ملزمة الرياضيات

الفصل الثاني 2024-25

Math Worksheets - 12ADV - Term 2

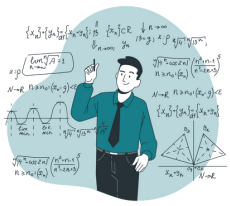
Telegram Group

الحل على موقع الأكاديمية

+971 55 857 0980
https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Manasra Academy

باقة الرياضيات للفصل الثاني تحتوي على:

حصص مسجلة لشرح كامل مادة الفصل الثاني 	امتحانات الكترونية محاكية للامتحانات الوزارة 	حصص مسجلة لمراجعة الهيكل وأسئلة السنوات 
التحدث مع الأستاذ عن طريق الواتساب للإجابة عن الأسئلة 	ملازم الفصل الثاني وحلولها 	دعم فني للموقع 24 ساعة 7 أيام في الأسبوع 

+ حصة مباشرة كل أسبوعين للإجابة عن الاستفسارات

لحجز مقعدك قم بزيارة موقع الأكاديمية واختر مادة الرياضيات

www.manasra.academy

+971 55 857 0980

https://www.manasra.academy

تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Manasra Academy

Unit 4

الوحدة 4

+971 55 857 0980

https://www.manasra.academy

تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Derivative Rules

قواعد الاشتقاق

Basic Derivatives Rules

Constant Rule: $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Constant Multiple Rule: $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

Power Rule: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Sum Rule: $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

Difference Rule: $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

Product Rule: $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

Quotient Rule: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Chain Rule: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

Exponential Functions

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(e^{g(x)}) = e^{g(x)} g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln(a)\, a^{g(x)}\, g'(x)$$

Logarithmic Functions

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$\frac{d}{dx}\ln(g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}, x > 0$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)\ln a}$$

Trigonometric Functions

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

Inverse Trigonometric Functions

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x \neq \pm 1, 0$$

$$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, x \neq \pm 1, 0$$

4-3 Maximum and Minimum Values — 4-3 القيم العظمى والصغرى

Definition 3.1

For a function f defined on a set S of real numbers and a number $c \in S$,

(i) $f(c)$ Is **the absolute maximum** of f on S, if $f(c) \geq f(x)$ **for all** $x \in S$.

(ii) $f(c)$ Is **the absolute minimum** of f on S, if $f(c) \leq f(x)$ **for all** $x \in S$.

An absolute maximum or an absolute minimum is referred to an absolute extremum.
(the plural form of extremum is extrema.)

تعريف 3.1

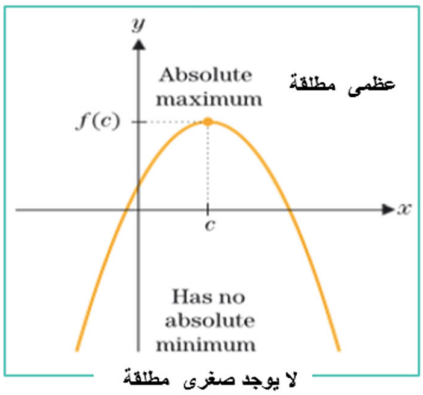
بالنسبة إلى الدالة f المعرفة في مجموعة S **من الأعداد الحقيقية والعدد** $c \in S$,

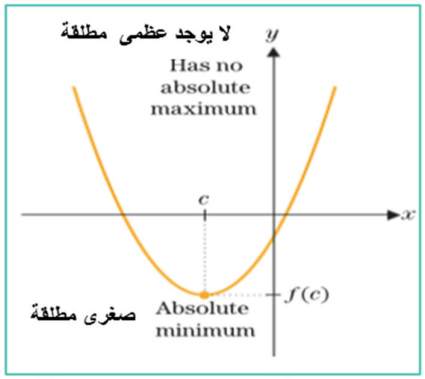
(i) $f(c)$ **هي القيمة العظمى المطلقة للدالة** f **في** S إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ **لكل** $x \in S$.

(ii) $f(c)$ **هي القيمة الصغرى المطلقة للدالة** f **في** S إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ **لكل** $x \in S$.

القيمة العظمى المطلقة أو الصغرى المطلقة يشار إليها بالقيمة القصوى المطلقة .

(وصيغة الجمع للقيمة القصوى هي القيم القصوى)





Theorem 3.1

A continuous function f defined on a closed, bounded interval $[a, b]$ attains both an absolute maximum and an absolute minimum on that interval

نظرية 3.1

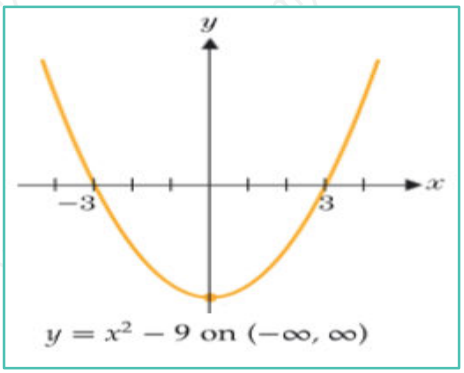
الدالة المتصلة f على الفترة المغلقة $[a, b]$ تحقق قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة في تلك الفترة .

Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Q1

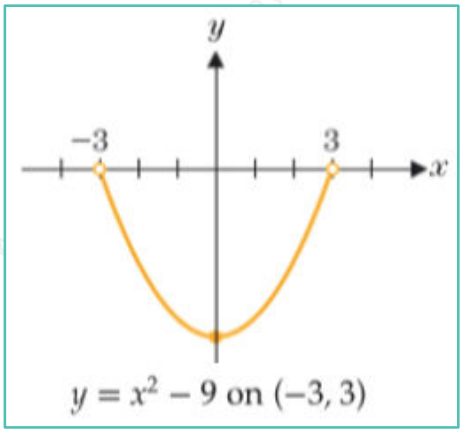
a) Locate any absolute extrema of $f(x) = x^2 - 9$ on interval $(-\infty, \infty)$

a) حدد مكان أي قيمة قصوى مطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 9$ في الفترة $(-\infty, \infty)$



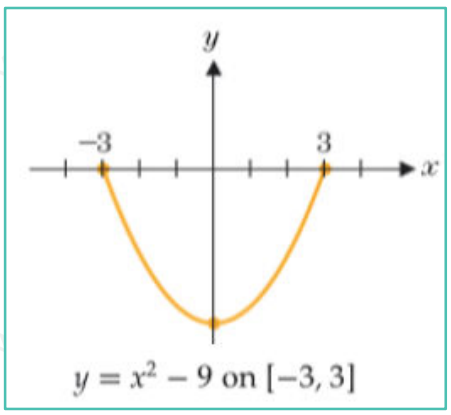
b) Locate any absolute extrema of $f(x) = x^2 - 9$ on interval $(-3,3)$

b) حدد مكان أي قيمة قصوى مطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 9$ في الفترة $(-3,3)$



c) Locate any absolute extrema of $f(x) = x^2 - 9$ on interval $[-3,3]$

c) حدد مكان أي قيمة قصوى مطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 9$ في الفترة $[-3,3]$



Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Q2

Use the graph to locate the absolute extrema of

حدد مكان أي قيمة قصوى مطلقة للدالة

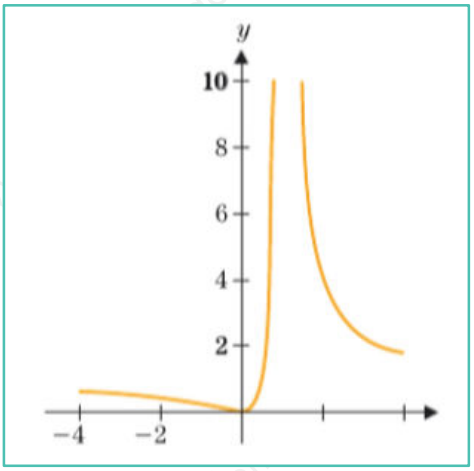
$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

a)on interval $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

b) on interval $(-1, 1)$

c)on interval $(0, 1)$

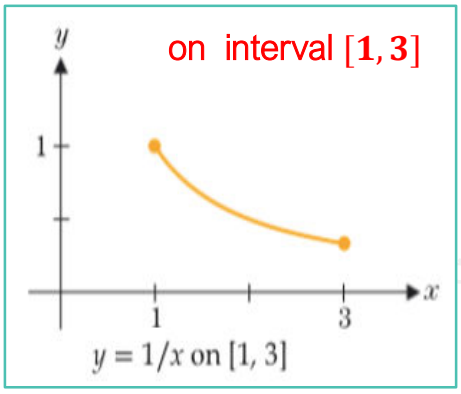
d) on interval $[-2, -1]$

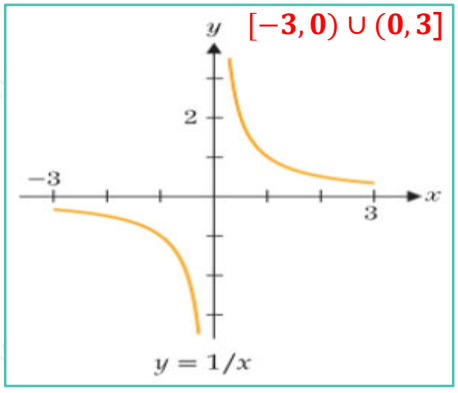


Q3

a. Locate any absolute extrema of $f(x) = \frac{1}{x}$ on interval $[-3, 0) \cup (0, 3]$

b. Locate any absolute extrema of $f(x) = \frac{1}{x}$ on interval $[1, 3]$





Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Definition 3.2

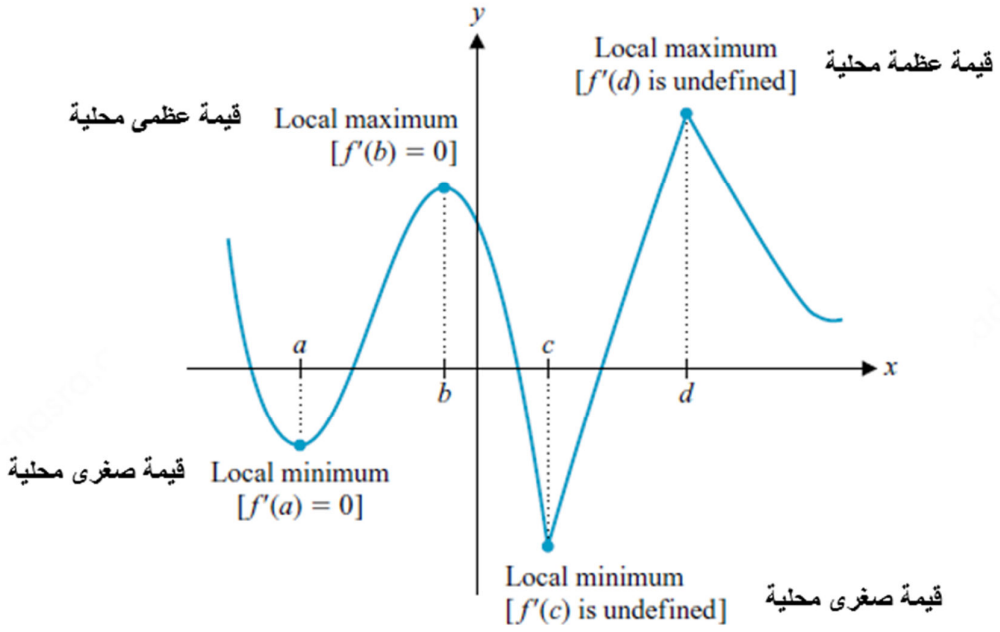
(i) $f(c)$ **is a local maximum of** f **if** $f(c) \geq f(x)$ **for all** x **in some open interval containing** c **.**

(i) $f(c)$ **is a local minimum of** f **if** $f(c) \leq f(x)$ **for all** x **in some open interval containing** c **.**

تعريف 3.2

(i) $f(c)$ **هي قيمة عظمى محلية للدالة** f إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ **لكل** x في فترة مفتوحة تحتوى على c .

(ii) $f(c)$ **هي قيمة صغرى محلية للدالة** f إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ **لكل** x في فترة مفتوحة تحتوى على c .



Local Extremum are: القيم القصوى المحلية

Local Minimum (صغرى محلية) $f(a)$ ⟶ ***Horizontal Tangent (مماس أفقي)*** $\text{at } x = a,\ f'(a) = 0$

Local Minimum(صغرى محلية) $f(c)$ ⟶ $f'(c)$ ***is undefined*** ***غير موجودة***

Local Maximum (عظمى محلية) $f(b)$ ⟶ ***Horizontal Tangent(مماس أفقي)*** $\text{at } x = b,\ f'(b) = 0$

Local Maximum(عظمى محلية) $f(d)$ ⟶ $f'(d)$ ***is undefined*** ***غير موجودة***

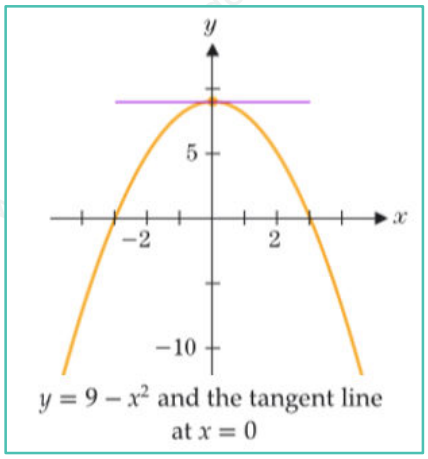
Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Q4

Locate any local extrema of and describe the behavior of the derivative at the local extremum.

حدد مكان أي قيمة قصوى مطلقة للدالة وصف سلوك المشتقة عند القيمة القصوى المحلية

$$f(x) = 9 - x^2$$



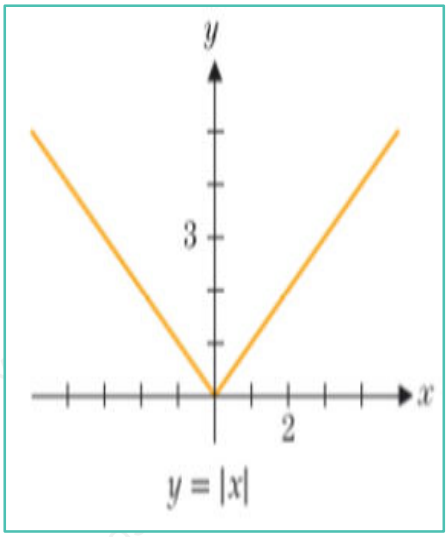
$y = 9 - x^2$ and the tangent line at $x = 0$

Q5

Locate any local extrema of and describe the behavior of the derivative at the local extremum.

حدد مكان أي قيمة قصوى مطلقة للدالة وصف سلوك المشتقة عند القيمة القصوى المحلية

$$f(x) = |x|$$

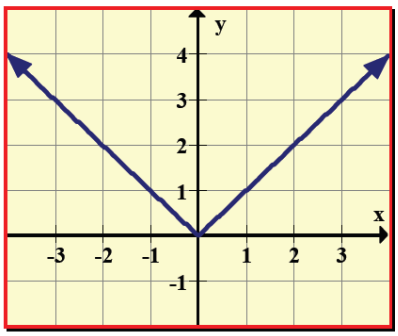


$y = |x|$

Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

الحالات التي تكون مشتقة الداله $f(x)$ غير موجودة عند نقطة

متى تكون $f'(a)$ غير موجودة

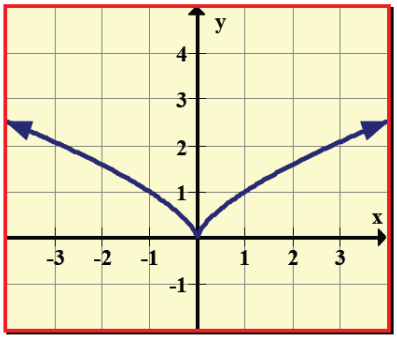


(1) ركناً :

(المشتقة من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويين)

مثال : $f(x)=|x|$

يوجد ركن عند $x=0$ ، $f'(0)$ غير موجودة .

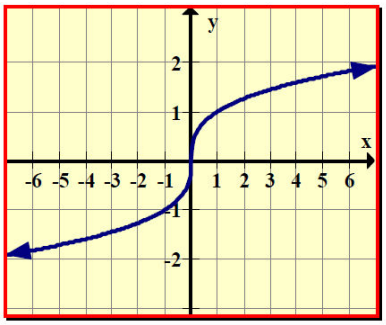


(2) نـــاباً :

(شكل آخر للركن حيث ميول الخطوط المتقاطعة تقترب من ∞ من أحد الجانبين ، $-\infty$ من الجانب الآخر)

مثال : $f(x)=x^{2/3}$

يوجد ناب عند $x=0$ ، $f'(0)$ غير موجودة .



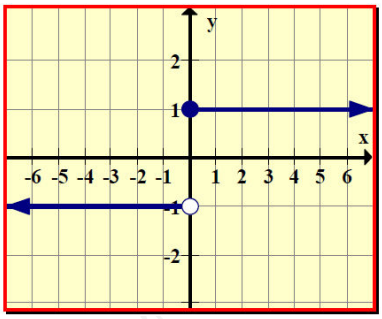
(3) مماساً رأسياً :

(حيث ميول الخطوط المتقاطعة تقترب إما من ∞ أو $-\infty$ من كل من الجانبين)

مثال : $f(x)=\sqrt[3]{x}$

يوجد مماس رأسي عند $x=0$ ، $f'(0)$ غير موجودة

.



(4) عدم اتصال :

(تكون فيها المشتقة من جهة واحدة أو من الجهتين غير موجودة)

مثال : $f(x)=\begin{cases}-1 & ,x<0\\ 1 & ,x\geq 0\end{cases}$

يوجد عدم اتصال عند $x=0$ ، $f'(0)$ غير موجودة

Definition 3.3

تعريف 3.2

A number c in the domain of a function f is called a critical number of f if $f'(c) = 0$ or $f'(c)$ is undefined

يسمى العدد c في مجال دالة معينة f عددا حرجا لـ f إذا كانت $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير معرفة .

Theorem 3.2 (Femat's Theorem)

نظرية 3.2 (نظرية فيرمات)

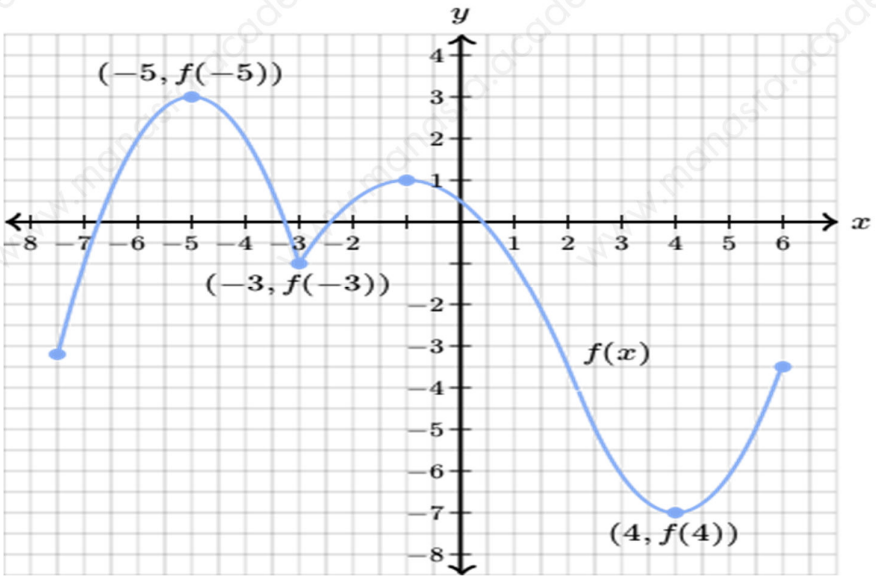
Suppose $f(c)$ is a local extremum (local maximum or local minimum). Then c must a critical number of f.

على فرض أن $f(c)$ يمثل قيمة قصوى محلية (عظمى محلية – صغرى محلية) إذا يجب أن يكون c في عددا حرجا لـ f.

Q6

Find the critical numbers and local extrema

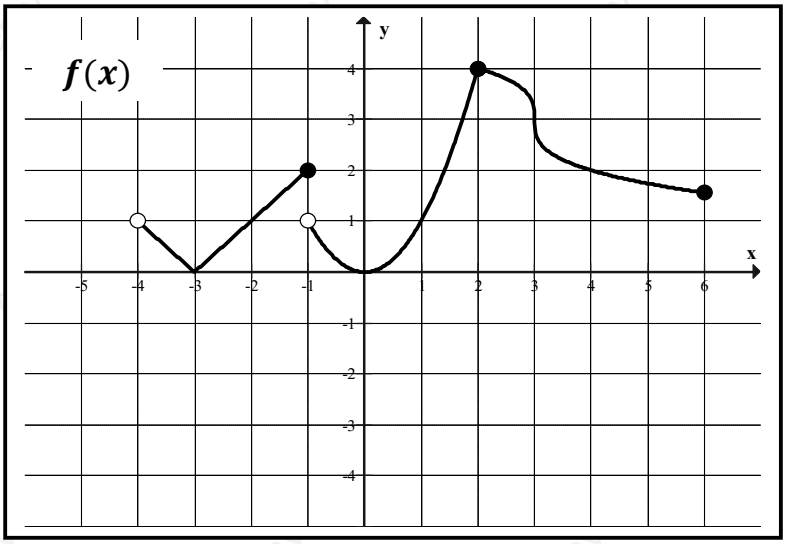
جد الأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية



Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

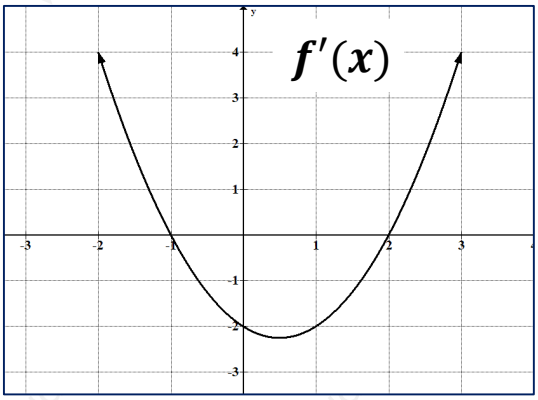
Q7

Find the critical numbers and local extrema for the function $f(x)$ جد الأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية للدالة



Q8

Find the critical numbers and local extrema for the function $f(x)$ جد الأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية للدالة



Q9

Find the absolute extrema of the function $f(x) = x^3 - 12x + 10$ on the interval [0, 3]

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = x^3 - 12x + 10$ في الفترة [0, 3]

a) $f(0) = 0\ , f(3) = 1$

b) $f(0) = 10\ , f(2) = -6$

c) $f(2) = -6\ , f(3) = 1$

d) $f(0) = 10\ , f(3) = 1\ , f(2) = -6$

Q10

Find the absolute extrema of the function $f(x) = x^3 - 3x + 1\ \ , [0, 2]$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = x^3 - 3x + 1\ \ , [0, 2]$

a) $f(1) = -1\ min, f\ (2) = 3\ max$

b) $f(1) = -1\ max\ , f\ (2) = 3min$

c) $f(-1) = 1\ min, f\ (-2) = 3max$

d) $f(0) = 1\ min, f\ (2) = 3max$

Q11

Find the absolute extrema of the function
$f(x) = x^4 - 8x^2 + 2 \quad , [-3, 3]$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة
$f(x) = x^4 - 8x^2 + 2 \quad , [-3, 3]$

$a)\ f(-3) = 11\ , f(3) = 11$

$b)\ f(-3) = 11\ , f(2) = -6$

$c)\ f(-2) = -14\ , f(3) = 11$

$d)\ f(0) = 2\ , f(3) = 11$

Q12

Find the absolute extrema of the function
$f(x) = x^2 e^{-4x} \quad , [0, 4]$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة
$f(x) = x^2 e^{-4x} \quad , [0, 4]$

$a)\ f(0) = -1\ , f(2) = 4e^{-8}$

$b)\ f(0) = -1\ , \quad f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{e^2}{4}$

$c)\ f(0) = 0\ , f(4) = 16e^{-16}$

$d)\ f(0) = 0\ , \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-2}}{4}$

Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Q13

Find the absolute extrema of the function

$$f(x) = \frac{3x^2}{x-3} \quad ,[-2,2]$$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة

$$f(x) = \frac{3x^2}{x-3} \quad ,[-2,2]$$

$a)$ $f(2) = -12$,$f(0) = 0$

$b)$ $f(-2) = -2.4$,$f(0) = 0$

$c)$ $f(1) = -3$,$f(2) = -12$

$d)$ $f(0) = 0$,$f(2) = 12$

Q14

Find the absolute extrema of the function

$$f(x) = tan^{-1}(x^2) \quad ,[-3,4]$$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة

$$f(x) = tan^{-1}(x^2) \quad ,[-3,4]$$

$a)$ $f(-3) = 1.46$,$f(4) = 1.51$

$b)$ $f(0) = 0$,$f(-3) = 1.46$

$c)$ $f(0) = 0$,$f(1) = \frac{\pi}{4}$

$d)$ $f(0) = 0$,$f(4) = 1.51$

Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Q15 **Find all critical numbers:** $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)\ x = 0\ ,\quad x = \frac{9}{4}$

$b)\ x = 0$

$c)\ x = \frac{9}{4}$

$d)\ x = 0\ , x = 1 - \sqrt{3}\ , x = 1 + \sqrt{3}$

Q16 **Find all critical numbers:** $f(x) = x^4 + 6x^2 - 2$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)\ x = 0\ ,\quad x = -12$

$b)\ x = 0$

$c)\ x = 12, -12$

$d)\ x = 0\ , x = \sqrt{3}\ , x = -\sqrt{3}$

Q17 **Find all critical numbers:** $f(x) = x^{\frac{3}{4}} - 4x^{\frac{1}{4}}$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)\ x = 0\ ,\quad x = \frac{16}{9}$

$b)\ x = 0$

$c)\ x = 0\ ,\quad x = \frac{4}{3}$

$d)\ x = 0\ ,\quad x = \frac{-4}{3}$

Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Q18 **Find all critical numbers:** $f(x) = x^{\frac{7}{3}} - 28x^{\frac{1}{3}}$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)\ x = -2$

$b)\ x = 0$

$c)\ x = 2$

$d)\ x = -2, x = 2, x = 0$

Q19 **Find all critical numbers:** $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} + 4x^{\frac{-2}{3}}$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)\ x = -2$

$b)\ x = 1$

$c)\ x = -2, x = 1$

$d)\ x = -2, x = 1, x = 0$

Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Q20 **Find all critical numbers:** $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)\ x = 0\ ,\quad x = -\frac{2}{3}$

$b)\ x = -1$

$c)\ x = -1, x = -\frac{2}{3}$

$d)\ x = 1\ , x = \frac{2}{3}$

Q21 **Find all critical numbers:** $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)\ x = 0\ ,\quad x = -3$

$b)\ x = 1\ , x = -3$

$c)\ x = -1, x = 3$

$d)\ x = 1\ , x = 3$

Q22 **Find all critical numbers:** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)\ x = 0\ ,\quad x = 1$

$b)\ x = 0$

$c)\ x = -1, x = 1$

$d)$ **no critical numbers** لا يوجد نقاط حرجة

Q23 **Find all critical numbers:** $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)$ $x = 0, x = 2, x = 3$

$b)$ $x = 0, x = 3$

$c)$ $x = 2, x = 3$

$d)$ $x = 0, x = -2, x = -3$

Q24 **Find all critical numbers:** $f(x) = \sin x \cos x \quad , [0, 2\pi]$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)$ $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$

$b)$ $x = \frac{\pi}{4}$

$c)$ $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}$

$d)$ $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$

Q25 **Find all critical numbers:** $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x \quad , [0, 2\pi]$: أوجد الأعداد الحرجة

$a)\ x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3}$

$b)\ x = \frac{\pi}{3}$

$c)\ x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$

$d)\ x = \frac{4\pi}{3}$

Q26 **Find all critical numbers:** $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 2}$: أوجد الأعداد الحرجة

$a)\ x = 2 + \sqrt{2}$

$b)\ x = 2 - \sqrt{2}$

$c)\ x = 2 - \sqrt{2}, x = 2 + \sqrt{2}$

$d)\ x = -2, x = 2$

Q27 **Find all critical numbers:** $f(x) = |x^2 - 1|$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)$ $x = -1 , x = 0$

$b)$ $x = -1 , x = 1$

$c)$ $x = 0 , x = 1$

$d)$ $x = -1 , x = 0 , x = 1$

Q28 **Find all critical numbers:** $f(x) = x\ e^{-2x}$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)$ $x = -\frac{1}{2}$

$b)$ $x = 0 , x = \frac{1}{2}$

$c)$ $x = \frac{1}{2}$

$d)$ $x = -\frac{1}{2} , x = \frac{1}{2}$

Q29 **Find all critical numbers:** $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)$ $x = -\frac{1}{2}$

$b)$ $x = 0 , x = \frac{1}{2}$

$c)$ $x = \frac{1}{2}$

$d)$ $x = 0$

Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Q30 **Find all critical numbers:** $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & , x<0\\ x^2-4x+3 & , x\geq 0\end{cases}$ أوجد الأعداد الحرجة :

$a)$ $x=-1\,,x=2$

$b)$ $x=-1\,,x=0$

$c)$ $x=0\,,x=2$

$d)$ $x=-1\,,x=0\,,x=2$

Q31 **Find all critical numbers:** $f(x)=x^4-3x+1$ on interval $[-1,3]$ أوجد الأعداد الحرجة :

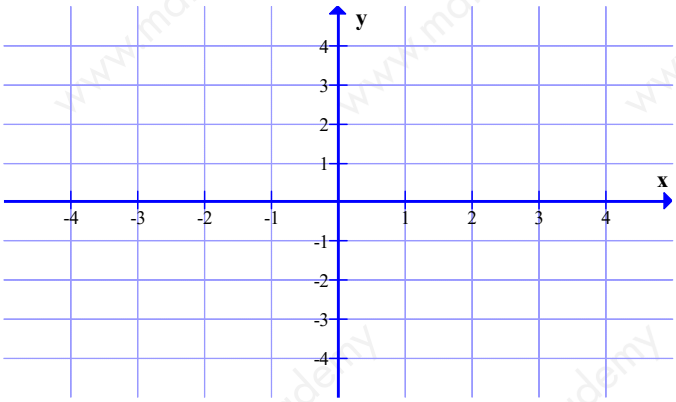
Q32 **Find all critical numbers:** $f(x)=\begin{cases}sinx & ,-\pi< x<\pi\\ tanx & , |x|\geq \pi\end{cases}$ أوجد الأعداد الحرجة :

Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Q33

Sketch a graph of a function $f(x)$ such that the absolute maximum of $f(x)$on the interval $[-2, 2]$ equals 3 and the absolute minimum does not exist.

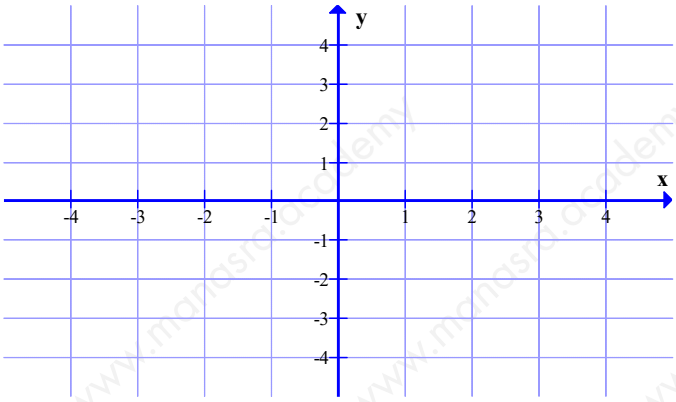
ارسم تمثيلا بيانيا لدالة $f(x)$ بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ $f(x)$ في الفترة $[-2, 2]$ تساوي 3 وتكون القيمة الصغرى المطلقة غير موجودة .



