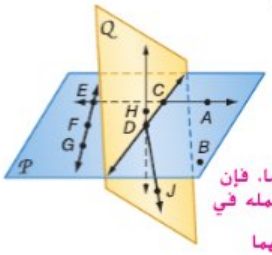
في الشكل الموجود على اليسار، $\overleftrightarrow{CD}$ و$\overleftrightarrow{CE}$ يقعان في المستوى P و$\overleftrightarrow{DH}$ و$\overleftrightarrow{DJ}$ يقعان في المستوى Q. اذكر المسلّمة التي يمكن استخدامها لإثبات أنّ كل عبارة صحيحة.



34. تقع النقطتان C وB على استقامة واحدة. المسلّمة 2.1: أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

35. $\overleftrightarrow{EG}$ يحتوي على النقاط E، F، G. المسلّمة 2.3: يحتوي المستقيم على نقطتين على الأقل.

36. $\overleftrightarrow{DA}$ يقع في المستوى P. المسلّمة 2.5: إذا وقعت نقطتان في مستوى ما، فإن المستقيم الذي يحتوي على النقطتين يقع بأكمله في ذلك المستوى.

37. تقع النقطتان D وF على استقامة واحدة. المسلّمة 2.1: أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

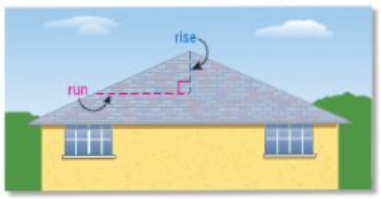
38. تقع النقاط C، D، B في المستوى نفسه. المسلّمة 2.2: أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

39. يحتوي المستوى Q على النقاط C، H، D، J. 39-41. انظر الهامش.

40. $\overleftrightarrow{AC}$ و$\overleftrightarrow{FG}$ يتقاطعان عند النقطة E.

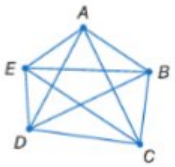
41. يتقاطع المستوى P والمستوى Q عند $\overleftrightarrow{CD}$.

42. **فرضيات** تصمم الأسقف بناءً على المواد المستخدمة لضمان عدم تسرب الماء إلى المباني التي تغطيها. تبنى بعض الأسقف من مواد مقاومة للماء، وتبنى الأسقف الأخرى لصرف الماء أو التخلص منه بتأثير الجاذبية. درجة ميل السقف عبارة عن الارتفاع عن اتساع السقف. وهي تقاس عامة بالارتفاع لكل متر من الاتساع. استخدم العبارات أدناه لكتابة برهان حر يعلل العبارات التالية: إن درجة ميل السقف في تصميم منزل ليست منحدرة بالشكل الكافي. انظر الهامش.



- يجب أن يكون للأسقف المقاومة للماء حد أدنى من الميلان يساوي $\frac{1}{4}$ cm من لكل 1 m.
- يجب أن يكون لأسقف صرف الماء حد أدنى من الميلان يساوي 4 cm لكل 1 m.
- تصمم منازل بسقف لصرف الماء.
- درجة الميل في تصميم منزل هي 2 cm لكل 1 m.

43. **شبكات** يقوم عامر بإنشاء شبكة من عدة أجهزة كمبيوتر بحيث يتصل كل جهاز كمبيوتر بجميع الأجهزة الأخرى. يوضح الرسم التخطيطي الوارد على اليسار هذه الشبكة إذا كان لدى عامر 5 أجهزة كمبيوتر.



a. صمم رسومًا تخطيطية للشبكات إذا كان لدى عامر 2 أو 3 أو 4 أو 6 من أجهزة الكمبيوتر. a، b. انظر ملحق إجابات الوحدة R.

b. أنشئ جدولًا يعدد أجهزة الكمبيوتر وعدد التوصيلات للرسوم التخطيطية التي صممتها.

c. إذا كان ثمة عدد n من أجهزة الكمبيوتر، فاكتب تعبيرًا عن عدد أجهزة الكمبيوتر الذي يتصل بها كل جهاز. $n - 1$

d. إذا كان ثمة عدد n من أجهزة الكمبيوتر، فاكتب تعبيرًا عن عدد الوصلات الموجودة. $\frac{n(n-1)}{2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

39. المسلّمة 2.4: يحتوي المستوى على ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.

40. المسلّمة 2.6: إذا تقاطع مستقيمان، فإن تقاطعهما يكون في نقطة واحدة فقط.

41. المسلّمة 2.7: إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون في صورة مستقيم.

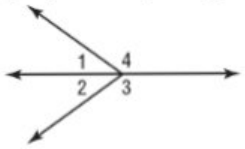
إضغط هنا
قناة ملفات
رياضيات 9 عام

انتبه!

الإجابة عن السؤال أرشد الطلاب إلى قراءة المسائل بعناية ليتأكدوا من تقديم المعلومات المطلوبة. في أسئلة التمرين الموجّه للمثالين 2 و4، وضّح أنه ينبغي على الطلاب إيجاد قياس الزاوية لا قيمة المتغير فقط. ومع ذلك، يجب عليهم استخدام قيمة المتغير للتوصل إلى الإجابة الصحيحة.

مثال إضافي

3 في الشكل، تكون $\angle 1$ و$\angle 4$ زوجًا خطيًا. و$m\angle 3 + m\angle 1 = 180$. أثبت أنّ $\angle 3$ و$\angle 4$ متطابقتان.



العبارات (المبررات)

1. $m\angle 3 + m\angle 1 = 180$؛ تكون $\angle 1$ و$\angle 4$ زوجًا خطيًا. (معطى)
2. الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 4$ متكاملتان. (أزواج الزوايا الخطية متكاملة)
3. الزاويتان $\angle 3$ و$\angle 1$ متكاملتان. (تعريف $\triangle$ المتكاملة)
4. $\angle 4 \cong \angle 3$ (الزاويتان المكملتان لـ $\angle$ نفسها تكونان $\cong$).

نصائح للمعلمين الجدد

الأمثلة اطلب من الطلاب التفكير في قياسات محتملة للزوايا يمكن استخدامها في نظرية تكامل الزوايا المتطابقة لتحفيزها بمثال محدد، وذلك قبل أن تشرح البرهان الشكلي.

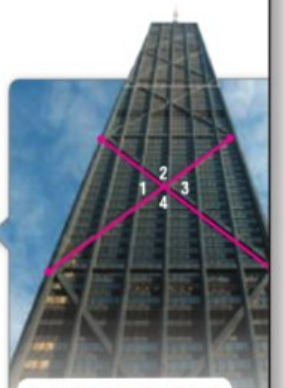
البرهان إحدى حالات نظرية تطابق الزوايا المتكاملة

المعطيات: الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 2$ متكاملتان.
الزاويتان $\angle 2$ و$\angle 3$ متكاملتان.

المطلوب إثباته: $\angle 1 \cong \angle 3$

البرهان:

العبارات	المبررات
1. الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 2$ متكاملتان. الزاويتان $\angle 2$ و$\angle 3$ متكاملتان.	1. المعطيات
2. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$; $m\angle 2 + m\angle 3 = 180$	2. تعريف الزوايا المتكاملة
3. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$	3. التعويض
4. $m\angle 2 = m\angle 2$	4. خاصية الانعكاس
5. $m\angle 1 = m\angle 3$	5. خاصية الطرح
6. $\angle 1 \cong \angle 3$	6. تعريف الزوايا المتطابقة



الربط بالحياة اليومية

يستخدم مبنى جون هانكوك المتكوّن من 100 طابق دعامات على شكل حرف X في تصميمه، وتتصل هذه الأقطار بالأعمدة الخارجية، مما يجعل انتقال قوى الرياح الشديدة إلى الأعمدة الخارجية بعيدًا عن الدعامات وعودتها ممكنًا.

المصدر: PBS

مثال 3 براهين باستخدام نظرية تطابق الزوايا المتتامة أو نظرية تطابق الزوايا المتكاملة

أثبت أن الزاويتين المتقابلتين بالرأس 2 و4 في الصورة في جهة اليمين متطابقتان.

المعطيات: الزاويتان $\angle 2$ و$\angle 4$ متقابلتان بالرأس.

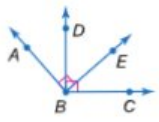
المطلوب إثباته: $\angle 4 \cong \angle 2$

البرهان:

العبارات	المبررات
1. الزاويتان $\angle 2$ و$\angle 4$ متقابلتان بالرأس.	1. المعطيات
2. الزاويتان $\angle 2$ و$\angle 4$ غير متجاورتين تكونتا بواسطة مستقيمات متقاطعة.	2. تعريف الزوايا المتقابلة بالرأس
3. تكوّن الزاويتان $\angle 2$ و$\angle 3$ زاوية مستقيمة. تكوّن الزاويتان $\angle 3$ و$\angle 4$ زاوية مستقيمة.	3. تعريف الزاوية المستقيمة
4. الزاويتان $\angle 2$ و$\angle 3$ متكاملتان. الزاويتان $\angle 3$ و$\angle 4$ متكاملتان.	4. نظرية الزاويتين المتكاملتين
5. $\angle 2 \cong \angle 4$	5. إنّ $\triangle$ المكملة للزاوية $\angle$ نفسها أو $\triangle \cong$ تكون $\cong$

تمرين موجّه

3. في الشكل، الزاويتان $\angle ABE$ و$\angle DBC$ قائمتان. أثبت أنّ الزاوية $\angle EBC \cong \angle ABD$. **انظر الهامش.**



مراجعة المفردات

الزاويتان المتقابلتان بالرأس زاويتان غير متجاورتين تكونتا بواسطة مستقيمات متقاطعة

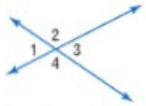
لاحظ أنه في المثال 3، الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 3$ متقابلتان بالرأس. تدعم الخلاصة الواردة في المثال نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس.

النظرية 4.8 نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس

إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فهما متطابقتان.

الاختصار *الزوايا المتقابلة بالرأس* $\triangle$ تكون $\cong$.

مثال $\angle 3 \cong \angle 1$ و$\angle 4 \cong \angle 2$

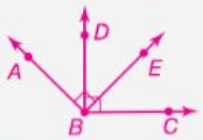


سوف تثبت النظرية 4.8 في التمرين 28.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

3. المعطيات: الزاويتان $\angle ABE$ و$\angle DBC$ قائمتان.



المطلوب إثباته: $\angle ABD \cong \angle EBC$

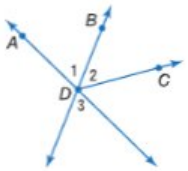
البرهان:
العبارات (المبررات)

1. الزاويتان $\angle ABE$ و$\angle DBC$ قائمتان. (معطى)
2. $m\angle ABE = 90$; $m\angle DBC = 90$ (تعريف $\angle$ القائمة)
3. الزاويتان $\angle ABD$ و$\angle DBE$ متتامتان؛ والزاويتان $\angle DBE$ و$\angle EBC$ متتامتان. (نظرية $\cong$ الزوايا المتتامة)
4. $\angle ABD \cong \angle EBC$ (إنّ $\triangle$ المتممتين لـ $\angle$ نفسها أو $\cong$ $\triangle$ تكونان $\cong$).

Uncorrected first proof - for training purposes only

مثال 4 استخدام الزوايا المتقابلة بالرأس

أثبت أنه إذا كان $\overrightarrow{DB}$ ينصّف الزاوية $\angle ADC$، فإن $\angle 3 \cong \angle 2$.



المعطيات: ينصّف $\overrightarrow{DB}$ الزاوية $\angle ADC$.

المطلوب إثباته: $\angle 3 \cong \angle 2$

البرهان:

العبارات	المبررات
1. ينصّف $\overrightarrow{DB}$ الزاوية $\angle ADC$.	1. المعطيات
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. تعريف منصّف الزوايا
3. الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 3$ متقابلتان بالرأس.	3. تعريف الزوايا المتقابلة بالرأس
4. $\angle 1 \cong \angle 3$	4. الزوايا المتقابلة بالرأس $\triangleq$ تكون $\cong$.
5. $\angle 3 \cong \angle 2$	5. خاصية التعدي في التطابق
6. $\angle 2 \cong \angle 3$	6. خاصية التماثل في التطابق

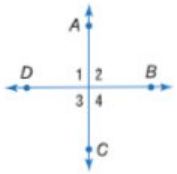
تمرين موجّه

4. إذا كانت الزاويتان $\angle 3$ و$\angle 4$ متقابلتين بالرأس. $m\angle 3 = 6x + 2$، و$m\angle 4 = 8x - 14$. فأوجد $m\angle 3$ و$m\angle 4$. برّر كل خطوة.

4. $m\angle 3 = m\angle 4$ (نظرية $\triangleq$ المتقابلة بالرأس)
$6x + 2 = 8x - 14$ (التعويض)
$6x + 2 + 14 = 8x - 14 + 14$ (خاصية الجمع)
$6x + 16 = 8x$ (التعويض)
$6x + 16 - 6x = 8x - 6x$ (خاصية الطرح)
$16 = 2x$ (التعويض)
$\frac{16}{2} = \frac{2x}{2}$ (خاصية القسمة)
$8 = x$ (التعويض)
$m\angle 3 = 6x + 2$ (معطى)
$m\angle 3 = 6(8) + 2$ أو 50 (التعويض)
$m\angle 4 = m\angle 3$ (نظرية $\triangleq$ المتقابلة بالرأس)
$m\angle 4 = 50$ (التعويض)

يمكن استخدام النظريات الواردة في هذا الدرس لإثبات نظريات الزاوية القائمة التالية.

النظريات نظريات الزاوية القائمة

النظرية	مثال
R.9 يتقاطع المستقيمان المتعامدان ليكونا أربع زوايا قائمة. **مثال** إذا كان $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$، فإن $\angle 1$ و$\angle 2$ و$\angle 3$ و$\angle 4$ $\triangleq$ قائمة.	
R.10 كل الزوايا القائمة متطابقة. **مثال** إذا كانت $\angle 1$ و$\angle 2$ و$\angle 3$ و$\angle 4$ $\triangleq$ قائمة، فإن $\angle 4 \cong \angle 3 \cong \angle 2 \cong \angle 1$.	
R.11 المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا متجاورة متطابقة. **مثال** إذا كان $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$ و$\angle 4 \cong \angle 2$ و$\angle 3 \cong \angle 4$ و$\angle 3 \cong \angle 1$.	
R.12 إذا كانت الزاويتان متكاملتين ومتطابقتين، فإنهما قائمتان. **مثال** إذا كانت $\angle 6 \cong \angle 5$ و$\angle 5$ مكملة للزاوية $\angle 6$، فإن $\angle 5$ و$\angle 6$ $\triangleq$ قائمتان.	
R.13 إذا كوّنت زاويتان متطابقتان زاوية مستقيمة، فإنهما قائمتان. **مثال** إذا كوّنت $\angle 7$ و$\angle 8$ زاوية مستقيمة، فإن $\angle 7$ و$\angle 8$ $\triangleq$ قائمتان.	

سوف تثبت النظريات من R.9 إلى R.13 في التمارين من 22 إلى 26.

p137

مثال إضافي

4 إذا كانت الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 2$ متقابلتين بالرأس و$m\angle 1 = d - 32$، و$m\angle 2 = 175 - 2d$. فأوجد $m\angle 1$ و$m\angle 2$. برّر كل خطوة.
37; 37

العبارات (المبررات)
1. الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 2$ متقابلتان بالرأس. (معطى)
2. $\angle 2 \cong \angle 1$ (إنّ $\triangleq$ المتقابلتين بالرأس متطابقتان).
3. $m\angle 1 = m\angle 2$ (تعريف التطابق)
4. $d - 32 = 175 - 2d$ (خاصية التعويض في المعادلة)
5. $3d = 207$ (خاصية الجمع في المعادلة)
6. $d = 69$ (خاصية القسمة في المعادلة)
7. $m\angle 1 = 37$ (خاصية التعويض في المعادلة)
8. $m\angle 2 = 37$ (خاصية التعويض في المعادلة)

التدريس المتمايز ق م ض م

إذا كان الطلاب يجدون صعوبة في تذكر الفرق بين الزوايا المتتامة والزوايا المتكاملة،

فيمكن أن تطلب منهم كتابة قصيدة قصيرة أو نشيد إيقاعي لمساعدتهم على تذكر التعريفات.

McGraw-Hill Education حقوق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة

Uncorrected first proof - for training purposes only

41. إنّ البرهان غير الشكلي أو البرهان الحر هو أحد أنواع البراهين حيث تُكتب الخطوات في عبارات تامة على شكل فقرة. وثمة تشابه بين هذا النوع من البرهان والبرهان من عمودين في المحتوى ولكنها يختلفان في الشكل. حيث تُدرج العبارات (الخلاصات) في أحد العمودين، بينما تُدرج مبررات صحة كل عبارة في العمود الآخر. راجع عمل الطلاب.

الدرس R-3

5. المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $AB + CD = EF$

المطلوب إثباته: $2AB = EF$

العبارات (المبررات)

1. $AB + CD = EF$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (معطى)
2. $AB = CD$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)
3. $AB + AB = EF$ (التعويض)
4. $2AB = EF$ (خاصية التعويض)

6. المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

المطلوب إثباته: $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (معطى)
2. $AB = CD$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)
3. $CD = AB$ (خاصية التماثل)
4. $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)

7. المعطيات: $\overline{AB}$

المطلوب إثباته: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{AB}$ (معطى)
2. $AB = AB$ (خاصية الانعكاس)
3. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)

8a.

8b. المعطيات: تقع المدن A وB وC وD على استقامة واحدة.
تبعد المدينة C 126 كيلومترًا عن المدينة D.
وتبعد المدينة C 263 كيلومترًا عن المدينة A.
بينما تبعد المدينة A 137 كيلومترًا عن المدينة D.
وأخيرًا تبعد المدينة A 184 كيلومترًا عن المدينة B.

المطلوب إثباته: تقع المدن من الغرب إلى الشرق بالترتيب الآتي المدينة A ثم المدينة D ثم المدينة B ثم المدينة C.

البرهان:

تبلغ المسافة بين المدينة A والمدينة D 137 كيلومترًا.
وتبلغ المسافة بين المدينة D والمدينة B 47 كيلومترًا.
وتبلغ المسافة بين المدينة B والمدينة C 79 كيلومترًا.

ونعرف أن كل النقاط تقع على استقامة واحدة. بما أنّ المدينة D تبعد 137 كيلومترًا عن المدينة A، وتبعد المدينة C عن المدينة A 263 كيلومترًا، فذلك يعني أن المدينة D تقع بين المدينتين A وC. وبما أنّ المدينة B تبعد 184 كيلومترًا عن المدينة A، وأن المدينة D تبعد 137 كيلومترًا عن المدينة A، فإن المدينة D تقع بين المدينتين B وA. وبما أنّ المدينة C تبعد 253 كيلومترًا عن المدينة A، وأن المدينة B تبعد 184 كيلومترًا عن المدينة A، فذلك يعني أن المدينة B تقع بين المدينتين C وA. لذا، يمكن القول إن المدن تقع من الشرق إلى الغرب بالترتيب الآتي: المدينة A ثم المدينة D ثم المدينة B ثم المدينة C.
تبعد المدينة D 137 كيلومترًا عن المدينة A، بينما تبعد المدينة B 184 كيلومترًا عن المدينة A. لذا باستخدام مسلّمة جمع القطع المستقيمة، سنجد أنّ المدينة D تبعد $137 - 184$ أو 47 كيلومترًا عن المدينة B. تبلغ المسافة من المدينة A حتى المدينة C 263 كيلومترًا والمسافة من المدينة A حتى المدينة B 184 كيلومترًا. لذا باستخدام مسلّمة جمع القطع المستقيمة، ستكون المسافة من المدينة B حتى المدينة C $184 - 263$ أو 79 كيلومترًا.

9. المعطيات: $\overline{SC} \cong \overline{HR}$ و$\overline{HR} \cong \overline{AB}$

المطلوب إثباته: $\overline{SC} \cong \overline{AB}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{SC} \cong \overline{HR}$ و $\overline{HR} \cong \overline{AB}$ (معطى)
2. $SC = HR$ و$HR = AB$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)
3. $SC = AB$ (خاصية التعدي)
4. $\overline{SC} \cong \overline{AB}$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)

10. المعطيات: $\overline{VZ} \cong \overline{VY}$ و$\overline{WY} \cong \overline{XZ}$

المطلوب إثباته: $\overline{VW} \cong \overline{VX}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{VZ} \cong \overline{VY}$ و $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ (معطى)
2. $VZ = VY$ و$WY = XZ$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)
3. $VZ = VX + XZ$ و$VY = VW + WY$ (مسلّمة جمع القطع المستقيمة)
4. $VX + XZ = VW + WY$ (التعويض)
5. $VX + WY = VW + WY$ (التعويض)
6. $VX = VW$ (خاصية الطرح)
7. $VW = VX$ (خاصية التماثل)
8. $\overline{VW} \cong \overline{VX}$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)

11. المعطيات: X نقطة منتصف $\overline{DF}$ و$\overline{CD} \cong \overline{FG}$

المطلوب إثباته: $\overline{CE} \cong \overline{EG}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. E نقطة منتصف $\overline{DF}$ و$\overline{CD} \cong \overline{FG}$. (معطى)
2. $DE = EF$ (تعريف نقطة المنتصف)
3. $CD = FG$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)
4. $CD + DE = EF + FG$ (خاصية الجمع)
5. $CE = CD + DE$ و$EG = EF + FG$ (مسلّمة جمع القطع المستقيمة)
6. $CE = EG$ (التعويض)
7. $\overline{CE} \cong \overline{EG}$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Uncorrected first proof - for training purposes only

إجابات إضافية

29. المعطيات: $c^2 = a^2 + b^2$

المطلوب إثباته: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $a^2 + b^2 = c^2$ (معطى)
2. $a^2 + b^2 - b^2 = c^2 - b^2$ (خاصية الطرح)
3. $a^2 = c^2 - b^2$ (التعويض)
4. $a = \pm\sqrt{c^2 - b^2}$ (خاصية الجذر التربيعي)
5. $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ (لا يمكن أن يكون الطول سالبًا)

30. تعتبر علاقة "له عيد الميلاد نفسه مثل." علاقة تكافؤ لأنها تحقق الخواص الثلاث. نموذج الإجابة: يمكن أن يكون لك عيد الميلاد نفسه مثلك (الانعكاس)؛ إذا كان لك عيد الميلاد نفسه مثل صديقك، فإن لصديقك عيد الميلاد نفسه مثلك (التماثل)؛ إذا كان لك عيد الميلاد نفسه مثل ناصر ولناصر عيد الميلاد نفسه مثل صالح، فإن لك عيد الميلاد نفسه مثل صالح (التعدي).

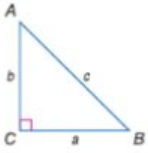
31. لا تُعدّ علاقة "أطول من." علاقة تكافؤ لأنها لا تحقق خواص الانعكاس والتماثل. لا يمكنك أن تكون أطول من نفسك (الانعكاس)؛ وإذا كنت أطول من صديقك، فإن ذلك لا يتضمن أن يكون صديقك أطول منك (التماثل).

32. لا تعتبر علاقة "أكثر زرقة من" علاقة تكافؤ لأنها لا تحقق خاصية الانعكاس. فلا يمكن أن يكون لون ما أكثر زرقة من نفسه.

33. العلاقة "$\neq$" ليست علاقة تكافؤ لأنها لا تحقق خاصية الانعكاس، لأن $a \neq a$ ليست صحيحة.

34. العلاقة "$\geq$" ليست علاقة تكافؤ لأنها لا تحقق خاصية التماثل، لأن $3 \geq 2$ لا تستلزم $2 \geq 3$.

35. العلاقة "$\approx$" ليست علاقة تكافؤ لأنها لا تحقق خاصية الانعكاس، لأن $a \approx a$ ليست صحيحة.



29. **نظرية فيثاغورس** تنص نظرية فيثاغورس على أنه في أي مثلث قائم الزاوية ABC، يكون مجموع مربع طول الضلعين a وb مساويًا لمربع طول الوتر c، أو $a^2 + b^2 = c^2$. اكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. استخدم خاصية الجذر التربيعي في المعادلة، التي تنص على أنه إذا كان $a^2 = b^2$، فإن $a = \pm\sqrt{b^2}$. **انظر الهامش.**

C **علاقة *التكافؤ* عبارة عن أي علاقة تحقق خاصية الانعكاس والتماثل والتعدي. في الأعداد الحقيقية، تعتبر المساواة أحد أنواع علاقة التكافؤ. حدّد ما إذا كانت كل علاقة هي علاقة تكافؤ. اشرح تبريرك.**

30. "له عيد الميلاد نفسه مثل." بالنسبة إلى مجموعة كل البشر **35–30. انظر الهامش.**

31. "أطول من." بالنسبة إلى مجموعة كل البشر

32. "أكثر زُرقة من" بالنسبة إلى كل ألوان الدهان التي تحتوي على الأزرق

33. $\neq$، بالنسبة إلى مجموعة الأعداد الحقيقية

34. $\geq$، بالنسبة إلى مجموعة الأعداد الحقيقية

35. $\approx$، بالنسبة إلى مجموعة الأعداد الحقيقية

مهارات التفكير العليا، مسائل — استخدام مهارات التفكير العليا

36. **مسألة غير محددة الإجابة** اذكر مثالًا واحدًا من *الحياة اليومية* ومثالًا مغايرًا من *الحياة اليومية* لخواص التماثل والتعدي والتعويض. **انظر الهامش.**

37. **التفكير المنطقي** تقع النقطة P على $\overline{AB}$. طول $\overline{AP}$ يساوي $2x + 3$، و طول $\overline{PB}$ is $\frac{3x+1}{2}$ طول القطعة المستقيمة AB يبلغ 10.5 وحدات. صمّم رسمًا تخطيطيًا لهذا الموقف. وأثبت أنّ النقطة P تقع عند ثلثي المسافة بين النقطة A والنقطة B. **انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

التبرير صنّف كل عبارة أدناه إلى **صحيحة *أحيانًا***، **أو *دائمًا***، **أو غير صحيحة *على الإطلاق***. **اشرح تبريرك.**

38. إذا كان a وb عددين حقيقيين وكان $a + b = 0$، فإن $a = -b$.

38. دائمًا؛ نموذج الإجابة: إذا كان $a + b = 0$، فإن $a + b - b = 0 - b$ (خاصية الطرح) و$a = -b$ (التعويض). ولهذا تكون العبارة صحيحة دائمًا.

39. إذا كان a وb عددين حقيقيين و$a^2 = b$، فإن $a = \sqrt{b}$.

39. أحيانًا؛ نموذج الإجابة: إذا كان $a^2 = 1$ و$a = 1$، فإن $b = \sqrt{1}$ أو 1. تكون العبارة صحيحة أيضًا إذا كان $a = -1$ و$b = 1$. إذا كان $b = 1$ فإن $\sqrt{b} = 1$ بما أنّ الجذر التربيعي لعدد ما ليس سالبًا. ولهذا تكون العبارة صحيحة أحيانًا.

