مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

الرياضيات للصف الثانى عشر

المستوى المتقدم

السنة الدراسية 2023 / 2024
الفصل الدراسى الثانى

+971566151988/

أ/ محمد طه

الوحدة - 4
تطبيقات على الاشتقاق

الدرس الثالث

اسم الدرس : القيم العظمى و الصغرى

التاريخ : من 2 يناير إلى 6 يناير

+971566151988/

أ/ محمد طه

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

أهداف التعلم

- ❑التعرف على مفاهيم القيم القصوى المحلية والمطلقة.
- ❑إيجاد الأعداد الحرجة لدالة معطاة.
- ❑إيجاد القيم القصوى المحلية لدالة معطاة.
- ❑إيجاد القيم القصوى المطلقة لدالة معطاة.

Moham
M

مفردات الدرس

- القيم القصوى المطلقة .
- القيم الصغرى المطلقة .
- القيم العظمى المطلقة .
- القيم الصغرى المحلية .
- القيم العظمى المحلية .
- الأعداد الحرجة .

Moh

مقدمة

القيم القصوى المطلقة

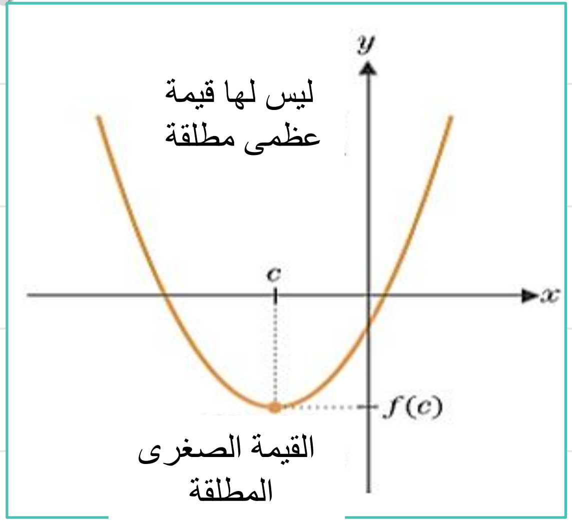
تعريف 3.1

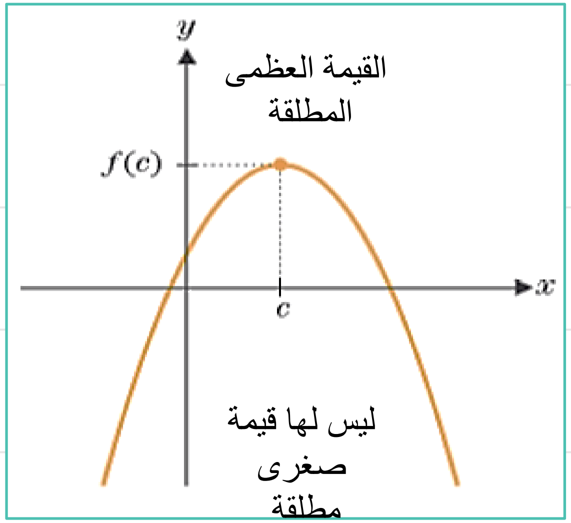
بالنسبة إلى الدالة / المعرَّفة في مجموعة S من الأعداد الحقيقية والعدد $c \in S$

(i) $f(c)$ هي القيمة العظمى المطلقة للدالة / في S إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل $x \in S$

(ii) $f(c)$ هي القيمة الصغرى المطلقة للدالة / في S إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in S$

القيمة العظمى المطلقة أو القيمة الصغرى المطلقة يُشار إليها بـ القيمة القصوى المطلقة. (وصيغة الجمع للقيمة القصوى هي القيم القصوى).

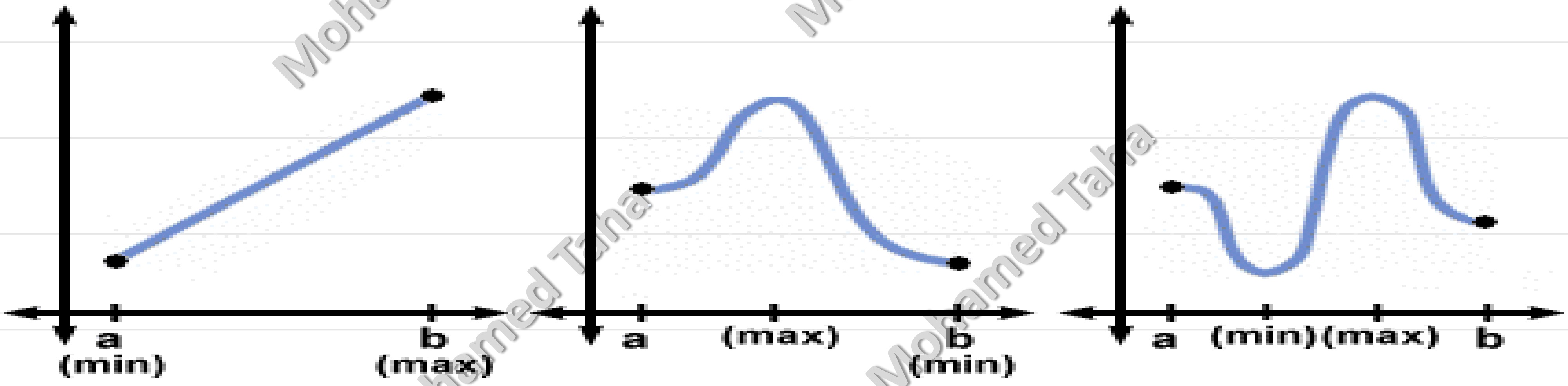




القيم القصوى المطلقة

نظرية 3.1

الدالة المتصلة f المُعرَّفة على الفترة المغلقة **[a,b]** تحقق قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة فى تلك الفترة .



Mohamed Taha

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

القيم القصوى المطلقة

نظرية القيم القصوى

الدالة المتصلة f المُعرَّفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ تحقق قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة فى تلك الفترة .

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

القيم العظمى و الصغرى المطلقة

مثال

3.1صفحة250

(a) حدد مكان أى قيم قصوى مطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 9$ فى الفترة $(-\infty,\infty)$
(b) حدد مكان أى قيم قصوى مطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 9$ فى الفترة $[-3 , 3]$
(a) حدد مكان أى قيم قصوى مطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 9$ فى الفترة $(-3,3)$

الحل

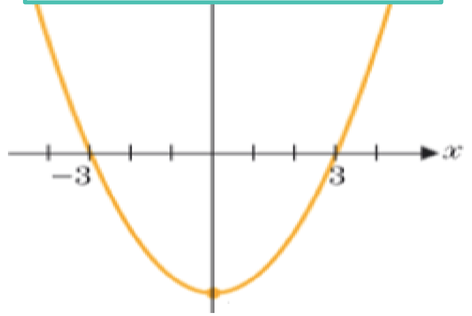
(a) $f(x) = x^2 - 9$ فى الفترة $(-\infty, \infty)$

لها القيمة الصغرى المطلقة

$f(0) = -9$

و لكن ليس لها قيمة عظمى مطلقة

لا يوجد قيمة عظمى مطلقة



$y = x^2 - 9$ on $(-\infty, \infty)$

$f(0) = -9$
قيمة صغرى مطلقة

(b) $f(x) = x^2 - 9$ فى الفترة $[-3, 3]$

لها القيمة الصغرى المطلقة

$f(0) = -9$

لها قيمة عظمى مطلقة

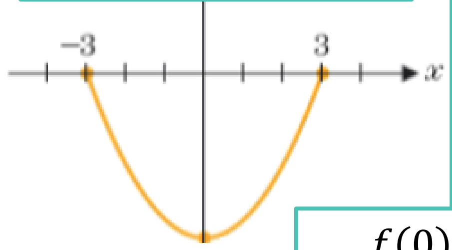
$f(-3) = 0 \quad = f(3) = 0$

$f(x)$ متصلة فى الفترة المغلقة

$f(x)$ لها قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة

(نظرية القيمة القصوى)

