac{٩}{١٣,٥} = \frac{هـ}{٩,٧٥}$

$هـ = \frac{٩ \times ٥٧,٩}{١٣,٥}$

هـ = ٦,٥

$ر = \frac{٣,٥ \times ١٣,٥}{٩}$

ر = ٥,٢٥



١٧) مَ = ١,٤، هـَ = ٢,٨، وَ = ٠,٥٦، تَ = ٠,٨٤

$\frac{م}{ر} = \frac{ك}{ت} = \frac{هـ}{و}$

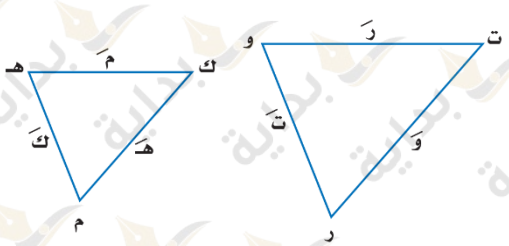
$\frac{١,٤}{ر} = \frac{ك}{٠,٨٤} = \frac{٢,٨}{٠,٥٦}$

$ر = \frac{١,٤ \times ٠,٥٦}{٢,٨}$

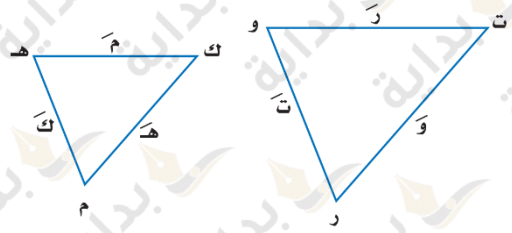
ر = ٠,٢٨

$ك = \frac{٢,٨ \times ٠,٨٤}{٠,٥٦}$

ك = ٤,٢



١٨) مَ = $\sqrt{٢}$ ، كَ = $\sqrt{٧}$ ، تَ = $\sqrt{١٤}$ ، وَ = $\sqrt{١٠}$



$\frac{م}{ر} = \frac{ك}{ت} = \frac{هـ}{و}$

$\frac{\sqrt{٢}}{ر} = \frac{\sqrt{٧}}{\sqrt{١٤}} = \frac{هـ}{\sqrt{١٠}}$

$ر = \frac{\sqrt{٢} \times \sqrt{١٤}}{\sqrt{٧}} = \frac{\sqrt{٧}\sqrt{٢}}{\sqrt{٧}} = ٢$

$هـ = \frac{\sqrt{٧} \times \sqrt{١٠}}{\sqrt{١٤}} = \frac{\sqrt{٧} \times \sqrt{١٠}}{\sqrt{٧} \times \sqrt{٢}}$

$هـ = \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٥}\sqrt{٢}}{٢} = \sqrt{٥}$

---

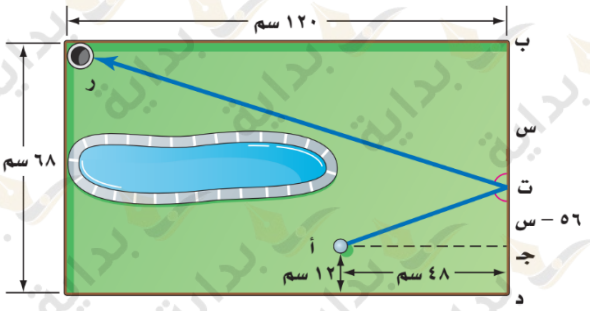
١٩) **ألعاب:** يستعمل تصميم نموذج المركبات المقياس ١ سم: ٠,٢٤ م من الطول الفعلي للمركبة. إذا كان للمركبة الأصلية نافذة على شكل مثلث قائم الزاوية. ارتفاعها ٠,٧٦ م فكم سيكون ارتفاع النافذة علي النموذج؟

$\frac{١}{ع} = \frac{٠,٢٤}{٠,٦٧}$

ع = $\frac{٠,٧٦}{٠,٢٤}$ = ٣,٢

ع = ٣,٢ سم تقريباً

٢٠) **جولف:** يلعب حمد لعبة جولف مصغرة كما في الشكل المجاور، ويريد قذف الكرة من النقطة أ إلى النقطة ت لترتد وتدخل الحفرة ر. استعمل تشابه المثلثات لتحديد بعد نقطة الارتداد عن الرأس ب.



$$\frac{\text{س}}{٥٦ - \text{س}} = \frac{١٢٠}{٤٨}$$

٦٧٢٠ – ١٢٠س = ٤٨س

٦٧٢٠ = ٤٨س + ١٢٠س

٦٧٢٠ = ١٦٨س

س = ٤٠

س = ٤٠ سم

---

٢١) **خرائط:** يظهر مقياس رسم لخريطة المملكة أن ٢,٥ سم على الخريطة تمثل ١٠٠ كيلومتر في الواقع. فإذا كانت المسافة بين مكة المكرمة والمدينة المنورة على الخريطة ٨ سم، فما البعد الحقيقي بينهما؟

$$\frac{٢,٥}{١٠٠} = \frac{٨}{\text{ف}}$$

$$\text{ف} = \frac{٨٠٠}{٢,٥} = ٣٢٠$$

البعد الحقيقي بينهما = ٣٢٠ كلم

---

٢٢) **مشروع المدرسة:** خطط معلم التاريخ لعمل نموذج للكعبة المشرفة علي مقياس رسم ٥ سم: ٠,٦ م. فإذا كان الارتفاع الفعلي للكعبة المشرفة ١٤ م، فكم سيكون ارتفاع النموذج؟

$$\frac{٥}{٦٠,٠} = \frac{١٤}{\text{ف}}$$

$$\text{ف} = \frac{٠,٠٥ \times ١٤}{٠,٦}$$

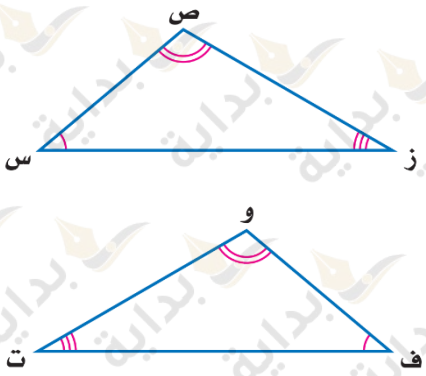
$$\text{ف} = \frac{٠,٧}{٠,٦}$$

ف ≈ ١,١٦٦٧ م

ارتفاع النموذج = ١١٦,٦٧ سم تقريباً

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٣) **اكتشف الخطأ:** قارنت رهف وبيان بين المثلثين المتشابهين المجاورين. فأيهما كانت مقارنتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

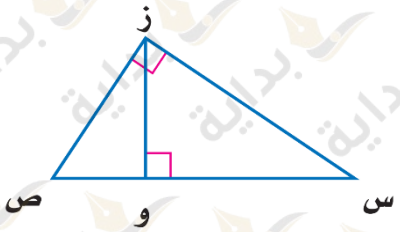


رهف	نوال
ق ∠ س = ق ∠ ت	ق ∠ س = ق ∠ و
ق ∠ ص = ق ∠ و	ق ∠ ص = ق ∠ ف
ق ∠ ز = ق ∠ ف	ق ∠ ز = ق ∠ ت
Δ س ص ز ~ Δ ت و ف	Δ س ص ز ~ Δ و ف ت

مقارنة كلتاهما خطأ، فالأقواس تشير إلي الزوايا المتناظرة لذا فإن المثلثين متشابهين

---

٢٤) **تحد:** المثلث س ص ز يشبه المثلثين المتشابهين المكونين من القطعة المستقيمة العمودية الواصلة بين ز والقطعة المستقيمة س ص. اكتب ثلاث عبارات تتعلق بهذين المثلثين، ولم تتشابه؟



Δ س ص ز ~ Δ س ز و

Δ س ص ز ~ Δ ز ص و

Δ س ز و ~ Δ ز ص و

المثلثات متشابهة لأن قياسات الزوايا المتناظرة متساوية

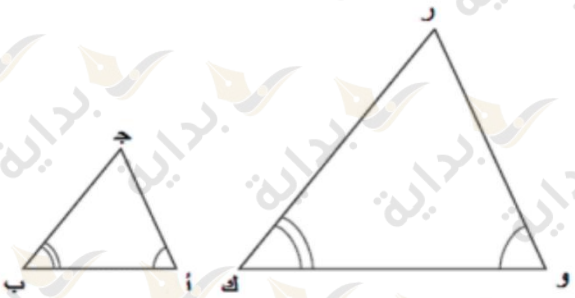
---

٢٥) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً، أم صحيحة أحياناً، أم غير صحيحة أبداً؟ فسر إجابتك.

"إذا ضربت مثلث في ٣، فإن زوايا المثلث بعد تكبيره لها نفس قياسات زوايا المثلث الأصلي".

صحيحة دائماً، فالأضلاع متناسبة بمقياس معامله ٣ والذي يعني أن المثلثات متشابهة والزوايا دائماً متطابقة

٢٦) مسألة مفتوحة: ارسم مثلثاً وسمه أ ب جـ، ثم ارسم المثلث المشابه له وسمه و ك ر، علي أن تكون مساحة ٤ أمثال مساحة أ ب جـ. واشرح استراتيجيتك.



طول قاعدة Δ و ك ر مثلاً ارتفاع Δ أ ب جـ، المثلثان متشابهان لأن زواياهما المتناظرة متطابقة.

---

٢٧) اكتب: لخص كيف تحدد أن المثلثين متشابهان؟ وكيف تجد القياسات المجهولة فيهما؟

يكون المثلثان متشابهين إذا كانت زواياهما المتناظرة متناسبة وإذا كان المثلثان متشابهين فيمكن استعمال التناسب لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة وإذا كانت الزوايا مجهولة فحدد قياس زاوية في أحد المثلثين المتشابهين فيكون للزاوية المناظرة لها من المثلث الآخر القياس نفسه

تدريب على اختبار

٢٨) أوجد المسافة بين النقطتين (٢، -٤)، (-٥، ٨)

أ) ٥ جـ) $\sqrt{٩٥}$

ب) ٧ د) $\sqrt{١٩٣}$

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(-٥ - ٢)^٢ + (٨ + ٤)^٢}$

ف = $\sqrt{٤٩ + ١٤٤}$ = $\sqrt{١٩٣}$

الاختيار الصحيح: د) $\sqrt{١٩٣}$

---

٢٩) أي المعادلات الآتية تمثل مستقيماً مقطعه الصادي -٤، وميله ٦؟

أ) ص = ٦س – ٤ جـ) ص = –٦س + ٤

ب) ص = –٤س + ٦ د) ص = ٦س + ٤

الاختيار الصحيح: أ) ص = ٦س – ٤

مراجعة تراكمية

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي :

٣٠) (٣ ، ٠)، (١ ، ٩)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(١ - ٠)^٢ + (٩ - ٣)^٢}$

ف = $\sqrt{١ + ٣٦}$ = $\sqrt{٣٧}$

٣١) (–٢ ، ٤)، (٥ ، ١٣)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٥ + ٢)^٢ + (١٣ - ٤)^٢}$

ف = $\sqrt{٤٩ + ٨١}$ = $\sqrt{١٣٠}$

٣٢) (١ ، –٥)، (–١ ، –٥)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(-١ - ١)^٢ + (-٥ + ٥)^٢}$

ف = $\sqrt{٤}$ = ٢

حدد ما إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا.

٣٣) ٣، ٤، ٥

نعم، الأطوال تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية

ج^٢ = ب^٢ + أ^٢

٥^٢ = ٤^٢ + ٣^٢

٢٥ = ١٦ + ٩

٢٥ = ٢٥ √

٣٤) ٨، ١٠، ١٢

لا، الأطوال لا تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية

ج^٢ = ب^٢ + أ^٢

١٢^٢ = ٨^٢ + ١٠^٢

١٤٤ = ٦٤ + ١٠٠

١٤٤ = ١٦٤ ×

٣٥) ١٠، ٢٤، ٢٦

نعم، الأطوال تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية

$ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}$

$٢٦^{٢} = ٢٤^{٢} + ١٠^{٢}$

٦٧٦ = ٥٧٦ + ١٠٠

٦٧٦ = ٦٧٦ √

حلل كل كثيرة حدود فيما يأتي إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب "أولية":

٣٦) $٤ك^{٢} - ١٠٠$

$٤(ك - ٥)(ك + ٥)$

٣٧) $س^{٢} + ٦س - ٩$

أولية

٣٨) $٩ت^{٣} + ٦٦ت^{٢} - ٤٨ت$

$٣ت(٣ت - ٢)(ت + ٨)$

استعد للدرس اللاحق

إذا كانت: أ = ٣، ب = −٢، جـ = ٦، فاحسب كلاً مما يأتي:

٣٩) $\frac{ب}{جـ}$

$\frac{-٢}{٦} = -\frac{١}{٣}$

٤٠) $\frac{٢ أ ب}{جـ}$

$\frac{٢ \times ٣ \times -٢}{٦} = -٢$

٤١) $\frac{أ جـ}{-٤ب}$

$\frac{٦ \times ٣}{-٤ \times -٢} = ٢\frac{١}{٤}$

٤٢) $\frac{-٣ أ جـ}{ب^{٢}}$

$\frac{-٣ \times ٣ \times ٦}{-٢ \times ٢} = ١٣\frac{١}{٢}$

٤٣) $\frac{-٢ ب جـ}{أ}$

$\frac{-٢ \times -٢ \times ٦}{٣} = ٨$

أطوال الأضلاع			النسب		قياسات الزوايا		
الضلع ب جـ	الضلع أ جـ	الضلع أ ب	$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$	$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$	الزاوية أ	الزاوية ب	الزاوية جـ
٢,٥	٤	٤,٧	٠,٦٣	٠,٥٣	°٣٢	°٥٨	°٩٠
٥	٨	٩,٤	٠,٦٣	٠,٥٣	°٣٢	°٥٨	°٩٠
١٠	١٦	١٨,٩	٠,٦٣	٠,٥٣	°٣٢	°٥٨	°٩٠
١٥	٢٤	٢٨,٣	٠,٦٣	٠,٥٣	°٣٢	°٥٨	°٩٠
٢٠	٣٢	٣٧,٧	٠,٦٣	٠,٥٣	°٣٢	°٥٨	°٩٠
٢٥	٤٠	٤٧,٢	٠,٦٣	٠,٥٣	°٣٢	°٥٨	°٩٠

حلل النتائج:

١) تفحص قياسات الزوايا في الجدول والنسب بين أطوال الأضلاع. ماذا تلاحظ؟ اكتب جملة أو جملتين لوصف أي نمط تراه.

جميع النسب وقياسات الزوايا في الجدول متساوية لكل المثلثات القائمة والنسبة بين ضلعي كل منها ٥ : ٨

خمن:

٢) ما النسبة بين طولي أقصر وأطول ضلع في مثلث قائم الزاوية ومشابه للمثلثات التي رسمتها هنا؟

٥ : ٨

٣) إذا كانت نسبة طول أقصر ضلع إلى الوتر في مثلث قائم الزاوية هي ٠,٥٣ تقريبا. فما قياس الزاوية الحادة الكبرى في المثلث القائم الزاوية؟

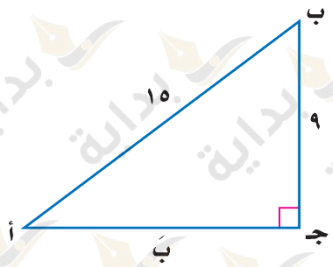


جتا الزاوية = $\frac{٥٣}{١٠٠}$

الزاوية = °٥٨

٩ - ٧ النسب المثلثية

١) أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية ب.



جا ب = $\frac{١٢}{١٥}$ = $\frac{٤}{٥}$، جتا ب = $\frac{٩}{١٥}$ = $\frac{٣}{٥}$، ظا ب = $\frac{١٢}{٩}$ = $\frac{٤}{٣}$

٢أ) استعمل الحاسبة لإيجاد جا ٣١° إلي أقرب جزء من عشرة آلاف.

جا ٣١° = ٠,٥١٥

٢ب) استعمل الحاسبة لإيجاد ظا ٧٦° إلي أقرب جزء من عشرة آلاف.

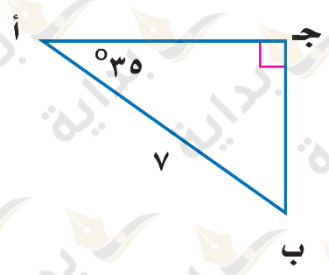
ظا ٧٦° = ٤,٠١٠٨

٢جـ) استعمل الحاسبة لإيجاد جتا ٥٥° إلي أقرب جزء من عشرة آلاف.

جتا ٥٥° = ٠,٥٧٣٦

حل المثلث القائم الزاوية مقرباً طول كل ضلع إلي أقرب جزء من عشرة.

٣أ)



جا (٣٥°) = $\frac{\text{ب جـ}}{٧}$

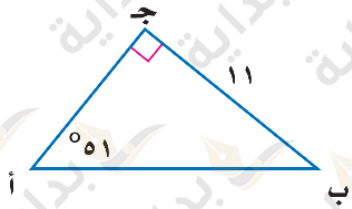
ب جـ = جا (٣٥°) × ٧ ≈ ٤,٠

جتا (٣٥°) = $\frac{\text{أ جـ}}{٧}$

أ جـ = جتا (٣٥) × ٧ = ٥,٧

∠ب = ١٨٠ – (٩٠ + ٣٥) = ٥٥°

٣ب)



∠ب = ١٨٠ – (٩٠ + ٥١) = ٣٩°

جا (٥١°) = $\frac{١١}{\text{ب أ}}$

أ ب = ١١ ÷ جا (٥١°)

أ ب = ١٤,٢

ظا (٥١°) = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ = $\frac{١١}{\text{أ جـ}}$

أ جـ × ظا (٥١°) = ١١

أ جـ = ٨,٩

٤) **لوح التزلج:** ما طول لوح تزلج يصنع مع سطح الأرض زاوية قياسها ٢٥° ويرتفع طرفه ٢م؟

$$\text{جا}(٢٥^\circ) = \frac{٢}{\text{ل}}$$

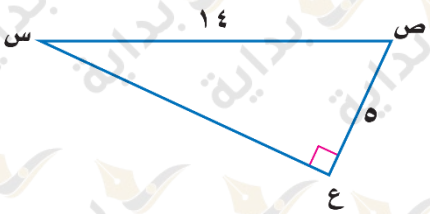
$$٢ = \text{ل} \times \text{جا}(٢٥^\circ)$$

$$\text{ل} = ٢ \div \text{جا}(٢٥^\circ)$$

$$\text{ل} = ٤,٧ \text{ م}$$

---

٥) أوجد ق ∠ س مقرباً إلى أقرب درجة إذا كان س ص = ١٤، ص ع = ٥.



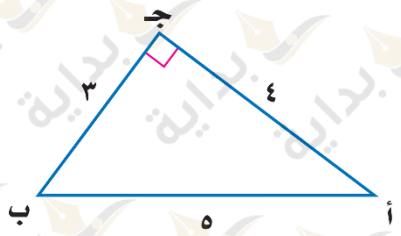
$$\text{جا}(\text{س}^\circ) = \frac{٥}{١٤}$$

ق ∠ س = ٢١°

√ تأكد

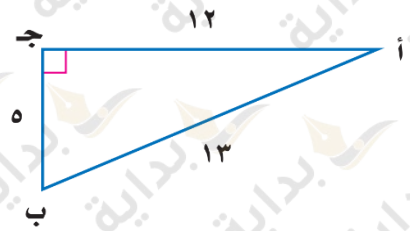
مثال ١: أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ في كل مما يأتي:

(١)



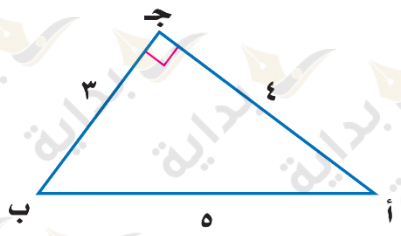
$$\text{جا}(\text{أ}) = \frac{٣}{٥}، \text{جتا}(\text{أ}) = \frac{٤}{٥}، \text{ظا}(\text{أ}) = \frac{٣}{٤}$$

(٢)



$$\text{جا}(\text{أ}) = \frac{٥}{١٣}، \text{جتا}(\text{أ}) = \frac{١٢}{١٣}، \text{ظا}(\text{أ}) = \frac{٥}{١٢}$$

(١)



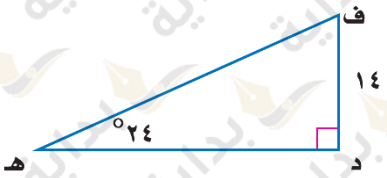
$$\text{جا}(\text{أ}) = \frac{٣٦}{٨٥}، \text{جتا}(\text{أ}) = \frac{٧٧}{٨٥}، \text{ظا}(\text{أ}) = \frac{٣٦}{٧٧}$$

مثال٢: استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل نسبة مثلثية فيما يأتي، مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف في كل مما يأتي:

٤) جا ٣٧°	٥) جتا ٢٣°
جا ٣٧° = ٠,٦٠١٨	جتا ٢٣° = ٠,٩٢٠٥
٦) ظا ١٤°	٧) جتا ٨٢°
ظا ١٤° = ٠,٢٤٩٣	جتا ٨٢° = ٠,١٣٩٢

مثال٣: حل كل مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرباً طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:

٨)



ق ∠ ف = ١٨٠ – (٢٤ + ٩٠)

ق ∠ ف = ٦٦°

$\text{جا}(٢٤^\circ) = \frac{١٤}{\text{ف هـ}}$

ف هـ = ١٤ ÷ جا (٢٤°)

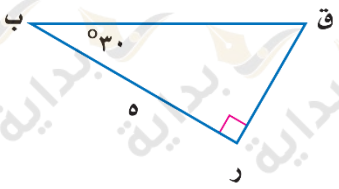
ف هـ = ٣٤,٤

$\text{ظا}(٢٤^\circ) = \frac{١٤}{\text{د هـ}}$

د هـ = ١٤ ÷ ظا (٢٤°)

د هـ = ٣١,٤

٩)



ق ∠ ق = ١٨٠ – (٢٤ + ٩٠)

ق ∠ ق = ٦٦°

جتا (٣٠°) = $\frac{٥}{\text{ق ب}}$

ف هـ = ٥ ÷ جتا (٣٠°)

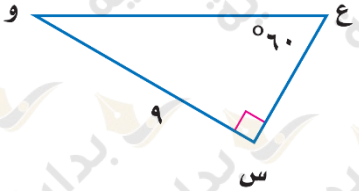
ق ب = ٥,٨

ظا (٣٠°) = $\frac{\text{ق ر}}{٥}$

ق ر = ٥ × ظا (٣٠°)

ق ر = ٢,٩

١٠)



ق ∠ و = ١٨٠ – (٦٠ + ٩٠)

ق ∠ و = ٣٠°

جا (٦٠°) = $\frac{٩}{\text{ع و}}$

ع و = ٩ ÷ جا (٦٠°)

ع و = ١٠,٤

ظا (٦٠°) = $\frac{٩}{\text{ع س}}$

ع س = ٩ ÷ ظا (٦٠°)

ع س = ٥,٢

مثال٤: تزلج على الجليد: في موقع للتزلج على أحد التلال، كان ارتفاع التلة الرأسي ١٠٠٠م، وزاوية ميلها عن مستوى الأرض ١٨°، قدر طول (ر).



