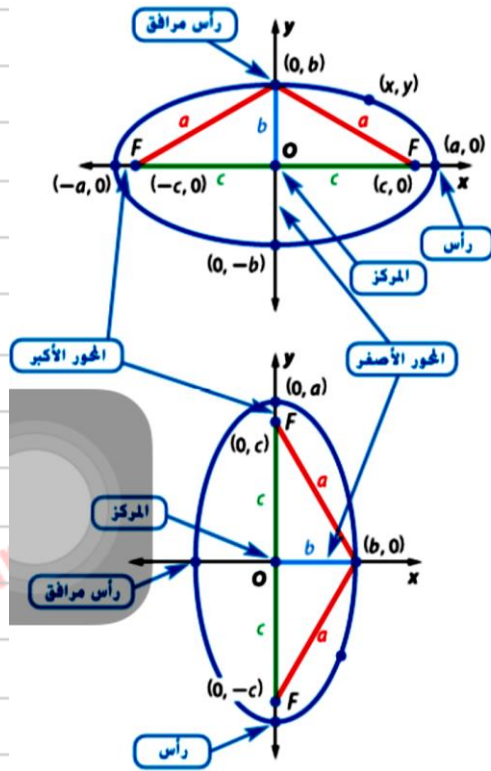




1 معادلات القطع الناقص القطع الناقص

هو مجموعة جميع النقاط في مستوى والتي يكون مجموع بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين ثابتاً. يطلق على هاتين النقطتين **البؤرتان** للقطع الناقص.

ذكر الطلاب أن للقطع الناقص محوري تماثل. وهما **المحور الأكبر** و**المحور الأصغر**. المحوران متعامدان على **مركز** القطع الناقص.

تقع البؤرتان للقطع الناقص دائماً على المحور الأكبر. النقاط الطرفية للمحور الأكبر هي **رؤوس** القطع الناقص والنقاط الطرفية للمحور الأصغر هي **الرؤوس** **المرافقة** للقطع الناقص.

Parameters

a	المسافة بين أي بؤرة وأي رأس مرافق (أو) المسافة بين المركز وأي رأس
b	المسافة بين المركز وأي رأس مرافق
c	المسافة بين المركز وأي بؤرة

Relationship

$$c^2 = a^2 - b^2$$

صور معادلات القطوع الناقصة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل

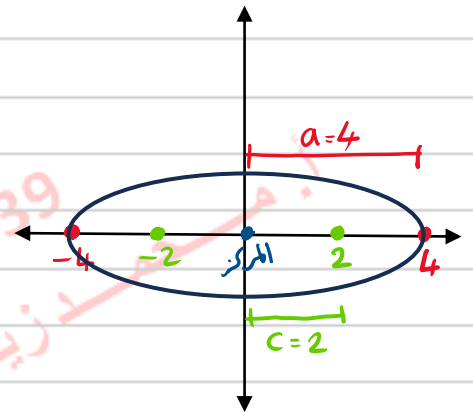
الصيغة القياسية	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$
الاتجاه		
الرأسين	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
البؤرتين	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
الرؤوس المرافقة	$(0, \pm b)$	$(\pm b, 0)$
طول المحور الأكبر	$2a$	$2a$
طول المحور الأصغر	$2b$	$2b$

مثال 1: اكتب معادلة قطع ناقص يقع رأساه عند النقطتين $(-4, 0)$ و $(4, 0)$ وبؤرتاه عند $(-2, 0)$ و $(2, 0)$

المركز : نقطة المنتصف بين الرأسين

$$\text{المركز} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{4 + (-4)}{2}, \frac{0 + 0}{2} \right) = (0, 0)$$

نقطة الأصل



قطع محوره الأكبر أفقي $\Leftarrow a^2$ تحت x

$$a=4, \quad c=2$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 2^2 = 4^2 - b^2$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{4^2 - 2^2}$$