قيمة عظمى مطلقة
$f(-3) = f(3) = 0$



$y = x^2 - 9$ فى $[-3,3]$

$f(0) = -9$
قيمة صغرى مطلقة

(c) $f(x) = x^2 - 9$ فى الفترة $(-3, 3)$

لها القيمة الصغرى المطلقة

$f(0) = -9$

و لكن ليس لها قيمة عظمى مطلقة

لا يوجد $x\epsilon(-3,3)$ لها $f(x) = 0$

لا يوجد قيمة عظمى مطلقة

$y = x^2 - 9$ فى $(-3,,3)$ $(-3, 3)$

$f(0) = -9$
قيمة صغرى مطلقة

+971566151988/
أ/ محمد طه

Mohamed Taha

القيم العظمى و الصغرى المطلقة

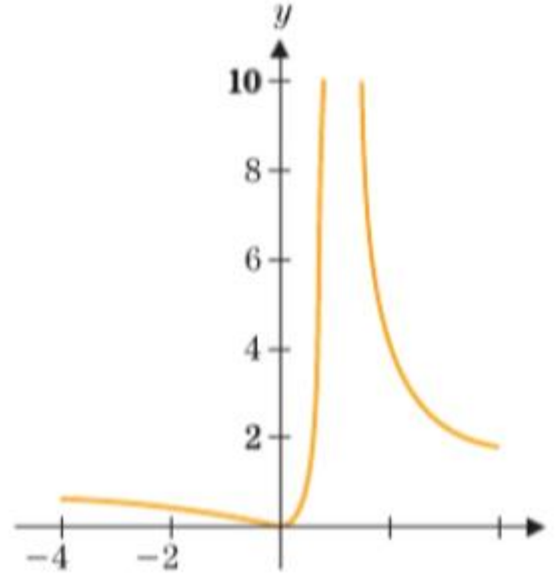
تمرين

257صفحةQ2

استخدم التمثيل البيانى لتحديد مكان القيم القصوى المطلقة للدالة : $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

a) $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ فى الفترة
b) $(0,1)$ فى الفترة
c) فى الفترة $(-1,1)$
d) فى الفترة $[-2,-1]$

الحل



$f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

متصلة فى الفترة المغلقة $[-2,-1]$

لها قيمة عظمى مطلقة و قيمة عظمى مطلقة $f(x)$

(نظرية القيم القصوى)

$a)\ (-\infty,1)\cup(1,\infty)$فى الفترة

لها قيمة صغرى مطلقة لـ :

$$f(0)=\frac{(0)^2}{(0-1)^2}=0$$

ليس لها قيمة عظمى مطلقة .

$c)\ (-1,1)$ فى الفترة

لها قيمة صغرى مطلقة لـ :

$$f(0)=\frac{(0)^2}{(0-1)^2}=0$$

ليس لها قيمة عظمى مطلقة .

$b)\ (0,1)$ فى الفترة

ليس لها قيمة صغرى مطلقة

ليس لها قيمة عظمى مطلقة .

$d)\ [-2,-1]$ فى الفترة

لها قيمة صغرى مطلقة لـ :

$$f(-1)=\frac{(-1)^2}{(-1-1)^2}=0.25$$

لها قيمة عظمى مطلقة لـ :

$$f(-2)=\frac{(-2)^2}{(-2-1)^2}=\frac{4}{9}$$

Mohamed Taha

القيم القصوى المطلقة للدالة

تمرين 3.2 و 3.3 صفحة 251

(a) حدد مكان أى قيم قصوى للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ فى الفترة $[-3,0)\cup(0,3]$

(b) حدد مكان أى قيم قصوى للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ $[1,3]$ فى الفترة

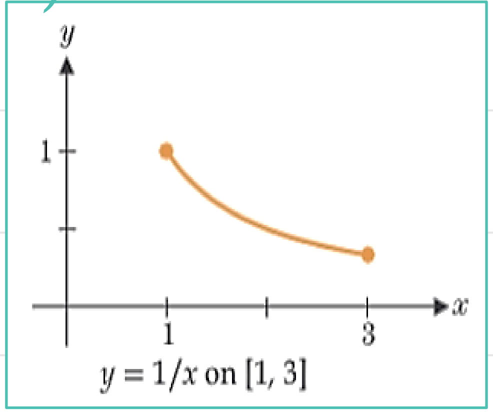
الحل

(b) $f(x)=\frac{1}{x}$ $[1,3]$ فى الفترة

$f(x)$ متصلة فى الفترة المغلقة $[1,3]$

$f(x)$ لها قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة

(نظرية القيم القصوى)



$y = 1/x$ on $[1, 3]$

$f(3)=\frac{1}{3}$ قيمة صغرى مطلقة

$f(1)=\frac{1}{1}=1$ قيمة عظمى مطلقة

الحل

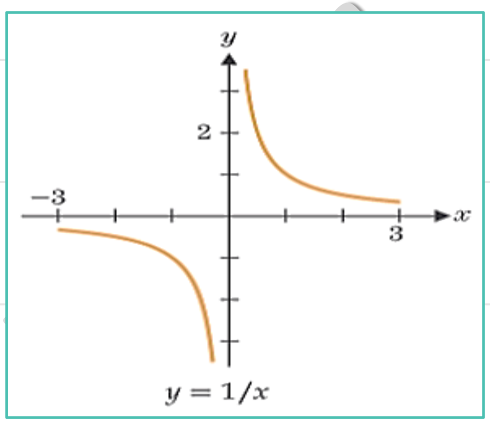
(a) $f(x)=\frac{1}{x}$ فى الفترة $[-3,0)\cup(0,3]$

$f(x)$ غير متصلة عند $x=0$

$f(x)$ ليس لها قيمة عظمى أو صغرى مطلقة

من التمثيل البيانى

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$



$y = 1/x$

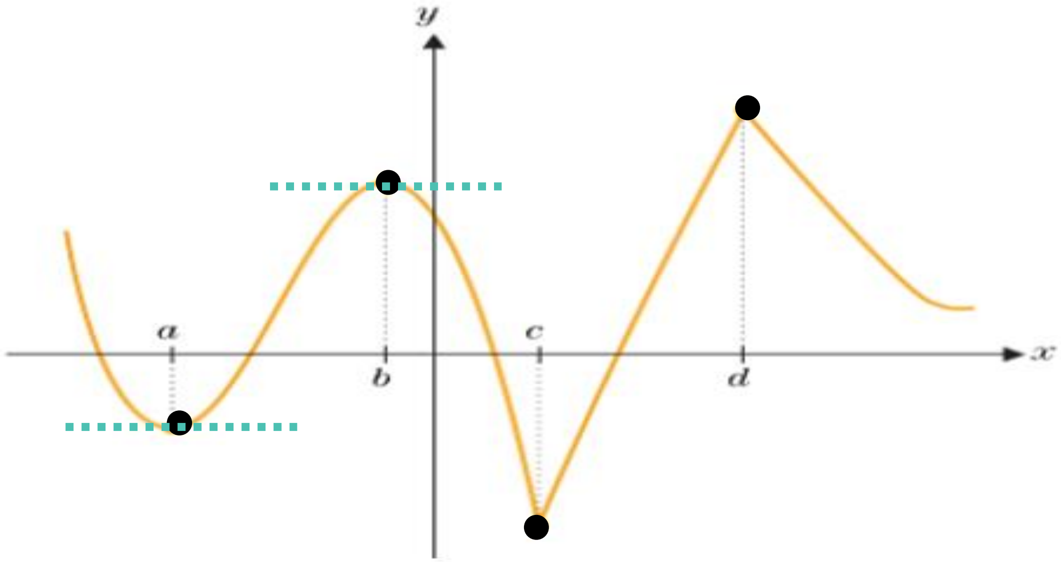
القيم القصوى المحلية

تعريف 3.2

(i) $f(c)$ هى قيمة عظمى محلية للدالة f إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل x فى فترة مفتوحة تحتوى على c .

(ii) $f(c)$ هى قيمة صغرى محلية للدالة f إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل x فى فترة مفتوحة تحتوى على c .

فى كلتا الحالتين نطلق على $f(c)$ قيمة قصوى محلية للدالة f .