جا الزاوية = المقابل ÷ الوتر

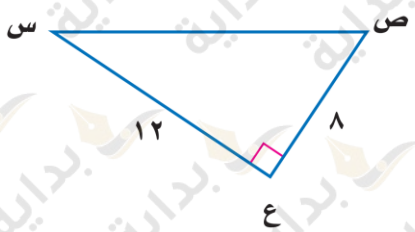
$$\text{جا}(١٨) = \frac{١٠٠٠}{\text{ر}}$$

ر = ١٠٠٠ ÷ جا (١٨)

ر = ٣٢٣٦,١م

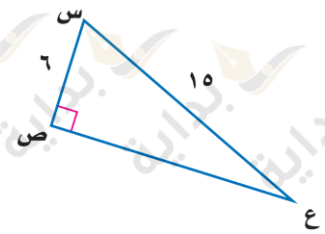
مثال٥: أوجد ق ∠ س لكل مثلث فيما يأتي مقرباً إلى أقرب درجة:

١٢)



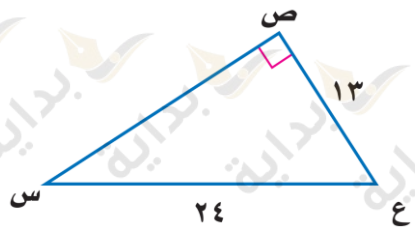
$$\text{ظا}(\angle \text{س}) = \frac{٨}{١٢}\text{ ، }\angle \text{س} = ٣٤°$$

١٣)



$$\text{جتا}(\angle \text{س}) = \frac{٦}{١٥}\text{ ، }\angle \text{س} = ٦٦°$$

١٤)

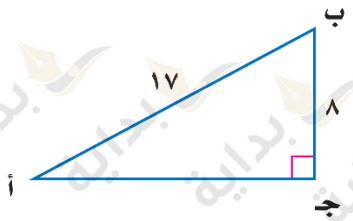


$$\text{جا}(\angle \text{س}) = \frac{١٣}{٢٤}\text{ ، }\angle \text{س} = ٣٣°$$

تدرب وحل المسائل

مثال ١: أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية ب في كل مما يأتي:

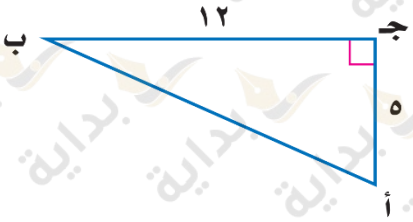
(١٥)



أ جـ = $\sqrt{١٧^{٢} - ٨^{٢}}$ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ حسب نظرية فيثاغورس

جا (ب) = $\frac{١٥}{١٧}$، جتا (ب) = $\frac{٨}{١٧}$، ظا (ب) = $\frac{١٥}{٨}$

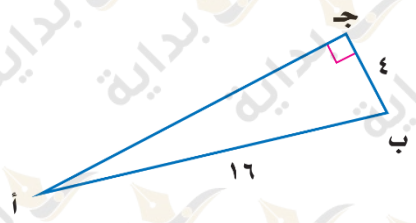
(١٦)



أ ب = $\sqrt{٥^{٢} + ١٢^{٢}}$ = $\sqrt{٢٥ + ١٤٤}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ حسب نظرية فيثاغورس

جا (ب) = $\frac{٥}{١٣}$، جتا (ب) = $\frac{١٢}{١٣}$، ظا (ب) = $\frac{٥}{١٢}$

(١٧)



أ جـ = $\sqrt{١٦^{٢} - ٤^{٢}}$ = $\sqrt{٢٥٦ - ١٦}$

= $\sqrt{٢٤٠}$ = $\sqrt{٤ \times ٦٠}$ = $\sqrt{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٣ \times ٥}$ = ٤ $\sqrt{١٥}$

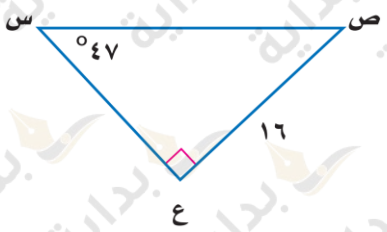
جا (ب) = $\frac{٤\sqrt{١٥}}{١٦}$ = $\frac{\sqrt{١٥}}{٤}$ ، جتا (ب) = $\frac{٤}{١٦}$ = $\frac{١}{٤}$ ، ظا (ب) = $\frac{٤\sqrt{١٥}}{٤}$ = $\sqrt{١٥}$

مثال٢: استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل نسبة مثلثية فيما يأتي، مقربة إلي أقرب جزء من عشرة آلاف.

١٨) ظا ٢°	١٩) جا ٨٩°
ظا ٢° = ٠,٠٣٤٩	جا ٨٩° = ٠,٩٩٩٨
٢٠) جتا ٤٤°	٢١) ظا ٤٥°
جتا ٤٤° = ٠,٧١٩٣	ظا ٤٥° = ١
٢٢) جا ٧٣°	٢٣) جتا ٩٠°
جا ٧٣° = ٠,٩٥٦٣	جتا ٩٠° = ٠
٢٤) جا ٣٠°	٢٥) ظا ٦٠°
جا ٣٠° = ٠,٥	ظا ٦٠° = ١,٧٣٢١

مثال٣: حل كل مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرباً طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:

٢٦)



ق ∠ ص = ١٨٠ – (٤٧ + ٩٠) = ٤٣°

$$\text{جا } (47^\circ) = \frac{16}{\text{ص س}}$$

ص س = ١٦ ÷ جا (٤٧°) ≈ ٢١,٩

$$\text{ظا } (47^\circ) = \frac{16}{\text{ع س}}$$

ع س = ١٦ ÷ ظا (٤٧°) = ١٤,٩

(٢٧



ق ∠ ج = ١٨٠ − (٦٨ + ٩٠) = ٢٢°

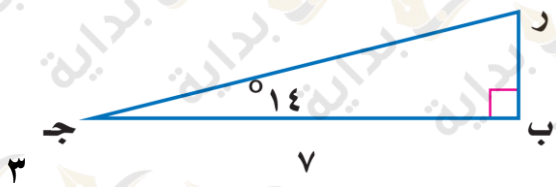
جا (٦٨°) = $\frac{\text{ك ج}}{٩}$

ك ج = ٩ × جا (٦٨°) ≈ ٨,٣

جتا (٦٨°) = $\frac{\text{ك ل}}{٩}$

ك ل = ٩ × جتا (٦٨°) = ٣,٤

(٢٨



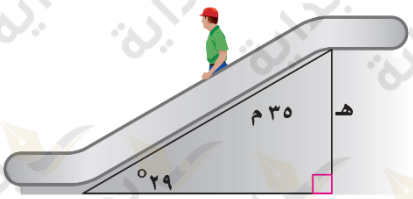
ق ∠ ر = ١٨٠ − (١٤ + ٩٠) = ٧٦°

ظا (١٤°) = $\frac{\text{ب ر}}{٧}$

ب ر = ٧ × ظا (١٤) ≈ ١,٧

جتا (١٤°) = $\frac{٧}{\text{ر ج}}$

ر ج = ٧ ÷ جتا (١٤°) = ٧,٢



مثال٤: سلم كهربائي: يبلغ طول السلم الكهربائي في أحد الأسواق الكبيرة ٣٥ متراً، وقياس الزاوية التي يكونها مع الأرض ٢٩°، أوجد ارتفاع السلم.

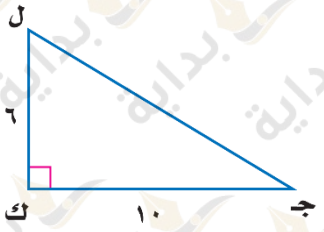
$$\text{جا}(٢٩^\circ) = \frac{\text{هـ}}{٣٥}$$

$$\text{هـ} = ٣٥ \times \text{جا}(٢٩^\circ)$$

$$\text{هـ} \approx ١٧ \text{ متر تقريباً}$$

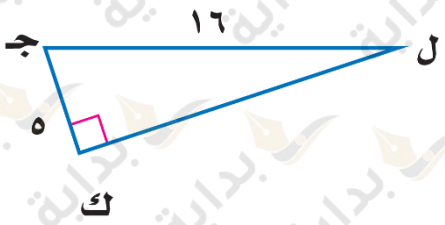
مثال٥: أوجد ق ∠ جـ لكل مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرباً إلى أقرب درجة:

(٣٠



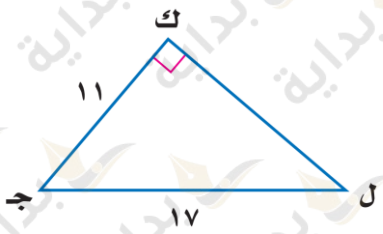
$$\text{ظا}(\angle \text{ج}) = \frac{٦}{١٠}\text{، ق} \angle \text{ج} = ٣١^\circ$$

(٣١



$$\text{جتا}(\angle \text{ج}) = \frac{٥}{١٦}\text{، ق} \angle \text{ج} = ٧٢^\circ$$

(٣٢



$$\text{جتا}(\angle \text{ج}) = \frac{١١}{١٧}\text{، ق} \angle \text{ج} = ٥٠^\circ$$

٣٣) وقف الملك عبد العزيز: يصل ارتفاع أبراج وقف الملك عبد العزيز المطلة على المسجد الحرام إلى ٤٠٠ متر. ينظر عمار إلى أعلى الأبراج بزاوية ٥٥°، فما بُعد عمار عن قاعدة الأبراج؟

ظا (٥٥°) = $\frac{٤٠٠}{ف}$

ف = ٤٠٠ ÷ ظا (٥٥°) ≈ ٢٨٠ متر تقريباً

---

٣٤) غابات: يقدر حارس غابة ارتفاع شجرة بنحو ٥٠ متراً. فإذا كان الحارس يقف على بعد ٣٠ متراً من قاعدة الشجرة، فما مقياس الزاوية التي يشكلها مع قمة الشجرة؟

نفرض أن الزاوية التي يشكلها مع قمة الشجرة (س)

ظا (∠ س) = $\frac{٥٠}{٣٠}$

إذن الزاوية التي يشكلها مع قمة الشجرة = ٥٩° تقريباً

في السؤالين ٣٥ ــ ٣٦، افترض أن ∠ أ زاوية حادة في المثلث القائم أ ب جـ، ثم أوجد:

٣٥) جا أ، ظا أ إذا كان جتا أ = $\frac{٣}{٤}$

المقابل = $\sqrt{٤^٢ - ٣^٢}$ = $\sqrt{١٦ - ٩}$ = $\sqrt{٧}$ حسب نظرية فيثاغورس

جا أ = $\frac{\sqrt{٧}}{٤}$، ظا أ = $\frac{\sqrt{٧}}{٣}$

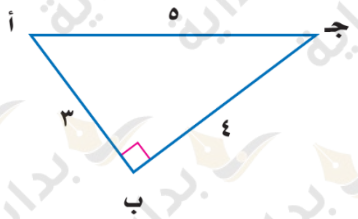
٣٦) ظا أ، جتا أ إذا كان جا أ = $\frac{٢}{٧}$.

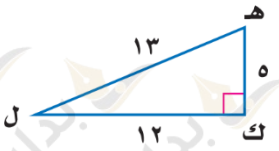
ظا أ = $\frac{٢\sqrt{٥}}{١٥}$، جتا أ = $\frac{٣\sqrt{٥}}{٧}$

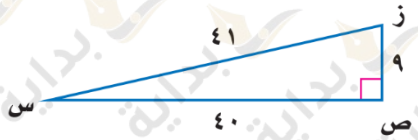
المجاور = $\sqrt{٧^٢ - ٢^٢}$ = $\sqrt{٤٩ - ٤}$ = $\sqrt{٤٥}$ = $٣\sqrt{٥}$ حسب نظرية فيثاغورس

ظا أ = $\frac{٢}{٣\sqrt{٥}}$ × $\frac{٣\sqrt{٥}}{٣\sqrt{٥}}$ = $\frac{٢\sqrt{٥}}{١٥}$، جتا أ = $\frac{٣\sqrt{١٥}}{٧}$

٣٧) تمثيلات متعددة: سوف تكتشف في هذه المسألة العلاقة بين دوال الجيب ودوال جيب التمام.







أ) جدولياً: انقل الجدول الآتي وأكمله مستعملاً المثلثات أعلاه:

المثلث	النسب المثلثية		جا^{٢}	جتا^{٢}	جا^{٢} + جتا^{٢} =
أ ب جـ	جا أ = $\frac{٤}{٥}$	جتا أ = $\frac{٣}{٥}$	جا^{٢} أ = $\frac{١٦}{٢٥}$	جتا^{٢} أ = $\frac{٩}{٢٥}$	١
	جا جـ = $\frac{٣}{٥}$	جتا جـ = $\frac{٤}{٥}$	جا^{٢} جـ = $\frac{٩}{٢٥}$	جتا^{٢} جـ = $\frac{١٦}{٢٥}$	١
هـ ك ل	جا هـ = $\frac{١٢}{١٣}$	جتا هـ = $\frac{٥}{١٣}$	جا^{٢} هـ = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$	جتا^{٢} هـ = $\frac{٢٥}{١٦٩}$	١
	جا ل = $\frac{٥}{١٣}$	جتا ل = $\frac{١٢}{١٣}$	جا^{٢} ل = $\frac{٢٥}{١٦٩}$	جتا^{٢} ل = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$	١
س ص ز	جا س = $\frac{٩}{٤١}$	جتا س = $\frac{٤٠}{٤١}$	جا^{٢} س = $\frac{٨١}{١٦٨١}$	جتا^{٢} س = $\frac{١٦٠٠}{١٦٨١}$	١
	جا ز = $\frac{٤٠}{٤١}$	جتا ز = $\frac{٩}{٤١}$	جا^{٢} ز = $\frac{١٦٠٠}{١٦٨١}$	جتا^{٢} ز = $\frac{٨١}{١٦٨١}$	١

ب) لفظياً: خمن علاقة مجموع مربعي دالتي الجيب وجيب التمام لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية.

لفظيا: مجموع مربعي جيب الزاوية الحادة وجيب تمامها في مثلث قائم الزاوية يساوي ١

---

٣٨) غواصات: إذا نزلت غواصة مسافة ٣ أميال قطرياً بزاوية مقدارها ١٠° مع قاع محيط. فكم أصبح بعدها عن سطح الماء؟

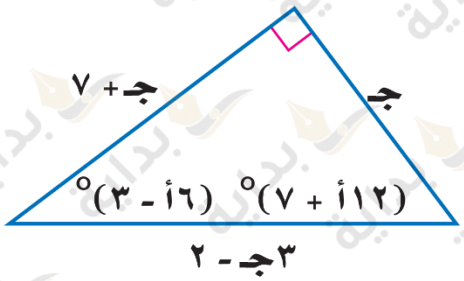
جا (١٠°) = المقابل ÷ الوتر

جا (١٠°) = المقابل ÷ ٣

المقابل (بعد الغواصة عن سطح الماء) = جا (١٠°) × ٣ = ٠,٥ ميل تقريباً

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٩) تحد: حل المثلث في الشكل المجاور.



١٨٠ – (١٢أ + ٧ + ٦أ – ٣ + ٩٠) = ٠

١٨٠ – (١٨أ + ٩٤) = ٠

١٨٠ – ١٨أ – ٩٤ = ٠

-١٨أ + ٨٦ = ٠

أ = ٨٦ ÷ ١٨ = ٤,٧٨

$(٣جـ - ٢)^{٢} = ج^{٢} + (جـ + ٧)^{٢}$

$٩ج^{٢} + ٤ – ١٢جـ = ج^{٢} + ج^{٢} + ٤٩ + ١٤جـ$

$٩ج^{٢} + ٤ – ١٢جـ – جـ^{٢} – جـ^{٢} – ٤٩ – ١٤جـ = ٠$

$٧ج^{٢} – ٢٦جـ – ٤٥ = ٠$

$ج = \frac{– ب \pm \sqrt{ب^{٢} – ٤أجـ}}{٢أ}$

$ج = \frac{٢٦ \pm \sqrt{(-٢٦)^{٢} – ٤ \times ٧ \times -٤٥}}{١٤}$

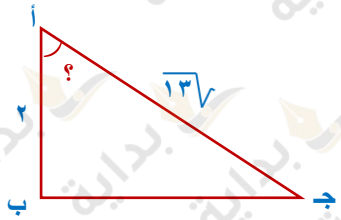
$ج = \frac{٧٠}{١٤} = ٥$

---

٤٠) تبرير: استعمل تعريف نسب الجيب وجيب التمام في تعريف نسبة الظل.

$\frac{جا أ}{جتا أ} = \frac{\frac{المقابل}{الوتر}}{\frac{المجاور}{الوتر}} = \frac{المقابل}{الوتر} \times \frac{الوتر}{المجاور} = \frac{المقابل}{المجاور} = ظا أ$

٤١) **مسألة مفتوحة:** اكتب مسألة تستعمل فيها نسبة جيب التمام لإيجاد قياس زاوية مجهولة في مثلث قائم الزاوية، ثم حلها.



أوجد قياس الزاوية المجهولة في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب إذا كان أجـ = √١٣ ، أ ب = ٢،

ق ∠ أ = ٥٦°

---

٤٢) **تبرير:** إذا كان جيب زاوية وجيب تمامها متساويين، فماذا تستنتج عن المثلث؟

المثلث متطابق الضلعين وقائم الزاوية إذن فالضلعان متساويان

---

٤٣) **اكتب:** وضح كيف يمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة في مثلث عُلِمَ فيه قياس زاوية حادة وطول أحد الأضلاع.

تستعمل الزاوية المعطاة وقياس طول الضلع في المثلث القائم الزاوية في كتابة إحدي النسب المثلثية حيث تستعمل نسبة جيب التمام الضلع المجاور والوتر وتستعمل نسبة الظل الضلع المقابل والضلع المجاور.

تدريب على اختبار

٤٤) أي المتباينات الآتية تعبر عن التمثيل البياني أدناه؟



أ) $-٢ \geq س \geq ٤$

ب) $-٢ > س > ٤$

جـ) س ≤ ٤ أو س ≥ -٢

د) س > ٤ أو س > -٢

الاختيار الصحيح: أ) $-٢ \geq س \geq ٤$

---

٤٥) إجابة قصيرة: تقاضى مندوب مبيعات ٦٤٠٠٠ راتباً سنوياً، إضافة إلى ٥٪ من قيمة مبيعاته. ما قيمة المبيعات التي عليه بيعها ليزيد دخله السنوي حتى ٩٠٠٠٠ ريال؟

الفرق بين الدخلين = ٩٠٠٠٠ – ٦٤٠٠٠ = ٢٦٠٠٠

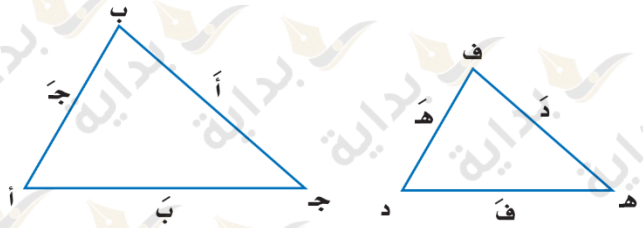
قيمة المبيعات لزيادة الدخل = $\frac{٢٦٠٠٠ \times ١٠٠}{٥}$ = ٥٢٠٠٠٠

أكثر من ٥٢٠٠٠٠ ريال

مراجعة تراكمية

في الأسئلة ٤٦-٤٨، إذا كان أ ب جـ ~ د ف هـ ، فأوجد قياسات العناصر المجهولة:

٤٦) أَ = ١٦، بَ = ١٢، جَ = ٨، فَ = ٦



$\frac{أ}{د} = \frac{جـ}{هـ} = \frac{ب}{ف}$

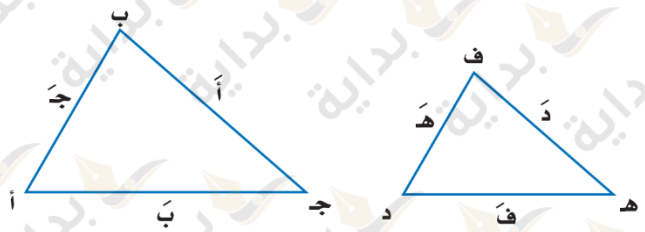
$\frac{١٦}{د} = \frac{١٢}{٦}$

د = $\frac{٦ \times ١٦}{١٢}$ = ٨

$\frac{٨}{هـ} = \frac{١٢}{٦}$

هـ = ٤

٤٧) دَ = ٩، فَ = ٦، هَـ = ٤، بَ = ١٨



$\frac{أ}{د} = \frac{جـ}{هـ} = \frac{ب}{ف}$

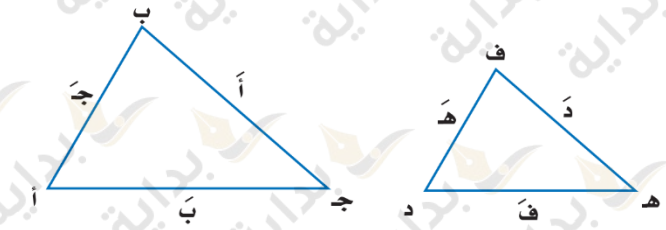
$\frac{أ}{٩} = \frac{١٨}{٦}$

$أ = \frac{٩ \times ١٨}{٦} = ٢٧$

$\frac{٢٧}{٩} = \frac{جـ}{٤}$

جـ = ١٢

٤٨) أَ = ٣٦، بَ = ٢١، هَـ = ١١، فَ = ١٤



$\frac{أ}{د} = \frac{جـ}{هـ} = \frac{ب}{ف}$

$\frac{٣٦}{د} = \frac{جـ}{١١} = \frac{٢١}{١٤}$

$د = \frac{١٤ \times ٣٦}{٢١} = ٢٤$

$جـ = \frac{٢١ \times ١١}{١٤} = ١٦,٥$

استعد للدرس الآتي

مهارة سابقة: إذا اخترت عشوائياً كرة من كيس يحوي ٩ كرات حمراء و ٦ كرات زرقاء و ٥ كرات صفراء، فأوجد كلا من الاحتمالات الآتية:

٤٩) ح (زرقاء)

$ح = \frac{٦}{٢٠} = \frac{٣}{١٠}$

٥٠) ح (حمراء)

$ح = \frac{٩}{٢٠}$

٥١) ح (ليست صفراء)

$ح = \frac{١٥}{٢٠} = \frac{٣}{٤}$

اختبار الفصل التاسع

بسط كل عبارة فيما يأتي:

١) $٥\sqrt{٣٦}$

$٥\sqrt{٣٦} = ٥\sqrt{٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣} = ٥ \times ٢ \times ٣ = ٣٠$

٢) $\frac{٣}{\sqrt{٢} - ١}$

$\frac{٣}{\sqrt{٢} - ١} = \frac{٣}{\sqrt{٢} - ١} \times \frac{\sqrt{٢} + ١}{\sqrt{٢} + ١}$

$= \frac{٣\sqrt{٢} + ٣}{٢ - ١}$

$= ٣\sqrt{٢} - ٣$

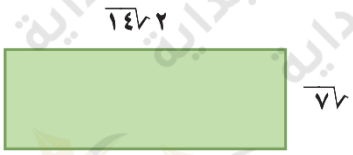
٣) $٢\sqrt[٣]{٧} + \sqrt[٣]{٧}$

$٢\sqrt[٣]{٧} + \sqrt[٣]{٧} = \sqrt[٣]{(٢ + ١)٧} = \sqrt[٣]{٩}$

٤) $\sqrt[٣]{٦}(٥\sqrt{٢})$

$\sqrt[٣]{٦}(٥\sqrt{٢}) = ٣ \times ٥\sqrt{٢ \times ٢ \times ٣} = ١٥ \times \sqrt[٣]{٢} = ٣٠\sqrt[٣]{٢}$

٥) **هندسة:** أوجد مساحة المستطيل.