40. **تحفيز** وضعت علياء تخمينًا ينص على أنّ مجموع أي عددين صحيحين فرديين يكون عددًا صحيحًا زوجيًا.

a. اذكر المعلومات التي تدعم هذا التخمين. ثم اشرح السبب في أن المعلومات التي ذكرتها لا تثبت أن هذا التخمين صحيح. **a–d. انظر الهامش.**

b. يمكن تمثيل العددين الصحيحين الفرديين بالتعبيرين $2n - 1$ و$2m - 1$، حيث n وm عددان صحيحان. اذكر معلومات تدعم هذه العبارة.

c. إذا كان عدد ما زوجيًا، فإنه يكون من مضاعفات أي عدد؟ اشرح بالكلمات كيف يمكنك استخدام التعبيرات الواردة في الجزء **a** وإجابتك عن الجزء **b** لإثبات تخمين علياء.

d. اكتب برهانًا جبريًا لإثبات أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين يكون عددًا صحيحًا زوجيًا.

41. **الكتابة في الرياضيات** لماذا من المفيد أن يكون لديك صيغ مختلفة يمكنك استخدامها عند كتابة برهان؟

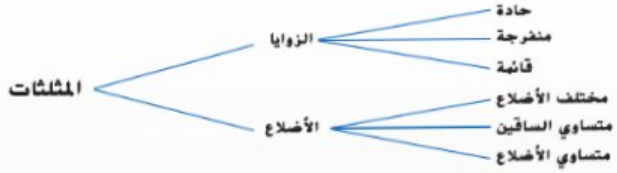
انظر ملحق إجابات الوحدة R.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز ض م أم

توسع ما الزوايا التي توجد في شجرة المثلثات ولها علاقات انعكاسية أو متعدية أو تماثلية؟

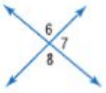
نموذج الإجابة: الزاوية الحادة لها علاقة متعدية مع الزوايا والمثلثات.



Uncorrected first proof - for training purposes only

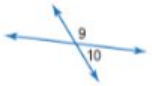
أوجد قياس كل زاوية مرقمة، واذكر النظريات المستخدمة التي تبرر عملك.

11. $m\angle 9 = 3x + 12$، $m\angle 10 = x - 24$



12. $m\angle 3 = 2x + 23$، $m\angle 4 = 5x - 112$

13. $m\angle 6 = 2x - 21$، $m\angle 7 = 3x - 34$



11. $m\angle 9 = 156$ و$m\angle 10 = 24$ (نظرية الزاويتين المتكاملتين ≅)

12. $m\angle 3 = 113$ و$m\angle 4 = 113$ (نظرية ∡ المتقابلة بالرأس)

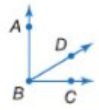
13. $m\angle 6 = 73$ و$m\angle 7 = 107$ و$m\angle 8 = 73$ (نظرية الزاويتين المتكاملتين ≅ ونظرية ∡ المتقابلة بالرأس)

مثال 4

البرهان اكتب برهانًا من عمودين. **14، 15. انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

14. **المعطيات:** $\angle ABC$ زاوية قائمة.

المطلوب إثباته: الزاويتان $\angle ABD$ و$\angle CBD$ متتامتان.



15. **المعطيات:** $\angle 6 \cong \angle 5$

أثبت أن: الزاويتان $\angle 4$ و$\angle 6$ متكاملتان.

3 اكتب برهانًا لكل نظرية. **16-19. انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

16. نظرية الزاويتين المتكاملتين

17. نظرية الزاويتين المتتامتين

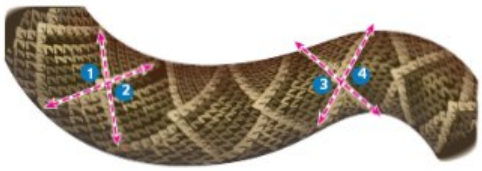
18. خاصية الانعكاس في تطابق الزوايا

19. خاصية التعدي في تطابق الزوايا

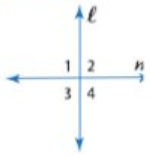
20. **الأعلام** انظر إلى العلم الموجود على اليسار. أثبت أنّ مجموع قياسات الزوايا الأربع يساوي 360. **انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

21. **فرضيات** الأفعى المجلجلة ذات الظهر ماسي الشكل أفعى سامة تتميز بنمط ماسي الشكل على ظهرها. يوجد تكبير لجزء من جلدها موضحًا أدناه. إذا كانت $\angle 4 \cong \angle 1$، فأثبت أنّ $\angle 3 \cong \angle 2$.

انظر ملحق إجابات الوحدة R.



البرهان استخدم الشكل لكتابة برهان كل نظرية. **22-26. انظر ملحق إجابات الوحدة R.**



22. النظرية 4.9

23. النظرية 4.10

24. النظرية 4.11

25. النظرية 4.12

26. النظرية 4.13

McGraw-Hill Education حقوق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة

p139

Uncorrected first proof - for training purposes only

نصائح للمعلمين الجدد

بناء المعرفة وضّح أنه مع كل درس جديد، يجمع الطلاب المعرفة بالمزيد من المسلّمات والنظريات التي يمكنهم استخدامها في كتابة البراهين. شجّع الطلاب على ممارسة استخدام هذه المفاهيم بقدر الإمكان قبل الانتقال إلى الدرس التالي لتقوية قدرتهم على تذكر الحقائق المهمة من أجل كتابة البراهين.

2 تطابق القطع المستقيمة

يوضح **المثال 2** طريقة استخدام الخواص والمسلّمات لإثبات تطابق القطع المستقيمة.

مثال إضافي

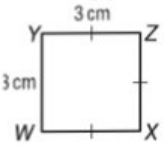
2 شارة يصمم جمال شارة للنادي الخاص به. يساوي طول الحافة العلوية للشارة طول حافتها اليسرى. تتطابق الحافة العلوية للشارة مع الحافة اليمنى لها. وتتطابق الحافة اليمنى للشارة مع الحافة السفلية لها. أثبت أن الحافة السفلية للشارة تتطابق مع حافتها اليسرى.

المعطيات: $WY = YZ$

$\overline{YZ} \cong \overline{XZ}$

$\overline{XZ} \cong \overline{WX}$

المطلوب إثباته: $\overline{WX} \cong \overline{WY}$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $WY = YZ$ (معطى)
2. $\overline{WY} \cong \overline{YZ}$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)
3. $\overline{XZ} \cong \overline{WX}$ ، $\overline{YZ} \cong \overline{XZ}$ (معطى)
4. $\overline{YZ} \cong \overline{WX}$ (خاصية التعدي)
5. $\overline{WX} \cong \overline{WY}$ (التعويض)

البرهان خاصية التعدي في التطابق

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ؛ $\overline{CD} \cong \overline{EF}$

المطلوب إثباته: $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

البرهان الحر:

بما أنّ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{EF}$، $\overline{AB} = \overline{CD}$ و $\overline{CD} = \overline{EF}$ بتعريف القطع المستقيمة المتطابقة. وبخاصية التعدي في المعادلة، $\overline{AB} = \overline{EF}$. ومن ثمّ، $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ بتعريف التطابق.

مثال من الحياة اليومية 2 البرهان باستخدام تطابق القطع المستقيمة

التطوع توضح الخريطة مسار سباق ركض خيري. تقطع النقطتان X وZ عند المنتصف بين خط البداية والنقطة Y وبين النقطة Y وخط النهاية F على التوالي. إذا كان بعدا النقطة Y عن النقطتين X وZ متساويين، فأثبت أن الطريق من النقطة Z إلى خط النهاية يتطابق مع الطريق من خط البداية إلى النقطة X.

المعطيات: X نقطة منتصف $\overline{SY}$، Z نقطة منتصف $\overline{YF}$، $XY = YZ$

المطلوب إثباته: $\overline{ZF} \cong \overline{SX}$

برهان من عمودين:

العبارات	المبررات
1. X نقطة منتصف $\overline{SY}$، Z نقطة منتصف $\overline{YF}$، $XY = YZ$	1. المعطيات
2. $\overline{SX} \cong \overline{XY}$؛ $\overline{YZ} \cong \overline{ZF}$	2. تعريف نقطة المنتصف
3. $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$	3. تعريف التطابق
4. $\overline{SX} \cong \overline{YZ}$	4. خاصية التعدي في التطابق
5. $\overline{SX} \cong \overline{ZF}$	5. خاصية التعدي في التطابق
6. $\overline{ZF} \cong \overline{SX}$	6. خاصية التماثل في التطابق

الربط بالحياة اليومية

وفقًا لاستطلاع أُجري مؤخرًا يبدأ 70% من المراهقين التطوع قبل سن 12 عامًا. وقال آخرون إنهم كانوا سيتطوعون إذا توافر لهم المزيد من الفرص للقيام بذلك.

المصدر: Youth Service America

2. المعطيات: $\overline{KL} \cong \overline{MN}$، $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$، $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

أثبت أنّ: $RS = KL$

البرهان: إذا كان $\overline{KL} \cong \overline{MN}$ و$\overline{MN} \cong \overline{PQ}$، فإنه، بخاصية التعدي في التطابق، $\overline{KL} \cong \overline{PQ}$. إذا كان $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$، فإن $\overline{KL} \cong \overline{RS}$ بخاصية التعدي في التطابق. $\overline{RS} \cong \overline{KL}$ بخاصية التماثل في التطابق و$RS = KL$ بتعريف التطابق. لذا، يكون للوح الأول المقطوع القياس نفسه لآخر لوح مقطوع.

تمرين موجّه

2. النجارة يقطع نجار لوحًا خشبيًا أبعاده 20 cm في 40 cm بالطول المرغوب. ثم يستخدم هذا اللوح كنموذج لقطع لوح آخر مطابق للأول، وبالمثل، يستخدم اللوح الثاني لقطع لوح ثالث واللوح الثالث لقطع لوح رابع.
أثبت أنّ آخر لوح مقطوع له قياسات اللوح الأول نفسها.

McGraw-Hill Education © تصوير لصالح مؤسسة التعليم والتأليف

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة البيضاء اكتب عدة براهين على اللوحة واحفظ عملك. انشر ملاحظاتك على صفحة ويب خاصة بالصف الدراسي بحيث تكون للطلاب مرجعًا إضافيًا خارج الصف الدراسي.

التركيز على محتوى الرياضيات

القطع المستقيمة من المهم معرفة أنّ الرسوم التخطيطية والأشكال المرفقة بالمسائل قد لا تكون دائمًا حسب المقياس. يمكن افتراض تطابق قطعتين مستقيمتين في سؤال. لكن يمكن أن تكونا مختلفتين إذا جرى قياسهما بالمسطرة. من ناحية أخرى، يمكن أن تنشئ توافيق معينة من المستقيمات خداعًا بصريًا ويمكن ألّا تظهر المستقيمات المتماثلة كذلك.

Uncorrected first proof - for training purposes only

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. وحدّد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات في حل المسألة.

يبلغ عدد الطلاب في مدرسة 292 طالبًا. شارك 94 منهم في الألعاب الرياضية. و122 في النوادي الثقافية. و31 في كليتيهما. فكم طالبًا في المدرسة لم يشارك في الألعاب الرياضية أو في النوادي الثقافية؟

A 95
B 107
C 122
D 138

اقرأ المسألة بعناية. من الواضح أنه لا توجد أمثلة مضادة، ولا يمكن استخدام مسلّمة للتوصل إلى نتيجة منطقية. لذا ينبغي أن تفكر في الأدوات التي يمكن أن تستخدمها لتنظيم المعلومات.

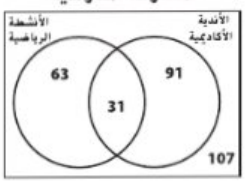
ويمكن استخدام مخطط فين لتوضيح التقاطع بين المجموعتين. ارسم مخطط فين باستخدام المعلومات المقدمة في عبارة المسألة.

حدّد عدد الطلاب الذين شاركوا في الألعاب الرياضية أو في النوادي الثقافية فقط.

الألعاب الرياضية فقط: $94 - 31 = 63$

النوادي الثقافية فقط: $122 - 31 = 91$

المشاركة المدرسية



استخدم هذه المعلومات لحساب عدد الطلاب الذين لم يشاركوا في الألعاب الرياضية ولا في النوادي الثقافية.

$292 - 63 - 91 - 31 = 107$

يوجد 107 طلاب لم يشاركوا في الألعاب الرياضية ولا في النوادي الثقافية. الإجابة الصحيحة هي B.

تمارين

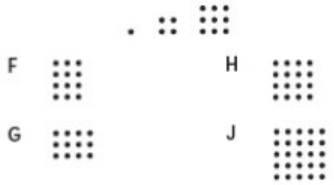
اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. حدّد مدى صحة العبارة التالية. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًا. D

ناتج ضرب عددين زوجيين هو عدد زوجي.

A خاطئة؛ $8 \times 4 = 32$
B خاطئة؛ $7 \times 6 = 42$
C خاطئة؛ $3 \times 10 = 30$
D صحيحة

2. أوجد العنصر التالي في النمط. H



McGraw-Hill Education © محفوظ لصالح مؤسسة ماكجرو هيل للتعليم والتدريب

مثال إضافي

تدريب على الاختبار المعياري

في مدرسة يبلغ عدد طلابها 367 طالبًا. يمتلك 185 منهم كلبًا كحيوان أليف. ويمتلك 163 منهم قطة كحيوان أليف. و97 منهم يمتلكون قطة وكلبًا. فكم طالبًا في المدرسة لا يمتلك كلبًا ولا قطة؟ B

A 8
B 116
C 270
D 348

3 التقويم

استخدم التمرينين 1 و2 لتقويم استيعاب الطلاب.

Uncorrected first proof - for training purposes only

الدرس R-2 (تمرين موجّه)

2B. $d = t \cdot \frac{u+v}{2}$ (معطى)

$\frac{d}{t} = \frac{u+v}{2}$ (خاصية القسمة)

$2\left(\frac{d}{t}\right) = 2\left(\frac{u+v}{2}\right)$ (خاصية الضرب)

$\frac{2d}{t} = u + v$ (التعويض)

$\frac{2d}{t} - v = u$ (خاصية الطرح)

$u = \frac{2d}{t} - v$ (خاصية التماثل)

الدرس R-2

8a. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $T = 0.75(220 - a)$ (معطى)
2. $\frac{T}{0.75} = 220 - a$ (خاصية القسمة)
3. $\frac{T}{0.75} - 220 = -a$ (خاصية الطرح)
4. $-\frac{T}{0.75} + 220 = a$ (خاصية الضرب)
5. $a = -\frac{T}{0.75} + 220$ (خاصية التماثل)
6. $a = 220 - \frac{T}{0.75}$ (خاصية التبديل)

8b. 16 عامًا؛ نموذج الإجابة: التعويض

26. المعطيات: $\angle MPN \cong \angle QPN$

المطلوب إثباته: $x = 16$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle MPN \cong \angle QPN$ (معطى)
2. $m\angle MPN = m\angle QPN$ (تعريف $\cong$ $\measuredangle$)
3. $x + 26 = 2x + 10$ (التعويض)
4. $16 = x$ (خاصية الطرح)
5. $x = 16$ (خاصية التماثل)

27a. المعطيات: $V = \frac{P}{l}$

المطلوب إثباته: $\frac{V}{2} = \frac{P}{2l}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $V = \frac{P}{l}$ (معطى)
2. $\frac{1}{2} \cdot V = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{l}$ (خاصية الضرب)
3. $\frac{V}{2} = \frac{P}{2l}$ (خاصية الضرب)

27b. المعطيات: $V = \frac{P}{l}$

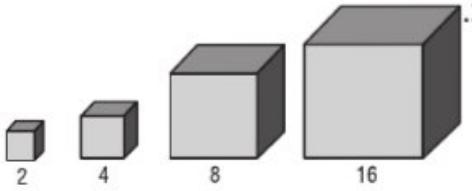
المطلوب إثباته: $2V = \frac{2P}{l}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $V = \frac{P}{l}$ (معطى)
2. $2 \cdot V = 2 \cdot \frac{P}{l}$ (خاصية الضرب)
3. $2V = \frac{2P}{l}$ (خاصية الضرب)

28a.



28c. نموذج الإجابة: عندما يتضاعف طول ضلع المكعب، يزيد الحجم بمقدار 8 أضعاف.

28e. المعطيات: مكعب طول ضلعه s وحجمه V

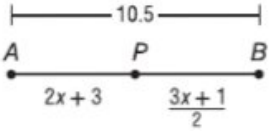
المطلوب إثباته: $8V = (2s)^3$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. طول الضلع $= s$ (معطى)
2. الحجم $= V$ (معطى)
3. $V = s^3$ (تعريف حجم المكعب)
4. $V = s \cdot s \cdot s$ (تعريف الأس)
5. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot V = 2 \cdot s \cdot 2 \cdot s \cdot 2 \cdot s$ (خاصية الضرب)
6. $8V = (2s)(2s)(2s)$ (خاصية الضرب)
7. $8V = (2s)^3$ (تعريف الأس)

37. المعطيات: $AP = 2x + 3$



$PB = \frac{3x+1}{2}$

$AB = 10.5$

المطلوب إثباته: $\frac{AP}{AB} = \frac{2}{3}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

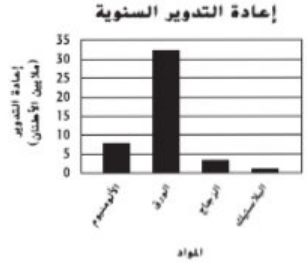
1. $AP = 2x + 3$ و $PB = \frac{3x+1}{2}$، $AB = 10.5$ (معطى)
2. $AP + PB = AB$ (تعريف القطعة المستقيمة)
3. $2x + 3 + \frac{3x+1}{2} = 10.5$ (الطرح)
4. $2 \cdot \left(2x + 3 + \frac{3x+1}{2}\right) = 2 \cdot 10.5$ (خاصية الضرب)
5. $2 \cdot \left(2x + 3 + \frac{3x+1}{2}\right) = 21$ (خاصية التعويض)
6. $2 \cdot 2x + 2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{3x+1}{2} = 21$ (خاصية القسمة)
7. $4x + 6 + 3x + 1 = 21$ (خاصية الضرب)
8. $7x + 7 = 21$ (خاصية الجمع)
9. $7x + 7 - 7 = 21 - 7$ (خاصية الطرح)
10. $7x = 14$ (التعويض)
11. $x = 2$ (خاصية القسمة)
12. $AP = 2(2) + 3$ (التعويض)
13. $AP = 4 + 3$ (خاصية الضرب)
14. $AP = 7$ (خاصية الجمع)
15. $\frac{AP}{AB} = \frac{7}{10.5}$ (التعويض)
16. $\frac{AP}{AB} = 0.\overline{6}$ (خاصية القسمة)
17. $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$ (خاصية القسمة)
18. $\frac{AP}{AB} = \frac{2}{3}$ (خاصية التعدي)

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

Uncorrected first proof - for training purposes only

تدريب على الاختبار المعياري

23. الجبر يوضح المخطط أدناه عملية إعادة التدوير السنوية حسب المواد في دولة ما. حوالي كم كيلوجرام من الألومنيوم تجري إعادة تدويره في كل عام؟ **D**



A 7.5
B 15,000
C 7,500,000
D 15,000,000,000

24. الجبر ما التعبير الذي يكافئ $\frac{12x^{-4}}{4x^{-8}}$؟ **G**

F $\frac{1}{3x^4}$
G $3x^4$
H $8x^2$
J $\frac{x^4}{3}$

25. إجابة قصيرة النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين هي 1:R. ما قياس الزاوية الأصغر؟ **18**

26. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول
تستطيع هالة طباعة 40 كلمة في الدقيقة على لوحة المفاتيح. كم عدد الدقائق التي ستستغرقها هالة لطباعة 200 كلمة؟ **C**

A 0.5
B 2
C 5
D 10
E 12

مراجعة شاملة

27. البرهان اكتب برهانًا من عمودين. (الدرس R-2)
المعطيات: $AC = DF$
$AB = DE$
المطلوب إثباته: $BC = EF$ **انظر الهامش.**

28. النماذج يستخدم برايان ستة مربعات من الورق المقوى لتشكيل منشور مستطيل. ما الشكل الهندسي الذي تمثله قطع الورق المقوى، وكم عدد المستقيمات التي ستتكون بتقاطعها؟ **المستويات؛ 12**

29. المصباح سقط مصباح مسافة 25 m من مبنى ما. يمكن استخدام الصيغة $h = -16t^2 + 25$ لتقدير عدد الثواني التي سيستغرقها المصباح ليصطدم بالأرض.

a. ما المدة التي سيستغرقها المصباح ليصطدم بالأرض؟ **1.25 ثانية**

b. إذا التقطه عند 4 أمتار، فما مدة سقوط المصباح؟ **حوالي 1.14 ثانية**

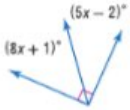
بسّط.

30. $\sqrt{48}$ **$4\sqrt{3}$**
31. $\sqrt{162}$ **$9\sqrt{2}$**
32. $\sqrt{25a^6b^4}$ **$5|a^3|b^2$**
33. $\sqrt{45xy^8}$ **$3y^4\sqrt{5x}$**

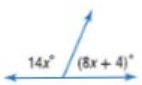
مراجعة المهارات

الجبر أوجد x.

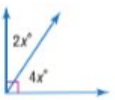
34. **7**



35. **8**



36. **15**



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Uncorrected first proof - for training purposes only

23. المعطيات: $\angle 1$ و$\angle 2$ ∡ قائمتان.

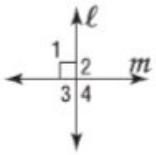
المطلوب إثباته: $\angle 2 \cong \angle 1$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle 1$ و$\angle 2$ ∡ قائمتان. (معطى)
2. $m\angle 1 = 90$ و$m\angle 2 = 90$ (تعريف ∡ القائمة)
3. $m\angle 1 = m\angle 2$ (التعويض)
4. $\angle 2 \cong \angle 1$ (تعريف ≅ ∡)

24. المعطيات: $\ell \perp m$



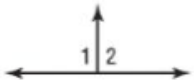
المطلوب إثباته: $\angle 2 \cong \angle 1$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\ell \perp m$ (معطى)
2. $\angle 1$ و$\angle 2$ ∡ قائمتان (يتقاطع المستقيمان ⊥ ليكوّنا 4 ∡ قائمة)
3. $\angle 2 \cong \angle 1$ (كل ∡ القائمة ≅.)

25. المعطيات: $\angle 2 \cong \angle 1$. و$\angle 1$ و$\angle 2$ زاويتان متكاملتان.



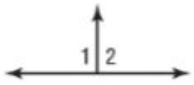
المطلوب إثباته: $\angle 1$ و$\angle 2$ ∡ قائمتان.

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle 2 \cong \angle 1$. و$\angle 1$ و$\angle 2$ زاويتان متكاملتان. (معطى)
2. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$ (تعريف ∡)
3. $m\angle 2 = m\angle 1$ (تعريف ≅ ∡)
4. $m\angle 1 + m\angle 1 = 180$ (التعويض)
5. $2(m\angle 1) = 180$ (التعويض)
6. $m\angle 1 = 90$ (خاصية القسمة)
7. $m\angle 2 = 90$ (التعويض (الخطوتان 3 و6))
8. $\angle 1$ و$\angle 2$ ∡ قائمتان. (تعريف ∡ المتتامتين)

26. المعطيات: $\angle 2 \cong \angle 1$



المطلوب إثباته: $\angle 1$ و$\angle 2$ ∡ قائمتان.

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle 2 \cong \angle 1$ (معطى)
2. تكوّن الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 2$ زوجًا خطيًا. (تعريف الزوج الخطي)
3. الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 2$ متكاملتان. (أزواج الزوايا الخطية متكاملة)
4. $\angle 1$ و$\angle 2$ ∡ قائمتان. (إذا كانت ∡ ≅ ومتكاملتين، فإنهما ∡ قائمتان)

29. المعطيات: $\angle 2$ زاوية قائمة.

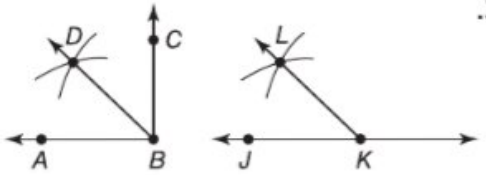
المطلوب إثباته: $\ell \perp m$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle 2$ زاوية قائمة. (معطى)
2. $m\angle 2 = 90$ (تعريف ∠ القائمة)
3. $\angle 3 \cong \angle 2$ (∡ المتقابلة بالرأس تكون ≅.)
4. $m\angle 3 = 90$ (التعويض)
5. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$ (نظرية الزاويتين المتكاملتين)
6. $m\angle 1 + 90 = 180$ (التعويض)
7. $m\angle 1 + 90 - 90 = 180 - 90$ (خاصية الطرح)
8. $m\angle 1 = 90$ (التعويض)
9. $\angle 4 \cong \angle 1$ (∡ المتقابلة بالرأس تكون ≅.)
10. $\angle 1 \cong \angle 4$ (خاصية التماثل)
11. $m\angle 1 = m\angle 4$ (تعريف ≅ ∡)
12. $m\angle 4 = 90$ (التعويض)
13. $\ell \perp m$ (يتقاطع المستقيمان المتعامدان ليكوّنا أربع زوايا قائمة).

30a.



30b. نموذج الإجابة: $\angle DBC$ و$\angle JKL$ زاويتان متتامتان.

30c. المعطيات: الزاويتان $\angle ABD$ و$\angle DBC$ متتامتان. $\angle ABD \cong \angle JKL$

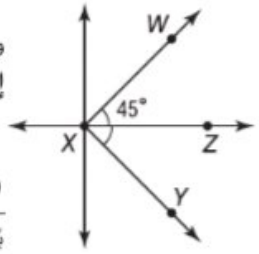
المطلوب إثباته: $\angle DBC$ و$\angle JKL$ زاويتان متتامتان.

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle ABD$ و$\angle DBC$ زاويتان متتامتان، مما يعني أنّ $\angle ABD \cong \angle JKL$. (معطى)
2. $m\angle DBC + m\angle ABD = 90$ (تعريف ∡ المتتامتين)
3. $m\angle ABD = m\angle JKL$ (تعريف ≅ ∡)
4. $m\angle DBC + m\angle JKL = 90$ (التعويض)
5. $\angle DBC$ و$\angle JKL$ زاويتان متتامتان. (تعريف ∡ المتتامتين)

31. المعطيات: $\overline{XZ}$ يُنصّف $\angle WXY$.



المطلوب إثباته: $\angle WXY$ زاوية قائمة.

البرهان:

العبارات (المبررات)

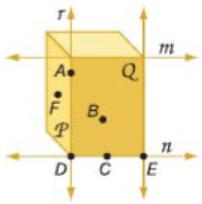
1. $\overline{XZ}$ يُنصّف $\angle WXY$، و$m\angle WXZ = 45$. (معطى)
2. $\angle WXZ \cong \angle ZXY$ (تعريف مُنصّف ∠)
3. $m\angle WXZ = m\angle ZXY$ (تعريف ≅ ∡)
4. $m\angle ZXY = 45$ (التعويض)
5. $m\angle WXY = m\angle WXZ + m\angle ZXY$ (مسلّمة جمع ∠)
6. $m\angle WXY = 45 + 45$ (التعويض)
7. $m\angle WXY = 90$ (التعويض)
8. $\angle WXY$ زاوية قائمة. (تعريف ∠ القائمة)

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تحقق من فهمك

مثال 1

اشرح كيف يوضح الشكل أن كل عبارة صحيحة. ثم اذكر الفرضية التي يمكن استخدامها لإثبات أنّ كل عبارة صحيحة. 2-6. انظر الهامش.