قيم قصوى محلية

القيم القصوى المحلية هى :

المماس الأفقى عند $x = a$, $f'(a) = 0$ ⟶ قيمة صغرى محلية $f(a)$

$f'(c)$ غير مُعرَّفة ⟶ قيمة صغرى محلية $f(c)$

المماس الأفقى عند $x = b$, $f'(b) = 0$ ⟶ قيمة عظمى محلية $f(b)$

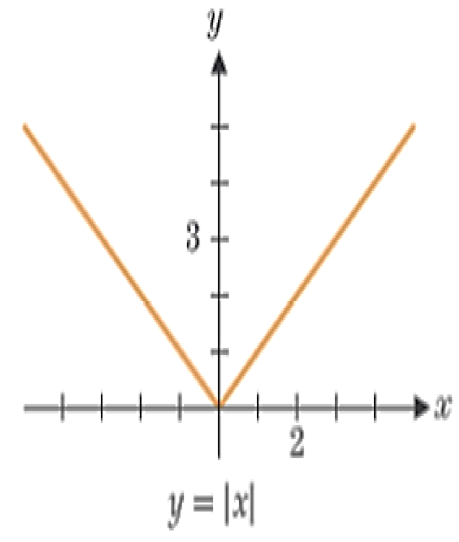
$f'(d)$ غير مُعرَّفة ⟶ قيمة عظمى محلية $f(d)$

المشتقات في القيم القصوى المحلية

مثال 3.5صفحة252

(b) حدد مكان أى قيمة قصوى محلية $f(x) = |x|$
و صِف سلوك المشتقة عند القيمة القصوى المحلية .

الحل



$$f(x) = |x|$$

من الرسم البيانى :

عند $x = 0$ قيمة صغرى محلية

$f(0) = 0$ قيمة صغرى محلية

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

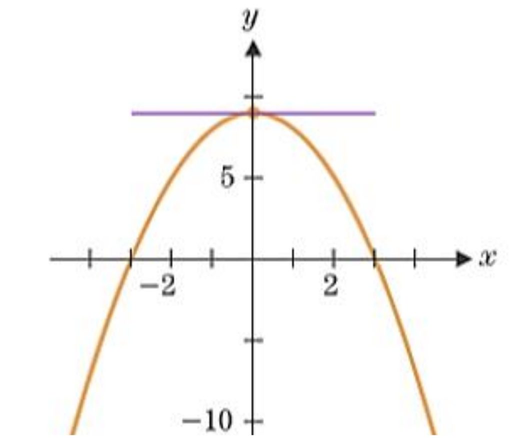
$f'(0)$ غير مُعرَّفة

المشتقة غير مُعرَّفة عند $x = 0$

تمرين 3.4صفحة252

حدد مكان أى قيم قصوى محلية للدالة $f(x) = 9 - x^2$
و صِف سلوك المشتقة عند القيمة القصوى المحلية.

الحل



$f(x) = 9 - x^2$
و المماس عند $x = 0$

$$f(x) = 9 - x^2$$

من الرسم البيانى :

عند $x = 0$ قيمة عظمى محلية

$f(0) = 9$ قيمة عظمى محلية

$$f(x) = 9 - x^2$$

$$f'(x) = -2x$$

$$f'(0) = -2(0) = 0$$

مماس أفقى عند $x = 0$

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

الحصة الثانية

Mohamed Taha
Mohamed Taha
Mohamed Taha
Mohamed Taha

+971566151988/
أ/ محمد طه

أهداف التعلم

- إيجاد الأعداد الحرجة لدالة معطاة.
- إيجاد القيم القصوى المحلية لدالة معطاة.

Mohamed Taha

الأعداد الحرجة

تعريف 3.3

يُسمى العدد c في مجال دالة معينة f عددًا حرجًا إذا كانت $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير مُعرَّفة .

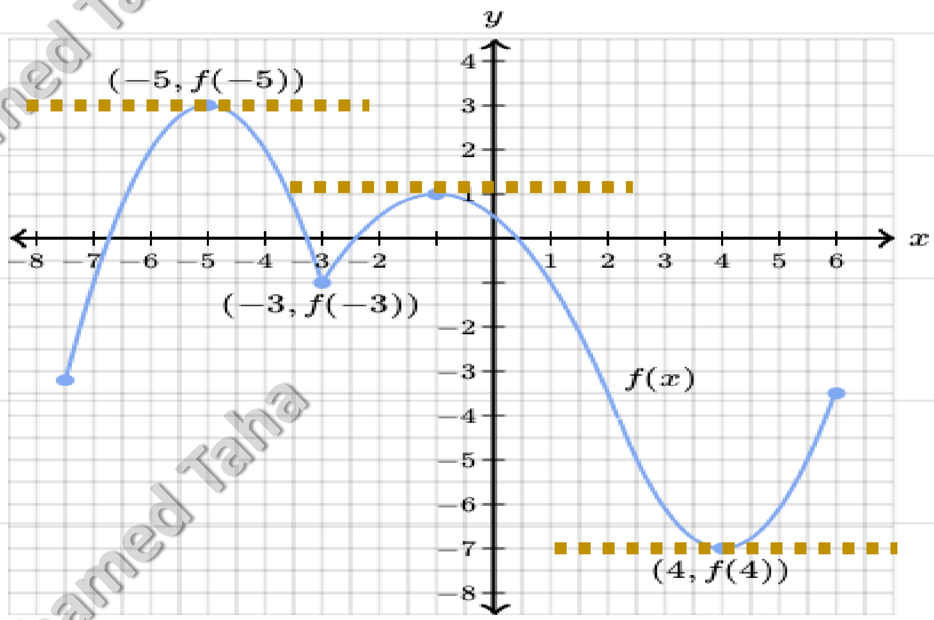
العدد الحرج :

$x=-5 \quad \Rightarrow \quad f'(-5)=0$ (مماس أفقي)

$x=-1 \quad \Rightarrow \quad f'(-1)=0$ (مماس أفقي)

$x=-3 \quad \Rightarrow \quad f'(-3)$ غير مُعرَّفة

$x=4 \quad \Rightarrow \quad f'(4)=0$ (مماس أفقي)



Mohamed Taha
Mohamed Taha
Mohamed Taha
Mohamed Taha

نظرية 3.2 (نظرية فيرمات)

على فرض أن $f(c)$ يمثل قيمة قصوى محلية (عظمى محلية - صغرى محلية)
إذًا يجب أن يكون c عددًا حرجًا لـ f .

المعطيات: $f(c)$ يمثل قيمة قصوى محلية (عظمى محلية - صغرى محلية)

المطلوب: اثبات أن c عددًا حرجًا لـ f , أي أن $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير معرفة

البرهان:

على فرض أن f قابلة للاشتقاق عند $x = c$ (إذا لم يكن الأمر كذلك ، فإن c عدد حرج لـ f و قد أنهينا عملنا)

افترض ما هو أكثر بأن $f'(c) \neq 0$ إذًا إما $f'(c) > 0$ أو $f'(c) < 0$

إذا كانت $f'(c) > 0$

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$$

لكل h صغيرة بما يكفي

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$$

و لكل $h > 0$

$$f(c+h) - f(c) > 0$$
$$f(c+h) > f(c)$$

بالتالي ، فإن $f(c)$ ليست قيمة عظمى محلية

و لكل $h < 0$

$$f(c+h) - f(c) < 0$$
$$f(c+h) < f(c)$$

بالتالي ، فإن $f(c)$ ليست قيمة صغرى محلية أيضًا

و بما أننا افترضنا أن $f(c)$ هى قيمة قصوى محلية ،

فهذا يمثل تناقضًا يستبعد هذا الأمر إمكانية أن $f'(c) > 0$

و بالمثل إمكانية أن $f'(c) < 0$

و الإمكانية الوحيد المتبقية هى الحصول على $f'(c) = 0$ (عدد حرج)

و هذا يثبت النظرية

المماس الأفقى / الرأسى عند نقطة غير محلية

مثال 3.4 و 3.5 صفحة 252

تقول نظرية فيرمات أن القيم القصوى المحلية تتحقق فقط عند الأعداد الحرجة
و هذا لا يعنى أنه يوجد قيمة قصوى محلية عند كل عدد حرج.