أ) $٢\sqrt{١٤}$ جـ) ١٤

ب) $٢\sqrt{٩٨}$ د) $٢\sqrt{٧}$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$= \sqrt{٧} \times ٢ \sqrt{١٤} = ٢ \times \sqrt{٢ \times ٧ \times ٧} = ٢ \times ٧ = ٢\sqrt{١٤}$

الاختيار الصحيح: أ) $٢\sqrt{١٤}$

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٦) $\sqrt{١٠س} = ٢٠$

$\sqrt{١٠س} = ٢٠$

$١٠س = ٤٠٠$

$س = ٤٠٠ \div ١٠ = ٤٠$

تحقق:

$\sqrt{١٠ \times ٤٠} = ٢٠$

$\sqrt{٤٠٠} = ٢٠$

$٢٠ = ٢٠$ √

٧) $\sqrt{٤س - ٣} = ٦ - س$

$\sqrt{٤س - ٣} = ٦ - س$

$(\sqrt{٤س - ٣})^{٢} = (٦ - س)^{٢}$

$٤س - ٣ = ٣٦ + س^{٢} - ١٢س$

$٣٦ + س^{٢} - ١٢س - ٤س + ٣ = ٠$

$س^{٢} - ١٦س + ٣٩ = ٠$

$(س - ٣)(س - ١٣) = ٠$

$س = ٣، س = ١٣$

تحقق:

$\sqrt{٤ \times ٣ - ٣} = ٦ - ٣$

$\sqrt{١٢ - ٣} = ٣$

$\sqrt{٩} = ٣$

$٣ = ٣$ √

$\sqrt{٤ \times ١٣ - ٣} = ٦ - ١٣$

$\sqrt{٤٩} = -٧$

$\pm ٧ = -٧$ ×

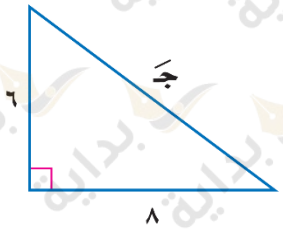
٨) **تغليف:** حجم علبة شوكولاتة أسطوانية ١٦٢ سنتمتراً مكعباً. وتستعمل المعادلة نق = $\sqrt{\frac{ح}{ط\ ع}}$ لإيجاد نصف قطر العلبة، حيث (نق) نصف قطر الأسطوانة، (ع) ارتفاعها، (ح) حجمها. فإذا كان ارتفاع الأسطوانة ٨,٢٥ سنتمترات، فأوجد نصف قطرها.

نق = $\sqrt{\frac{ح}{ط\ ع}}$

نق = $\sqrt{\frac{١٦٢}{ط \times ٨,٢٥}}$ = ٢,٥

أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر:

٩)



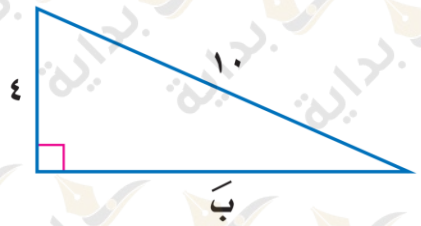
ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}

ج^{٢} = (٨)^{٢} + (٦)^{٢}

ج^{٢} = ٦٤ + ٣٦

ج = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠

١٠)



ج^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢}

١٠^{٢} = (ب)^{٢} + (٤)^{٢}

ب^{٢} = ١٠٠ – ١٦

ب^{٢} = ٨٤

ب = ٩,٢

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١١) (٢ ، ٣)، (٣ ، ٥)

(٢، ٣)، (٣، ٥)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٣ - ٢)^٢ + (٥ - ٣)^٢}$

ف = $\sqrt{١ + ٤}$ = $\sqrt{٥}$

ف = ٢,٢

١٢) (–٣ ، ٤)، (–٢ ، –٣)

(–٣ ، ٤)، (–٢ ، –٣)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(–٢ + ٣)^٢ + (–٣ – ٤)^٢}$

ف = $\sqrt{١ + ٤٩}$ = $\sqrt{٥٠}$

ف = ٧,١

١٣) (–١ ، –١)، (٣ ، ٢)

(–١ ، –١)، (٣ ، ٢)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٣ + ١)^٢ + (٢ + ١)^٢}$

ف = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$

ف = ٥

١٤) (–٤ ، –٦)، (–٧ ، ١)

(–٤ ، –٦)، (–٧ ، ١)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(–٧ + ٤)^٢ + (١ + ٦)^٢}$

ف = $\sqrt{٤٩ + ٩}$ = $\sqrt{٥٨}$

ف = ٧,٦

١٥) **خدمة التوصيل:** يقدم أحد مطاعم الوجبات السريعة خدمة توصيل مجانية إلى أي موقع ضمن دائرة نصف قطرها ١٠ كلم من المطعم. فقطع الشخص الذي سيوصل الوجبات ٣٢ شارعاً شمالاً، ثم ٤٥ شارعاً إلى الشرق لإيصال الطلب، علماً بأن البعد بين كل شارعين في هذه المدينة هو $\frac{١}{٦}$ كلم.

أ) هل الموقع خارج نطاق الخدمة المجانية؟ فسر ذلك.

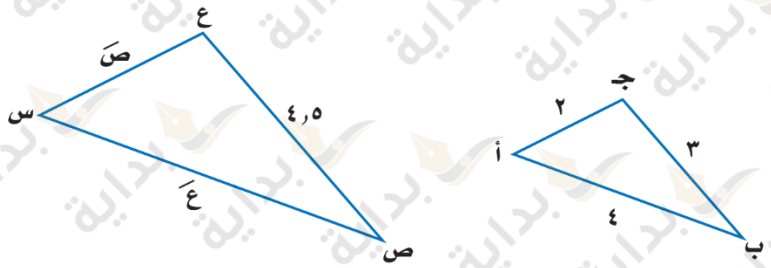
لا، المسافة نحو ٥٥ شارعاً أو نحو ٩ كلم.

ب) صف موقعين للتوصيل يكون البعد بينهما ١٠ كلم تقريباً.

٤٠ شارع إلي الجنوب و ٤٥ شارع إلي الغرب، ٣٨ شارع علي الشمال و ٤٧ شارع إلي الغرب.

---

١٦) إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع ، فأوجد أطوال الأضلاع المجهولة.



$$\frac{٤,٥}{٣} = \frac{ع}{٤} = \frac{ص}{٢}$$

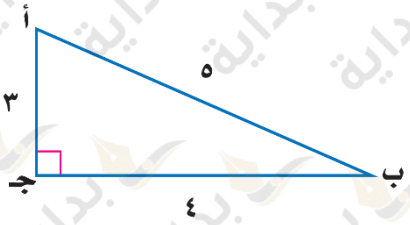
$$ع = \frac{٤ \times ٤,٥}{٣} = ٦$$

$$ص = \frac{٢ \times ٤,٥}{٣} = ٣$$

$$\frac{٢٧}{٩} = \frac{جـ}{٤}$$

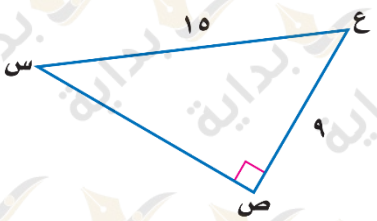
$$جـ = ١٢$$

١٧) أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.



جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، جتا أ = $\frac{٣}{٥}$، ظا أ = $\frac{٤}{٣}$

١٨) أوجد ق ∠ س مقرباً إلى أقرب درجة.



جا س = $\frac{٩}{١٥}$

ق ∠ س = ٣٧°

الاختبار التراكمي

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١) بسط $\frac{١}{٤ + \sqrt{٢}}$

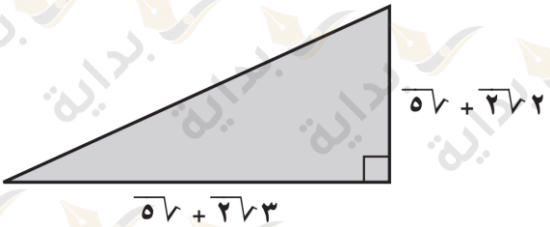
أ) $\frac{٤ + \sqrt{٢}}{١٤}$

ب) $\frac{٢ - \sqrt{٢}}{٧}$

جـ) $\frac{٤ - \sqrt{٢}}{١٤}$

د) $\frac{٢ + \sqrt{٢}}{٧}$

٢) ما مساحة المثلث أدناه؟



أ) $٣\sqrt{٢} + ١٠\sqrt{٥}$

ب) $١٧ + ٥\sqrt{١٠}$

جـ) $١٢\sqrt{٢} + ٨\sqrt{٥}$

د) $٨,٥ + ٢,٥\sqrt{١٠}$

٣) يحسب طول راسم المخروط (ل) المبين بالشكل أدناه بالعلاقة ل = $\sqrt{ع^{٢} + نق^{٢}}$

حيث نق نصف قطر القاعدة، ع ارتفاع المخروط، استعمل هذه العلاقة لإيجاد نق في الشكل أدناه.



أ) ٤,٩

ب) ٦,٣

جـ) ٩,٨

د) ١٠,٢

١٤ = $\sqrt{١٠٠ + نق^{٢}}$

١٩٦ = ١٠٠ + نق^{٢}

نق = ٩,٨

٤) أي الأطوال التالية لا تمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

أ) (١٢، ١٦، ٢٤)

ب) (١٠، ٢٤، ٢٦)

جـ) (٢٤، ٤٥، ٥١)

د) (١٨، ٢٤، ٣٠)

٥) أي مما يأتي لا يُعد عاملاً من عوامل س^{٤} – ١٦؟

أ) س – ٢

ب) س + ٢

جـ) س^{٢} + ٤

د) س + ٤

إرشادات للاختبارات

سؤال ٣: عوّض بقيم ل ، ع في العلاقة، ثم أوجد قيمة نق.

إجابات قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

٦) ما عدد المرات التي تتقاطع فيها الدالة ص= س^{٢} – ٤س + ١٠ مع محور السينات؟

الدالة لا تتقاطع مع محور السينات.

٧) حلل كثيرة الحدود ٢س^{٤} – ٣٢ تحليلاً تاماً.

٢(س^{٤} – ١٦) = ٢(س^{٢} – ٤) (س^{٢} + ٤)

=٢(س – ٢) (س + ٢) (س^{٢} + ٤)

٨) بسط العبارة $\left(\frac{-٢ر^{-٢}هـ^{٥}ن^{٢}}{٥ر^{٥}هـ^{٢}ن^{-٣}}\right)$

$= \left(\frac{-٢ر^{-٧}هـ^{٣}ن^{-١}}{٥}\right)^{-٢}$

$= \frac{٢^{-٢}ر^{١٤}هـ^{-٦}ن^{٢}}{٥^{-٢}}$

$= \frac{٢٥\ ر^{١٤}\ ن^{٢}}{٤\ هـ^{٦}}$

٩) استعمل خاصية التوزيع لتحليل:

٣ س ص^{٢} – ٦ س^{٢} ص ع + ٣ س ص

٣س ص(ص – ٢س ع + ١)

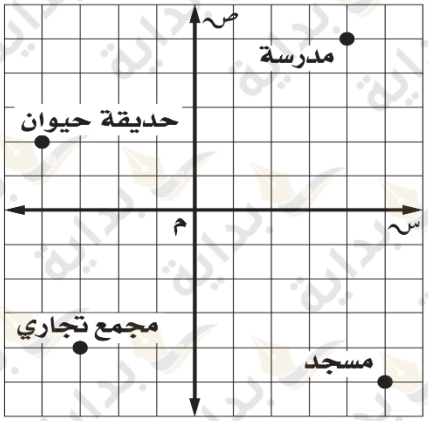
١٠) حلل ثلاثية الحدود: ٢س^{٢} + ٣س –٩

(س + ٩)(٢س – ٣)

إجابات مفصلة

أجب عن السؤال الآتي موضحا خطوات الحل:

١١) حددت هدى مواقع بعض الأماكن في حيها في المستوى الإحداثي المبين أدناه، حيث الوحدة = ٢,٥ ميل



أ) أوجد المسافة الحقيقية بين المدرسة والمسجد مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

المسافة = $\sqrt{١ + ١٠٠} \approx ١٠$

ب) إذا وقع منزل هدى في منتصف المسافة بين المدرسة والمجمع التجاري، فأوجد إحداثيات موقع منزل هدى موضحاً خطوات الحل.

$$\left(\frac{-٣ + ٤}{٢} ، \frac{-٤ + ٥}{٢} \right)$$

$$\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢} \right)$$

الفصل العاشر: الإحصاء والاحتمال

التهيئة للفصل ١٠

إذا اخترت عشوائياً مكعباً واحداً من كيس يحتوي ٦ مكعبات حمراء و ٤ صفراء و ٣ زرقاء ومكعباً واحداً أخضر، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

١) ح (أحمر)

$$ح\ (أحمر) = \frac{٦}{١٤} = \frac{٣}{٧}$$

٢) ح (أزرق)

$$ح\ (أزرق) = \frac{٣}{١٤}$$

٣) ح (ليس أحمر)

$$ح\ (ليس\ أحمر) = \frac{١٤ - ٦}{١٤} = \frac{٨}{١٤} = \frac{٤}{٧}$$

٤) ح (أبيض)

$$ح\ (أبيض) = \frac{٠}{١٤}$$

٥) إذا ألقى سعد مكعب أرقام مرة واحدة، فما احتمال ظهور الرقم ٥؟

$$ح\ (الرقم\ ٥) = \frac{١}{٦}$$

٦) أدار محمود مؤشر قرص دوار مقسم إلى ٨ قطاعات متساوية، بألوان مختلفة أحدها باللون الأزرق. ما احتمال أن يستقر المؤشر على القطاع الأزرق؟

$$ح\ (أزرق) = \frac{١}{٨}$$

أوجد ناتج الضرب واكتبه في أبسط صورة:

٧) $\frac{٥}{٤} \times \frac{٢}{٣}$

$\frac{٥ \times ٢}{٤ \times ٣} = \frac{١٠}{١٢} = \frac{٥}{٦}$

٨) $\frac{٤}{١٩} \times \frac{٧}{٢٠}$

$\frac{٤ \times ٧}{١٩ \times ٢٠} = \frac{٢٨}{٣٨٠} = \frac{٧}{٩٥}$

٩) $\frac{٤}{٣٢} \times \frac{٧}{٣٢}$

$\frac{٤ \times ٧}{٣٢ \times ٣٢} = \frac{٢٨}{١٠٢٤} = \frac{٧}{٢٥٦}$

١٠) $\frac{٥}{١٢} \times \frac{٦}{١١}$

$\frac{٥ \times ٦}{١٢ \times ١١} = \frac{٣٠}{١٣٢} = \frac{٥}{٢٢}$

١١) $\frac{٥٦}{١٠٠} \times \frac{٢٤}{١٠٠}$

$\frac{٥٦ \times ٢٤}{١٠٠ \times ١٠٠} = \frac{١٣٤٤}{١٠٠٠٠} = \frac{٣٣٦}{٢٥٠٠} = \frac{٨٤}{٦٢٥}$

١٢) $\frac{٩}{٣٤} \times \frac{١٧}{٢٧}$

$\frac{٩ \times ١٧}{٣٤ \times ٢٧} = \frac{١٥٣}{٩١٨} = \frac{١}{٦}$

اكتب كل كسر من الكسور الآتية على صورة نسبة مئوية، مقرباً الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة:

١٣) $\frac{١٤}{١٧}$

$\frac{١٤}{١٧}$ = ٠,٨٢٤ ، ٠,٨٢٤ × ١٠٠ = ٨٢,٤٪

١٤) $\frac{٧}{٨}$

$\frac{٧}{٨}$ × ١٠٠ = ٧٨,٥٪

١٥) $\frac{١٠٧}{١٢٥}$

$\frac{١٠٧}{١٢٥}$ × ١٠٠ = ٨٥,٦٪

١٦) $\frac{٦٢٥}{١٠٢٤}$

$\frac{٦٢٥}{١٠٢٤}$ × ١٠٠ = ٦١,٠

١٧) تسوق: زار ٢٠٠٠ متسوق مركزاً تجارياً، ٧٠٠ منهم دون سن ٢١. فما النسبة المئوية لمن هم دون سن ٢١ من بين المتسوقين؟

$\frac{٧٠٠}{٢٠٠٠}$ = ٠,٣٥ ، ٠,٣٥ × ١٠٠ = ٣٥٪

١-١٠ تصميم دراسة مسحية

حدد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف أسلوب جمع البيانات المستعمل في كل مما يلي:

١أ) بحوث: قامت مؤسسة للبحوث العلمية بتحليل ردود أفعال مجموعتين من الفئران تجاه السكر.



العينة: مجموعة الفئران الموجودة في مركز البحوث

المجتمع: جميع الفئران

أسلوب جمع البيانات هو التجربة

١ب) إعادة التدوير: يرغب مجلس بلدي في أن يبدأ بمشروع إعادة تدوير، فأرسل لمجموعة من السكان اختيروا عشوائياً ١٠٠٠ استبانة تضمنت سؤالاً حول المواد التي يرغبون في إعادة تدويرها.

العينة: ١٠٠٠ من سكان المدينة تم اختيارهم عشوائياً

المجتمع: جميع سكان هذا المدينة

أسلوب جمع البيانات هو: أسلوب الدراسة المسحية

حدد في كل مما يأتي إن كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسر إجابتك:

٢أ) مدرسة: سئل كل عاشر طالب يدخل المدرسة عن المادة الدراسية المفضلة لديه.

العينة غير متحيزة، لان هذه العينة تتكون من طلاب اختيروا عشوائياً

٢ب) مطاعم: يريد مدير مطعم أن يتحقق من أن العاملين يخدمون الزبائن بأسلوب جيد، فراقب أحد العاملين مدة ساعة في اليوم.

العينة متحيزة لان المدير راقب عامل واحد فقط من بين العاملين مدة ساعة واحدة فقط

حدد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسر إجابتك:

٣أ) مستشفى: اعتماداً على المعلومات المبينة إلى اليمين، وفي ندوة تعريفية، يتم اختيار طبيب من، كل قسم عشوائياً ليقدم نبذة عن الخدمات التي يوفرها المستشفى في قسمه.

العينة: الأطباء الذين يتم اختيارهم

المجتمع: جميع أطباء المستشفى

هذه العينة طبقية حيث قسم الأطباء إلى مجموعات حسب الأقسام ثم يتم الاختيار

٣ب) طعام: يفحص المدير في أحد المطاعم جودة الفطائر كل ٢٠ دقيقة بدءاً بوقت يحدد عشوائياً.

العينة: الفطائر التي يتم فحصها كل ٢٠ دقيقة

المجتمع: جميع الفطائر التي تعد في المطعم هذه العينة منتظمة حيث يفحص جودة الفطائر في فترات زمنية محددة

٣جـ) احتفالات: تلصق نجمة في أحد الاحتفالات أسفل ثلاثة أطباق، وتقدم هدايا للضيوف الذين تكون هذه الأطباق من نصيبهم.

العينة: الأطباق التي تحمل الملصقات

المجتمع: الأطباق كلها

هذه العينة بسيطة، لأنه لكل فرد الفرصة أن يكون الملصق على طبقه

√ تأكد

مثال١: حدد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف أسلوب جمع البيانات المستعمل:

١) مجلات: يريد القائمون على إعداد مجلة المدرسة اختيار تصميم لغلافها من بين خمسة تصاميم؛ لذا فقد اختير عشرة من طلاب المدرسة عشوائياً للانتقاء من بين هذه التصاميم.

العينة: عشرة طلاب

المجتمع: جميع طلاب المدرسة

الدراسة قائمة على الملاحظة

٢) رياضة: يريد مدير نادٍ رياضي أن يحدد شعاراً للنادي، فسأل ١٠٠ شخص من مشجعي النادي اختيروا عشوائياً عن آرائهم.

العينة: ١٠٠ شخص من مشجعي النادي

المجتمع: مشجعي النادي جميعهم

هذا أسلوب الدراسة المسحية حيث تؤخذ البيانات من استجابة أفراد العينة نحو الشعار.

مثال٢: حدد في كل مما يأتي إن كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسر إجابتك:

٣) هوايات: يقف عدد من الطلاب عند مدخل المدرسة ويسألون كل عاشر طالب يدخلها عن هوايته المفضلة.

غير متحيزة لان لكل طالب الفرصة نفسها لأن يكون الطالب العاشر

٤) تسوق: سئل كل خامس عشر متسوق في متجر ملابس عن نوع الهدية التي يود أن تقدم له.

متحيزة لان هؤلاء الأشخاص موجودون في متجر الملابس، فسيكون الاحتمال الأكبر أن تكون إجابتهم "الملابس"

مثال٣: حدد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، مفسراً إجابتك:

٥) بطاقات مصورة: وزع أخمد بطاقات الصور التي التقطها في مجموعات بحسب المدن التي تمثلها هذه البطاقات، ثم اختار بطاقتين عشوائياً من كل مجموعة.

العينة: أزواج البطاقات التي اختارها من المجموعات

المجتمع: البطاقات كلها التي يملكها احمد

نوع العينة: طبقية حيث صنف احمد الصور إلى مجموعات حسب المدن التي تمثلها قبل اختيار العينة

٦) تلفزة: تود محطة تلفزة أن تحدد أكثر برامجها مشاهدة، فأرسلت استبانة إلي عدة أشخاص اختيروا عشوائياً من أنحاء المملكة كافة.

العينة: الأشخاص الذين استلموا الاستبانة من المحطة

المجتمع: مشاهدو المحطة من كافة أنحاء المملكة

نوع العينة: عشوائية بسيطة، فقد تم اختيار الأشخاص عشوائياً

تدرب وحل المسائل

مثال١: عين فيما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف أسلوب جمع البيانات المستعمل:

٧) صحف: يريد محل بيع صحف أن يعرف عدد النسخ التي يطلبها من كل صحيفة يومية، فأرسل رسائل إلي جميع بيوت أحد الأحياء يسألهم فيها عن الصحيفة التي يطالعونها.

العينة: سكان الحي الذي تم سؤالهم

المجتمع: قراء الصحف كلهم

أسلوب جمع البيانات: الدراسة مسحية

٨) رحلات: سألت وكالة سياحية جميع زبائنها الذين تعاملوا معها خلال السنتين الماضيتين عن الأماكن الأكثر تفضيلاً والأقل تفضيلاً.