1. يتقاطع المستويان P وQ في المستقيم r.
2. يتقاطع المستقيمان r وn عند النقطة D.
3. يحتوي المستقيم n على النقاط C وD وE.
4. يحتوي المستقيم P على النقاط A وF وD.
5. يقع المستقيم n في المستوى Q.
6. المستقيم r هو المستقيم المار بين A وD.

1. الضلع الأيسر والضلع الأمامي لهما خط حافة مشترك r. يتقاطع المستويان P وQ فقط على طول المستقيم r. المسلَّمة 2.7، التي تنص على أنه إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون في صورة مستقيم.

مثال 2

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صحيحة *دائمًا*، أم *أحيانًا*، أم غير صحيحة *على الإطلاق*. اشرح تبريرك.

7. يكون تقاطع المستويات الثلاثة في صورة مستقيم.

أحيانًا؛ إذا تقاطعت ثلاثة مستويات، فإن تقاطعها يمكن أن يكون في صورة مستقيم أو نقطة.

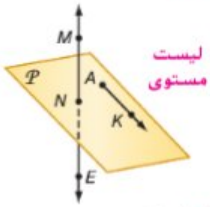
8. يحتوي المستقيم r على النقطة P فقط.

غير صحيحة على الإطلاق؛ تنص المسلَّمة 2.3 على أن المستقيم يحتوي على نقطتين على الأقل.

9. أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

دائمًا؛ تنص المسلَّمة 2.1 على أنّ أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

في الشكل، يوجد $\overleftrightarrow{AK}$ في المستوى $\mathcal{P}$ وتوجد M على $\overleftrightarrow{NE}$. اذكر المسلَّمة التي يمكن استخدامها لإثبات أنّ كل عبارة صحيحة.



10. M، K، وN هي نقاط تقع في المستوى نفسه.

المسلَّمة 2.2؛ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

11. $\overleftrightarrow{NE}$ يحتوي على النقطتين M وN.

المسلَّمة 2.3؛ يحتوي المستقيم على نقطتين على الأقل.

12. N وK تقعان على استقامة واحدة.

المسلَّمة 2.1؛ أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

13. تقع النقاط N وK وA في المستوى نفسه.

المسلَّمة 2.4؛ يحتوي المستوى على ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.

14. **رياضة** تنظم مدرسة رنا في كل عام مسابقة بين الطلاب والمدرسين في كرة السلة لجمع الأموال للجمعيات الخيرية. يشترك هذا العام في المسابقة ثمانية فرق، خلال الجولة الأولى، يلاعب كل فريق الفرق الأخرى كلها. a–c. انظر الهامش.

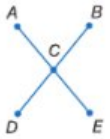
a. كم عدد المباريات التي ستقام في الجولة الأولى؟

b. صمّم رسمًا تخطيطيًا لنمذجة عدد مباريات الجولة الأولى. ما الفرضية التي يمكن استخدامها لتعليل رسمك التخطيطي؟

c. أوجد وسيلة عددية يمكنك استخدامها، بغض النظر عن عدد الفرق المشاركة في المسابقة، لحساب عدد مباريات الجولة الأولى.

مثال 3

15. **فرضيات** في الشكل الموجود على اليسار، $\overline{AE} \cong \overline{DB}$ وC هي نقطة منتصف $\overline{AE}$ and $\overline{DB}$. اكتب برهانًا حرًا لإثبات أنّ $AC = CB$. انظر ملحق إجابات الوحدة R.



McGraw-Hill Education حقوق النشر والطبع © محفوظ لصالح مؤسسة

p113

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-15 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

2. تشكل حواف الشكل مستقيمات متقاطعة. يتقاطع المستقيمان r وn عند موضع واحد فقط، وهو النقطة D. المسلَّمة 2.6، التي تنص على أنه إذا تقاطع مستقيمان، فإن تقاطعهما يكون في نقطة واحدة فقط.

3. الحافة السفلية الأمامية للشكل عبارة عن المستقيم n الذي يحتوي على النقاط D وC وE. المسلَّمة 2.3، التي تنص على أن المستقيم يحتوي على نقطتين على الأقل.

4. يحتوي الجانب الأيسر من الشكل أو المستوى P على النقاط A وF وD. المسلَّمة 2.4، التي تنص على أن المستوى يحتوي على ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.

5. تقع النقطتان D وE، اللتان تقعان على المستقيم n، في المستوى Q. المسلَّمة 4.5، التي تنص على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى ما، فإن المستقيم الذي يحتوي على النقطتين يقع بأكمله في ذلك المستوى.

6. يحتوي المستقيم r على النقطتين A وD. المسلَّمة 2.1، التي تنص على أنه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بين نقطتين.

14a. 28 مباراة

14b.

المسلَّمة 2.1

14c. نموذج الإجابة: إذا كان يوجد عدد n من الفرق في المسابقة، فيكون عدد المباريات في الجولة الأولى هو $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1$.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
ف م مبتدئ	16-31, 45, 46, 48-73	17-31 فردي، 51-54	16-30 زوجي، 45, 46, 48-50, 55-73
ض م أساسي	17-31 فردي، 32-46, 48-73	16-32, 51-54	33-46, 48-50, 55-73
أ م متقدم	33-62، (اختياري: 63-73)		

Uncorrected first proof - for training purposes only

1 البرهان الجبري

يوضّح **المثال 1** طريقة حل معادلة جبرية باستخدام خواص المساواة. يوضح **المثال 2** طريقة التحقق من تكافؤ معادلتين بتبرير كل خطوة بخاصية جبرية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 فم بحل $2(5 - 3a) - 4(a + 7) = 92$. واكتب تبريرًا لكل خطوة.

$2(5 - 3a) - 4(a + 7) = 92$ (المعادلة الأصلية)

$10 - 6a - 4a - 28 = 92$ (خاصية التوزيع)

$-18 - 10a = 92$ (خاصية التعويض)

$-18 - 10a + 18 = 92 + 18$ (خاصية الجمع)

$-10a = 110$ (خاصية التعويض)

$\frac{-10a}{-10} = \frac{110}{-10}$ (خاصية القسمة)

$a = -11$ (خاصية التعويض)

2 **العلوم** إذا كانت المسافة d التي يقطعها جسم ما تعطى بواسطة الصيغة $d = 20t + 5$. ويعطى الزمن t الذي يستغرقه الجسم بواسطة $t = \frac{d - 5}{20}$. اكتب برهانًا من عمودين للتحقق من هذا التخمين.

العبارات (المبررات)

1. $d = 20t + 5$ (معطى)
2. $d - 5 = 20t$ (خاصية الجمع)
3. $t = \frac{d - 5}{20}$ (خاصية القسمة)

1C. $-5 = 13 - 2x$ (معطى)
$-5 + 13 = 13 + 13 - 2x$ (خاصية الجمع)
$8 = 2x$ (التعويض)
$4 = x$ (خاصية القسمة)

تمرين موجّه

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة.

1A. إذا كان $-1 = -5 + 4$، فإن $x + 4 + (-5) = x - 1$. **خاصية الجمع**

1B. إذا كان $y = 5$، فإن $y = 5$. **خاصية التماثل**

1C. أثبت أنه إذا كان $-5 = 13 - 2x$، فإن $x = 4$. واكتب تبريرًا لكل خطوة.

المثال 1 عبارة عن برهان للعبارة الشرطية *إذا كان* $5(x + 4) = 70 -$، *فإن* $x = -18$. لاحظ أنّ العمود الموجود على اليمين عبارة عن عملية مفصلة خطوة بخطوة تقود إلى النتيجة. ويحوي العمود الموجود على اليسار تبرير كل عبارة.

نصيحة دراسية

فرضيات الخوارزمية عبارة عن سلسلة من الخطوات لتنفيذ إجراء ما أو حل مسألة. يمكن اعتبار البراهين نوعًا من الخوارزميات لأنها تسير خطوة بخطوة.

في الهندسة، تستخدم صيغة مشابهة لإثبات التخمينات والنظريات، يحتوي **البرهان ثنائي الأعمدة** أو **البرهان الشكلي** على *عبارات* و*مبررات* منظّمة في عمودين.

مثال من الحياة اليومية 2 كتابة برهان جبري

العلوم إذا كانت صيغة تحويل درجة الحرارة من فهرنهايت إلى مئوية هي $C = \frac{5}{9}(F - 32)$، فإن صيغة تحويل درجة لحرارة من مئوية إلى فهرنهايت هي $F = \frac{9}{5}C + 32$. اكتب برهانًا من عمودين للتحقق من هذا التخمين.

ابدأ بذكر ما هو معطى وما ستثبته.

المعطيات: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

المطلوب إثباته: $F = \frac{9}{5}C + 32$

البرهان:

العبارات	المبررات
1. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$	1. المعطيات
2. $\frac{9}{5}C = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9}(F - 32)$	2. خاصية الضرب في المعادلة
3. $\frac{9}{5}C = F - 32$	3. خاصية التعويض في المعادلة
4. $\frac{9}{5}C + 32 = F - 32 + 32$	4. خاصية الجمع في المعادلة
5. $\frac{9}{5}C + 32 = F$	5. خاصية التعويض في المعادلة
6. $F = \frac{9}{5}C + 32$	6. خاصية التماثل في المعادلة

نصيحة دراسية

الرياضيات الذهنية إذا سمح لك معلمك بالقيام بذلك، فيمكن تجاوز بعض الخطوات عن طريق القيام بالحسابات الذهنية. على سبيل المثال، يمكن حذف الخطوتين 2 و4 في المثال 2. عندئذ سيكون سبب العبارة رقم 3 خاصية الضرب في المعادلة وسيكون سبب العبارة رقم 5 خاصية الجمع في المعادلة.

تمرين موجّه

اكتب برهانًا من عمودين للتحقق من صحة كل تخمين.

2A. إذا كان $\frac{5x + 1}{2} - 8 = 0$، فإن $x = 3$. **انظر الهامش.**

2B. **الفيزياء** إذا كانت المسافة d التي يقطعها جسم بسرعة متجهة ابتدائية u وسرعة متجهة نهائية v في زمن t تعطى بالصيغة $d = t \cdot \frac{u + v}{2}$، فإن $u = \frac{2d}{t} - v$. **انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

محفوظ الحقوق والتأليف © لمجموعة نعمان مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

2A. **المعطيات:** $\frac{5x + 1}{2} - 8 = 0$

المطلوب إثباته: $x = 3$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\frac{5x + 1}{2} - 8 = 0$ (معطى)
2. $\frac{5x + 1}{2} = 8$ (خاصية الجمع)
3. $2\left(\frac{5x + 1}{2}\right) = 2(8)$ (خاصية الضرب)
4. $5x + 1 = 16$ (التعويض)
5. $5x = 15$ (خاصية الطرح)
6. $x = 3$ (خاصية القسمة)

Uncorrected first proof - for training purposes only

12. **لمعطيات**: B نقطة منتصف $\overline{AC}$، وD نقطة منتصف $\overline{CE}$، و$\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

المطلوب إثباته: $AE = 4AB$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. B نقطة منتصف $\overline{AC}$، وD نقطة منتصف $\overline{CE}$، و$\overline{AB} \cong \overline{DE}$. (معطى)
2. $AB = BC$ و$CD = DE$ (تعريف نقطة المنتصف)
3. $AB = DE$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)
4. $AC = AB + BC$ و$CE = CD + DE$ (مسلَّمة جمع القطع المستقيمة)
5. $AE = AC + CE$ (مسلَّمة جمع القطع المستقيمة)
6. $AE = AB + BC + CD + DE$ (التعويض)
7. $AE = AB + AB + AB + AB$ (التعويض)
8. $AE = 4AB$ (التعويض)

13a. **المعطيات**: $\overline{AC} \cong \overline{GI}$, $\overline{FE} \cong \overline{LK}$, $AC + CF + FE = GI + IL + LK$

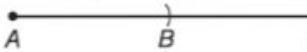
المطلوب إثباته: $\overline{CF} \cong \overline{IL}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\overline{AC} \cong \overline{GI}$, $\overline{FE} \cong \overline{LK}$, $AC + CF + FE = GI + IL + LK$ (معطى)
2. $AC + CF + FE = AC + IL + LK$ (التعويض)
3. $AC - AC + CF + FE = AC - AC + IL + LK$ (خاصية الطرح)
4. $CF + FE = IL + LK$ (خاصية التعويض)
5. $CF + FE = IL + FE$ (التعويض)
6. $CF + FE - FE = IL + FE - FE$ (خاصية الطرح)
7. $CF = IL$ (خاصية التعويض)
8. $\overline{CF} \cong \overline{IL}$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)

13b. نموذج الإجابة: قمت بقياس $\overline{CF}$ و$\overline{IL}$. بلغ طول كليهما 1.5 سنتيمترًا. إذًا فإنّ القطعتين المستقيمتين متطابقتان.

14. 

نموذج الإجابة: وضعت نقطة بداية A على المستقيم ℓ ثم أنشأت النقطة B على المستقيم حتى يكون AB مساويًا لـ PQ.

ثم استخدمت النقطة B كنقطة بداية. حدَّدت النقطة C على المستقيم حتى تصير BC مساوية أيضًا لـ PQ. يبلغ قياس القطعة المستقيمة AC بأكملها $AB + BC$ وفقًا للمسلَّمة الإضافية. كما $AB = BC = PQ$. ثم باستخدام التعويض $AC = PQ + PQ$ أو $AC = 2PQ$. إذًا يبلغ طول $\overline{AC}$ ضعف طول $\overline{PQ}$.

16a.

16b. $8PC = PQ$

16c.

يمكن أن أقيس $\overline{PC}$ ثم أضع علامة على القطع المستقيمة ذات الطول نفسه على طول $\overline{PQ}$. ومن ثَمَّ أحسب عدد القطع المستقيمة التي تكوَّنت.

16d.

$8PC = PQ$

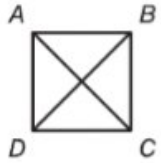
16e. **المعطيات**: A نقطة منتصف $\overline{PQ}$، وB نقطة منتصف $\overline{PA}$، وC نقطة منتصف $\overline{PB}$.

المطلوب إثباته: $8PC = PQ$

العبارات (المبررات)

1. A نقطة منتصف $\overline{PQ}$، وB نقطة منتصف $\overline{PA}$، وC نقطة منتصف $\overline{PB}$. (معطى)
2. $PA = AQ$ و$PB = BA$ و$PC = CB$ (تعريف نقطة المنتصف)
3. $PC + CB = PB$ (مسلَّمة جمع القطع المستقيمة)
4. $PC + PC = PB$ (التعويض)
5. $2PC = PB$ (التعويض)
6. $PB + BA = PA$ (مسلَّمة جمع القطع المستقيمة)
7. $PB + PB = PA$ (التعويض)
8. $2PB = PA$ (خاصية الجمع)
9. $2(2PC) = PA$ (التعويض)
10. $4PC = PA$ (التعويض)
11. $PA + AQ = PQ$ (مسلَّمة جمع القطع المستقيمة)
12. $PA + PA = PQ$ (التعويض)
13. $2PA = PQ$ (التعويض)
14. $2(4PC) = PQ$ (التعويض)
15. $8PC = PQ$ (التعويض)

18. **المعطيات**: $ABCD$ مربع.

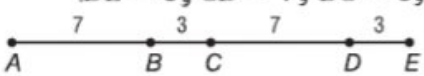


المطلوب إثباته: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

العبارات (المبررات)

1. $ABCD$ مربع. (معطى)
2. $AB = BC = CD = DA$ (تعريف المربع)
3. $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$, $(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$ (نظرية فيثاغورس)
4. $(BD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ (الطرح)
5. $(AC)^2 = (BD)^2$ (خاصية التعدي)
6. $AC = \pm\sqrt{(BD)^2}$ (خاصية الجذر التربيعي)
7. $AC = \sqrt{(BD)^2}$ (حسب التعريف، يجب أن يكون الطول موجبًا)
8. $AC = BD$ (تعريف الجذر التربيعي)
9. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)

20. خاطئة: نموذج الإجابة: $AB = BD = CE = 10$. لكن $AB = 7$ و$BC = 3$ و$CD = 7$ و$DE = 3$.



21.

22. يستخدم كل من البرهان الحر والبرهان من عمودين التبرير الاستدلالي المُقدم في ترتيب منطقي مع المسلَّمات والنظريات والتعريفات المستخدمة في دعم خطوات البرهان. يُكتب البرهان الحر في صورة فقرة تحتوي على تبريرات كل خطوة متضمنة في العبارات. يكون البرهان من عمودين مرقمًا ومفصلاً. تُقدّم كل خطوة في البرهان على سطر منفصل، ويرد دعم هذه الخطوة في العمود الموجود بجانب الخطوة.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

Uncorrected first proof - for training purposes only

14. البرهان:

العبارات (المبررات)

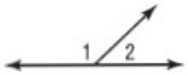
1. $\angle ABC$ زاوية قائمة. (معطى)
2. $m\angle ABC = 90$ (تعريف الزاوية القائمة)
3. $m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle CBD$ (مسلّمة جمع ∠)
4. $m\angle ABD + m\angle CBD = 90$ (التعويض)
6. الزاويتان $\angle ABD$ و$\angle CBD$ متتامتان. (تعريف ∡ المتتامة)

15. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle 6 \cong \angle 5$ (معطى)
2. $m\angle 6 = m\angle 5$ (تعريف ≅ ∡)
3. ∠4 و∠5 زاويتان متكاملتان. (تعريف الأزواج الخطية)
4. $m\angle 4 + m\angle 5 = 180$ (تعريف ∡ المتكاملة)
5. $m\angle 4 + m\angle 6 = 180$ (التعويض)
6. الزاويتان ∠4 و∠6 متكاملتان. (تعريف ∡ المتكاملة)

16. المعطيات: تكوّن ∡ زوجًا خطيًا.

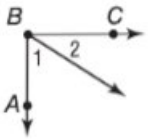


المطلوب إثباته: إنّ ∡ متكاملتان.

البرهان الحر:

عندما تكوّن اثنتان من ∡ زوجًا خطيًا، ستصبح ∠ الناتجة مستقيمة يبلغ قياسها 180. حسب التعريف، تكون اثنتان من ∡ متكاملتين. إذا كان مجموع قياسهما 180. وحسب مسلّمة جمع الزوايا، $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$. ومن ثمّ، إذا كوّنت اثنتان من ∡ زوجًا خطيًا، فإنّ الزاويتين تكونان متكاملتين.

17. المعطيات: $\angle ABC$ زاوية قائمة.



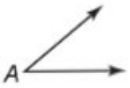
المطلوب إثباته: الزاويتان ∠1 و∠2 ∡ متتامتان.

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle ABC$ زاوية قائمة. (معطى)
2. $m\angle ABC = 90$ (تعريف ∡ القائمة)
3. $m\angle ABC = m\angle 1 + m\angle 2$ (مسلّمة جمع ∠)
4. $m\angle 2 + m\angle 1 = 90$ (التعويض)
5. الزاويتان ∠1 و∠2 متتامتان. (تعريف ∡ المتتامتين)

18. المعطيات: $\angle A$



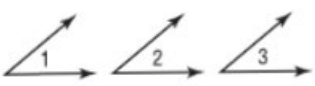
المطلوب إثباته: $\angle A \cong \angle A$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle A$ زاوية قائمة. (معطى)
2. $m\angle A = m\angle A$ (خاصية الانعكاس)
3. $\angle A \cong \angle A$ (تعريف ≅ ∡)

19. المعطيات: ∠2 ≅ ∠1 و∠3 ≅ ∠2



المطلوب إثباته: ∠3 ≅ ∠1

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. ∠2 ≅ ∠1 و∠3 ≅ ∠2 (معطى)
2. $m\angle 2 = m\angle 1$، و$m\angle 3 = m\angle 2$ (تعريف ≅ ∡)
3. $m\angle 1 = m\angle 3$ (خاصية التعدي)
4. ∠3 ≅ ∠1 (تعريف ≅ ∡)

20. المعطيات:

المطلوب إثباته: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 360$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. (معطى)

2. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$، و$m\angle 3 + m\angle 4 = 180$ (نظرية الزاويتين المتكاملتين)
3. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180 + m\angle 3$ (خاصية الجمع)
4. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 180 + m\angle 3 + m\angle 4$ (خاصية الجمع)
5. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 180 + 180$ (التعويض)
6. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 360$ (خاصية الجمع)

21. المعطيات: ∠4 ≅ ∠1

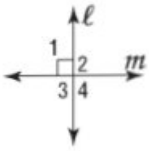
المطلوب إثباته: ∠3 ≅ ∠2

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. ∠4 ≅ ∠1 (معطى)
2. ∠2 ≅ ∠1 و∠4 ≅ ∠3 (إنّ ∡ المتقابلة بالرأس تكون ≅)
3. ∠3 ≅ ∠1 (خاصية التعدي)
4. ∠3 ≅ ∠2 (التعويض)

22. المعطيات: $\ell \perp m$



المطلوب إثباته: ∠2 و∠3 و∡4 قائمة.

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\ell \perp m$ (معطى)
2. ∠1 زاوية قائمة. (تعريف ⊥)
3. $m\angle 1 = 90$ (تعريف ∡ القائمة)
4. ∠4 ≅ ∠1 (∡ المتقابلة بالرأس ≅)
5. $m\angle 4 = m\angle 1$ (تعريف ∡ المتقابلة بالرأس)
6. $m\angle 4 = 90$ (التعويض)
7. تكوّن الزاويتان ∠1 و∠2 زوجًا خطيًا. تكوّن الزاويتان ∠3 و∠4 زوجًا خطيًا. (تعريف الأزواج الخطية)
8. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$، و$m\angle 4 + m\angle 3 = 180$ (تكون الأزواج الخطية متكاملة)
9. $m\angle 2 = 90$، و$90 + m\angle 3 = 180$ (التعويض)
10. $m\angle 2 = 90$، و$m\angle 3 = 90$ (خاصية الطرح)
11. ∠2 و∠3 و∡4 قائمة. (تعريف ∡ القائمة (الخطوتان 6 و10))

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Uncorrected first proof - for training purposes only

مثال إضافي

2 حدّد هل عبارة مما يلي صحيحة *دائمًا*، أم *أحيانًا*، أم غير صحيحة *على الإطلاق*. اشرح.

a. إذا كان المستوى T يحتوي على $\overleftrightarrow{EF}$ و$\overleftrightarrow{EF}$ يحتوي على النقطة G، فإن المستوى T يحتوي على النقطة G. دائمًا: تنص المسلّمة 2.5 على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى ما، فإن المستقيم الذي يحتوي على النقطتين يقع بأكمله في المستوى.

b $\overleftrightarrow{GH}$ يحتوي على ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. غير صحيحة على الإطلاق؛ لا تقع النقاط التي ليست على استقامة واحدة على المستقيم نفسه حسب تعريفها.

2 البراهين الحرة

يوضح **المثال 3** طريقة كتابة برهان حر عندما تعطى عبارة صحتها مقبولة.

مثال إضافي

3 بافتراض أنّ $\overleftrightarrow{AC}$ يتقاطع مع $\overleftrightarrow{CD}$، اكتب برهانًا حرًا لإثبات أنّ A، وC، وD تحدد أحد المستويات.

$\overleftrightarrow{AC}$ و$\overleftrightarrow{CD}$ يجب أن يتقاطعا عند C لأنه إذا تقاطع مستقيمان، فإن تقاطعهما يكون عند نقطة واحدة فقط. النقطة A تقع على $\overleftrightarrow{AC}$ والنقطة D تقع على $\overleftrightarrow{CD}$. النقاط A، C، وD ليست على استقامة واحدة. لذلك فإن ACD عبارة عن مستوى لأنه يحتوي على ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

التركيز على محتوى الرياضيات

المسلّمات والبراهين أبرز وجه الاختلاف بين المسلّمات والبراهين. المسلّمات هي عبارات صحتها مقبولة دون برهان. بينما البراهين عبارة عن فرضيات منطقية مدعومة بمسلّمات ونظريات.

بمجرد إثبات عبارة أو تخمين، يطلق عليها **نظرية**، ويمكن استخدامها كسبب لتبرير العبارات في البراهين الأخرى.

المفهوم الأساسي عملية البرهان

الخطوة 1 اسرد المعلومات المعطاة وصنّفها. إن أمكن، رسمًا تخطيطيًا لتوضيح هذه المعلومات.

الخطوة 2 اذكر النظرية أو التخمين المطلوب إثباته.

الخطوة 3 أنشئ فرضية استنتاج من خلال صياغة سلسلة منطقية من العبارات التي تربط المعطيات بما تحاول إثباته.

الخطوة 4 برّر كل عبارة بسبب. تتضمن الأسباب تعريفات وخواص جبرية ومسلّمات ونظريات.

الخطوة 5 اذكر ما قد أثبته.

نصيحة دراسية

التناسب هو عبارة تنص على إثبات إما أن يكون خطأ أو صوابًا. في الرياضيات، يستخدم التناسب عادة ليعني إثباتًا صحيحًا ويمكن أن يكون مرادفًا للنظرية.

تتضمن إحدى وسائل إثبات العبارات والتخمينات، وهي **البرهان الحر**. كتابة فقرة لشرح سبب صحة تخمين لأحد المواقف. تسمى البراهين الحرة أيضًا **البراهين غير الشكلية**، على الرغم من أن كلمة غير شكلي لا يقصد بها الإيحاء بأن هذه الصيغة من البراهين أقل صحة من أي نوع آخر من البراهين.

مثال 3 كتابة برهان حر

بفرض أنّ M هي نقطة منتصف $\overline{XY}$، اكتب برهانًا حرًا لإثبات أنّ $\overline{XM} \cong \overline{MY}$.

الخطوتان 1 و2

المعطيات: M هي نقطة منتصف $\overline{XY}$.

المطلوب إثباته: $\overline{XM} \cong \overline{MY}$

الخطوتان 3 و4

إذا كانت M هي نقطة منتصف $\overline{XY}$، فمن تعريف نقطة منتصف القطعة المستقيمة، نعرف أنّ $XM = MY$. يعني هذا أنّ $\overline{XM}$ و$\overline{MY}$ لهما الطول نفسه. بتعريف التطابق، إذا كان لقطعتين مستقيمتين الطول نفسه، فإنهما متطابقتان.

الخطوة 5

ومن ثمّ، $\overline{XM} \cong \overline{MY}$.

نصيحة لحل المسائل

الحل بترتيب عكسي من استراتيجيات كتابة البرهان أن تحل بترتيب عكسي. ابدأ بما تحاول إثباته. وحل بترتيب عكسي خطوة بخطوة حتى تصل إلى المعلومات المعطاة.

تمرين موجّه

3. بفرض أنّ C تقع بين A وB، و$\overline{AC} \cong \overline{CB}$. اكتب برهانًا حرًا لإثبات أنّ C هي نقطة منتصف $\overline{AB}$. **انظر الهامش.**

بمجرد إثبات صحة تخمين ما، يمكن ذكره كنظرية واستخدامه في البراهين الأخرى. يعرف التخمين الوارد في المثال 3 باسم نظرية نقطة المنتصف.

