

20. قانون بويل للغاز في درجة حرارة ثابتة هو $PV = c$ ، حيث إن P هو ضغط الغاز، و V هو حجم الغاز و c هو ثابت الغازات. على فرض أن كل من P و V هي دوال بالزمن، (A) بين أن $\frac{\bar{P}(t)}{\bar{V}(t)} = -\frac{c}{V^2}$ ؟

(B) جد حلًا لـ P كدالة بالمتغير V . اعتبر أن V متغير مستقل، فاحسب $\bar{P}(V)$. قارن بين $\bar{P}(V)$ و $\frac{\bar{P}(t)}{\bar{V}(t)}$ من الجزئين (A) و (B).
Boyle's law for a gas at constant temperature is $PV = c$, where P is pressure, V is volume and c is a constant. Assume that both P and V are functions of time. (A) Show that $\frac{\bar{P}(t)}{\bar{V}(t)} = -\frac{c}{V^2}$?

(B) Solve for P as a function of V . Treating V as an independent variable, compute $\bar{P}(V)$. Compare $\bar{P}(V)$ and $\frac{\bar{P}(t)}{\bar{V}(t)}$ from parts (A) and (B)?

بالحيات : P, V متغيرات

(A) $PV = c$

$$\frac{d}{dt}(PV) = 0 \Rightarrow P'(t)V(t) + V(t)P'(t) = 0$$

$$\frac{V(t)P'(t)}{V(t)V(t)} = \frac{-P(t)V(t)}{V(t)V(t)} \Rightarrow \frac{P'(t)}{V(t)} = -\frac{P(t)}{V(t)} \Rightarrow -\frac{c}{V^2}$$

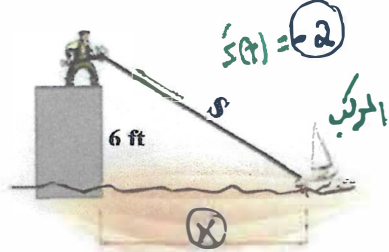
$$\therefore \frac{P'(t)}{V(t)} = -\frac{c}{V(t)V(t)} = \boxed{-\frac{c}{V^2}}$$
 وهو المطلوب.

(B) $P(V) = \frac{c}{V(t)}$

$$\Rightarrow P'(V) = -\frac{c}{V^2} \Rightarrow \frac{P'(t)}{V(t)} = -\frac{c}{V^2} \Rightarrow \frac{P'(t)}{V(t)} = P'(V)$$
 متطابق.

21. يرتفع حوض مائي 6 ft عن منسوب المياه. على فرض أنك تقف على حافة الحوض وتسحب حبلًا متصلًا بمركب بمعدل ثابت 2 ft/s وأن المركب لا تزال على مستوى المياه. فما هي سرعة اقتراب المركب من الحوض عندما يبعد 20 ft من الحوض؟ 10 ft من الحوض؟ أليس من المستغرب أن تكون سرعة المركب ليست ثابتة؟

A dock is 6 feet above water. Suppose you stand on the edge of the dock and pull a rope attached to a boat at the constant rate of 2 ft/s. Assume that the boat remains at water level. At what speed is the boat approaching the dock when it is 20 feet from the dock? 10 feet from the dock? Isn't it surprising that the boat's speed is not constant?



بالحلول، اجاب $\bar{x}(t) \leftarrow$ نبدأ بعلاقة $x^2 = s^2 - 36$

$$2x \bar{x}(t) = 2s \bar{s}(t)$$

$$x \bar{x}(t) = s \bar{s}(t)$$

$$\therefore \bar{x}(t) = \frac{s \bar{s}(t)}{x(t)} = \frac{\sqrt{436} (-2)}{20} = -2.088$$

$$\therefore \boxed{\bar{x}(t) = -2.088}$$

النتيجة الثانية $\Rightarrow$ عندما $x = 10$ نان $s = \sqrt{136}$

$$\therefore \bar{x}(t) = \frac{s \bar{s}}{x} = \frac{\sqrt{136} (-2)}{10} = \boxed{-2.332}$$