$$b = \sqrt{12}$$

المعادلة : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{12})^2} = 1$$

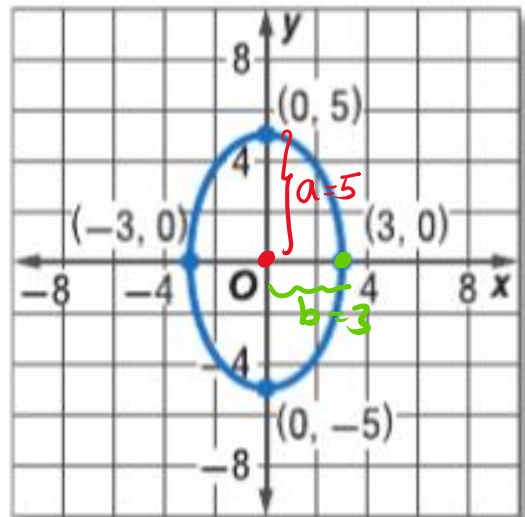
مثال 2: أكتب معادلة القطع الناقص التالي

المركز منتصف $(3, 0)$, $(-3, 0)$

$$\text{المركز} = \left(\frac{3 + (-3)}{2}, \frac{0 + 0}{2} \right) = (0, 0)$$

المحور الأكبر رأسي $\Leftarrow a^2$ تحت y

$$a=5, \quad b=3$$

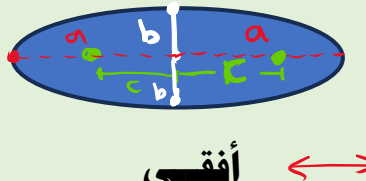


المعادلة

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

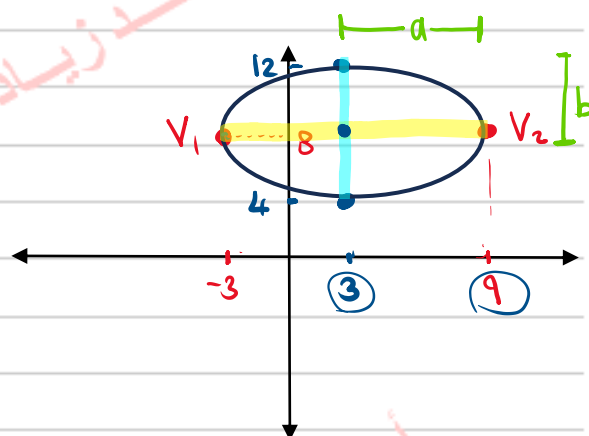
$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$$

KeyConcept Equations of Ellipses Centered at (h, k)

الصيغة القياسية	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
الاتجاه	 أفقي	 رأسي
الرأسين	$(h \mp a, k)$	$(h, k \mp a)$
البؤرتين	$(h \mp c, k)$	$(h, k \mp c)$
الرؤوس المرافقة	$(h, k \mp b)$	$(h \mp b, k)$
طول المحور الأكبر	$2a$	$2a$
طول المحور الأصغر	$2b$	$2b$

مثال 3: اكتب معادلة لقطع ناقص يقع رأساه عند $(-3, 8)$ و $(9, 8)$ ورأساه المرافقان عند $(3, 12)$ و $(3, 4)$

↓ المنتصف (المركز)
 $\text{المركز} = \left(\frac{-3+9}{2}, \frac{8+8}{2} \right) = (3, 8)$
 المحور الأكبر أفقي
 a^2 نصف X



$$a = 9 - 3 = 6$$

$$b = 12 - 8 = 4$$

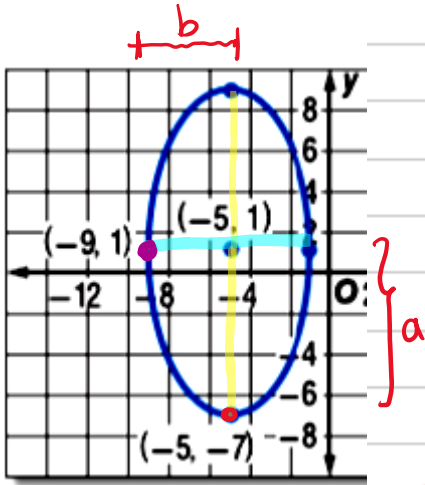
المعادلة: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$$\frac{(x-3)^2}{6^2} + \frac{(y-8)^2}{4^2} = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y-8)^2}{16} = 1$$

مثال 4: أكتب معادلة كل من القطوع التالية

1)



المركز $(-5, 1)$
 $h = -5, k = 1$

المحور الأكبر رأسي $\Rightarrow a^2$ تحت y

$$a = 1 - (-7) = 8$$

$$b = -5 - (-9) = 4$$

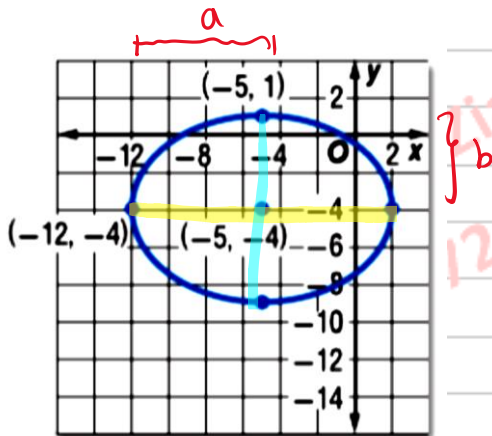
المعادلة:

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y - 1)^2}{8^2} + \frac{(x - (-5))^2}{4^2} = 1$$

$$\frac{(y - 1)^2}{64} + \frac{(x + 5)^2}{16} = 1$$

2)