النظرية R.1 نظرية نقطة المنتصف

إذا كانت M هي نقطة منتصف $\overline{AB}$، فإن $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

حقوق الطبع والتأليف © مكجروهيل لمنال مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

3. *المعطيات:* C توجد بين A وB، و$\overline{AC} \cong \overline{CB}$.

المطلوب إثباته: C نقطة منتصف $\overline{AB}$.

البرهان: إذا كانت C توجد بين النقطتين A وB، فإنه بتعريف كلمة بين، تقع A وB وC على استقامة واحدة و$AC + CB = AB$. إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{CB}$، فإنه بتعريف التطابق، يكون لهما القياس نفسه، يعني ذلك أن $AC = CB$. ومن تعريف نقطة منتصف قطعة مستقيمة، إذا كانت C بين النقطتين A وB، وكان $AC = CB$، فإن C هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

Uncorrected first proof - for training purposes only

تحقق من فهمك

مثال 1 اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة.

1. إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$، $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$. خاصية التعدي
2. $XY = XY$ خاصية الانعكاس
3. إذا كان $x = 5$، فإن $x = 5$. خاصية التماثل
4. إذا كان $2x + 5 = 11$، فإن $2x = 6$. خاصية الطرح

مثال 2

5. أكمل البرهان التالي.

المعطيات: $\frac{y+2}{3} = 3$

المطلوب إثباته: $y = 7$

البرهان:

العبارات	المبررات
a. $\frac{y+2}{3} = 3$	a. معطى
b. $3\left(\frac{y+2}{3}\right) = 3(3)$	b. خاصية الضرب
c. $y + 2 = 9$	c. التعويض
d. $y = 7$	d. خاصية الطرح

6. المعطيات: $-4(x-3) + 5x = 24$
المطلوب إثباته: $x = 12$
البرهان:

العبارات (المبررات)
1. $-4(x-3) + 5x = 24$ (معطى)
2. $-4x + 12 + 5x = 24$ (خاصية التوزيع)
3. $x + 12 = 24$ (التعويض)
4. $x = 12$ (خاصية الطرح)

الأمثلة 2-3 **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين للتحقق من كل تخمين.

6. إذا كان $-4(x-3) + 5x = 24$، فإن $x = 12$.
7. إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، فإن $x = 7$.

7. المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
المطلوب إثباته: $x = 7$
البرهان:

العبارات (المبررات)
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (معطى)
2. $AB = CD$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة)
3. $4x - 6 = 22$ (خاصية التعويض)
4. $4x = 28$ (خاصية الجمع)
5. $x = 7$ (خاصية القسمة)

8. **فرضيات** تقيس مها معدل ضربات قلبها في أي وقت تمارس فيه التمارين الرياضية وتحاول أن تتأكد من بقائها في نطاق معدل ضربات القلب الذي تستهدفه. تقترح جمعية القلب الأمريكية صيغة لمعدل ضربات القلب المستهدف هي $T = 0.75(220 - a)$. حيث تمثل T معدل ضربات القلب الذي يستهدفه الشخص وa هي عمره.

a. أثبت أنه بمعلومية معدل ضربات القلب الذي يستهدفه شخص ما، يمكنك حساب عمره باستخدام الصيغة $a = 220 - \frac{T}{0.75}$. انظر ملحق إجابات الوحدة R.

b. إذا كان معدل ضربات القلب الذي تستهدفه مها هو 153. فكم عمرها؟ ما الخاصية التي تبرر حسابك؟
انظر ملحق إجابات الوحدة R.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة.

9. إذا كان $a + 10 = 20$، فإن $a = 10$. خاصية الطرح
10. إذا كان $\frac{x}{3} = -15$، فإن $x = -45$. خاصية الضرب
11. إذا كان $4x - 5 = x + 12$، فإن $4x = x + 17$. خاصية الجمع
12. إذا كان $BC = \frac{1}{5}DE$ فإن $\frac{1}{5}BC = DE$. خاصية الضرب أو القسمة

محقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Uncorrected first proof - for training purposes only

18. العبارات (المبررات)

1. X نقطة منتصف $\overline{WY}$ و$\overline{VZ}$. (معطى)
2. $\overline{WX} \cong \overline{YX}, \overline{VX} \cong \overline{ZX}$ (تعريف نقطة المنتصف)
3. $WX = YX, VX = ZX$ (تعريف $\cong$)
4. $VX = VW + WX, ZX = ZY + YX$ (مسلَّمة جمع القطع المستقيمة)
5. $VW + WX = ZY + YX$ (التعويض)
6. $VW = ZY$ (خاصية الطرح)

19. العبارات (المبررات)

1. $AB = DC$ (معطى)
2. $BC = BC$ (خاصية الانعكاس)
3. $AB + BC = DC + BC$ (خاصية الجمع)
4. $AB + BC = AC, DC + BC = DB$ (مسلَّمة جمع القطع المستقيمة)
5. $AC = DB$ (التعويض)

24. العبارات (المبررات)

1. $\angle 1 \cong \angle 4, \angle 2 \cong \angle 3$ (معطى)
2. $m\angle 1 = m\angle 4, m\angle 2 = m\angle 3$ (تعريف $\cong$)
3. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$ (خاصية الجمع)
4. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle AFC, m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle EFC$ (مسلَّمة جمع $\angle$)
5. $m\angle AFC = m\angle EFC$ (التعويض)
6. $\angle AFC \cong \angle EFC$ (تعريف $\cong$)

R-3 إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة

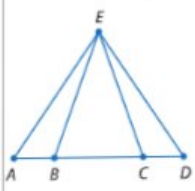
اكتب برهانًا من عمودين. **18.** **19.** انظر الهامش

18. المعطيات: X نقطة منتصف $\overline{WY}$ و$\overline{VZ}$.

المطلوب إثباته: $VW = ZY$

19. المعطيات: $AB = DC$

المطلوب إثباته: $AC = DB$



20. **الجغرافيا** يخطط قيد إلى القيادة من منزله إلى منزل جدته عبر الطريق السريع 35. تقدّر الخريطة التي يستخدمها المسافة من منزله حتى موقع آخر بـ 194 km ومن ذلك الموقع حتى منزل جدته بـ 243 km. ماذا سمح له باستنتاج أن المسافة التي سيقودها ستبلغ 437 km من منزله حتى منزل جدته؟ افترض أنّ الطريق السريع 35 يشكل مستقيمًا.

مسلَّمة جمع القطع المستقيمة

مثال 3

اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: B نقطة منتصف $\overline{AC}$.

C نقطة منتصف $\overline{BD}$.

المطلوب إثباته: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

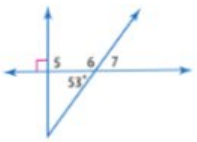
البرهان:

العبارات	المبررات
1. B نقطة منتصف $\overline{AC}$	1. المعطيات
2. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	2. تعريف نقطة المنتصف
3. C نقطة منتصف $\overline{BD}$	3. المعطيات
4. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$	4. تعريف نقطة المنتصف
5. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	5. خاصية التعدي في المعادلة

R-4 إثبات العلاقات بين الزوايا

أوجد قياس كل زاوية.

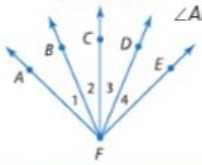
21. $\angle 5$ 90
22. $\angle 6$ 127
23. $\angle 7$ 53



24. **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين.

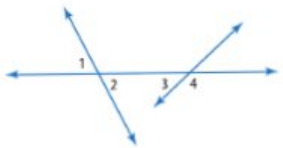
المعطيات: $\angle 3 \cong \angle 2, \angle 4 \cong \angle 1$ انظر الهامش

المطلوب إثباته: $\angle EFC \cong \angle AFC$



مثال 4

أوجد قياس كل زاوية مرقمة إذا كان $m\angle 1 = 72$ و$m\angle 3 = 26$.



$m\angle 2 = 72$. بما أنّ $\angle 1$ و$\angle 2$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

تشكل $\angle 3$ و$\angle 4$ زوجًا خطيًا وينبغي أن تكونا زاويتين متكاملتين.

$26 + m\angle 4 = 180$ تعريف الزوايا المتكاملة

$m\angle 4 = 154$ اطرح 26 من كل طرف

محتوى التعليم والتأليف © مجموعة لمكغرو هيل للتعليم

p145

Uncorrected first proof - for training purposes only

15. بما أنّ C هي نقطة منتصف $\overline{AE}$ و $\overline{DB}$، $CA = CE = \frac{1}{2}AE$ و $CD = CB = \frac{1}{2}DB$ حسب تعريف نقطة المنتصف.
وبمعلومية أنّ $\overline{AE} \cong \overline{DB}$، إذًا $AE = DB$ حسب تعريف القطع المستقيمة المتطابقة. وباستخدام خاصية الضرب، فإنّ $\frac{1}{2}DB = \frac{1}{2}AE$.
ثم باستخدام التعويض، $AC = CB$.

24. دائمًا؛ تنص المسلَّمة 2.2 على أنّ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

25. غير صحيحة على الإطلاق؛ تنص المسلَّمة 2.1 على أنّ أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

26. أحيانًا؛ لا يجب أن تكون النقاط على استقامة واحدة لتقع في المستوى نفسه.

27. دائمًا؛ تنص المسلَّمة 2.5 على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى ما، فإن المستقيم الذي يحتوي على النقطتين يقع بأكمله في ذلك المستوى.

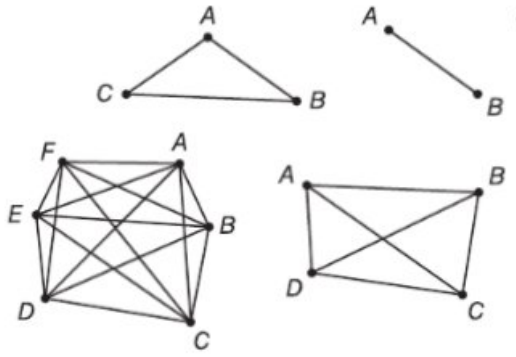
28. غير صحيحة على الإطلاق؛ تنص المسلَّمة 2.7 على أنه إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون في صورة مستقيم.

29. أحيانًا؛ يجب أن تكون النقاط ليست على استقامة واحدة.

30. **المعطيات:** النقطة Y هي نقطة منتصف $\overline{XZ}$.
Z هي نقطة منتصف $\overline{YW}$.
المطلوب إثباته: $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$
البرهان: نعلم أنّ Y هي نقطة منتصف $\overline{XZ}$ وأنّ Z هي نقطة منتصف $\overline{YW}$. وحسب تعريف نقطة المنتصف، فإنّ $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$ و $\overline{YZ} \cong \overline{ZW}$. وباستخدام تعريف القطع المستقيمة المتطابقة، سنجد أن $XY = YZ$ و $YZ = ZW$. مما يعني أنّ $XY = ZW$ وفقًا لخاصية التعدي في المعادلة. إذًا، $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$ وفقًا لتعريف القطع المستقيمة المتطابقة.

31. **المعطيات:** L نقطة منتصف $\overline{JK}$.
يتقاطع $\overline{JK}$ مع $\overline{MK}$ عند النقطة K. $\overline{MK} \cong \overline{JL}$
المطلوب إثباته: $\overline{LK} \cong \overline{MK}$
البرهان: نعلم أنّ L هي نقطة منتصف $\overline{JK}$ و $\overline{MK} \cong \overline{JL}$.
حسب نظرية نقطة المنتصف، فإنّ $\overline{LK} \cong \overline{JL}$. وباستخدام LK وفقًا لخاصية التعدي في المعادلة، فإنّ $\overline{MK} \cong \overline{LK}$.

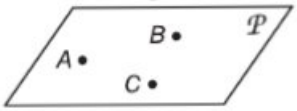
32. نموذج الإجابة؛ نعلم من المعلومات المعطاة أنه يوجد إجمالي 11 دراجة ولوح تزلج. فإذا كانت b تمثل الدراجات و s تمثل ألواح التزلج، فعندئذٍ تكون $b + s = 11$. ويمكن كتابة المعادلة بهذه الصورة $s = 11 - b$. بلغ إجمالي العجلات 36 عجلة. لأن كل دراجة تحتوي على عجلتين وكل لوح تزلج يحتوي على أربع عجلات، إذًا $2b + 4s = 36$ عوّض بالمعادلة $s = 11 - b$ في المعادلة $2b + 4s = 36$ لحذف متغير واحد، فتنتج هذه المعادلة $2b + 4(11 - b) = 36$. بسّط المعادلة إلى $2b + 44 - 4b = 36$ ثم حلها حتى تصل إلى النتيجة $b = 4$. إذا كان هناك 4 دراجات، فيوجد $4 - 11$ أو 7 ألواح تزلج. إذًا، لدينا 4 دراجات و7 ألواح تزلج.

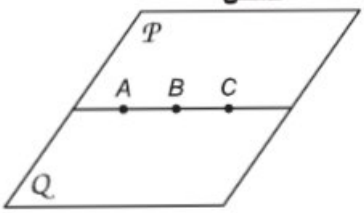
43a.


43b.

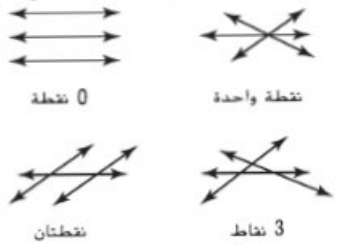
عدد أجهزة الكمبيوتر	عدد الوصلات
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15

48. أحيانًا؛ إذا كانت النقاط لا تقع على استقامة واحدة، فهذا يعني وجود مستوى واحد فقط حسب المسلَّمة 2.2 الموضحة في الشكل 1. إذا كانت النقاط على استقامة واحدة، فسيوجد عدد لانهائي من المستويات. يعرض الشكل 2 الصورة التي من المفترض أن يكون عليها المستويان اللذان يمران بنقاط على استقامة واحدة. ستدور المزيد من المستويات حول النقاط الثلاث.

الشكل 1


الشكل 2


49. أحيانًا؛ قد تحتوي الثلاثة مستقيمات في المستوى نفسه على 0 أو 1 أو 2 أو 3 نقاط تقاطع. كما هو موضّح في الأشكال الواردة أدناه.



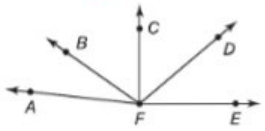
استُخدمت المسلَّمات 2.5 - 2.1. يوجد مستقيم واحد n يمر بالنقطتين A و B، مما يحقق المسلَّمة 2.1. أما بالنسبة إلى النقاط التي ليست على استقامة واحدة A و B و C، فيوجد مستوى واحد فقط P، مما يحقق المسلَّمة 2.2. ويحتوي المستقيم n على النقطتين A و B، مما يحقق المسلَّمة 2.3. بينما يحتوي المستوى P على النقاط A و B و C التي ليست على استقامة واحدة، مما يحقق المسلَّمة 2.4. يقع المستقيم n، الذي يحتوي على النقطتين A و B، بأكمله في المستوى P مما يحقق المسلَّمة 2.5.

Uncorrected first proof - for training purposes only

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

42. في الرسم التخطيطي، $m\angle CFE = 90$، $\angle AFB \cong \angle CFD$. أي من العبارات التالية لا يلزم أن تكون صحيحة؟ **B**



A $m\angle BFD = m\angle BFD$
B $\overline{BF}$ ينصّف الزاوية $\angle AFD$
C $m\angle CFD = m\angle AFB$
D $\angle CFE$ زاوية قائمة

43. **إجابة قصيرة** أوجد قياس $\angle B$ عندما تكون $m\angle A = 55$، $m\angle C = 42$. **83**

44. **الجبر** تعهد رعاة خولة في ماراثون المشي بدفع AED 30 زائد AED 7.50 عن كل كيلومتر تمشيه، بينما تعهد رعاة مايسة بدفع AED 45 زائد AED 3.75 عن كل كيلومتر تمشيه. بعد كم من الكيلومترات ستكون كل من خولة ومايسة قد جمعتا المبلغ المالي نفسه؟ **J**

F 10
G 8
H 5
J 4

45. **اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول** عند إضافة 17 إلى $4m$، تكون النتيجة $15z$. أي من المعادلات التالية تمثل العبارة أعلاه؟ **E**

A $17 + 15z = 4m$
B $(4m)(15z) = 17$
C $4m - 15z = 17$
D $17(4m) = 15z$
E $4m + 17 = 15z$

مراجعة شاملة

حدّد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحة *دائمًا*، أم *أحيانًا*، أم غير صحيحة *على الإطلاق*. اشرح. (الدرس R-1) **46–48. انظر الهامش.**

46. أي أربع نقاط تقع في مستوى واحد.

47. الزاويتان المتطرجتان متكاملتان.

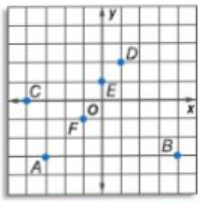
48. يتقاطع المستويان P وQ في المستقيم m. يقع المستقيم m في كلا المستويين P وQ.

أوجد احداثيات الرأس ومحور التماثل ومعادلته، ونقاط التقاطع مع المحور y للتمثيل البياني لكل المعادلة. **49–52. انظر الهامش.**

49. $y = 4x^2 + 8x - 5$

50. $y = -2x^2 + 8x + 5$

51. $y = x^2 - 8x + 9$



52. $y = 4x^2 + 16x - 6$

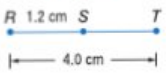
اكتب الزوج المرتّب لكل نقطة مبينة.

53. A (-3, -3)
54. B (4, -3)
55. C (-4, 0)
56. D (1, 2)
57. E (0, 1)
58. F (-1, -1)

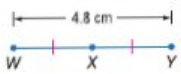
مراجعة المهارات

أوجد قياس كل قطعة مستقيمة. افترض أن كل شكل ليس مرسومًا بمقياس.

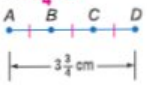
59. $\overline{ST}$ **2.8 cm**



60. $\overline{WX}$ **2.4 cm**



61. $\overline{BC}$ **$1\frac{1}{4}$ cm**



محقوق النسخ والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

p125

4 التقويم

أخبار الأمس اطلب من الطلاب كتابة كل برهان من الأمثلة في صورة برهان حر. واطلب منهم شرح كيف تساعد كتابة البرهان الحر في تنظيم برهان شكلي.

إجابات إضافية

36. نموذج الإجابة: مثال على التماثل: سهيلة هي أخت عبير، وعبير هي أخت سهيلة. مثال غير دال على التماثل: إذا كانت موزة أقصر من سيباستيان، فإن سيباستيان أطول من موزة. مثال على التعويض: عندما يغادر لاعب الملعب في مباراة كرة سلة ليستريح، فإن المدرب يعوضه بلاعب آخر. مثال غير دال على التعويض: يمكن لشخص ما فصيلة دمه O سالب أن يمنح دمًا لشخص ما من أي فصيلة دم، لكن يمكنه أن يستقبل الدم من فصيلة O سالب فقط.

40a. نموذج الإجابة: $3 + 3 = 6$, $5 + 7 = 12$, $7 + 9 = 16$. لا تمثل المعلومات المذكورة كل عدد صحيح فردي وإنما عينة من الأعداد الفردية فقط. لا توضح العينة أن التخمين صحيح لكل عدد فردي.

40b. نموذج الإجابة: $3 = 2(2) - 1$, $5 = 2(3) - 1$, $7 = 2(4) - 1$

40c. 2: نموذج الإجابة: كنت سأضع التعبيرات في الجزء b وأثبت أنّ المجموع عبارة عن مضاعف العدد 2.

40d. افترض أن عددين صحيحين فرديين يمثلان بالصيغتين $2n - 1$ و$2m - 1$. المجموع $(2n - 1) + (2m - 1)$ يساوي $2n + 2m - 2$. يحتوي كل حد على العدد اثنين كعامل لذلك بالتحليل إلى العامل 2 نحصل على $2(n + m - 1)$. وبما أن التعبير عبارة عن مضاعف العدد 2 فإنه عدد زوجي. ومن ثَمّ، فإن مجموع عددين صحيحين فرديين يكون عددًا صحيحًا زوجيًا.

46. أحيانًا: بما أن المستوى يجب أن يتكون من 3 نقاط على الأقل. يمكن أن تقع النقطة الرابعة في المستوى نفسه أو في مستوى مختلف.

47. غير صحيحة على الإطلاق: مجموع زاويتين متكاملتين يساوي 180°. لذلك فلا يمكن لزاويتين حادتين أن تكونا متكاملتين أبدًا.

48. دائمًا: بما أنّ المستقيم عبارة عن تقاطع مستويين، فإن المستقيم يقع في كلا المستويين.

49. $(-1, -9)$; $x = -1$; -5

50. $(2, 13)$; $x = 2$; 5

51. $(4, -7)$; $x = 4$; 9

52. $(-2, -22)$; $x = -2$; -6

Uncorrected first proof - for training purposes only

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات امنح كل طالب مسطرة لقياس إصبع ما من الأنملة حتى المفصل الأول. ثم اطلب من كل طالب القياس من المفصل الأول إلى الثاني. اطلب من الطلاب إيجاد الطول من أنملة الإصبع إلى المفصل الثاني وتحديد ما إذا كانت القياسات المأخوذة عن الإصبع المناظر في اليد الأخرى مطابقة أم لا. اطلب منهم كتابة المسلّمات أو النظريات التي استخدموها.

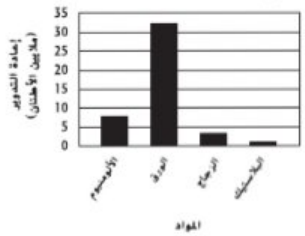
إجابة إضافية

27. **المعطيات:** $AC = DF, AB = DE$
المطلوب إثباته: $BC = EF$
البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $AC = DF, AB = DE$ (معطى)
2. $AC = AB + BC; DF = DE + EF$ (مسلّمة جمع القطع المستقيمة)
3. $AB + BC = DE + EF$ (التعويض)
4. $BC = EF$ (خاصية الطرح)

تدريب على الاختبار المعياري

23. **الجبر** يوضح المخطط أدناه عملية إعادة التدوير السنوية حسب المواد في دولة ما. حوالي كم كيلوجرام من الألومنيوم تجري إعادة تدويره في كل عام؟ **D**

إعادة التدوير السنوية



A 7.5
B 15,000
C 7,500,000
D 15,000,000,000

24. **الجبر** ما التعبير الذي يكافئ $\frac{12x^{-4}}{4x^{-8}}$؟ **G**

F $\frac{1}{3x_4}$
G $3x^4$
H $8x^2$
J $x^{\frac{4}{3}}$

25. **إجابة قصيرة** النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين هي 1:R. ما قياس الزاوية الأصغر؟ **18**

26. **اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول**
تستطيع هالة طباعة 40 كلمة في الدقيقة على لوحة المفاتيح. كم عدد الدقائق التي ستستغرقها هالة لطباعة 200 كلمة؟ **C**

A 0.5
B 2
C 5
D 10
E 12

مراجعة شاملة

27. **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين. (الدرس R-2)
المعطيات: $AC = DF$
$AB = DE$
المطلوب إثباته: $BC = EF$ **انظر الهامش.**

28. **النماذج** يستخدم براين ستة مربعات من الورق المقوى لتشكيل منشور مستطيل. ما الشكل الهندسي الذي تمثله قطع الورق المقوى، وكم عدد المستقيمات التي ستتكون بتقاطعها؟ **المستويات: 12**

29. **المصباح** سقط مصباح مسافة 25 m من مبنى ما. يمكن استخدام الصيغة $h = -16t^2 + 25$ لتقدير عدد الثواني التي سيستغرقها المصباح ليصطدم بالأرض.
a. ما المدة التي سيستغرقها المصباح ليصطدم بالأرض؟ **1.25 ثانية**
b. إذا التقطه عند 4 أمتار، فما مدة سقوط المصباح؟ **حوالي 1.14 ثانية**

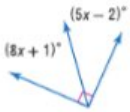
بسّط.

30. $\sqrt{48}$ **$4\sqrt{3}$**
31. $\sqrt{162}$ **$9\sqrt{2}$**
32. $\sqrt{25a^6b^4}$ **$5|a^3|b^2$**
33. $\sqrt{45xy^8}$ **$3y^4\sqrt{5x}$**

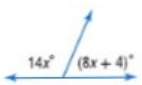
مراجعة المهارات

الجبر أوجد x.

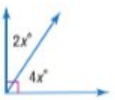
34. **7**



35. **8**



36. **15**



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Uncorrected first proof - for training purposes only

2 البرهان الهندسي

يوضح **المثال 3** طريقة استخدام الخواص لكتابة براهين هندسية.

مثال إضافي

3 إذا كان $\angle A \cong \angle B$، $m\angle B = 2m\angle C$. و$m\angle C = 45$. فإن $m\angle A = 90$.

اكتب برهانًا من عمودين للتحقق من هذا التخمين.

العبارات	المبررات
1. $m\angle A = 2m\angle C$؛ $\angle A \cong \angle B$؛ $m\angle C = 45$	1. معطى
2. $m\angle A = m\angle B$	2. تعريف $\cong$ الزوايا
3. $m\angle A = 2m\angle C$	3. خاصية التعدي في $=$
4. $m\angle A = 2(45)$	4. التعويض
5. $m\angle A = 90$	5. التعويض

انتبه!

الكلمة النهائية ذكّر الطلاب بأن يتحققوا من أن السطر النهائي في برهانهم يتوافق مع ما طُلب في السؤال. على سبيل المثال، يمكن أن يتضمن البرهان الحل لمتغير. لكن السؤال يتطلب حل تعبير جبري بالمتغير.

نصائح للمعلمين الجدد

البرهان الجبري في البرهان من عمودين، لا تحتاج كل عبارة إلى أن تنتج مباشرة عن العبارة السابقة، لكن يجب أن تنتج عن العبارات أعلاها.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اطلب من الطلاب العمل في مجموعات لإنشاء فيديو يوضح طريقة كتابة برهان جبري من عمودين. احرص على تقديم تبريرات لتبرير كل خطوة. شارك الفيديو الخاص بكل مجموعة مع الصف الدراسي.

2 البرهان الهندسي بما أنّ الهندسة تستخدم المتغيرات والأعداد والعمليات أيضًا، فإن الكثير من خواص المساواة المستخدمة في الجبر صحيحة أيضًا في الهندسة. على سبيل المثال، قياسات القطع المستقيمة والزوايا عبارة عن أعداد حقيقية. لذا يمكن استخدام الخواص المستخدمة في الجبر لمناقشة علاقاتها كما هو مبيّن في الجدول أدناه.

الخاصية	القطع المستقيمة	الزوايا
الانعكاس	$AB = AB$	$m\angle 1 = m\angle 1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$، فإن $CD = AB$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$، فإن $m\angle 2 = m\angle 1$.
التعدي	إذا كان $AB = CD$، $CD = EF$، فإن $AB = EF$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$، $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$.

نصيحة دراسية

خاصيتا التبديل والتجميع سنفترض في هذا الكتاب أنه إذا كان a، b، c أعدادًا حقيقية، فإن الخواص التالية صحيحة.

خاصية التبديل في الجمع
$a + b = b + a$

خاصية التبديل في الضرب
$a \cdot b = b \cdot a$

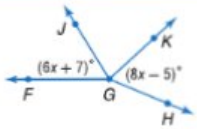
خاصية التجميع في الجمع
$(a + b) + c = a + (b + c)$

خاصية التجميع في الضرب
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

يمكن استخدام هذه الخواص لكتابة براهين هندسية.