Q34

Sketch a graph of a continuous function $f(x)$ such that the absolute maximum of $f(x)$on the interval $(-2, 2)$ does not exist and the absolute minimum equals 2

ارسم تمثيلا بيانيا لدالة متصلة $f(x)$ بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ $f(x)$ في الفترة $(-2, 2)$ غير موجودة وتكون القيمة الصغرى المطلقة تساوي 2.

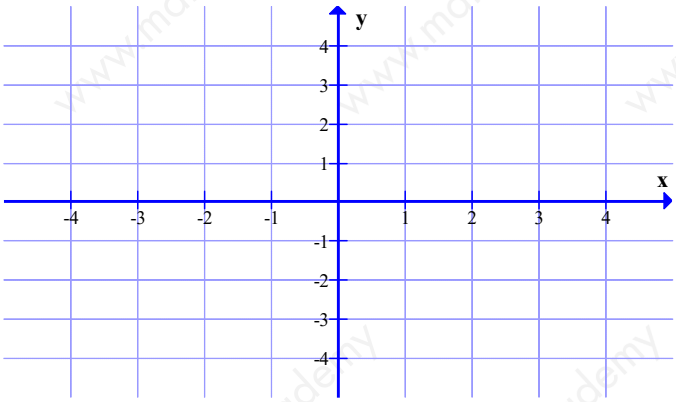


Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Q35

Sketch a graph of a continuous function $f(x)$ such that the absolute maximum of $f(x)$on the interval (-2 ,2) equals 4 and the absolute minimum equals 2

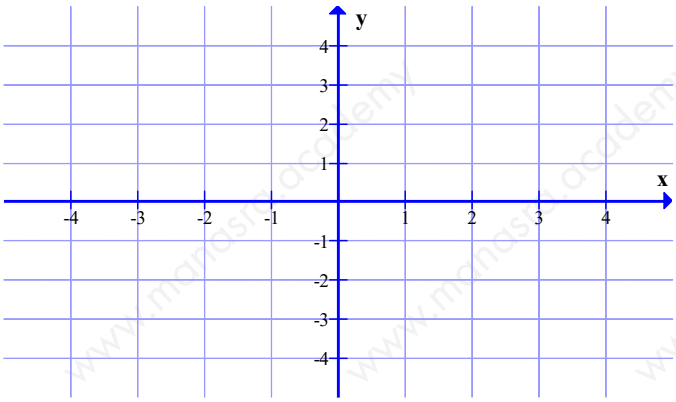
ارسم تمثيلا بيانيا لدالة متصلة $f(x)$ بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ $f(x)$ في الفترة (2, 2-) تساوي 4 وتكون القيمة الصغرى المطلقة تساوي 2.



Q36

Sketch a graph of a function f such that the absolute maximum of f(x) on the interval (-2 ,2) does not exist and the absolute minimum does not exist.

ارسم تمثيلا بيانيا لدالة $f(x)$ بحيث لا توجد قيمة عظمى مطلقة لـ $f(x)$ في الفترة (2, 2-) وكذلك لا توجد قيمة صغرى مطلقة .



Q37

في هذا التمرين .سوف نستكشف عائلة الدوال $f(x) = x^3 + cx + 1$ بحيث يكون c ثابتا .ما عدد القيم القصوى المحلية الموجودة وما أنواعها ؟

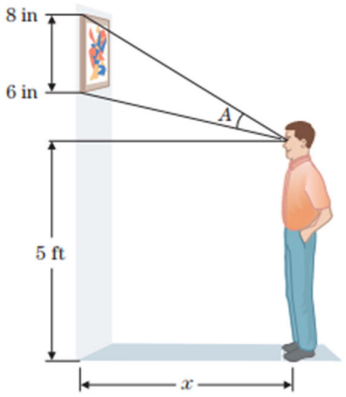
In this exercise, we will explore the family of functions $f(x) = x^3 + cx + 1$, where c is constant. How many and what types of local extrema are there? (Your answer will depend on the value of c.) Assuming that this family is indicative of all cubic functions, list all types of cubic functions

Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Q38

Suppose a painting hangs on a wall as in the figure. The frame extends from 6 ft to 8 ft above the floor. A person whose eyes are 5 ft above the ground stands x feet from the wall and views the painting with a viewing angle A formed by the ray from the person's eye to the top of the frame and the ray from the person's eye to the bottom of the bottom of the frame. Find the value of x that maximizes the viewing angle A. What changes if the person's eyes are 6 feet above the ground?

على فرض أن تعليق لوحة على جدار كما هو موضح بالشكل . يمتد الإطار بطول 6 أقدام إلى 8 أقدام فوق الأرض. يقف شخص ترتفع عيناه عن الأرض بمقدار 5 أقدام على بعد x قدم من الحائط. وينظر إلى اللوحة بزواية رؤية A التي تشكلت من الشعاع الصادر من عين هذا الشخص إلى أعلى الإطار. والشعاع الصادر من عين الشخص إلى أسفل نقطة من الإطار . أوجد قيمة x التي تزيد من زاوية الرؤية A .ماذا سيتغير إذا كان ارتفاع عين الشخص 6 أقدام من الأرض .



Contact us at: +971 55 857 0980
Learn more at: https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

4-4 Increasing and Decreasing Functions
4-4 الدوال المتزايدة والمتناقصة

DEFINITION 4.1
التعريف 4.1

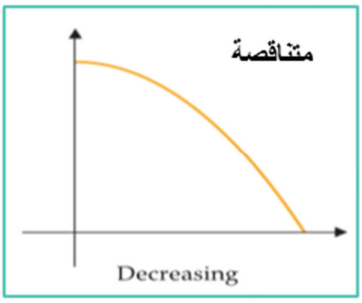
A function f is **increasing** on interval I if for every $x_1, x_2 \in I$ with $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.

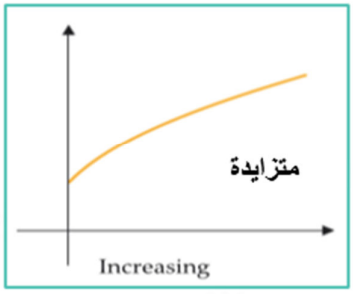
A function f is **decreasing** on interval I if for every $x_1, x_2 \in I$ with $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.

تكون f دالة متزايدة في الفترة I إذا كانت لكل $x_1, x_2 \in I$.

عندما $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$.

تكون f دالة متناقصة في الفترة I إذا كانت لكل $x_1, x_2 \in I$.





THEOREM 4.1
النظرية 4.1

Suppose that f is **differentiable** on interval I

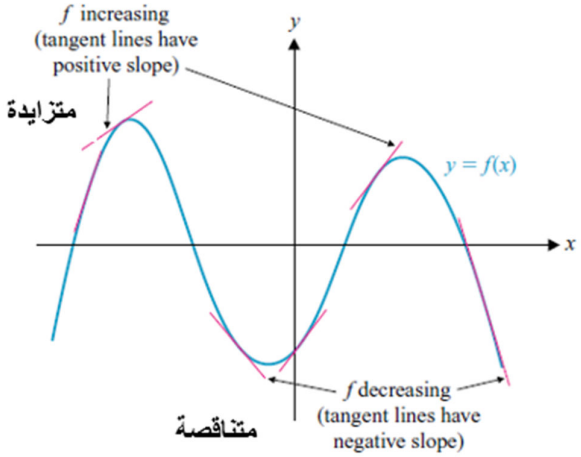
(i) If $f'(x) > 0$ for all $x \in I$ then f is **increasing** on I

(i) If $f'(x) < 0$ for all $x \in I$ then f is **decreasing** on I

على فرض أن f قابلة للاشتقاق في الفترة I .

(i) إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل قيم $x \in I$ فإن f تكون متزايدة في I .

(ii) إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل قيم $x \in I$ فإن f تكون متناقصة في I .



Q1

Use the graph of $f(x)$ to find the interval(s) were the function is increasing,

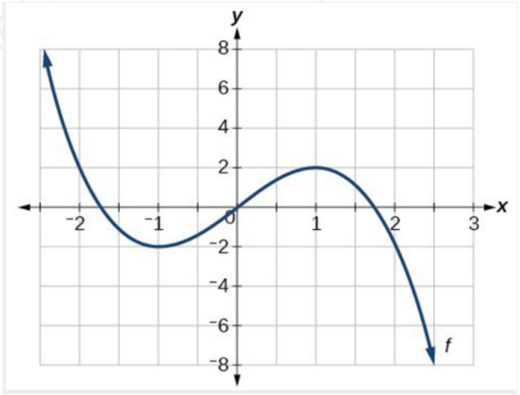
استخدم الرسم البياني لـ $f(x)$ لإيجاد فترات التزايد

$a)\ (-1,1)$

$b)\ (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

$c)\ (0,1)$

$d)\ (-\infty,-1)$



Q2

Use the graph of $f(x)$ to find the interval(s) were the function is decreasing,

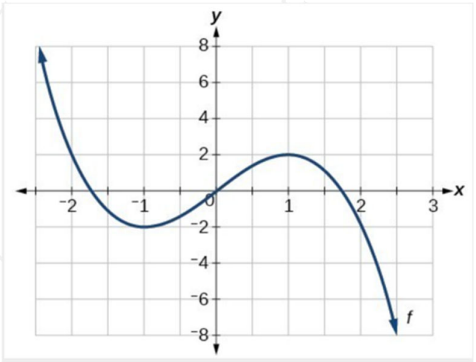
استخدم الرسم البياني لـ $f(x)$ لإيجاد فترات التناقص

$a)\ (-1,1)$

$b)\ (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

$c)\ (0,1)$

$d)\ (-\infty,-1)$



Q3

Use the graph of $f(x)$ to find the interval(s) were the function is increasing,

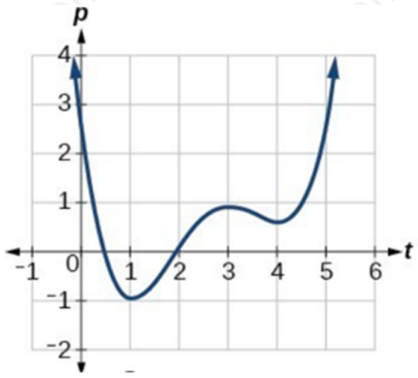
استخدم الرسم البياني لـ $f(x)$ لإيجاد فترات التزايد

$a)\ (1,3)$

$b)\ (1,\infty)$

$c)\ (4,\infty)$

$d)\ (1,3)\cup(4,\infty)$



Q4

Use the graph of $f(x)$ to find critical numbers

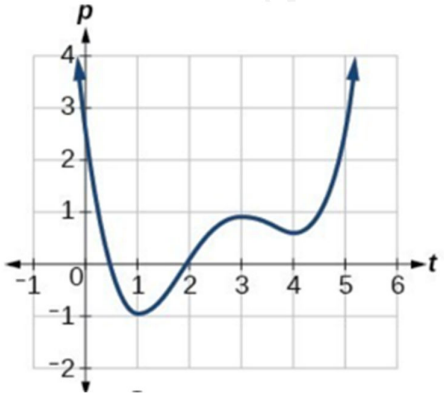
استخدم الرسم البياني لـ $f(x)$ لإيجاد الاعداد الحرجة

$a)\ x = 0.5\ , x = 2$

$b)\ x = 1\ , x = 3\ , x = 4$

$c) x = -1\ , x = 1, x = 0.8$

$d)\ x = -1\ , x = 3$



Q5

Use the graph of $f(x)$ to find critical numbers

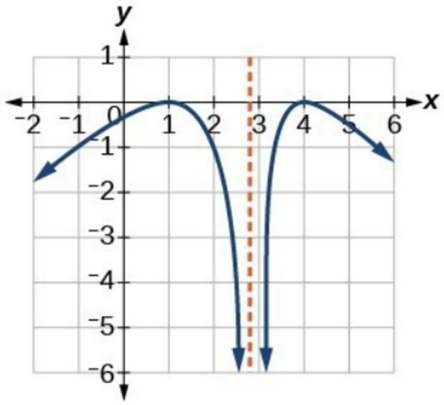
استخدم الرسم البياني لـ $f(x)$ لإيجاد الاعداد الحرجة

$a)\ x = 1\ , x = 2.9\ , x = 4$

$b)\ x = 0\ , x = 1\ , x = 4$

$c) x = 0\ , x = 1, x = 3$

$d)\ x = 1\ , x = 4$



Q6

Find the absolute extrema of the graph $f(x)$

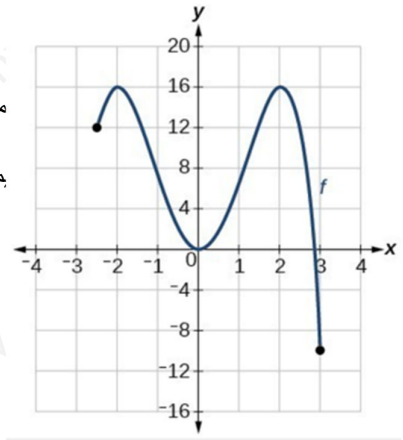
اوجد القيم القصوى المطلقة من الرسم البياني لـ $f(x)$

$a)$ **0** ***is absolute minimum*** (قيمة صغرى مطلقة),**16** ***is absolute maximum*** (قيمة عظمى مطلقة)

$b)$ **−10** ***is absolute minimum*** (قيمة صغرى مطلقة),**16** ***is absolute maximum*** مة عظمى مطلقة

$c)$ **−10** ***is absolute minimum*** (قيمة صغرى مطلقة),12 ***is absolute maximum*** مة عظمى مطلقة

$d)$**0** ***is absolute minimum*** (قيمة صغرى مطلقة),2 ***is absolute maximum*** (قيمة عظمى مطلقة)



THEOREM 4.2 (First Derivative Test)

النظرية 4.2 (اختبار المشتقة الأولى)

Suppose that f is **continuous** on interval $[a, b]$ and $c \in (a, b)$ is a critical number

(i) If $f'(x) > 0$ for all $x \in (a, c)$ **and** $f'(x) < 0$ for all $x \in (c, b)$, then $f(c)$ **is a local maximum.**

(ii) If $f'(x) < 0$ for all $x \in (a, c)$ **and** $f'(x) > 0$ for all $x \in (c, b)$, then $f(c)$ **is a local minimum.**

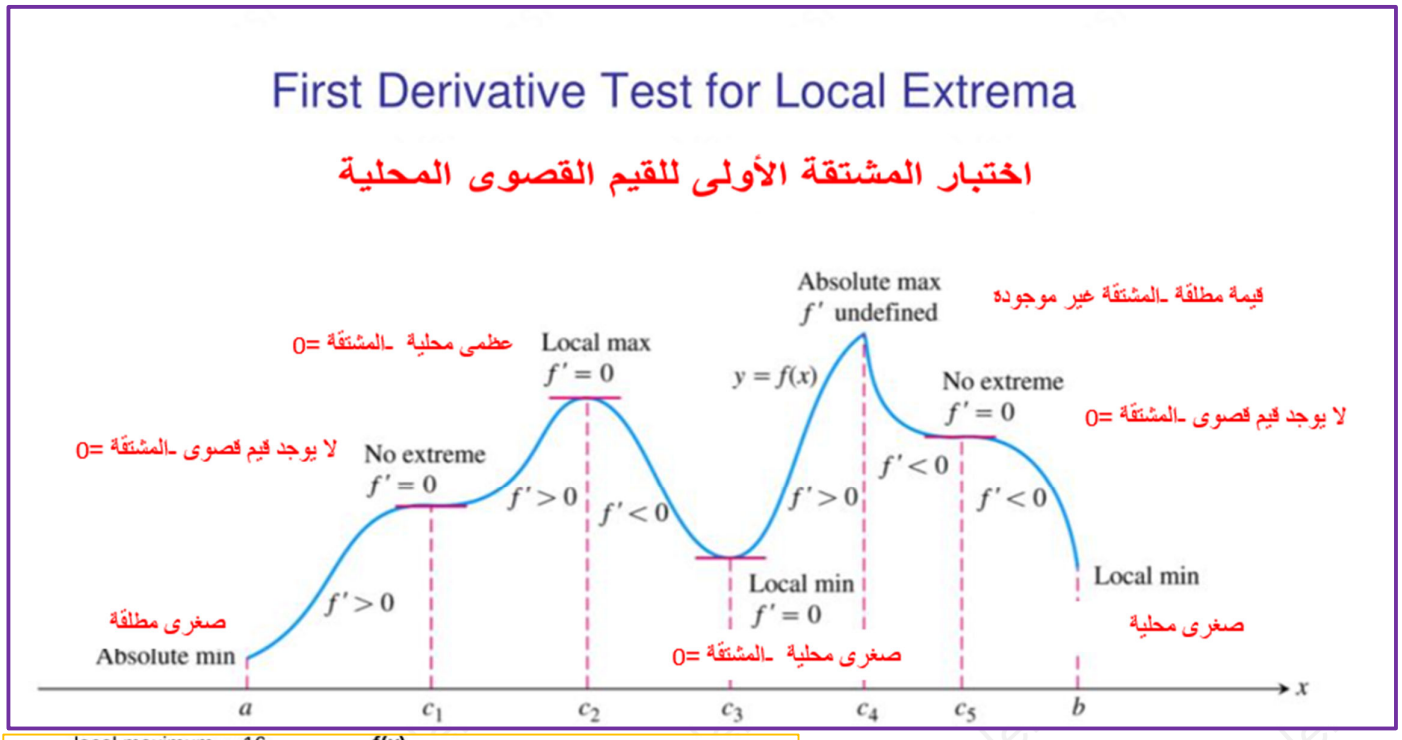
(iii)If $f'(x)$ has the same sign $a, c)$ **and** (c, b), then $f(c)$ **is not a local extremum.**

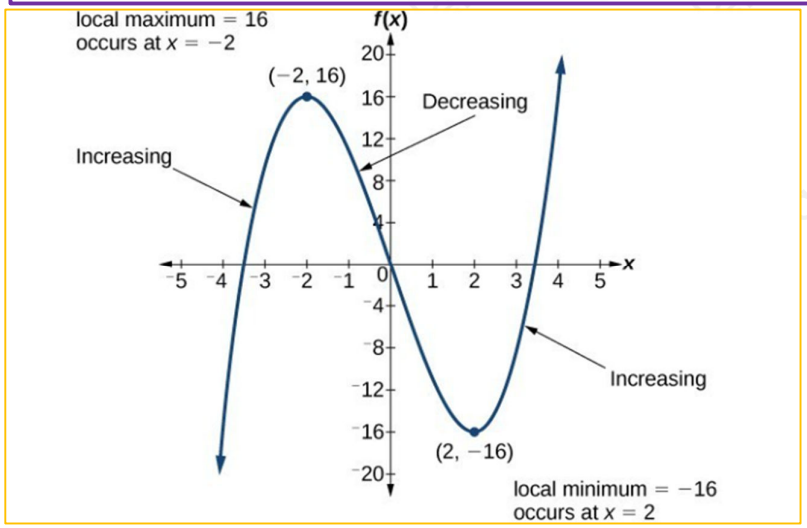
على فرض أن f متصلة في الفترة $[a, b]$. و$c \in (a, b)$
هو عدد حرج

(i)إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a, c)$ و $f'(x) < 0$ لكل $x \in (c, b)$ فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى .

(ii)إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a, c)$ و $f'(x) > 0$ لكل $x \in (c, b)$ فإن $f(c)$ هي قيمة صغرى .

(iii)إذا كانت $f'(x)$ لها الإشارة نفسها في الفترتين (a, c), (c, b) فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية .





Q7

Find (by hand)

A) the critical numbers

B) the intervals where the function is increasing and decreasing

C)use the First Derivative Teat to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

جد (يدويا)

A)الأعداد الحرجة .

B)فترات التزايد والتناقص للدالة .

C)جميع القيم القصوى المحلية .

مستخدما اختبار المشتقة الأولى

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$$

Q8

Find (by hand)

A) the critical numbers

B) the intervals where the function is increasing and decreasing

C)use the First Derivative Teat to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

جد (يدويا)

A)الأعداد الحرجة .

B)فترات التزايد والتناقص للدالة .

C)جميع القيم القصوى المحلية .

مستخدما اختبار المشتقة الأولى

Q9

Find (by hand)

A) the critical numbers

B) the intervals where the function is increasing and decreasing

C)use the First Derivative Teat to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

جد (يدويا)

A)الأعداد الحرجة .

B)فترات التزايد والتناقص للدالة .

C)جميع القيم القصوى المحلية .

مستخدما اختبار المشتقة الأولى

Q10

Find (by hand)

جد (يدويا)

A) the critical numbers

B) the intervals where the function is increasing and decreasing

C)use the First Derivative Teat to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

A) الأعداد الحرجة .

B) فترات التزايد والتناقص للدالة .

C) جميع القيم القصوى المحلية .

مستخدما اختبار المشتقة الأولى

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$$

Q11

Find (by hand)

A) the critical numbers

B) the intervals where the function is increasing and decreasing

C)use the First Derivative Teat to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

$$f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$$

جد (يدويا)

A)الأعداد الحرجة .

B)فترات التزايد والتناقص للدالة .

C)جميع القيم القصوى المحلية .

مستخدما اختبار المشتقة الأولى

Q12

Find (by hand)

A) the critical numbers

B) the intervals where the function is increasing and decreasing

C)use the First Derivative Teat to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

$$f(x) = tan^{-1}x^2$$

جد (يدويا)

A)الأعداد الحرجة .

B)فترات التزايد والتناقص للدالة .

C)جميع القيم القصوى المحلية .

مستخدما اختبار المشتقة الأولى

Q13

Find (by hand)

A) the critical numbers

B) the intervals where the function is increasing and decreasing

C)use the First Derivative Teat to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

$$f(x) = xe^{-2x}$$

جد (يدويا)

A)الأعداد الحرجة .

B)فترات التزايد والتناقص للدالة .

C)جميع القيم القصوى المحلية .

مستخدما اختبار المشتقة الأولى

Q14

Find (by hand)

A) the critical numbers

B) the intervals where the function is increasing and decreasing

C)use the First Derivative Teat to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

جد (يدويا)

A)الأعداد الحرجة .

B)فترات التزايد والتناقص للدالة .

C)جميع القيم القصوى المحلية .

مستخدما اختبار المشتقة الأولى

Q15

Find (by hand)

A) the critical numbers

B) the intervals where the function is increasing and decreasing

C)use the First Derivative Teat to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^3}$$

جد (يدويا)

A)الأعداد الحرجة .

B)فترات التزايد والتناقص للدالة .

C)جميع القيم القصوى المحلية .

مستخدما اختبار المشتقة الأولى

Q16

Find (by hand)

A) the critical numbers

B) the intervals where the function is increasing and decreasing

C)use the First Derivative Teat to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$$

جد (يدويا)

A)الأعداد الحرجة .

B)فترات التزايد والتناقص للدالة .

C)جميع القيم القصوى المحلية .

مستخدما اختبار المشتقة الأولى

Q17

Find (by hand)

A) the critical numbers

B) the intervals where the function is increasing and decreasing

C)use the First Derivative Teat to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

$$f(x) = ln(x^2 - 1)$$

جد (يدويا)

A)الأعداد الحرجة .

B)فترات التزايد والتناقص للدالة .

C)جميع القيم القصوى المحلية .

مستخدما اختبار المشتقة الأولى

Q18

Find (by hand)

A) the critical numbers

B) the intervals where the function is increasing and decreasing

C)use the First Derivative Teat to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

$$f(x) = sinx + cosx$$

جد (يدويا)

A)الأعداد الحرجة .

B)فترات التزايد والتناقص للدالة .

C)جميع القيم القصوى المحلية .

مستخدما اختبار المشتقة الأولى

Q19

Find (by hand)

A) the critical numbers

B) the intervals where the function is increasing and decreasing

C)use the First Derivative Teat to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.

$$f(x) = sin^2 x$$

جد (يدويا)

A)الأعداد الحرجة .

B)فترات التزايد والتناقص للدالة .

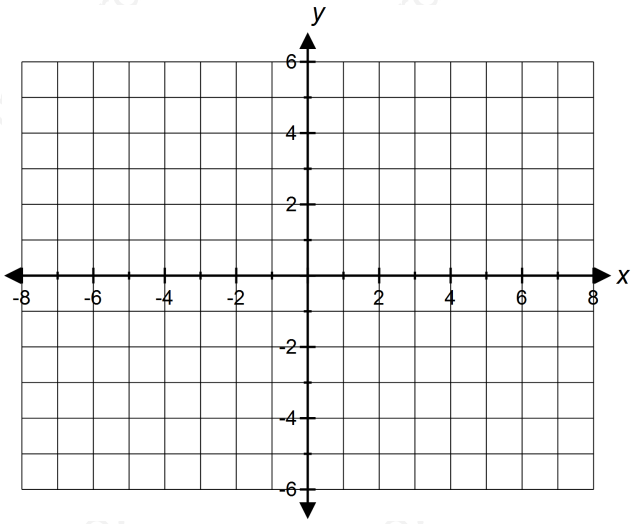
C)جميع القيم القصوى المحلية .

مستخدما اختبار المشتقة الأولى

Q20

Sketch a graph of a function with the given properties: ارسم تمثيلا بيانيا لدالة بالخصائص التالية:

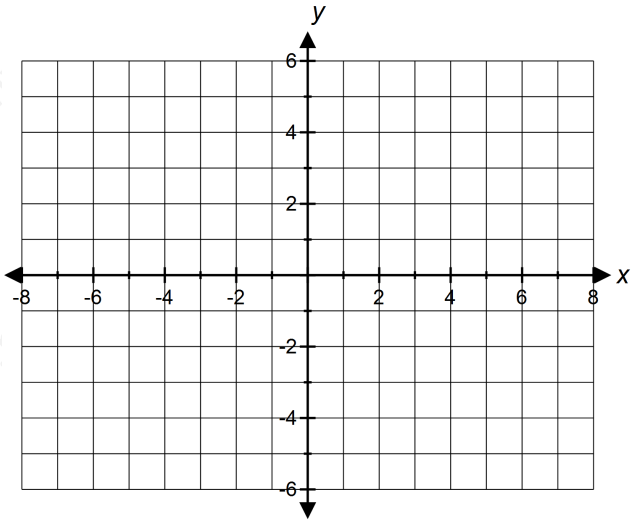
$$f(0) = 1,\ f(2) = 5,\ f'(x) < 0\ for\ x < 0\ and\ x > 2,\ f'(x) > 0\ for\ 0 < x < 2$$



Q21

Sketch a graph of a function with the given properties: ارسم تمثيلا بيانيا لدالة بالخصائص التالية:

$$f(1) = 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = 2, f'(x) < 0\ for\ x < 1,\ f'(x) > 0\ for\ x > 1\ f'(1) = 0$$

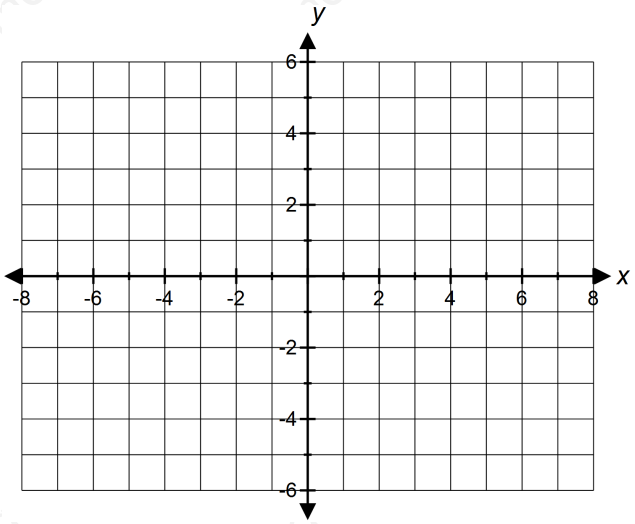


Q22

Sketch a graph of a function with the given properties: ارسم تمثيلا بيانيا لدالة بالخصائص التالية:

$$f(3) = 0,\ f'(x) < 0\ for\ x < 0\ and\ x > 3,\ f'(x) > 0\ for\ 0 < x < 3$$

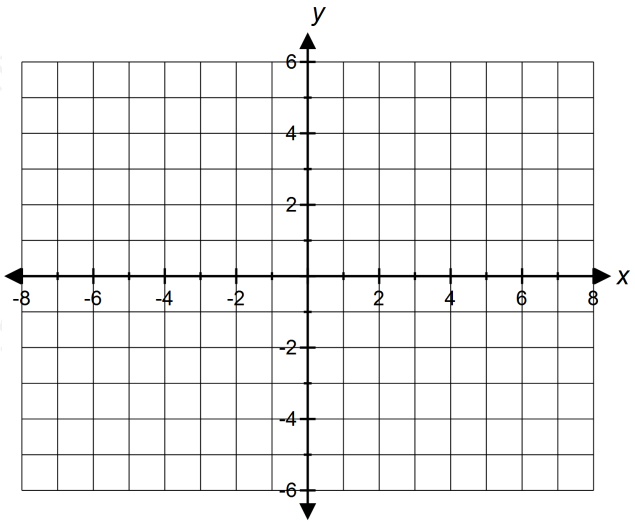
$$f'(3) = 0,\ f(0)\ and\ f'(0)\ \text{Dose not exists.}$$



Q23

Sketch a graph of a function with the given properties: ارسم تمثيلا بيانيا لدالة بالخصائص التالية:

$$f(1) = 0,\ f'(x) < 0\ for\ x < 1\ and\ ,\ f'(x) > 0\ for\ x > 1\ ,\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$$

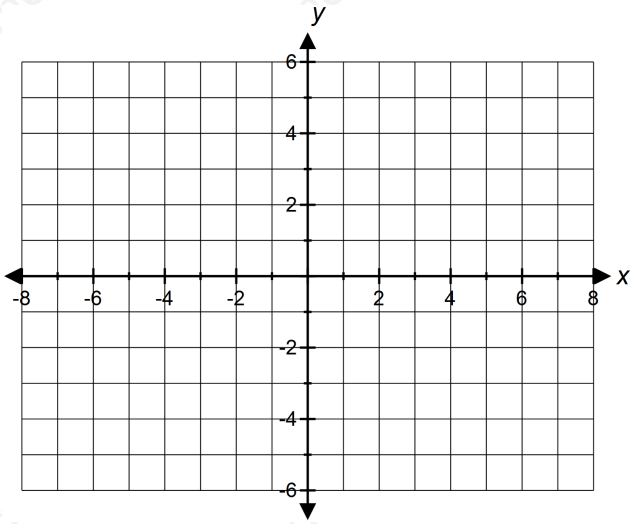


Q24

Sketch a graph of a function with the given properties: ارسم تمثيلا بيانيا لدالة بالخصائص التالية:

$$f(-1) = f(2) = 0,\ f'(x) < 0 \text{ for } x < -1 \text{ and } 0 < x < 2 \text{ and } x > 2,$$

$$f'(x) > 0 \text{ for } -1 < x < 0\ , f'(-1) \text{ dose not exist}\ , f'(2) = 0$$

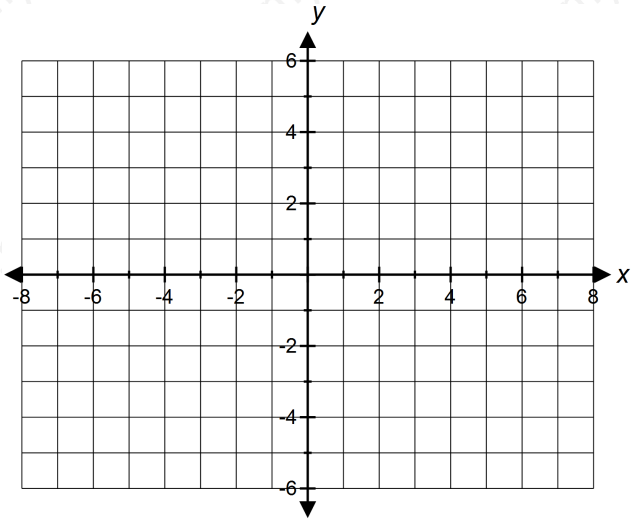


Q25

Sketch a graph of a function with the given properties: ارسم تمثيلا بيانيا لدالة بالخصائص التالية:

$$f(0) = 0\ , f(3) = -1,\ f'(x) < 0 \text{ for } x > 3 \text{ and } f'(x) > 0 \text{ for } x < 0 \text{ and } 0 < x < 1 \text{ and } 1 < x < 3\ , f'(1) \text{ dose not exist}\ , f'(0) = 0, f'(3) = 0$$

$$f'(3) = 0,\ f'(0) = 0$$



Q26

Find (by hand) all asymptotes and extrema

جد (يدويا) كافة خطوط التقارب والقيم القصوى

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Q27

Find (by hand) all asymptotes and extrema

جد (يدويا) كافة خطوط التقارب والقيم القصوى

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

www.manasra.academy

4-5 Concavity and the second test derivative — 4-5 التقعر واختبار المشتقة الثانية

DEFINITION 5.1

For a function f that is differentiable on an interval I, the graph of f is:

(i) **concave up** on I *if* f' is **increasing** on an interval I

(i) **concave down** on I *if* f' is **decreasing** on an interval I

التعريف 5.1

لكل f قابلة للاشتقاق في الفترة I يكون التمثيل البياني للدالة f

(i)**مقعرا إلى الأعلى** في الفترة I إذا كانت f' متزايدة في I.