المركز $(-5, -4)$

المحور الأكبر أفقي

a^2 تحت x

$$a = -5 - (-12) = 7$$

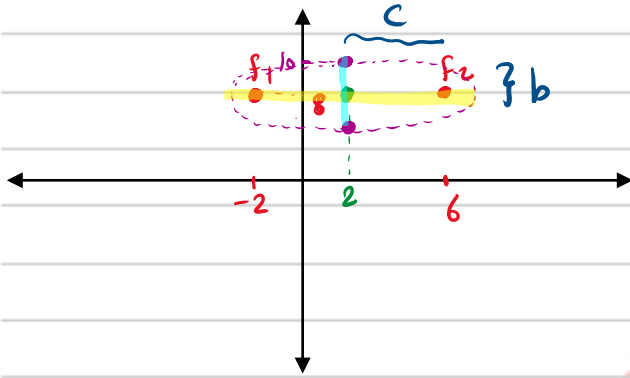
$$b = 1 - (-4) = 5$$

المعادلة:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x + 5)^2}{49} + \frac{(y + 4)^2}{25} = 1$$

3) تقع البؤرتان عند $(-2, 8)$ و $(6, 8)$. ويقع الرأس المرافق عند $(2, 10)$



$$\text{المركز } \left(\frac{6+(-2)}{2}, \frac{8+8}{2} \right) = (2, 8)$$

المحور الأكبر أفقي بحجم a^2 تحت x

$$b = 10 - 8 = 2$$

$$c = 6 - 2 = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$4^2 = a^2 - 2^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} \\ a = \sqrt{20}$$

$$\text{المعادلة: } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{20} + \frac{(y-8)^2}{4} = 1$$

مثال 5: جد إحداثيات المركز، الرأسين، الرأسين المرافقين، البؤرتين، طول المحور الأكبر،

وطول المحور الأصغر ثم مثل القطع الناقص بيانيا

$$1) \frac{(y+1)^2}{64} + \frac{(x-5)^2}{28} = 1$$

المركز $(5, -1)$

قطع مصوره الأكبر رأسي

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{64} \Rightarrow a = 8$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{28} \Rightarrow b = 2\sqrt{7}$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = (8)^2 - (2\sqrt{7})^2 = 36 \Rightarrow c = \sqrt{36} = 6$$

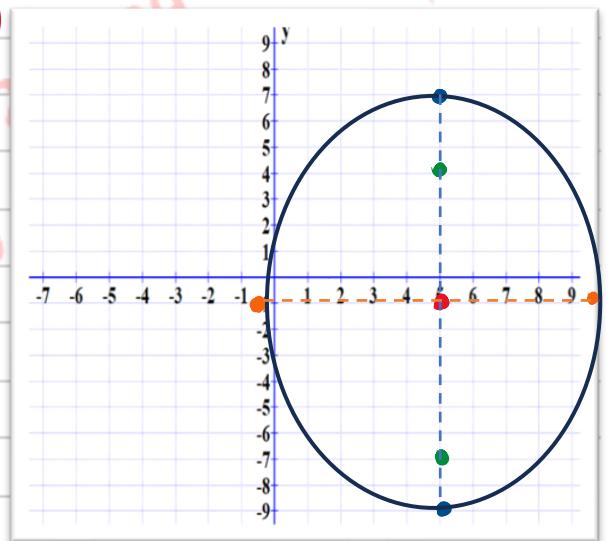
$$\text{الرأسين } (5, -1 \pm 8) = (5, -9), (5, 7)$$

$$\text{الرأسين المرافقين } (5 \pm 2\sqrt{7}, -1) = (5 - 2\sqrt{7}, -1), (5 + 2\sqrt{7}, -1)$$

$$\text{البؤرتان } (5, -1 \pm 6) = (5, -7), (5, 5)$$

$$\text{طول المحور الأكبر} = 2a = 2(8) = 16$$

$$\text{طول المحور الأصغر} = 2b = 2(2\sqrt{7}) = 4\sqrt{7}$$



$$2) x^2 + 4y^2 - 2x + 24y + 21 = 0$$

$$x^2 - 2x + 4y^2 + 24y = -21$$

$$x^2 - 2x + (-1)^2 + 4(y^2 + 6y + 3^2) = -21 + (-1)^2 + 4(3)^2$$

$$\left(\frac{-2}{2}\right)^2 = (-1)^2$$

$$\left(\frac{+6}{2}\right)^2 = (+3)^2$$

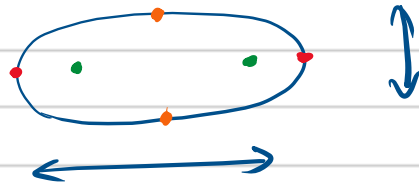
$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{4(y+3)^2}{16} = \frac{16}{16}$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

المركز (1, -3) المقطع افقي

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{16} \Rightarrow a = 4$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{4} \Rightarrow b = 2$$



$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4$$

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{12} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

$$\text{الرؤس} (1 \mp 4, -3) = (-3, -3), (5, -3)$$

$$\text{الرؤس المرفقة} (1, -3 \mp 2) = (1, -5), (1, -1)$$

$$\text{البؤرتين} (1 \mp 2\sqrt{3}, -3) = (1 - 2\sqrt{3}, -3), (1 + 2\sqrt{3}, -3)$$

$$\text{طول المحور الأكبر} = 2a = 2(4) = 8$$

$$\text{طول المحور الأصغر} = 2b = 2(2) = 4$$