مثال 3 كتابة برهان هندسي

إذا كان $\angle JGK \cong \angle FGJ$، $\angle JGK \cong \angle KGH$، فإن $x = 6$. اكتب برهانًا من عمودين للتحقق من هذا التخمين.



المعطيات: $\angle FGJ \cong \angle JGK$، $\angle JGK \cong \angle KGH$
$m\angle FGJ = 6x + 7$، $m\angle KGH = 8x - 5$

المطلوب إثباته: $x = 6$

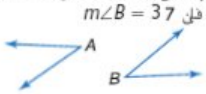
البرهان:

العبارات	المبررات
1. $m\angle FGH = 6x + 7$، $m\angle KGH = 8x - 5$؛ $\angle FGJ \cong \angle JGK$؛ $\angle JGK \cong \angle KGH$	1. المعطيات
2. $m\angle FGJ = m\angle JGK$؛ $m\angle JGK = m\angle KGH$	2. تعريف الزوايا المتطابقة
3. $m\angle FGJ = m\angle KGH$	3. خاصية التعدي
4. $6x + 7 = 8x - 5$	4. خاصية التعويض
5. $6x + 7 + 5 = 8x - 5 + 5$	5. خاصية الجمع
6. $6x + 12 = 8x$	6. خاصية التعويض
7. $6x + 12 - 6x = 8x - 6x$	7. خاصية الطرح
8. $12 = 2x$	8. خاصية التعويض
9. $\frac{12}{2} = \frac{2x}{2}$	9. خاصية القسمة
10. $6 = x$	10. خاصية التعويض
11. $x = 6$	11. خاصية التماثل

تمرين موجّه

اكتب برهانًا من عمودين للتحقق من كل تخمين.

3A. إذا كان $\angle A \cong \angle B$، $m\angle A = 37$، فإن $m\angle B = 37$.



3B. إذا كان $\overline{CD} \cong \overline{EF}$، فإن $y = 8$.

محفوظ الطبع والتأليف © لمجموعة تعلم مكجرو هيل McGraw-Hill Education

التركيز على محتوى الرياضيات

كتابة البراهين ذكّر الطلاب بأن التبريرات تذكر مع خطوات البرهان لجعلها دقيقة ولإضافة الوضوح للقارئ. إذا كان الطلاب يواجهون صعوبة في كتابة برهان شكلي، فيمكنهم كتابة الخطوات التي يعتقدون أنها تؤدي إلى الحل، ثم يعودون لإضافة التبريرات لكل خطوة. ستساعدهم هذه الطريقة على معرفة ما إذا كانوا قد أغفلوا أي خطوات وستساعدهم على فهم طريقة وصولهم إلى الحل.

Uncorrected first proof - for training purposes only

1 النقاط والمستقيمات والمستويات

يوضح **المثالان 1 و2** كيفية التعرف على المسلَّمات ومقارنتها. يجب على الطلاب أن يكونوا قادرين على إثبات التخمينات باستخدام المسلَّمات والنظريات.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 الهندسة المعمارية اشرح كيف توضح الصورة الواردة في المثال 1 أن كل عبارة صحيحة. ثم اذكر المسلَّمة التي يمكن استخدامها لإثبات أنّ كل عبارة صحيحة.

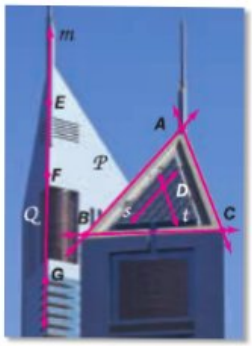
a. تقع النقطتان F وG في المستوى Q وعلى المستقيم m. يقع المستقيم m بالكامل في المستوى Q. تقع النقطتان F وG على المستقيم m. ويقع المستقيم في المستوى Q. توضح المسلَّمة 2.5، التي تنص على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى ما، فإن المستقيم الذي يحتوي على النقطتين يقع بأكمله في ذلك المستوى، أن هذا صحيح.

b. تحدد النقطتان A وC أحد المستقيمات. تقع النقطتان A وC على طول حافة ما، وهي المستقيم الذي تحددانه. تثبت المسلَّمة 2.1، التي تنص على أنه في ما بين أي نقطتين يوجد مستقيم واحد بالتحديد، أنّ هذا صحيح.

تشكل هذه المسلَّمات الإضافية أساسًا للبراهين والتبريرات المتعلقة النقاط والمستقيمات والمستويات.

مثال من الحياة اليومية 1 تحديد المسلَّمات

الهندسة المعمارية اشرح كيف توضح الصورة أن كل عبارة صحيحة. ثم اذكر المسلَّمة التي يمكن استخدامها لإثبات أنّ كل عبارة صحيحة.



a. يحتوي المستقيم m على النقطتين F وG. ويمكن أن تكون النقطة E المستقيم m أيضًا.

وحافة المبنى عبارة عن خط مستقيم m. تقع النقاط E وF وG على طول هذه الحافة. لذا فهي تقع على طول المستقيم m. توضح المسلَّمة R.3، التي تنص على أن المستقيم يحتوي على نقطتين على الأقل، أن هذا صحيح.

b. يتقاطع المستقيمان s وt عند النقطة D.

تشكل الشبكة الموجودة على نافذة المبنى مستقيمات متقاطعة. يتقاطع المستقيمان s وt من هذه الشبكة في موقع واحد فقط، وهو النقطة D. توضح المسلَّمة R.4، التي تنص على أنه إذا تقاطع مستقيمان فإن تقاطعهما يكون عند نقطة واحدة بالتحديد، أن هذا صحيح.

تمرين موجّه

1A. تحدد النقاط A وB وC أحد المستويات

1B. يتقاطع المستويان P وQ في المستقيم m

1A. تشكل النقاط A وB وC الرؤوس الثلاثة للسقف. تنص المسلَّمة 2.2 على أنّ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.
1B. تتقاطع حواف جوانب السقف. يتقاطع المستويان P وQ لهذا السقف مرة واحدة في المستقيم m.
المسلَّمة 2.7: إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون في صورة مستقيم.

يمكنك استخدام المسلَّمات لشرح تبريرك عند تحليل العبارات.

مثال 2 تحليل العبارات باستخدام الفرضيات

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صحيحة *دائمًا*، أم أحيانًا، أم غير صحيحة *على الإطلاق*. اشرح تبريرك.

a. إذا تقاطع مستقيمان في المستوى نفسه، فإن نقطة تقاطعهما تقع في المستوى نفسه الذي يقع فيه المستقيمان.

دائمًا: تنص المسلَّمة R.5 على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى ما، فإن المستقيم الذي يحتوي على النقطتين يقع بأكمله في ذلك المستوى. إذًا، طالما أن كلتا النقطتين تقع في المستوى، فإن أي نقطة على هذه المستقيمات، بما في ذلك نقطة تقاطعهما، تقع أيضًا في المستوى.

b. أربع نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

أحيانًا: تنص المسلَّمة R.3 على أن المستقيم يحتوي على الأقل على نقطتين. يعني هذا أن المستقيم يمكن أن يحتوي على نقطتين *أو أكثر*. إذًا، يمكن لأربع نقاط ألا تكون على استقامة واحدة، مثل A وB وC وD، أو على استقامة واحدة مثل النقاط A وB وC وD.

تمرين موجّه

2A. يحدد مستقيمان متقاطعان أحد المستويات

2B. تتقاطع ثلاثة مستقيمات في نقطتين

2A. دائمًا: بين أي مستقيمين متقاطعين، توجد دائمًا ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة، وتنص المسلَّمة 2.2 على أنّ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة، يمر بها مستوى واحد فقط.
2B. غير صحيحة على الإطلاق؛ من أجل أن تتقاطع ثلاثة مستقيمات في نقطتين، يجب أن يكون مستقيمان من الثلاثة متماثلين.

نصيحة دراسية

النظام البديهي النظام البديهي عبارة عن مجموعة من القواعد البديهية التي يمكن استخدام بعضها أو استخدامها جميعًا للاستنتاج المنطقي للنظريات.

2 البراهين الحرة لإثبات فرضية، فأنت تستخدم التبرير الاستنتاجي للانتقال من الفرضية إلى الخلاصة الخاصة بالتخمين الذي تحاول إثباته. ويتم هذا عن طريق كتابة **برهان**. وهو فرضية منطقية تدعم فيها أي عبارة تقولها بعبارة صحتها مقبولة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظ لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

p111

نصائح للمعلمين الجدد

البراهين الشكلية ذكّر الطلاب أنه بالرغم من أن المسلَّمات لم تثبت شكلًا، فإنه تقبل صحتها وتستخدم لإثبات عبارات ونظريات أخرى.

Uncorrected first proof - for training purposes only

مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي اليومي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن مراجع الصفحات ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

خيار اليومين اطلب من الطلاب إكمال مراجعة درس بدرس. ثم يمكنك استخدامها لتخصيص ورقة عمل مراجعة أخرى تتناول كل أهداف هذه الوحدة أو الأهداف التي يحتاج فيها طلابك إلى المزيد من المساعدة فقط.

إجابات إضافية

5. غير صحيحة على الإطلاق؛ إذا تقاطع مستويان، فإنهما يكوّنان مستقيمًا.
6. أحيانًا؛ إذا كانت النقاط الثلاثة على استقامة واحدة، فستقع في عدة مستويات، لكن إذا لم تكن على استقامة واحدة، فستقع في مستوى واحد فقط.
7. دائمًا؛ إذا احتوى مستوى على مستقيم، فإن كل نقطة من هذا المستقيم تقع في المستوى.
8. أحيانًا؛ إذا كانت الزوايا متجاورة، فستكوّن زاوية قائمة، لكنها إذا كانت غير متجاورة، فلن تكوّن زاوية قائمة.
9. 15 مصافحة؛

16. العبارات (المبررات)
    1. $PQ = RS,\ PQ = 5x + 9,\ RS = x - 31$ (معطى)
    2. $5x + 9 = x - 31$ (خاصية التعويض)
    3. $4x + 9 = -31$ (خاصية الطرح)
    4. $4x = -40$ (خاصية الطرح)
    5. $x = -10$ (خاصية القسمة)

دليل الدراسة والمراجعة يتبع

R-1 المسلّمات والبراهين الحرة

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صحيحة *دائمًا* أم أحيانًا، أم *غير صحيحة على الإطلاق*. اشرح. 9-5. انظر الهامش.

5. يتقاطع المستويان في نقطة واحدة.
6. تقع ثلاث نقاط في أكثر من مستوى واحد.
7. إذا كان المستقيم m يقع في المستوى X ويمر المستقيم m بالنقطة Q، فإن النقطة Q تقع في المستوى X.
8. إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإنهما تشكلان زاوية قائمة.
9. **التواصل** جرى تقديم ستة أشخاص في مؤتمر عمل. فإذا صافح كل شخص بقية الأشخاص، فما عدد المصافحات التي تبادلها هؤلاء الأشخاص؟ ضمّن نموذجًا يدعم تبريرك.

مثال 1

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صحيحة *دائمًا* أم أحيانًا، أم *غير صحيحة على الإطلاق*. اشرح.

a. *إذا وقعت النقاط X وY وZ في المستوى R، فإن هذه النقاط لا تقع على استقامة واحدة.*

أحيانًا؛ حقيقة أنّ النقاط X وY وZ تقع في المستوى R لا تتضمن ما إذا كانت هذه النقاط تقع على استقامة واحدة أم لا.

b. **يمر مستقيم واحد فقط بالنقطتين A وB.**

دائمًا؛ حسب المسلّمة 1-4. يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطتين.

R-2 البرهان الجبري

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة.

10. إذا كان $7(x - 3) = 35$، فإن $35 = 7(x - 3)$. **خاصية التماثل**
11. إذا كان $2x + 19 = 27$، فإن $2x = 8$. **خاصية الطرح**
12. $5(3x + 1) = 15x + 5$ **خاصية التوزيع**
13. $7x - 2 = 7x - 2$ **خاصية الانعكاس**
14. إذا كان $12 = 2x + 8$ و$2x + 8 = 3y$، فإن $3y = 12$.
15. انسخ البرهان التالي وأكمله.

المعطيات: $6(x - 4) = 42$

المطلوب إثباته: $x = 11$

العبارات	المبررات
a. $6(x - 4) = 42$	a. ؟ ـــ **المعطيات**
b. $6x - 24 = 42$	b. ؟ ـــ **خاصية التوزيع**
c. $6x = 66$	c. ؟ ـــ **خاصية الجمع**
d. $x = 11$	d. ؟ ـــ **خاصية القسمة**

16. اكتب برهانًا من عمودين لإثبات أنه إذا كان $PQ = RS$، و$PQ = 5x + 9$، و$RS = x - 31$، فإن $x = -10$. **انظر الهامش.**
17. **درجات الطلاب** حصل فالح في اختبارات هذا الربع على درجة مساوية لبولا. وحصلت بولا في اختبارات هذا الربع على درجة مساوية لهيث. ما الخاصية التي تثبت أن فالح وهيث حصلا على درجات متساوية؟ **خاصية التعدي**

مثال 2

اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\frac{5x - 3}{6} = 2x + 1$

المطلوب إثباته: $x = -\frac{9}{7}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1. $\frac{5x - 3}{6} = 2x + 1$	1. المعطيات
2. $5x - 3 = 6(2x + 1)$	2. خاصية الضرب في المعادلة
3. $5x - 3 = 12x + 6$	3. خاصية التوزيع في المعادلة
4. $-3 = 7x + 6$	4. خاصية الطرح في المعادلة
5. $-9 = 7x$	5. خاصية الطرح في المعادلة
6. $-9 _ 7 = x$	6. خاصية القسمة في المعادلة
7. $x = -\frac{9}{7}$	7. خاصية التماثل في المعادلة

حقوق الطبع والتأليف © تعود لشركة McGraw-Hill Education

Uncorrected first proof - for training purposes only

استخدم اختبارات الوحدة البديلة ذات المستويات المتعددة لتمييز التقويم لطلابك.

إجابات إضافية

5. $m\angle 1 = 48$, $m\angle 2 = 42$, $m\angle 3 = 90$. معطى.
≅ نظرية الزاويتين المتتامتين؛
6. $m\angle 7 = 81$, $m\angle 8 = 99$, $m\angle 5 = 81$, $m\angle 6 = 99$
≅ نظرية الزاويتين المتكاملتين؛
نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
7. إذا كانت زاوية ما حادة، فإن قياسها يكون أقل من 90.
8. إذا كان مستقيمان متعامدين، فإنهما يكونان زوايا قائمة.

إجابات إضافية (تمرين على الاختبار)

14. 84؛ نظرية الزوايا الداخلية المتتالية
15. 138؛ نظرية الزاويتين المتكاملتين
16. 42؛ نظرية الزوايا الخارجية المتبادلة
18. $j \parallel k$؛ عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.
19. لا يمكن إثبات ∥ أي مستقيمين.
20. $p \parallel q$؛ عكس نظرية الزوايا الخارجية المتبادلة

1. **البرهان** انسخ البرهان التالي وأكمله.
المعطيات: $3(x - 4) = 2x + 7$
المطلوب إثباته: $x = 19$
البرهان:

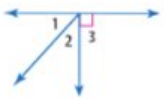
العبارات	المبررات
a. $3(x - 4) = 2x + 7$	a. معطى
b. $3x - 12 = 2x + 7$	b. ؟ خاصية الجمع
c. ؟ $x - 12 = 7$	c. خاصية الطرح
d. $x = 19$	d. ؟ خاصية الجمع

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صحيحة *دائمًا*، أم أحيانًا، أم غير صحيحة *على الإطلاق*.

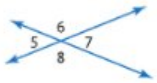
2. تكوّن الزاويتان المتكاملتان زوجًا خطيًا. أحيانًا
3. إذا وقعت النقطة B بين النقطتين A وC، فإن $AC + AB = BC$. أبدًا
4. إذا تقاطع مستقيمان وكوّنا زوايا متجاورة متطابقة، فإن المستقيمين متعامدان. دائمًا

أوجد قياس كل زاوية مرقمة، واذكر النظريات التي تبرر عملك.

5. $m\angle 1 = x$, $m\angle 2 = x - 6$



6. $m\angle 2 = 7x + 15$, $m\angle 3 = 8x$



5، 6. انظر الهامش.

اكتب كل عبارة في صورة "إذا، فإن".

7. قياس الزاوية الحادة أقل من 90.
8. يتقاطع المستقيمان المتعامدان ليكوّنا زوايا قائمة.

7، 8. انظر الهامش.

9. **الاختيار من متعدد** إذا احتوى المثلث على زاوية منفرجة واحدة، فإنه مثلث منفرج الزاوية.
أي العبارات التالية هي المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية أعلاه؟ C

A إذا لم يكن المثلث منفرج الزاوية، فإنه يحتوي على زاوية منفرجة واحدة.

B إذا لم يحتو المثلث على زاوية منفرجة واحدة، فإنه ليس مثلثًا منفرج الزاوية.

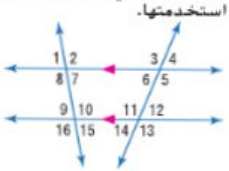
C إذا لم يكن المثلث منفرج الزاوية، فإنه لا يحتوي على أي زاوية منفرجة.

D إذا كان المثلث منفرج الزاوية، فإنه يحتوي على زاوية منفرجة واحدة.

حدّد ميل المستقيم الذي يحتوي على النقاط المعطاة.

10. $G(8, 1)$, $H(8, -6)$ غير معرف
11. $A(0, 6)$, $B(4, 0)$ $\frac{3}{2}$
12. $E(6, 3)$, $F(-6, 3)$ 0
13. $E(5, 4)$, $F(8, 1)$ -1

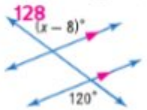
في الشكل، $m\angle 8 = 96$ و$m\angle 12 = 42$. أوجد قياس كل زاوية اذكر أي مسلّمة (مسلّمات) أو نظرية (نظريات) استخدمتها.



14. $\angle 9$
15. $\angle 11$
16. $\angle 6$

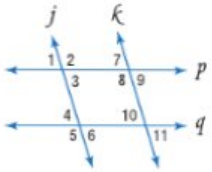
16-14. انظر الهامش.

17. أوجد قيمة x في الشكل أدناه.



حدّد أي مستقيمين، إن وجدا، متوازيين بناءً على المعلومات التالية. واذكر المسلّمة أو النظرية التي تبرر إجابتك.

18. $\angle 10 \cong \angle 4$
19. $\angle 6 \cong \angle 9$
20. $\angle 11 \cong \angle 7$



20-18. انظر الهامش.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Uncorrected first proof - for training purposes only

التمثيلات المتعددة
في التمرين 30، سيستخدم الطلاب رسومات هندسية، ووصفًا لفظيًا، وبرهانًا لاستكشاف الزوايا في مثلث.

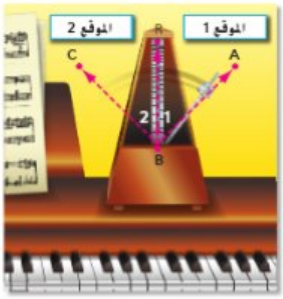
ملاحظات لحل التمرين
فرجار ومنقلة ومسطرة مستقيمة يتطلب التمرينان 30 و31 أن يستخدم الطلاب فرجارًا ومنقلة ومسطرة مستقيمة.

إجابات إضافية

27. بما أنّ مسار البندول يصنع زاوية قائمة، فإنّ $\angle ABC$ زاوية قائمة أو يبلغ قياسها 90 وبما أنّ $\overrightarrow{BR}$ ينصّف $\angle ABC$ إلى $\angle ABR$ و$\angle CBR$، وحسب مسلّمة جمع الزوايا، فإنّ $m\angle ABR + m\angle CBR = m\angle ABC$. وباستخدام التعويض $m\angle ABR + m\angle CBR = 90$. وبالتعويض مرة أخرى، $m\angle 1 + m\angle 2 = 90$. سنحصل على $m\angle 1$ يساوي 45. وبالتعويض، $45 + m\angle 2 = 90$. وباستخدام خاصية الطرح، $45 - 45 + m\angle 2 = 90 - 45$. أو $m\angle 2 = 45$. وبما أنّ $m\angle 1$ و$m\angle 2$ متساويتان، يكون $\overrightarrow{BR}$ مُنصّف $\angle ABC$ وذلك حسب تعريف مُنصّف الزاوية.

28. المعطيات: الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 3$ متقابلتان بالرأس.
المطلوب إثباته: $\angle 3 \cong \angle 1$
البرهان: بما أنّ الزاويتين $\angle 1$ و$\angle 3$ متقابلتان بالرأس، فهذا يعني أنهما تكوّنتا بواسطة مستقيمين متقاطعين. ثم نعرف أنّ $\angle 1$ و$\angle 2$ تشكلان زوجًا خطيًا وكذلك أنّ $\angle 2$ و$\angle 3$ تشكلان زوجًا خطيًا. وحسب النظرية 2.3، فإن الزاويتين $\angle 1$ و$\angle 2$ متكاملتان وكذلك $\angle 2$ وكذلك الزاويتان $\angle 3$ متكاملتان. وحسب خاصية التعدي في التطابق، فإنّ $\angle 3 \cong \angle 1$.

35. نموذج الإجابة: بما أنّ المنقلة تحتوي على مقياس كل من الزاوية الحادة والمنفرجة في الأعلى، فإنّ الزاوية المكملة تساوي قياس الزاوية المعلومة على المقياس الآخر.



27. فرضيات لتحديد إيقاع معين، تم تعديل وزن بندول الساعة بحيث يتأرجح بمعدل معين. افترض أنّ زاوية $\angle ABC$ الواردة في الصورة قائمة. وإذا كان $m\angle 1 = 45$. فاكتب برهانًا حرًا لإثبات أنّ $\overrightarrow{BR}$ ينصّف $\angle ABC$. **انظر الهامش.**

28. البرهان اكتب برهانًا للنظرية 4.8. **انظر الهامش.**

29. الجغرافيا تشترك يوتا وكولورادو وأريزونا ونيومكسيكو في نقطة مشتركة على حدودها تُسمى الزوايا الأربع. هذا هو المكان الوحيد الذي تلتقي فيه أربع ولايات في نقطة واحدة. إذا كانت $\angle 2$ زاوية قائمة، فأثبت أن المستقيمين ℓ وm متعامدان. **انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

30. التمثيلات المتعددة ستستكشف في هذه المسألة العلاقات بين الزوايا.

a. هندسيًا ارسم الزاوية القائمة ABC. ضع النقطة D داخل هذه الزاوية. وارسم $\overrightarrow{BD}$. ثم ارسم $\overrightarrow{KL}$ وأنشئ $\angle JKL$ مطابقة للزاوية $\angle ABD$.
b. لفظيًا ضع تخمينًا للعلاقة بين $\angle JKL$ و$\angle DBC$.
c. منطقيًا أثبت تخمينك. **a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

مهارات التفكير العليا. مسائل استخدام مهارات التفكير العليا

31. مسألة غير محددة الإجابة ارسم الزاوية WXZ حيث يكون $m\angle WXZ = 45$. ثم أنشئ $\angle YXZ$ مطابقة لـ $\angle WXZ$. ضع تخمينًا حول قياس $\angle WXY$. أثبت تخمينك. **انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

32. الكتابة في الرياضيات اكتب الخطوات التي ستستخدمها لإكمال البرهان أدناه.

المعطيات: $AB = \frac{1}{2}BD$، $\overline{BC} \cong \overline{CD}$
المطلوب إثباته: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

نموذج الإجابة: أولًا، أثبت أن $BC = CD$ و$BC + CD = BD$. ثم استخدم التعويض لتثبت أن $CD + CD = BD$ وأن $2CD = BD$. استخدم القسمة لتثبت أن $CD = \frac{1}{2}BD$ وهكذا $AB = CD$. وهذا يعني أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

33. تحفيز تم إثبات حالة واحدة من حالات نظرية تطابق الزوايا المتكاملة في هذا الدرس. وقد أثبت في التمرين 6 الحالة نفسها لنظرية تطابق الزوايا المتتامة. اشرح سبب وجود حالة أخرى لكل نظرية من هاتين النظريتين. ثم اكتب برهانًا للحالة الثانية من كل نظرية. **انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

34. التبرير حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم لا تصح *أبدًا*. اشرح تبريرك.
إذا كانت إحدى الزوايا المتكونة من خلال مستقيمين متقاطعين حادة، فإن الزوايا الثلاثة الأخرى المتكونة تكون حادة أيضًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

35. الكتابة في الرياضيات اشرح كيف يمكنك استخدام المنقلة لإيجاد قياس الزاوية المكملة لزاوية أخرى بطريقة سريعة. **انظر الهامش.**

محفوظ الطبع والتأليف © مملوكة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز أم

توسع أوجد $m\angle C$ إذا كانت $\angle C \cong \angle A$ و$m\angle A = 3x$ و$m\angle B = x + 20$. و$\angle A$ و$\angle B$ متكاملتين. تحقق من إجابتك.

1. $m\angle A + m\angle B = 180$ (تعريف $\triangle$ المتكاملتين)
2. $3x + x + 20 = 180$ (التعويض)
3. $x = 40$ (التعويض)
4. $m\angle A = m\angle C$ (تعريف $\cong$ $\triangle$)
5. $m\angle C = 3x$ (التعويض)
6. $m\angle C = 3(40)$ (التعويض)
7. $m\angle C = 120$ (التعويض)

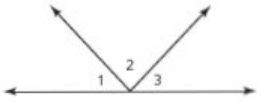
Uncorrected first proof - for training purposes only

الوحدة R تدريب على الاختبار المعياري
تراكمي

الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. في الرسم التخطيطي أدناه، $\angle 3 \cong \angle 1$. F



أي من الخلاصات التالية لا يلزم أن تكون صحيحة؟

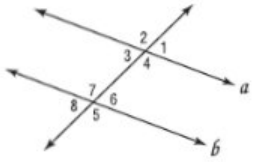
F $m\angle 1 - m\angle 2 + m\angle 3 = 90$

G $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 180 = 3$

H $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$

J $m\angle 2 - m\angle 1 = m\angle 2 - m\angle 3$

2. إذا كان $a \parallel b$ في الرسم التخطيطي أدناه، فأي الاستنتاجات التالية صحته *ليست* مؤكدة؟ D



A $\angle 1 \cong \angle 3$

B $\angle 4 \cong \angle 7$

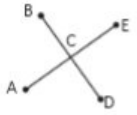
C $\angle 2 \cong \angle 5$

D $\angle 8 \cong \angle 2$

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 3 *المثال المضاد* هو مثال يُستخدم لإثبات أن العبارة المعطاة ليست صحيحة دائمًا.

3. في الرسم التخطيطي، يتقاطع $\overline{BD}$ مع $\overline{AE}$ في النقطة C. أي من الخلاصات التالية لا يلزم أن تكون صحيحة؟ D



A $\angle ACB \cong \angle ECD$

B تكوّن $\angle ACB$، $\angle ACD$ زوجًا خطيًا.

C $\angle BCE$، $\angle ACD$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

D $\angle BCE$، $\angle ECD$ زاويتان متتامتان.

4. ما التأثير في التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 4$ عندما تتغير إلى $y = x^2 - 3$؟ H

F يتغير ميل التمثيل البياني.

G يزيد عرض التمثيل البياني.