(i)**مقعرا إلى الأسفل** في الفترة I إذا كانت f' متناقصة في I.

THEOREM 5.1

Suppose that f'' exists on an interval I

(i) If $f'' > 0$ on I, then the graph of f is **concave up** on I

(i) If $f'' < 0$ on I, then the graph of f is **concave down** on

نظرية 5.1

على فرض أن f'' موجودة في الفترة I

(i)إذا كانت $f'' > 0$ فإن التمثيل البياني للدالة f **مقعرا إلى الأعلى** في I.

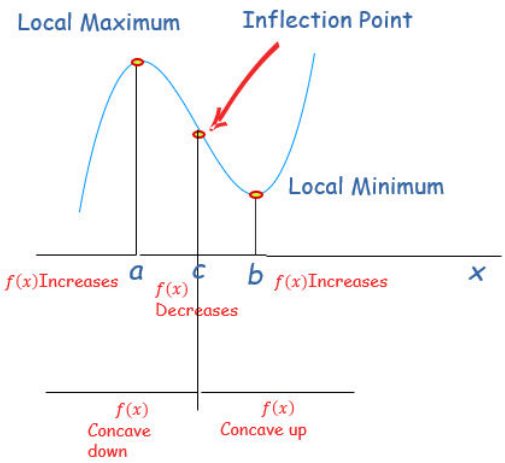
(i)إذا كانت $f'' < 0$ فإن التمثيل البياني للدالة f **مقعرا إلى الأسفل** في I.

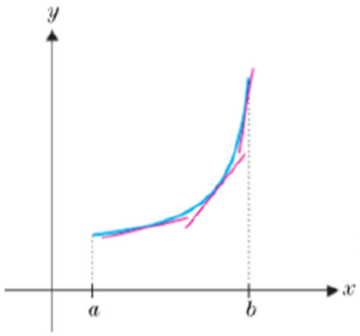
DEFINITION 5.2

Suppose that f is continuous on the interval (a, b) and that the graph changes concavity at a point $c \in (a, b)$ then the point $(c, f(c))$ is called **an inflection point** of f.

تعريف 5.2

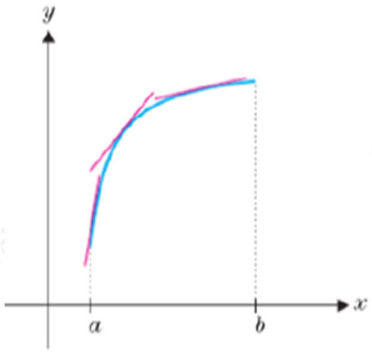
على فرض أن f متصلة في الفترة (a, b) وأن التمثيل البياني يغير التقعر عند النقطة $c \in (a, b)$، يطلق على النقطة $(c, f(c))$ **نقطة انعطاف لـ** f .





Concave up, increasing.

مقعر للأعلى، متزايدة



Concave down, decreasing.

مقعر للأسفل، متناقصة

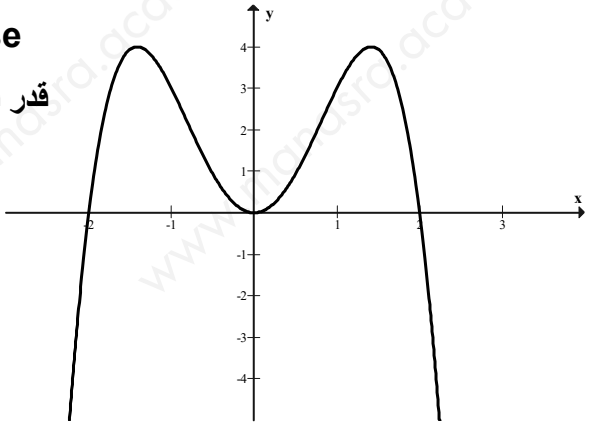
Q1

Use the graph of $f(x)$ to find

استخدم الرسم البياني لـ $f(x)$ لإيجاد

1-Estimate the intervals of increase and decrease

قدر فترات التزايد والتناقص



2- the location of local extrema مواقع القيم القصوى المحلية

3- intervals of concavity فترات التقعر

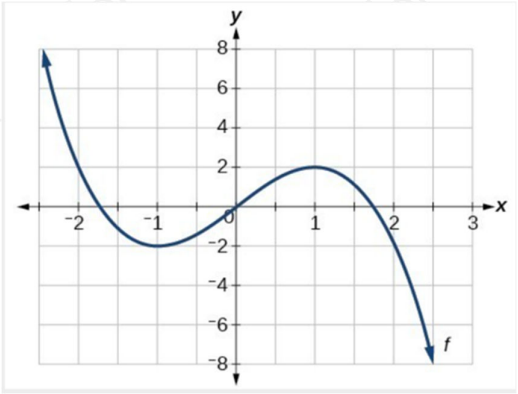
4-the inflection points نقاط الانعطاف

5- the values x where $f' > 0$ and $f'' > 0$ القيم التي يكون عندها

Q2

Use the graph of $f(x)$ to estimate the interval(s) where the function is concave up,

استخدم الرسم البياني لـ $f(x)$ لتقدير فترات التقعر لأعلى



$a)\ (-1,1)$

$b)\ (-\infty,0)$

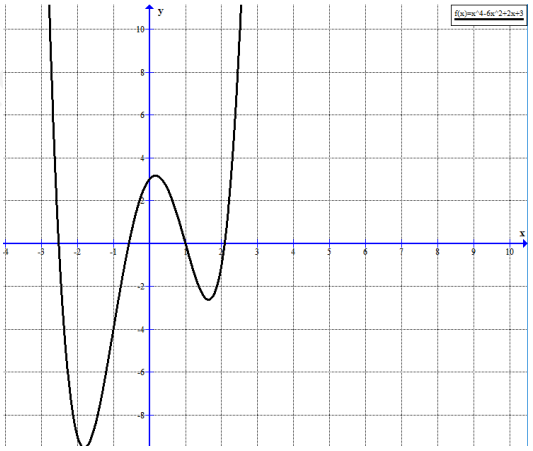
$c)\ (0,\infty)$

$d)\ (-\infty,-1)$

Q3

Determine where the graph of $f(x)=x^4-6x^2+2x+3$ is concave up.

حدّد أين يكون التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^4-6x^2+2x+3$ مقعرًا للأعلى.

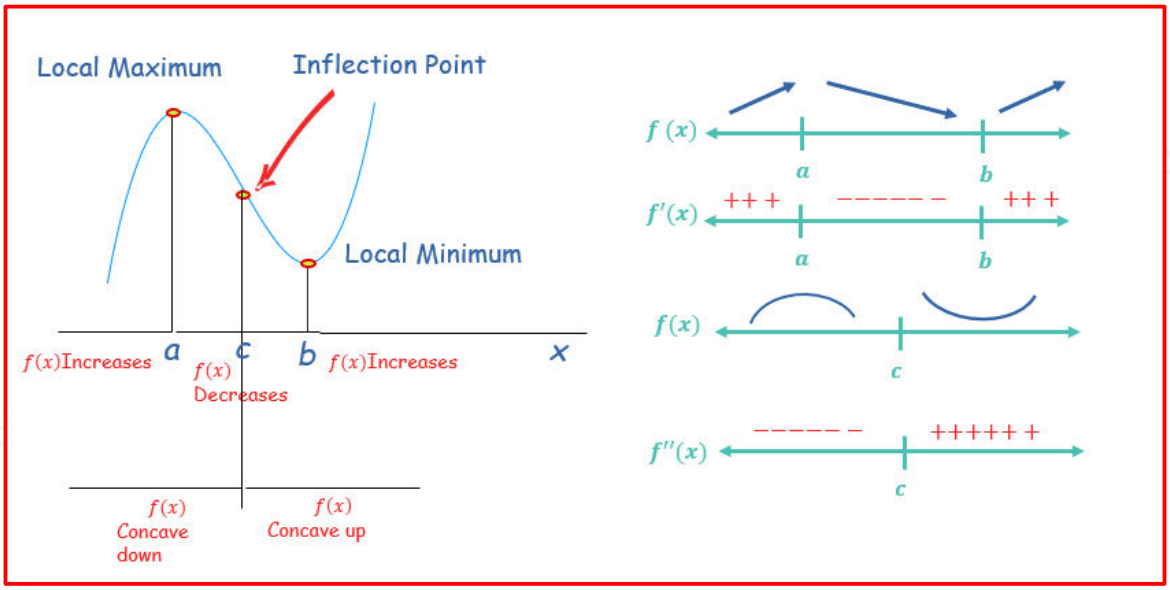


$a)\ (-1,1)$

$b)\ (-\infty,-1)$

$c)\ (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

$d)\ (-\infty,0)\cup(0,\infty)$



Q4

Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down, find any inflection points.

حدد أين يكون التمثيل البياني لـ $f(x)$ مقعرا للأعلى ومقعرا للأسفل وأوجد نقاط الانعطاف (إن وجدت)

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$$

www.manasra.academy

Q5

Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down, find any inflection points.

حدد أين يكون التمثيل البياني لـ $f(x)$ مقعرا للأعلى ومقعرا للأسفل وأوجد نقاط الانعطاف (إن وجدت)

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$$

Q6

Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down, find any inflection points.

حدد أين يكون التمثيل البياني لـ $f(x)$ مقعرا للأعلى ومقعرا للأسفل وأوجد نقاط الانعطاف (إن وجدت)

$$f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$$

Q7

Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down, find any inflection points.

حدد أين يكون التمثيل البياني لـ $f(x)$ مقعرا للأعلى ومقعرا للأسفل وأوجد نقاط الانعطاف (إن وجدت)

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Q8

Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down, find any inflection points.

حدد أين يكون التمثيل البياني لـ $f(x)$ مقعرا للأعلى ومقعرا للأسفل وأوجد نقاط الانعطاف (إن وجدت)

$$f(x) = x + 3(1 - x)^{\frac{1}{3}}$$

Q9

Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down, find any inflection points.

حدد أين يكون التمثيل البياني لـ $f(x)$ مقعرا للأعلى ومقعرا للأسفل وأوجد نقاط الانعطاف (إن وجدت)

$$f(x) = xe^{-4x}$$

Q10

Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down, find any inflection points.

حدد أين يكون التمثيل البياني لـ $f(x)$ مقعرا للأعلى ومقعرا للأسفل وأوجد نقاط الانعطاف (إن وجدت)

$$f(x) = sinx - cosx \quad , [0, 2\pi]$$

www.manasra.academy

Q11

Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down, find any inflection points.

حدد أين يكون التمثيل البياني لـ $f(x)$ مقعرا للأعلى ومقعرا للأسفل وأوجد نقاط الانعطاف (إن وجدت)

$$f(x) = tan^{-1}(x^2)$$

Q12

Determine where the graph of $f(x)$ is concave up and concave down, find any inflection points.

حدد أين يكون التمثيل البياني لـ $f(x)$ مقعرا للأعلى ومقعرا للأسفل وأوجد نقاط الانعطاف (إن وجدت)

$$f(x) = x + \frac{5}{x}$$

THEOREM 5.2 (Second Derivative Test)

Suppose that f'' is continuous on the interval (a, b) and $f'(c) = 0$, for some number $c \in (a, b)$

(i) If $f'' < 0$ on , then $f(c)$ is a **local maximum.**

(ii) If $f'' > 0$ on , then $f(c)$ is a **local minimum.**

نظرية 5.2 (اختبار المشتقة الثانية)

على فرض أن f'' متصلة في الفترة (a, b) و $f'(c) = 0$, لكل $c \in (a, b)$

(i)إذا كانت $f'' < 0$ فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية.

(ii)إذا كانت $f'' > 0$ فإن $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية.

Q13

Use the Second Derivative Test to find the local extrema of

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 10 \ .$$

استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة

Q14

Use the Second Derivative Test to find the local extrema of $f(x) = xe^{-x}$.

استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة

Q15

Use the Second Derivative Test to find the local extrema of $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة

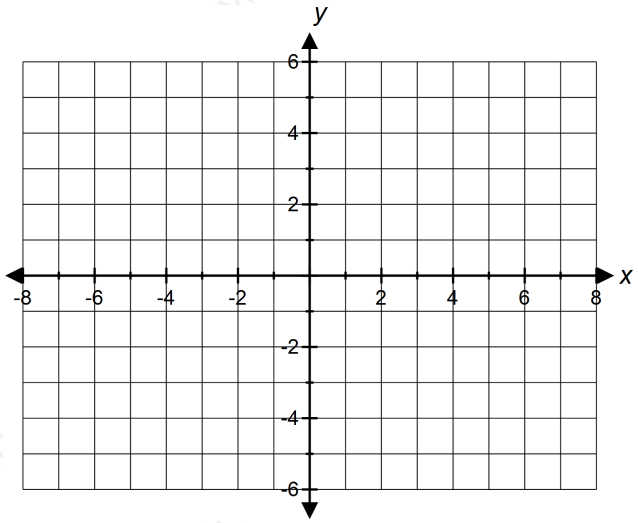
Q16

Determine all significant features by hand and sketch a graph

حدد جميع المميزات المهمة يدويا وارسم تمثيلا بيانيا

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$$

1- the intervals of increase and decrease فترات التزايد والتناقص.
2- the local extrema القيم القصوى المحلية
3- intervals of concavity فترات التقعر
4- the inflection points نقاط الانعطاف



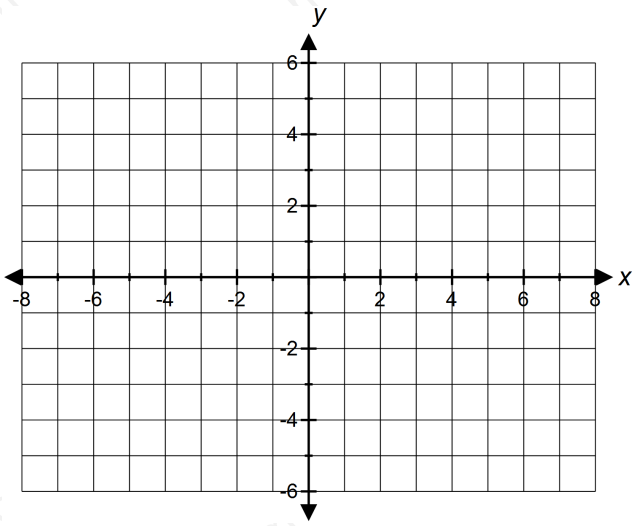
Q17

Determine all significant features by hand and sketch a graph

حدد جميع المميزات المهمة يدويا وارسم تمثيلا بيانيا

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$$

5- the intervals of increase and decrease فترات التزايد والتناقص.
6- the local extrema القيم القصوى المحلية
7- intervals of concavity فترات التقعر
8- the inflection points نقاط الانعطاف

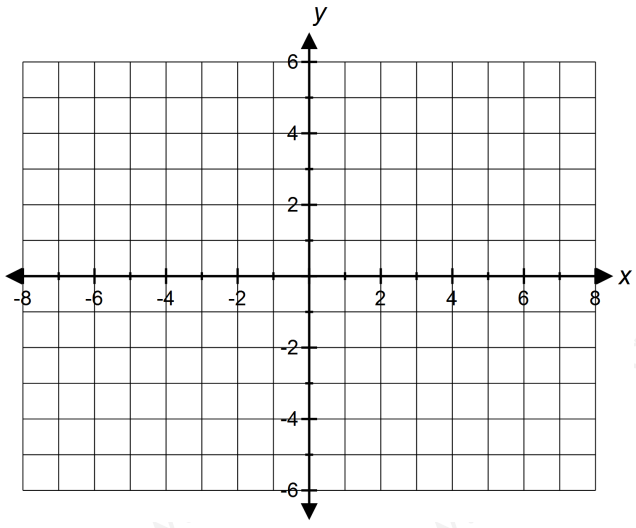


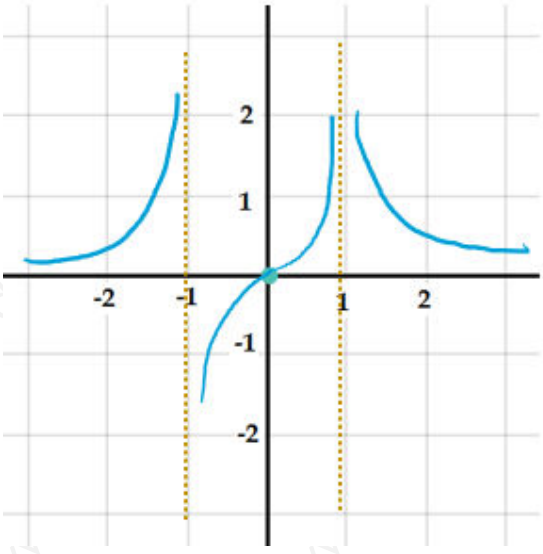
Q18

Sketch a graph of a function with the given properties: ارسم تمثيلا بيانيا لدالة بالخصائص التالية:

$$f(0) = 0, f'(x) > 0 \text{ for } x < -1 \text{ and } -1 < x < 1,\ f'(x) < 0 \text{ for } x > 1,$$

$$f''(x) > 0 \text{ for } x < -1,\ 0 < x < 1 \text{ and } x > 1,\ f''(x) < 0 \text{ for } -1 < x < 0$$



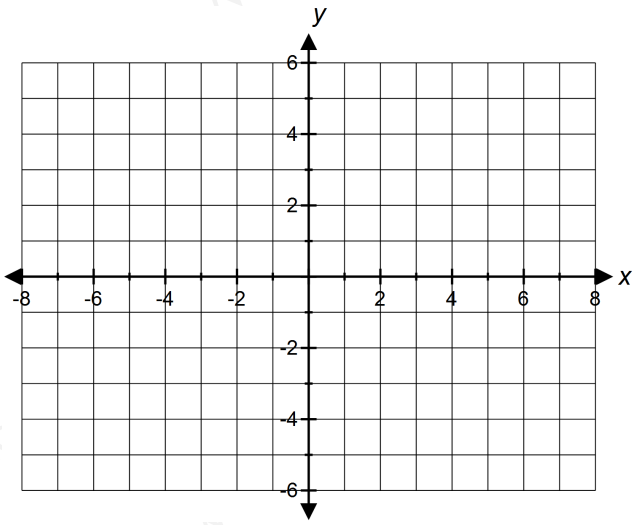


Q19

Sketch a graph of a function with the given properties: ارسم تمثيلا بيانيا لدالة بالخصائص التالية:

$$f(0) = 2, f'(x) > 0 \text{ for all } x \text{ , } f'(0) = 1 \text{ ,}$$

$$f''(x) > 0 \text{ for } x < 0, \text{ , } f''(x) < 0 \text{ for } 0 < x$$

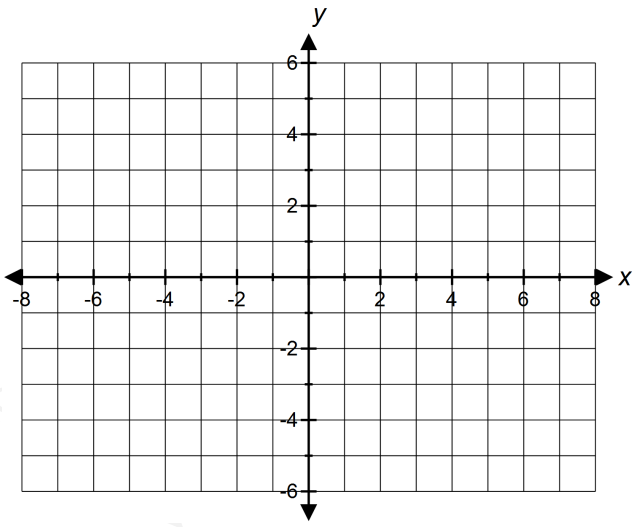


Q20

Sketch a graph of a function with the given properties: ارسم تمثيلا بيانيا لدالة بالخصائص التالية:

$$f(0) = 0, f(-1) = -1, f(1) = 1, f'(x) > 0 \text{ for } x < -1 \text{ and } 0 < x < 1,$$

$$f'(x) < 0 \text{ for } -1 < x < 0 \text{ and } x > 1, f''(x) < 0 \text{ for } x < 0 \text{ and } x > 0$$

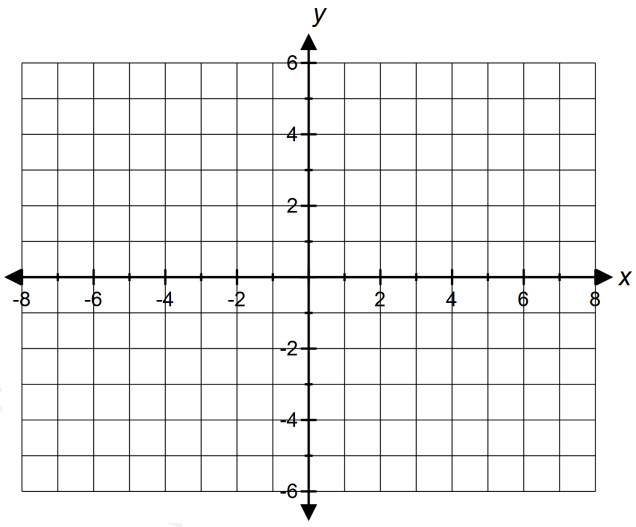


Q21

Sketch a graph of a function with the given properties: ارسم تمثيلا بيانيا لدالة بالخصائص التالية:

$$f(0) = 1\,, f'(x) < 0\ for\ x < 1\ ,$$

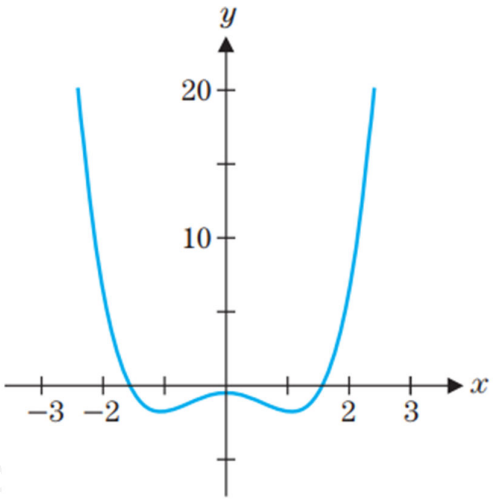
$$f'(x) > 0\ for\ x > 1\,, f''(x) < 0\ for\ x < 1\ and\ x > 1$$



Q22

Estimate the intervals of increase and decrease, the locations of local extrema, intervals of concavity and locations of inflection points.

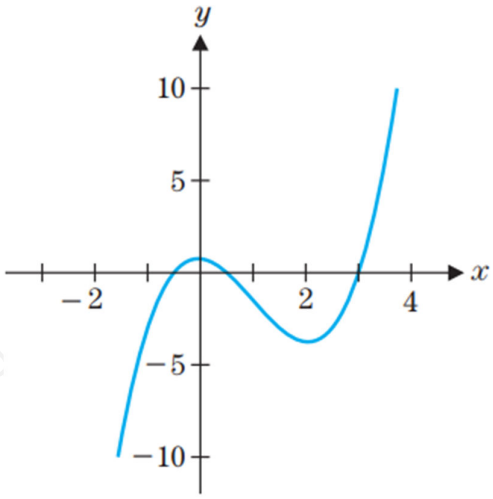
قدر الفترات المتزايدة والمتناقصة ومواقع القيم القصوى المحلية، وفترات التقعر، ومواقع نقاط الانعطاف.



Q23

Estimate the intervals of increase and decrease, the locations of local extrema, intervals of concavity and locations of inflection points.

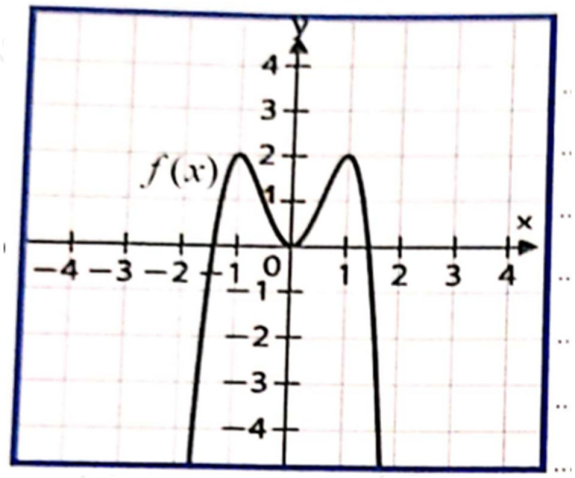
قدر الفترات المتزايدة والمتناقصة ومواقع القيم القصوى المحلية، وفترات التقعر، ومواقع نقاط الانعطاف.



Q24

Estimate the intervals of increase and decrease, the locations of local extrema, intervals of concavity and locations of inflection points.

قدر الفترات المتزايدة والمتناقصة ومواقع القيم القصوى المحلية، وفترات التقعر، ومواقع نقاط الانعطاف.

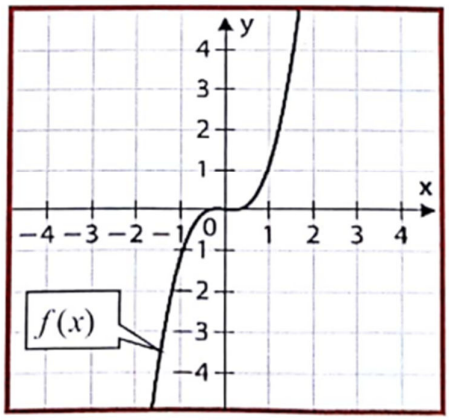


Q25

قدر الفترات التي يكون فيها التمثيل البياني للدالة $f(x)$ مقعرًا لأعلى والفترات التي يكون فيها مقعرًا لأسفل.

a) مقعر لأعلى عند $-1<x<1$ مقعر لأسفل عند $x<-1, x>1$

b) مقعر لأعلى عند $x>0$ مقعر لأسفل عند $x<0$



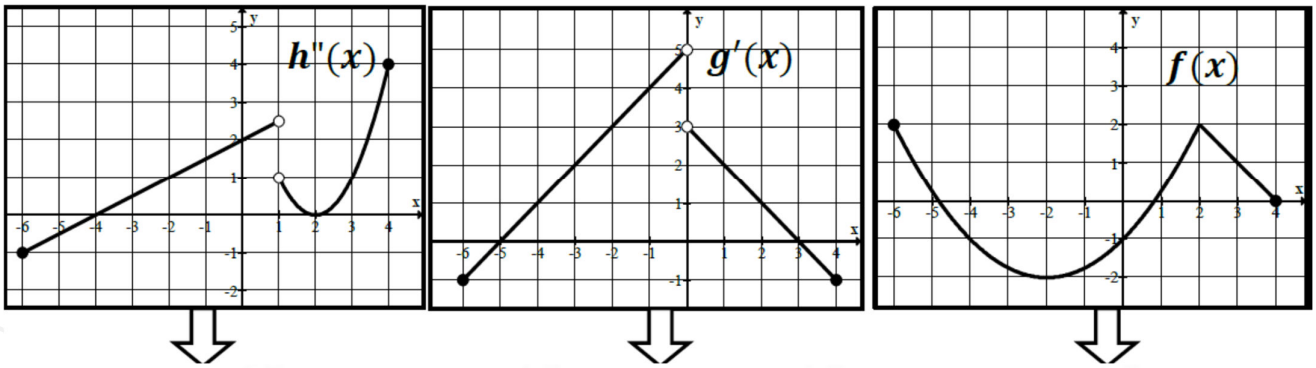
c) مقعر لأعلى عند $0<x<1$ مقعر لأسفل عند $x<0$ و $x>1$

d) مقعر لأعلى عند $-0.5<x<0.5$ مقعر لأسفل عند $x<-0.5$ و $x>0.5$

Q26

أولاً : 1) لتكن $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ دوال متصلة على الفترة $[-6, 4]$

فيما يلي بيان كلا من $f(x)$, $g'(x)$, $h''(x)$ ، من الرسم أكمل العبارات التالية :



- النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ هي .....
- الفترات التي تكون عندها الدالة متزايدة .....
- قيمة x التي يوجد عندها للدالة قيمة صغرى مطلقة .....

- النقاط الحرجة للدالة $g(x)$ هي .....
- الفترات التي تكون عندها الدالة متناقصة .....
- قيمة x التي يوجد عندها للدالة قيمة عظمى محلية .....

- نقاط الانقلاب للدالة $h(x)$ هي .....
- فترات تقعر منحنى الدالة لأسفل .....
- فترات التناقص للدالة $h'(x)$ .....

ثانيا : أيهما اكبر $g(1)$ أم $g(2)$ مع ذكر السبب ؟

ثالثا : احدى قيم x التى تكون عندها $f'(x)$ و $f''(x)$ موجبتين ؟

Q27

How many inflection points does the function have?