العينة: الزبائن جميعهم الذين تعاملوا مع الشركة خلال السنتين الماضيتين

المجتمع: الزبائن السابقون جميعهم

أسلوب جمع البيانات: الدراسة مسحية

مثال٢: حدد في كل مما يأتي إن كانت كل العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسر إجابتك:

٩) مكتبة: سأل أمين مكتبة كل من يستعير كتاباً إن كان يستعمل الحاسب الموجود في المكتبة.

متحيزة لأنه يسأل الأشخاص الذين يستعيرون الكتب فقط

١٠) ملابس: يعطي محل بيع ملابس كل زبون بطاقة يمكنه أن يعيدها بالبريد، يسأله فيها عن نوع الثياب التي يفضلها

غير متحيزة لأن لكل زبون فرصة الاختيار نفسها

مثال٣: حدد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف العينة إلي بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسر إجابتك:

١١) توظيف: صنفت شركة طلبات التوظيف لديها في مجموعات بحسب مناطق سكن مقدميها، ليتم فرزها لاختيار طلبات الشباب.

العينة: طلبات الشباب

المجتمع: جميع طلبات التوظيف المقدمة للشركة

نوع العينة: طبقية حيث أن الطلبات قد قسمت

١٢) تسوق: يقدم مركز تجاري هدية للزبون رقم ٥٠ من بين كل خمسين زبوناً.

العينة: كل زبون رقمه ٥٠، من بين كل ٥٠ زبوناً

المجتمع: زبائن المركز التجاري جميعهم

نوع العينة: منتظمة، لأنه يتم اختيار الزبائن علي فترات منتظمة

١٣) حقائب: أجرت شركة لصناعة الحقائب دراسة علي زبائنها حول تصميم الحقيبة، وذلك عن طريق تسجيل شكل ولون الحقيبة التي يشتريها الزبون.

أ) حدد العينة، والمجتمع الذي اختيرت منه.

العينة: الزبائن الذين خضعوا للدراسة المسحية

المجتمع: الزبائن جميعهم

ب) صنف أسلوب جمع البيانات المستعمل.

الدراسة قائمة علي الملاحظة

جـ) هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسر إجابتك.

غير متحيزة لأن لكل زبون الفرصة نفسها ليكون من بين المختارين في العينة

د) إذا كانت غير متحيزة فصنفها إلي بسيطة أو طبقية أو منتظمة.

منتظمة

١٤) تمثيلات متعددة: سوف تقوم في هذه المسألة بتصميم وتنفيذ دراسة مسحية خاصة بك.

انظر أعمال الطلاب

مسائل مهارات التفكير العليا

١٥) تبرير: قارن بين أوجه شبه وأوجه اختلاف أساليب جمع البيانات الثلاثة التي عرضها الدرس.

هذه الأساليب جميعها تقدم معلومات يمكن التوصل منها إلي استنتاجات حول المجتمع تطرح الدراسة المسحية عدة أسئلة وترصد الدراسة القائمة علي الملاحظة ردود فعل علي أمر أو موقف ما وترصد التجربة نتائج أو رد فعل لموقف مصطنع

١٦) مسألة مفتوحة: صف مثالاً من واقع الحياة لدراسة قائمة علي الملاحظة.

تريد إحدى الشركات المنتجة لألعاب الأطفال أن تقارن بين منتجاتها ومنتجات مشابهة للشركات المنافسة ولهذا الغرض تعد غرفة تضع فيها لعبة من إنتاجها وثلاثة ألعاب من إنتاج شركات منافسة وتلاحظ أي الألعاب يختارها أفراد العينة

١٧) اكتب: فسر أهمية الدراسات المسحية المضبوطة للشركات، وكيف يمكن للشركات استعمالها.

تحتاج الشركات إلي دراسات مسحية دقيقة لاتخاذ القرارات حول طرق تسويق وبيع منتجاتها التي تحقق للشركة اكبر ربح واتخاذ القرارات المناسبة بشأن التسويق والإعلان وطريقة الوصول للجماهير المستهدفة كما تساعدهم علي اتخاذ القرارات بشأن أنواع المنتجات التي يجب تطويرها أو الاستمرار في بيعها.

تدريب على اختبار

١٨) إجابة قصيرة: تزيد فترة الاحتراق الأولي لصاروخ مقدار ٢٨ ثانية على الفترة الثانية. فإذا كانت مدة الاحتراق كاملة ١٥٢ ثانية فكم ثانية مدة الفترة الأولي؟

ن + ن + ٢٨ = ١٥٢، ٢ن = ١٢٤

ن = الفترة الأولي = ٦٢ ثانية

المرحلة الثانية = ن + ٢٨ = ٦٢ + ٢٨ = ٩٠ ثانية

١٩) هندسة: ثني سلك طوله ٤٢ سنتمتراً ليكون مستطيلاً طوله يساوي مثلي عرضه. أوجد بعدي المستطيل.

أ) ٥ سم، ١٢ سم

جـ) ٩ سم، ١٦ سم

ب) ٧ سم، ١٤ سم

د) ١١ سم، ١٨ سم

عرض = س

طول = ٢س

محيط المستطيل = ٤٢ = (الطول + العرض) × ٢

(س + ٢س) × ٢ = ٤٢

٣س × ٢ = ٤٢

٦س = ٤٢

س = ٤٢ ÷ ٦ = ٧

العرض = ٧ سم

الطول = ٢ × ٧ = ١٤ سم

الاختيار الصحيح: ب) ٧ سم، ١٤ سم

مراجعة تراكمية

٢٠) هندسة: إذا كانت مساحة المستطيل المجاور ٦س^{٢} + ١٩س – ٧ وحدة مربعة، فما عرضه؟



٣ س - ١

(-٢س + ٢١س – ٧) ÷ (٣س – ١)

[٢س (٣س – ١) + ٧ (٣س – ١)] ÷ (٣س – ١)

(٢س + ٧) (٣س – ١)

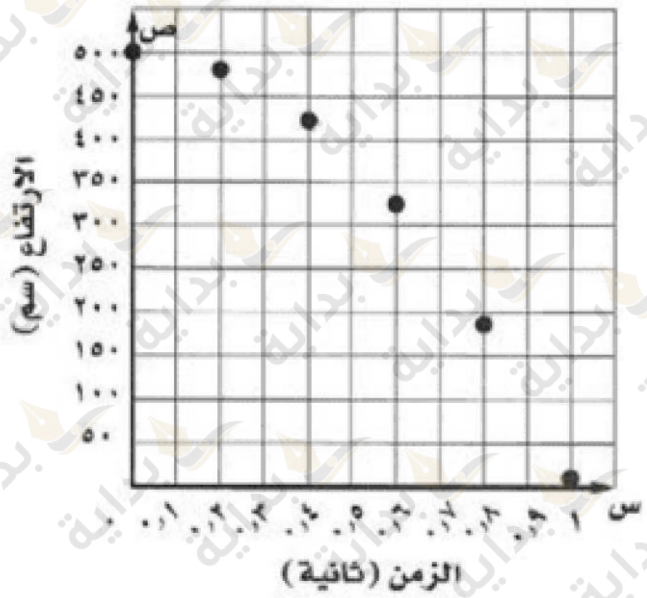
الطول = (٣س – ١)

العرض = (٢س + ٧)

٢١) علوم طبيعية: في تجربة إلقاء جسم من ارتفاع ٥ م، قام الطلاب بتسجيل ارتفاع الجسم عن الأرض، والزمن الذي استغرقه، فكانت كالآتي:

الزمن (ثانية)	٠	٠,٢	٠,٤	٠,٦	٠,٨	١
الارتفاع (سم)	٥٠٠	٤٨٠	٤٢٢	٣٢٤	١٨٦	١٠

مثل العلاقة بين ارتفاع الجسم والزمن بيانياً.



٢-١٠ تحليل نتائج الدراسة المسحية

أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

١أ) **تسوق:** سجل أحد محال بيع الأجهزة الإلكترونية عدد الزبائن في كل ساعة عمل في أحد الأيام كما هو موضح في الجدول المجاور.

عدد الزبائن			
٨٦	٧٩	٧١	٨٦
٨٦	٨٨	٣٢	٧٩
٧٠	٧١	٦٩	٨٢
٨٦	٨٥	٨١	٨٦

المنوال، تحتوي مجموعة البيانات أعداداً متكررة

المنوال = ٨٦

١ب) **كتب:** في دراسة مسحية لمصادر أبحاث عدد من طلاب الصف الثالث المتوسط في إحدى المناطق التعليمية كانت الاستجابات علي النحو الآتي: من المعلم: ٤٢٠؛ من مكتبة المدرسة: ١٣٢٠؛ من المكتبة العامة: ١٠٢٠؛ من متاجر الكتب: ١٠٢٠؛ من المكتبة المنزلية: ٧٢٠؛ من الإنترنت: ٥٤٠؛ من الأصدقاء: ٥٤٠.

لا يمكن حساب مقياس نزعة مركزية لها، لأن قيم البيانات تمثل أشياء مختلفة

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
معقولة جداً	٥٦
معقولة	١٨٥
معقولة نوعاً ما	١٣٢
غير معقولة	٦٩

غير معقولة أبداً	٥٨

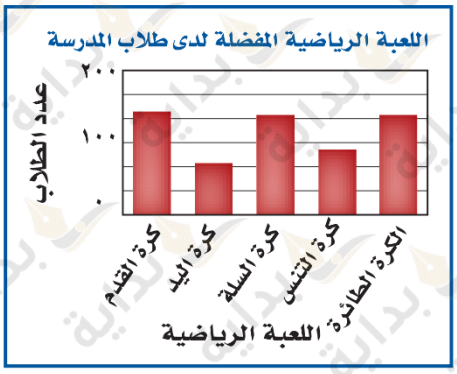
٢) مدينة ألعاب: طلب من كل عاشر زائر من بين ٥٠٠٠ زائر لمدينة ألعاب في أحد الأيام أن يجيب عن سؤال الاستبانة الآتي:

السؤال: هل ترى أن أسعار بطاقات الدخول لمدينة الألعاب معقولة؟

الاستنتاج: أسعار التذاكر معقولة، ويجب أن تبقى كما هي.

إن حجم العينة مناسب ولكنها قد تكون متحيزة لأن الأشخاص الذين استجابوا لهذا المسح كانوا في مدينة الألعاب أي أنهم مستعدون وراغبون في دفع ثمن بطاقة الدخول.

٣) يوضح التمثيل بالأعمدة المجاور نتائج استطلاع أجراه مدرس التربية الرياضية لمعرفة اللعبة الرياضية التي يفضلها طلاب المدرسة.



السؤال: ما اللعبة الرياضية التي يفضلها؟

الاستنتاج: كرة اليد هي اللعبة الأقل شيوعاً بين الألعاب الرياضية المفضلة.

حدد ما إذا كان التمثيل بالأعمدة يقدم صورة صادقة أم لا لنتائج الدراسة المسحية. وفسر إجابتك.

التمثيل والاستنتاج صحيحين

بالنظر إلى التمثيل البياني واضح أن كرة اليد تمثل ٥٠ طالب بينما كل الألعاب الأخرى أكثر من ٥٠.

√ تأكد

مثال١: أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

١) إعادة تدوير: ترغب شركة في إعادة تدوير الأوراق الزائدة، فجمعتها في رزم ارتفاع الواحدة منها ٥٠ سم، وقد أحصي خالد عدد الرزم في نهاية كل شهر من السنة فكانت: ١٥، ١٢، ١٤، ١٥، ١٨، ١٥، ١٣، ١٤، ١٣، ١٢، ١٥، ١٨.

المنوال، لأن مجموعة البيانات تتضمن قيمة متكررة

المنوال = ١٥

٢) سياحة: تريد إحدى وكالات السياحة التي تعمل عبر الإنترنت أن تنظم رحلات للعائلات، فأجرت مسحاً حول المكان المفضل لها لقضاء الإجازة. وقد كانت الخمسة الأولي هي: الشواطئ ٢٥٪؛ المتنزهات ٢٢٪؛ البر ٢١٪؛ المواقع الأثرية التاريخية ١٧٪؛ الجبال ١٥٪

لا يمكن حساب مقياس للنزعة المركزية لأن النسب المئوية المعطاة تمثل أشياء مختلفة

مثال٢: حدد صحة المعلومات والاستنتاجات لتقرير كل دراسة مسحية فيما يأتي:

٣) تلفاز: تريد محطة تليفزيونية أن تغير نشاطها، فأرسلت ١٠٠٠ استبانة بالبريد إلى أشخاص تم اختيارهم عشوائياً تقع ضمن منطقة بثها وتلقت ٧٥٠ رداً.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
رياضية	٢٦٪
دينية	٣٢٪
إخبارية	٣٩٪
تعليمية	٣٪

السؤال: ما نوع البرامج التليفزيونية التي تفضلها؟

الاستنتاج: يجب أن تتحول المحطة إلى محطة إخبارية.

غير صحيح بسبب عدم ذكر نوع المحطة التي نفذت الدراسة يحتمل أن يكون الأشخاص الذين استجابوا للدراسة هم من الأشخاص الذين يشاهدون تلك المحطة أو المحطات المشابهة.

٤) رياضة: استطلعت إدارة التعليم في إحدى المناطق آراء ٣٥٨٥ طالباً عن رياضتهم المفضلة.

السؤال: ما الرياضة التي تفضل المشاركة فيها؟

النتائج: كرة الطائرة ٢٧١، كرة القدم ٥٧٠، كرة السلة ٤٣٦، التايكوندو ٢٧٩، المصارعة ١٩٧، جري التتابع ٢٠٩، السباحة ٣١٩، الجمباز ١٩٧، كرة اليد ٢٨٩، التنس ٢٠٢، رياضات أخرى ٦١٦.

الاستنتاج: كرة القدم هي الرياضة التي يفضل الطلاب المشاركة فيها.

ليس هناك دليل علي التحيز في هذه البيانات وكذلك يبدو أن المصدر موثوق، والبيانات تؤيد الاستنتاج.

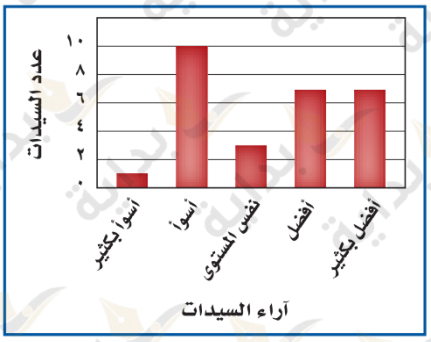
كذلك يبدو أن كلا ممن الدراسة المسحية والاستنتاج صحيحين.

مثال٣: حدد إذا كان التمثيل بالأعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الدراسة المسحية.

٥) مسحوق غسيل: وزعت عينات من مسحوق غسيل على مجموعة من السيدات لمقارنته بمسحوق الغسيل الذي يستخدمنه.

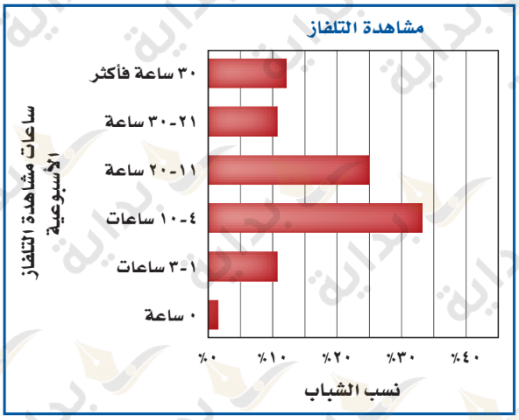
السؤال: ما رأيك باستبدال مسحوقك القديم بالمسحوق الجديد؟

الاستنتاج: لن تستبدل معظم السيدات مسحوق الغسيل الذي يقمن باستعماله.



يبدو للوهلة الأولى أن رأي معظم السيدات أن العينة أسوأ، ومع ذلك فإن فترات التدريج غير ثابتة. وإذا ألقينا نظرة فاحصة نجد أن نحو ١٤ سيدة ترى أن عينة المسحوق أفضل أو أفضل بكثير وأن من يرون أنه أسوأ ١٠ سيدات فقط. لذا فإن التمثيل البياني المعروض مضلل، والاستنتاج غير صادق.

٦) **تلفاز:** أجرت شبكة إعلامية دراسة حول عدد الساعات التي يقضيها الشباب في مشاهدة التلفاز في الأسبوع الواحد، وعرضت النتائج بالتمثيل البياني المجاور.



ليس هناك استنتاج لنري إن كانت البيانات تؤيده أم لا، لذلك لايمكن الحكم علي صحة طريقة العرض.

تدرب وحل المسائل

مثال١: أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

٧) **كتب:** أجرى متجر كتب مسحا لمعرفة موضوع الكتب المفضلة لزبائنه، وكانت النتائج على النحو الآتي: الثقافية ٢١٪، القصص ١٩٪، المغامرات ١٢٪، العلمية ١٧٪، الدينية ١٨٪، التاريخية ١٣٪.

لا يمكن حساب مقياس للنزعة المركزية لأن قيم البيانات تمثل أشياء مختلفة.

٨) **أنشطة صيفية:** أُجريت دراسة حول الأنشطة الصيفية المفضلة التي يمارسها الطلاب، وعُرضت نتائجها في الجدول المجاور.

الأنشطة الصيفية			
السباحة	٦٥٠	المخيمات	٤٣٢
الرحلات	٨٨٥	المطالعة	٢٨١
الرياضة	١١٢٣	أخري	٥١٤

لا يمكن حساب مقياس للنزعة المركزية لأن قيم البيانات تمثل أشياء مختلفة.

مثال٢: حدد صحة كل من المعلومات والاستنتاجات لتقرير كل دراسة مسحية فيما يأتي:

٩) قيادة: أجرت صحيفة استطلاعا شمل ٧٥٠ شخصاً من سكان إحدى المدن.

السؤال: هل تتحدث عبر الهاتف الجوال في أثناء قيادة السيارة؟

النتائج: لا ٢٠,٧٪؛ بضع مرات ٤٨,٧٪؛ على الأكثر ٥,١٪؛ دائماً ٢٥,٥٪

الاستنتاج: سائقو هذه المدينة غير حريصين.

البيانات لا تؤيد والاستنتاج غير صحيح.

١٠) قراءة: أجرت مجلة نسائية استطلاعاً طلبت فيه من الطلاب والطالبات ذكر سبب القراءة.

النتائج: لاستمتاع ٢٥٪، لتعلم أشياء جديدة ٢٤٪، لتلبية طلبات المدرسة ١٨٪، بسبب الملل وعدم وجود شيء آخر ١٧٪، لأن أصدقاءهم يحبون القراءة ويتحدثون عن الكتب ١٦٪.

الاستنتاج: يقرأ الطلاب والطالبات الكتب لأسباب متعددة.

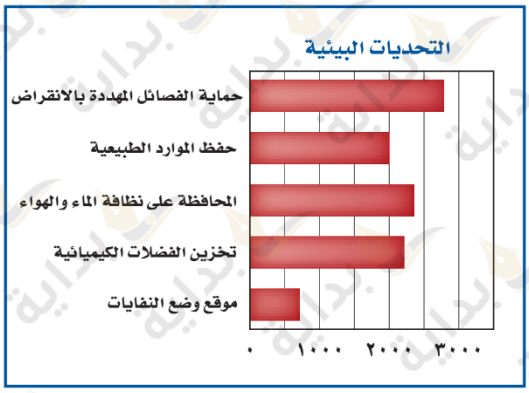
لان المصدر مجلة نسائية فقد يكون معظم العينة من الفتيات وعندئذ لا يمكن التوصل إلى استنتاج غير متحيز بالنسبة للشباب بصورة عامة

حدد ما إذا كانت طريقة تمثيل النتائج تعطي صورة صحيحة حول نتائج كل من الدراسات المسحية الآتية، وفسر إجابتك.

١١) بيئة: أجرت مجلة بيئية دراسة مسحية شملت ١٠٠٠ شخص تم اختيارهم عشوائياً.

السؤال: ما التحدي البيئي الأكبر في القرن الحادي والعشرين؟

الاستنتاج: إيجاد مكان لوضع النفايات أمر غير مهم.



الاستنتاج واسع جدا بالنسبة للبيانات المقدمة

١٢) **تدريبات السلامة:** يعقد الهلال الأحمر دورات في السلامة مخصصة لطلاب المدارس المتوسطة والثانوية. سجل ٧٤٪ من المشاركين في برنامج السلامة البحرية، ١٠٪ في برنامج رعاية الأطفال، ١٦٪ في برنامج الإسعافات الأولية.

السؤال: هل يجب أن يستمر الهلال الأحمر في طرح برنامج رعاية الأطفال؟ استعمل البيانات في كتابة استنتاج عن دورات السلامة.

لا يمكن أن يستمر برنامج رعاية الأطفال لأن نسبة المشتركين فيه ضعيفة جدا.

---

١٣) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة طرقة أخرى لتحليل البيانات.

أ) حسياً: تجد أدناه توزيعاً لقطع نقود في مجموعات غير متساوية. ضع قطع نقود على الطاولة في مجموعات مماثلة للصورة.



٢ ٣ ٣ ٤ ٥ ٦ ٦ ٨ ٨

متروك للطالب

ب) بيانياً: مثل هذه المجموعات بالنقاط، واكتب فوق كل عمود من النقاط الفرق بين عدد القطع في العمود والمتوسط الحسابي لعدد القطع في المجموعة الواحدة، ثم أوجد القيمة المطلقة لهذه الفروق.

بيانياً:



ج) تحليلياً: حرك القطع لتجعل المجموعات متساوية، بحيث تحرك قطعة واحدة كل مرة، وتحرك القطعة مرة واحدة فقط، وعد الحركات. فيوضح ذلك مدى اختلاف المجموعات في الوضع الأصلي عنها في الوضع الجديد.

تقريبا ٨ حركات

د) تحليلياً: أوجد متوسط القيم المطلقة، وصف ما تمثله هذه القيمة، ووضح معناها في هذه الحالة.

متوسط الفرق المطلق للقيم عن المتوسط الحسابي (٥) = ١,٧٨

مسائل مهارات التفكير العليا

١٤) تحد: أوجد مجموعة من الأعداد يكون المتوسط الحسابي لها أكبر من الوسيط.

٤، ٥، ٩

١٥) مسألة مفتوحة: صف دراسة مسحية ترغب في أن تجريها. وحدد العينة والمجتمع والأسئلة وكيفية عرض النتائج.

ارغب في إجراء دراسة مسحية حول الاحتفال الختامي للمدرسة سأختار لذلك عينة عشوائية طبقية مكونة من ٥٠ طالبا من فصول الصف الأول المتوسط و٥٩ طالبا من فصول الصف الثاني متوسط و٥٠طالبا من فصول الصف الثالث المتوسط، واطرح عدة أسئلة على عينة الطلبة لتقويم اتجاهاتهم نحو الاحتفال الختامي للمدرسة واعرض النتائج باستعمال التمثيل بالأعمدة حيث يكون لكل سؤال لوحة أعمدة خاصة به.

١٦) اكتب: اشرح لماذا قد تعرض إحدى الشركات نتائج الدراسة المسحية بصورة غير دقيقة. وأعط مثالاً للطريقة التي يمكن أن يتم بها ذلك.