(a) أوجد العدد الحرج و القيمة القصوى المحلية للدالة: $f(x) = x^3$.

(b) أوجد العدد الحرج و القيمة القصوى المحلية للدالة: $f(x) = x^{1/3}$.

الحل

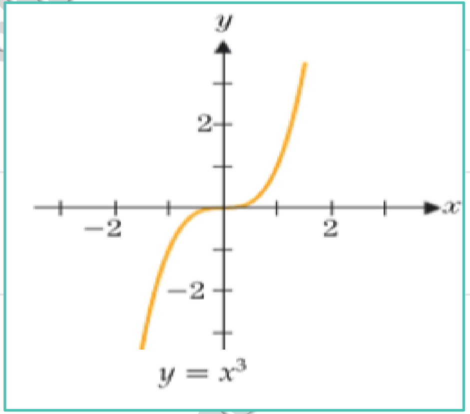
a. $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

عدد حرج

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0$

$\boxed{x = 0}$



من الرسم البيانى:

مماس أفقى عند $x = 0$

$f(0)$ ليست قيمة قصوى

الحل

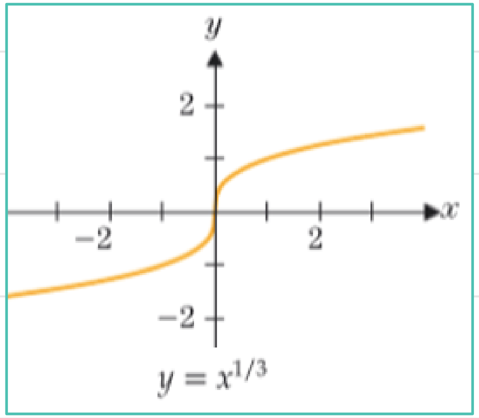
b. $f(x) = x^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$f'(x)$ غير معرفة عدد حرج

$f'(x)$ غير مُعرَّفة $\Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2} = 0$

$\boxed{x = 0}$



من الرسم البيانى :

مماس رأسى عند $x = 0$

$f(0)$ ليست قيمة قصوى

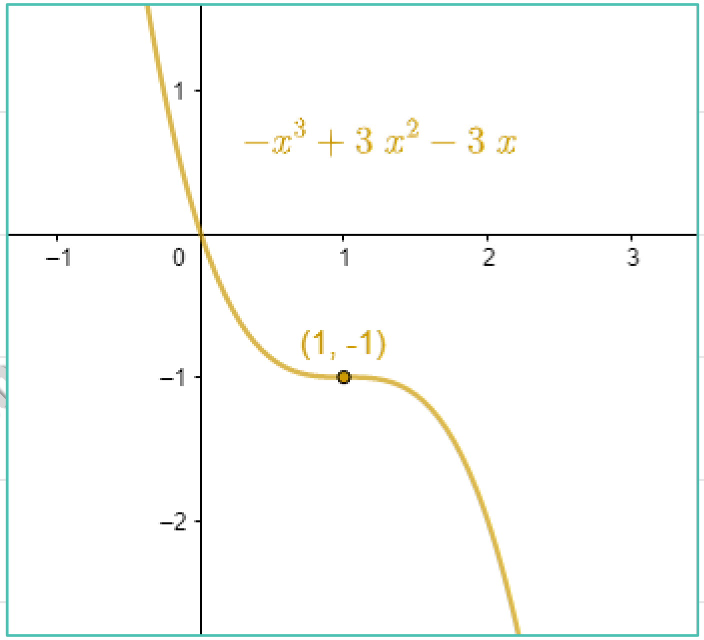
Mohamed Taha

إيجاد الأعداد الحرجة للدالة

مثال | 258صفحةQ5

أوجد كل الأعداد الحرجة جبريا . استخدم التمثيل البيانى لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيًا منهما للدالة : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$

الحل



دالة تكعيبية لها قيمة حرجة واحدة ليست صغرى محلية و لا عظمى محلية

من الرسم البيانى :

$at\ x = 1$

$f(1)$ ليست قيمة عظمى محلية و لا قيمة صغرى محلية

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$

$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3$

الأرقام الحرجة

$f'(x) = 0 \Rightarrow \quad -3x^2 + 6x - 3 = 0$

$-3(x^2 - 2x + 1) = 0$

$-3(x-1)(x-1) = 0$

$\boxed{x = 1}$

Mohamed Taha

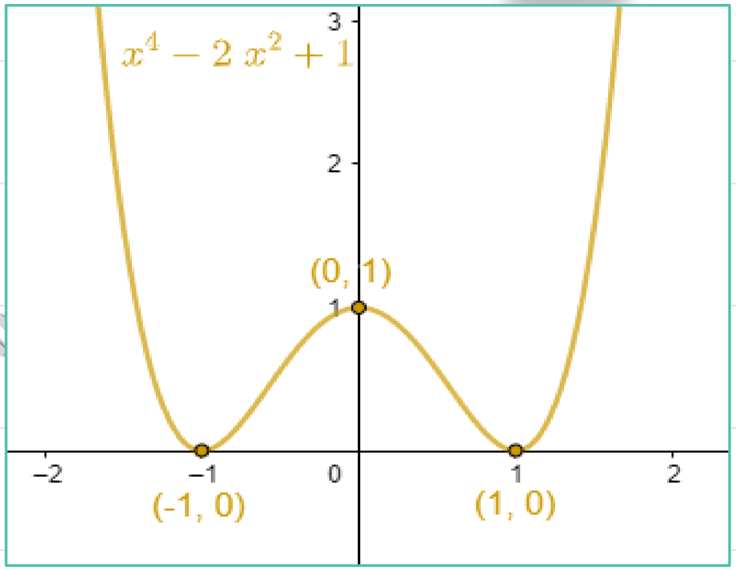
إيجاد الأعداد الحرجة للدالة

تمرين Q6صفحة258

أوجد كل الأعداد الحرجة جبريا . استخدم التمثيل البيانى لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيًا منهما

للدالة : $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

الحل



من الرسم البيانى :

قيمة عظمى محلية $f(0) = 1$

قيمة صغرى محلية $f(-1) = 0$

قيمة صغرى محلية $f(1) = 0$

قيمة صغرى مطلقة كذلك

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

الأعداد الحرجة :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0$$

$4x = 0$ أو $x - 1 = 0$ أو $x + 1 = 0$

$\boxed{x = 0}$ $\boxed{x = 1}$ $\boxed{x = -1}$

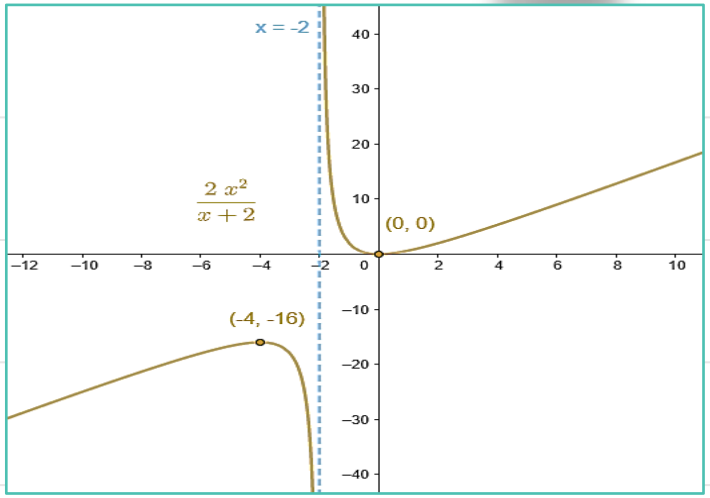
Mohamed Taha

إيجاد الأعداد الحرجة لدالة نسبية

مثال

3.10صفحة 255

أوجد الأعداد الحرجة لـ : $f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$



الحل

$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$ دالة نسبية المجال: $\mathbb{R}/\{$الصفر علي بالقسمة$\}$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow$ المجال: $\mathbb{R}/\{-2\}$