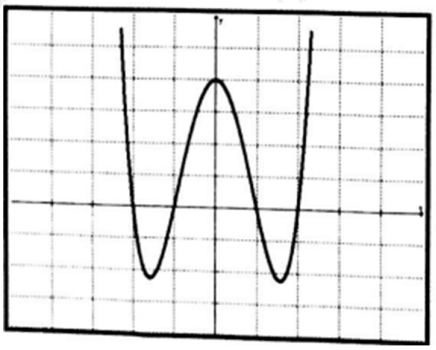
ما عدد نقاط انعطاف الدالة من الدرجة الرابعة

***a*) 4**

***b*) 3**

***c*) 2**

***d*) 1**



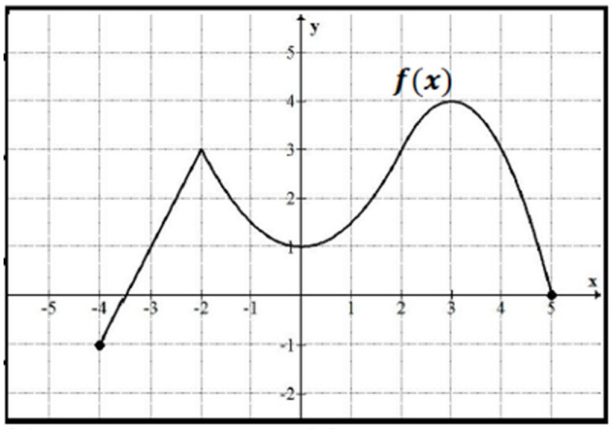
Q28

Let $f(x), g(x)$ be continuous functions on the interval [-4,5] , Below are the graphs for $f(x), g'(x)$

From the drawing, complete the following expressions

لتكن $f(x), g(x)$ دوال متصاة على الفترة [-4,5]

فيما يلي بيان كلا من $f(x), g'(x)$ ، من الرسم
أكمل العبارات التالية



critical numbers النقاط الحرجة

.....

increasing intervals فترات التزايد

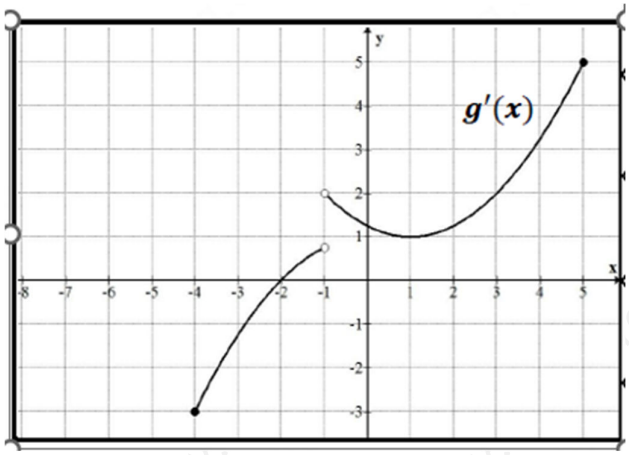
.....

decreasing intervals فترات التناقص

.....

locate local maximum للدالة قيمة عظمى محلية عند x

.....



increasing intervals فترات التزايد

.....

locate local minimum للدالة قيمة صغرى محلية عند x

.....

concave down intervals فترات التقعر لأسفل

.....

inflection points نقاط الانعطاف

.....

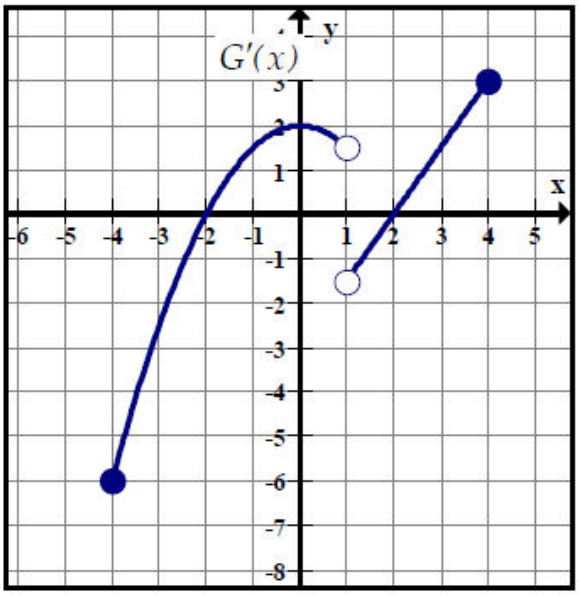
Q29

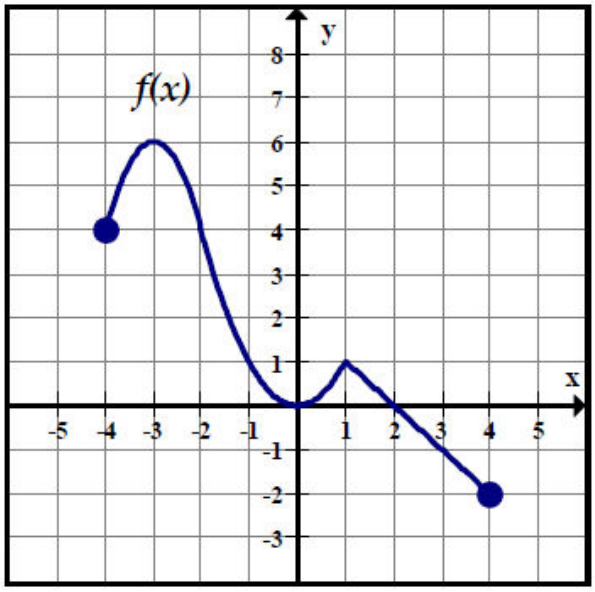
Let $f(x), G(x)$ be continuous functions on the interval [-4,4] , Below are the graphs for $f(x), G'(x)$

From the drawing, complete the following expressions

لتكن $f(x), G(x)$ دوال متصاة على الفترة [-4,4]

فيما يلي بيان كلا من $f(x), G'(x)$ ، من الرسم
أكمل العبارات التالية





$G(x)$	$f(x)$	
.....	.....	(1) مجموعة النقاط الحرجة للدالة هي
.....	.....	(2) الفترات التي تكون عليها الدالة متناقصة
.....	.....	(3) للدالة قيمة صغرى محلية عند x تساوي
.....	.....	(4) فترات تقعر منحنى الدالة لأسفل هي
.....	.....	(5) إحدى نقاط الانعطاف للدالة هي

(6) إشارة المقدار $G(-3) - G(-2)$ هي .....

Q30

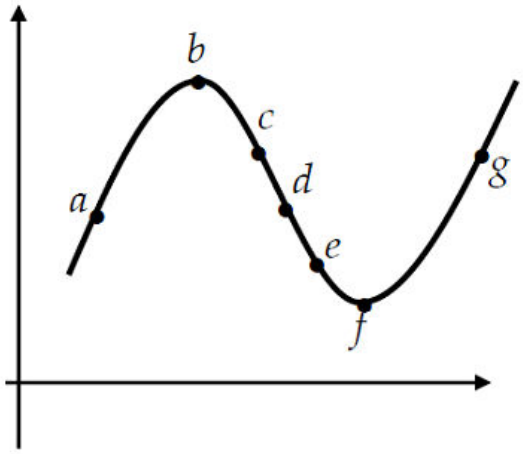
Rely on the adjacent figure representing the graph of the function $f(x)$

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$

To answer the following questions

للإجابة عن الاسئلة التالية

Identify the points where the following conditions are met حدد النقاط التي تتوفر فيها الشروط التالية



$f'' > 0 \quad , \quad f' > 0$ (1)

$f'' < 0 \quad , \quad f' > 0$ (2)

$f'' < 0 \quad , \quad f' = 0$ (3)

complete the following table: أكمل الجدول التالي:

الشرط	الرمز
$f' \times f'' > 0$	
$f'' = 0$	
$f' = 0, f'' < 0$	
$f' \times f'' < 0$	
$f' \times f'' = 0$	
$f' = 0, f'' > 0$	

Q31

If $f(x) = \frac{ax+b}{x^2-1}$ and $f(x)$ has a local extremum equal 1 at $x = 3$

إذا كانت $f(x) = \frac{ax+b}{x^2-1}$ وكان للدالة $f(x)$ قيمة قصوى محلية تساوى 1 عند $x = 3$

Q32

Determine a and b so that the curve $f(x) = ax^3 + bx^2$ will have a point of inflection at $(1,2)$

حدد قيم b و a التي يكون للدالة $f(x) = ax^3 + bx^2$ نقطة انعطاف عند $(1,2)$

4-6 Overview of Curve Sketching — 4-6 رسم المنحنيات

Steps to Draw $y = f(x)$: — خطوات الرسم

01 Domain — *Determine the domain of $f(x)$ first* — المجال

02 Vertical Asymptote — *For points isolated from the domain of $f(x)$, Check the limit at that point to see if there is a vertical asymptote, hole, or jump discontinuity* — المقاربات الرأسية

03 First Derivative Information
- *Determine increasing/ decreasing intervals of $f(x)$*
- *Determine Local Extrema*

المشتقة الأولى

04 Vertical Tangent Line — *For $x = c$ such that: $c \in domain\ f, c \notin domain\ f'$*
Check $\lim_{x \to c} f'(x)$ — المماسات الرأسية

05 Second Derivative Information
- *Determine where $f(x)$ is concave up/down*
- *Determine Inflection Points*

معلومات المشتقة الثانية

06 Horizontal Asymptotes — المماسات الأفقية

Determine the end behavior of $f(x)$
Check: $\lim_{x \to \infty} f(x)$ and $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

07 Intercepts — المقطعين x , y

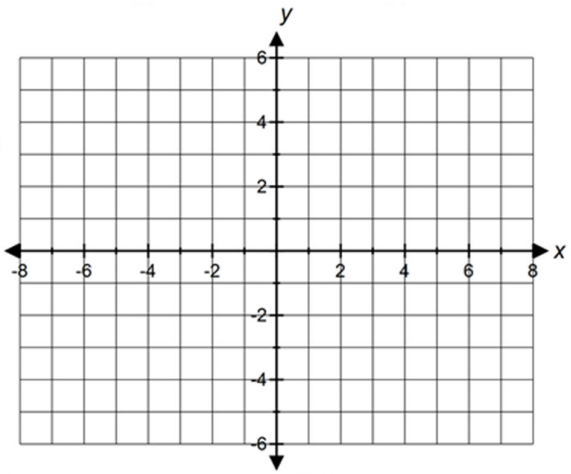
$x - intercept$: $for\ f(x) = 0\ find\ x$
$y - intercept$: $for\ x = 0\ find\ f(x)$

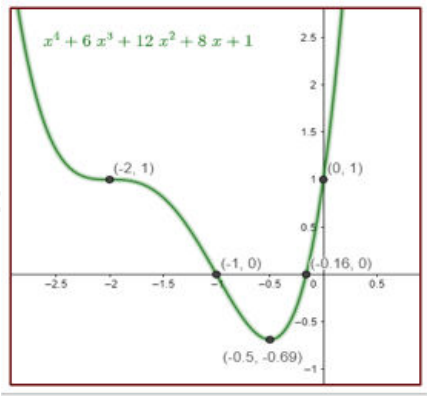
Solve directly, if you can't approximate using Newton's Method

Q1

Draw a graph of $f(x)$, showing all significant features. ارسم تمثيلا بيانيا لـ $f(x)$ يوضح جميع المميزات المهمة

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1,$$



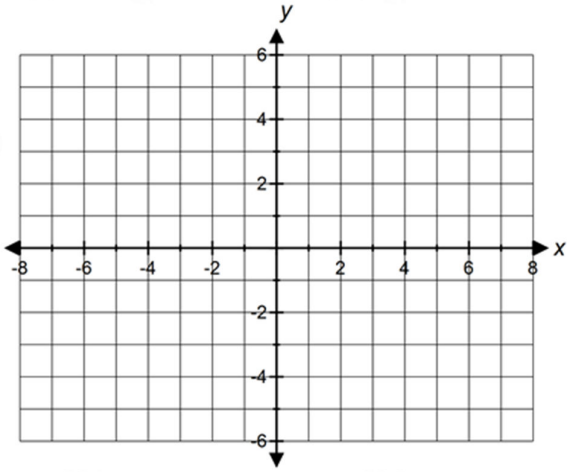


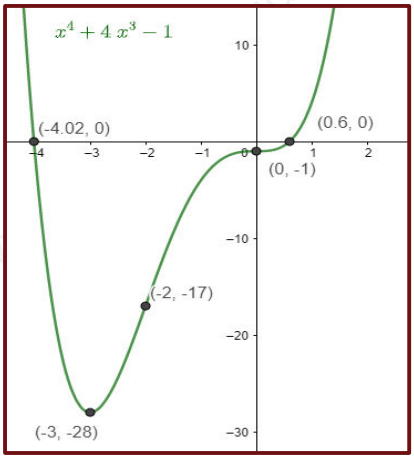
Q2

Draw a graph of $f(x)$, showing all significant features.

ارسم تمثيلا بيانيا لـ $f(x)$ يوضح جميع المميزات المهمة

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 1,$$



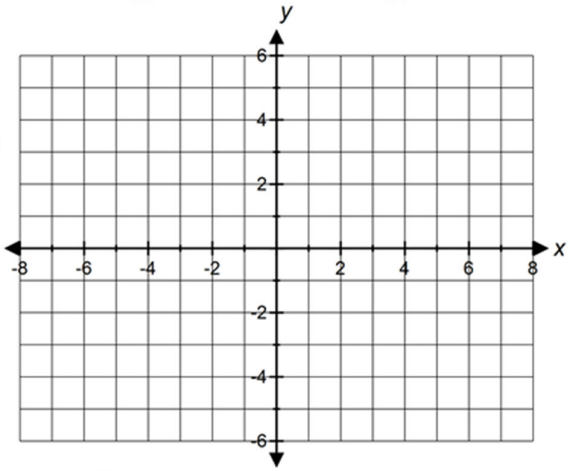


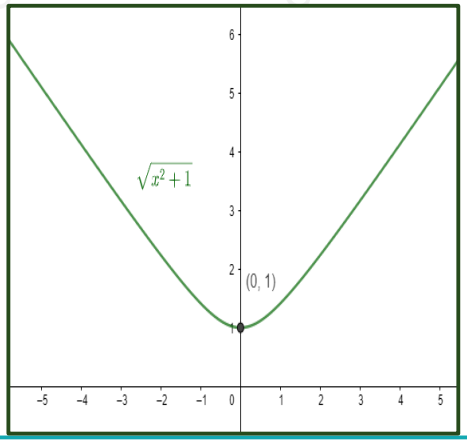
Q3

Draw a graph of $f(x)$, showing all significant features.

ارسم تمثيلا بيانيا لـ $f(x)$ يوضح جميع المميزات المهمة

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$



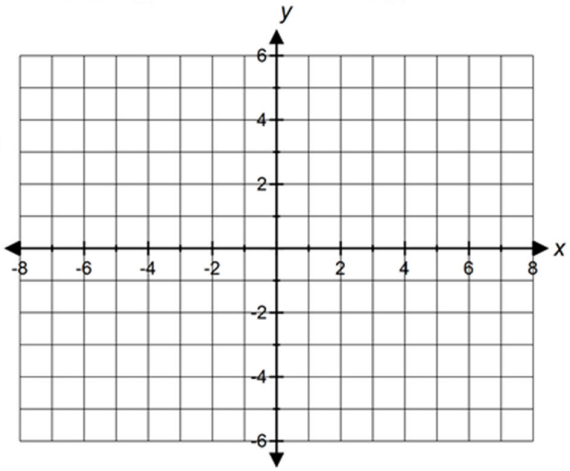


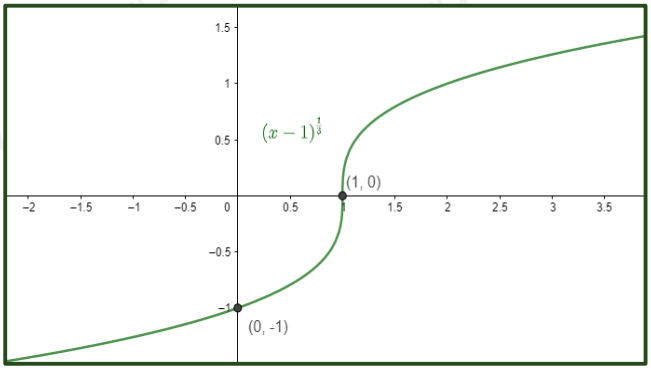
Q4

Draw a graph of $f(x)$, showing all significant features.

ارسم تمثيلا بيانيا لـ $f(x)$ يوضح جميع المميزات المهمة

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$



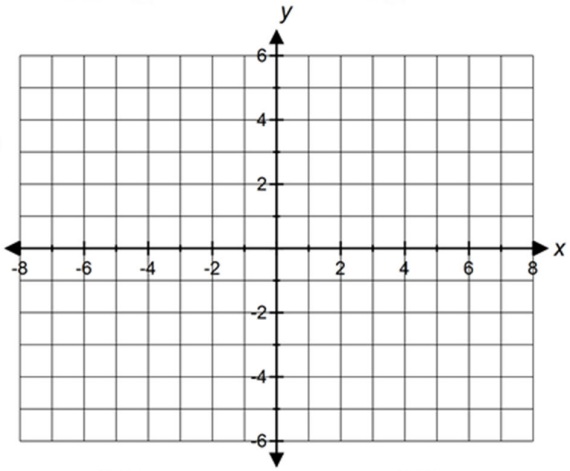


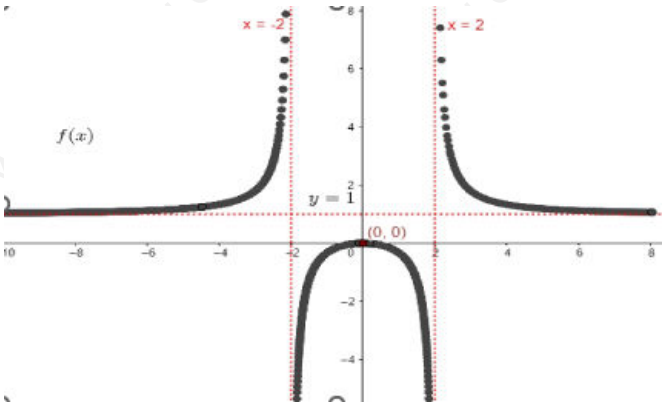
Q5

Draw a graph of $f(x)$, showing all significant features.

ارسم تمثيلا بيانيا لـ $f(x)$ يوضح جميع المميزات المهمة

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

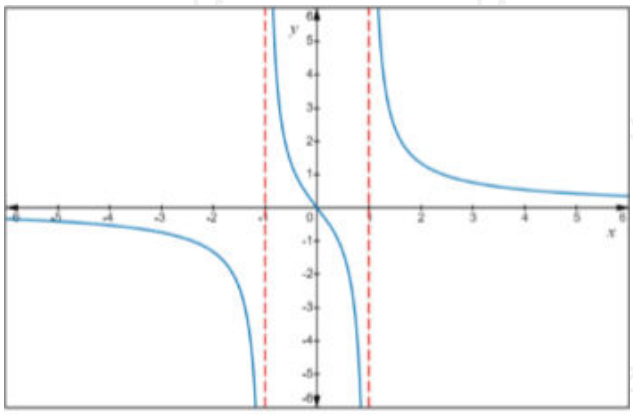


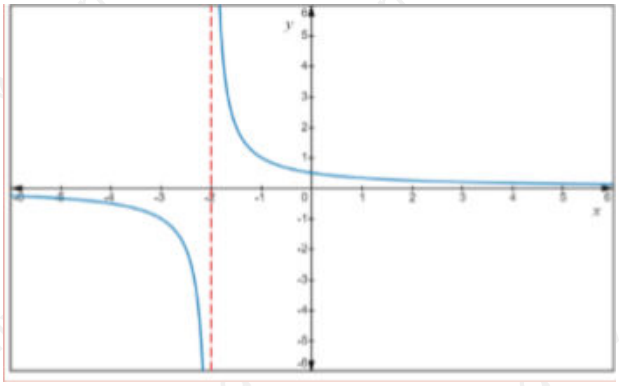


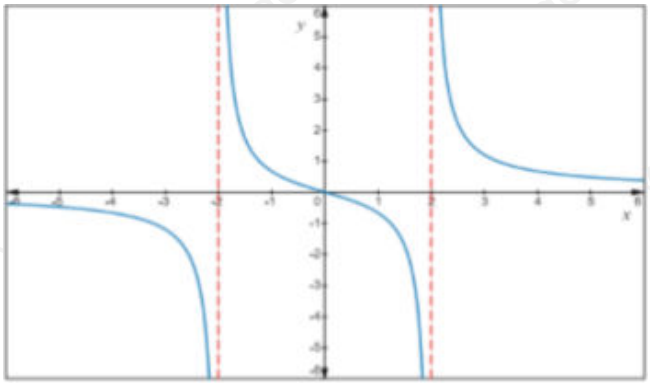
Q6

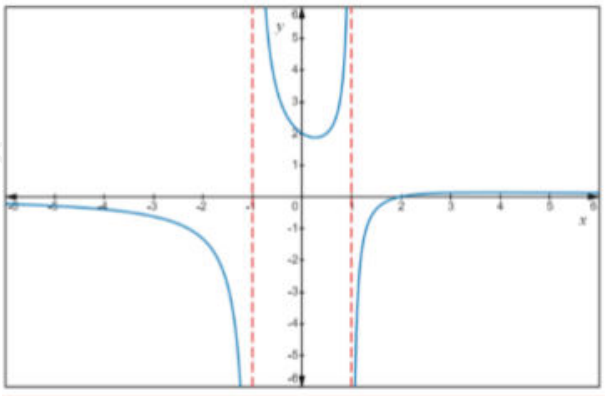
Determine the graph of the function $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$.

حدّد التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$.



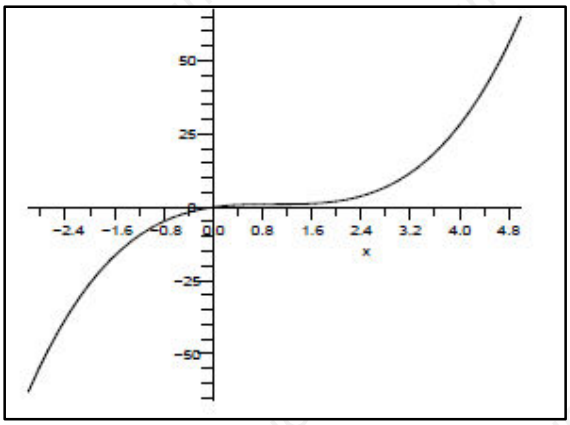


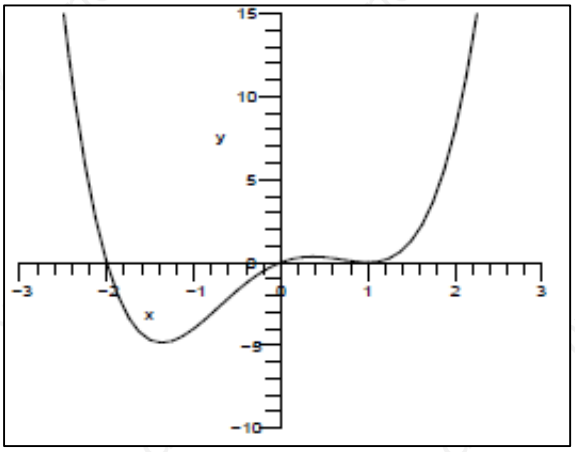


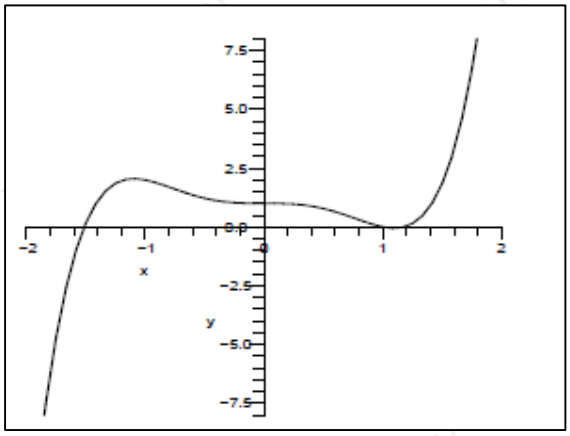


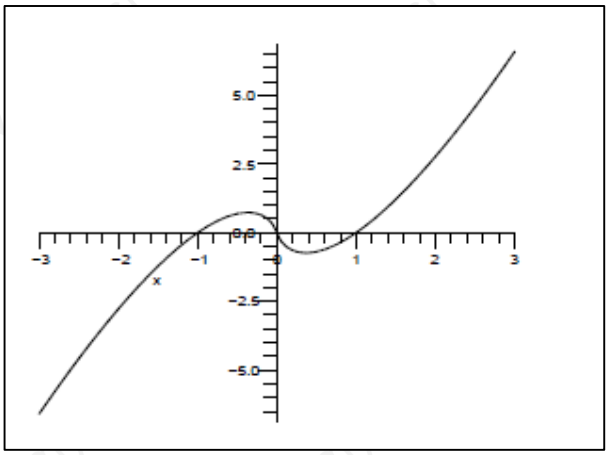
Q7 **Determine the graph of the function.** **حدد التمثيل البياني للدالة**

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$



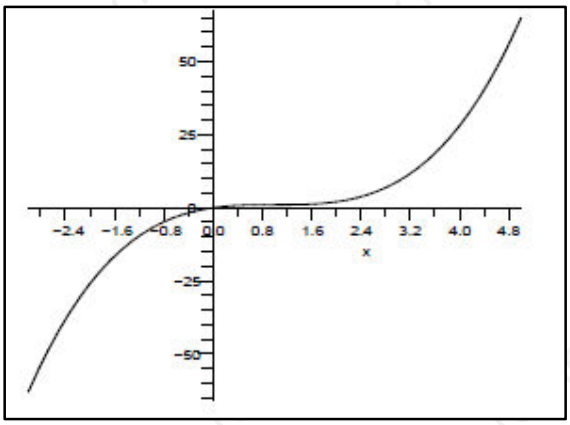


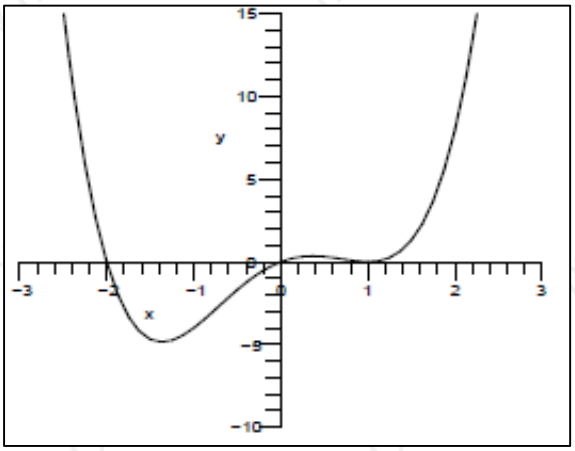


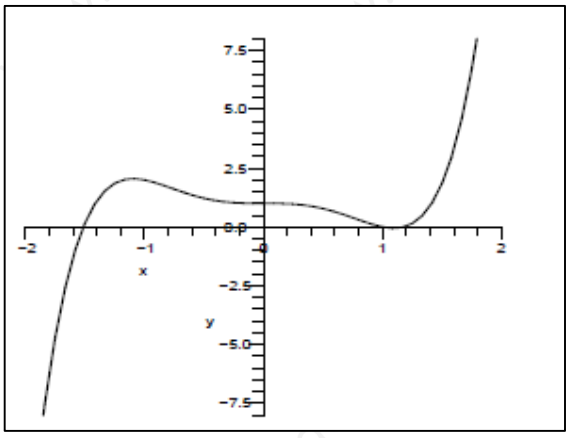


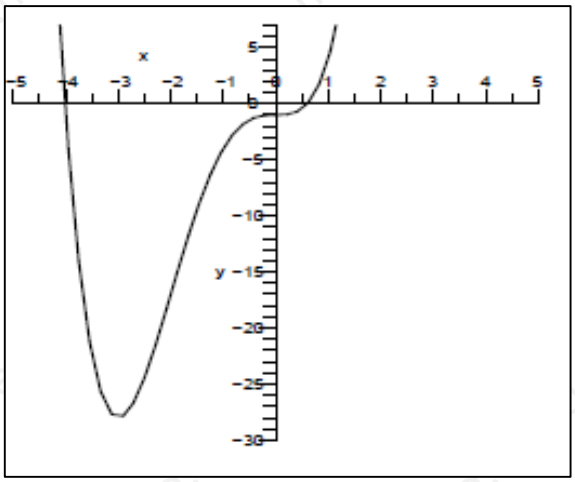
Q8 **Determine the graph of the function.** **حدد التمثيل البياني للدالة**

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$$



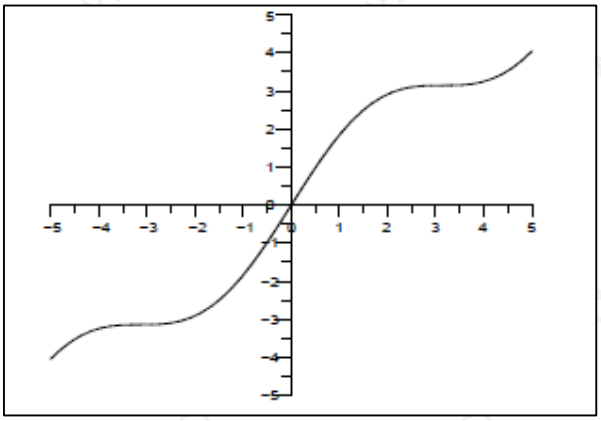


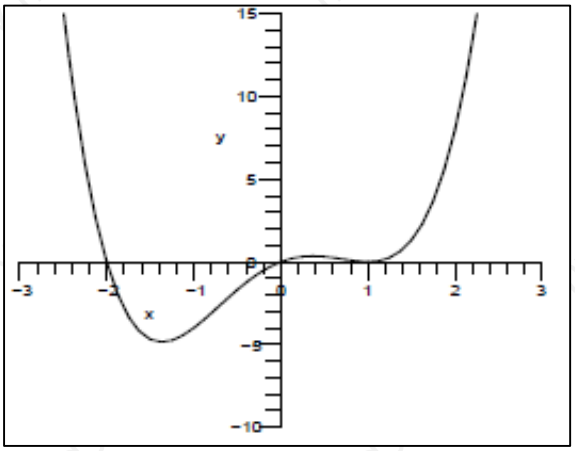


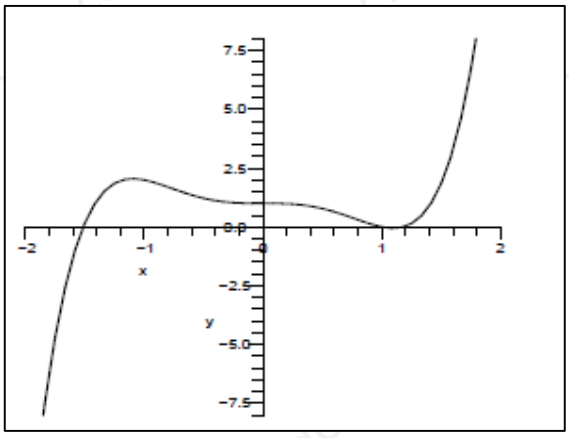


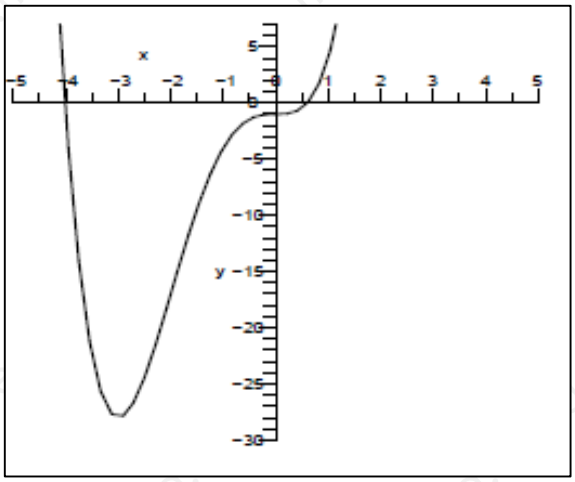
Q9 **Determine the graph of the function.** **حدد التمثيل البياني للدالة**