قد ترغب بعض الشركات في خداع الجمهور بإظهار أن منتجهم هو الأفضل وذلك من خلال عرض تمثيلات مضللة وقد يتم ذلك من خلال تمثيل البيانات بالأعمدة باستعمال تدريج كبير وترتيب البيانات فيه من الأصغر إلى الأكبر.

تدريب على اختبار

١٧) إجابة قصيرة: بيعت ١٠٠٠ تذكرة في مهرجان. ثمن التذكرة ١٥ ريالاً للكبار، و٨ ريالات للأطفال، فكانت حصيلة المبيعات ١٢٩٠٠ ريال، فما عدد تذاكر الأطفال المبيعة؟

بفرض أن س تذكرة الكبار، ص تذكرة الأطفال

س + ص = ١٠٠٠

المعادلة الأولى س = ١٠٠٠ – ص

١٥س + ٨ص = ١٢٩٠٠ من

١٥(١٠٠٠ – ص) + ٨ص = ١٢٩٠٠

١٥٠٠٠ – ١٥ص + ٨ص = ١٢٩٠٠

١٥٠٠٠ – ٧ص = ١٢٩٠٠

إذن ٧ص = ١٥٠٠٠ – ١٢٩٠٠ = ٢١٠٠

ص = ٣٠٠

إذن عدد تذاكر الأطفال المبيعة = ٣٠٠ تذكرة

١٨) إذا كانت ٤,٥ كيلومترات تعادل ٢,٨ ميل تقريباً، فكم ميلاً تقريباً يساوي ٦,١ كيلومترات؟

أ) ٣,٢ أميال

جـ) ٣,٨ أميال

ب) ٣,٦ أميال

د) ٤,٠ أميال

٤,٥ س = ٢,٨ × ٦,١

س = ٣,٨

الاختيار الصحيح: جـ) ٣,٨ أميال

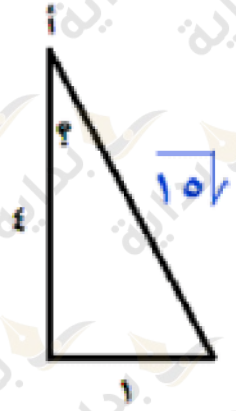
مراجعة تراكمية

١٩) كتب: للتحقق من جودة الكتب التي تتم طباعتها يتم فحص الكتاب الخمسين من كل خمسين كتاباً تطبع في المطبعة. حدد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، وهل هي متحيزة أم غير متحيزة؟ وإذا كانت غير متحيزة فصنفها إلى بسيطة او طبقية أو منتظمة

غير متحيزة ومنتظمة

في السؤالين ٢٠–٢١ افترض أن < أ زاوية حادة في المثلث القائم أ ب جـ، ثم أوجد:

٢٠) جتا أ، ظا أ إذا كان جا أ = $\frac{١}{٤}$



جا أ = $\frac{١}{٤}$ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

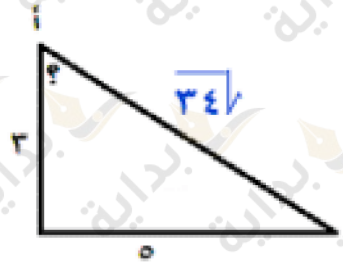
إذن المجاور = $\sqrt{٢٤ - ٢١}$ = $\sqrt{١٦ - ١}$ = $\sqrt{١٥}$

جتا أ = $\frac{\sqrt{١٥}}{٤}$

ظا أ = $\frac{١}{\sqrt{١٥}}$

٢١) جا أ، جتا أ إذا كان ظا أ = $\frac{٥}{٣}$

ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$



إذن الوتر = $\sqrt{٢٥ + ٢٣}$ = $\sqrt{٩ + ٢٥}$ = $\sqrt{٣٤}$

جتا أ = $\frac{٣}{\sqrt{٣٤}}$

جا أ = $\frac{٥}{\sqrt{٣٤}}$

استعد للدرس اللاحق

أوجد الوسط الحسابي، والوسيط والمنوال لكل مجموعة بياناتٍ فيما يأتي، قرب إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ إذا لزم:

٢٢) ١٠٠ ،١٠٥، ١٠٠، ١٠٥، ١٠٠، ١١٠

١٠٠، ١٠٠، ١٠٠، ١٠٥، ١٠٥، ١١٠

الوسط الحسابي = $\frac{١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٥ + ١٠٥ + ١١٠}{٦} \approx ١٠٣,٣$

الوسيط: $\frac{١٠٠ + ١٠٥}{٢} = ١٠٢,٥$

المنوال: ١٠٠

٢٣) ١٢، ٢٥، ١٤، ٣٥، ٤٢، ٢٧، ٣١، ٤٨

١٢، ١٤، ٢٥، ٢٧، ٣١، ٣٥، ٤٢، ٤٨

الوسط الحسابي = $\frac{١٢ + ٤١ + ٢٥ + ٢٧ + ٣١ + ٣٥ + ٤٢ + ٤٨}{٨} \approx ٢٩,٣$

الوسيط: $\frac{٢٧ + ٣١}{٢} = ٢٩$

المنوال: لا يوجد

٢٤) ٥٥، ٦٥، ٤٥، ٣٥، ٦٥، ٢٥، ٨٥

٢٥، ٣٥، ٤٥، ٥٥، ٦٥، ٦٥، ٨٥

الوسط الحسابي = $\frac{٢٥ + ٣٥ + ٤٥ + ٥٥ + ٦٥ + ٦٥ + ٨٥}{٧} \approx ٣٥,٦$

الوسيط: ٥٥

المنوال: ٦٥

٣-١٠ إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

١) **أغذية:** يتم اختيار عبوة عشوائياً من خط إنتاج أحد الأغذية المحفوظة، ثم يؤخذ بدءًا من تلك العبوة، العبوات التي أرقامها من مضاعفات ٥٠، وتدون كتلتها ويحسب المنوال لعينه كتل الإنتاج اليومي.

العينة: العبوة التي تؤخذ عن خط الإنتاج ويتم وزنها

المجتمع: جميع العبوات التي ينتجها المصنع

إحصائي العينة: منوال عينة أوزان الإنتاج اليومي.

معلمة المجتمع: منوال أوزان جميع عبوات الإنتاج.

---

٢) **تسويق:** رصد موزع عدد صناديق العصير اليومية التي بيعت فكانت: ١٢، ٣٢، ٣٦، ٤١، ٢٢، ٤٧، ٥١، ٣٣، ٣٧، ٤٩. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات.

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{١٢ + ٣٢ + ٣٦ + ٤١ + ٢٢ + ٤٧ + ٥١ + ٣٣ + ٣٧ + ٤٩}{١٠}$$

$$= \frac{٣٦٠}{١٠} = ٣٦$$

مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي:

$$|١٢ - ٣٦| + |٣٢ - ٣٦| + |٣٦ - ٣٦| + |٤١ - ٣٦| + |٢٢ - ٣٦| + |٤٧ - ٣٦| + |٥١ - ٣٦| + |٣٣ - ٣٦| + |٣٧ - ٣٦| + |٤٩ - ٣٦|$$

$$٢٤ + ٤ + ٠ + ٥ + ١٤ + ١١ + ١٥ + ٣ + ١ + ١٣ = ٩٠ \div ١٠ = ٩$$

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لكل من مجموعتي البيانات الآتيتين:

٣أ) ٦، ١٠، ١٥، ١١، ٨

المتوسط الحسابي س = $\frac{٦ + ١٠ + ١٥ + ١١ + ٨}{٥}$ = ١٠

التباين ع^{٢} = $\frac{(٦ - ١٠)^{٢} + (١٠ - ١٠)^{٢} + (١٥ - ١٠)^{٢} + (١١ - ١٠)^{٢} + (٨ - ١٠)^{٢}}{٥}$

= $\frac{٤٦}{٥}$ = ٩,٢

الانحراف المعياري ع = $\sqrt{٩,٢}$ = ٣,٠

٣ب) ٩٢، ٨٤، ٧١، ٨٣، ١٠٠

المتوسط الحسابي س = $\frac{٩٢ + ٨٤ + ٧١ + ٨٣ + ١٠٠}{٥}$ = $\frac{٤٣٠}{٥}$ = ٨٦

$\frac{(٩٢ - ٨٦)^{٢} + (٨٤ - ٨٦)^{٢} + (٧١ - ٨٦)^{٢} + (٨٣ - ٨٦)^{٢} + (١٠٠ - ٨٦)^{٢}}{٥}$

التباين ع^{٢} = ٩٤

الانحراف المعياري ع = $\sqrt{٩٤}$ = ٩,٧

---

٤) رصد خالد استهلاكه من السعرات خلال أسبوع آخر فكان:

١٩٥٠، ٢٠٠٠، ٢١٠٠، ٢٠٠٠، ١٩٠٠، ٢١٠٠، ٢٠٠٠

أوجد الانحراف المعياري لاستهلاكه من السعرات في هذا الأسبوع.

الانحراف المعياري لاستهلاكه من السعرات = ٦٧,٨ تقريبا

√ تأكد

مثال١: عين العينة والمجتمع في كل من الموقفين الآتيين، ثم صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع:

١) تعليم: اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠٣ طلاب من الصف الثالث الثانوي في المدارس الثانوية في جدة، وسئلوا إن كانوا راغبين في دراسة الهندسة بالجامعة، ثم حسبت النسبة المئوية للذين كانت إجابتهم "نعم".

العينة: ١٠٠٣ من طلبة الصف الثالث الثانوي في المدارس الثانوية في جدة

المجتمع: طلبة الصف الثالث الثانوي جميعهم في المدارس الثانوية في جدة

إحصائي العينة: النسبة المئوية للطلبة الراغبين في دراسية الهندسة بالجامعة من طلبة العينة

معلمة المجتمع: النسبة المئوية للطلبة الراغبين في دراسة الهندسة بالجامعة من كل طالب في الصف الثالث الثانوي في مدارس جدة الثانوية

٢) كتب: أجريت دراسة شملت عينة مكونة من ١٠٠٠ طالب في الجامعات السعودية حول المبالغ التي ينفقونها في شراء الكتب الإضافية في كل عام، ثم حسب المتوسط الحسابي لهذه المبالغ.

العينة: ١٠٠٠ طالب من الجامعات السعودية

المجتمع: طلبة الجامعات السعودية جميعهم

إحصائي العينة: المتوسط الحسابي للمبالغ التي ينفقها طلبة العينة في شراء الكتب الإضافية

معلمة المجتمع: المتوسط الحسابي للمبالغ التي ينفقها طلبة الجامعات السعودية جميعهم في شراء الكتب الإضافية

مثال٢: ٣) عمل إضافي: أحصى مدير أحد المصانع عدد ساعات العمل الإضافي لعمال أحد الأقسام في الأسبوع فكانت: ١٠، ١٢، ٠، ٦، ٩، ١٥، ١٢، ١٠، ١١، ٢٠.

أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{١٠ + ١٢ + ٠ + ٦ + ٩ + ١٥ + ١٢ + ١٠ + ١١ + ٢٠}{١٠}$$

$$= \frac{١٠٥}{١٠} = ١٠,٥$$

$$[\,|١٠ - ١٠,٥| + |١٢ - ١٠,٥| + |٠ - ١٠,٥| + |٦ - ١٠,٥| + |٩ - ١٠,٥| + |١٥ - ١٠,٥| + |١٢ - ١٠,٥| + |١٠ - ١٠,٥| + |١١ - ١٠,٥| + |٢٠ - ١٠,٥|\,]$$

$$\div ١٠ = ٣,٥$$

الانحراف المتوسط = ٣,٥

مثال٣: أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لكل من مجموعتي البيانات الآتيتين:

٤) ٣، ٤، ١٨، ٢١، ١٧

$$\text{المتوسط الحسابي س} = \frac{٣ + ٤ + ١٨ + ٢١ + ١٧}{٥} = ١٢,٦$$

$$\text{التباين} = \frac{(٣ - ١٢,٦)^{٢} + (٤ - ١٢,٦)^{٢} + (١٨ - ١٢,٦)^{٢} + (٢١ - ١٢,٦)^{٢} + (١٧ - ١٢,٦)^{٢}}{٥}$$

$$= ٥٧$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{٥٧} = ٧,٦$$

٥) ١٢، ١٥، ١٨، ٢١

المتوسط الحسابي = $\frac{١٢ + ١٥ + ١٨ + ٢١}{٤}$ = ١٦,٥

التباين = $\frac{(١٢ - ١٦,٥)^{٢} + (١٥ - ١٦,٥)^{٢} + (١٨ - ١٦,٥)^{٢} + (٢١ - ١٦,٥)^{٢}}{٤}$

= ١١,٣

الانحراف المعياري = $\sqrt{١١,٣}$ = ٣,٤

مثال٤: ٦) **إلكترونيات:** أجرى محمود مسحاً لعدد الأجهزة الإلكترونية الموجودة في منزل كل واحد من زملائه في الفصل فكانت إجاباتهم: ٣، ١٠، ١١، ١٠، ٩، ١١، ١٢، ٨، ١١، ٨، ٧، ١٢، ١١، ، ١١، ٥. أوجد الانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لمجموعة البيانات.

المتوسط الحسابي =

$\frac{٣ + ١٠ + ١١ + ٩ + ١١ + ١٢ + ٨ + ١١ + ٨ + ٧ + ١٢ + ١١ + ١١ + ٥}{١٥}$

= ٩,٣

التباين = $\frac{(١٢ - ١٦,٥)^{٢} + (١٥ - ١٦,٥)^{٢} + (١٨ - ١٦,٥)^{٢} + (٢١ - ١٦,٥)^{٢}}{٤}$

= ٦,٤

الانحراف المعياري = $\sqrt{٦,٤}$ = ٢,٥

تدرب وحل المسائل

مثال ١: عين العينة والمجتمع في كل من الموقفين الآتيتين، ثم صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع:

٧) اختيرت عينة عشوائية طبقية من طلاب المدارس الثانوية في منطقة عسير التعليمية، وسئل أفراد العينة عن الوقت الذي يقضيه كل منهم في الأنشطة المنهجية الإضافية خلال الأسبوع.

العينة: عينة عشوائية طبقية من طلاب المدارس الثانوية في منطقة عسير التعليمية

المجتمع: طلاب المدارس الثانوية في منطقة عسير جميعهم

إحصائي العينة: الوقت الذي يقضيه أفراد العينة في الأنشطة المنهجية الإضافية

معلمة المجتمع: الوقت الذي يقضيه كل طلبة المدارس الثانوية في منطقة عسير في الأنشطة المنهجية الإضافية

٨) اختيرت عينة عشوائية طبقية مكونة من ٢٥٠٠ طالب من طلاب المدارس المتوسطة في المملكة. وسئل أفراد العينة عن المبلغ الذي ينفقه كل منهم في الشهر.

العينة: عينة عشوائية طبقية مكونة من ٢٥٠٠ طالب من طلاب المدارس الثانوية في المملكة

المجتمع: طلاب المدارس الثانوية في المملكة جميعهم

إحصائي العينة: المبلغ الذي ينفقه كل واحد من أفراد العينة في الشهر

معلمة المجتمع: المبلغ الذي ينفقه كل طالب من طلبة المدارس الثانوية في المملكة في الشهر

مثال٢ : أوجد الانحراف المتوسط مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لكل من مجموعتي البيانات الآتيتين:

٩) أقراص مدمجة: طلب مدرس إلى طلاب الصف أن يحددوا عدد الأقراص المدمجة التي يمتلكونها فكانت النتائج كما في الجدول المجاور.

عدد الأقراص المدمجة					
٢٦	٣٩	٥	٨٢	١٢	١٤
٠	٣	١٥	١٩	٤١	٦
٢	٠	١١	١	١٩	٢٩

المتوسط الحسابي = [٢٦ + ٠ + ٢ + ٣٩ + ٣ + ٠ + ٥ + ١٥ + ١١ + ٨٢ + ١٩ + ١ + ١٢ + ٤١ + ١٩ + ١٤ + ٦ + ٢٩] ÷ ١٨ = ١٨

|[٢٦ – ١٨| + |٠ – ١٨| + |٢ – ١٨| + |٣٩ – ١٨| + |٣ – ١٨| + |٠ – ١٨|

+ |٠ – ١٨| + |٥ – ١٨| + |١٥ – ١٨| + |١١ – ١٨| + |٨٢ – ١٨| + |١٩ – ١٨|

+ |١ – ١٨| + |١٢ – ١٨| + |٤١ – ١٨| + |١٩ – ١٨| + |١٤ – ١٨| + |٦ – ١٨|

+ |٢٩ – ١٨|] ÷ ١٨ = ٢٥٨

الانحراف المتوسط = ٢٥٨ ÷ ١٨ = ١٤,٣

١٠) مبيعات: رصد صاحب محل عدد الأكياس التي تباع في كل ساعة من أحد أنواع الحلوى، فكانت: ١٦، ٢٤، ١٥، ١٧، ٢٢، ١٦، ١٨، ٢٤، ١٧، ١٣، ٢٥، ٢١

المتوسط الحسابي = [١٦ + ٢٤ + ١٥ + ١٧ + ٢٢ + ١٦ + ١٨ + ٢٤ + ١٧ + ١٣ + ٢٥ + ٢١] ÷ ١٢ = ١٩

|[١٦ – ١٩| + |٢٤ – ١٩| + |١٥ – ١٩| + |١٧ – ١٩| + |٢٢ – ١٩| + |١٦ – ١٩| +

|١٨ – ١٩| + |٢٤ – ١٩| + |١٧ – ١٩| + |١٣ – ١٩| + |٢٥ – ١٩| + |٢١ – ١٩|

÷ ١٢ = ٤٢

الانحراف المتوسط = ٤٢ ÷ ١٩ = ٣,٥

مثال٣: أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري إلى أقرب جزء من عشرة لكل من مجموعتي البيانات الآتيتين:

١١) ٣، ٨، ٧، ١٢

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{٣ + ٨ + ٧ + ١٢}{٤} = \frac{٣٠}{٤} = ٧,٥$$

$$\text{التباين} = \frac{(٣ - ٧,٥)^{٢} + (٨ - ٧,٥)^{٢} + (٧ - ٧,٥)^{٢} + (١٢ - ٧,٥)^{٢}}{٤} = ١٠,٣$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{١٠,٣} = ٣,٢$$

١٢) ٧٦، ٧٨، ٨٣، ٧٤، ٧٥

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{٧٦ + ٧٨ + ٨٣ + ٧٤ + ٧٥}{٥} = ٧٧,٢$$

$$\text{التباين} = \frac{(٧٦ - ٧٧,٢)^{٢} + (٧٨ - ٧٧,٢)^{٢} + (٨٣ - ٧٧,٢)^{٢} + (٧٤ - ٧٧,٢)^{٢} + (٧٥ - ٧٧,٢)^{٢}}{٥}$$

$$= ١٠,٢$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{١٠,٢} = ٣,٢$$

مثال٤: ١٣) **مزاد:** يرسم نجيب لوحات تحمل مناظر طبيعية ويعرضها للبيع في المزاد. فكان ثمن بيع بعض هذه اللوحات: ٣٢٥ ريالاً، ٤٥٠ ريالاً، ٥٠٠ ريالٍ، ٥٧٥ ريالاً، ٢٢٥ ريالاً، ٨٥٠ ريالاً، ٦٠٠ ريالٍ، ٣٥٠ ريالاً، ٤٥٠ ريالاً، ٥٠٠ ريالٍ. أوجد الانحراف المعياري لهذه البيانات إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{٣٢٥ + ٤٥٠ + ٥٠٠ + ٥٧٥ + ٢٢٥ + ٨٥٠ + ٦٠٠ + ٣٥٠ + ٤٥٠ + ٥٠٠}{١٠}$$

$$= ٤٨٢,٥$$

التباين = ٢٦٨٨١,٢٥

الانحراف المعياري = $\sqrt{٢٦٨٨١,٢٥}$ = ١٦٤,٠

١٤) كرة السلة: يبين الجدول المجاور أطوال لاعبي فريق كرة السلة في أحد الأندية الرياضية بالسنتمترات.

أطوال لاعبي فريق كرة السلة				
٢٠٣	١٩٦	٢١١	١٨٨	١٩٨
٣٠٣	٢١١	١٨٨	٢١١	١٧٥
١٩٨	٢١٦	٢٠٦	٢٠٦	٢٠١

أ) أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للأطوال.

المتوسط الحسابي = مجموع القيم الموجودة في الجدول على عدد هذه القيم

المتوسط الحسابي = ٢٠٠,٦

التباين = ع^{٢}

$$= \frac{(٢٠٣ - ٢٠٠,٦)^{٢} + (١٩٨ - ٢٠٠,٦)^{٢} + (١٩٦ - ٢٠٠,٦)^{٢} + \dots}{١٥}$$

الانحراف المعياري = $\sqrt{ع^{٢}}$ = ١٠,٥ تقريبا

ب) إذا غيرنا اللاعب الذي طوله ١٧٥ سم بلاعب طوله متر وسبعون سنتمترًا، فأوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري. وصف أثر هذا التبديل في النتائج السابقة.

المتوسط الحسابي = (٢٠٣ + ٢٠٣ + ١٩٨ + ١٩٦ + ٢١١ + ٢١٦ + ٢١١ + ١٨٨ + ٢٠٦ + ١٨٨ + ٢١١ + ٢٠٦ + ١٩٨ + ١٧٠ + ٢٠١) ÷ ٥ = ٢٠٠,٣

التباين = ع^{٢}

$$\frac{(٢٠٣ - ٢٠٠,٣)^{٢} + (١٩٨ - ٢٠٠,٣)^{٢} + (١٩٦ - ٢٠٠,٣)^{٢} + \dots}{١٥}$$

الانحراف المعياري = $\sqrt{ع^{٢}}$ = ١١,٤ تقريباً

نقص المتوسط الحسابي وزاد الانحراف المعياري

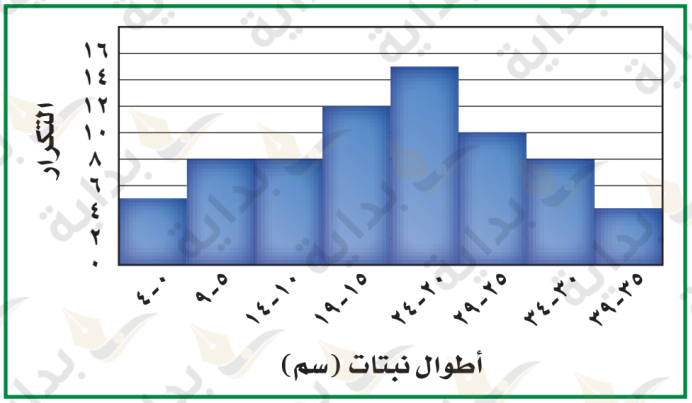
مسائل مهارات التفكير العليا

١٥) اكتشف الخطأ: تصف كل من سحر ورغد طريقة لزيادة دقة دراسة مسحية، فأيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

سحر	رغد
يجب أن تشتمل الدراسة المسحية على أكبر عدد ممكن من أفراد المجتمع.	يجب اختيار عينة الدراسة المسحية عشوائياً، ويجب أن تؤخذ عدة عينات عشوائية.