باستخدام قاعدة خارج القسمة

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}[2x^2] \cdot (x+2) - 2x^2 \cdot \frac{d}{dx}[x+2]}{(x+2)^2}.$$

$$f'(x) = \frac{4x \cdot (x+2) - 2x^2(1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 8x - 2x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 8x = 0$

$2x(x+4) = 0 \Rightarrow 2x = 0$ أو $x + 4 = 0$

$x = 0 \qquad x = -4$

$f'(x)$ غير مُعرَّفة $\Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = -2 \qquad \notin$ مجال$f(x)$

الأعداد الحرجة $\boxed{x = 0}$ و $\boxed{x = -4}$

$f(0) = 0$ قيمة صغرى محلية

$f(-4) = -16$ قيمة عظمى محلية

+971566151988/
أ/ محمد طه

إيجاد الأعداد الحرجة للدالة

تمرين

Q20صفحة258

أوجد كل الأعداد الحرجة جبريا . استخدم التمثيل البيانى لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيًا منهما للدالة : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

الحل

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

باستخدام قاعدة خارج القسمة

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}[x]\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2+1}\right]}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$f'(x)=\frac{(1)\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}=\frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3}$$

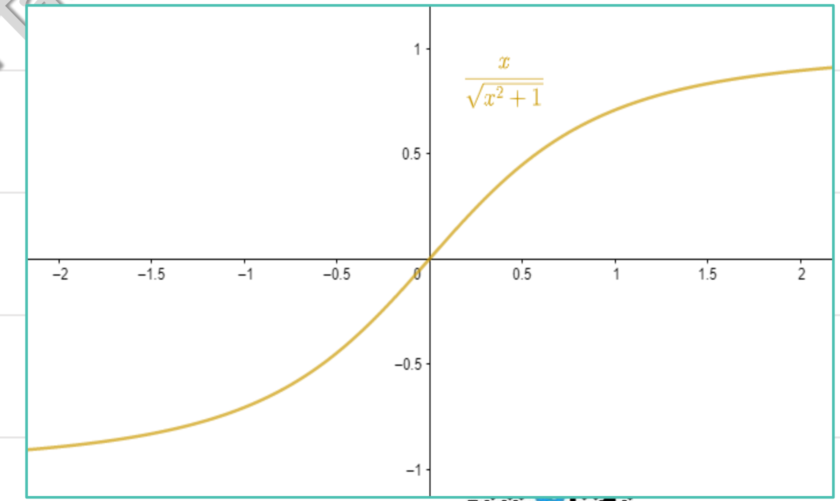
$$f'(x)\neq 0$$

$f'(x)$ غير مُعرَّفة $\Rightarrow$ $(\sqrt{x^2+1})^3=0$

$\Rightarrow$ $x^2+1=0$ $\Rightarrow$ $\cancel{x^2=-1}$

لا يوجد أعداد حرجة

من الرسم البيانى



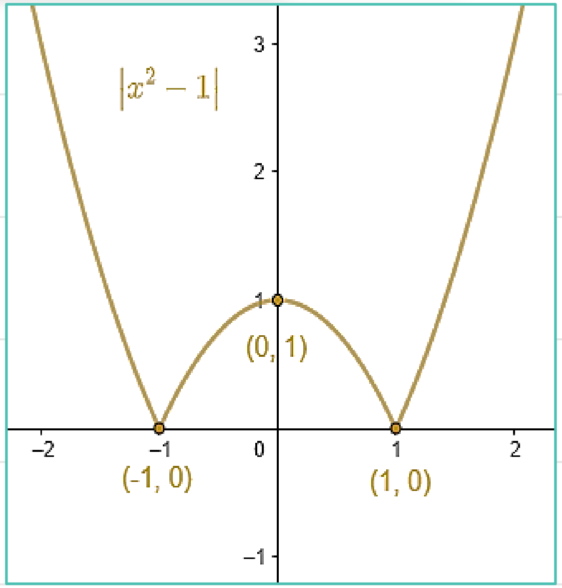
لا يوجد قيمة قصوى محلية

Mohamed Taha

إيجاد الأعداد الحرجة للدالة

تمرين Q21صفحة258

أوجد كل الأعداد الحرجة جبريا . استخدم التمثيل البيانى لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيًا منهما للدالة : $f(x) = |x^2 - 1|$



الحل

$\boxed{x^2 - 1}$

$+ + + +\ 0\ - - - -\ 0\ + + + +$ (على خط الأعداد عند -1 و 1)

$f(x) = |\, x^2 - 1|$

$x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \le -1 \\ 1 - x^2, & -1 < x \le 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < -1 \\ -2x, & -1 < x < 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

$-2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \epsilon\, (-1, 1)$

عند $x = 1, x = -1$

المشتقة من اليمين لا تساوي المشتقة من اليسار

الدالة غير قابلة للاشتقاق

الأعداد الحرجة $\boxed{x = -1}$ $\boxed{x = 0}$ $\boxed{x = 1}$

من الرسم البيانى

$f(0) = 1$ قيمة عظمى محلية

$f(-1) = 0$ قيمة صغرى محلية

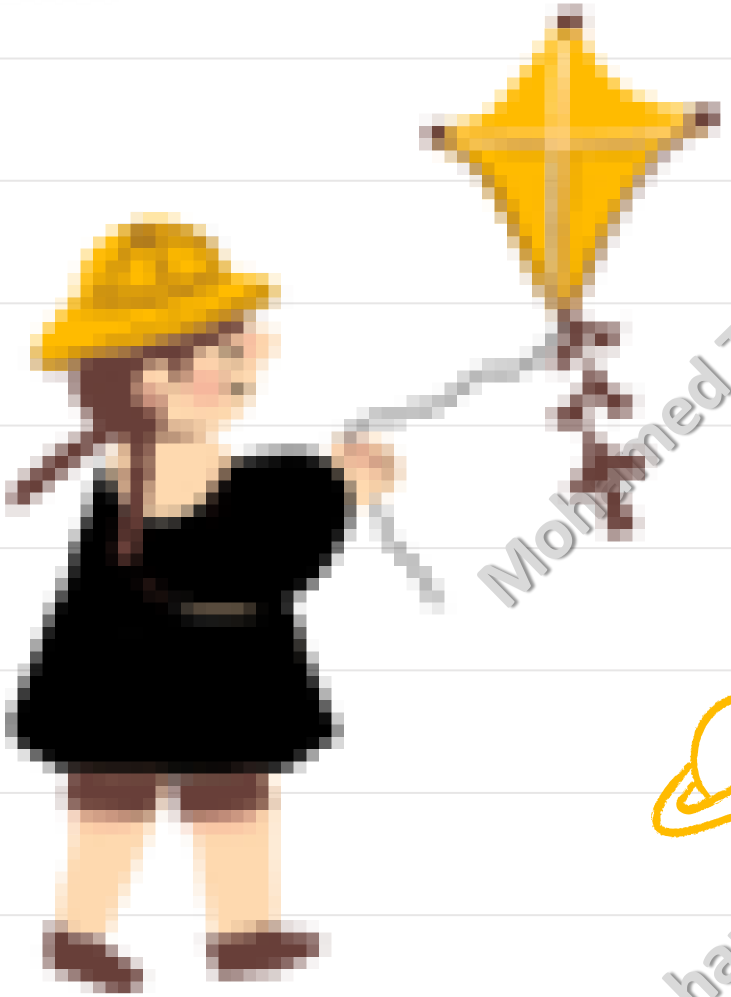
$f(1) = 0$ قيمة صغرى محلية

قيمة صغرى مطلقة كذلك

+971566151988/
أ/ محمد طه

Mohamed Taha

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL



الحصة الثالثة

Mohamed Taha
Mohamed Taha
Mohamed Taha
Mohamed Taha

أ/ محمد طه
+971566151988/

أهداف التعلم

- إيجاد القيمة القصوى المطلقة لدالة معطاة .

Mohamed Taha

القيمة القصوى المطلقة

نظرية 3.3

على فرض أن f متصلة فى الفترة المغلقة **[a,b]** يجب على كل قيمة قصوى مطلقة لـ f أن تكون موجودة عند نقطة نهاية (a أو b) أو عند عدد حرج .