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$$



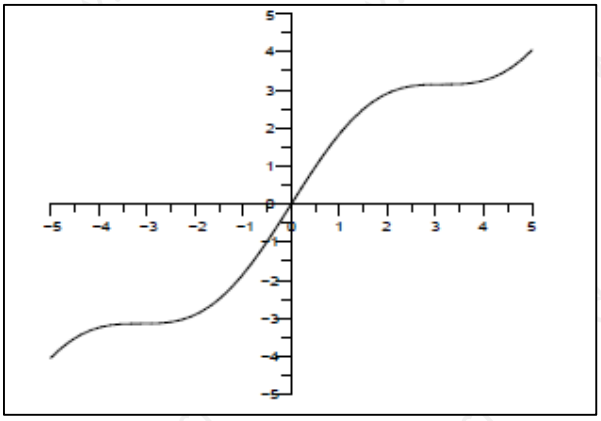


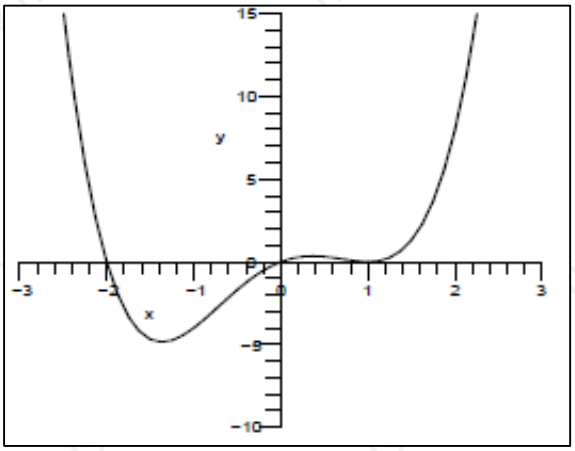


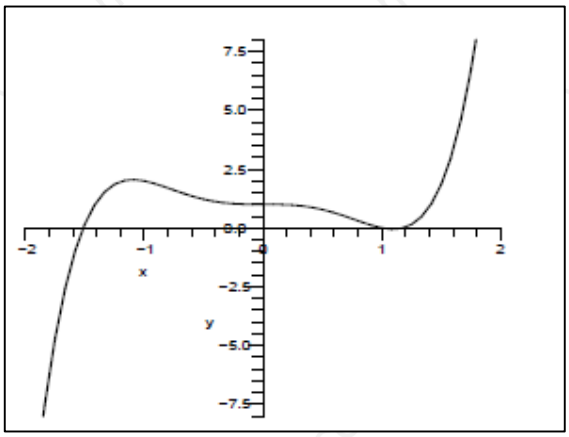


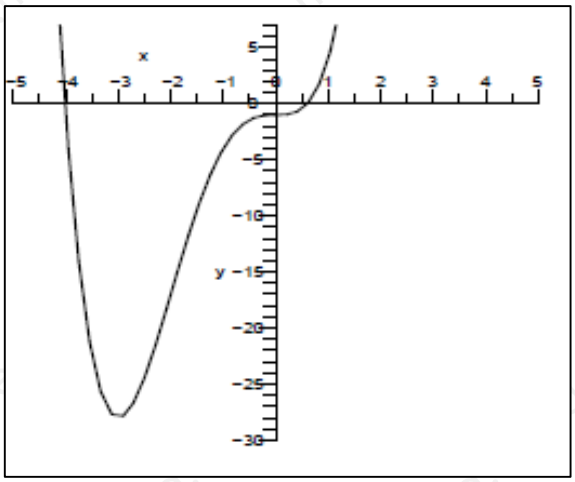
Q10 **Determine the graph of the function.** **حدد التمثيل البياني للدالة**

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$$



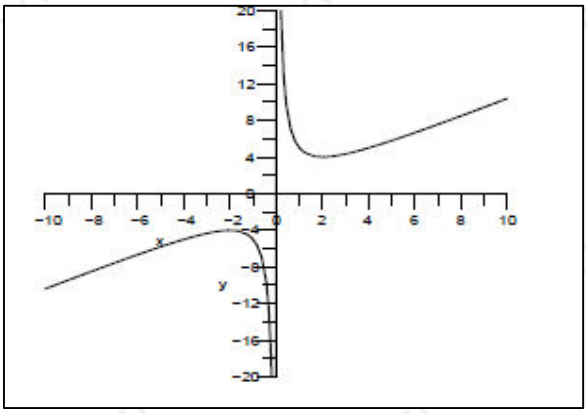


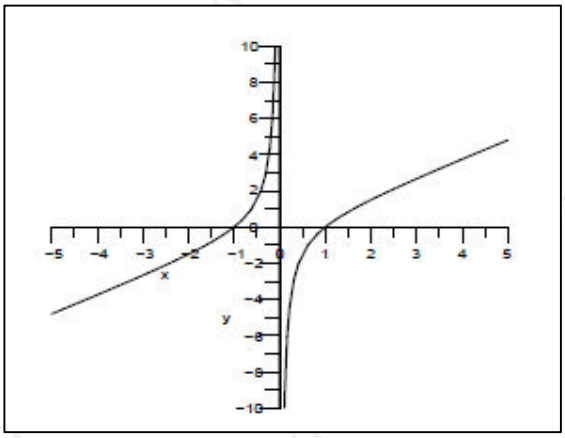


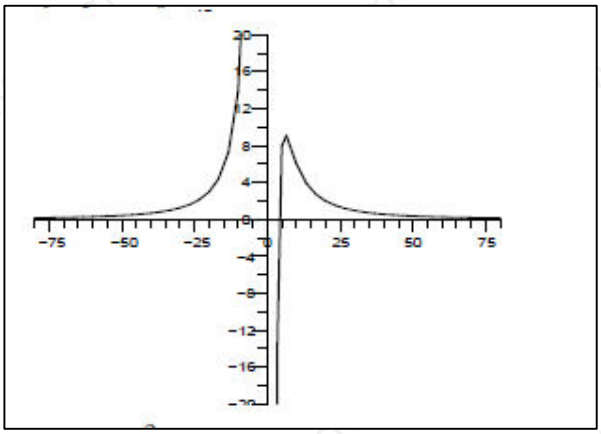


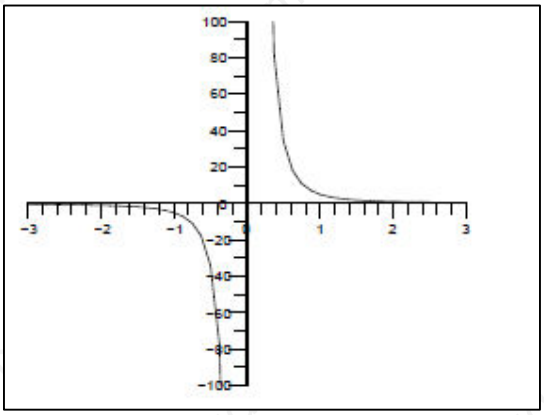
Q11 **Determine the graph of the function.** **حدد التمثيل البياني للدالة**

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$



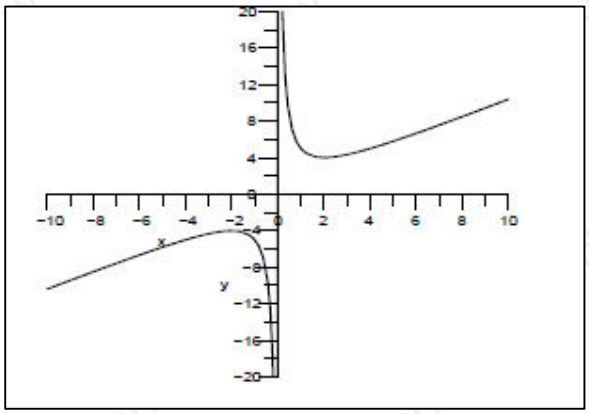


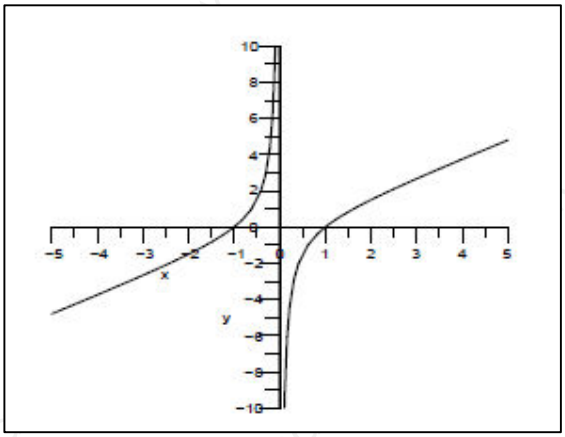


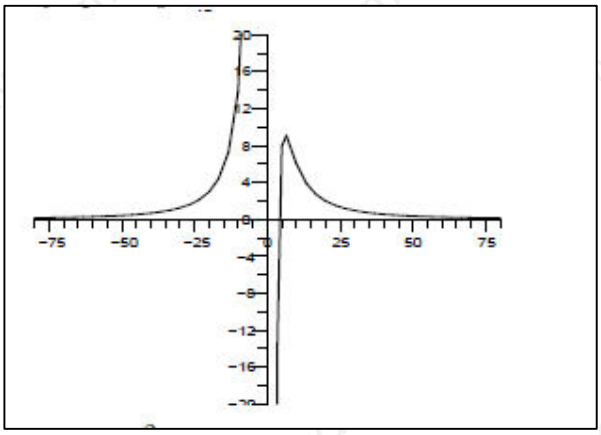


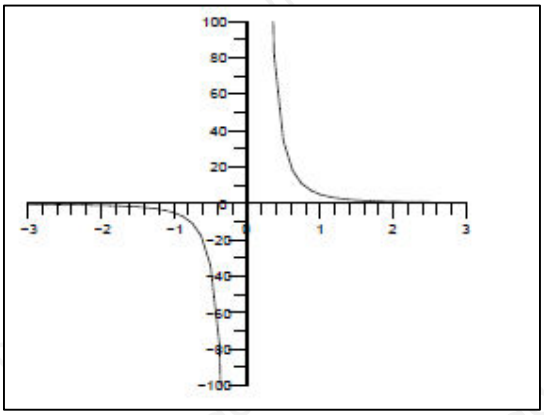
Q12 **Determine the graph of the function.** **حدد التمثيل البياني للدالة**

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$



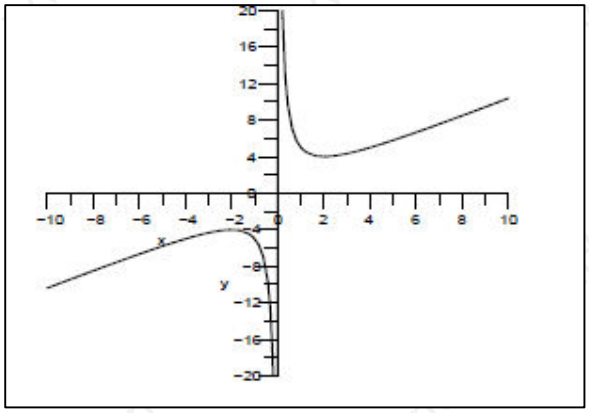


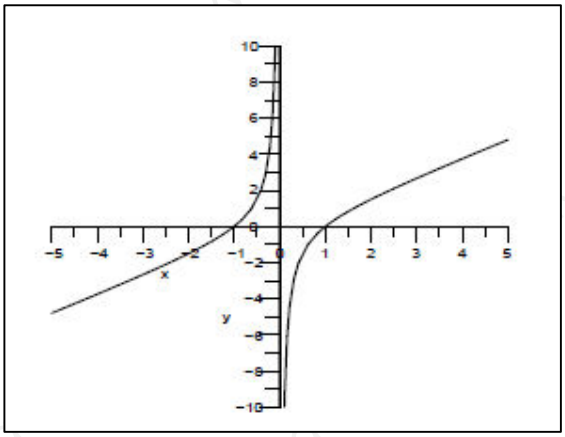


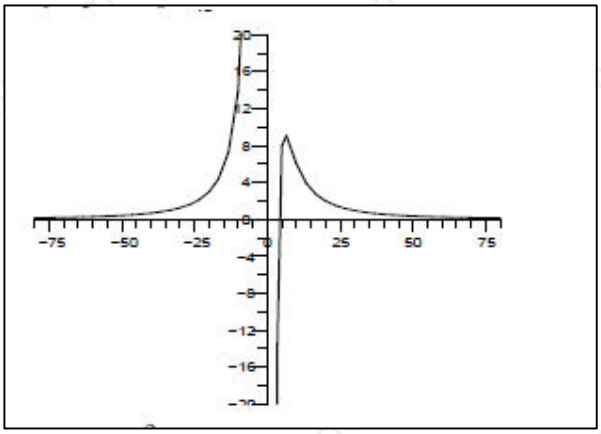


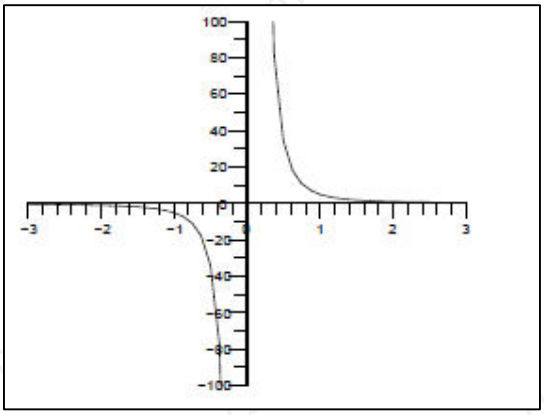
Q13 **Determine the graph of the function.** **حدد التمثيل البياني للدالة**

$$f(x) = \frac{x-4}{x^3}$$



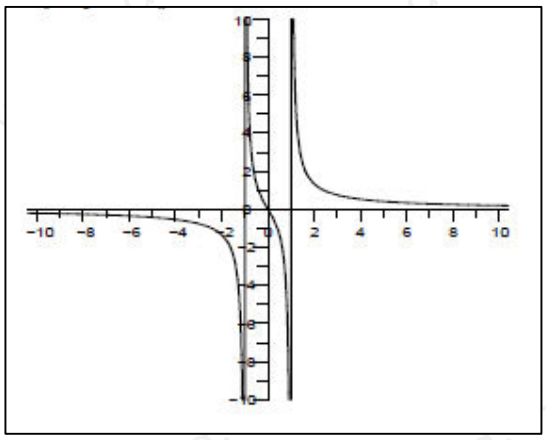


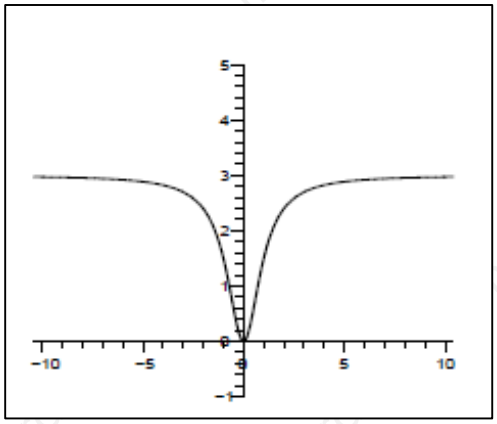


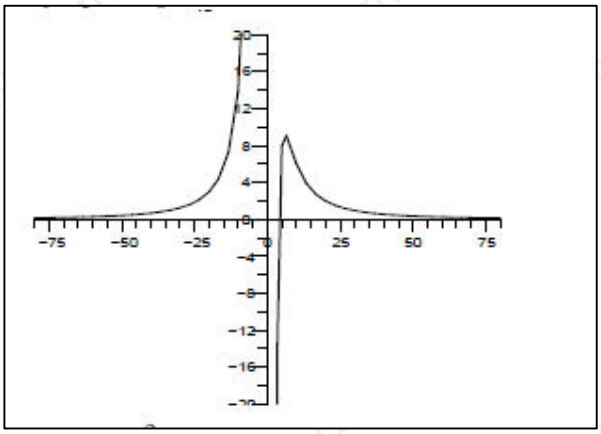


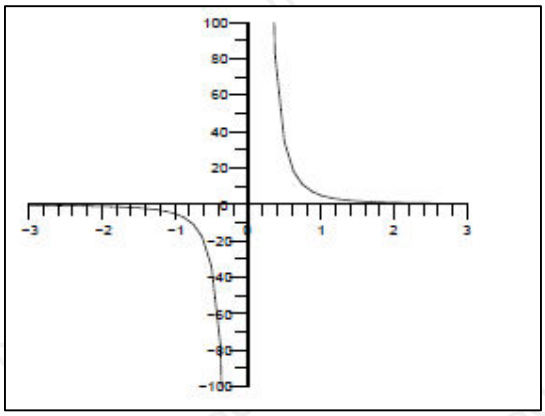
Q14 **Determine the graph of the function.** **حدد التمثيل البياني للدالة**

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$









4-7 Optimization — 4-7 القيم المثلى

Steps in Solving Optimization Problems — خطوات حل مسائل القيم المثلى

1-Understand the problem: What is known? Unknown? What do you want to find?

فهم المشكلة: ما هو المعروف؟ مجهول؟ ماذا تريد أن تجد؟

2-Draw a Diagram: to visualize and see if things make sense.

.ارسم مخططًا: لتصور ومعرفة ما إذا كانت الأمور منطقية

3-Introduce Notation: label and define variables. تسمية وتعريف المتغيرات

4-Write equations in terms of one variable: re-write everything into one variable.

اكتب المعادلات بدلالة متغير واحد: أعد كتابة كل شيء في متغير واحد

5-Find relationships between the variables to simplify into one

ابحث عن العلاقات بين المتغيرات لتبسيطها في متغير واحد

6-Use methods of sections 4.3 and 4.5 to find absolute maximum or minimum value of the function.

استخدم الطرق الموضحة في القسمين 4.5و4.3 للعثور على القيمة القصوى أو الدنيا المطلقة للدالة.

إستراتيجيةُ لحلِّ مسائلِ القيمِ العظمى والصغرى

Strategy for Solving Max–Min Problems

(1) **افهمِ المسألةَ**: اِقرأ المسألةَ بعنايةٍ. حدّدِ المعلوماتِ التي تحتاجُ إليها لحلِّ المسألةِ.

(2) **كوِّنْ نموذجًا رياضيًّا للمسألةِ**: أُرسمْ أشكالاً وضَعْ علاماتٍ على الأجزاءِ المهمّةِ في المسألةِ. ضَعْ متغيّرًا واحدًا يمثّلُ الكميّةَ المطلوبَ الحصولُ على قيمتِها العُظمى أو الصُغرى. باستخدامِ المتغيّرِ، اُكتبْ دالّةً بحيثُ تعطي قيمتُها القُصوى المعلوماتِ التي نبحثُ عنْها.

(3) **أوجِدْ مجالَ الدالّةِ**: حدّدْ قيمَ المتغيّرِ التي تكونُ معقولةً في المسألةِ. (ارسمِ الدالّةَ بيانيًّا إنْ أمكنَ).

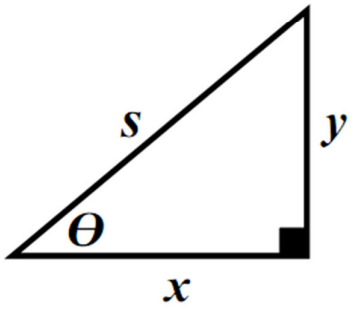
(4) **حدّدِ النقاطَ الحرجةَ والنقاطَ الطرفيّةَ**: أوجِدْ أينَ تكونُ المشتقّةُ صفريّةً أو أين لا يكونُ لها وجودٌ.

(5) **حُلَّ النموذجَ الرياضيَّ**: إذا لم تكنْ واثقًا بالنتيجةِ دعِّمْ أو أكّدْ صحّةَ حلِّكَ بطريقةٍ أخرى.

(6) **فسِّرِ الحلَّ**: تَرجِمْ نتيجتَكَ الرياضيّةَ إلى الموقفِ في المسألةِ ثمَّ قرّرْ ما إذا كانتِ النتيجةُ معقولةً.

قوانين المساحات والحجوم

1- المثلث القائم الزاوية



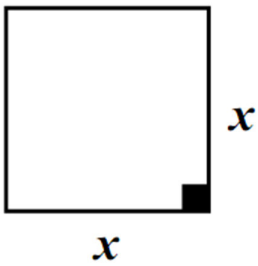
$S^2 = x^2 + y^2$ " نظرية فيثاغورث"

مساحة المثلث القائم الزاوية = $\frac{1}{2} x\ y$

= نصف حاصل ضرب ضلعي القائمة

محيط المثلث = $s + x + y$ " مجموع اطوال اضلاعه "

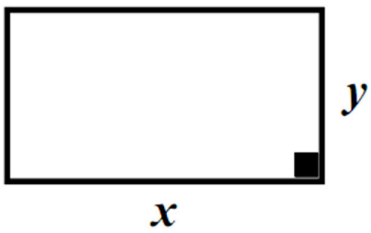
2- المـــــــــربع :



مساحـــة المربـــــــــع = $A = x^2$ " مربع طول ضلعة "

محيـــط المربـــــــــع = $4\ x$ " طول الضلع × 4 "

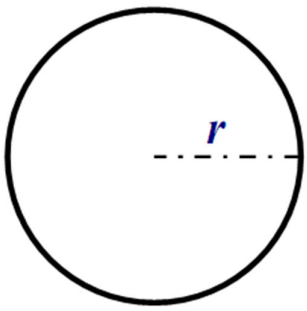
3- المستـــــــــطيل :



مساحة المستطيل = $A = x\ .\ y$ " الطول × العرض "

محيـــط المستطيل = $2\ (\ x + y\ )$ " 2 (الطول + العرض) "

4- الدائـــــــــرة :



مساحة الدائـــــرة = $\pi\ r^2$

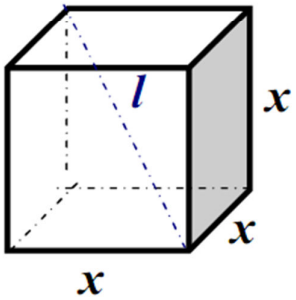
محيـــط الدائـــــــرة = $2\ \pi\ r$

قوانين المساحات والحجوم

5- المكعـــــــــب :

حجم المكعب= طوله × عرضه × ارتفاعه

حجم المكعب = x^3 " مكعب طول ضلعه "



المساحة الجانبية = 4 × (مربع طول الحرف)

المساحة الجانبية = $4x^2$

المساحة الكلية = 6 × (مربع طول الحرف)

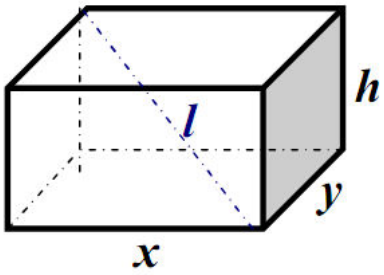
المساحة الكلية = $6x^2$

طول قطـــــــر المكعب = $l = \sqrt{3}\ x$

6- شبه المكعب " متوازي مستطيلات " :

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

حجم شبه المكعب = $x\ y\ h$



المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

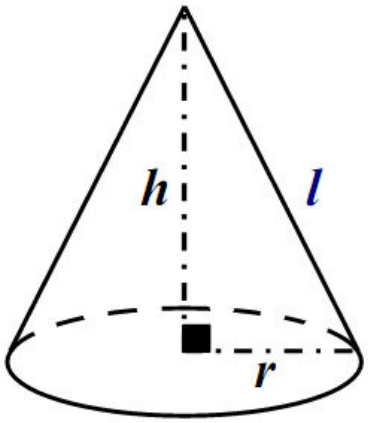
المساحة الجانبية = $2\ (x+y)\ h$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

المساحة الكلية = $2\ (x+y)\ h + 2\ x\ y$

طول قطر شبه المكعب = $l = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}$

7- المخـــروط الدائري القائـــم



حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

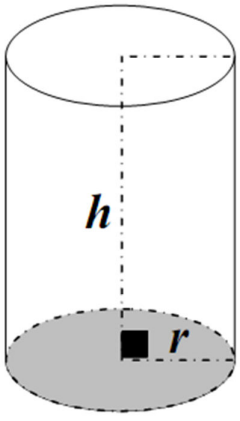
المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = نصف محيط قاعدته × طول راسمه

= $\pi r l$ حيث l طول راسم المخروط

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة للمخروط الدائري القائم

= $\pi r l + \pi r^2$

8- الاسطوانه الدائرية القائمة :



حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم الاسطوانة الدائرية القائمة = $\pi r^2 h$

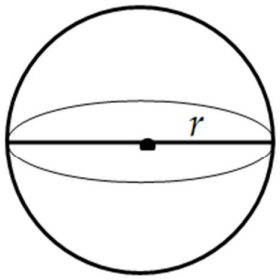
المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية = $2\pi r h$

المساحة الكلية للاسطوانة = المساحة الجانبية + مساحتي القاعدتين

المساحة الكلية = $2\pi r h + 2\pi r^2$

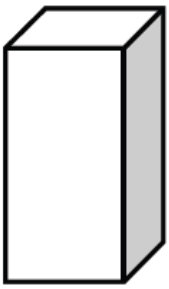
9- الكـــــــــــرة



حجم الكـــــــــرة $= \frac{4}{3} \pi r^3$

المساحـــــــــــة $= 4 \pi r^2$

10- المنشور القائم :

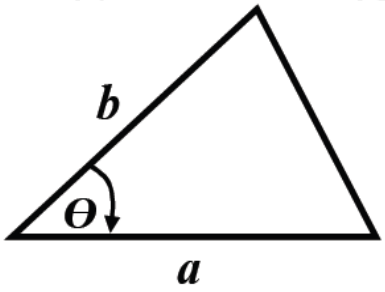


الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع (حسب القاعدة)

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع (حسب القاعدة)

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + (2 × مساحة القاعدة) (حسب القاعدة)

11- المثـــــــلث :



مساحة المثلث $= \frac{1}{2} a b \sin \theta$

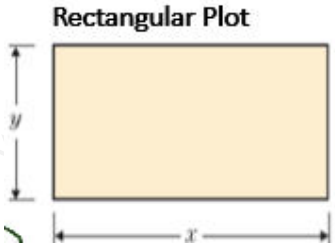
المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_1, y_1)$ **هي**

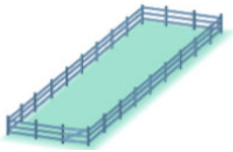
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Q1

You have 40 linear feet of fencing with which to enclose a rectangular space for a garden. Find the largest area that can be enclosed with this much fencing and the dimensions of the corresponding garden.

لديك سياج طوله 40 قدمًا لتحيط به حديقة مستطيلة الشكل. جد أكبر مساحة يمكن إحاطتها بهذا السياج وأبعاد الحديقة المناظرة لها.



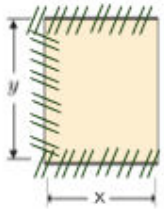


Q2

A three-sided fence is to be built next to a straight section of river, which forms the fourth side of a rectangular region. The enclosed area is to equal $1800\ ft^2$. Find the minimum perimeter and the dimensions of the corresponding enclosure.

يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار الجزء المستقيم من النهر الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة. المساحة المحاطة تساوي $1800\ ft^2$.جد أصغر قيمة ممكنة للمحيط المناظر لهذه المساحة.

Rectangular region

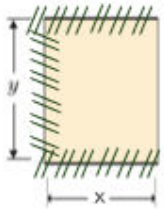


Q3

A three-sided fence is to be built next to a straight section of river, which forms the fourth side of a rectangular region. There is $96\ ft$ of fencing available. Find the maximum enclosed area and the dimensions of the corresponding enclosure.

يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار الجزء المستقيم من النهر الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة. يتوفر $96\ ft$ من السياج. جد القيمة العظمى للمساحة المحاطة بالسياج وأبعاد السياج المناظر لهذه المساحة.

Rectangular region



Q4

A two-open corral is to be built. The outline of corral forms two identical rectangles. If there is 120 ft of fencing available, what dimensions of the corral will maximize the enclosed area?

يجب بناء اسطبل مكون من حظيرتين. يشكل مخطط الإسطبل مستطيلين متطابقين متجاورين. إذا كان هناك 120 ft من السياج متوفر. فما هي الأبعاد التي سيضيفها الإسطبل إلى المساحة المحاطة بالسياج؟

Q5

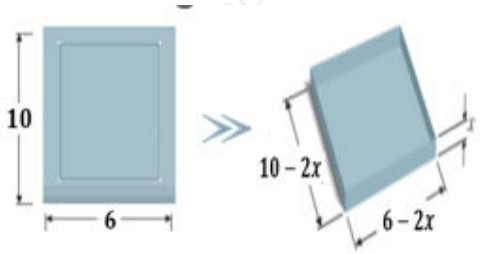
A showroom for a department store is to be rectangular with walls on three sides, 6 ft. door openings on the two facing sides and a 10 ft door opening on the remaining wall. The showroom is to have 800 ft^2 of floor space. what dimensions will minimize the length of wall used?

يجب أن تكون صالة عرض بمتجر متعدد الأقسام مستطيلة بثلاثة جدران في ثلاثة جوانب وفتحات باب 6 ft في الجانبين المتقابلين وفتحة باب 10 ft في الجدار المتبقي. يجب أن تكون مساحة أرضية صالة العرض 800 ft^2 . فما هي الأبعاد التي ستكون أصغر طول للجدار المستخدم؟

Q6

A box with no top is to be built by taking a $\boldsymbol{6in\text{-}by\text{-}10in}$ sheet of cardboard, cutting $\boldsymbol{x\text{-}in}$ **squares** out of each corner and folding up the sides. Find **the value of** $\boldsymbol{x}$ that **maximize the volume** of the box.

يجب بناء صندوق مفتوح من الأعلى بواسطة لوح من الورق المقوى أبعاده $\boldsymbol{6in - 10in}$ وذلك بقص مربعات قياس ضلعها $\boldsymbol{x - in}$ من كل زاوية وطي الجوانب. جد قيمة $\boldsymbol{x}$ التي تحقق القيمة العظمى لحجم الصندوق.



Q7

A box with no top is to be built by taking a $16in\text{-}by\text{-}12in$ sheet of cardboard, cutting $x\text{-}in$ **squares** out of each corner and folding up the sides. Find **the value of** x that **maximize the volume** of the box.

يجب بناء صندوق مفتوح من الأعلى بواسطة لوح من الورق المقوى أبعاده $16in - 12in$ وذلك بقص مربعات قياس ضلعها $x - in$ من كل زاوية وطي الجوانب. جد قيمة x التي تحقق القيمة العظمى لحجم الصندوق.

Q8

A **square** sheet of cardboard $\mathbf{18}\ \boldsymbol{in}$ is made into open box (there is no top), by cutting squares of equal size out of each corner and folding up the sides. **Find the dimensions** of the box with the **maximum volume**.

لوح مربع من الورق المقوى طول ضلعه $\mathbf{18}\ \boldsymbol{in}$ صنع منه صندوق مفتوح من الأعلى (بدون غطاء) بقطع مربعات متساوية من كل زاوية وطي الجوانب، جد أبعاد الصندوق الذي له قيمة عظمى للحجم .



