

ملخص الباب الثاني : المصفوفات

الدرس الأول : مقدمة في المصفوفات :

المصفوفة : هي ترتيب على هيئة مستطيل

لقيمات أو أعداد في صفوف أفقية و

أعمدة رأسية محصورة بين قوسين.

- كل قيمة لها معنى وتسمى عنصر -

رمز المصفوفة هكذا تكون : A رتبة المصفوفة : عدد الصفوف $\times$ عدد الأعمدة

$$\begin{bmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الرتبة = 2×3

أساسي بعض المصفوفات

بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.

المصفوفة الصفرية	المصفوفة المربعة	مصفوفة عمود	مصفوفة صف
جميع عناصرها أصفار.	عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة.	تحتوي عموداً واحداً.	تحتوي صفّاً واحداً.
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ 2×2	$\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$	$[8 \quad -5 \quad 2 \quad 4]$
	تكون المصفوفتان متساويتين إذا كانتا من الرتبة نفسها ، وتساوت عناصرهما المتناظرة.		
$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$
المصفوفتان متساويتان.	ليست جميع العناصر المتناظرة متساوية.	المصفوفتان لهما رتبتان مختلفتان.	

note

ترتيب تصاعدي : من الصغير للكبير
ترتيب تنازلي : من الكبير للصغير

الدرس الثالث : ضرب المصفوفات :

هناك شرط :

- أعمدة المصفوفة الأولى = صفوف المصفوفة الثانية

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & AB \\ \begin{matrix} 3 \times 2 \\ 2 \times 5 \end{matrix} & & \begin{matrix} 2 \times 5 \\ 3 \times 5 \end{matrix} & & \begin{matrix} 3 \times 5 \end{matrix} \end{matrix}$$

- لضرب مصفوفة مُتحقق بها الشرط :

الطريقة :

$$\begin{bmatrix} -39 & -33 \\ 44 & 34 \end{bmatrix}$$

الناجح النهائي

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

	-5	-4
6	$6(-5) + (-3)3 = -39$	$6(-4) + (-3)3 = -33$
-3	$-10(-5) + 2(3) = 44$	$-10(-4) + 2(3) = 34$
2		

- نسوي جدول مفير
ونكتب القيم بهذا الشكل

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

- أوجد ناتج $A + B$

كل عدد ونظيره

$$A + B = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$$

- أوجد ناتج $B - C$

لا يمكن لأن الرتب مختلفة.

ضرب المصفوفة في عدد ثابت :-

ضرب العدد الخارجي في العناصر

ex:

$$R = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$

س/ أوجد $5R$ ← ضرب جميع العناصر في العدد 5

$$5R = \begin{bmatrix} -60 & 40 & 30 \\ -80 & 20 & 95 \end{bmatrix}$$

مفهوم أساسي	خصائص جمع المصفوفات
الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A, B, C لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت k :	
الخاصية الإبدائية لجمع المصفوفات	$A + B = B + A$
الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات	$(A + B) + C = A + (B + C)$
خاصية التوزيع للضرب في عدد	$k(A + B) = kA + kB$

مفهوم أساسي	خصائص ضرب المصفوفات
تعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A, B, C ولأي عدد k ، على أن تكون عمليات ضرب أو جمع أي منها معرفتين:	
الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات	$(AB)C = A(BC)$
الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات في عدد	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$
خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات	$C(A + B) = CA + CB$
خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات	$(A + B)C = AC + BC$

خاصية الإبدال غير متحققة

الدرس الخامس: النظر الضربي وأنظمة المعادلات الخطية

مصفوفة الوحدة: مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس = واحد والباقى = صفر

3x3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة 2x2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* رمز مصفوفة الوحدة I
* النظر الضربي للمصفوفة A^{-1}

النظر الضربي لمصفوفة من النوع 2x2

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- تغيير الأضلة
- تبديل الأماكن

* بشرط $|A| \neq 0$

$$P = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2 إيجاد النظر

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

3

$$7(-1) - 2(-5) = 3$$

المعادلات المصفوفية: يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلاً، يمكنك كتابة معادلة مصفوفية لحل نظام معادلتين خطيتين:

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

ويمكنك التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات

مصفوفة المتغيرات

مصفوفة الثوابت

الأعداد الموجودة مع المتغيرات

المتغيرات في النظام فقط

في النظام فقط

الناتج

طريقة إيجاد واستعمال معادلة مصفوفية وحل النظام:

1- كتابة تمثيل عن معادلة مصفوفية كاملة

2- أجد النظر الضربي لمصفوفة المعاملات

3- أجد الناتج ثم أكتبها على شكل زوج مرتب (x, y)

الدرس الرابع: المحددات وقاعدة كرامر:

- كل مصفوفة مربعة لها محددة

محددة مصفوفة 2x2 تسمى محددة الدرجة الثانية

مثال لإيجاد قيمتها

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5(9) - (-4)8 = 77$$

محددة الدرجة الثالثة 3x3

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

نقوم بتكرار أول مجموعتين في النهاية

$$4(2)(9) + (-8)(6)(4) + (3)(-3)(5) = 219$$

$$-4(2)(3) + 5(6)(4) + 9(-3)(8) = 312$$

$$219 - 312 = -93$$

$$A = \frac{1}{-93} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

مصفوفة المعادلات: هي مصفوفة تمثل معادلات

إذا كان الناتج لا يساوي صفراً النظام له حل واحد
إذا كان صفراً النظام ليس له حل / له عدد لا نهائي من الحلول.

لحل أنظمة المعادلات الخطية نستخدم قاعدة كرامر

خطواتها: نوجد قيمة المصفوفة ثم x ثم y

ثم نكتبها على شكل زوج مرتب

مثال:-

$$5x - 6y = 15$$

$$3x + 4y = -29$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - (-6)(3) = 38$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{38} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{38} = -5$$

$$(-3, -5)$$

$$-2x + y = 9$$

$$x + y = 3$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} = X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(9) + \frac{1}{3}(3) \\ \frac{1}{3}(9) + \frac{2}{3}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات
عموداً × صفراً