البرهان

وفقًا لنظرية القيمة القصوى f *سوف يكون لها القيمة العظمى و الصغرى في الفترة* $[a,b]$

على فرض أن $f(c)$ *قيمة قصوى مطلقة*

إذا لم تكن c نهاية (أى $c \neq a$ و $c \neq b$) إذا يجب أن تكون $c \epsilon (a,b)$

وفقًا لنظرية فيرمات و فى هذه الحالة ، تكون $f(c)$ أيضًا قيمة قصوى محلية

إذًا ، يجب أن تكون c عددًا حرجًا ، لأن القيم القصوى المحلية تحدث عند الأعداد الحرجة فقط .

Mohamed Taha
Mohamed Taha
Mohamed Taha
Mohamed Taha

القيمة القصوى المطلقة

إيجاد قيمة قصوى مطلقة لدالة متصلة فى فترة مغلقة

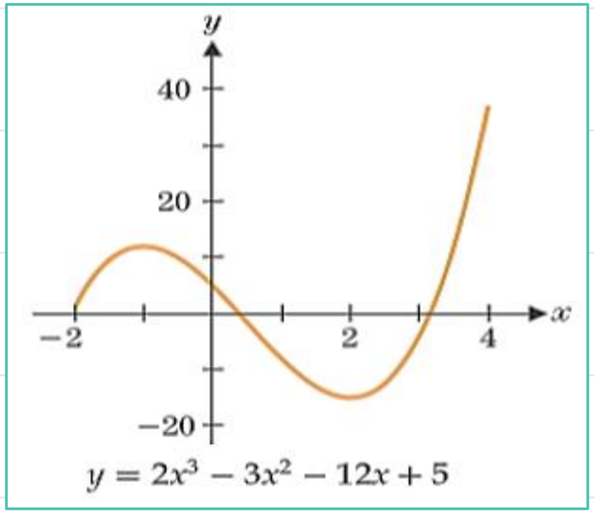
1. أوجد كل الأعداد الحرجة فى الفترة و احسب قيم الدالة عند تلك النقاط .
2. احسب قيم الدالة عند نقاط النهاية .
3. أكبر قيمة لهذه الدوال هى قيمة عظمى مطلقة و أصغر قيمة لهذه الدوال هى قيمة صغرى مطلقة .

Mohamed Taha
Mohamed Taha
Mohamed Taha
Mohamed Taha

إيجاد قيمة قصوى مطلقة فى فترة مغلقة

مثال 3.11صفحة255

أوجد القيم القصوى المطلقة لـ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ فى الفترة $[-2,4]$



الحل

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ فى الفترة $[-2,4]$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

الأعداد الحرجة :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \quad 6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$6(x^2 - x - 2) = 0$$

$$6(x-2)(x+1) = 0$$

$\boxed{x = 2}$ $\epsilon\,[-2,4]$

$\boxed{x = -1}$ $\epsilon\,[-2,4]$

نقاط النهاية :

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 12(-2) + 5 = 1$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = 2(4)^3 - 3(4)^2 - 12(4) + 5 = 37$$

الأعداد الحرجة :

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 5 = -15$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 5 = 12$$

قارن القيم عند نقاط النهاية و القيم عند الأعداد الحرجة للدالة

القيمة العظمى المطلقة للدالة هى $f(4) = 37$

القيمة الصغرى المطلقة للدالة هى $f(2) = -15$

Mohamed Taha

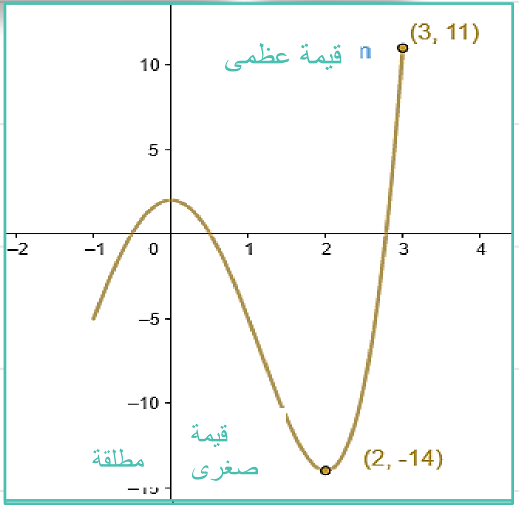
مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

إيجاد قيمة قصوى مطلقة فى فترة مغلقة

تمرين

Q26صفحة255

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة : $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ فى الفترة $[-1,3]$



الحل

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ فى الفترة $[-1,3]$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

الأعداد الحرجة :

$f'(x) = 0 \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$

$$4x(x^2 - 4) = 0$$

$$4x(x-2)(x+2) = 0$$

$\boxed{x = 0} \quad \in [-1,3]$

$\boxed{x = 2} \quad \in [-1,3]$

$\cancel{x = -2} \quad \notin [-1,3]$

"نقاط النهاية"

$x = -1 \quad \Rightarrow$

$f(-1) = (-1)^4 - 8(-1)^2 + 2 = -5$

$x = 3 \quad \Rightarrow \quad f(3) = (3)^4 - 8(3)^2 + 2 = 11$

"الأعداد الحرجة"

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = (0)^4 - 8(0)^2 + 2 = 2$

$x = 2 \quad \Rightarrow \quad f(2) = (2)^4 - 8(2)^2 + 2 = -14$

قارن القيم عند نقاط النهاية و القيم عند الأعداد الحرجة للدالة

القيمة العظمى المطلقة للدالة هى $f(3) = 11$

القيمة الصغرى المطلقة للدالة هى $f(2) = -14$

Mohamed Taha

أ/ محمد طه
+971566151988/

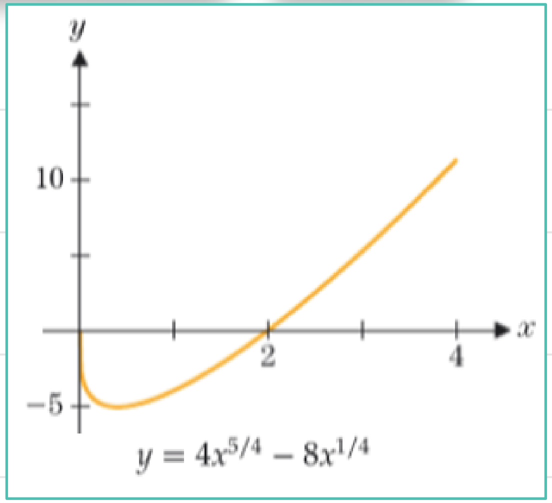
مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

إيجاد قيمة قصوى للدالة باستخدام أسس كسرية

مثال

3.12صفحة256

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة: $f(x) = 4x^{5/4} - 8x^{1/4}$ فى الفترة $[0,4]$



الحل

$f(x) = 4x^{5/4} - 8x^{1/4}$ فى الفترة $[0,4]$

$$f'(x) = 5x^{1/4} - 2x^{-3/4}$$

$$f'(x) = 5x^{1/4} - \frac{2}{x^{3/4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5x^{1/4} \cdot x^{3/4} - 2}{x^{3/4}}$$

$$f'(x) = \frac{5x - 2}{x^{3/4}}$$

الأعداد الحرجة :

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x - 2 = 0$

$\boxed{x = \frac{2}{5} = 0.4} \quad \epsilon\,[0,4]$

$f'(x)$ غير معرف $\Rightarrow \quad x^{3/4} = 0$

$\boxed{x = 0} \quad \epsilon\,[0,4]$

نقاط النهاية :

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 4(0)^{5/4} - 8(0)^{1/4} = 0$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = 4(4)^{5/4} - 8(4)^{\frac{1}{4}} \approx 11.3137$

الأعداد الحرجة :