Q9

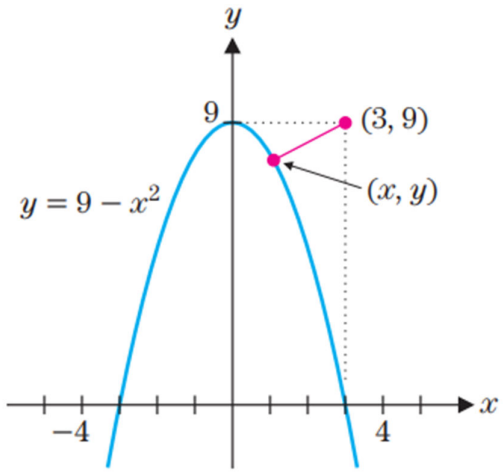
A box with no top is built by taking a $\boldsymbol{6\ in\ by\ 6\ in}$ piece of cardboard, cutting $x - in$ squares out of each corner and folding up the sides. The four $x - in$ squares are taped together to form a second box (with no top or bottom). Find the value of $x - in$ that maximizes the sum of the volumes of the boxes.

تم بناء صندوق مفتوح من الأعلى بأخذ قطعة من الورق المقوى مساحتها $\boldsymbol{6\ in}$ في $\boldsymbol{6\ in}$ وقص مربعات بطول $\boldsymbol{x - in}$ من كل زاوية وطي الجوانب. ثم تم لصق المربعات الأربعة لتشكل صندوقا ثانيا (مفتوح من الأعلى والأسفل). جد قيمة $\boldsymbol{x - in}$ التي تحقق القيمة العظمى لحجم الصندوقين؟

Q10

Find the point on the parabola $y = 9 - x^2$ closest to the point $(3, 9)$

جد النقطة على القطع المكافئ $y = 9 - x^2$ الأقرب للنقطة $(3, 9)$



Q11

Find the point on the parabola $y = x^2$ **closest** to the point $(0, 1)$

جد النقطة على القطع المكافئ $y = x^2$ الأقرب للنقطة $(0, 1)$

Q12

Find the point on the parabola $y = cosx$ closest to the point $(0, 0)$

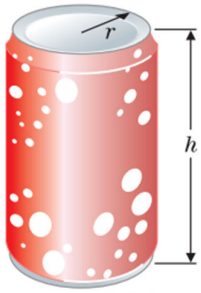
جد النقطة على القطع المكافئ $y = cosx$ الأقرب للنقطة $(0, 0)$

Q13

A soda can is to hold $12\ fl\ oz$. **Find the dimension** that will **minimize the amount of material** used in construction, assuming that the thickness of the material is uniform (the thickness of aluminum is the same everywhere)

تتسع علبة الصودا لـ $12\ fl\ oz$. جد أبعاد العلبة التي ستوفر القيمة الصغرى لكمية المواد المستخدمة في صنعها. على فرض أن سمك المادة واحد (أي سمك الألمنيوم واحد في أي مكان بالعبوة)

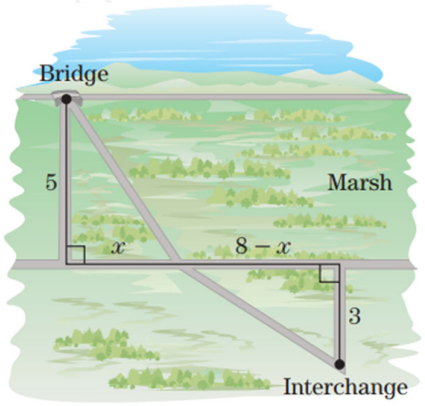
$using \quad 12\ fl\ oz \approx 1.80469\ in^3$ باستخدام



Q14

The state wants to build a new stretch of highway to link an existing bridge with a turnpike interchange, located **8 mi to the east** and **8 mi to the south** of the bridge. There is a **5 mi wide stretch of marshland** adjacent to the bridge that must be crossed. Given that the highway **cost AED 10 million per mile to build over the march** and only **AED 7 million per mile to build over dry land**, **how far to the east** of the bridge should the highway be when it crosses out the march.

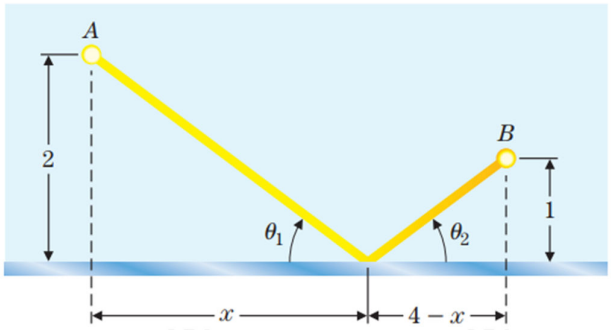
تريد مدينة بناء امتداد جديد لطريق سريع يربط الجسر الحالي بتقاطع لشارع رئيسي. يقع على بعد 8 mi من جهتي جنوب وشرق الجسر. وهناك امتداد بعرض 5 mi لمستنقعات مجاورة للجسر يجب عبورها. على فرض أن الطريق السريع يكلف 10 ملايين درهم إماراتي للميل للبناء فوق المستنقعات و7 ملايين درهم إماراتي للميل فوق الأرض الجافة. فما هي المسافة بين الطريق السريع وشرق الجسر عندما يعبر المستنقعات؟



Q15

Suppose that light reflects off a mirror to get from point **A** to point **B** as indicated in the figure. Assuming a constant velocity of light, we can minimize time by minimizing distance travelled. **Find the point** on the mirror that **minimizes the distance travelled**. Show that the **angles in the figure are equal.**

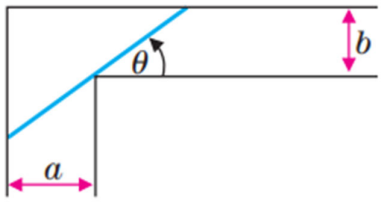
على فرض أن الضوء ينكسر عن مرآة للوصول من **A** النقطة إلى B كما هو مشار إليه في الشكل. بفرض ثبات سرعة الضوء. يمكننا إيجاد القيمة الصغرى للزمن من خلال إيجاد القيمة الصغرى للمسافة التي ينقلها الضوء. جد النقطة على المرآة التي تحقق القيمة الصغرى للمسافة التي ينتقلها الضوء. بين أن الزوايا في الشكل متساوية (زاوية الانحناء تساوي زاوية الانعكاس)



Q16

A hall of width $a = 5$ ft meets a hallway of width $b = 4$ ft at a right angle. Find the length of the longest ladder that could be carried around the corner.

مدخل بعرض $a = 5\ ft$ يلتقي مدخل بعرض $b = 4\ ft$ عند الزاوية القائمة. جد طول أطول سلم يمكن حمله عند الزاوية



Q17

A Norman window has the outline of a semicircle on top of a rectangle. Suppose there is $8 + \pi$ ft of wood trim available. Find the **dimensions of** the **rectangle** and the **semicircle** that will **maximize the area** of the window.

نافذة نورمندية على شكل نصف دائرة فوق مستطيل. على فرض أنه يتوفر $8 + \pi$ ft من الزخارف الخشبية. جد أبعاد المستطيل التي تحقق القيمة العظمى لمساحة النافذة.



Q18

Suppose a wire $2ft$ long is to be cut into pieces, each of which will be formed into a square. Find the size of each piece to minimize the total area of the two squares.

على فرض أن هناك سلكا بطول $\mathbf{2ft}$ يجب قصه إلى قطعتين ستشكل كل منهما مربعا. جد طول كل قطعة لتحقق قيمة صغرى لأجمالي مساحتي المربعين.

Q19

An advertisement consists of a rectangular printed region plus 1 in margins on the sides and 2 in margins at top and bottom. If the area of the printed region is to be 92 in^2, find the dimensions of printed region and overall advertisement that minimize the total area.

إعلان يتكون من منطقة مستطيلة مطبوعة بالإضافة إلى هوامش 1 in على الجانبين و 2 in في الأعلى والأسفل. فإذا كان لا بد أن تكون مساحة المنطقة المطبوعة 92 in^2 . جد أبعاد المنطقة المطبوعة وإجمالي الإعلان التي تحقق القيمة الصغرى للمساحة.

Q20

An advertisement consists of a rectangular printed region plus 1 in margins on the sides and 1.5 in margins at top and bottom. If the total area of the advertisement is to be 120 in^2, what the dimensions should the advertisement be to maximize the area of the printed region ?

إعلان يتكون من منطقة مستطيلة مطبوعة بالإضافة إلى هوامش 1 in على الجانبين و 1.5 in في الأعلى والأسفل. فإذا كان لا بد أن يكون إجمالي مساحة الإعلان 120 in^2 .ما هي الأبعاد التي ينبغي أن يكون عليها الإعلان لتحقق القيمة العظمى لمساحة المنطقة المطبوعة.

Q21

Suppose that group tickets to a concert are priced at $40\ AED$ per tickets are ordered but cost $1\ AED$ per tickets less for each extra ticket ordered, up to a maximum of 50 tickets. Find the number of tickets that maximizes the total cost of the tickets.

على فرض أن سعر مجموعة من تذاكر إلى حفل محدد عند $40\ AED$ للتذكرة عند طلب 20 تذكرة او اقل ويبتم خصم درهم عن كل تذكرة بعد طلب 20 تذكرة أو أكثر حتى 50 تذكرة كحد أقصى. جد عدد التذاكر التي تحقق قيمة عظمى لتكلفة التذاكر.

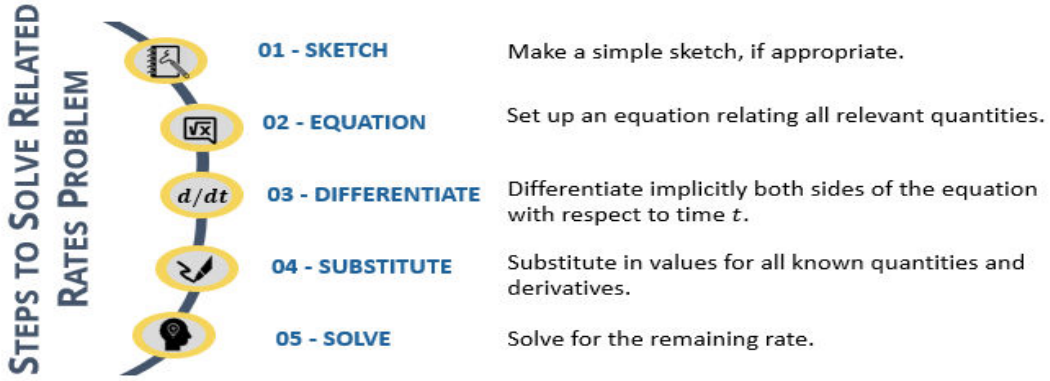
4-8 Related Rates
4-8 المعدلات المرتبطة

Steps in Solving Related Rates
خطوات حل مسائل المعدلات المرتبطة

Related Rates Problems

Equation relating two or more quantities that are all changing with time.

Use chain rule (with implicit differentiation with respect to time) to determine how different rates (derivatives with respect to time) are related.

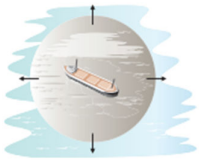


Q1

An oil tanker has an accident and oil pours out at the rate of 150 gallons per minute. Suppose that the oil spreads onto the water in a circle at a thickness of $\frac{1}{10}''$. Determine the rate at which the radius of the spill when the radius reaches $500\ ft$.

تعرضت ناقلة نفط لحادث وتسرب النفط بمعدل 150gl/min على فرض أن النفط ينتشر على الماء في دائرة بسمك $\frac{1}{10}\text{in}$. حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر إلى 500ft.

$using \quad 1\ ft^3 = 7.5\ \text{gl}\ ,1\ \text{ft} = 12\ \text{in}$ باستخدام

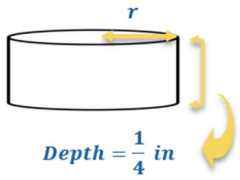


Q2

Oil spills out of a tanker at the rate of g gallons per minute. The oil spreads in a circle with a thickness of $\frac{1}{4}''$. Given that the radius of the spill is increasing at a rate of $0.6\ ft/min$, when the radius equals $100\ ft$, determine the value of g.

تعرضت ناقلة نفط لحادث وتسرب النفط بمعدل g برميل في الدقيقة ينتشر النفط في دائرة بسمك $\frac{1}{4}$in . على فرض أن نصف قطر التسرب يتزايد بمعدل $0.6\ ft/min$ حدد قيمة g عند وصول نصف القطر إلى 100ft.

$using \quad 1\ ft^3 = 7.5\ gl \ , 1\ ft = 12\ in$ باستخدام



Q3

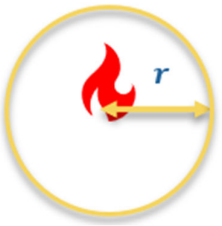
Assume that the infected area of an injury is circular. If the radius of infected area is $3mm$ and growing at a rate of $1mm/hr$,at what rate is the infected area increasing?

على فرض أن المنطقة المصابة بإصابة ما دائرية، فاذا كان نصف قطر المنطقة المصابة 3mm وتزداد بمعدل $1mm/hr$ فما معدل تزايد المنطقة المصابة

Q4

Suppose a forest fire spread in a circle with radius changing at rate of $5ft/min$. When the radius reaches $200ft$ at what rate is the area of the burning region is increasing?

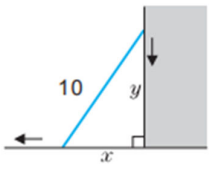
على فرض أن حريق غابات ينتشر في دائرة بنصف قطر يتغير بمعدل $5\text{ft}/min$ عندما يصل نصف القطر إلى 200ft فما معدل تزايد مساحة المنطقة المحترقة؟



Q5

A $10ft$ ladder leans against the side of a building. If the top of the ladder begins to slide down the wall at the rate of $2ft/sec$, how fast is the bottom of the ladder sliding away from the wall when the top of the ladder is $8\ ft$ off the ground?

يرتكز سلم بطول $10\ ft$ على جانبي المبنى. إذا كان الجزء العلوي من السلم يبدأ في الانزلاق إلى أسفل الجدار بمعدل $2\ ft/s$. فما سرعة انزلاق الجزء السفلي من السلم مبتعدا عن الحائط عندما يكون الجزء العلوي من السلم مرتفعا عن الأرض بـ $8\ ft$.



Q6

A $10ft$ ladder leans against the side of a building. If the bottom of the ladder is pulled away from the wall at the rate of $3ft/sec$, and the ladder remains in contact with the wall. Find the rate at which the top of the ladder is dropping when the bottom is $6\ ft$ from the wall.

يرتكز سلم بطول $10\ ft$ على جانبي المبنى. فإذا تم سحب الجزء السفلي بعيدا عن الجدار بمعدل $3\ ft/s$ وبقي السلم ملامسا للجدار ، جد معدل الذي يسقط به الجزء العلوي من السلم عندما يكون الجزء السفلي بعيدا بمقدار $6\ ft$ عن الجدار

Q7

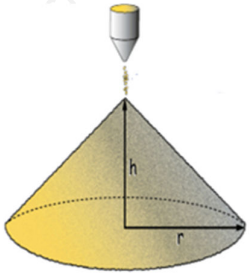
A $10ft$ ladder leans against the side of a building. If the bottom of the ladder is pulled away from the wall at the rate of $3ft/sec$, and the ladder remains in contact with the wall. Find the rate at which the angle between the ladder and the horizontal is changing when the bottom of the ladder is $6\ ft$ from the wall.

يرتكز سلم بطول $10\ ft$ على جانبي المبنى. فإذا تم سحب الجزء السفلي بعيدا عن الجدار بمعدل $3\ ft/s$ وبقي السلم ملامسا للجدار ، جد معدل تغير الزاوية بين السلم وسطح الأرض عندما يبعد اسفل السلم $6\ ft$ من الجدار

Q8

Sand is poured into **a conical pile** with the **height of the pile equaling the diameter** of the pile. If the sand is poured at a constant rate of $5m^3/s$, at what **rate is the height** of the pile **increasing** when the **height is** $2m$?

ينسكب الرمل في كومة مخروطية الشكل وارتفاعها يعادل قطرها. إذا انسكب الرمل بمعدل $5\ m^3/s$. فما معدل تزايد ارتفاع الكومة عندما يكون الارتفاع مترين؟

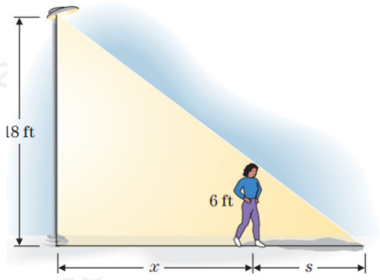


Height = Diameter

Q9

Suppose a $6ft$-**tall person** is $12ft$ **away** from $18ft$-**tall lamppost** if the person is **moving away from lamppost** at a **rate of** $2ft/sec$ at what **rate is the length of the shadow changing**?

على فرض أن شخصا ما يبلغ طوله $6ft$ يبعد $12ft$ من عمود إنارة ارتفاعه $18ft$.إذا كان الشخص يبتعد عن عمود الإنارة بمعدل $2ft/sec$.فما هو المعدل الذي يتغير به طول ظل الشخص مبتعدا عن العمود ؟



Q10

A car is travelling at $\mathbf{50}\boldsymbol{mph}$ due to south **at a point** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{mile}$ **norh** of an intersection. A police car is travelling $\mathbf{40}\boldsymbol{mph}$ due to west at **a point** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\ \boldsymbol{mile}$ **east** of the same intersection. **At that instant,** the radar in the police car measures **the rate** at which the **distance between the two cars** is changing. What does the radar gun register?

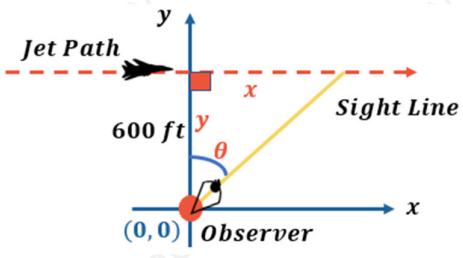
تسير سيارة بسرعة $\mathbf{50}\boldsymbol{mph}$ اتجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{mile}$ شمال التقاطع. وتسير سيارة شرطة بسرعة $\mathbf{40}\boldsymbol{mph}$ من نقطة تبعد $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\ \boldsymbol{mile}$ شرق التقاطع نفسه. في هذه اللحظة يقيس الرادار في سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير به المسافة بين السيارتين. فما الذي سيسجله الرادار؟



Q11

A spectator at an air show is trying to follow the flight of a jet. The jet follows a straight path in front of the observer at $\mathbf{540}\ \boldsymbol{mph}$. At its closest approach, the jet pass $\mathbf{600}\ \boldsymbol{ft}$ in front of the person. Find **the maximum rate of change of the angle** between the **spectator's line of sight and a line perpendicular to the flight path**, as the jet flies by.

يحاول مراقب عرض جوي تتبع رحلة لطائرة نفاثة. تسير الطائرة النفاثة في خط مستقيم أمام المراقب بسرعة $\mathbf{540}\ \boldsymbol{mph}$. وعند أقرب نقطة لها. تمر الطائرة النفاثة أمام المراقب على بعد $\mathbf{600}\ \boldsymbol{ft}$ جد معدل تغير الزاوية بين خط نظر المراقب والخط العمودي على مسار الطيران. عند مرور الطائرة النفاثة به.



Q12

A baseball player stands $\mathbf{2\ ft}$ **from home plate** and watches a pitch fly by. $\boldsymbol{x}$ is the distance **from the ball to home plate** and $\boldsymbol{\theta}$ is the **angle indicating** the direction of **player's gaze**: Find:

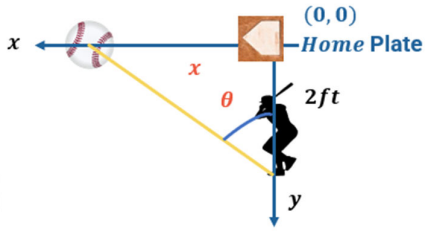
a) The rate $\boldsymbol{\theta'}$ at which his eye must move to watch a fast ball with $\boldsymbol{x'(t) = -130\ ft/s}$ as it crosses home plate at

b) human can maintain focus only when $\boldsymbol{\theta' \leq 3\ rad/s}$. Find the **fastest pitch** that you could watch cross home plate.

يبعد لاعب البيسبول حوالي $\mathbf{2\ ft}$ من القاعدة الرئيسية وشاهد الكرة تمر سريعا. $\boldsymbol{x}$ هي المسافة من الكرة إلى القاعدة الرئيسية و $\boldsymbol{\theta}$ هي الزاوية التي تحدد اتجاه نظر اللاعب

1)جد المعدل $\boldsymbol{\theta'}$ الذي تتحرك به عينيه لمشاهدة رمية الكرة بنحو $\boldsymbol{x'(t) = -130\ ft/s}$ حيث تمر إلى القاعدة الرئيسية عند $\boldsymbol{x = 0}$.

2)يمكن أن يحافظ الإنسان على تركيزه فقط عندما $\boldsymbol{\theta' \leq 3\ rad/s}$ جد أسرع رمية كرة يمكنك مشاهدتها فعليا إلى القاعدة الرئيسة



Q13

Suppose that the **average yearly cost** per item **for producing x items** of a business product is $\overline{C}(x) = 12 + \frac{94}{x}$. The three most recent yearly production figures are given in the table below. Estimate the **value of** $x'(2)$ and the **current (year 2) rate of change of the average cost**.

على فرض أن متوسط التكلفة السنوية لكل عنصر لإنتاج العناصر x من المنتجات التجارية هو $\overline{C}(x) = 12 + \frac{94}{x}$. تتضح أعداد منتجاتها السنوية في الثلاث سنوات الأخيرة في الجدول التالي .

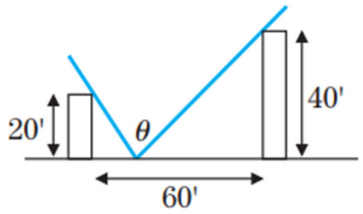
قدر قيمة $x'(2)$ ومعدل نغير متوسط التكلفة في العام الحالي (عامين)

Year	0	1	2
Prod. (x)	8.2	8.8	9.4

Q14

Two buildings of height $20\ ft$ and $40\ ft$, respectively, are $60\ ft$ apart, Suppose that the intensity of light at a point between the buildings is proprtional to the angle θ in the figure .If a person is moving from right to left at $4\ ft/s$, at what rate is θ changing when the person is exactly halfway between the two buildings? Find the location at which the angle θ is maximum ?

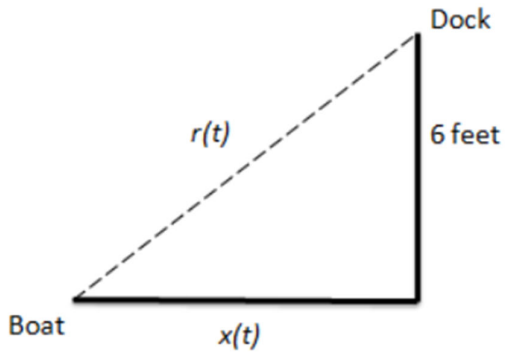
مبنيان ارتفاعهما $20\ ft$ و $40\ ft$ على التوالي. والمسافة بينهما $60\ ft$ على فرض أن شدة الضوء في نقطة معينة بين المبنيين تتناسب طرديا مع الزاوية θ في الشكل. إذا تحرك شخص ما من اليمين إلى اليسار بمعدل $4\ ft/s$ فما معدل تغير θ عندما يكون الشخص في منتصف المسافة بين المبنيين بالضبط؟ جد الموقع الذي يكون قياس الزاوية θ أكبر ما يمكن؟



Q15

A dock is $6ft$ above water. Suppose you stand on the edge of the dock and pull a rope attached to a boat at the constant rate of $2ft/sec$. Assume that the boat remains at water level. At what speed is the boat approaching the dock when it is $20ft$ from the dock?

يرتفع حوض مائي $6ft$ عن منسوب المياه. على فرض أنك تقف على حافة الحوض وتسحب حبلا متصلا بمركب بمعدل $2ft/sec$ ثابت وأن المركب لا تزال على مستوى المياه. فما هي سرعة اقتراب المركب من الحوض عندما يبعد $20ft$ من الحوض.



4-9 Rates of Change in Economics and Sciences — 4-9 معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

Introduction

Total Cost Function of producing x items: $C(x)$ — *إجمالي التكلفة لـ x من الوحدات:*

Marginal Cost : $C'(x)$ — *التكلفة الحدية:*

Marginal Cost at $x = n$ *:* $C'(n)$ — *التكلفة الحدية عند* $x = n$ *:*

actual Cost at $x = n$ *:* $C(n) - C(n-1)$ — *التكلفة الفعلية عند* $x = n$ *:*

Average Cost : $\overline{C}(n) = \frac{C(x)}{x}$ — *متوسط التكلفة :*

Q1

Suppose that $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$ is the total cost (in AED) for a company to produce x units of a certain product. Copmute the marginal cost at $x = 100$ and compare this to the actual cost of producing the 100th unit.

على فرض أن $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$ هو إجمالي التكلفة (بالدرهم) لإنتاج x وحدات، اوجد قيمة التكلفة الحدية عند $x = 100$ وقارنها بالتكلفة الفعلية لإنتاج 100 وحدة.

Q2

If the cost of manufacturing x items is $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$ (in AED), find the marginal cost function and compare the marginal cost at $x = 50$ with the actual cost of manufacturing the 50th item.

إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$ جد دالة التكلفة الحدية وقارن بين التكلفة الحدية بمعدل $x = 50$ والتكلفة الفعلية لـ 50 منتجا.

Q3

If the cost of manufacturing x items is

$C(x) = x^4 + 14x^2 + 60x + 35$ (in AED), find the marginal cost function and compare the marginal cost at $x = 50$ with the actual cost of manufacturing the 50th item.

إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي

$C(x) = x^4 + 14x^2 + 60x + 35$ جد دالة التكلفة الحدية
وقارن بين التكلفة الحدية بمعدل $x = 50$ والتكلفة الفعلية لـ 50 منتجا.

Q4

If the cost of manufacturing x items is

$C(x) = x^3 + 11x^2 + 40x + 10$ (in AED), find the marginal cost function and compare the marginal cost at $x = 100$ with the actual cost of manufacturing the 100th item.

إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي

$C(x) = x^3 + 11x^2 + 40x + 10$ جد دالة التكلفة الحدية
وقارن بين التكلفة الحدية بمعدل $x = 100$ والتكلفة الفعلية لـ 100 منتجا.

Q5

Suppose that $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$ is the total cost (in dollars) for a company to produce x units of a certain product. Find the production level x that minimize

على فرض أن $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$ هو إجمالي التكلفة (بالدرهم) لشركة معينة تنتج x وحدة من منتجات معينة. فجد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

Q6

Suppose that $C(x) = 0.1x^2 + 3x + 2000$ is the total cost (in dollars) for a company to produce x units of a certain product. Find the production level x that minimize

على فرض أن $C(x) = 0.1x^2 + 3x + 2000$ هو إجمالي التكلفة (بالدرهم) لشركة معينة تنتج x وحدة من منتجات معينة. فجد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

Q7

Suppose that $C(x) = \sqrt{x^3 + 800}$ is the total cost (in dollars) for a company to produce x units of a certain product. Find the production level x that minimize the

على فرض أن $C(x) = \sqrt{x^3 + 800}$ هو إجمالي التكلفة (بالدرهم) لشركة معينة تنتج x وحدة من منتجات معينة. فجد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

Q8

Find the production level that will minimize the average cost.

$$C(x) = 10e^{0.02x}$$

على فرض أن

$$C(x) = 10e^{0.02x}$$

هو إجمالي التكلفة (بالدرهم) لشركة معينة تنتج x وحدة من منتجات معينة. فجد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

Q9

Let $R(x)$ be the revenue and $C(x)$ be the cost from manufacturing x items. **PROFET** is defined as

$$\boldsymbol{P(x) = R(x) - C(x)}$$

Find the maximum profit if $R(x) = 10x - 0.001\,x^2$ and $C(x) = 2x + 500$

لتكن $R(x)$ هي الإيرادات و $C(x)$ هي تكلفة تصنيع x منتج. تعرف الأرباح بأنها $\boldsymbol{P(x) = R(x) - C(x)}$

جد القيمة العظمى للأرباح إذا كانت

$R(x) = 10x - 0.001\,x^2$ دراهم و

$C(x) = 2x + 500$ دراهم

Elasticity of Demand

$$E = \frac{p}{f(p)} f'(p)$$

مرونة الطلب

Q10

Suppose that $f(p) = 400(20 - p)$ is the demand for an item at price p (in dirhams) with $p < 20$

a) Find the elasticity of demand.

b) Find the range of prices for which $E < -1$. Compare this to the range of prices for which revenue is a decreasing function of p.

على فرض أن $f(p) = 400(20 - p)$ هو *طلب منتج معين* *بسعر* p (بالدراهم) بـ $p < 20$

1) جد مرونة الطلب

2) جد مدى الأسعار التي تجعل $E < -1$. قارن مدى الأسعار هذا الذي تكون فيه الإيرادات دالة متناقصة لـ p

Q11

Suppose that $f(p) = 200(30 - p)$ is the demand.

is the demand for an item at price p (in dirhams) with $p < 30$

a) Find the elasticity of demand.

a) Find the range of prices for which $E < -1$.

على فرض أن $f(p) = 200(30 - p)$ هو طلب منتج معين بسعر p (بالدراهم) بـ $p < 30$

1) جد مرونة الطلب

2) جد مدى الأسعار التي تجعل $E < -1$.

Rate of Chemical Reactions

$$x'(t) = rx(t)[1 - x(t)],$$
where $r > 0$ *is a constant.*

سرعة التفاعل الكيميائي

Q12

If the concentration of a chemical changes according to the equation

$$x'(t) = 2x(t)[4 - x(t)],$$

1)Find the Limiting concentration.

2)Find the concentration $x'(t)$ for which the reaction rate is maximum.

إذا كان تركيز التغير الكيميائي وفقا للمعادلة

$$x'(t) = 2x(t)[4 - x(t)]$$

1)جد حدود التركيز.

2)جد التركيز $x'(t)$ الذي تصل فيه سرعة التفاعل إلى القيمة

Linear Density:

$$\rho(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{[f(x) - f(x_1)]}{x - x_1} = f'(x_1)$$

الكثافة الخطية

$$\rho(x) = f'(x)$$

Q13

Suppose that the mass of the first x meter of a thin rod is given by $f(x) = \sqrt{2x}$. Compute the linear density at $x = 2$ and $x = 8$ and compare the densities at the two points.

على فرض أن كثافة الأول x من القضيب الرقيق تعطى بالدالة $f(x) = \sqrt{2x}$ فاحسب الكثافة الخطية عند $x = 2$ و $x = 8$ وقارن الكثافتين عند النقطتين.

Electrical Current in a Wire

$$I(t) = Q'(t)$$

التيار الكهربائي في السلك

Q14

Suppose that the charge in an electrical circuit is $Q(t) = e^{-2t}(cos3t - 2sin3t)$ coulombs. Find the current.

على فرض أن الشحنة في الدائرة الكهربائية $Q(t) = e^{-2t}(cos3t - 2sin3t)$ كولوم. جد التيار.

Q15

Suppose that the charge in an electrical circuit is $Q(t) = e^{t}(3cos2t + sin2t)$ coulombs. Find the current.