H لا يتغير شكل التمثيل البياني، وتنتقل رأسه إلى الأسفل.

J لا يتغير شكل التمثيل البياني، وتنتقل رأسه إلى اليسار.

5. ما المعادلة التي تنتج أضيق قطع مكافئ عند تمثيلها بيانيًا؟ C

A $y = 3x^2$

B $y = \frac{3}{4}x^2$

C $y = 6 - x^2$

D $y = -\frac{3}{4}x^2$

6. ما التأثير في التمثيل البياني للمعادلة $y = 3x^2$ عندما تتغير إلى $y = 2x^2$؟ J

F التمثيل البياني لـ $y = 2x^2$ انعكاس للتمثيل البياني لـ $y = 3x^2$ عبر المحور y.

G يدور التمثيل البياني بمقدار 90 درجة حول نقطة الأصل.

H يقل عرض التمثيل البياني.

J يزيد عرض التمثيل البياني.

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Uncorrected first proof - for training purposes only

التقويم التكويني

يمكنك استخدام هذه الصفحات لتقييم مدى تقدم الطلاب.

خيارات الواجب المنزلي

الاستعداد للوحدة 5 عيّن للطلاب التمارين كواجب منزلي لتقويم مستواهم لمعرفة ما إذا كانوا يمتلكون المهارات المطلوبة للوحدة التالية أم لا.

إجابة قصيرة/إجابة شبكية

دوّن إجابتك في ورقة الإجابات التي زوّدك بها المعلّم أو أي ورقة عادية

7. استخدم البرهان للإجابة عن السؤال.

المعطيات: $\angle A$ متتامة مع $\angle B$. $m\angle B = 46$

المطلوب إثباته: $m\angle A = 44$

البرهان:

العبارات	المبررات
1. A متتمة لـ $\angle B$، إذا $m\angle B = 46$.	1. المعطيات
2. $m\angle A + m\angle B = 90$	2. تعريف الزوايا المتتامة
3. $m\angle A + 46 = 90$	3. خاصية التعويض
4. $m\angle A + 46 - 46 = 90 - 46$	4. ؟
5. $m\angle A = 44$	5. خاصية التعويض

ما السبب الذي يمكن تقديمه لتبرير العبارة 4؟ **خاصية الجمع**

8. **الارتفاع** يمكن تعديل ارتفاع h كرة ترتد في الزمن t بالثانية من خلال المعادلة $h = -16t^2 + 28.3t$.

a. اكتب المعادلة التي تمثل الارتفاع في صيغة العوامل.

$h = t(-16t + 28.3)$

b. ما ارتفاع الكرة بعد 1.5 ثانية؟ **6.45 ft**

c. ما ارتفاع ارتداد الكرة؟ **13 ft**

إجابة موسعة

9. يُطلق سلطان نموذجا لصاروخ من مستوى الأرض.
ويُمكن إيجاد ارتفاع الصاروخ h بالمتر باستخدام المعادلة $h = -4.9t^2 + 56t$، حيث يمثل t الزمن بالثانية بعد الإطلاق.
انظر الهامش.

a. ما أقصى ارتفاع سيصل إليه الصاروخ؟ قرّب إلى أقرب جزء من العشرة من المتر. وضّح كل خطوة واشرح الطريقة.

b. ما المدة التي سيستغرقها الصاروخ بعد إطلاقه حتى يصل إلى أقصى ارتفاع له. قرّب إلى أقرب جزء من العشرة من الثانية.

5.7 s

حقوق الطبع والتأليف © مسموح لمدارس مؤسسة McGraw-Hill Education

9a. 160 m؛ نموذج الإجابة: صيغة الرأس للمعادلة هي $h = -4.9\left(t - \frac{40}{7}\right)^2 + 160$، إذًا فالرأس تقع عند $\left(\frac{40}{7}, 160\right)$.

Uncorrected first proof - for training purposes only

22a. البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $PV = nRT$ (معطى)
2. $\frac{PV}{nR} = \frac{nRT}{nR}$ (خاصية القسمة)
3. $\frac{PV}{nR} = T$ (خاصية القسمة)

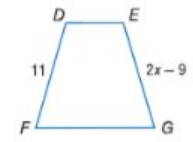
22. فرضيات يُعطى قانون الغاز المثالي بالصيغة $PV = nRT$، حيث P = الضغط مقيسًا بالضغط الجوي، و V = الحجم باللترات، و n = كمية الغاز بالمولات، و R قيمة ثابتة، و T = درجة الحرارة بالكلفن.

a. أثبت أنه إذا عُرف الضغط والحجم وكمية الغاز، فإن الصيغة $T = \frac{PV}{nR}$ تعطي درجة حرارة الغاز.

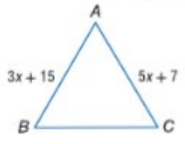
b. إذا كان لديك مول واحد من الأكسجين بحجم 25 لترًا عند ضغط 1 ضغط جوي، فما درجة حرارة الغاز؟ قيمة R تساوي 0.0821. ما الخاصية التي تبرر حسابك؟ **305 كلفن؛ التعويض.**

البرهان اكتب برهانًا من عمودين. **25-23. انظر الهامش.**

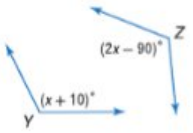
23. إذا كان $\overline{DF} \cong \overline{EG}$، فإن $x = 10$.



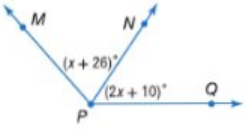
24. إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AC}$، فإن $x = 4$.



25 إذا كان $\angle Y \cong \angle Z$، فإن $x = 100$.



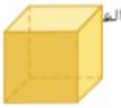
26. إذا كان $\angle MPN \cong \angle QPN$، فإن $x = 16$. **انظر ملحق إجابات الوحدة R.**



27. الكهرباء يمكن حساب الجهد V لدائرة كهربائية ما باستخدام الصيغة $V = \frac{P}{I}$، حيث تمثل P القدرة و I شدة التيار المار في الدائرة.

a. اكتب برهانًا لإثبات أنه عندما تكون القدرة ثابتة، ينخفض الجهد إلى النصف عند مضاعفة التيار. **a, b. انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

b. اكتب برهانًا لإثبات أنه عندما يكون التيار ثابتًا، يزيد الجهد إلى الضعف عند مضاعفة المق



B

28. التمثيلات المتعددة افترض أنّ مكعبًا طول ضلعه s. **a، وc، وe. انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

a. حسيًّا ارسم أو أنشئ نموذجًا لمكعبات أطوال أضلاعها 2 و4 و8 و16 وحدة.

b. جدوليًّا أوجد حجم كل مكعب. نظم نتائجك في جدول مثل المبيّن.

طول الضلع (s)	الحجم (V)
2	8
4	64
8	512
16	4096

c. لفظيًّا استخدم جدولك للوصول إلى تخمين حول التغير في الحجم عند مضاعفة طول ضلع المكعب. عبر عن تخمينك بالكلمات.

d. تحليليًّا اكتب تخمينك في صورة معادلة جبرية. $8V = (2s)^3$

e. منطقيًّا اكتب برهانًا لتخمينك. تأكد من كتابة عبارات *المعطيات* و*المطلوب إثباته* في بداية برهانك.

محفوظ الحقوق © لمنشورات ماكجرو هيل التعليمية

p123

التدريس المتمايز ق م ض م

تمرين شخصي قدّم للطلاب براهين جبرية وهندسية تفتقد تبريرات كل خطوة. ويجب أن يحتوي برهان واحد على الأقل على أخطاء. اطلب من الطلاب ملء التبريرات وشرح الأخطاء.

التمثيلات المتعددة

في التمرين 28، يستخدم الطلاب نماذج وجدولًا ووصفًا لفظيًّا ومعادلات جبرية لاستكشاف حجم مكعب ما.

إجابات إضافية

23. المعطيات: $\overline{DF} \cong \overline{EG}$
المطلوب إثباته: $x = 10$
البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\overline{DF} \cong \overline{EG}$ (معطى)
2. $DF = EG$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)
3. $11 = 2x - 9$ (التعويض)
4. $20 = 2x$ (خاصية الجمع)
5. $10 = x$ (خاصية القسمة)
6. $x = 10$ (خاصية التماثل)

24. المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
المطلوب إثباته: $x = 4$
البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (معطى)
2. $AB = AC$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)
3. $3x + 15 = 5x + 7$ (التعويض)
4. $8 = 2x$ (الطرح)
5. $4 = x$ (خاصية القسمة)
6. $x = 4$ (خاصية التماثل)

25. المعطيات: $\angle Y \cong \angle Z$
المطلوب إثباته: $x = 100$
البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\angle Y \cong \angle Z$ (معطى)
2. $m\angle Y = m\angle Z$ (تعريف $\cong$ $\angle s$)
3. $x + 10 = 2x - 90$ (التعويض)
4. $10 = x - 90$ (خاصية الطرح)
5. $100 = x$ (خاصية الجمع)
6. $x = 100$ (خاصية التماثل)

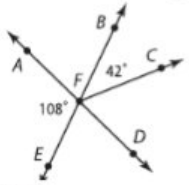
Uncorrected first proof - for training purposes only

تدريب على الاختبار المعياري

36. **إجابة شبكية** ما منوال هذه مجموعة البيانات هذه؟ **4**

4 ,1 ,0 ,4 , 1 ,2− ,3 ,4

37. أوجد قياس $\angle CFD$. **A**



A 66° C 108°
B 72° D 138°

38. **الجبر** بسّط. **H**

$4(3x - 2)(2x + 4) + 3x^2 + 5x - 6$

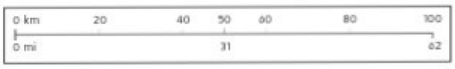
F $9x^2 + 3x - 14$
G $9x^2 + 13x - 14$
H $27x^2 + 37x - 38$
J $27x^2 + 27x - 26$

39. **اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول**
يقع منزل وفاء عند (3, 0) بينما يقع مجمع تجاري عند النقطة (0, 4). وذلك على شبكة إحداثيات تمثل كل وحدة فيها كيلومترًا واحدًا. فما المسافة بين منزل وفاء والمجمع التجاري؟ **B**

A 3 km D 13 km
B 5 km E 25 km
C 12 km

مراجعة شاملة

40. **الخرائط** يوجد في الخريطة مقياسا يوضح الكيلومترات بالأعلى والأميال بالأسفل.



افترض أن $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ قطعتان مستقيمتان. إذا كان $AB = 100$ كيلومتر، $CD = 62$ كيلو متر. فهل $\overline{AB} \cong \overline{CD}$؟ اشرح. (الدرس R-3) **انظر الهامش.**

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة. (الدرس R-4)

41. إذا كان $y + 7 = 5$، فإن $y = -2$. **خاصية الطرح**

42. إذا كان $MN = PQ$، فإن $PQ = MN$. **خاصية التماثل**

43. إذا كان $a - b = x$، $b = 3$، $a - 3 = x$. **التعويض**

44. إذا كان $x(y + z) = 4$ فإن $xy + xz = 4$. **خاصية التوزيع**

مثّل كل دالة بيانيًا. حدّد المجال والمدى.

45. $f(x) = 3(4)^x$

46. $f(x) = 2^{3x} - 3$

45-46. انظر ملحق الإجابات

حل كل من المعادلات التالية.

47. $2^{x-1} = 8^{x+3}$ **−5**

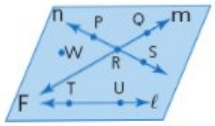
48. $5^{2x+12} = 25^{10x-12}$ **2**

D = {كل الأعداد الحقيقية}؛
R = {f(x) | f(x) > 0}

D = {كل الأعداد الحقيقية}؛
R = {f(x) | f(x) > −3}

مراجعة المهارات

ارجع إلى الشكل.



49. سمّ مستقيمًا يحتوي على النقطة P. **المستقيم n**

50. سمّ تقاطع المستقيمين n وm. **النقطة R**

51. سمّ نقطة لا تقع على أي من المستقيمات ℓ أو m أو n. **النقطة W**

52. ما الاسم الآخر للمستقيم n؟ **نموذج الإجابة: $\overleftrightarrow{PR}$**

53. هل يتقاطع المستقيم ℓ مع المستقيم m أو المستقيم n؟ اشرح. **انظر الهامش.**

p141

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب

الطلاب زوّد الطلاب بقائمة بالنظريات الواردة في هذه الوحدة. واطلب من كل طالب اختيار نظرية وكتابة ملخص عنها بدون استخدام كتبهم. ثم اطلب منهم تسليم ملخصاتهم أثناء مغادرتهم لغرفة الصف.

إجابات إضافية

40. نعم؛ فوفقًا للمقياس، فإن 100 km و62 mi متساويان في الطول. مما يعني أنّ $AB = CD$. وحسب تعريف التطابق، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

53. نعم؛ إنّه يقطع كلا المستقيمين m وn عندما تمتد المستقيمات الثلاثة.

Uncorrected first proof - for training purposes only

تدريب على الاختبار المعياري

51. الجبر أي مما يلي يمثل أحد حلول المعادلة $3x^2 - 5x + 1 = 0$؟ **A**

A $\frac{5 + \sqrt{13}}{6}$

B $\frac{-5 - \sqrt{13}}{6}$

C $\frac{5}{6} - \sqrt{13}$

D $-\frac{5}{6} + \sqrt{13}$

52. إجابة شبكية لدى سلطان 20 كرة زجاجية في حقيبة. جميعها بالحجم والشكل أنفسهما. توجد 8 من الكرات الحمراء، و2 من الكرات الزرقاء، و10 من الكرات الصفراء في الحقيبة. وسيختار كرة زجاجية من الحقيبة بشكل عشوائي. فما احتمال أن تكون الكرة الزجاجية التي سيختارها سلطان صفراء؟ **1/2 أو 0.5**

53. أي العبارات لا يمكن أن تكون صحيحة؟ **H**

F تحدد ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة أحد المستويات.

G يتقاطع مستقيمان في نقطة واحدة فقط.

H يمكن لمستقيمين على الأقل أن يحتويا على النقطتين أنفسهما.

J تقسم نقطة المنتصف القطعة المستقيمة إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

54. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول ما أكبر عدد من المناطق يمكن تكوينها إذا تقاطعت 3 مستقيمات متمايزة مع دائرة؟ **E**

A 3
B 4
C 5
D 6
E 7

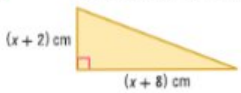
مراجعة شاملة

حُلّ كل معادلة بإكمال المربع. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

55. $x^2 + 4x - 8 = 5$ **$-6.1, 2.1$**

56. $3x^2 + 5x = 18$ **$-3.4, 1.8$**

57. أوجد قيمة x في الشكل إذا كانت المساحة $36\ cm^2$. **4**



حلّل كل من كثيرات الحدود إلى عواملها.

58-63. انظر الهامش.

58. $\frac{1}{2}t^2 - 162$

59. $25d^2 - 49d$

60. $196t^2u^3 - 144u^3$

61. $169a^4b^6 - 121c^8$

62. $4g^2 - 1296h^2$

63. $18a^3 + 27a^2 - 50a - 75$

64. علم الأحياء أثناء تجربة ما، يمكن التعبير عن عدد ذرات أحد الفيروسات باستخدام الصيغة $f(t) = 2^{t-2}$، حيث تمثل t الزمن بالأيام و$f(t)$ عدد الخلايا.
حدّد عدد الأيام التي قد مرت إذا كان ثمة 64 خلية فيروس. **8 أيام**

حُلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

65. $2x^2 + x - 10 = 0$ **$-\frac{5}{2}, 2$**

66. $2x^2 + x = 28$ **$-4, \frac{7}{2}$**

بسّط.

67. $(10 + 3i) + (3 - 7i)$ **$13 - 4i$**

68. $(2 + i)(2 - i)$ **5**

69. $\frac{5}{1 + 3i}$ **$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$**

70. الارتفاع يبلغ طول مازن 172.7 cm. كم يبلغ طول مازن بالبوصة؟

مراجعة المهارات

الجبر أوجد حل كل معادلة.

71. $4x - 3 = 19$ **5.5**

72. $\frac{1}{3}x + 6 = 14$ **24**

73. $5(x^2 + 2) = 30$ **2, −2**

McGraw-Hill Education حقوق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب ذكر كيف ستساعدهم كتابة برهان حر بينما يبدؤون تعلم البرهان الجبري والبرهان من عمودين.

إجابات إضافية

58. $\frac{1}{2}(t - 18)(t + 18)$

59. $d(5d - 7)(5d + 7)$

60. $4u^3(7t - 6)(7t + 6)$

61. $(13a^2b^3 - 11c^4)(13a^2b^3 + 11c^4)$

62. $(2g - 36h)(2g + 36h)$

63. $(3a + 5)(3a - 5)(2a + 3)$

المتابعة

استكشف الطلاب التبرير الاستقرائي والاستدلالي، والمسلّمات، والبراهين.

اطرح السؤال:

- ما وجه الاختلاف بين التبرير الاستقرائي والاستدلالي، وكيف يستخدم كل نوع من التبرير في الهندسة؟ نموذج الإجابة: يستخدم التبرير الاستقرائي عدة أمثلة محددة للوصول إلى تخمين. ويمكننا استخدام التبرير الاستقرائي لوضع تخمينات بناءً على أنماط هندسية ملحوظة. بينما يستخدم التبرير الاستدلالي حقائق أو قواعد أو تعريفات أو مسلّمات أو نظريات معروفة للوصول إلى خلاصات منطقية. ويستخدم التبرير الاستدلالي في كتابة براهين هندسية.

Uncorrected first proof - for training purposes only

التخطيط الراسي

قبل الدرس R-2 استخدام الفرضيات حول النقاط والمستقيمات والمستويات لكتابة براهين حرة.

الدرس R-2 استخدام علم الجبر لكتابة براهين من عمودين واستخدام خواص المساواة لكتابة براهين هندسية.

بعد الدرس R-2 إنشاء عبارات عن الأشكال الهندسية وخواصها وتبريرها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** من الدرس.

اطرح السؤال:

- هل نظام فهرنهايت أم النظام المئوي يمتلك وحدات أكبر للدرجات؟
  المئوي
- كيف يمكن لمعادلتين مختلفتين تمثيل العلاقة نفسها؟ نموذج الإجابة: يمكن إعادة كتابتها بنقل حدود المعادلة.

- استخدمت المسلّمات حول النقاط والمستقيمات والمستويات لكتابة براهين حرة.

1 استخدام علم الجبر لكتابة براهين من عمودين.

2 استخدام خواص المساواة لكتابة براهين هندسية.

- يحدد مقياس فهرنهايت درجات التجمد والغليان للماء عند $32°$ و$212°$، على التوالي. بينما يحددهما المقياس المئوي عند $0°$ و$100°$. يمكنك استخدام برهان جبري لإثبات أنه إذا كانت هذه المقاييس مرتبطة ببعضها بالصيغة $C = \frac{5}{9}(F - 32)$، فإنها أيضًا مرتبطة ببعضها بالصيغة $F = \frac{9}{5}C + 32$.

المفردات الجديدة

برهان جبري
algebraic proof

برهان من عمودين
two-column proof

برهان شكلي
formal proof

ممارسات في الرياضيات

3 بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 البرهان الجبري

البرهان الجبري الجبر عبارة عن نظام مكوّن من مجموعات من الأعداد والعمليات والخواص التي تسمح لك بإجراء عمليات جبرية. يلخص الجدول التالي عدة خواص للأعداد الحقيقية التي درستها في الجبر.

المفهوم الأساسي خواص الأعداد الحقيقية

تعتبر الخواص التالية صحيحة لأي من الأعداد الحقيقية a وb وc.

خاصية الجمع في المعادلة	إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
خاصية الطرح في المعادلة	إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
خاصية الضرب في المعادلة	إذا كان $a = b$، فإن $a \cdot c = b \cdot c$.
خاصية القسمة في المعادلة	إذا كان $a = b$ و$c \neq 0$، فإن $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
خاصية الانعكاس في المعادلة	$a = a$
خاصية التماثل في المعادلة	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
خاصية التعدي في المعادلة	إذا كان $a = b$ و$b = c$، فإن $a = c$.
خاصية التعويض في المعادلة	إذا كان $a = b$، فإن a يمكن أن تستبدلها b في أي معادلة أو تعبير.
خاصية التوزيع	$a(b + c) = ab + ac$

البرهان الجبري عبارة عن برهان يتكون من سلسلة من العبارات الجبرية. وتبرر خواص المساواة الكثير من العبارات المستخدمة في البراهين الجبرية.

مثال 1 تبرير كل خطوة عند حل معادلة ما

أثبت أنه إذا كان $-5(x + 4) = 70$، فإن $x = -18$. واكتب تبريرًا لكل خطوة.

$-5(x + 4) = 70$	المعادلة الأصلية أو المعطى
$-5x + (-5)4 = 70$	خاصية التوزيع
$-5x - 20 = 70$	خاصية التعويض في المعادلة
$-5x - 20 + 20 = 70 + 20$	خاصية الجمع في المعادلة
$-5x = 90$	خاصية التعويض في المعادلة
$\frac{-5x}{-5} = \frac{90}{-5}$	خاصية القسمة في المعادلة
$x = -18$	خاصية التعويض في المعادلة

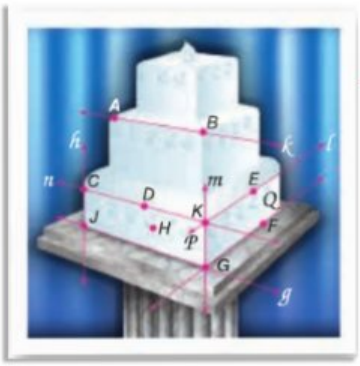
حقوق الطبع والتأليف © مجموعة ماكجرو-هيل للتعليم

R-2 | p118

Uncorrected first proof - for training purposes only

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **الكعك** اشرح كيف توضح الصورة أن كل عبارة صحيحة. ثم اذكر المسلَّمة التي يمكن استخدامها لإثبات أنّ كل عبارة صحيحة.



16-23. انظر الهامش.

16. يتقاطع المستقيمان n وℓ عند النقطة K.
17. يتقاطع المستويان P وQ في المستقيم m.
18. تحدد النقاط D وK وH أحد المستويات.
19. تقع النقطة D أيضًا على المستقيم n وتقع بين النقطتين C وK.
20. تقع النقطتان D وH على استقامة واحدة.
21. تقع النقاط E وF وG في المستوى نفسه.
22. $\overleftrightarrow{EF}$ يقع في المستوى Q.
23. يتقاطع المستقيمان h وg عند النقطة J.

مثال 2 **حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صحيحة *دائمًا*، أم *أحيانًا*، أم *غير صحيحة على الإطلاق*. اشرح.**

24. يوجد مستوى واحد فقط يحتوي على نقاط ليست على استقامة واحدة وهي A وB وC.
25. يوجد ثلاثة مستقيمات على الأقل تمر بالنقطتين J وK. **24-29. انظر ملحق إجابات الوحدة R.**
26. إذا كانت النقاط M وN وP تقع في المستوى X، فإنها تقع على استقامة واحدة.
27. توجد النقطتان X وY في المستوى Z. أي نقطة على استقامة واحدة مع X وY توجد في المستوى Z.
28. يمكن لتقاطع مستويين أن يكون في صورة نقطة.
29. تحدد النقاط A وB وC أحد المستويات.

مثال 3

30. **البرهان** النقطة Y هي نقطة منتصف $\overline{XZ}$. Z هي نقطة منتصف $\overline{YW}$. أثبت أن $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$.

31. **البرهان** النقطة L هي نقطة منتصف $\overline{JK}$. $\overline{JK}$ يتقاطع مع $\overline{MK}$ عند K. إذا كان $\overline{JL} \cong \overline{MK}$، فأثبت أن $\overline{LK} \cong \overline{MK}$. **30-31. انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

32. **فرضيات** في عطلة نهاية الأسبوع الماضي، قضى إبراهيم وأصدقاؤه ظهيره يوم السبت في الحديقة. وكان ثمة العديد من الأشخاص بالدراجات وألواح التزلج. بلغ إجمالي الدراجات وألواح التزلج 11 بإجمالي 36 عجلة. استخدم برهانًا حرًا لتوضيح عدد الدراجات وعدد ألواح التزلج التي كانت في الحديقة. **انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

B

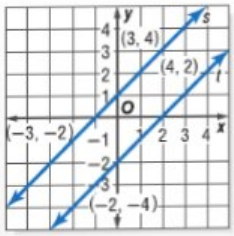
33. **القيادة** تنتقل خديجة من النقطة A إلى النقطة B. ويظهر طريقان محتملان على الخريطة. افترض أن حد السرعة في الطريق الجنوبية هو 55 km/h وأن حد السرعة في I-295 هو 70 km/h.
   a. أي الطريقين يغطي المسافة الأقصر؟ اشرح تبريرك.
   b. إذا كانت المسافة من النقطة A إلى النقطة B على طول الطريق الجنوبية تبلغ 10.5 كيلومترات والمسافة على طول I-295 تبلغ 11.6 km. فأي الطريقين أسرع بافتراض أن خديجة تقود بحد السرعة؟ **I-295**

33a. الجادة الجنوبية: نموذج الإجابة: طالما أنه ثمة مستقيم يمر بين أي نقطتين، وأن الجادة الجنوبية هي المستقيم بين النقطتين A وB، فإنها هي الطريق الأقصر بينهما.

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة ماكجرو هيل تعليم

التدريس المتمايز ض م أ

توسع أوجد ميل كل مستقيم.



ميل المستقيم s: $m = \frac{4-(-2)}{3-(-3)}$ أو 1 ميل المستقيم t: $m = \frac{2-(-4)}{4-(-2)}$ أو 1

ضع تخمينًا حول ميل هذه المستقيمات ومظهرها.
يكون للمستقيمات المتوازية الميل نفسه.

إجابات إضافية

16. تشكل الحواف العليا للطبقة السفلية مستقيمات متقاطعة. يتقاطع المستقيمان n وℓ في هذه الكعكة مرة واحدة فقط عند النقطة K. المسلَّمة 2.6. إذا تقاطع مستقيمان، فإن تقاطعهما يكون في نقطة واحدة فقط.

17. تتقاطع حواف جوانب الطبقة السفلى من الكعكة. يتقاطع المستويان P وQ في هذه الكعكة مرة واحدة في المستقيم m. المسلَّمة 2.7؛ إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون في صورة مستقيم.

18. يكون الجزء السفلي الأيسر من الكعكة عبارة عن جانب. يحتوي هذا الجانب على النقاط D وK وH ويشكل مستوى. المسلَّمة 2.2؛ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

19. الحافة العلوية من الطبقة السفلية للكعكة عبارة عن الخط المستقيم n. تقع النقاط C وD وK على طول هذه الحافة. لذا فهي تقع على طول المستقيم n. المسلَّمة 2.3؛ يحتوي المستقيم على نقطتين على الأقل.

20. يمكن رسم مستقيم واحد بين النقطتين D وH. المسلَّمة 2.1؛ أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

21. يكون الجزء السفلي الأيمن من الكعكة عبارة عن جانب. يحتوي الجانب على النقاط K وE وF وG ويشكّل مستوى. المسلَّمة 2.2؛ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

22. يكون الجزء السفلي من الكعكة عبارة عن جانب. يشكّل توصيل النقطتين E وF مستقيمًا يحتويه هذا الجانب. المسلَّمة 2.5؛ إذا وقعت نقطتان في مستوى ما، فإن المستقيم الذي يحتوي على النقطتين يقع بأكمله في ذلك المستوى.