$x = 0.4 \Rightarrow f(0.4) = 4(0)^{5/4} - 8(0)^{\frac{1}{4}} \approx -5.0897$

قارن القيم عند نقاط النهاية و القيم عند الأعداد الحرجة للدالة

القيمة العظمى المطلقة للدالة هى $f(4) \approx 11.3137$

القيمة الصغرى المطلقة للدالة هى $f(0.4) \approx -5.0897$

أ/ محمد طه

+971566151988/

Mohamed Taha

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

الحصة الرابعة

Mohamed Taha
Mohamed Taha
Mohamed Taha
Mohamed Taha

+971566151988/
أ/ محمد طه

أهداف التعلم

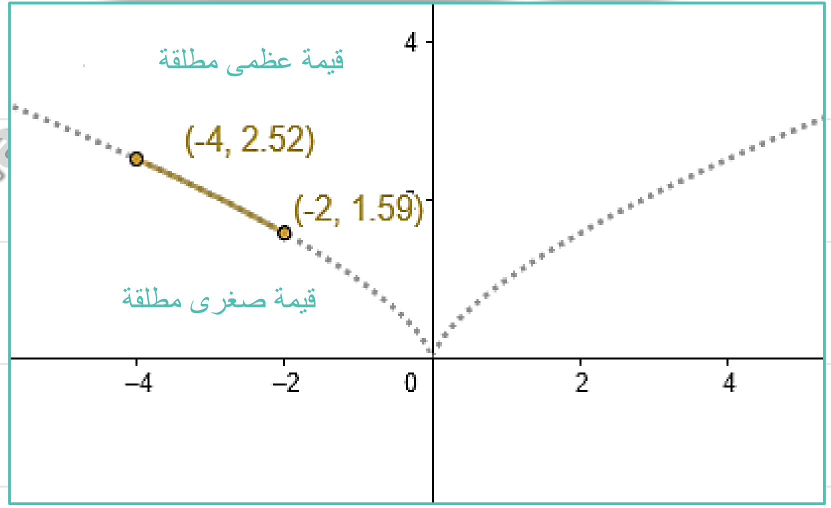
- أوجد القيمة القصوى لدالة معطاة .

Mohamed Taha

إيجاد القيم القصوى المطلقة فى فترة مغلقة

مثال

258صفحةQ27



أوجد القيم القصوى المطلقة لـ $f(x) = x^{2/3}$ فى الفترة $[-4, -2]$

الحل

$f(x) = x^{2/3}$ فى الفترة $[-4, -2]$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

الأعداد الحرجة:

$f'(x) \neq 0$

$f'(x)$ غير مُعرَّفة $\Rightarrow 3\sqrt[3]{x} = 0$

$\Rightarrow \cancel{x = 0}$

$\notin [-4, -2]$

"نقاط النهاية"

$x = -4 \Rightarrow f(-4) = \sqrt[3]{(-4)^2} = \sqrt[3]{16} \approx 2.52$

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$

قارن القيم عند نقاط النهاية و القيم عند الأعداد الحرجة للدالة

القيمة العظمى المطلقة للدالة هى $f(-4) = \sqrt[3]{16} \approx 2.52$

القيمة العظمى المطلقة للدالة هى $f(-2) = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$

+971566151988/

أ/ محمد طه

مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

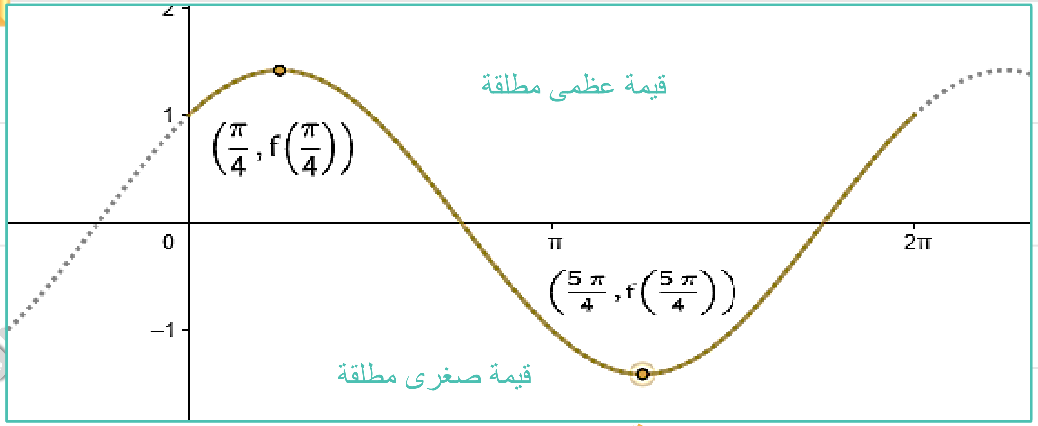
Mohamed Taha

إيجاد القيم القصوى المطلقة فى فترة مغلقة

تمرين

Q28صفحة258

أوجد القيم القصوى المطلقة لـ $f(x) = sinx + cosx$ فى الفترة $[0,2\pi]$



الحل

$f(x) = sinx + cosx$ فى الفترة $[0,2\pi]$

$$f'(x) = cosx - sinx$$

الأعداد الحرجة

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad cosx - sinx = 0$$

$$\Rightarrow \quad cosx = sinx$$

الربع الأول $\quad x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$

الربع الثالث $\quad x = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

n عدد صحيح

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4}} \quad \boxed{x = \frac{5\pi}{4}} \quad \epsilon\, [0, 2\pi]$$

"نقاط النهاية:"

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = sin(0) + cos(0) = 0 + 1 = 1$$

$$x = 2\pi \quad \Rightarrow \quad f(2\pi) = sin(2\pi) + cos(2\pi) = 0 + 1 = 1$$

"الأعداد الحرجة:"

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

$$x = \frac{5\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{2} \approx -1.41$$

قارن القيم عند نقاط النهاية و القيم عند الأعداد الحرجة للدالة

القيمة العظمى المطلقة للدالة هى $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \approx 1.41$

القيمة الصغرى المطلقة للدالة هى $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \approx -1.41$

Mohamed Taha

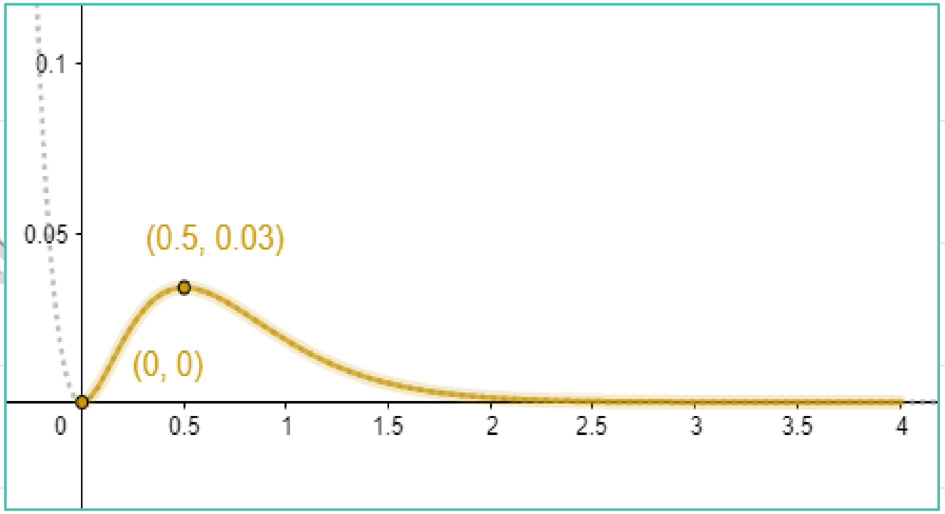
مدرسة الشراكات التعليمية الافتراضية
VIRTUAL CHARTER SCHOOL

إيجاد القيم القصوى المطلقة فى فترة مغلقة

تمرين

Q30صفحة258

أوجد القيم القصوى المطلقة لـ $f(x) = x^2e^{-4x}$ فى الفترة $[0,4]$



الحل

باستخدام قاعدة حاصل الضرب

$f(x) = x^2e^{-4x}$ فى الفترة $[0,4]$

$$f'(x) = 2xe^{-4x} - 4x^2e^{-4x}$$

الأعداد الحرجة :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2xe^{-4x} - 4x^2e^{-4x} = 0$$

$$\Rightarrow 2xe^{-4x}(1-2x) = 0$$

$2x = 0$ $\quad$ $e^{-4x} \neq 0$ $\quad$ $1 - 2x = 0$

$\boxed{x = 0}$ $\quad$ $e^{-4x} > 0$ $\quad$ $\boxed{x = \frac{1}{2}}$

$\epsilon\ [0,4]$ $\quad$ $\epsilon\ [0,4]$

نقاط النهاية :