على فرض أن الشحنة في الدائرة الكهربائية $Q(t) = e^{t}(3cos2t + sin2t)$ كولوم. جد التيار.

Rate of Population Growth

$$p'(t) = rp(t)[1 - p(t)]$$

معدل النمو السكاني

Q16

Suppose that a population grows according to the equation.

$p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$ **(Logistic growth with** $r = 2$**). Find the population for which the growth rate is a maximum.**

على فرض أن النمو السكاني يعطى بالمعادلة

$p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$ (المعادلة اللوجستية باستخدام $r = 2$) جد التعداد السكاني الذي يكون فيه معدل النمو هو القيمة العظمى.

Q17

Suppose that a population grows according to the equation.

$p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)]$. **Find the population for which the growth rate is a maximum.**

على فرض أن النمو السكاني يعطى بالمعادلة

$p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)]$. جد التعداد السكاني الذي يكون فيه معدل النمو هو القيمة العظمى.

Manasra Academy

Unit 5

الوحدة 5

+971 55 857 0980
https://www.manasra.academy
تقديم واعداد الأستاذ: محمود مناصرة

Derivative Rules

قواعد الاشتقاق

Basic Derivatives Rules

Constant Rule: $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Constant Multiple Rule: $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

Power Rule: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Sum Rule: $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

Difference Rule: $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

Product Rule: $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

Quotient Rule: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Chain Rule: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

Exponential Functions

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right) = e^{g(x)} g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(a^{g(x)}\right) = \ln(a)\, a^{g(x)}\, g'(x)$$

Logarithmic Functions

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$\frac{d}{dx}\ln(g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}, x > 0$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)\ln a}$$

Trigonometric Functions

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

Inverse Trigonometric Functions

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x \neq \pm 1, 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, x \neq \pm 1, 0$$

5.1 Antiderivatives

5.1 عكس المشتقة والدالة الأصلية

If $F(x)$ is any antiderivative of $f(x)$ and c is any constant, then.

$$\frac{d}{dx}[F(x)+c] = F'(x) + 0 = f(x)$$

Thus, $F(x)+c$ is also antiderivative of $f(x)$

إذا كانت $F(x)$ أي دالة أصلية لـ $f(x)$ وكان c أي عدد ثابت فإن

$$\frac{d}{dx}[F(x)+c] = F'(x) + 0 = f(x)$$

لذلك $F(x)+c$ هي أيضا دالة أصلية لـ $f(x)$

Q1 Find an antiderivative of $f(x) = 2x$

جد دالة أصلية لـ $f(x) = 2x$

Q2 Find an antiderivative of $f(x) = 3x^2$

جد دالة أصلية لـ $f(x) = 3x^2$

Q3 Find an antiderivative of $f(x) = x^3$

جد دالة أصلية لـ $f(x) = x^3$

THEROM 1.1

Suppose that F and G are both antiderivative of $f(x)$ on an interval I .Then

$G(x) = F(x) + c$, For some constant c

النظرية 1.1

على فرض أن G و F هما دالتان أصليتان لـ $f(x)$ على الفترة I إذا $G(x) = F(x) + c$

لكل عدد ثابت c .

DEFINITION 1.1

Let F be any antiderivative of $f(x)$ on an interval I .The indefinite integral of $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \ ,$$

where c the constant of integration.

التعريف 1.1

لتكن F دالة أصلية لـ $f(x)$ على الفترة I

التكامل غير المحدود لـ $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

حيث c عدد ثابت (ثابت التكامل)

THEROM 1.2

(Power Rule)

For any rational power $r \neq -1$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$$

النظرية 1.2

(قاعدة القوى)

لأي قوة نسبية $r \neq -1$

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$$

صيغ التكامل

Integration Formulas

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \quad \text{For } r \neq -1 \text{ (Power Rule)}$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$$

THEROM 1.3

النظرية 1.3

Suppose that $f(x)$ and $g(x)$ have antiderivative. Then, for any constant

على فرض أن $g(x)$ و $f(x)$ لهما دوال أصلية ولأي عددين ثابتين b و a

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)\,dx$$

Q4 **Find the general antiderivative.** أوجد الدالة الأصلية

$$\int (3x^4 - 3x)dx$$

$a)\ \frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2$

$b)\ 3x^5 - 3x^2 + c$

$c)\ \frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + c$

$d)\ 12x^2 - 3 + c$

Q5 **Find the general antiderivative.** أوجد الدالة الأصلية

$$\int (x^3 - 2)dx$$

a) $\frac{3}{4}x^5 - 2x + c$

$b)\ \frac{1}{4}x^4 - 2x + c$

$c)\ x^4 - 2x + c$

$d)\ 3x^2 - 2x + c$

Q6 **Find the general antiderivative.** أوجد الدالة الأصلية

$$\int \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\right)dx$$

$a)\ \frac{9}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-3}}{3} + c$

$b)\ 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-3}}{3} + c$

$c)\ 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-5}}{5} + c$

$d)\ 2x^{\frac{2}{3}} + \frac{x^{-3}}{3} + c$

Q7 **Find the general antiderivative.** أوجد الدالة الأصلية

$$\int \left(2x^{-2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$a)\ -2x^{-1} + 2x^{\frac{1}{2}} + c$

$b)\ -2x^{-1} - 2x^{\frac{1}{2}} + c$

$c)\ -3x^{-3} + 2x^{\frac{1}{2}} + c$

$d)\ -2x^{-1} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

Q8 **Find the general antiderivative.** أوجد الدالة الأصلية

$$\int \left(\frac{x^{\frac{1}{3}} - 3}{x^{\frac{2}{3}}}\right) dx$$

$a)\ -\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 9x^{\frac{1}{3}} + c$

$b)\ \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 9x^{\frac{1}{3}} + c$

$c)\ \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 9x^{\frac{1}{3}} + c$

$d)\ \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} - 9x^{\frac{1}{3}} + c$

Q9 **Find the general antiderivative.** أوجد الدالة الأصلية

$$\int \left(\frac{x + 2x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{5}{4}}}\right) dx$$

$a)\ \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + 2x + c$

$b)\ \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} + 2x + c$

$c)\ \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{2}} + c$

$d)\ \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + 4x^{\frac{1}{2}} + c$

Q10 Find the general antiderivative. $\int (2sinx + cosx)dx$ أوجد الدالة الأصلية

$a)\ 2cosx - sinx + c$

$b)\ -2cosx - sinx + c$

$c)\ -2cosx + sinx + c$

$d)\ 2cosx + sinx + c$

Q11 Evaluate $\int (3cosx - sinx)dx$ جد قيمة

$a)\ 3sinx + cosx + c$ $b)\ -3sinx + cosx + c$

$c)\ 3sinx - cosx + c$ $d)\ -3sinx - cosx + c$

Q12 Evaluate $\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$ جد قيمة

$a)\ 4sin^{-1}x + c$ $b)\ 4sin^{-1}2x + c$

$c)\ sin^{-1}4x + c$ $d)\ 2sin^{-1}x + c$

Q13 Evaluate $\int (2secx\ tanx)dx$ جد قيمة

$a)\ 2cscx + c$ $b)\ 2secx + c$

$c)\ 2tanx + c$ $d)\ -2secx + c$

Q14 **Evaluate** $\int (5sec^2x)dx$ **جد قيمة**

$a)\ 5tanx + c$ $b)\ 5secx + c$

$c)\ \frac{5sec^3x}{3} + c$ $d)\ -5tanx + c$

Q15 **Evaluate** $\int \left(\frac{4cosx}{sin^2x}\right)dx$ **جد قيمة**

$a)\ 4cscx + c$ $b)\ 4secx + c$

$c)\ 4tanx + c$ $d)\ -4cscx + c$

Q16 **Evaluate** $\int (3e^x - 2)dx$ **جد قيمة**

$a)\ 3e^x - 2x + c$ $b)\ 3e^x - 2 + c$

$c)\ e^x - 2x + c$ $d)\ 3e^x - 2x$

Q17 **Evaluate** $\int (4x - 2e^x)dx$ **جد قيمة**

$a)\ 2x^2 - 2e^x + c$ $b)\ 3e^x - 2 + c$

$c)\ e^x - 2x + c$ $d)\ 3e^x - 2x$

THEROM 1.3

For $x \neq 0$, $\frac{d}{dx} ln|x| = \frac{1}{x}$

النظرية 1.4

لكل $x \neq 0$, $\frac{d}{dx} ln|x| = \frac{1}{x}$

COROLLARY 1.1

In any interval not containing 0 ,

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$$

النتيجة 1.1

في أي فترة لا تحتوي على 0 ،

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$$

COROLLARY 1.2

In any interval in which $f(x) \neq 0$,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + c$$

النتيجة 1.2

في أي فترة لا تكون فيها $f(x) \neq 0$ ،

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + c$$

Q18 **Evaluate** $\int \left(\frac{4}{x}\right) dx$ **جد قيمة**

a) $4ln|x| + c$

b) $4x\, ln|x| + c$

c) $\frac{-4}{x^2} + c$

d) $4ln\left|\frac{1}{x}\right| + c$

Q19 **Evaluate** $\int \left(\frac{2x}{x^2+1}\right) dx$ **جد قيمة**

a) $2ln|x^2 + 1| + c$

b) $ln|x^2 + 1| + c$

c) $ln|2x + 1| + c$

d) $\frac{1}{2} ln|x^2 + 1| + c$

Q20 **Evaluate** $\int \left(3cosx - \frac{1}{x}\right) dx$ **جد قيمة**

$a)\ 3sinx - lnx + c$ $b)\ -3sinx - lnx + c$

$c)\ sinx - \frac{2}{x^2} + c$ $d)\ 3sinx + \frac{2}{x^2} + c$

Q21 **Evaluate** $\int (2x^{-1} + sinx)dx$ **جد قيمة**

$a)\ 2lnx + cosx + c$ $b)\ 2lnx - cosx + c$

$c)\ -4x^{-2} - cosx + c$ $d)\ -2lnx - cosx + c$

Q22 **Evaluate** $\int \left(\frac{4x}{x^2+4}\right) dx$ **جد قيمة**

$a)\ 4ln|x^2 + 4| + c$ $b)\ 2ln|x^2 + 4| + c$

$c)\ 4xln|x^2 + 4| + c$ $d)\ ln|x^2 + 4| + c$

Q23 **Evaluate** $\int \left(\frac{3}{4x^2+4}\right) dx$ **جد قيمة**

$a)\ \frac{3}{4}tan^{-1}x + c$ $b)\ \frac{3}{4}tan^{-1}4x + c$

$c)\ 4\frac{3}{4}tan^{-1}2x + c$ $d)\ 3tan^{-1}4x + c$

Q24 **Evaluate** $\int \left(\frac{cosx}{sinx}\right) dx$ **جد قيمة**

$a) ln|sinx| + c$ $b)\ ln|secx| + c$

$c)\ cotx + c$ $d)\ tanx + c$

Q25 **Evaluate** $\int \left(2cosx - \sqrt{e^{2x}}\right) dx$ **جد قيمة**

$a) 2sinx - e^{2x} + c$ $b)\ 2sinx - e^{x} + c$

$c)\ -2sinx - e^{x} + c$ $d)\ 2sinx - \sqrt{e^{2x}} + c$

Q26 **Evaluate** $\int \left(\frac{e^x}{e^x + 3}\right) dx$ **جد قيمة**

$a) e^x\ ln|e^x + 3| + c$ $b)\ e^x + 3x + c$

$c)\ ln|e^x| + c$ $d)\ 2ln|e^x + 3| + c$

Q27 **Evaluate** $\int \left(\frac{e^x + 3}{e^x}\right) dx$ **جد قيمة**

$a) x - 3e^{x} + c$ $b)\ x - 3e^{-x} + c$

$c)\ 3x - e^{x} + c$ $d)\ x + 3e^{-x} + c$

Q28 **Evaluate** $\int x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{5}{4}}-4\right)dx$ **جد قيمة**

$a)\ \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{16}{5}x^{\frac{5}{4}}+c$

$b)\ \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{5}{16}x^{\frac{5}{4}}+c$

$c)\ \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{16}{5}x^{\frac{5}{4}}+c$

$d)\ \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}}-\frac{16}{5}x^{\frac{5}{4}}+c$

Q29 **Evaluate** $\int x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{-4}{3}}-3\right)dx$ **جد قيمة**

$a)3x^{\frac{1}{3}}-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+c$

$b)\ 3x^{\frac{2}{3}}-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+c$

$c)\ 3x^{\frac{1}{3}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+c$

$d)\ 3x^{\frac{1}{3}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}}+c$

Q30 **Evaluate** $\int\left(3e^{x}-\frac{2}{1+x^{2}}\right)dx$ **جد قيمة**

$a)3e^{x}-2tan^{-1}x+c$

$b)\ 3e^{x}-tan^{-1}x+c$

$c)e^{x}-2tan^{-1}x+c$

$d)\ 3e^{x}+2tan^{-1}x+c$

Q31 **Evaluate** جد قيمة $\int \left(\frac{sec^2x}{tanx}\right) dx$

$a) ln|secx| + c$ $b)\ ln|tanx| + c$

$c)\ sec^2x + c$ $d) - cotx + c$

Q32 **Evaluate** جد قيمة $\int \left(\frac{x^3+1}{x}\right) dx$

$a) \frac{1}{3}x^3 - ln|x| + c$ $b)\ \frac{1}{3}x^3 + ln|x| + c$

$c)\ x^2 + ln|x| + c$ $d) \frac{1}{4}x^4 - ln|x| + c$

Q33 **Evaluate** جد قيمة $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

$a) \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + c$ $b)\ 3\sqrt[3]{x} + c$

$c)\ 3\sqrt[3]{x^2} + c$ $d)\ 3\sqrt{x} + c$

Q34 **Evaluate** $\int tanx\ dx$ **جد قيمة**

$a) ln|cosx| + c$ $b)\ ln|sinx| + c$

$c)\ cotx + c$ $d)\ ln|secx| + c$

Q35 **Evaluate** $\int cotx\ dx$ **جد قيمة**

$a) - ln|sinx| + c$ $b)\ ln|sinx| + c$

$c)\ cotx + c$ $d) - cotx + c$

Q36 **Evaluate** $\frac{d}{dx}\ ln|secx + tanx|$ **جد المشتقة**

$a)\ secx$ $b)\ secx\ tanx + sec^2x$

$c)\ cscx$ $d)\ cotx$

Q37 **Find the derivative.** $\frac{d}{dx}\ ln|sinx - 2|$ **جد المشتقة**

$a) \frac{cosx}{sinx-2}$ $b)\ cosx - 2$

$c)\ cotx - \frac{1}{2}$ $d)\ \cot x$

Q38 **Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions:** **جد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط المعطاة**

$$f'(x) = 3e^x + x, \ f(0) = 4$$

Q39 **Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions:** **جد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط المعطاة**

$$f'(x) = 4cosx, \ f(0) = 3$$

Q40 **Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions:** **جد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط المعطاة**

$$f''(x) = 12x^2 + 2e^x, \ f'(0) = 2 \ , \ f(0) = 3$$

Q41 **Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions:** **جد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط المعطاة**

$$f''(x) = 20x^3 + 2e^{2x},\ f'(0) = -3\ ,\ f(0) = 2$$

Q42 **Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions:** **جد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط المعطاة**

$$f''(x) = 2x + 2,\ f(0) = 2\ ,\ f(3) = 2$$

Q43

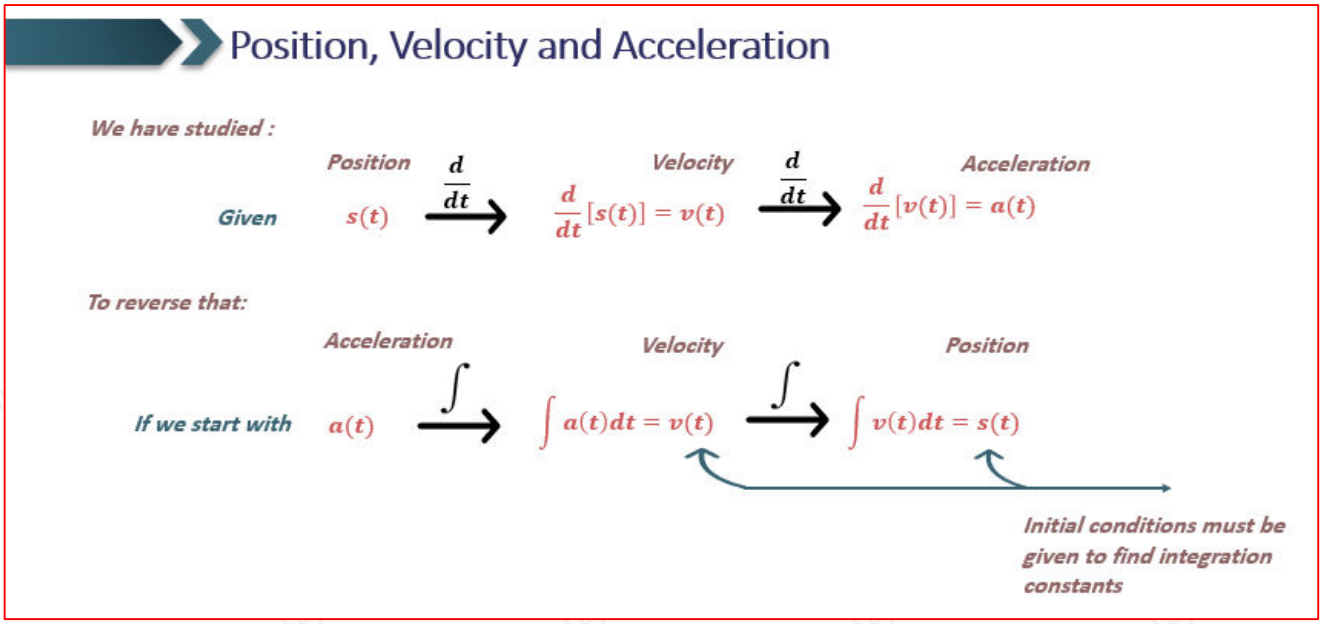
Find a function $f(x)$ such that the **point** $(1, 2)$ is **on** the graph of $y = f(x)$, the **slope of the tangent** line **at** $(1, 2)$ **is** 3 **and** $f''(x) = x - 1$

جد دالة $f(x)$ تكون فيها النقطة (2 , 1) على التمثيل البياني لـ $y = f(x)$. وميل المماس عند (2 , 1) هو 3 و $f''(x) = x - 1$.

Q44

Find a function $f(x)$ such that the **point** $(-1, 1)$ is **on** the graph of $y = f(x)$, the **slope of the tangent** line **at** $(-1, 1)$ **is** 2 **and** $f''(x) = 6x + 4$

جد دالة $f(x)$ تكون فيها النقطة (1 , -1) على التمثيل البياني لـ $y = f(x)$. وميل المماس عند (1 , -1) هو 2 و $f''(x) = 6x + 4$.



Q45

If an object 's downward **acceleration** is given by $y''(t) = -9.8\,m/s^2$, **find** the **position function** $y(t)$. Assume that the **initial velocity is** $y'(0) = -30\,m/s$ and the **initial position is** $y(0) = 30,000\,m$.

تسارع جسم عند الهبوط هو $y''(t) = -9.8\,m/s^2$. على فرض أن السرعة المتجهة هي $y'(0) = -30\,m/s$ والموقع الإبتدائي هو $y(0) = 30,000\,m$. جد الدالة المكانية $y(t)$.

Q46

Determine the **position function** if the **velocity** function is $v(t) = 3 - 12t \ m/s$ and the **initial position** is $s(0) = 3 \ m$.

حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3 - 12t \ m/s$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 3$.

Q47

Determine the **position function** if the **velocity** function is $v(t) = 3e^{-t} - 2$ and the **initial position** is $s(0) = 0$.

حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة المتجهة هي $v(t) = 3e^{-t} - 2$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 0$.

Q48

Determine the **position function** if the **acceleration function is** $a(t) = 3sin\ t + 1$, the **initial velocity** is $v(0) = 0$ and the **initial position is** $s(0) = 4$.

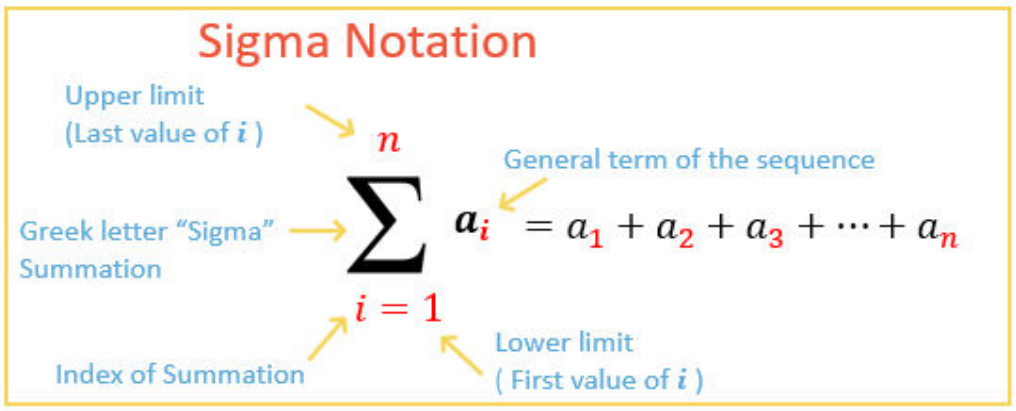
حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة التسارع هي $a(t) = 3sin\ t + 1$ والسرعة المتجهة $v(0) = 0$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 0$.

Q49

Determine the **position function** if the **acceleration function is** $a(t) = t^2 + 1$, the **initial velocity** is $v(0) = 4$ and the **initial position is** $s(0) = 0$.

حدد الدالة المكانية إذا كانت دالة السرعة التسارع هي $a(t) = t^2 + 1$ والسرعة المتجهة $v(0) = 4$ والموقع الابتدائي هو $s(0) = 0$.

5.2 Sums and Sigma Notation — 5.2 المجموع والرمز سيجما



Q1 **Write in summation notation**

اكتب في صورة رمز المجموع

$a)\ \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{10}$

$b)\ 3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + 45^3$

$c)\ 2(1)^2 + 2(2)^2 + 2(3)^2 + \cdots + 2(14)^2$

$d)\ \sqrt{2-1} + \sqrt{3-1} + \sqrt{4-1} + \cdots + \sqrt{15-1}$

Q2 **Write in summation notation:**

The sum of the first 200 odd positive integers.

اكتب في صورة رمز المجموع:

مجموع أول 200 عدد صحيح موجب فردي

Q3 **Write out all terms and compute the sums**

اكتب كل الحدود واحسب المجموع:

$$\sum_{i=1}^{8}(2i+1)$$

$$\sum_{i=2}^{6} sin(2\pi i)$$

$$\sum_{i=1}^{8} 5$$

$$\sum_{i=6}^{10}(4i+2)$$

$$\sum_{i=1}^{6} 3i^2$$

www.manasra.academy

THEOREM 2.1

إذا كان n عددا صحيحا موجبا و n عددا ثابتا. فإن

If n is any positive integer and c is any constant, then

$$(i)\ \sum_{i=1}^{n} c = cn$$ Sum of constants

مجموع الثوابت

$$(ii)\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$ Sum of the first n positive integers

مجموع أول n عدد صحيح موجب

$$(iii)\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ Sum of the squares of the first n positive integers

مجموع مربعات أول n عدد صحيح موجب

THEOREM 2.2

For any constants c and d, لأي عددين ثابتين c و d

$$\sum_{i=1}^{n} (ca_i + db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i + d\sum_{i=1}^{n} b_i$$

Q4 **Compute the sum**

احسب المجموع

1) $\sum_{i=1}^{8}(2i+1)$

2) $\sum_{i=1}^{800}(2i+1)$

3) $\sum_{i=1}^{70}(3i-1)$

4) $\sum_{i=1}^{50}(8-i)$

5) $\sum_{i=1}^{20} i^2$

7) $\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{i}{20}\right)^2$

www.manasra.academy

8) $\sum_{n=1}^{100}(n^2-3n+2)$

9) $\sum_{i=7}^{20}5$

10) $\sum_{i=4}^{20}(i-3)(i+3)$

11) $\sum_{k=3}^{n}(k^2-3)$

12) $\sum_{k=0}^{n}(k^2+5)$

Q5 **Compute the sum and the limit of the sum as $n \to \infty$** احسب المجموع ونهاية كل مجموع عندما

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

Q6 **Compute the sum and the limit of the sum as $n \to \infty$** احسب المجموع ونهاية كل مجموع عندما

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[4\left(\frac{2i}{n}\right)^2 - \left(\frac{2i}{n}\right)\right]$$

Q7 **Sum the values of $f(x) = x^2 + 3$ evaluated at**

$x = 0.1,\ x = 0.2,\ x = 0.3, \dots, x = 1.0$

جد مجموع قيم $f(x) = x^2 + 3$ للقيم

$x = 0.1,\ x = 0.2,\ x = 0.3, \dots, x = 1.0$

Q8 $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$, evaluated at

$x = 1.05,\ x = 1.15,\ x = 1.25, \dots, x = 2.95$

جد مجموع قيم $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ للقيم

$x = 1.05,\ x = 1.15,\ x = 1.25, \dots, x = 2.95$

Q9 **Compute the sum the form** $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ احسب المجموع بالصيغة

1) $f(x) = x^2 + 4x,\ x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 \quad \Delta x = 0.2; n = 5$

2) $f(x) = 4x^2 - 2,\ x = 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, \ldots . 3.0\ \Delta x = 0.1; n = 10$

5.3 Area — 5.3 المساحة

Area

To compute the area beneath the graph of $y = f(x)$ and above $x - axis$ on the interval $[a, b]$

For $f(x) \geq 0$ and f is continuous on interval $[a, b]$

To approximate the area:

Partition: Divide the interval $[a, b]$ into n subintervals

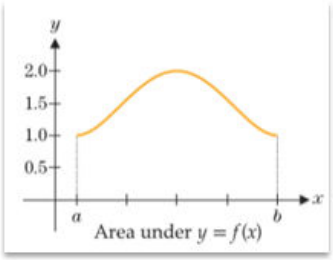
Length of each subinterval: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

The points are: $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + \Delta x$, $x_2 = x_1 + \Delta x$ And so on $\longrightarrow$ $x_i = a + i\Delta x$, $i = 1, 2, 3, \ldots . n$

Construct a rectangle on each subinterval $[x_{i-1}, x_i]$

Width: Δx

Length: $f(x_i)$ The value of the function at the **right endpoint** of the subinterval

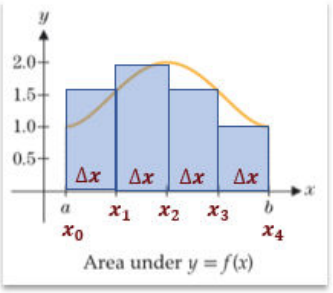


Then the area beneath the graph of $y = f(x)$ is roughly the sum of the areas of rectangles.

Area: $A \approx$ Sum of the areas of rectangles

Area : $A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots . + f(x_n)\Delta x$

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$



Let $n = 4$

Area $= A \approx A_4 = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x$

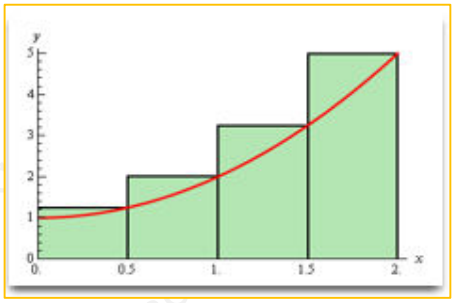
Q1 **Approximate the area under the curve.**

$y = f(x) = x^2 + 1$ **on the interval** $[0, 2]$, **Using 4 rectangles.**

اوجد قيمة تقريبية لمساحة منطقة تحت المنحنى

$y = f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0, 2]$

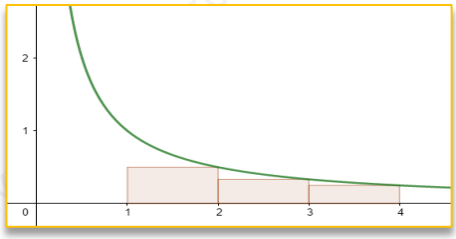
باستخدام **4** مستطيلات.



Q2

Approximate the area under the curve $y = f(x) = \frac{1}{x}$ on the interval $[1, 4]$, Using 3 rectangles.

اوجد قيمة تقريبية لمساحة منطقة تحت المنحنى $y = f(x) = \frac{1}{x}$ على الفترة $[1, 3]$ باستخدام 3 مستطيلات.



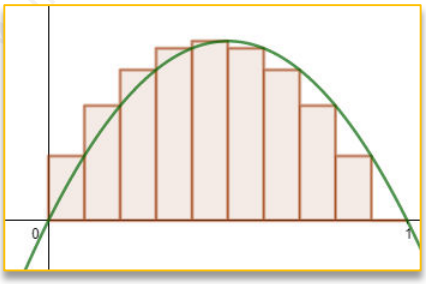
Q3

Approximate the area under the curve.

$y = f(x) = 2x - 2x^2$ on the interval $[0, 1]$,

Using 10 rectangles.

اوجد قيمة تقريبية لمساحة منطقة تحت المنحنى $y = f(x) = 2x - 2x^2$ على الفترة $[0, 1]$ باستخدام 10 مستطيلات.



DIFINITION 3.1

For a function f defined on interval $[a, b]$, if f is continuous on $[a, b]$ and $f(x) \geq 0$ on $[a, b]$, the area A under the curve $y = f(x)$on $[a, b]$ is given by

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

التعريف 3.1

لكل دالة f معرفة على الفترة $[a, b]$ ، إذا كانت f متصلة على $[a, b]$ و $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$ ، **فإن المساحة** A تحت منحنى $y = f(x)$ **على** $[a, b]$ ***تعطى بالعلاقة***

Q4 **Find the area under the curve.(Use Definition 3.1)** $y = f(x) = 2x - 2x^2$ **on the interval** $[0, 1]$.

جد المساحة منطقة تحت المنحنى (مستخدما التعريف 3.1) $y = f(x) = 2x - 2x^2$ **على الفترة** $[0, 1]$.

Q5

Find the area under the curve.(Use Definition 3.1)

$y = f(x) = 2x^2 + 1$ on the interval $[-1, 1]$.

جد المساحة منطقة تحت المنحنى (مستخدما التعريف 3.1)

$y = f(x) = 2x^2 + 1$ على الفترة $[-1, 1]$.

Q6

Estimate the area under the curve.(Use Definition 3.1)

$y = f(x) = \sqrt{x+1}$ on the interval $[1, 3]$.

قدر المساحة منطقة تحت المنحنى (مستخدما التعريف 3.1)

$y = f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[1, 3]$.

www.manasra.academy

DIFINITION 3.2

Let $\{x_0, x_1, x_2, \dots\dots, x_n\}$ be a regular partition of the interval $[a, b]$,

$$\text{with } x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}, \text{ For all } i.$$

Pick points $c_1, c_2, \dots\dots, c_n$, where c_i is any point in the subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, **For** $i = 1, 2, \dots, n$. (These called **evaluation points**).

The **Riemann Sum** for this partition and set of evaluation points is: $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$

التعريف 3.2

لتكن $\{x_0, x_1, x_2, \dots\dots, x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a, b]$

حيث $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$, لكل i .

اختر النقاط $c_1, c_2, \dots\dots, c_n$ حيث يكون c_i أي نقطة في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$.