23. تشكل الحواف العليا للطبقة السفلية مستقيمات متقاطعة. يتقاطع المستقيمان h وg في هذه الكعكة مرة واحدة فقط عند النقطة J. المسلَّمة 2.6. إذا تقاطع مستقيمان، فإن تقاطعهما يكون في نقطة واحدة فقط.

Uncorrected first proof - for training purposes only

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو أنشئ مقطع فيديو للأمثلة التي تشرحها في الصف. ثم انشر الفيديو على موقع ويب لمشاركة الفيديوهات حتى يتمكن الطلاب من مشاهدته خارج الصف.

التركيز على محتوى الرياضيات

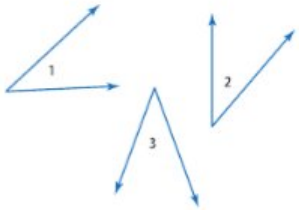
كتابة البراهين تُستخدم خاصية التماثل في البراهين غالبًا لتقليل عدد الخطوات في البرهان. تُترك دقة البرهان للمعلم. ولكن سيتناول هذا الكتاب المدرسي عبارات خاصية التماثل في الوحدات المستقبلية.

2 الزوايا المتطابقة والزوايا القائمة

يوضح **المثالان 3 و4** للطلاب طريقة إثبات التطابق وإيجاد قياسات الزوايا المجهولة.

2 الزوايا المتطابقة إنّ خواص الجبر التي تنطبق على تطابق القطع المستقيمة وتساوي قياساتها تنطبق أيضًا على تطابق الزوايا وتساوي قياساتها.

النظرية R.5 خواص تطابق الزاوية



خاصية الانعكاس في التطابق

$\angle 1 \cong \angle 1$

خاصية التماثل في التطابق

إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

خاصية التعدي في التطابق

إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$ و$\angle 3 \cong \angle 2$، فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.

سوف تثبت خواص الانعكاس والتعدي في التطابق من خلال التمرينين 18 و19 على التوالي.

البرهان خاصية التماثل في التطابق

المعطيات: $\angle A \cong \angle B$

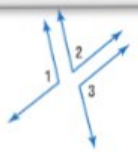
المطلوب إثباته: $\angle B \cong \angle A$

البرهان الحر:

بفرض أنّ $\angle B \cong \angle A$. وبتعريف الزوايا المتطابقة.
فإن $m\angle A = m\angle B$. وباستخدام خاصية التماثل في المعادلة.
فإن $m\angle B = m\angle A$. إذا. فإنّ $\angle A \cong \angle B$ وفقًا لتعريف الزوايا المتطابقة.

يمكن تطبيق الخواص الجبرية لإثبات النظريات الخاصة بعلاقات التطابق التي تشتمل على الزوايا المتكاملة والمتتامة.

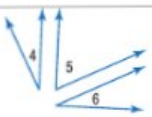
النظريات



R.6 نظرية تطابق الزوايا المتكاملة الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

الاختصار إنّ ∡*المكملة للزاوية* ∠ *نفسها* أو ∡ ≅ تكون ≅.

مثال إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$ و $m\angle 2 + m\angle 3 = 180$. فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.



R.7 نظرية تطابق الزوايا المتتامة الزاويتان المتتامتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

الاختصار إنّ ∡*المتممة للزاوية* ∠ *نفسها* أو ∡ ≅ تكون ≅.

مثال إذا كان $m\angle 4 + m\angle 5 = 90$ و $m\angle 5 + m\angle 6 = 90$. فإن $\angle 6 \cong \angle 4$.

سوف تثبت إحدى حالات النظرية R.6 في التمرين 6.

قراءة في الرياضيات
اختصارات ورموز
الرمز ∡ يعني *الزوايا*.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

p135

إجابة إضافية (الدرس R-4، تمرين موجّه)

2. $m\angle 6 + m\angle 7 = 180$ (نظرية ≅ الزاويتين المتكاملتين)
$3x + 32 + 5x + 12 = 180$ (التعويض)
$8x + 44 = 180$ (التعويض)
$8x + 44 - 44 = 180 - 44$ (خاصية الطرح)
$8x = 136$ (التعويض)
$\frac{8x}{8} = \frac{136}{8}$ (خاصية القسمة)
$x = 17$ (التعويض)

$m\angle 6 = 3x + 32$ (معطى)
$= 3(17) + 32$ أو 83 (التعويض)
$m\angle 7 = 5x + 12$ (معطى)
$= 5(17) + 12$ أو 97 (التعويض)

Uncorrected first proof - for training purposes only

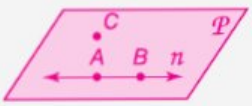
انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 45. وضّح للطلاب أن ما قام به عمري لم يكن عدم بدء برهانه بالمعطيات فحسب، بل إن العبارة التي استخدمها كانت خاطئة. إذا كانت B هي نقطة المنتصف، فإن B تقسم $\overline{AB}$ (لا $\overline{AD}$) إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

إجابات إضافية

42. نموذج الإجابة: طالما أن منال تصمم سقف صرف للماء، يجب أن تكون درجة ميل السقف بحد أدنى 4 سنتيمترات لكل متر. وتبلغ درجة ميل السقف في تصميم منال سنتيمترين لكل متر، وهو ما يقل عن 4 سنتيمترات لكل متر. لذلك فإن درجة ميل السقف في تصميم منال ليست منحدرة بالشكل الكافي.

46.



نموذج الإجابة: يحقق هذا المسلَّمتين 2.1 و2.3 لأن النقطتين A وB تقعان على المستقيم n. كما يحقق هذا المسلَّمتين 2.2 و2.4 لأن 3 نقاط تقع في المستوى. ويحقق المسلَّمة 2.5 لأن النقطتين A وB تقعان في المستوى P. لذلك فإن المستقيم n يقع أيضًا في المستوى P.

50. يمكن استخدام المصطلحات غير المعرفة، والتعريفات، والمسلَّمات والنظريات في البراهين. وتكون النظريات فقط هي القابلة للإثبات. تُشرح المصطلحات غير المعرفة من خلال الأمثلة والوصف. وتُشرح المصطلحات المعرفة باستخدام المصطلحات غير المعرفة أو مصطلحات معرفة أخرى. والمسلَّمات هي عبارات صحتها مقبولة.

44b. نموذج الإجابة: المسافة من مركز الدائرة إلى أي نقطة على الدائرة متساوية، وأي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط. يعني ذلك أنه يوجد مستقيم بين المركز وكل المخارج، وأنها جميعًا بالطول نفسه.

44. **التفكير المنطقي** الصورة لمبنى مستدير في مبنى البرلمان، وعادة يكون هذا المبنى المستدير مغطى بقبة.

a. إذا كنت تقف في منتصف المبنى المستدير، فأي مخرج مقوس يكون الأقرب إليك؟ **تقع كل المخارج على المسافة نفسها من المركز.**

b. ما المعلومات التي استخدمتها لصياغة إجابتك؟

c. ما المصطلح الذي يشير إلى المسافة الأقصر بين مركز الدائرة ونقطة على الدائرة؟ **نصف القطر**

مهارات التفكير العليا: مسائل استخدام مهارات التفكير العليا

45. علي إجابته صحيحة. نموذج الإجابة: يجب أن يبدأ البرهان بالمعطيات، الذي هو أن $\overline{AB}$ متطابق مع $\overline{BD}$ وأن A وB وD على استقامة واحد، ولذلك، بدأ علي البرهان بشكل صحيح.

45. **تحليل الخطأ** كان عبيد وعلي يعملان على برهان حر لإثبات أنه إذا كان $\overline{AB}$ يطابق $\overline{BD}$ وكانت النقاط A وB وD على استقامة واحدة، فإن B هي نقطة منتصف $\overline{AD}$.
بدأ كل طالب برهانه بشكل مختلف. هل أي منهما صحيح؟ اشرح تبريرك.

عبيد

إذا كانت B هي نقطة منتصف $\overline{AB}$،
فإن B تقسم $\overline{AD}$ إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

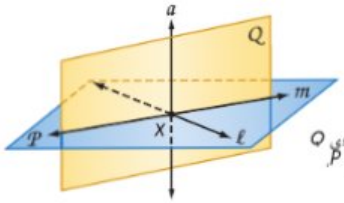
علي

$\overline{AB}$ يطابق $\overline{BD}$ و A وB وD على استقامة واحدة.

46. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم شكلاً يعبر عن خمس من الفرضيات السبع التي تعلمتها. اشرح المسلَّمات التي اخترتها والطريقة التي يعبر بها الشكل الخاص بك عن كل مسلَّمة. **انظر الهامش.**

47. **تحفيز** استخدم العبارات الصحيحة التالية والتعريفات والمسلَّمات التي قد تعلمتها للإجابة عن كل سؤال.

يتعامد مستويان إذا وفقط إذا احتوى أحد المستويين على مستقيم عمودي على المستوى الثاني



a. يمر مستوى واحد فقط عمودي على مستقيم بنقطة ما. إذا كان المستوى Q عموديًا على المستقيم ℓ عند النقطة X ويقع المستقيم ℓ في المستوى P، فما الذي يجب أن يكون صحيحًا أيضًا؟

b. يمر مستقيم واحد فقط عمودي على مستوى بنقطة ما. إذا كان المستوى Q عموديًا على المستوى P عند النقطة X ويقع المستقيم a في المستوى Q، فما الذي يجب أن يكون صحيحًا أيضًا؟

a. المستوى Q يتعامد على المستوى P.

b. المستقيم a يتعامد على المستوى P.

التبرير **حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صحيحة *أحيانًا*، أم دائمًا، أم غير صحيحة *على الإطلاق*. اشرح تبريرك أو قدم مثالًا مضادًا. 48، 49. انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

48. أي ثلاث نقاط يمر بها مستوى واحد فقط.

49. لأي ثلاثة مستقيمات في المستوى نفسه نقطتا تقاطع.

50. **الكتابة في الرياضيات** كيف تتطلب كتابة برهان تفكيرًا منطقيًا؟ **انظر الهامش.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز ف م ض م

إذا كان الطلاب يجدون صعوبة في تذكّر المسلَّمات الجديدة التي قد تعلموها،

فيمكن أن تطلب منهم رسم أمثلة متنوعة تمثل كل مسلَّمة من هذا الدرس.

Uncorrected first proof - for training purposes only

1 الزوايا المتكاملة والزوايا المتتامة

يوضح **المثالان 1 و2** طريقة استخدام نظريتي الزوايا المتكاملة والزوايا المتتامة لإيجاد قياسات الزوايا المجهولة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 منشآت يستخدم عامل البناء المنقلة لقياس الزاوية التي تصنعها العارضة الخشبية مع السقف والتي تساوي °42. ما قياس الزاوية التي صنعتها العارضة الخشبية مع الحائط؟ °48

2 الوقت الزاوية المتكوّنة بين عقرب الساعات وعقرب الدقائق عند الساعة 4 تبلغ °120. عندما يُنصّف عقرب الثواني الزاوية بين عقربَي الساعات والدقائق. ماذا ستكون قياسات الزاويتين بين عقربَي الدقائق والثواني وبين عقربَي الثواني والساعات؟ يساوي قياس كليهما °60 بحسب تعريف مُنصّف الزاوية ومسلّمة جمع الزوايا.

نصائح للمعلمين الجدد

الزوايا المتطابقة ذكّر الطلاب بأنه يمكن أن تكون الزوايا متطابقة وقياساتها متساوية. لكي نقول إنّ زاويتين متساويتان. فإن هذا يعني أنهما الشيء نفسه في الشكل.

يمكن استخدام مسلّمة جمع الزوايا مع العلاقات الأخرى بين الزوايا لتوفر نظريات إضافية تتعلق بالزوايا.

النظريات

R.3 نظرية الزاويتين المتكاملتين إذا كوّنت زاويتان زوجًا خطيًا، فإنّهما زاويتان متكاملتان.

مثال $m\angle 1 + m\angle 2 = 180$

R.4 نظرية الزاويتين المتتامتين إذا شكل الضلعان غير المشتركين لزاويتين متجاورتين زاوية قائمة فإنّ الزاويتين تكونان متتامتين.

مثال $m\angle 1 + m\angle 2 = 90$

نصيحة دراسية

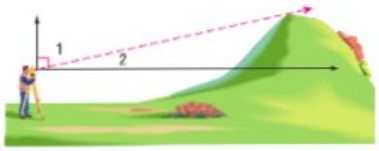
نظرية الزوج الخطي تُعرف نظرية الزاويتين المتكاملتين أيضًا باسم *نظرية الزوج الخطي*

سوف تثبت النظريتين 4.3 و4.4 من خلال التمرينين 16 و17 على التوالي.

مثال من الحياة اليومية 2 استخدام الزوايا المتكاملة والمتتامة

مسح الأراضي **استخدم المسّاح مزواة لقياس الزاوية بين مستوى نظره وقمة التلة وكانت حوالي °73. ما قياس الزاوية بين قمة التلة والمستوى الأفقي؟ برّر كل خطوة.**

الفهم أنشئ رسمًا للموقف. يقيس المسّاح الزاوية بين خط نظره والمستوى الرأسي. ارسم شعاعًا رأسيًا وآخر أفقيًا من النقطة التي يشاهد فيها المسّاح التلة. ثم سمِّ الزوايا الناتجة. تعرف أن الشعاعين الرأسي والأفقي يكونان زاوية قائمة.



التخطيط بما أن $\angle 1$ و$\angle 2$ يكونان زاوية قائمة، فيمكنك استخدام نظرية الزاويتين المتتامتين.

الحل

$m\angle 1 + m\angle 2 = 90$	نظرية الزاويتين المتتامتين
$73 + m\angle 2 = 90$	$m\angle 1 = 73$
$73 + m\angle 2 - 73 = 90 - 73$	خاصية الطرح في المعادلة
$m\angle 2 = 17$	التعويض

تكوّن قمة التل زاوية °17 مع المستوى الأفقي.

التحقق بما أننا نعرف أن مجموع الزوايا يجب أن يساوي 90. فيمكنك أن تحقق من حساباتك. إنّ مجموع 17 و73 يساوي 90. ✓

مراجعة المفردات

الزاويتان المتكاملتان هما زاويتان مجموع قياساتهما يساوي 180

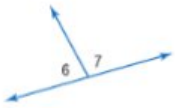
الزاويتان المتتامتان هما زاويتان مجموع قياساتهما يساوي 90

الزوج الخطي عبارة عن زوج من الزوايا المتجاورة بحيث يكون ضلعاهما غير المشتركين شعاعين متقابلين

تمرين موجّه

2. تكوّن الزاويتان $\angle 6$ و$\angle 7$ زوجًا خطيًا. إذا كان $m\angle 6 = 3x + 32$ و$m\angle 7 = 5x + 12$. فأوجد x و$m\angle 6$ و$m\angle 7$.

برّر كل خطوة. **انظر الهامش.**



محتوى الطبع والتأليف © محفوظ لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابة إضافية (الدرس R-4، تمرين موجّه)

1. $m\angle ABC = m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3$ (مسلّمة جمع الزوايا)

$23 + 90 + m\angle 3 = 131$ $(m\angle 2 = 90)$

$113 + m\angle 3 = 131$ (التعويض)

$113 + m\angle 3 - 113 = 131 - 113$ (خاصية الطرح)

$m\angle 3 = 18$ (التعويض)

Uncorrected first proof - for training purposes only

التخطيط الرأسي

قبل الدرس R-3 كتابة براهين جبرية وهندسية في صورة براهين حرة وبراهين من عمودين.

الدرس R-3 كتابة براهين تتضمن جمع القطع المستقيمة وتطابق القطع المستقيمة.

بعد الدرس R-3 استخدام التبرير الاستدلالي لإثبات عبارة ما.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال:

- لماذا احتاجت عبير إلى قياس القماش بهذه الطريقة؟ الإجابة: كان القماش أطول من العصا.
- صف كيف أن قياس 36 ثم 3 سنتيمترات يعطي طولاً يساوي 39 سنتيمترًا. يساوي الطولان بعد جمعهما معًا الطول الإجمالي.
- كم مرة ستقوم عبير بوضع علامة على القماش إذا أرادت أن تقيس 120 سنتيمترًا؟ 3

- كتبت براهين جبرية وبراهين من عمودين.

1 كتابة براهين تتضمن جمع القطع المستقيمة.

2 كتابة براهين تتضمن تطابق القطع المستقيمة.

- تعمل عبير في محل أقمشة بعد المدرسة. تقيس طول القماش عن طريق الإمساك بالحافة المستقيمة للقماش مع عصا طولها 91.4 cm. لقياس أطوال مثل 39 cm. تقوم بتحديد طول 36 cm. ومن نهاية هذا التحديد. تقيس طولًا إضافيًا يبلغ 3 cm. يضمن هذا أن يكون الطول الإجمالي للقماش يساوي 36 + 3 سنتيمترات أو 39 cm.

1 مسلَّمة المسطرة

المسلَّمة R.8 مسلَّمة المسطرة

التعبير اللفظي يمكن وضع النقاط الموجودة على أي مستقيم أو قطعة مستقيمة داخل تطابق عنصر بعنصر باستخدام أعداد حقيقية.

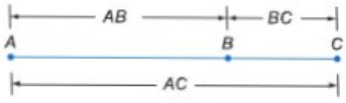
الرموز بافتراض أي نقطتين A وB على مستقيم. إذا تطابقت A مع الصفر، فإن B تتطابق مع عدد حقيقي موجب.

في ما يلي مسلَّمة جمع القطع المستقيمة.

المسلَّمة R.9 مسلَّمة جمع القطع المستقيمة

التعبير اللفظي إذا كانت A وB وC على استقامة واحدة، فإن النقطة B تقع بين A وC إذا كان $AB + BC = AC$.

الرموز



تُستخدم مسلَّمة جمع القطع المستقيمة كتبرير في الكثير من البراهين الهندسية.

ممارسات في الرياضيات

2 التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

3 بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

R-3 | p126

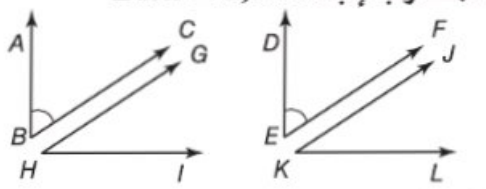
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

Uncorrected first proof - for training purposes only

33. يشير استخدام كل هذه النظريات لعبارة "أو لزاويتين متطابقتين" إلى أنه يجب إثبات صحة هذه الحالة من النظرية. بينما تتناول البراهين الأخرى حالة "للزاوية نفسها" من النظرية فقط.

المعطيات: $\angle DEF \cong \angle ABC$، و$\angle GHI$ متممة لـ $\angle ABC$، و$\angle JKL$ متممة لـ $\angle DEF$.

المطلوب إثباته: $\angle GHI \cong \angle JKL$



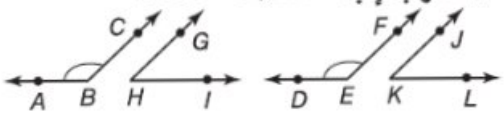
البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle DEF \cong \angle ABC$، و$\angle GHI$ متممة لـ $\angle ABC$، و$\angle JKL$ متممة لـ $\angle DEF$. (معطى)
2. $m\angle ABC + m\angle GHI = 90$ و$\angle DEF + \angle JKL = 90$ (تعريف ∡ المتتامتين)
3. $m\angle ABC + m\angle JKL = 90$ (التعويض)
4. $m\angle ABC + m\angle JKL = 90$ (خاصية التماثل)
5. $m\angle ABC + m\angle GHI = m\angle ABC + m\angle JKL$ (خاصية التعدي)
6. $m\angle ABC - m\angle ABC + m\angle GHI = m\angle ABC - m\angle ABC + m\angle JKL$ (خاصية الطرح)
7. $m\angle GHI = m\angle JKL$ (خاصية التعويض)
8. $\angle GHI \cong \angle JKL$ (تعريف ≅ ∡)

المعطيات: $\angle DEF \cong \angle ABC$، و$\angle GHI$ مكملة لـ $\angle ABC$، و$\angle JKL$ مكملة لـ $\angle DEF$.

المطلوب إثباته: $\angle GHI \cong \angle JKL$



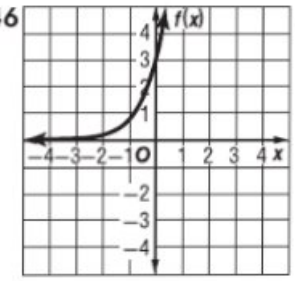
البرهان:

العبارات (المبررات)

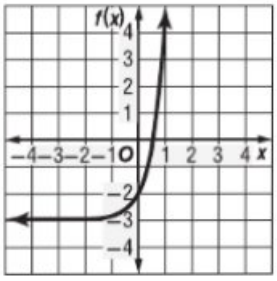
1. $\angle DEF \cong \angle ABC$، و$\angle GHI$ مكملة لـ $\angle ABC$، و$\angle JKL$ مكملة لـ $\angle DEF$. (معطى)
2. $m\angle ABC + m\angle GHI = 180$ و$m\angle DEF + m\angle JKL = 180$ (تعريف ∡ المتتامتين)
3. $m\angle ABC + m\angle JKL = 180$ (التعويض)
4. $m\angle ABC + m\angle JKL = 180$ (خاصية التماثل)
5. $m\angle ABC + m\angle GHI = m\angle ABC + m\angle JKL$ (خاصية التعدي)
6. $m\angle ABC - m\angle ABC + m\angle GHI = m\angle ABC - m\angle ABC + m\angle JKL$ (خاصية الطرح)
7. $m\angle GHI = m\angle JKL$ (خاصية التعويض)
8. $\angle GHI \cong \angle JKL$ (تعريف ≅ ∡)

34. غير صحيحة على الإطلاق؛ تكوّن الزوايا المتجاورة الناتجة عن تقاطع مستقيمين زوجًا خطيًا. إذا كانت إحدى زوايا هذا الزوج الخطي حادة، فإنّ قياسها سيكون أقل من 90. سيكون قياس أي زاوية مكملة أكبر من 90، لأنه إذا طرحنا عددًا أقل من 90 من 180 فسينتج دائمًا قياسًا أكبر من 90.

45.



46.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

Uncorrected first proof - for training purposes only

1 جمع القطع المستقيمة

يوضح **المثال 1** طريقة استخدام الخواص والمسلّمات لإثبات جمع القطع المستقيمة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أثبت أنه إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، فإن $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

البرهان:

العبارات (المبررات)

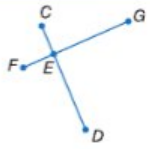
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (معطى)
2. $AB = CD$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)
3. $BC = BC$ (خاصية الانعكاس في $=$)
4. $AB + BC = AC$ (مسلّمة جمع القطع المستقيمة)
5. $CD + BC = AC$ (خاصية التعويض في $=$)
6. $CD + BC = BD$ (مسلّمة جمع القطع المستقيمة)
7. $AC = BD$ (خاصية التعدي في $=$)
8. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)

انتبه!

نهاية صحيحة في المثال 1. يطلب السؤال إثبات أن قطعتين مستقيمتين متطابقتان. اشرح للطلاب أن السطر الأخير في البرهان يتطلب أن يصف بشكل دقيق العلاقة بين القطعتين المستقيمتين كما يطلب السؤال.

مثال 1 استخدام مسلّمة جمع القطع المستقيمة

أثبت أنه إذا كان $\overline{CE} \cong \overline{FE}$ و $\overline{ED} \cong \overline{EG}$، فإن $\overline{CD} \cong \overline{FG}$.



المعطيات: $\overline{CE} \cong \overline{FE}$، $\overline{ED} \cong \overline{EG}$

المطلوب إثباته: $\overline{CD} \cong \overline{FG}$

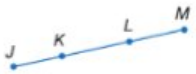
البرهان:

العبارات	المبررات
1. $\overline{CE} \cong \overline{FE}$; $\overline{ED} \cong \overline{EG}$	1. المعطيات
2. $CE = FE$; $ED = EG$	2. تعريف التطابق
3. $CE + ED = CD$	3. مسلّمة جمع القطع المستقيمة
4. $FE + EG = CD$	4. التعويض (الخطوتان 2 و3)
5. $FE + EG = FG$	5. مسلّمة جمع القطع المستقيمة
6. $CD = FG$	6. التعويض (الخطوتان 4 و5)
7. $\overline{CD} \cong \overline{FG}$	7. تعريف التطابق

قراءة في الرياضيات
خاصية التعويض عادةً ما تكتب خاصية التعويض في المعادلة في صورة تعويض.

تمرين موجّه

انسخ البرهان وأكمله.



1. المعطيات: $\overline{JL} \cong \overline{KM}$

المطلوب إثباته: $\overline{JK} \cong \overline{LM}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a. $\overline{JL} \cong \overline{KM}$	a. معطى
b. $JL = KM$	b. ؟ — تعريف $\cong$
c. $JK + KL =$ ؟ JL; $KL + LM =$ ؟ KM	c. مسلّمة جمع القطع المستقيمة
d. $JK + KL = KL + LM$	d. ؟ — التعويض
e. $JK + KL - KL = KL + LM - KL$	e. خاصية الطرح في المعادلة
f. ؟ $JK = LM$	f. التعويض
g. $\overline{JK} \cong \overline{LM}$	g. تعريف التطابق

2 تطابق القطع المستقيمة

رأيت سابقًا أن قياسات القطع المستقيمة منعكسة ومتماثلة ومتعدية. وبما أن القطع المستقيمة ذات القياس نفسه متطابقة، فإن تطابق القطع المستقيمة أيضًا انعكاسي ومتماثل ومتعدٍ أيضًا.

النظرية R.2 خواص تطابق القطع المستقيمة

خاصية الانعكاس في التطابق	$\overline{AB} \cong \overline{AB}$
خاصية التماثل في التطابق	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، فإن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.
خاصية التعدي في التطابق	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{EF}$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

الربط بالمفردات
متماثل
الاستخدام اليومي متوازن أو متناسب
الاستخدام الرياضي إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.

سوف تثبت خواص التماثل والانعكاس في التمارين 6 و7 على التوالي.

p127

McGraw-Hill Education مقتطف من كتاب الطالب © محفوظة لصالح مؤسسة

التدريس المتمايز ق م ض م

إذا كان الطلاب يجدون صعوبة في التعرف على المعلومات المعطاة والمعلومات المتضمنة في شكل معطى.

يمكن أن تشجعهم على استخدام مهاراتهم المكانية لتحديد أماكن القطع المستقيمة المتطابقة الواضحة والمخفية. اطلب من الطلاب وضع علامات على الأشكال حتى يتمكنوا من الإشارة إلى العلاقات الموجودة في الأشكال بسهولة أثناء كتابتهم للبراهين.

Uncorrected first proof - for training purposes only

B 14. **منشآت** أنشئ قطعة مستقيمة بضعف طول $\overline{PQ}$.