كلاهما إجابة صحيحة إذ أن الطريقة التي ذكرها كل من سحر ورغد تؤدي إلي زيادة دقة الدراسة المسحية

١٦) تحد: أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجتمع البيانات الممثلة بالمدرج التكراري أدناه.



المتوسط الحسابي = (٥ + ٨ + ٨ + ١٢ + ١٥ + ١٠ + ٨ + ٤) ÷ ٨

= ٨,٧٥

التباين =

$$\frac{(٥ - ٨,٧٥)^{٢} + (٨ - ٨,٧٥)^{٢} + (٨ - ٨,٧٥)^{٢} + (١٢ - ٨,٧٥)^{٢} + (١٥ - ٨,٧٥)^{٢} + \dots}{٨}$$

= ١١,٢

الانحراف المعياري = $\sqrt{١١,٢}$ = ٣,٣

١٧) تبرير: حدد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحياناً أم صحيحة دائماً أم غير صحيحة أبدا، وفسر إجابتك:

"العينتان العشوائيتان المأخوذتان من المجتمع نفسه لهما المتوسط الحسابي والانحراف المعياري نفساهما".

غير صحيحة إطلاقاً فإذا كانت العينات عشوائية حقا فلن تحتوي عادة علي العناصر نفسها وكذلك سيكون المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للعينة الأولي مختلفين عن نظيريهما للعينة الثانية.

١٨) مسألة مفتوحة: صف موقفاً من واقع الحياة يكون من المفيد فيه استعمال متوسط العينة لتقدير متوسط المجتمع. وصف طريقة اختيار عينة عشوائية من هذا المجتمع.

لإيجاد متوسط دخل الأسرة في المملكة تؤخذ عينة عشوائية طبقية مكونة من ١٠٠٠ أسرة من مختلف مناطق المملكة.

١٩) اكتب: قارن بين الانحراف المعياري والانحراف المتوسط.

هما قيمتان إحصائيتان تبينان درجة انحراف كل قيمة عن المتوسط الحسابي لمجموعة البيانات ويحسب الانحراف المتوسط بإيجاد متوسط القيم المطلقة للفروق بين كل عدد والمتوسط الحسابي لمجموعة البيانات ولإيجاد الانحراف المعياري تربع كل الفروق ثم تجد الجذر التربيعي لمتوسط هذه المربعات.

تدريب على اختبار

٢٠) إجابة قصيرة: زارت مجموعة من الطلاب مبنى التلفزيون، فدخل ٢٠ طالباً منهم إلى قسم الأخبار. فإذا شكل هؤلاء الطلّاب ١٦٪ من مجموعة الطلّاب، فما عدد أفراد المجموعة؟

$\frac{٢٠}{س} = \frac{١٦}{١٠٠}$ بفرض أن س عدد أفراد المجموعة

إذن س = $\frac{٢٠ \times ١٠٠}{١٦}$ = ١٢٥ طالب.

٢١) أطوال أعلى ٧ أشجار في حديقة هي: ١٩، ٢٤، ١٧، ٢٦، ٢٤، ٢٠، ١٨ قدماً. أوجد الوسيط لهذه الأطوال؟

أ) ١٧ جـ) ٢١

ب) ٢٠ د) ٢٤

١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢٤، ٢٤، ٢٦

الوسيط = ٢٠

الاختيار الصحيح: ب) ٢٠

مراجعة تراكمية

أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برر إجابتك، ثم احسب قيمة هذا المقياس:

٢٢) جمعيات النشاط: كانت أعداد طلاب أحد الصفوف قد وزعت على جمعيات النشاط على النحو الآتي: ٨، ١٢، ١٨، ٢٥، ٢١، ٥، ١٠، ١٤.

الوسيط، لا يوجد فجوات كبيرة بين الأعداد، ٥، ٨، ١٠، ١٢، ١٤، ١٨، ٢١، ٢٥

$$\frac{١٤ + ١٢}{٢} = ١٣$$

الوسيط = ١٣

٢٣) درجات اختبار: كانت درجات بعض الطلاب في مادة الرياضيات على النحو الآتي:

المنوال، تكررت قيمة واحدة،

المنوال = ٨٥

حدد في كل مما يأتي، هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ وبرر إجابتك:

٢٤) تسوق: طُلب إلى كل عاشر شخص يدخل إلى مجمع تجاري أن يُسمي المتجر المفضل لديه.

غير متحيزة، حيث يتم اختيار الأشخاص عشوائياً ولا يوجد دليل علي التأثير.

٢٥) رياضة: سُئل كل خامس شخص في مهرجان رياضي عن القناة التلفزيونية التي يفضلها.

متحيزة، لأنهم موجودون في مهرجان رياضي فالأكثر احتمالاً أن يختاروا قناة رياضية.

استعد للدرس اللاحق

إذا اخترت عشوائياً بطاقةً واحدة من كيس يحوي ٣ بطاقات حمراء و ٦ بطاقات خضراء و ٥ بطاقات صفراء، و ٨ بطاقات برتقالية اللون، فأوجد كلا من الاحتمالات الآتية:

٢٦) ح (حمراء)

$$ح = \frac{٣}{٢٢}$$

٢٧) ح (برتقالية)

$$ح = \frac{٨}{٢٢} = \frac{٤}{١١}$$

٢٨) ح (صفراء أو خضراء)

$$ح = \frac{٥ + ٦}{٢٢} = \frac{١١}{٢٢} = \frac{١}{٢}$$

٢٩) ح (ليست برتقالية)

$$ح = \frac{١٤}{٢٢} = \frac{٧}{١١}$$

٣٠) ح (ليست خضراء)

$$ح = \frac{١٦}{٢٢} = \frac{٨}{١١}$$

٣١) ح (حمراء أو برتقالية)

$$ح = \frac{٣ + ٨}{٢٢} = \frac{١١}{٢٢} = \frac{١}{٢}$$

الفصل ١٠

اختبار منتصف الفصل

الدروس ١٠-١ إلي ١٠-٣

عين العينة والمجتمع الذي اختيرت منه فيما يأتي، ثم صنف أسلوب جمع البيانات المستعمل:

١) شركة حليب: دعت شركة إنتاج حليب ١٠٠ طفل ووالديهم لتذوق حليب مذاق جديد.

العينة: ١٠٠ طفل ووالديهم

المجتمع: مجموعة من حديثي الولادة ووالديهم

أسلوب جمع البيانات: أسلوب الدراسة المسحية

٢) غداء في فندق: يريد مدير فندق إضافة تعديلات علي قائمة الطعام في الفندق، فسأل نزلاء الغرف ذات الأرقام الفردية عن القائمة الجديدة المقترحة للطعام.

العينة: عينة نزلاء الغرف الفردية

المجتمع: نزلاء الفندق

التصنيف: عينة عشوائية منتظمة

٣) دواء: قامت مؤسسة للبحوث العلمية بتجربة دواء جديد علي مجموعة من الفئران، فوجدوا أن فأراً من بين كل ٥٠ فأراً أخذوا الدواء قد تساقط شعرهم، فاستنتجوا النتيجة نفسها علي كل ٥٠ شخصاً سيتناولون الدواء.

العينة: عينة الفئران

المجتمع: فئران

التصنيف: عينة عشوائية منتظمة

٤) أنشطة مدرسية: تريد قائدة مدرسة اشتراك الطالبات في الأنشطة المدرسية، فأرسلت نماذج لجميع الطالبات فيه.

العينة: طالبات المدرسة اللائي استلمن النماذج

المجتمع: جميع طالبات المدرسة

التصنيف: أسلوب الدراسة المسحية

في كل مما يأتي، حدد ما إذا كانت العينة كلها متحيزة أم غير متحيزة، وفسر إجابتك:

٥) المادة المفضلة: سئل كل خامس طالب يدخل المدرسة عن مادته المفضلة.

غير متحيزة، لأن العينة من طلاب اختيروا عشوائياً

٦) تسويق: سُئِلَ كل شخص يغادر مجمعاً تجارياً عن اسم المحل الذي يفضل التسوق منه.

غير متحيزة، لأن لكل زبون فرصة الاختيار نفسها.

٧) كرة قدم: وقف عدد من الطلاب عند مدخل مدرسة ليسألوا كل عاشر طالب يدخلها عن اسم فريق كرة القدم الذي يشجعه.

غير متحيزة، لأن العينة من طلاب اختيروا عشوائياً.

٨) ألوان: سُئِلَتْ كل خامس طالبة تدخل المدرسة عن لونها المفضل.

غير متحيزة، لأن العينة من طالبات اختيروا عشوائياً.

---

٩) اختيار من متعدد: كل ١٠ دقائق يسجل خالد ما يُعْرض على التلفاز، وهل هو برنامج أم مسلسل، أي العبارات التالية تصف العينة؟

أ) بسيطة.

جـ) منتظمة.

ب) طبقية

د) لا شيء مما ذُكر.

أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برر إجابتك، ثم احسب قيمة هذا المقياس:

١٠) حديقة الحي: أعمار مجموعة من الأطفال الذين يلعبون في حديقة الحي هي: ٢، ٣، ٢، ٢، ٤، ٢، ٣، ٢، ٨، ٣، ٤، ٢

المنوال، تحتوي مجموعة البيانات أعداداً متكررة.

المنوال = ٢

١١) إعادة التدوير: عدد العلب المعدنية التي تم تجميعها عند مدرسة في كل أسبوع لإعادة تدويرها هو: ٢٢، ١٠، ٢٣، ٢٥، ٢٤، ٢٣، ٢٥، ١٩.

المنوال، تحتوي مجموعة البيانات أعداداً متكررة.

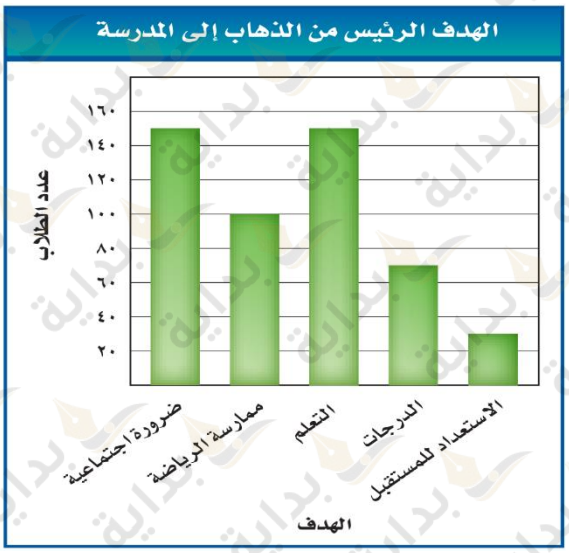
المنوال = ٢٣، ٢٥

١٢) حدد ما إذا كانت طريقة تمثيل النتائج أدناه تعطِي صورة صحيحة حول نتيجة الدراسة المسحية الآتية أم لا:

أجريت دراسة مسحية شَملت ٥٠٠ طالب.

السؤال: ما الهدف الرئيس من ذهابك للمدرسة.

الاستنتاج: الاستعداد لبناء مستقبل ليس مهما على الإطلاق.



يبدو للوهلة الأولي ان الهدف من الذهاب للمدرسة وهو الاستعداد للمستقبل أن العينة أسوأ، ومع ذلك فإن فترات التدريج غير ثابتة. وإذا القينا نظرة فاحصة نجد ان نحو ١٥٠ هدفهم التعلم أفضل أو أفضل بكثير وان من يرون أنه أسوأ ٣٠ فقط، لذا فإن التمثيل البياني المعروض مضلل، والاستنتاج غير صادق.

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لكل من مجموعتي البيانات الآتيتين:

١٣) ٢، ٤، ٥، ٧، ٧، ٩

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{٢ + ٤ + ٥ + ٧ + ٧ + ٩}{٦} = ٥,٧$$

$$ع^{٢} = \frac{(٢ - ٥,٧)^{٢}+(٤ - ٥,٧)^{٢}+(٥ - ٥,٧)^{٢}+(٧ - ٥,٧)^{٢}+(٧ - ٥,٧)^{٢}+(٩ - ٥,٧)^{٢}}{٦}$$

$$\text{التباين} = ٥,٢$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{٥,٢} = ٢,٣$$

١٤) ١٣، ١٤، ١٨، ٢١

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{١٣ + ١٤ + ١٨ + ٢١}{٤} \approx ١٦,٥$$

$$ع^{٢} = \frac{(١٣ - ١٦,٥)^{٢}+(١٤ - ١٦,٥)^{٢}+(١٨ - ١٦,٥)^{٢}+(٢١ - ١٦,٥)^{٢}}{٤}$$

$$\text{التباين} = ١٠,٣$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{١٠,٣} = ٣,٢$$

١٠ - ٤ التباديل و التوافيق

١) محاضرات: دخل ناصر وخمسة من أصدقائه قاعة محاضرات. فبكم طريقة مختلفة يمكنهم أن يجلسوا جميعا على ٦ مقاعد خالية في صفٍ واحدٍ؟

عدد الطرق = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠ طريقة

٢) لوحات: رسم فنان ١٥ لوحة فنية. فبكم طريقة يمكنه اختيار ١٠ لوحات منها لعرضها في معرض فني.

$$ل = \frac{ن !}{(ن - ر) !}$$

$$^{١٥}ل_{١٠} = \frac{١٥ !}{(١٥ - ١٠) !} = \frac{١٥ !}{(٥) !} = ١٠٨٩٧٢٨٦٤٠٠$$

٣) اختبار: تقدم سعيد لاختبار في التاريخ، طلب فيه الإجابة عن ١٠ أسئلة من بين ١٢ سؤالاً. بكم طريقة يمكن أن يختار الأسئلة؟

$$^{١٢}ل_{١٠} = \frac{١٢ !}{١٠ ! ٢ !} = ٦٦ \text{ طريقة}$$

٤) كتب: أراد أربعة طلاب أن يختاروا كتباً يقرؤونها من بين ١٨ كتاباً مختلفاً، تتكون من ٤ روايات، و٦ كتب علمية، و٨ كتب إسلامية. بكم طريقة يمكنهم اختيار الكتب الأربعة؟

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{ن !}{(ن - ر) ! ر!}$$

$$^{١٨}ق_{٤} = \frac{١٨ !}{(١٨ - ٤)! ٤!} = ٣٠٦٠ \text{ طريقة}$$

٥) شركات: يريد أعضاء مجلس إدارة شركة أن يختاروا رئيساً ونائباً للرئيس وأمينًا للسر وأمينًا للصندوق. وكان فهد وسطام من بين تسعة مرشحين لهذه المراكز.

أ) بكم طريقة يمكن لأعضاء مجلس الإدارة اختيار الأعضاء الذين يشغلون هذه المراكز؟

$$ل = \frac{ن !}{(ن - ر) !}$$

$$^{٩}ل_{٤} = \frac{٩ !}{(٩ - ٤) !} = \frac{!٩}{!٥} = ٣٠٢٤$$

ب) إذا تم الاختيار عشوائياً، فما احتمال أن يُختار فهد أو سطام لمركز الرئيس أو نائب الرئيس؟

$$\frac{٥}{١٢} = ٤١,٧٪ \text{ تقريباً}$$

$$\text{عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس} = {}^{٩}ق_{٢} = \frac{!٩}{!٧ \times !٢} = ٧٢$$

٨ طرق يكون فيها فهد رئيس و٨ طرق يكون فيها سطام رئيس

٨ طرق يكون فيها فهد نائب رئيس (إحداها مكررة عندما يكون سطام رئيس)

وأيضا ٨ طرق يكون سطام نائب رئيس (إحداها مكررة عندما يكون فهد رئيس)

عدد الطرق التي يكون فيها فهد أو سطام رئيس أو نائب رئيس = ٨ + ٨ + ٧ + ٧ = ٣٠

(حذف المكرر) يمكن التوضيح بأي من الثلاث شرائح التالية

$$ح\ (\text{فهد أو سطام}) = \frac{٨ \times ٩}{٥} = \frac{١٢}{٣٠} = ٤١,٧٪$$

√ تأكد

مثال١ : ١) جوائز: يريد أحد المركز التجارية أن يعرض صور جوائزه الست التي يوزعها على الزبائن على لوحة. بكم طريقة يمكن تنظيم الجوائز في صفٍ واحدٍ؟

٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠ طريقة

الأمثلة ٢–٤: أوجد قيمة كل مما يأتي:

٢) $ل^{٧}_{٢}$

$$ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

$$ل^{٧}_{٢} = \frac{٧!}{(٧-٢)!} = \frac{٧!}{٥!} = ٤٢$$

٣) $ل^{٩}_{٣}$

$$ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

$$ل^{٩}_{٣} = \frac{٩!}{(٩-٣)!} = \frac{٩!}{٦!} = ٥٠٤$$

٤) $ق^{٦}_{٤}$

$$ق^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!ر!}$$

$$ق^{٦}_{٤} = \frac{٦!}{(٦-٤)!٤!} = ١٥$$

٥) $ق^{٥}_{٢}$

$$ق^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!ر!}$$

$$ق^{٥}_{٢} = \frac{٥!}{(٥-٢)!٢!} = \frac{٥!}{(٣)!٢!} = ١٠$$

---

٦) إعادة تدوير: وضع خالد حاويات لتجميع المواد التي سيعاد تدويرها، على أن تكون هناك حاوية لكل من المواد الآتية: الزجاج والبلاستيك والورق والألومنيوم. بكم طريقة يمكن أن ينظم خالد هذه الحاويات في صف؟

نفس طريقة حل السؤال السابق = ٢٤

٤! = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

مثال٥: ٧) مثلجات: يعرض أحد مصانع المثلجات ٥ أنواع مختلفة بطعم الشوكولاتة، و ٤ أنواع مختلفة بطعم الفراولة و ٦ أنواع بطعم التوت.

أ) بكم طريقة يمكن أن يختار أحد الزبائن ٣ أنواع مختلفة من المثلجات؟

$$ن ق ر = \frac{ن!}{(ن - ر)\ !ر!}$$

$$١٥ ق ٣ = \frac{١٥!}{(١٥ - ٣)\ !٣!} = \frac{١٥!}{(١٢)\ !٣!} = ٤٥٥ \text{ طريقة}$$

ب) هل تتضمن عملية الاختيار التباديل أم التوافيق؟

توافيق

جـ) إذا تم اختيار أنواع" المثلجات" عشوائياً، فما احتمال أن تكون الأنواع الثلاثة التي اختارها أحد الزبائن بطعم الشوكولاتة؟

$$\text{عدد طرق اختيار ٣ أنواع من الشوكولاتة} = ٥ ق ٣ = \frac{٥!}{٢! \times ٣!} = ١٠$$

$$\text{احتمال (ان تكون الأنواع الثلاثة شوكولاتة)} = \frac{١٠}{٤٥٥} = ٢,٢٪$$

تدرب وحل المسائل

مثال ١ : ٨) **تصوير:** اصطف الطلاب الأربعة الأوائل في فصول الصف الثالث المتوسط في إحدى المدارس

في صف لالتقاط صورة؛ لعرضها على لوحة الشرف في المدرسة. فبكم طريقة يمكن أن ينظم المصور الطلاب الأربعة ليلتقط الصورة؟

$٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$

٩) **مسابقات علمية:** وصل ٨ طلاب إلى المرحلة النهائية في مسابقات علمية. فبكم طريقة يمكن أن يقف هؤلاء الطلاب في صفٍّ على منصة قاعة الاحتفالات؟

$٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٤٠٣٢٠$

الأمثلة ٢ – ٤ : أوجد قيمة كل مما يأتي:

١٠) ${}^{٦}ق_{٦}$

$ل = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

${}^{٦}ق_{٦} = \frac{٦!}{(٦ - ٦)!} = \frac{٦!}{٠!} = ٧٢٠$

١١) ${}^{٥}ل_{١}$

$ل = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

${}^{٥}ل_{١} = \frac{٥!}{(٥ - ١)!} = \frac{٥!}{٤!} = ٥$

---

١٢) ${}^{٤}ل_{١}$

$ل = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

${}^{٤}ل_{١} = \frac{٤!}{(٤ - ١)!} = \frac{٤!}{٣!} = ٤$

١٣) ${}^{٧}ل_{٣}$

$ن ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

${}^{٧}ل_{٣} = \frac{٧!}{(٧ - ٣)!} = \frac{٧!}{٤!} = ٢١٠$

١٤) $ل_{٦}^{٧}$ $ق_{ر}^{ن} = \frac{!ن}{!(ن - ر)}$ $ق_{٦}^{٧} = \frac{!٧}{!(٧ - ٦)!٦} = \frac{!٧}{!٦!١} = ٧$	١٥) $ل_{٣}^{٥}$ $ق_{ر}^{ن} = \frac{!ن}{!(ن - ر)}$ $ق_{٣}^{٥} = \frac{!٥}{!(٥ - ٣)!٣} = \frac{!٥}{!٢!٣} = ١٠$
١٦) $ق_{٥}^{٥}$ $ق_{ر}^{ن} = \frac{!ن}{!(ن - ر)}$ $ق_{٥}^{٥} = \frac{!٥}{!(٥ - ٥)!٥} = ١$	١٧) $ق_{٠}^{٣}$ $ق_{ر}^{ن} = \frac{!ن}{!(ن - ر)}$ $ق_{٠}^{٣} = \frac{!٣}{!(٣ - ٠)!٠} = ١$

١٨) **مجوهرات:** يعمل قاسم في محل لبيع المجوهرات. وقد طلب منه مديره أن يضع ثلاثا من القلائد الاثنتي عشرة في خزانة العرض الأمامية. فبكم طريقة يمكن أن يرتب قاسم القلائد في خزانة العرض؟

$$ل_{ر}^{ن} = \frac{!ن}{!(ن - ر)}$$

$$ل_{٣}^{١٢} = \frac{!١٢}{!(١٢ - ٣)} = \frac{!١٢}{!٩} = ١٣٢٠$$

مثال٥: ١٩) كرات زجاجية: يوجد في كيس ٢٠كرة زجاجية، منها ٧كرات حمراء و٨ زرقاء و٥خضراء. فإذا سحبت ١٥كرة من الكيس عشوائياً، فما احتمال سحب ٥ كرات من كل لون؟

عدد طرق سحب ١٥ كرة = $ل_{١٥}^{٢٠} = \frac{!٢٠}{!٥ \times !١٥}$

$= \frac{٢٠ \times ١٩ \times ١٨ \times ١٧ \times ١٦}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢} = ١٥٥٠٤$

عدد طرق سحب ٥ كرات حمراء = $ق_{٥}^{٧} = ٢١$

عدد طرق سحب ٥ كرات زرقاء = $ق_{٥}^{٨} = ٥٦$

عدد طرق سحب ٥ كرات خضراء = $ق_{٥}^{٥} = ١$

عدد طرق سحب ٥ كرات من كل لون = ٢١ × ٥٦ × ١ = ١١٧٦

احتمال (سحب ٥ كرات من كل لون) = $\frac{١١٧٦}{١٥٥٠٤} = ٧,٥٩٪$

٢٠) كرة قدم: رشح معلم التربية الرياضية ٩طلاب من الصف الأول الثانوي، و٦طلاب من الصف الثاني الثانوي، و٨طلاب من الصف الثالث الثانوي؛ لتشكيل فريق كرة القدم المدرسي. إذا علمت أن الفريق يتكون من ١١ لاعبً أساسياً.