لحساب $\bar{x}(t)$ نأخذ

$$\frac{dx}{dt} = (-2)$$

$$\bar{x}(t) = -2$$

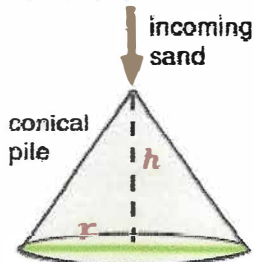
$$\text{عندما } x = 20 \text{ ft}$$

$$s = \sqrt{6^2 + 20^2}$$

$$s = \sqrt{436}$$

22. ينسكب الرمل في كومة مخروطية الشكل وارتفاعها يعادل قطرها. إذا انسكب الرمل بمعدل ثابت $5 \text{ m}^3/\text{s}$ ، فما معدل تزايد ارتفاع الكومة عندما يكون الارتفاع مترين؟ $h=2$

Sand is poured into a conical pile with the height of the pile equalling the diameter of the pile. If the sand is poured at a constant rate of $5 \text{ m}^3/\text{s}$, at what rate is the height of the pile increasing when the height is 2 meters?



المعطيات
 $h = 2r \Rightarrow r = \frac{h}{2}$
 $\dot{V}(t) = 5 \text{ m}^3/\text{s}$
 المطلوب $\dot{h}(t)$ عندما $h = 2$

حجم المخروط
 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
 $V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h$

$$V = \frac{\pi}{12} h^3$$

$$\dot{V}(t) = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$5 = \frac{\pi}{4} (2)^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{5}{\pi} \text{ m/sec}$$

نسبة

نقطة

23. يرتبط تردد اهتزاز أوتار الجيتار (الذي يحدد طبقة صوت النغمة التي نسمعها) بالتوتر T الذي يشد به الوتر. الكثافة ρ للوتر

والطول الفعال L للوتر من خلال المعادلة عند تمرير عازف الجيتار إصبعه على الوتر $f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ ، فيمكنه تغيير L من خلال

تغيير المسافة بين مشط الجيتار وإصبعه على فرض أن $L = \frac{1}{2} \text{ ft}$ و $\sqrt{\frac{T}{\rho}} = 220 \text{ ft/s}$ ، ولذلك فإن وحدات f هي

الهرتز (دورة في الثانية) . إذا انزلت يد عازف الجيتار حتى أصبحت $\bar{L}(t) = -4$ ، فجد $\bar{f}(t)$ وبهذا المعدل. فما هو الزمن المستغرق لرفع طبقة الصوت أوكتاف واحداً (وهو ضعف f) ؟

The frequency at which a guitar string vibrates (which determines the pitch of the note we hear) is related to the tension T to which the string is tightened, the density ρ of the string and the effective length L of the string by the equation $f =$

$\frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. By running his finger along a string, a guitarist can change L by changing the distance between the bridge and his

finger. Suppose that $L = \frac{1}{2} \text{ ft}$ and $\sqrt{\frac{T}{\rho}} = 220 \text{ ft/s}$ that the units of f are Hertz (cycles per second). If the

guitarist's hand slides so that $\bar{L}(t) = -4$, find $\bar{f}(t)$ At this rate,

how long will it take to raise the pitch one octave (that is, double f)?

المعطيات

$$L = \frac{1}{2} \text{ ft}$$

$$\sqrt{\frac{T}{\rho}} = 220 \text{ ft/s}$$

$$\bar{L}(t) = -4$$

$$\bar{f}(t) = ?$$

$$f(t) = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{220}{2L} = \frac{110}{L}$$

$$f'(t) = \frac{-110 (L'(t))}{[L(t)]^2} = \frac{-110 (-4)}{\frac{1}{4}} = 440(4) = 1760 \text{ HZ/s}$$

المطلوب الثاني : وهذا المعدل أي سرعة $f(t) = 1760$ دورة/ثانية .