$x = 0 \Rightarrow f(0) = (0)^2e^{-4(0)} = 0(1) = 0$

$x = 4 \Rightarrow f(4) = (4)^2e^{-4(4)} \approx 1.8 \times 10^{-6}$

الأعداد الحرجة :

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-4\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{e^{-2}}{4} \approx 0.0338$$

قارن القيم عند نقاط النهاية و القيم عند الأعداد الحرجة للدالة

القيمة العظمى المطلقة للدالة هى $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-2}}{4} \approx 0.0338$

القيمة الصغرى المطلقة للدالة هى $f(0) = 0$

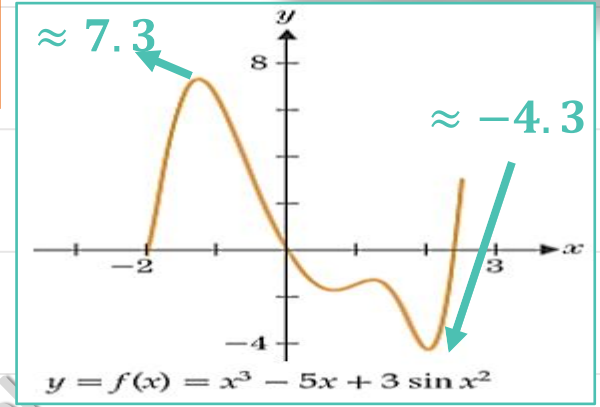
+971566151988/
أ/ محمد طه

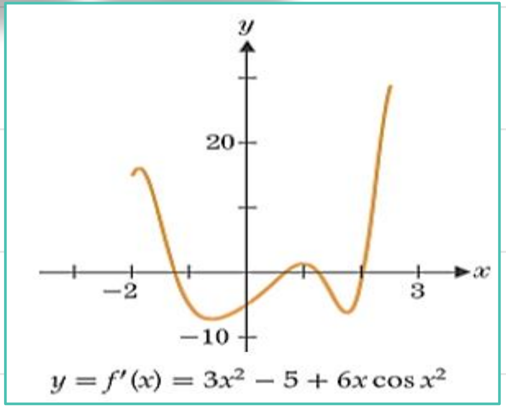
Mohamed Taha
Mohamed
Mohamed Taha
Mohamed Taha

إيجاد القيم القصوى مطلقة تقريبيا

مثال 3.13صفحة256

أوجد القيم القصوى المطلقة لـ $f(x) = x^3 - 5x + 3sinx^2$ فى الفترة $[-2,2.5]$





الحل

$f(x) = x^3 - 5x + 3sinx^2$ فى الفترة $[-2,2.5]$

$$f'(x) = 3x^2 - 5 + 6xcosx^2$$

الأعداد الحرجة :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5 + 6xcosx^2 = 0$$

لا يوجد عملية جبرية لحل هذه المعادلة

استخدم التمثيل البيانى ثم احسب المشتقة لتخمن تخمينات ابتدائية مناسبة للأصفار أو استخدم طريقة نيوتن لإيجاد الأصفار تقريبيًا . أو استخدم حاسبتك مباشرة .

الأعداد الحرجة :

$x \approx -1.264109$ $\quad x \approx 1.226683$

$x \approx 0.674471$ $\quad x \approx 2.018304$

$\epsilon\ [-2, 2.5]$

نقاط النهاية :

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^3 - 5(-2) + 3sin(-2)^2 \approx -0.3$$

$$x = 2.5 \Rightarrow f(2.5) = (-2.5)^3 - 5(-2.5) + 3sin(-2.5)^2 \approx 3$$

الأعداد الحرجة :

$$x \approx -1.264109 \Rightarrow f(-1.264109) \approx 7.3$$

$$x \approx 1.226683 \Rightarrow f(1.226683) \approx -1.3$$

$$x \approx 0.674471 \Rightarrow f(0.674471) \approx -1.7$$

$$x \approx 2.018304 \Rightarrow f(2.018304) \approx -4.3$$

قارن القيم عند نقاط النهاية و القيم عند الأعداد الحرجة للدالة

القيمة العظمى المطلقة للدالة هى $f(-1.264109) \approx 7.3$

القيمة الصغرى المطلقة للدالة هى $f(2.018304) \approx -4.3$

الواجب المنزلى

Pages: 258

أوجد كل الأعداد الحرجة يدويًا . و إن أمكن ، استخدم تكنولوجيا التمثيل البيانى لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيًا منهما .

9. $f(x) = x^{3/4} - 4x^{1/4}$ 13. $f(x) = \frac{x^2-2}{x+2}$

11. $f(x) = \sin x \cos x\,[0, 2\pi]$ 16. $f(x) = xe^{-2x}$

أوجد كل الأعداد الحرجة يدويًا . استخدم معرفتك بنوع التمثيل البيانى لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيًا منهما .

3.(a) $f(x) = x^2 + 5x - 1$ (b) $f(x) = -x^2 + 4x + 2$

4.(a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 2$

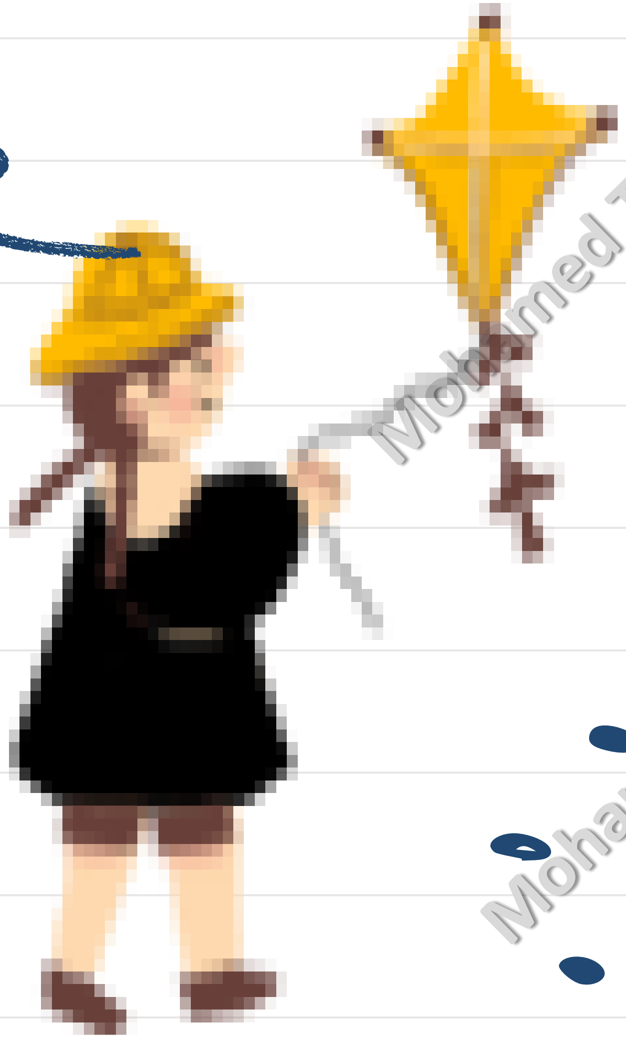
قدِّر القيم القصوى المطلقة رقميًا للدالة المعطاة فى كل من الفترتين المشار إليهما .

35. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x + 1$ فى الفترتين (a) [-1,1] و (b) [-3,2]

أوجد القيم القصوى المطلقة لدالة محددة فى كل فترة مشار إليها .

25. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ فى الفترتين (a) [0,2] و (b) [-3,2]

33. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ فى الفترتين (a) [0,2] و (b) [-3,3]



بالتوفيق للجميع

Mohamed Taha

+971566151988/

أ/ محمد طه