اشرح كيف يمكن استخدام مسلَّمة جمع القطع المستقيمة لتبرير ما أنشأته. **انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

15 **البيسبول** استخدم الرسم التخطيطي لملعب البيسبول الموضح.

a. على الرسم التخطيطي، $\overline{SH} \cong \overline{TF}$. P نقطة منتصف $\overline{SH}$ و $\overline{TF}$. باستخدام برهان من عمودين، أثبت أنّ $\overline{SP} \cong \overline{TP}$. **انظر الهامش.**

b. تبلغ المسافة من القاعدة الرئيسية إلى القاعدة الثانية 38.8 مترًا. احسب المسافة من القاعدة الأولى إلى القاعدة الثانية؟ **27.4 m**

C 16. **التمثيلات المتعددة** A نقطة منتصف $\overline{PO}$، وB نقطة منتصف $\overline{PA}$، وC نقطة منتصف $\overline{PB}$.

a. **هندسيًّا** أنشئ رسمًا لتمثيل هذا الموقف.

b. **جبريًا** ضع تخمينًا للعلاقة الجبرية بين PC وPQ.

c. **هندسيًّا** انسخ القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ من رسمك. ثم أنشئ النقطتين B وC على $\overline{PQ}$. اشرح كيف يمكنك استخدام ما أنشأته لدعم تخمينك.

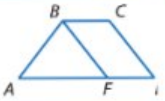
d. **حسيًّا** استخدم مسطرة لرسم قطعة مستقيمة متطابقة مع $\overline{PQ}$ من رسمك ولرسم النقطتين B وC على $\overline{PQ}$. استخدم رسمك لدعم تخمينك.

e. **منطقيًّا** أثبت تخمينك.

a–e. انظر ملحق إجابات الوحدة R.

مهارات التفكير العليا: مسائل استخدام مهارات التفكير العليا

17. **النقد** في الرسم التخطيطي، $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{BF} \cong \overline{CD}$. افحص النتائج التي توصلت إليها كل من لمياء وسالي. هل أي منهما صحيح؟ **انظر الهامش.**



لمياء

بما أنّ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{BF}$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{AF}$ بخاصية التعدي في التطابق

سالي

بما أنّ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{BF}$ بخاصية الانعكاس في التطابق.

18. **تحفيز** $ABCD$ عبارة عن مربع. أثبت أنّ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

19. **الكتابة في الرياضيات** هل توجد خاصية جمع في التطابق؟ اشرح. **انظر الهامش.**

20. **التبرير** صنّف العبارات التالية إلى *صواب* أو *خطأ* وإذا كانت خطأ، فاذكر مثالاً مضادًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

إذا كانت النقاط A وB وC وD وE تقع على استقامة واحدة وكانت B بين A وC، وC بين B وD، وD بين C وE، وكانت $AC = BD = CE$، فإن $AB = BC = DE$.

21. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم نمثيلاً لمسلَّمة جمع القطع المستقيمة تكون فيه القطعة المستقيمة بطول سنتيمترين، وتحتوي على أربع نقاط على استقامة واحدة، ولا تحتوي على قطع مستقيمة متطابقة.

22. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين البراهين الحرة والبراهين ذات العمودين. **انظر ملحق إجابات الوحدة R.**

محفوظ لصالح © مجموعة لمعان جرو McGraw-Hill Education

ملاحظات لحل التمرين

فرجار ومسطرة مستقيمة يتطلب التمرين 14 استخدام الطلاب للفرجار والمسطرة المستقيمة.

فرجار ومسطرة يتطلب التمرين 16 استخدام الطلاب للفرجار والمسطرة.

التمثيلات المتعددة

في التمرين 16، سيستخدم الطلاب رسومات هندسية، وتخمينًا جبريًا، وقياسًا مباشرًا لاستكشاف نقاط منتصف مستقيم ما.

انتبه!

تحليل الخطأ طبقت ليلى الخاصية بشكل صحيح لكنها ذكرت بشكل غير صحيح أنّ $\overline{AB} \cong \overline{AF}$. طبّقت غاية أيضًا الخاصية بشكل صحيح لكنها ذكرت خاصيّة الانعكاس على نحو خاطئ.

إجابات إضافية

15a. **المعطيات:** P، $\overline{SH} \cong \overline{TF}$ نقطة منتصف $\overline{SH}$ و $\overline{TF}$.
المطلوب إثباته: $\overline{SP} \cong \overline{TP}$
البرهان:
العبارات (المبررات)

1. P، $\overline{SH} \cong \overline{TF}$ نقطة منتصف $\overline{SH}$، وP نقطة منتصف $\overline{TF}$. (معطى)
2. $SH = TF$ (تعريف ≅ القطع المستقيمة)
3. $SP = PH,\ TP = PF$ (تعريف نقطة المنتصف)
4. $SH = SP + PH,\ TF = TP + PF$ (مسلَّمة جمع القطع المستقيمة)
5. $SP + PH = TP + PF$ (التعويض)
6. $SP + SP = TP + TP$ (التعويض)
7. $2SP = 2TP$ (التعويض)
8. $SP = TP$ (خاصية القسمة)
9. $\overline{SP} \cong \overline{TP}$ (تعريف ≅ القطع المستقيمة)

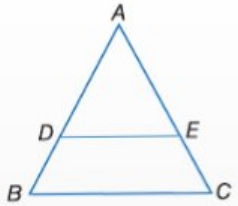
17. لا هذا ولا ذاك. بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و$\overline{CD} \cong \overline{BF}$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BF}$ حسب خاصية التعدي في التطابق.

19. لا؛ يشير التطابق إلى القطع المستقيمة. لا يمكن جمع القطع المستقيمة، وإنما قياسات القطع المستقيمة فقط.

التدريس المتمايز ض م أم

توسع معطى: $BD = EC$، $DA = AE$

المطلوب إثباته: $BA = AC$



البرهان:
العبارة (المبرر)

1. $BD = EC;\ DA = AE$ (معطى)
2. $BD + DA = EC + AE$ (خاصية الجمع في =)
3. $BD + DA = BA;\ EC + AE = AC$ (مسلَّمة جمع القطع المستقيمة)
4. $BA = AC$ (التعويض)

Uncorrected first proof - for training purposes only

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

19. المعطيات: $-\frac{1}{3}n = 12$

المطلوب إثباته: $n = -36$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $-\frac{1}{3}n = 12$ (معطى)
2. $-3\left(-\frac{1}{3}n\right) = -3(12)$ (خاصية الضرب)
3. $n = -36$ (التعويض)

20. المعطيات: $-3r + \frac{1}{2} = 4$

المطلوب إثباته: $r = -\frac{7}{6}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $-3r + \frac{1}{2} = 4$ (معطى)
2. $2\left(-3r + \frac{1}{2}\right) = 2(4)$ (خاصية الضرب)
3. $-6r + 1 = 8$ (التعويض)
4. $-6r = 7$ (خاصية الطرح)
5. $r = -\frac{7}{6}$ (خاصية القسمة)

21a. المعطيات: $d = vt + \frac{1}{2}at^2$

المطلوب إثباته: $a = \frac{2d - 2vt}{t^2}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $d = vt + \frac{1}{2}at^2$ (معطى)
2. $d - vt = vt - vt + \frac{1}{2}at^2$ (خاصية الطرح)
3. $d - vt = \frac{1}{2}at^2$ (التعويض)
4. $2(d - vt) = 2\left(\frac{1}{2}at^2\right)$ (خاصية الضرب)
5. $2(d - vt) = at^2$ (التعويض)
6. $2d - 2vt = at^2$ (خاصية التوزيع)
7. $\frac{2d - 2vt}{t^2} = \frac{at^2}{t^2}$ (خاصية القسمة)
8. $\frac{2d - 2vt}{t^2} = a$
9. $a = \frac{2d - 2vt}{t^2}$ (خاصية التماثل)

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة.

13. إذا كان $5(x + 7) = -3$ فإن $5x + 35 = -3$. **خاصية التوزيع**
14. إذا كان $m\angle 1 = 25$ و $m\angle 2 = 25$، فإن $m\angle 1 = m\angle 2$. **التعويض**
15. إذا كان $AB = BC$، $BC = CD$، فإن $AB = CD$. **خاصية التعدي**
16. إذا كان $3\left(x - \frac{2}{3}\right) = 4$ فإن $3x - 2 = 4$. **خاصية التوزيع**

مثال 2 **فرضيات** أكمل كل برهان.

17. **المعطيات:** $\frac{8 - 3x}{4} = 32$

المطلوب إثباته: $x = -40$

البرهان:

العبارات	المبررات
a. $\frac{8 - 3x}{4} = 32 = 32$	a. معطى
b. $4\left(\frac{8 - 3x}{4}\right) = 4(32)$	b. ؟ **خاصية الضرب**
c. $8 - 3x = 128$	c. ؟ **التعويض**
d. ؟ **$-3x = 120$**	d. خاصية الطرح
e. $x = -40$	e. ؟ **خاصية القسمة**

18. **المعطيات:** $x\frac{1}{5} + 3 = 2x - 24$

المطلوب إثباته: $x = 15$

البرهان:

العبارات	المبررات
a. ؟ **$\frac{1}{5}x + 3 = 2x - 24$**	a. معطى
b. ؟ **$5\left(\frac{1}{5}x + 3\right) = 5(2x - 24)$**	b. خاصية الضرب
c. $x + 15 = 10x - 120$	c. ؟ **التعويض**
d. ؟ **$15 = 9x - 120$**	d. خاصية الطرح
e. $135 = 9x$	e. ؟ **خاصية الجمع**
f. ؟ **$15 = x$**	f. خاصية القسمة
g. ؟ **$x = 15$**	g. خاصية التماثل

مثال 3 **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين للتحقق من كل تخمين. **19. 20. انظر الهامش.**

19. إذا كان $-\frac{1}{3}n = 12$، فإن $n = -36$.

20. إذا كان $-3r + \frac{1}{2} = 4$، فإن $r = -\frac{7}{6}$.

21. **العلوم** العجلة a المقيسة بالمتر لكل ثانية مربعة. والمسافة المقطوعة d المقيسة بالمتر. والسرعة المتجهة v المقيسة بالمتر لكل ثانية. والزمن t المقيس بالثانية جميعها مرتبطة في الصيغة $d = vt + \frac{1}{2}at^2$.

a. أثبت أنه إذا علمت قيم المسافة والسرعة المتجهة والزمن، فإنه يمكن حساب عجلة جسم ما باستخدام الصيغة $a = \frac{2d - 2vt}{t^2}$. **انظر الهامش.**

b. إذا قطع جسم مسافة 2850 m في 30 s بسرعة متجهة ابتدائية مقدارها 50 m لكل ثانية. فكم يبلغ تسارع الجسم؟ ما الخاصية التي تبرر حسابك؟ **3 m/s²؛ التعويض**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
ف م مبتدئ	9-26, 36, 38, 39, 41-61	9-25 فردي، 42-45	10-26 زوجي، 36, 38, 39, 41, 46-61
ض م أساسي	9-25 فردي، 26-36. 38, 39, 41-61	9-27, 42-45	28-36, 38, 39, 41, 46-61
أ م متقدم	28-55. (اختياري: 61-56)		

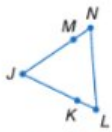
Uncorrected first proof - for training purposes only

McGraw-Hill Education © محفوظ لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تحقق من فهمك

مثال 1

1. **فرضيات** انسخ البرهان وأكمله.



المعطيات: $\overline{KJ} \cong \overline{MJ}$ ، $\overline{LK} \cong \overline{NM}$

المطلوب إثباته: $\overline{LJ} \cong \overline{NJ}$

البرهان:

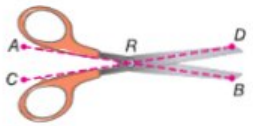
العبارات	المبررات
a. $\overline{LK} \cong \overline{NM}$, $\overline{KJ} \cong \overline{MJ}$	a. المعطيات
b. $LK = NM$, $KJ = MJ$	b. تعريف القطع المستقيمة المتطابقة
c. $LK + KJ = NM + MJ$	c. خاصية الجمع
d. $LJ = LK + KJ$; $NJ = NM + MJ$	d. مسلّمة جمع القطع المستقيمة
e. $LJ = NJ$	e. التعويض
f. $\overline{LJ} \cong \overline{NJ}$	f. تعريف ≅ القطع المستقيمة.

مثال 2

2. **البرهان** أثبت ما يلي. **انظر الهامش.**

المعطيات: $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$

المطلوب إثباته: $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$



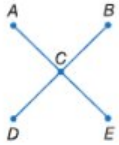
3. **المقص** ارجع إلى الرسم التخطيطي المبيّن. $\overline{AR}$ يتطابق مع $\overline{CR}$. $\overline{DR}$ يتطابق مع $\overline{BR}$. أثبت أنّ $AR + DR = CR + BR$.

انظر الهامش.

التمرين وحل المسائل

مثال 1

4. **فرضيات** انسخ البرهان وأكمله.



المعطيات: C هي نقطة منتصف $\overline{AE}$.

C هي نقطة منتصف $\overline{BD}$.

$\overline{AE} \cong \overline{BD}$

المطلوب إثباته: $\overline{AC} \cong \overline{CD}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a. ?	a. معطى
b. $AC = CE$, $BC = CD$	b. تعريف نقطة المنتصف
c. $AE = BD$	c. تعريف ≅ القطع المستقيمة.
d. $AE = AC + CE$, $BD = BC + CD$	d. مسلّمة جمع القطع المستقيمة
e. $AC + CE = BC + CD$	e. التعويض
f. $AC + AC = CD + CD$	f. التعويض
g. $2AC = 2CD$	g. بسّط.
h. $2AC = 2CD$	h. خاصية القسمة
i. $\overline{AC} \cong \overline{CD}$	i. تعريف ≅ القطع المستقيمة.

4a. C نقطة منتصف $\overline{AE}$.
C نقطة منتصف $\overline{BD}$.
$\overline{AE} \cong \overline{BD}$

McGraw-Hill Education © محفوظ لشركة ماكجرو هيل للتعليم وشركاه

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 3-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

2. **المعطيات:** $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$
المطلوب إثباته: $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$
البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$ (معطى)
2. $WX = YZ$ (تعريف ≅ القطع المستقيمة)
3. $XY = XY$ (خاصية الانعكاس)
4. $WX + XY = XY + YZ$ (خاصية الجمع)
5. $WY = WX + XY$; $XZ = XY + YZ$ (خاصية جمع القطع المستقيمة)
6. $WY = XZ$ (التعويض)
7. $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ (تعريف ≅ القطع المستقيمة)

3. **المعطيات:** $\overline{AR} \cong \overline{CR}$; $\overline{DR} \cong \overline{BR}$
المطلوب إثباته: $AR + DR = CR + BR$
البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\overline{AR} \cong \overline{CR}$; $\overline{DR} \cong \overline{BR}$ (معطى)
2. $AR = CR$, $DR = BR$ (تعريف ≅ القطع المستقيمة)
3. $AR + DR = CR + DR$ (خاصية الجمع)
4. $AR + DR = CR + BR$ (التعويض)

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
ف م مبتدئ	4-13, 17, 19-36	5-13 فردي، 23-26	4-12 زوجي، 17, 19-22, 27-36
ض م أساسي	5-13 فردي، 15-17, 19-36	4-13, 23-26	14-17, 19-22, 27-36
أ م متقدم	14-33. (اختياري: 34-36)		

Uncorrected first proof - for training purposes only

التخطيط الرأسي

قبل الدرس R-4 استخدام التبرير المنطقي لإثبات صحة العبارات. والتعرف على أزواج خاصة من الزوايا.

الدرس R-4 كتابة براهين تتضمن زوايا متكاملة وزوايا متتامة. وكتابة براهين تتضمن زوايا متطابقة وزوايا قائمة.
استخدام التبرير الاستدلالي لإثبات عبارة ما.

بعد الدرس R-4 استخدام التبرير الاستدلالي لإثبات عبارة ما.

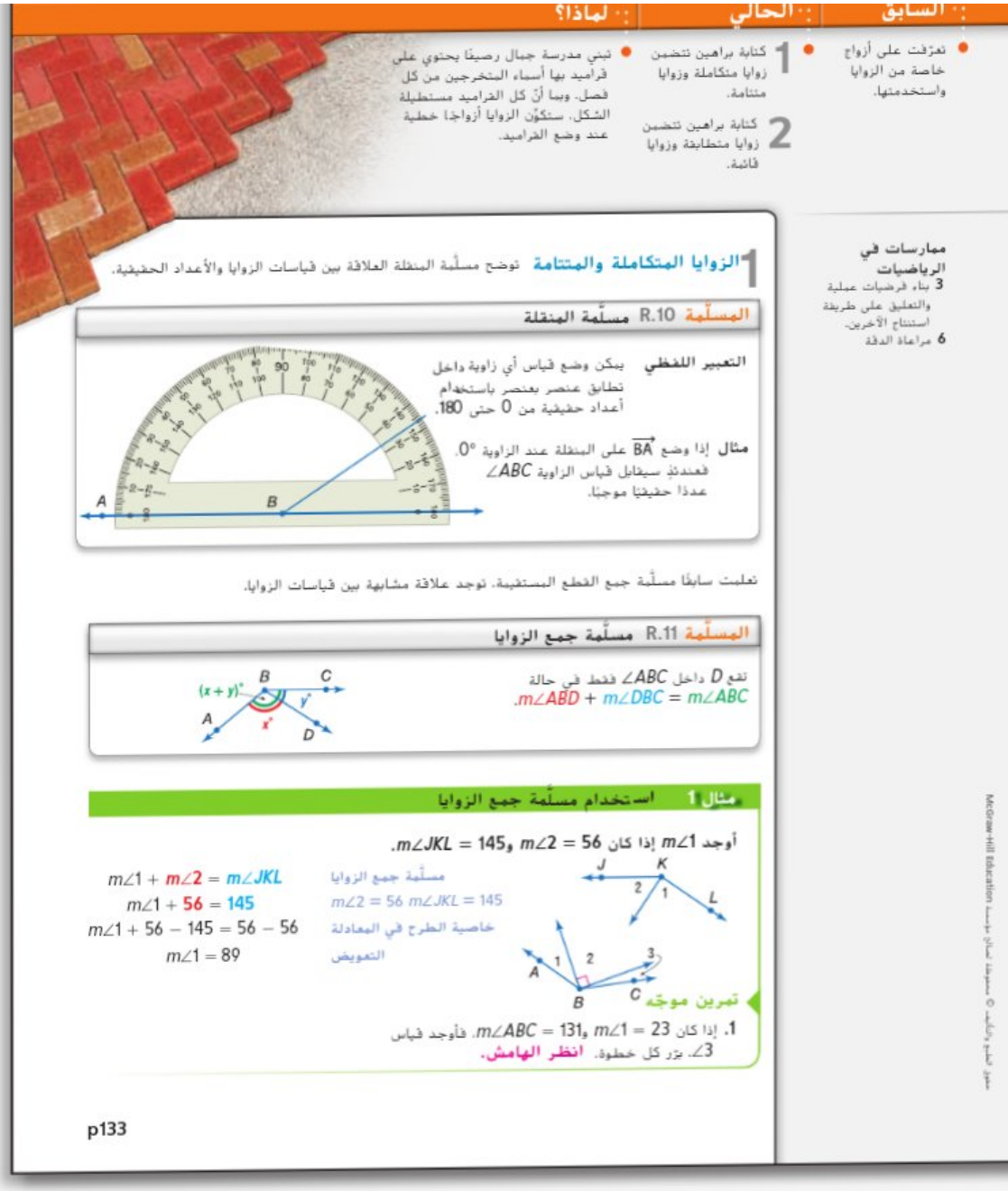
2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** من الدرس.

اطرح السؤال:

- ما أوجه الشبه بين زوايا المستطيلات والمربعات؟ يبلغ قياس زواياها 90°.
- إذا كان المربع والمستطيل متجاورين. فما مجموع قياس أي زاويتين متجاورتين؟ 180°
- إذا اصطفت 5 مربعات و5 مستطيلات على خط واحد. فكم عدد الأزواج الخطية التي تتكوَّن؟ 8



السابق
- تعرّفت على أزواج خاصة من الزوايا واستخدمتها.

الحالي
1 كتابة براهين تتضمن زوايا متكاملة وزوايا متتامة.
2 كتابة براهين تتضمن زوايا متطابقة وزوايا قائمة.

لماذا؟
- تبني مدرسة جمال رصيفًا يحتوي على قراميد بها أسماء المتخرجين من كل فصل. وبما أنّ كل القراميد مستطيلة الشكل. ستكوّن الزوايا أزواجًا خطية عند وضع القراميد.

ممارسات في الرياضيات
3 بناء قرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
6 مراعاة الدقة

1 الزوايا المتكاملة والمتتامة

توضح مسلّمة المنقلة العلاقة بين قياسات الزوايا والأعداد الحقيقية.

المسلّمة R.10 مسلّمة المنقلة

التعبير اللفظي يمكن وضع قياس أي زاوية داخل تطابق عنصر بعنصر باستخدام أعداد حقيقية من 0 حتى 180.

مثال إذا وضع $\overrightarrow{BA}$ على المنقلة عند الزاوية 0°. فعندئذٍ سيقابل قياس الزاوية $\angle ABC$ عددًا حقيقيًا موجبًا.

تعلمت سابقًا مسلّمة جمع القطع المستقيمة. توجد علاقة مشابهة بين قياسات الزوايا.

المسلّمة R.11 مسلّمة جمع الزوايا

تقع D داخل $\angle ABC$ فقط في حالة $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$.

مثال 1 استخدام مسلّمة جمع الزوايا

أوجد $m\angle 1$ إذا كان $m\angle 2 = 56$ و $m\angle JKL = 145$.

$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle JKL$	مسلّمة جمع الزوايا
$m\angle 1 + 56 = 145$	$m\angle 2 = 56$ $m\angle JKL = 145$
$m\angle 1 + 56 - 145 = 56 - 56$	خاصية الطرح في المعادلة
$m\angle 1 = 89$	التعويض

تمرين موجّه

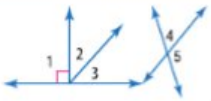
1. إذا كان $m\angle 1 = 23$ و $m\angle ABC = 131$. فأوجد قياس $\angle 3$. برّر كل خطوة. **انظر الهامش.**

Uncorrected first proof - for training purposes only

تحقق من فهمك

مثال 1

أوجد قياس كل زاوية مرقمة، واذكر النظريات التي تبرر عملك.



R-1. انظر الهامش.

1) $m\angle 2 = 26$

2. $m\angle 2 = x,\ m\angle 3 = x - 16$

3. $m\angle 4 = 3(x - 1),\ m\angle 5 = x + 7$

4. $m\angle 4 = 2x,\ m\angle 5 = x + 9$

مثال 2

5. **ركن السيارات** راجع الرسم التخطيطي لساحة السيارات الموجود في جهة اليسار. إذا علمت أنّ $\angle 6 \cong \angle 2$. فأثبت أنّ $\angle 8 \cong \angle 4$. **انظر الهامش.**

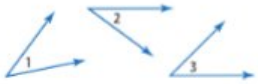
مثال 3

6. **البرهان** انسخ برهان حالة واحدة من النظرية 4.6 وأكمله.

المعطيات: الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 3$ متتامتان. الزاويتان $\angle 2$ و$\angle 3$ متتامتان.

المطلوب إثباته: $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان:



العبارات	المبررات
a. الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 3$ متتامتان. الزاويتان $\angle 2$ و$\angle 3$ متتامتان.	a. ؟ المعطيات
b. $m\angle 1 + m\angle 3 = 90$; $m\angle 2 + m\angle 3 = 90$	b. ؟ المتتامتان تعريف ∡
c. $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	c. ؟ التعويض
d. ؟ $m\angle 3 = m\angle 3$	d. خاصية الانعكاس
e. $m\angle 1 = m\angle 2$	e. ؟ خاصية الطرح
f. $\angle 1 \cong \angle 2$	f. ؟ تعريف ∡ ≅

مثال 4

7. **فرضيات** اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\angle 7 \cong \angle 4$

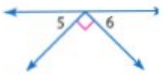
المطلوب إثباته: $\angle 6 \cong \angle 5$ **انظر الهامش.**

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1–3

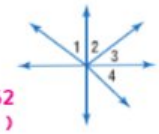
أوجد قياس كل زاوية مرقمة، واذكر النظريات المستخدمة التي تبرر عملك.

8. $m\angle 5 = m\angle 6$



$m\angle 5 = m\angle 6 = 45$ (≅ نظرية الزاويتين المتكاملتين)

9. الزاويتان $\angle 2$ و$\angle 3$ متتامتان. $m\angle 2 = 28$ و $\angle 4 \cong \angle 1$



$m\angle 1 = m\angle 4 = 45$ و $m\angle 3 = 62$ (≅ نظرية الزاويتين المتتامتين والمتكاملتين)

10. الزوايا $\angle 2$ و$\angle 4$ و$\angle 5$ متكاملة. $m\angle 4 = 105$

$m\angle 2 = 75$ و $m\angle 3 = 105$ و $m\angle 5 = 75$ (≅ نظرية الزاويتين المتكاملتين)

محقوق الطبع والتأليف © مسموح لمكتاب مؤسسة McGraw-Hill Education

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-7 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

1. $m\angle 1 = 90,\ m\angle 3 = 64$؛ نظرية الزاويتين المتتامتين
2. $m\angle 2 = 53,\ m\angle 3 = 37$؛ نظرية الزاويتين المتتامتين
3. $m\angle 4 = 114,\ m\angle 5 = 66$؛ نظرية الزاويتين المتكاملتين
4. $m\angle 4 = 129,\ m\angle 5 = 51$؛ نظرية الزاويتين المتكاملتين
5. **المعطيات:** $\angle 6 \cong \angle 2$
   المطلوب إثباته: $\angle 8 \cong \angle 4$
   البرهان:
   العبارات (المبررات)
   1. $\angle 6 \cong \angle 2$ (معطى)
   2. $m\angle 2 + m\angle 4 = 180$, $m\angle 6 + m\angle 8 = 180$ (نظرية الزاويتين المتكاملتين)
   3. $m\angle 2 + m\angle 8 = 180$ (التعويض)
   4. $m\angle 2 - m\angle 2 + m\angle 4 = 180 - m\angle 2,\ m\angle 2 - m\angle 2 + m\angle 8 = 180 - m\angle 2$ (خاصية الطرح)
   5. $m\angle 4 = 180 - m\angle 2$, $m\angle 8 = 180 - m\angle 2$ (خاصية الطرح)
   6. $m\angle 4 = m\angle 8$ (التعويض)
   7. $\angle 8 \cong \angle 4$ (تعريف ≅ ∡)
7. **المعطيات:** $\angle 7 \cong \angle 4$
   المطلوب إثباته: $\angle 6 \cong \angle 5$
   البرهان:
   العبارات (المبررات)
   1. $\angle 7 \cong \angle 4$ (معطى)
   2. $\angle 5 \cong \angle 4$ و$\angle 7 \cong \angle 6$ (نظرية ∡ المتقابلة بالرأس)
   3. $\angle 5 \cong \angle 7$ (التعويض)
   4. $\angle 6 \cong \angle 5$ (التعويض)

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
ف م مبتدئ	8-15, 31, 32, 34-53	9-15 فردي، 36-39	8-14 زوجي، 31, 32, 34, 35, 40-53
ض م أساسي	9-15 فردي، 16-32, 34-53	8-15, 36-39	16-32, 34, 35, 40-53
أ م متقدم	16-48، (اختياري: 49-53)		

Uncorrected first proof - for training purposes only