جد الزمن اللازم لرفع طبقة الصوت (ضعف f) أي من 220 لـ 440 .

$$T = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{440 - 220}{1760} = \frac{220}{1760} = \frac{1}{8}$$

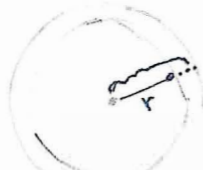
ثانية لرفع طبقة الصوت أوكتاف واحد .

حجم الكرة

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

24. على فرض أنك تملأ بالوناً بالهواء بمعدل $1 \text{ ft}^3/\text{s}$. إذا بقي البالون في شكل (كروي)، فارتبط حجمه ونصف قطره بـ $r = 0.1 \text{ ft}$ في مقابل عندما يكون $r = 0.01 \text{ ft}$. ناقش طريقة ارتباط ذلك بخبرة.

الشخص الذي يملأ البالون؟ Suppose that you are blowing up a balloon by adding air at the rate of $1 \text{ ft}^3/\text{s}$. If the balloon maintains a spherical shape, the volume and radius are related by $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Compare the rate at which the radius is changing when $r = 0.01 \text{ ft}$ versus when $r = 0.1 \text{ ft}$? Discuss how this matches the experience of a person blowing up a balloon?



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = r'(t) = \frac{dV/dt}{4\pi(r)^2}$$

نسبة

$$\frac{dV}{dt} = 1$$

$$r = 0.01, 0.1$$

$$\frac{dr}{dt} = ?$$

$$r = 0.01 \Rightarrow r' = \frac{1}{4\pi(0.01)^2} = 795.774$$

نقوس

$$r = 0.1 \Rightarrow r' = \frac{1}{4\pi(0.1)^2} = 7.957$$

25. ضخ مياه إلى خزان كروي نصف قطره 60 ft بمعدل ثابت $10 \text{ ft}^3/\text{s}$.

(A) جد معدل تغيير نصف قطر أعلى مستوى للمياه في الخزان عندما يمتلئ الخزان إلى النصف؟

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

(B) جد الارتفاع الذي تتغير فيه المياه في الخزان بنفس معدل نصف قطره؟

Water is being pumped into a spherical tank of radius 60 feet at the constant rate of $10 \text{ ft}^3/\text{s}$.

(A) Find the rate at which the radius of the top level of water in the tank changes when the tank is half full?

(B) Find the height at which the height of the water in the tank changes at the same rate as the radius?



$$\frac{dV}{dt} = 10 \text{ ft}^3/\text{s}$$

(A) آسنه لنا بحاجة لأخراج أي معادلة مرتبطة بقياس حجم مثل $r = a = h = 60$ وذلك لأنه وعندما يمتلئ الخزان إلى النصف كما قلنا يكون

$$a^2 = 60^2 - (60 - h)^2$$

$$2a \frac{da}{dt} = 2(60 - h) \left(-\frac{dh}{dt} \right)$$

نسبة

$$\frac{da}{dt} = \frac{60 - h}{a} \left(\frac{dh}{dt} \right)$$

$$a = h = 60 \Rightarrow \frac{da}{dt} = \frac{60 - 60}{60} \left(\frac{dh}{dt} \right) = 0$$

أي أنه لا يتغير معدل عند الارتفاع لأنه يكون قد توقف عن الزيادة وبدأ بالتناقص مرة أخرى كما أنزاد حيث الماء.

$$\frac{da}{dt} = \frac{dh}{dt} \quad \text{عندما } h$$

$$a^2 = 60^2 - (60 - h)^2$$

نحتاج إلى (a) بدلالة (h) فنخرجها من المعادلة في الفقرة (A)

$$\frac{1}{2} \frac{da}{dt} = \frac{60 - h}{a} \left(\frac{dh}{dt} \right) \Rightarrow a = 60 - h$$

$$(60 - h)^2 = 60^2 - 60^2 + 120h - h^2$$

$$3600 - 120h + h^2 + h^2 - 120h = 0$$

$$2h^2 - 240h + 3600 = 0$$

$$h^2 - 120h + 1800 = 0 \Rightarrow h = 17.573 \text{ ft}$$

$$h = 102.4 \text{ ft}$$

نلاحظ وجود قيمتين للارتفاع لأن الشكل مستطير.