أ) ما عدد طرق اختيار الفريق الأساسي؟

عدد الطلاب = ٩ + ٨ + ٦ = ٢٣ طالب

عدد طرق اختيار الفريق الأساسي (الترتيب غير مهم)

$ل_{١١}^{٢٣} = \frac{!٢٣}{!١١ \times !١٢} = ١٣٥٢٠٧٨$

ب) إذا تم اختيار الفريق الأساسي عشوائياً، فما احتمال أن يكون من بينهم طالب واحد على الأقل من الصف الثالث الثانوي؟

لإيجاد احتمال أن يكون طالب واحد على الأقل من الصف الثالث نوجد احتمال عدم وجود طالب من الصف الثالث في الفريق ثم نطرحه من ١ (احتمال متممة حادثة)

عدد طرق عدم وجود أي طالب من الصف الثالث (أي أن الفريق يتكون من طلاب الصفين الأول والثاني فقط)

$$^{١٥}ل_{١١} = \frac{!١٥}{!١١ \times !٤} = ١٣٦٥$$

$$ح\ (\text{عدم وجود أي طالب من الصف الثالث}) = \frac{١٣٦٥}{١٣٥٢٠٧٨}$$

ح (وجود طالب على الأقل من الصف الثالث) =

$$١ - \frac{١٣٦٥}{١٣٥٢٠٧٨} \approx ٩٩,٩٪$$

حدد هل يتضمن كل موقف من المواقف الآتية تباديل أم توافيق:

٢١) اختيار ٣ أنواع مختلفة من الفطائر من قائمة تحتوي على ١٢ نوعاً.

توافيق

٢٢) اختيار الفائزين بالمركز الثلاثة الأولى في مسابقة ثقافية.

تباديل

٢٣) اختيار ٥ كتب لقراءتها من بين ٨ كتب على رفٍّ.

توافيق

٢٤) ترتيب حروف كلمة "سعودي".

تباديل

٢٥) وظائف: أجرى ٥١ شخصا مقابلة لشغل إحدى الوظائف، فقامت لجنة المقابلة باختيار مرشح لهذه الوظيفة و٤بدلاء.

أ) هل تتضمن عملية الاختيار تباديل أم توافيق؟

تباديل

ب) بكم طريقة يمكن أن تختار اللجنة المرشح للوظيفة والبدلاء الأربعة؟

$$ل = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

$$^{٥١}ل_{٤} = \frac{٥١!}{(٥١ - ٥)!} = \frac{٥١!}{٤٦!} = ٢٨١٨٨٧٢٠٠ \text{ طريقة}$$

٢٦) خزانة: نسي هاني ترتيب الأعداد التي يستعملها لفتح خزانته. ولكنه يتذكر أنها تتكون من الأعداد ٥، ١٦، ٣١. فما العدد الأكبر للمحاولات التي ينفذها لفتح الخزانة؟

٥، ١٦، ٣١

٥، ٣١، ١٦

١٦، ٥، ٣١

١٦، ٣١، ٥

٣١، ٥، ١٦

٣١، ١٦، ٥

٦ محاولات

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٧) **اكتشف الخطأ:** تريد كل من سلمى ونوف أن يكونا لجنة مؤلفة من ٤ طالبات؛ للإشراف على تزيين المدرسة استعدادًا لاحتفال تكريم الأوائل. تريد كل منهما أن تحدد عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا تطوع ١٠ طالبات للقيام بهذا العمل. فأيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

سلمى

$$ل_{٤}^{١٠} = \frac{!١٠}{!(٤ - ١٠)}$$

$$= ٥٠٤٠$$

نوف

$$ق_{٤}^{١٠} = \frac{!١٠}{!٤ !(١٠ - ٤)}$$

$$= ٢١٠$$

نوف، بما أن الترتيب غير مهم فيجب استعمال التوافيق

---

٢٨) حدد الموقف المختلف عن المواقف الثلاثة الأخرى فيما يأتي، ووضح إجابتك:

اختيار 5 متسابقين في مسابقة ثقافية.	اختيار 10 كرات ملونة من حقيبة
اختيار 4 خيول من بين 6 خيول للمشاركة في سباق.	تحديد ترتيب الطلاب الفائزين في إحدى المسابقات.

تحديد ترتيب للطلاب، لأنها الحالة الوحيدة التي يكون فيها الترتيب مهما

---

٢٩) **تبرير:** حدد هل تكون العبارة $ن ل_{ر} = ن ق_{ر}$ صحيحة أحياناً أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدا. فسر إجابتك.

أحيانا، تكون هذه العبارة صحيحة عندما ر = ٢، لان الترتيب غير وارد عند اختيار عنصر واحد وهي صحيحة أيضا عندما ر = ٠

---

٣٠) **اكتب:** اذكر موقفًا لاختيار ٣ أشياء من بين ٨ أشياء، على ألا يكون الترتيب فيه مهما.

اختيار ٣ طلاب للمشاركة في الإذاعة المدرسية من بين ثمانية طلاب

تدريب على اختبار

٣١) يريد سعيد أن يزرع ٣ أنواع مختلفة من بين ٨ أنواع مختلفة من الأزهار على جانب ممر في حديقته. بكم طريقة يمكنه زراعة هذه الأزهار؟

أ) ٣٤٢ جـ) ٣٣٦

ب) ٣٣٨ د) ٣٢٨

$$ل = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

$$ل^{٨}_{٣} = \frac{٨!}{(٨ - ٣)!} = ٣٣٦ \text{ طريقة}$$

الاختيار الصحيح: جـ) ٣٣٦

٣٢) مع سالم ٣٠ ورقة نقد من فئتي عشرين ريالاً وخمسة ريالات، قيمتها ٤٢٠ ريالاً. فكم ورقة معه من فئة عشرين ريالاً؟

أ) ١٢ جـ) ١٨

ب) ١٥ د) ٢٠

س فئة العشرين، ص فئة الخمسة

س + ص = ٣٠

٢٠س + ٥ص = ٤٢٠

٥س + ٥ص = ١٥٠ بضرب المعادلة الأولى × ٥

٢٠س + ٥ص = ٤٢٠

٢٠س + ٥ص = ٤٢٠

(–) ٥س + ٥ص = ١٥٠ نطرح المعادلتين

١٥س = ٢٧٠

–١٥س = – ٢٧٠ قسمة الطرفين على ١٥

س = ١٨

إذا ١٨ ورقة من فئة ٢٠

الاختيار الصحيح: جـ) ١٨

مراجعة تراكمية

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لكل مجموعة من مجموعات البيانات الآتية مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرةٍ.

٣٣) ٧٦، ٤٧، ٥٩، ٤٧، ٧٢، ٨٩

المتوسط الحسابي = (٧٦ + ٤٧ + ٥٩ + ٤٧ + ٧٢ + ٨٩) ÷ ٦ = ٦٥

التباين = $ع^{٢}$

$$\frac{(٧٦ - ٦٥)^{٢}+(٤٧ - ٦٥)^{٢}+(٥٩ - ٦٥)^{٢}+(٤٧ - ٦٥)^{٢}+(٧٢ - ٦٥)^{٢}+(٨٩ - ٦٥)^{٢}}{٦}$$

= ٢٣٨,٣

الانحراف المعياري = $\sqrt{ع^{٢}}$ = ١٥,٤ تقريبا

٣٤) ٢٠، ٣٠، ١٠، ٤٠، ٢٠، ١٢، ٥٠

المتوسط الحسابي = (٢٠ + ٣٠ + ١٠ + ٤٠ + ٢٠ + ١٢ + ٥٠) ÷ ٧ = ٢٦

التباين = $ع^{٢}$

$$\frac{(٢٠ - ٢٦)^{٢} + (٣٠ - ٢٦)^{٢} + (١٠ - ٢٦)^{٢} + (٤٠ - ٢٦)^{٢} + (٢٠ - ٢٦)^{٢} + ...}{٦}$$

= ١٨٧,٤٢

الانحراف المعياري = $\sqrt{ع^{٢}}$ = ١٣,٧ تقريبا

---

٣٥) مسح: أجرت إحدى شركات صنع العصائر دراسة مسحية؛ لمعرفة عدد العلب التي يشتريها الزبون في الأسبوع. فحصلت على الاستجابات الآتية: ١٤، ٧، ٣، ٠، ١٠، ١٢، ١٠، فأي مقاييس النزعة المركزية أفضل لتمثيل هذه البيانات؟ برر إجابتك، ثم أوجد هذا المقياس.

المتوسط الحسابي = (١٤ + ٧ + ٣ + ٠ + ١٠ + ١٢ + ١٠) ÷ ٧ = ٨

المتوسط الحسابي = ٨، لعدم وجود قيم متطرفة

استعد للدرس اللاحق

إذا اخترت عشوائيًا قطعة بلاستيك واحدة من كيس يحوي ١٠ قطع حمراء و١٢ قطعة زرقاء و٨ قطع خضراء و٤ قطع صفراء و١٢ قطعة سوداء، فأوجد كلا من الاحتمالات الآتية:

٣٦) ح (زرقاء)

$$ح = \frac{١٢}{٤٦} = \frac{٦}{٢٣}$$

٣٧) ح (حمراء)

$$ح = \frac{١٠}{٤٦} = \frac{٥}{٢٣}$$

٣٨) ح (سوداء أو صفراء)

$$ح = \frac{١٢ + ٤}{٤٦} = \frac{٨}{٢٣}$$

٣٩) ح (خضراء أو حمراء)

$$ح = \frac{١٠ + ٨}{٤٦} = \frac{٩}{٢٣}$$

٤٠) ح (ليست زرقاء)

$$ح = \frac{١٠ + ٨ + ٤ + ١٢}{٤٦} = \frac{١٧}{٢٣}$$

٤١) ح (ليست خضراء)

$$ح = \frac{١٠ + ١٢ + ٤ + ١٢}{٤٦} = \frac{١٩}{٢٣}$$

١٠ - ٥ احتمالات الحوادث المركبة

١) كرات زجاجية: يحتوي كيس على ٦كرات سوداء و٩زرقاء و٤صفراء وكرتين خضراوين. فإذا سحبت

منه كرة عشوائيًا ثم أعيدت وسحبت كرة ثانية، فأوجد احتمال

أ) ح (زرقاء وخضراء)

$$\text{ح (زرقاء)} = \frac{٩}{٢١}$$

$$\text{ح (خضراء)} = \frac{٢}{٢١}$$

$$\text{ح (زرقاء وخضراء)} = \frac{٩}{٢١} \times \frac{٢}{٢١} = \frac{١٨}{٤٤١} = ٤,١$$

ب) ح (ليست سوداء وزرقاء)

$$\frac{٢١ - ٦}{٢١} \times \frac{٩}{٢١} = \frac{١٥}{٢١} \times \frac{٩}{٢١} = \frac{١٣٥}{٤٤١} = ٣٠,٦\%$$

---

٢) بطاقات: يوجد في صندوق ١٠بطاقات حمراء و١٠صفراء و١٠زرقاء و١٠بيضاء. وبطاقات كل مجموعة مرقمة بالأرقام من ١إلى١٠فإذا سحب عبد الكريم ثلاث بطاقات عشوائيًا من الصندوق واحدة تلو الأخرى من دون إرجاع. فأوجد احتمال أن تكون البطاقات المسحوبة بالترتيب المعطى في كل مما يأتي:

٢أ) ح (اثنان، خمسة، ليس خمسة)

$$\text{ح (اثنان، خمسة، ليس خمسة)} = \text{ح (اثنان)} \times \text{ح (خمسة)} \times \text{ح (ليس خمسة)}$$

$$= \frac{٤}{٤٠} \times \frac{٤}{٤٠} \times \frac{٣٦}{٤٠} = \frac{٥٧٦}{٦٤٠٠٠} = ٠,٩\%$$

٢ب) ح (حمراء، ليست حمراء، حمراء)

$$= \frac{١٠}{٤٠} \times \frac{٣٠}{٤٠} \times \frac{١٠}{٤٠} = \frac{٥٧٦}{٦٤٠٠٠} = \frac{٤٥}{٩٨٨} = ٤,٦\% \text{ تقريبا}$$

٣) أوجد كلاً من الاحتمالات الآتية عند رمي مكعب أرقام:

أ) ح (أقل من ٣)

ح (أقل من ٣) = ح (ظهور ١) + ح (ظهور ٢)

$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣} = ٣٣,٣ \approx ٣٣٪$

ب) ح (عدد زوجي)

ح (عدد زوجي)

$\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

---

٤) مكعب أرقام: عند رمي مكعب أرقام، ما احتمال ظهور عدد فردي أو أولي؟

$\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣} =$ ٦٦,٧٪ تقريباً

√ تأكد

المثالان ١ – ٢: بين إن كانت الحوادث في الأسئلة الآتية مستقلة أم غير مستقلة، ثم أوجد احتمال كل منها:

١) العاب الأطفال: يحتوي صندوق ألعاب على ١٢ دمية و٨ سيارات صغيرة و٣ كرات. إذا اختارت أمينة اثنتين عشوائياً من هذه الألعاب لأخيها الأصغر، فما احتمال أن تكون قد اختارت سيارتين صغيرتين؟

$$\frac{٨}{٢٣} \times \frac{٧}{٢٢} = \frac{٥٦}{٥٠٦} = \frac{٢٨}{٢٥٣} = ١١٪ \text{ تقريباً}$$

٢) فواكه: تحتوي سلة على ٦ تفاحات و٥ موزات و٤ برتقالات و٥ كمثرى. إذا اختار ماجد حبة واحدة من الفاكهة عشوائيا وأكلها ثم اختار حبة ثانية. فما احتمال أن يكون قد اختار موزة ثم تفاحة؟

غير مستقلة

$$ح\ (\text{موزة}) = \frac{٥}{٢٠} = \frac{١}{٤}$$

$$ح\ (\text{تفاحة}) = \frac{٦}{١٩}$$

$$ح\ (\text{موزة}) \times ح\ (\text{تفاحة}) = \frac{١}{٤} \times \frac{٦}{١٩} = \frac{٦}{٧٦} = \frac{٣}{٣٨} = ٨٪ \text{ تقريباً}$$

المثالان ٣ – ٤: ٣) كتب: اختار حسن كتاباً من الرف المجاور عشوائياً، وأعاده ثم اختار كتاباً آخر. فما احتمال أن يكون قد اختار كتابين من كتب الرياضيات؟



مستقلة

$$\frac{٨}{١٧} \times \frac{٨}{١٧} = \frac{٦٤}{٢٨٩} = ٢٢,١٪ \text{ تقريباً}$$

يحتوي صندوق على ٨ كرات حمراء و ٨ سوداء و ٨ بيضاء و ٨ زرقاء، وقد رقمت كرات كل لون بالأرقام من ١ إلى ٨ فإذا سحبت كرة واحدة عشوائياً من الصندوق. حدد هل الحادثتان في كل مما يأتي متنافيتان أم غير متنافيتين، ثم أوجد الاحتمال:

٤) ح (٢ أو ٨)

متنافيتان، $\frac{٤}{٣٢} + \frac{٤}{٣٢} = \frac{٨}{٣٢} = \frac{١}{٤}$

٥) ح (حمراء أو زرقاء)

متنافيتان، $\frac{٨}{٣٢} + \frac{٨}{٣٢} = \frac{١٦}{٣٢} = \frac{١}{٢}$

٦) ح (زوجي أو سوداء)

غير متنافيتان

الأعداد الزوجية ٢، ٤، ٦، ٨

$\frac{١٦}{٣٢} + \frac{٨}{٣٢} = \frac{٢٤}{٣٢} = \frac{٣}{٤}$

تدرب وحل المسائل

المثالان ١، ٢: حدد إذا كانت الحوادث فيما يأتي مستقلة أم غير مستقلة، ثم احسب احتمال كل منها:

٧) نقود: إذا ألقيت قطعة نقود ٤ مرات، فما احتمال ظهور الكتابة في المرات الأربع جميعها؟

مستقلة، $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٦}$ = ٦,٣٪ تقريباً

٨) مكعب أرقام: رمي مكعب أرقام مرتين، فما احتمال ظهور عددين مختلفين؟

مستقلة، $\frac{٦}{٦} \times \frac{٥}{٦} = \frac{٥}{٦}$ = ٨٣٪ تقريباً

٩) حلوي: يحتوي صندوق على ١٠ قطع شوكولاتة بالحليب و ٨ قطع شوكولاتة سوداء و ٦ قطع شوكولاتة بيضاء. اختار محمد قطعة واحدة عشوائياً وأكلها، ثم اختار قطعة ثانية عشوائيا. فما احتمال أن يكون قد اختار قطعة شوكولاتة بالحليب، ثم قطعة شوكولاتة بيضاء؟

غير مستقلة

$\frac{١٠}{٢٤} \times \frac{٦}{٢٣} = \frac{٦٠}{٥٥٢} = \frac{٥}{٤٦}$ = ١١٪ تقريباً

١٠) مكعب أرقام: إذا ألقي مكعب أرقام مرتين، فما احتمال ظهور العدد نفسه في الرميتين؟

مستقلة، $\frac{١}{٦}$ = ١٧٪ تقريباً

المثالان ٣، ٤: حدد إذا كانت الحوادث الآتية متنافية أم غير متنافية، ثم أوجد احتمال كل منها:

١١) لعبة البولينج: تشير نتائج سابقة إلى أن احتمال أن يسقط مشعل جميع القوارير في المحاولة الأولى ٣٠٪، واحتمال إسقاطها في المحاولة الثانية ٤٥٪، واحتمال عدم إسقاطها في المحاولتين ٢٥٪. فما احتمال أن يسقط مشعل القوارير جميعها في المحاولة الأولى أو الثانية لأي إطار؟

متنافيتان

$$\frac{٣٠}{١٠٠} + \frac{٤٥}{١٠٠} = \frac{٧٥}{١٠٠} = ٧٥٪ \text{ تقريباً}$$

١٢) صغار القطة: أنجبت هرة ٨ قطط صغيرة: خمس إناث؛ اثنتان برتقاليتان، و ٣ ملونة، وثلاثة ذكور؛ واحد برتقالي، واثنان ملونان. فأراد خالد أن يحتفظ بواحدة من القطط الصغيرة، فما احتمال أن يختار منها واحداً برتقالي اللون أو أنثى عشوائيا؟

غير متنافيتان

$$\frac{٣}{٨} + \frac{٣}{٨} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤} = ٧٥٪ \text{ تقريباً}$$

يحتوي كيس على ١٠ بطاقات حمراء و١٠ زرقاء و١٠ بيضاء و١٠ خضراء، ورقمت البطاقات من كل لون بالأعداد من ١ إلى ١٠ فإذا سحبت بطاقتان من دون إرجاع، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

١٣) ح (حمراء أو زرقاء)

$$\frac{١٠}{٤٠} + \frac{١٠}{٤٠} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} = ٥٠٪$$

١٤) ح (زرقاء أو بيضاء)

$$\frac{١٠}{٤٠} + \frac{١٠}{٤٠} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} = ٥٠٪$$

١٥) ح (١٠ ثم حمراء)

$$\frac{٤}{٤٠} + \frac{٩}{٣٩} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} = ٥٠٪$$

١٦) ح (٨ ثم زرقاء)

$$\frac{٤}{٤٠} \times \frac{٩}{٣٩} = \frac{٣٦}{١٥٦٠} = \frac{٣}{١٣٠} = ٢٪ \text{ تقريباً}$$

١٧) ح (خمسة ثم خضراء)

$$\frac{٣}{١٣٠} = ٢٪ \text{ تقريباً}$$

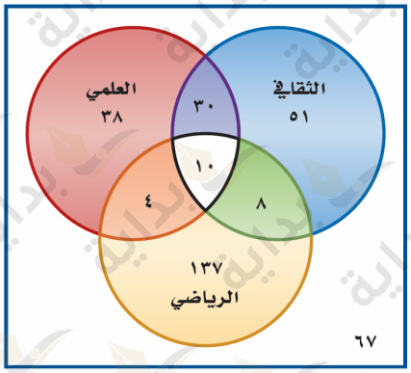
$$\frac{٤}{٤٠} \times \frac{٩}{٣٩} = \frac{٣٦}{١٥٦٠} = \frac{٣}{١٣٠} = ٢٪ \text{ تقريباً}$$

١٨) ح (٣ أو ليست بيضاء)

$$\frac{٣١}{٤٠} = ٧٨٪ \text{ تقريباً}$$

ليست بيضاء = ٤٠ ـ ١٠ = ٣٠

$$\frac{٤}{٤٠} + \frac{٣٠}{٤٠} = \frac{٣٤}{٤٠}$$



١٩) **النشاط المدرسي:** يمثل شكل فن الآتي النشاطات المدرسية التي يشارك فيها طلاب المرحلة المتوسطة في إحدى المدارس.

أ) ما عدد طلاب المرحلة المتوسطة في هذه المدرسة؟

٥١ + ٣٠ + ٣٨ + ١٠ + ٨ + ٤ + ١٣٧ + ٦٧ = ٣٤٥ طالباً

ب) ما عدد الطلاب المشاركين في النشاط الرياضي؟

١٣٧ + ٨ + ١٠ + ٤ = ١٥٩ طالباً

جـ) إذا اختير أحد طلاب الصف عشوائياً، فما احتمال أن يكون مشاركاً في النشاط الرياضي أو العلمي؟

$$\frac{١٥٩}{٣٤٥} + \frac{(٣٠ + ٣٨)}{٣٤٥} = \frac{١٥٩}{٣٤٥} + \frac{٦٨}{٣٤٥} = \frac{٢٢٧}{٣٤٥} = ٦٦٪ \text{ تقريباً}$$

د) إذا اختير أحد طلاب الصف عشوائياً، فما احتمال أن يكون مشاركاً في النشاطين الثقافي والعلمي فقط؟

$$\frac{٢}{٢٣} = ٩٪ \text{ تقريباً}$$

---

٢٠) **حلوى:** يحتوي وعاء على ١٠ قطع حلوى حمراء، و٦ خضراء، و٧ صفراء و٥ برتقالية.

فما احتمال أن يتم اختيار٣ قطع عشوائيا مع الإرجاع، على أن تكون الأولى حمراء والثانية حمراء والثالثة برتقالية؟

$$\frac{١٠}{٢٨} + \frac{١٠}{٢٨} \times \frac{٥}{٢٨} = \frac{٥٠٠}{٢١٩٥٢} = \frac{١٢٥}{٥٤٨٨} = ٢٪ \text{ تقريباً}$$

مسائل مهارات التفكير العليا

٢١) **اكتشف الخطأ:** يريد كل من حمد وجمال تحديد احتمال اختيار كرة زرقاء أو حمراء عشوائياً من كيس يحتوي على ٨ كرات زرقاء وستة حمراء و٨ صفراء و٤ بيضاء. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ اشرح تبريرك.

حمد

ح (زرقاء أو حمراء)
= ح (زرقاء) + ح (حمراء)
$= \frac{٨}{٢٦} + \frac{٦}{٢٦}$
$= \frac{١٤}{٢٦}$ = ٥٤٪ تقريباً

جمال

ح (زرقاء أو حمراء)
= ح (زرقاء) + ح (حمراء)
$= \frac{٨}{٢٦} + \frac{٦}{٢٦}$
$= \frac{١٤}{٢٦}$ = ٥٤٪ تقريباً

حمد، يجب جمع الاحتمالين لأننا نريد اختمال كرة زرقاء أو حمراء وهما حادثتان متنافيتان

---

٢٢) **تبرير:** افترض أن هناك ٣ حوادث غير متنافية هي أ، ب، جـ، واكتب جميع الاحتمالات التي يجب أخذها في الاعتبار عند حساب ح (أ أو ب أو جـ)، ثم اكتب الصيغة التي تستعمل لحساب هذا الاحتمال.

ح (أ)، ح (ب)، ح (ج)، ح (أ وَ ب)، ح (أ وَ ج)، ح (ب وَ ج)، ح (أ أو ب أو ج) = ح (أ) + ح (ب) + ح (ج) – ح (أ وَ ب) – ح (أ وَ ج) – ح (ب وَ ج) + ح (أ وَ ب وَ ج)

---

٢٣) **مسألة مفتوحة:** صف موقفاً في حياتك يتضمن حوادث مستقلة وأخرى غير مستقلة، واشرح الأسباب التي تجعل الحادثة مستقلة أو غير مستقلة.

اختيار كتاب وقراءته ووضعه جانباً ثم اختيار كتاب آخر وقراءته ووضعه جانباً تمثل حادثاً مستقلاً لأن الكتاب الأول وضع جانباً قبل اختيار الكتاب الثاني أما اختيار الواجب البيتي لمادتين لحلهما فسيكون حادثاً غير مستقل إذا لم اضع الواجب الأول جانباً.

٢٤) اكتب: اشرح لماذا يُستعمل الطرح عند حساب احتمال حادثتين غير متنافيتين.

إذا كانت الحادثتان غير متنافيتين فإنه يوجد فيهما عناصر مشتركة لذا لابد أن نطرح للتخلص من العناصر التي تحسب مرتين.

تدريب على اختبار

٢٥) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من ٤ أشخاص من بين ١٢ شخصا؟

أ) ٤٨ | جـ) ٤٩٥

ب) ٤٨٣ | د) ١١٨٨٠

$$ن ق ر = \frac{ن!}{(ن - ر)\ !\ ر!}$$

$$١٢ ق ٤ = \frac{١٢!}{(١٢ - ٤)\ !\ ٤!} = \frac{١٢!}{٨!\ ٤!} = ٤٩٥$$

الاختيار الصحيح: جـ) ٤٩٥

٢٦) إجابة قصيرة: إذا كان احتمال ظهور الشعار عند إلقاء قطعة نقود يساوي احتمال ظهور الكتابة، فما احتمال ظهور الكتابة إذا ألقيت قطعة النقد مرة أخرى؟

أ) $\frac{١}{٢}$ | جـ) $\frac{١}{٤}$

ب) $\frac{١}{٣}$ | د) $\frac{٣}{٤}$

الاختيار الصحيح: أ) $\frac{١}{٢}$

مراجعة تراكمية

٢٧) هندسة: مستطيل عرضه ٣ $\sqrt{٥}$ سنتمتر، وطوله ٤ $\sqrt{١٠}$ سنتمتر. أوجد مساحته. ثم اكتب الإجابة على شكل جذر في أبسط صورة.

مساحته = ٣ $\sqrt{٥}$ × ٤ $\sqrt{١٠}$ = ١٢ $\sqrt{٥ \times ٢ \times ٥}$

= ١٢ × ٥ $\sqrt{٢}$ = ٦٠ $\sqrt{٢}$ سم^{٢}

حل كلاً من المعادلات الآتية، ثم تحقق من صحة الحل:

٢٨) $\sqrt{-٣ أ}$ = ٦

$\sqrt{-٣ أ}$ = ٦

$(\sqrt{-٣ أ})^{٢}$ = ٣٦

-٣أ = ٣٦

أ = - ١٢

تحقق:

$(\sqrt{٣٦})$ = ٦

٦ = ٦ √

٢٩) ٥ $\sqrt{٢}$ = $\sqrt{س}$

$(٥\sqrt{٢})$ = $\sqrt{س}$

$(٥\sqrt{٢})^{٢}$ = $(\sqrt{س})^{٢}$

٥٠ = س

س = ٥٠

تحقق:

$(٥\sqrt{٢})$ = $\sqrt{س}$

$(٥\sqrt{٢})$ = $\sqrt{٥٠}$

$(٥\sqrt{٢})$ = $\sqrt{٢ \times ٥ \times ٥}$

$(٥\sqrt{٢})$ = ٥ $\sqrt{٢}$ √

٣٠) $٣\sqrt[٤]{س} - ٢ = ١٠$

$(٣\sqrt[٤]{س} - ٢) = ١٠$

$(٣\sqrt[٤]{س} - ٢)^{٢} = ١٠٠$

$٩ \times س^{٤} + ٤ - ١٢\sqrt[٤]{س} = ١٠٠$

$٣٦س - ١٢\sqrt[٤]{س} = ٩٦$

$٣٦س - ١٢\sqrt[٤]{س} - ٩٦ = ٠$

$٣س - \sqrt[٤]{س} - ٨ = ٠$

$\sqrt[٤]{س} = ٣س - ٨$

$٩س^{٢} + ٦٤ - ٤٨س - ٤س = ٠$

$٩س^{٢} + ٥٢س + ٦٤ = ٠$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢أ}$

$س = \frac{٥٢ \pm \sqrt{٥٢^{٢} - ٤ \times ٩ \times ٦٤}}{١٨}$

$س = \frac{٥٢ \pm \sqrt{٤٠٠}}{١٨} = \frac{٥٢ \pm ٢٠}{١٨}$

$س = \pm ٤$

تحقق:

$(٣\sqrt[٤]{س} - ٢) = ١٠$

$(٣\sqrt[٤]{٤ \times ٤} - ٢) = ١٠$

$(١٢ - ٢) = ١٠$ √

$(٣\sqrt[٤]{س} - ٢) = ١٠$

$(٣\sqrt[٤]{٤ \times -٤} - ٢) = ١٠$ ×

الفصل ١٠ اختبار الفصل

عين العينة والمجتمع الذي اختيرت منه فيما يأتي، ثم صنّف الطريقة المستعملة لجمع البيانات:

١) لعب: دعت شركة تنتج لعباً للأطفال ٥٠ طفلًا لاختيار لعبة جديدة ورصدت ردود أفعالهم

العينة: الأطفال الخمسون

المجتمع: الأطفال جميعهم

طريقة جمع البيانات: دراسة قائمة على الملاحظة

٢) أزهار: أرسل مشتل استبانة؛ لتحديد نوع الأزهار التي يفضلها الناس بصورة أكثر. وقد أرسل هذه الاستبانة إلى من تخطى سن الـ ٥٠سنة في القوائم البريدية الخاصة بزبائن المشتل.

العينة: من هم في سن ٥٠ سنة جميعهم على القائمة البريدية الخاصة بزبائن المشتل

المجتمع: الزبائن على القائمة البريدية للمشتل

طريقة جمع البيانات: دراسة مسحية

احسب قيمة كل من المقادير الآتية:

٣) $ل_{٥}^{٧}$

$$\frac{!٧}{!٥ـ٧} = \frac{!٧}{!٢} = ٢٥٢٠$$

٤) $ق_{٤}^{١٠}$

$$\frac{!١٠}{!١٤ !٤ـ١٠} = \frac{!١٠}{!٦ !٤} = ٢١٠$$

٥) $ق_{٢}^{٧}$

$$\frac{!٧}{!١٢ !٢ـ٧} = \frac{!٧}{!٥ !١٢} = ٢١$$

٦) $ل_{٣}^{٦}$

$$\frac{!٦}{!٣ـ٦} = \frac{!٦}{!٣} = ١٢٠$$

ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل البيانات الآتية؟ برر إجابتك، واحسب قيمة المقياس:

٧) انتخابات: رصد مركز انتخابات، أعمار الأشخاص الذين انتخبوا في ذلك المركز فكانت:

٢١، ٢٥، ٣٢، ٤١، ٣٢، ٢٠، ٦٥، ٣٣، ٣٠، ٧٢

٢٠، ٢١، ٢٥، ٣٠، ٣٢، ٣٢، ٣٣، ٤١، ٦٥، ٧٢

$\frac{٣٢ + ٣٢}{٢}$ = ٣٢

الوسيط = ٣٢، توجد قيم متطرفة

٨) تسوق: رصد محل تجاري عدد القطع التي يشتريها المتسوقون في يوم معين فكانت: ٣، ٤، ٥، ٣، ٤، ٥، ٥، ٣، ٢، ٣، ٢، ١٠.

٢، ٢، ٣، ٣، ٣، ٣، ٤، ٤، ٥، ٥، ٥، ١٠

$\frac{٣ + ٤}{٢}$ = ٣,٥

الوسيط = ٣,٥، توجد قيم متطرفة

بين إن كانت العينة في كل مما يأتي متحيزة أم عير متحيزة، برر إجابتك:

٩) صحف: أرسلت استبانة لجميع المشتركين في إحدى الصحف؛ لمعرفة الصحيفة التي يفضل الناس قراءتها.

متحيزة لأن الدراسة المسحية أجريت على مشتركي الصحيفة بعينها لذا سيختار المستجيبون تلك الصحيفة على الأغلب.

---

١٠) تسوق: سئل كل شخص يغادر مجتمعاً تجارياً عن أفضل ٣ محال لبيع الملابس في السوق.

غير متحيزة لأن الأشخاص جميعهم الذين خرجوا من المجمع سئلوا

١١) **كتب:** بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة من بين عشرة كتب مختلفة؟

$$ق_{٣}^{١٠} = \frac{!١٠}{!٣\,!(٣ - ١٠)} = \frac{!١٠}{!٣\,!٧} = ١٢٠$$

---

١٢) ما الاحتمال النظري لظهور الشعار عند إلقاء قطعة نقد؟

$$\frac{١}{٢} = ٥٠٪$$

---

١٣) **مكعب أرقام:** عند رمي مكعب أرقام مرتين، ما احتمال ظهور العدد ٢ في المرة الأولى، والعدد ٣ في المرة الثانية؟

$$\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣٦}$$

---

١٤) **تعليم:** سأل خالد ٢٠٠ طالب في مدرسته عن عدد الأيام التي يحل فيها الطلاب واجباتهم المنزلية في الأسبوع. وعرضت النتائج في الجدول الآتي:

عدد الأيام	عدد الطلاب
١	٦
٢	١٨
٣	٣١
٤	٤٦
٥	٥٧
٦ أو أكثر	٤٢

أ) إذا اختير أحد طلاب المدرسة عشوائياً، فما احتمال أن يكون قد حل واجبات منزلية في أكثر من خمسة أيام؟

$$ح\,(\text{حل في أكثر من ٥ أيام}) = \frac{٤٢}{٢٠٠} = ٢١٪$$

ب) إذا اختير أحد طلاب المدرسة عشوائياً، فما احتمال أن يكون قد حل واجبات منزلية في ثلاثة أيام على الأكثر؟

$$ح\,(\text{حل في أكثر من ٣ أيام على الأكثر}) = \frac{١٠١}{٢٠٠} = ٥٠,٥٪$$

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري إلى أقرب جزء من عشرة لكل من مجموعات البيانات الآتية:

١٥) ٤، ٥، ٥، ٦، ٦، ٩، ٨، ١٠

المتوسط الحسابي = (٤ + ٥ + ٥ + ٦ + ٦ + ٩ + ٨ + ١٠) ÷ ٨ = ٦,٦

التباين = $ع^{٢}$

$(٤ - ٦,٦)^{٢} + (٥ - ٦,٦)^{٢} + (٥ - ٦,٦)^{٢} + (٦ - ٦,٦)^{٢} + (٦ - ٦,٦)^{٢} + (٩ - ٦,٦)^{٢} +$

$(٨ - ٦,٦)^{٢} + (١٠ - ٦,٦)^{٢} \div ٨ \approx ٤$

الانحراف المعياري = $\sqrt{ع^{٢}}$ = ٢ تقريباً

١٦) ٢٢، ٢٥، ٢٧، ٣٠

المتوسط الحسابي = (٢٢ + ٢٥ + ٢٧ + ٣٠) ÷ ٤ = ٢٦

التباين = $ع^{٢}$

$$\frac{(٢٢ - ٢٦)^{٢} + (٢٥ - ٢٦)^{٢} + (٢٧ - ٢٦)^{٢} + (٣٠ - ٢٦)^{٢}}{٤} = ٨,٥$$

الانحراف المعياري = $\sqrt{ع^{٢}}$ = ٢,٩ تقريباً

---

١٧) صحف: تابع ناصر زمن مطالعة الصحيفة بالدقائق لسبعة من زملائه في أحد الأيام فكانت:

٥، ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٦٠.

أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

[٥ + ٥ + ١٠ + ١٥ + ٢٠ + ٢٥ + ٦٠] ÷ ٧ = ٢٠

[| ٥ - ٢٠| + |٥ - ٢٠| + |١٠ - ٢٠| + |١٥ - ٢٠| + |٢٠ - ٢٠| + |٢٥ - ٢٠| +

|٦٠ - ٢٠|] = ٩٠ ÷ ٧ = ١٢,٩

الانحراف المتوسط = ١٢,٩

١٨) **اختيار من متعدد:** لتمثيل مدرسة متوسطة في تجمع طلابي اختير طالبان عشوائياً من كل صف من الصفوف: الأول والثاني والثالث المتوسط. فما أفضل وصف لهذه العينة؟

أ) بسيطة

ب) طبقية

جـ) منتظمة

د) لا شيء مما ذُكر

الفصل ١٠

الاختبار التراكمي

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة.

١) يبين الجدول الآتي عدد السعرات الحرارية في ١٢ صنفاً من الأطعمة الخفيفة المختلفة. فما مقياس النزعة المركزية الأكثر تأثراً بالقيمة المتطرفة ٣٤٢ سُعراً؟

عدد السعرات الحرارية في الأطعمة			
١٢٢	٨٧	١٤٩	١٢١
٦٤	١٣٨	٣٤٢	٧٢
١٧٩	١٠٥	٩٩	١١٤

أ) المتوسط الحسابي

ب) الوسيط

جـ) المنوال

د) المدي

الاختيار الصحيح: أ) المتوسط الحسابي

٢) أي مما يأتي ليس من عوامل $س^{٤} - ٦س^{٢} - ٢٧$؟

أ) $س^{٢} + ٣$

ب) $س - ٣$

جـ) $س + ٣$

د) $س^{٢} - ٣$

$س^{٤} - ٣س^{٢} - ٩س^{٢} - ٢٧$

$س^{٢}(س^{٢} + ٣) - ٩(س^{٢} + ٣)$

$(س^{٢} - ٩)(س^{٢} + ٣)$

$(س^{٢} + ٣)(س - ٣)(س + ٣)$

الاختيار الصحيح: د) $س^{٢} + ٣$

٣) لدى فاروق ٢٠ قصة، ويريد أن يختار ٣ قصص منها؛ ليأخذها معه في رحلة لبضعة أيام، فبكم طريقة يمكنه أن يختار القصص إذا كان الترتيب غير مهم؟

أ) ٦٠

جـ) ١١٤٠

ب) ٨٤

د) ١٤٨٢

$$^{٢٠}ق_{٣} = \frac{!٢٠}{!٣\ !١٧} = \frac{!٢٠}{!٣\ !(٢٠-٣)} = ١١٤٠$$

الاختيار الصحيح: **جـ) ١١٤٠**

٤) ما معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين (–١ ، –٣)، (–٢ ، ٣)؟

أ) ص = –٦س – ٩

جـ) ص = ٤س – ٥

ب) ص = $-\frac{١}{٤}$ س + ٣

د) ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ١

$$\text{الميل} = \frac{٣ - (-٣)}{-٢ - (-١)} = \frac{٦}{-٢ + ١} = \frac{٦}{-١} = -٦$$

الاختيار الصحيح: **أ) ص = –٦س – ٩**

٥) ترتفع قمة جبل حتى ٢٠٣٧ متراً فوق سطح البحر. فإذا تحدد موقع شخص يسير على هذا الجبل. بالدالة م (ن) = –٢,٥ ن + ٢٠٣٧ حيث ن عدد الدقائق، فأي مما يأتي يُعد أفضل تفسير لميل الدالة؟

أ) كان الموقع الابتدائي لهذا الشخص ٢٠٣٧ متراً تحت مستوى سطح البحر.

ب) كان الموقع الابتدائي لهذا الشخص ٢٠٣٧ متراً فوق مستوى سطح البحر.

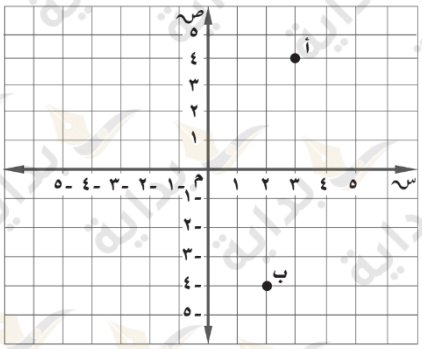
جـ) ينزل هذا الشخص بسرعة ٢,٥ متر لكل دقيقة.

د) يصعد هذا الشخص بسرعة ٢,٥ متر لكل دقيقة.

الميل = –٢,٥

الاختيار الصحيح: جـ)

٦) أوجد المسافة بين النقطتين أ و ب مقرباً الحل إلي أقرب جزء من عشرة؟



أ) ٨,١

ب) ٨,٥

جـ) ٩,٦

د) ١٠,٢

(٣ ، ٤) (٢، –٤)

ف = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

ف = $\sqrt{(٢ - ٣)^٢ + (-٤ - ٤)^٢}$

ف = $\sqrt{١ + ٦٤}$ = $\sqrt{٦٥}$ = ٨,٢

الاختيار الصحيح: أ) ٨,١

٧) ثمن تذكرة دخول المتحف للأطفال ٨ ريالات، وللكبار ١٥ ريالاً. ما هي تكلفة دخول عائلة مكونة من ٤ أطفال ووالديهم؟

أ) ٤٨ ريالاً

ب) ٦٢ ريالاً

جـ) ٧٦ ريالاً

د) ٩٠ ريالاً

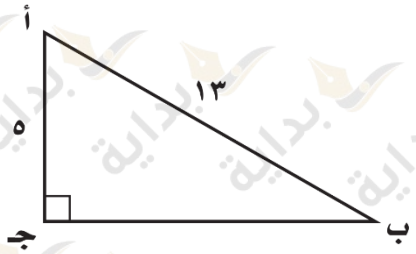
٤ × ٨ + ٢ × ١٥ = ٣٢ + ٣٠ = ٦٢

الاختيار الصحيح: ب) ٦٢ ريالاً

إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

٨) ما قيمة جا ب في الشكل أدناه؟ اكتب إجابتك في صورة كسر اعتيادي.



جا ب = المقابل ÷ الوتر

جا ب = $\frac{٥}{١٣}$

٩) أوجد الانحراف المعياري لمجمعة البيانات الآتية، موضحاً خطوات الحل، ثم قرب الإجابة إلي أقر جزء من عشرة إذا لزم ذلك.

١٤	١١	٩	٦
١٠	١٦	١٥	١٣
٩	١٢	١٩	١٠

المتوسط الحسابي = (١٤ + ١١ + ٩ + ٦ + ١٠ + ١٦ + ١٥ + ١٣ + ٩ + ١٢ + ١٩ + ١٠) ÷ ١٢ = ١٢

التباين = $ع^{٢}$

$(١٤ - ١٢)^{٢} + (١١ - ١٢)^{٢} + (٩ - ١٢)^{٢} + (٦ - ١٢)^{٢} + (١٠ - ١٢)^{٢} +$

$(١٦ - ١٢)^{٢} + (١٥ - ١٢)^{٢} + (١٣ - ١٢)^{٢} + (٩ - ١٢)^{٢} + (١٢ - ١٢)^{٢} +$

$(١٩ - ١٢)^{٢} + (١٠ - ١٢)^{٢} \div ١٢ = ١١,٨$

الانحراف المعياري = $\sqrt{ع^{٢}}$ = ٣,٤ تقريباً

١٠) مع لطيفة علبة فيها ٥ قطع بسكويت بطعم البندق و٧ قطع بطعم الشوكولاتة و٩ قطع بطعم جوز الهند و ٤ قطع بطعم الفراولة. إذا اختارت قطعتين من العلبة عشوائياً من دون إرجاع، فما احتمال أن تختار قطعة بطعم البندق، ثم قطعة بطعم الفراولة؟ اكتب الإجابة في صورة كسر اعتيادي.

$\frac{٥}{٢٥} \times \frac{٤}{٢٤} = \frac{٢٠}{٦٠٠} = \frac{٢}{٦٠} = \frac{١}{٣٠}$

١١) اكتب عبارة جبرية تمثل مساحة مثلث ارتفاعه ٤جـ^{٣} د^{٢}، وطول قاعدته ٣جـ د^{٤} بالوحدات المربعة.

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٣جـ د^{٤} × ٤جـ^{٣} د^{٢} = ٦ ج$^{٣+١}$ د$^{٢+٤}$ = ٦ ج^{٤} د^{٦}

١٢) سجل عدنان ٨٤ هدفا خلال موسم كرة السلة، وكان مجموع النقاط لهذه الأهداف ١٨٣ نقطة. إذا علمت أنه يمكن أن يكون للهدف نقطتان أو ثلاث نقاط، فما عدد الأهداف التي حصل فيها على ٣ نقاط، والأهداف التي حصل فيها على نقطتين في هذا الموسم؟

س + ص = ٤٨ ×٢

ـ ٢س ـ ٢ص = ١٦٨ × ـ ٢

٢س + ٣ص = ١٨٣

ص = ١٥

٢س + ٣ص = ١٨٣

٢س + ٣ × ١٥ = ١٨٣

٢س = ١٨٣ ـ ٤٥

٢س = ١٣٨

س = ٦٩

إجابة كويلة

١٣) أراد مجلس بلدية أن يُعيد تنظيم أحد أحياء المدينة. فقرر أعضاء المجلس أن يستطلعوا آراء سكان الحي. فاختار المجلس ٢٥٠ رب أسرة من سكان الحي عشوائياً، ثم سألهم عبر الهاتف عن رأيهم في مشروع إعادة التنظيم. وبناءً على نتائج الاستطلاع، توصل المجلس إلى استنتاج أن ٧١٪ من سكان الحي يؤيدون إعادة التنظيم.

أ) حدد العينة.

العينة: ٢٥٠ رب أسرة من سكان الحي

ب) صف المجتمع الذي اختيرت منه.

المجتمع: سكان الحي

جـ) هل طريقة جمع البيانات التي استعملها المجلس دراسة مسحية أم تجريبية أم دراسة قائمة على الملاحظة؟ اشرح إجابتك.

هذا هو أسلوب الدراسة المسحية، حيث تؤخذ البيانات من استجابات أفراد الحي.

د) هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسر إجابتك.

غير متحيزة لأن هذه العينة تتكون من أشخاص اختيروا عشوائياً.

هـ) إذا كانت العينة غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. وفسر إجابتك

عينة عشوائية بسيطة، لأن لكل رب أسرة الفرصة نفسها ليكون بين الذين تم الاتصال بهم.