إن مجموع ريمان لهذه التجزئة هو

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

For a continuous, nonnegative function f, the **area under the curve** $y = f(x)$ is the **limit of Riemann sum**

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \quad \text{Where } c_i = x_i \text{ (right end point), For } i = 1, 2, \dots, n$$

لكل دالة متصل غير سالبة f تكون المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ هي نهاية مجاميع ريمان

Choice of Evaluation points — **اختيار نقاط قواعد القيم**

نقطة النهاية اليمنى	نقطة النهاية اليسرى	نقطة المنتصف
$c_i = (x_i)$	$c_i = (x_{i-1})$	$c_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$

Choices for evaluation points $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, For $i = 1, 2, \dots, n$

The Right Endpoint

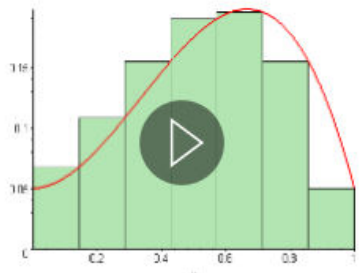
$$c_i = x_i$$

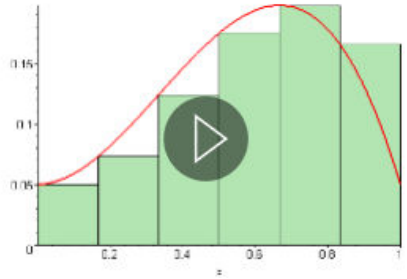
The Left Endpoint

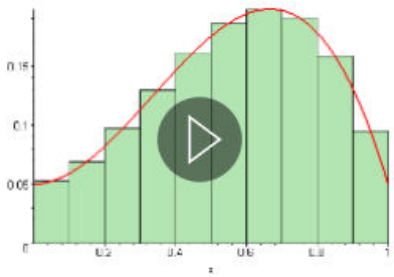
$$c_i = x_{i-1}$$

The Midpoint

$$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$







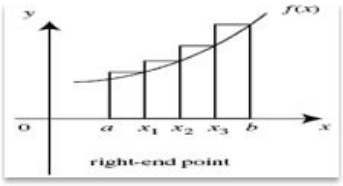
$y = f(x)$ on $[a, b]$ $\quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad x_i = a + i\Delta x$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, For $i = 1, 2, \dots, n$

The Right Endpoint $c_i = x_i$

Evaluation points: $c_i = a + i\Delta x$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$

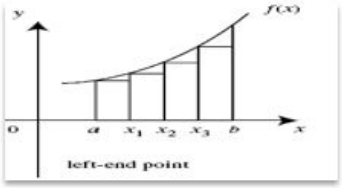
Riemann Sum: $A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$



The Left Endpoint $c_i = x_{i-1}$

Evaluation points: $c_i = a + (i-1)\Delta x$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$

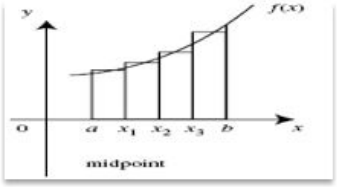
Riemann Sum: $A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$



The Midpoint $c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$

Evaluation points: $c_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Riemann Sum: $A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$



Q7

Use the given values to estimate the area under the curve using left-endpoint evaluation.

استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليسرى

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

$a)$ 1.67

$b)$ 1.81

$c)$ 18.1

$d)$ 16.7

Q8

Use the given values to estimate the area under the curve using right-endpoint evaluation

استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليمنى

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0	2.2	2.4	2.0

$a)\ 3.08$

$b)2.8$

$c)\ 2.25$

$d)\ 4.15$

Q9

Use the given values to estimate the area under the curve using right-endpoint evaluation

استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليمنى

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	1.8	1.4	1.1	0.7	1.2	1.4	1.8	2.4	2.6

$a)\ 1.182$

$b)1.262$

$c)\ 2.125$

$d)\ 1.525$

Q10

Use the given values to estimate the area under the curve using right-endpoint evaluation

استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليمنى

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6

$a)\ 0.97$

$b)1.03$

$c)\ 9.7$

$d)\ 10.3$

Q11

Approximate the area under the curve $y = f(x) = x^2 + 1$ on the interval $[0, 1]$, $n = 4$ using right-endpoint evaluation.

قرب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0, 1]$, $n = 4$ مستخدما نقطة النهاية اليمنى

Q12

Approximate the area under the curve $y = f(x) = x^2 + 1$ on the interval $[0, 1]$, $n = 4$ using left -endpoint evaluation.

قرب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0, 1]$, $n = 4$ مستخدما نقطة النهاية اليسرى

Q13

Approximate the area under the curve $y = f(x) = x^2 + 1$ on the interval $[0, 1]$, $n = 4$ using midpoint evaluation.

قرب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0, 1]$, $n = 4$ مستخدما نقطة المنتصف

Q14

Approximate the area under the curve $y = f(x) = sinx$ on the interval $[0, \pi]$, $n = 4$ using right-endpoint evaluation.

قرب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = sinx$ على الفترة $[0, \pi]$, $n = 4$ مستخدما نقطة النهاية اليمنى

Q15

Approximate the area under the curve $y = f(x) = sinx$ on the interval $[0, \pi]$, $n = 4$ using left -endpoint evaluation.

قرب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = sinx$ على الفترة $[0, \pi]$, $n = 4$ مستخدما نقطة النهاية اليسرى

Q16

Approximate the area under the curve $y = f(x) = sinx$ on the interval $[0, \pi]$, $n = 4$ using midpoint evaluation.

قرب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = sinx$ على الفترة $[0, \pi]$, $n = 4$ مستخدما نقطة المنتصف

Q17

Approximate the area under the curve $y = f(x) = 4x$ on the interval $[0, 4]$, $n = 40$ using right-endpoint evaluation.

قرب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = 4x$
على الفترة $[0, 4]$, $n = 40$ مستخدما نقطة النهاية اليمنى

Q18

Approximate the area under the curve $y = f(x) = 4x$ on the interval $[0, 4]$, $n = 32$ using left -endpoint evaluation.

قرب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = 4x$
على الفترة $[0, 4]$, $n = 32$ مستخدما نقطة النهاية اليسرى

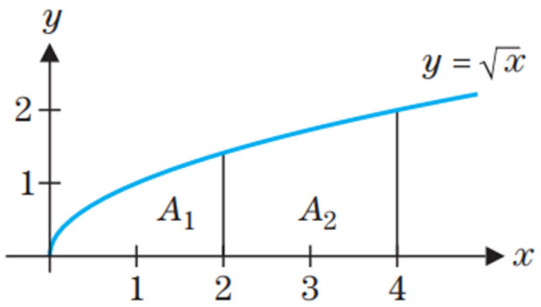
Q19

Approximate the area under the curve $y = f(x) = 4x$ on the interval $[0, 4]$, $n = 24$ using midpoint evaluation.

قرب المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = 4x$
على الفترة $[0, 4]$, $n = 24$ مستخدما نقطة المنتصف

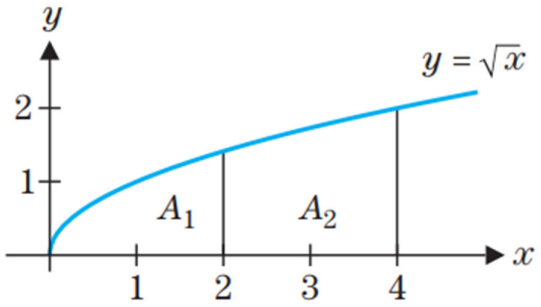
Q20

In the figure, which area equals $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2}\sqrt{1+i/n}\,\frac{2}{n}$?



Q21

In the figure, which area equals $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{1}{n}}\sqrt{1+2i}\,\frac{2}{n}$?



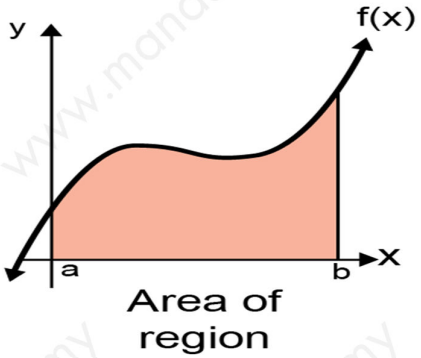
5.4 The Definite Integral — 5.4 التكامل المحدود

Area Under a Curve — المساحة تحت المنحنى

$$f(x) \geq 0 \ \ on \ \ [a,b]$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

For any $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, *For* $i = 1, 2, \dots, n$



Definition 4.1

For any function $f(x)$ defined on $[a,b]$, **the definite integral** of $f(x)$ from a to b is

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

التعريف 4.1

لأي دالة $f(x)$ معرفة على $[a\,,b]$ ، يكون **التكامل المحدود** لـ $f(x)$ من a إلى b هو

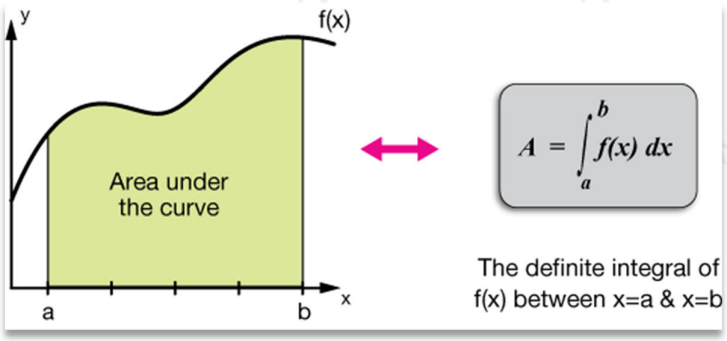
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Theorem 4.1

If $f(x)$ is continuous on $[a,b]$, then $f(x)$ is **integrable** on $[a,b]$

النظرية 4.1

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة $[a\,,b]$ ، فأن $f(x)$ تكون **قابلة للتكامل** على $[a\,,b]$



Q1 **Express the integral as the limit of the Riemann sum.** عبر عن التكامل بصورة نهاية مجموع ريمان

$$\int_0^3 (2x+5)\,dx$$

Q2 **Express the integral as the limit of the Riemann sum.** عبر عن التكامل بصورة نهاية مجموع ريمان

$$\int_0^{\pi} sin2x\,dx$$

Q3 **Express the limit as an integral.** عبر عن النهاية في صورة تكامل

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

Q4 **Express the limit as an integral.** عبر عن النهاية في صورة تكامل

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2}+\frac{n+2}{n^2}+\cdots\frac{2n}{n^2}\right)$$

Q5 **Express the limit as an integral.** عبر عن النهاية في صورة تكامل

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(1/n)+f(2/n)+\cdots+f(n/n)}{n}$$

Q6 **Evaluate the integral by computing the limit of Riemann sums**

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان

$$\int_0^1 2x\,dx$$

Q7 **Evaluate the integral by computing the limit of Riemann sums**

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان

$$\int_0^2 x^2\,dx$$

Theorem 4.2

If $f(x), g(x)$ is **integrable** on $[a, b]$, then
For any constant c, d

النظرية 4.2

إذا كانت $f(x), g(x)$ قابلتين للتكامل على الفترة $[a\ , b]$ ، فأن لأي عددين ثابتين c, d

$$1)\ \int_a^b [\, c\, f(x) + d\, g(x)]\, dx = c \int_a^b f(x)dx + d \int_a^b g(x)dx$$

$$2)\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad ,\ c\ in\ [a\ , b]$$

$$3)\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$4)\ \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$5)\ \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \quad ,\ f(x) \geq g(x)$$

Theorem 5.2

The Fundamental Theorem of Calculus. Part1

If $f(x)$ is continuous on $[a, b]$ and $F(x)$is any antiderivative of $f(x)$, then

النظرية 5.2

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الأول)

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a\ , b]$ و $F(x)$ هي أي دالة أصلية لـ $f(x)$ فإن

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Q8 **Compute** $\int_0^2 x^2\,dx$ **احسب**

Q9 **Compute** $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx$ **احسب**

Q10 **Compute** $\int_1^2 (4x - \frac{2}{x^2})\,dx$ **احسب**

Q11 **Evaluate** $\int_1^4 (x\sqrt{x} + \frac{3}{x})\, dx$ **أوجد قيمة**

$a)\ \frac{62}{5} + 3ln4$

$b) 16.7$

$c)\ \frac{62}{3} - 3ln4$

$d)\ 17$

Q12 **Evaluate** $\int_0^1 (6e^{-3x} + 4)\, dx$ **أوجد قيمة**

$a)\ \frac{-2}{e^3} + 6$

$b)\ \frac{2}{e^3} - 6$

$c)\ 6$

$d)\ 5$

Q13 **Compute** $\int_0^2 (\frac{e^{2x} - e^{3x}}{e^{3x}})\, dx$ **احسب**

$a)\ \frac{-1}{e^2} - 1$

$b)\ \frac{1}{e^2} - 1$

$c)\ \frac{1}{e^2} + 1$

$d)\ \frac{-1}{e^2} + 1$

Q14 Compute احسب $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2sinx - cosx)\, dx$

$a)\ 3\pi$

$b)\ -3\pi$

$c)\ 3$

$d)\ -3$

Q15 Compute احسب $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$

$a)\ \frac{\pi}{4}$

$b)\ -\frac{\pi}{4}$

$c)\ \frac{\pi}{2}$

$d)\ -\frac{\pi}{2}$

Q16 Compute احسب $\int_{-1}^{1} \left(\frac{4}{1+x^2}\right) dx$

$a)\ \frac{\pi}{4}$

$b)\ \frac{\pi}{2}$

$c)\ \pi$

$d)\ 2\pi$

Q17 **write the expression as a single integral.** **اكتب التعبير في صورة تكامل منفرد**

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

Q18 **write the expression as a single integral.** **اكتب التعبير في صورة تكامل منفرد**

$$\int_0^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$$

Q19 **write the expression as a single integral.** **اكتب التعبير في صورة تكامل منفرد**

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^1 f(x)dx$$

Q20 **write the expression as a single integral.** **اكتب التعبير في صورة تكامل منفرد**

$$\int_{-1}^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

Q21

Assume that

$\int_1^3 f(x)dx = 5 \text{ and } \int_1^3 g(x)dx = -2$

Find $\int_1^3 [\, f(x) + g(x) \,]dx$

$a) -3$

$b) 3$

$c) 7$

$d) 10$

فرضاً أن

$\int_1^3 f(x)dx = 5 \text{ and } \int_1^3 g(x)dx = -2$

أوجد $\int_1^3 [\, f(x) + g(x) \,]dx$

Q22

Assume that

$\int_1^3 f(x)dx = 5 \text{ and } \int_1^3 g(x)dx = -2$

Find $\int_1^3 [\, 2f(x) - g(x) \,]dx$

$a) 7$

$b) 8$

$c) 12$

$d) 14$

فرضاً أن

$\int_1^3 f(x)dx = 5 \text{ and } \int_1^3 g(x)dx = -2$

أوجد $\int_1^3 [\, 2f(x) - g(x) \,]dx$

Q23

Assume that

$\int_1^3 f(x)dx = 5 \text{ and } \int_1^3 g(x)dx = -2$

Find $\int_1^3 [\, f(x) - g(x) \,]dx$

$a) 7$

$b) 8$

$c) 12$

$d) 14$

فرضاً أن

$\int_1^3 f(x)dx = 5 \text{ and } \int_1^3 g(x)dx = -2$

أوجد $\int_1^3 [\, f(x) - g(x) \,]dx$

Q24

Assume that

$\int_1^3 f(x)dx = 5 \text{ and } \int_1^3 g(x)dx = -2$

Find $\int_1^3 [4g(x) - f(x)]dx$

فرضاً أن

$\int_1^3 f(x)dx = 5 \text{ and } \int_1^3 g(x)dx = -2$

أوجد $\int_1^3 [4g(x) - f(x)]dx$

a) -13
b) 3
c) 13
d) 22

Q25

Evaluate: $\int_0^3 f(x)dx$, **where** $f(x) = \begin{cases} 2x, & if\ x \leq 2 \\ 1, & if\ x > 2 \end{cases}$

احسب $\int_0^3 f(x)dx$ حيث $f(x) = \begin{cases} 2x, & if\ x \leq 2 \\ 1, & if\ x > 2 \end{cases}$

Q26

Evaluate: $\int_0^4 f(x)dx$, **where** $f(x) = \begin{cases} 2, & if\ x \leq 2 \\ 3x, & if\ x > 2 \end{cases}$

احسب $\int_0^4 f(x)dx$ حيث $f(x) = \begin{cases} 2, & if\ x \leq 2 \\ 3x, & if\ x > 2 \end{cases}$

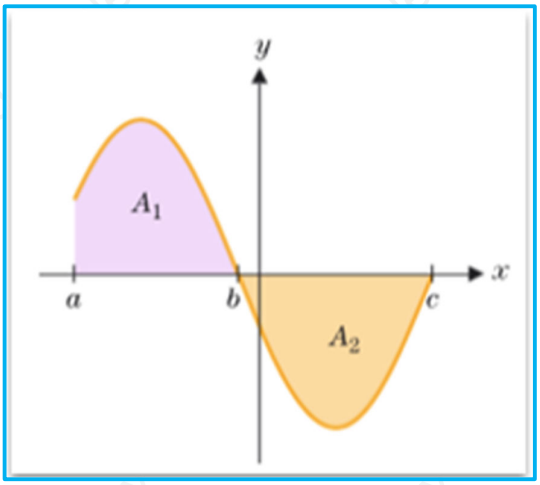
Relating Definite Integrals to Signed Area — العلاقة بين التكاملات المحدودة والمساحة

DEFINITION 4.2 — التعريف 4.2

على فرض أن $f(x) \geq 0$ على $[a\,,b]$ و A_1 هي المساحة المحدودة بين المنحنى $y = f(x)$ ومحور x لكل $a \leq x \leq b$

Suppose that $f(x) \geq 0$ on $[a\,,b]$ and A_1 is the area bounded between the curve $y = f(x)$ and $x - axis$ for $a \leq x \leq b$

$$A_1 = \int_a^b f(x)dx$$



على فرض أن $f(x) \leq 0$ على $[b\,,c]$ و A_2 هي المساحة المحدودة بين المنحنى $y = f(x)$ ومحور x لكل $b \leq x \leq c$

Suppose that $f(x) \leq 0$ on $[b, c]$ and A_1 is the area bounded between the curve $y = f(x)$ and $x - axis$ for $b \leq x \leq c$

$$A_2 = -\int_b^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$$

المساحة الإجمالية بين $y = f(x)$ ومحور x لكل $a \leq x \leq c$

The total area between $y = f(x)$ and $x - axis$ for $b \leq x \leq c$

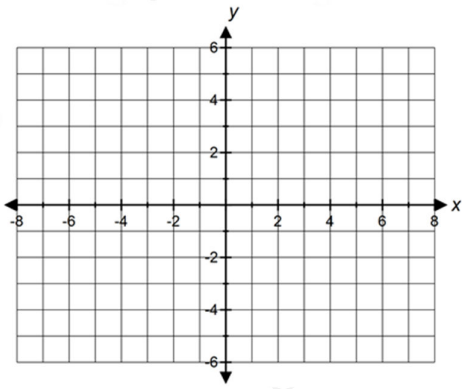
$$A_1 + A_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

Q27

Write the given (total) area as an integral or sum integrals. The area above the $x-axis\ and\ below\ \ y=4-x^2$

اكتب (مجمل) المساحة المعطاة في صورة تكامل او ناتج جمع تكاملات. المساحة فوق المحور x- وتحت $y=4-x^2$

a	$\int_{-2}^{2}-(4-x^2)\,dx$	b	$\int_{0}^{2}-(4-x^2)\,dx$
c	$\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx$	d	$\int_{0}^{2}(4-x^2)\,dx$

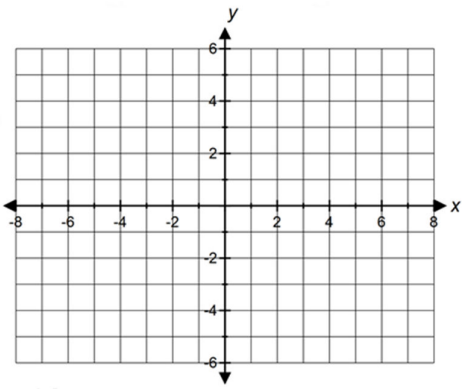


Q28

Write the given (total) area as an integral or sum integrals. The area above the $x-axis\ and\ below\ \ y=4x-x^2$

اكتب (مجمل) المساحة المعطاة في صورة تكامل او ناتج جمع تكاملات . المساحة فوق المحور x- وتحت $y=4x-x^2$

a	$\int_{0}^{4}(4x-x^2)\,dx$	b	$\int_{0}^{4}-(4x-x^2)\,dx$
c	$\int_{4}^{0}(4x-x^2)\,dx$	d	$\int_{0}^{2}(4x-x^2)\,dx$

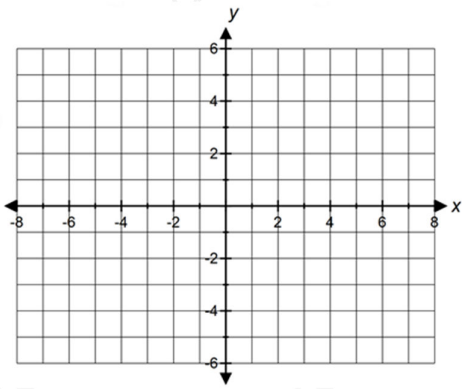


Q29

Write the given (total) area as an integral or sum integrals. The area below the $x-axis\ and\ above\ \ y=x^2-4$

اكتب (مجمل) المساحة المعطاة في صورة تكامل او ناتج جمع تكاملات . المساحة تحت المحور x- وفوق $y=x^2-4$

a	$\int_{-2}^{2} -(4-x^2)\,dx$	b	$\int_{0}^{2} -(4-x^2)\,dx$
c	$\int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx$	d	$\int_{0}^{2} (4-x^2)\,dx$

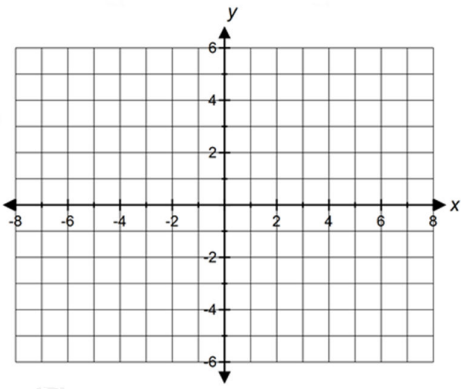


Q30

Write the given (total) area as an integral or sum integrals. The area below the $x-axis\ and\ above\ \ y=x^2-4x$

اكتب (مجمل) المساحة المعطاة في صورة تكامل او ناتج جمع تكاملات . المساحة تحت المحور x- وفوق $y=x^2-4x$

a	$\int_{0}^{4} (x^2-4x)\,dx$	b	$\int_{0}^{4} -(x^2-4x)\,dx$
c	$\int_{4}^{0} (x^2-4x)\,dx$	d	$\int_{0}^{2} (x^2-4x)\,dx$

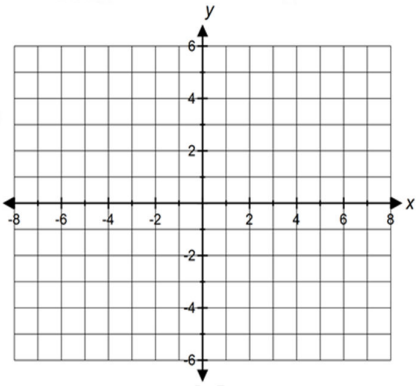


Q31

Write the given (total) area as an integral or sum integrals. The area between the $x-axis\ and\ \ y=sinx\ \ for -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{4}$

اكتب (مجمل) المساحة المعطاة في صورة تكامل او ناتج جمع تكاملات . المساحة المحصورة بين المحور x- ، $y=sinx$ لـ $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{4}$

a	$-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sinx\ dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sinx\ dx$	b	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sinx\ dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sinx\ dx$
c	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} -sinx\ \ dx$	d	$2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sinx\ dx$



Q32

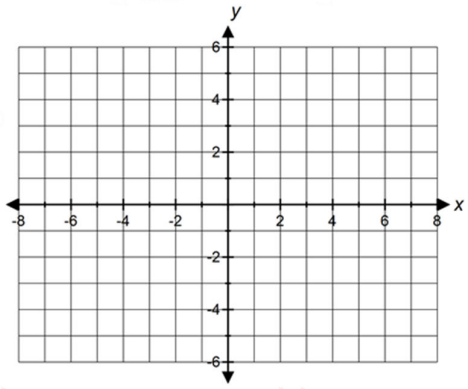
Write the given (total) area as an integral or sum integrals. The area between the $x-axis\ and\ \ y=sinx\ \ for\ 0\le x\le\pi$

اكتب (مجمل) المساحة المعطاة في صورة تكامل او ناتج جمع تكاملات . المساحة المحصورة بين المحور x- ، $y=sinx$ لـ $0\le x\le\pi$

a	$\int_{0}^{\pi} sinx\ dx$	b	$\int_{\pi}^{0} sinx\ dx$
c	$\int_{0}^{\pi} -sinx\ \ dx$	d	$2\int_{0}^{\pi} sinx\ dx$

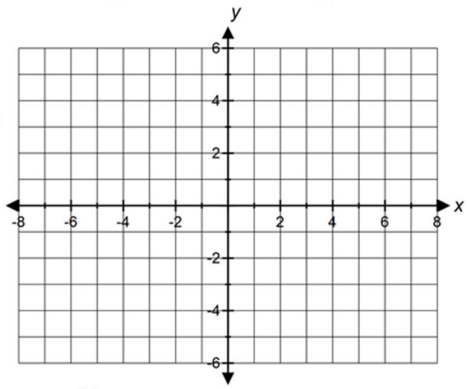
Q33 **Compute the integral and interpret in terms of area .** **احسب التكامل وفسر الإجابة بدلالة المساحة**

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)\, dx$$



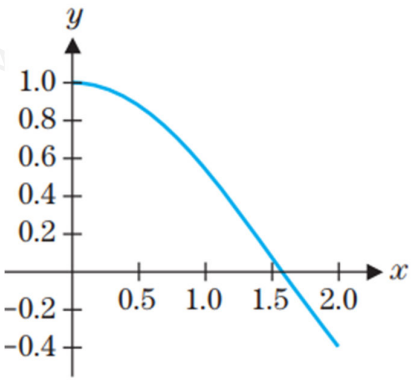
Q34 **Compute the integral and interpret in terms of area .** **احسب التكامل وفسر الإجابة بدلالة المساحة**

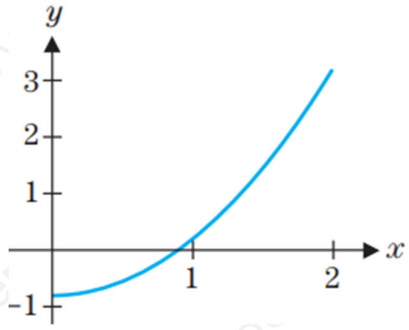
$$\int_0^3 (x^2 - 2x)\, dx$$

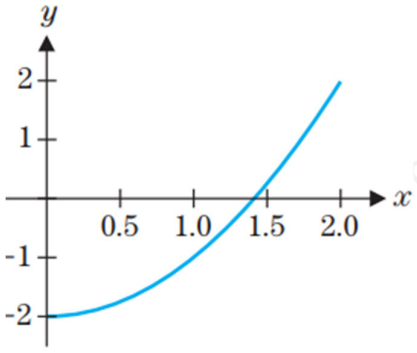


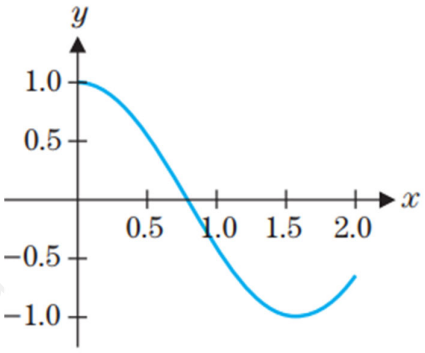
Q35 **Use the graph to determine whether** $\int_0^2 f(x)\,dx$ is positive or negative.

استخدم التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت $\int_0^2 f(x)\,dx$ **موجبة أو سالبة .**









Q36 **Use the graph to list**

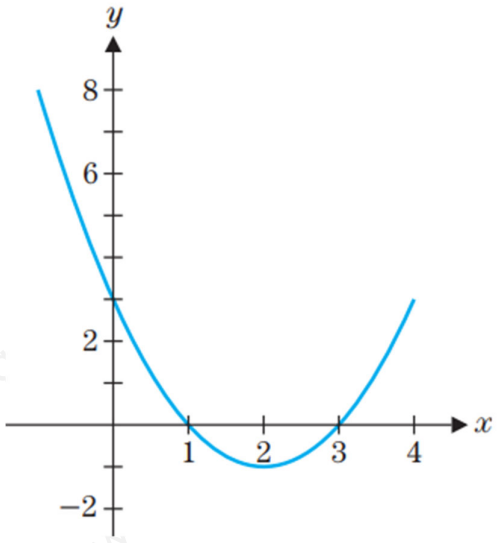
$\int_0^3 f(x)\,dx$, $\int_0^2 f(x)\,dx$, $\int_0^1 f(x)\,dx$

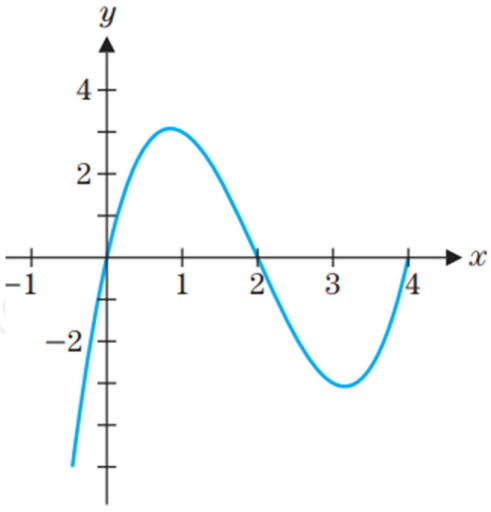
In order , from smallest to largest.

استخدم التمثيل البياني التمثيل البياني لتنظيم

$\int_0^3 f(x)\,dx$ و $\int_0^2 f(x)\,dx$ و $\int_0^1 f(x)\,dx$

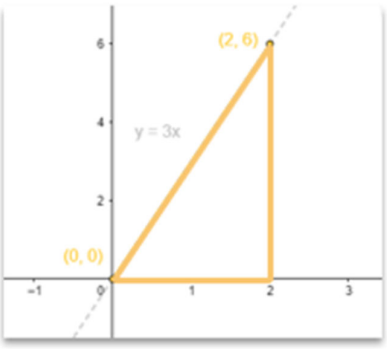
بالترتيب من الأصغر إلى الأكبر .





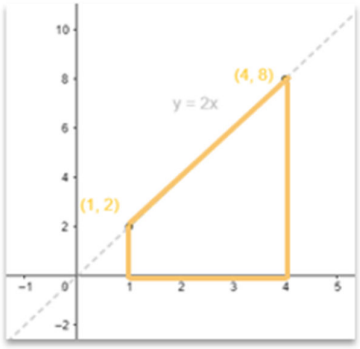
Q37

Use the geometric formula to compute integral $\int_0^2 3x\,dx$ استخدم القوانين الهندسية لحساب التكامل



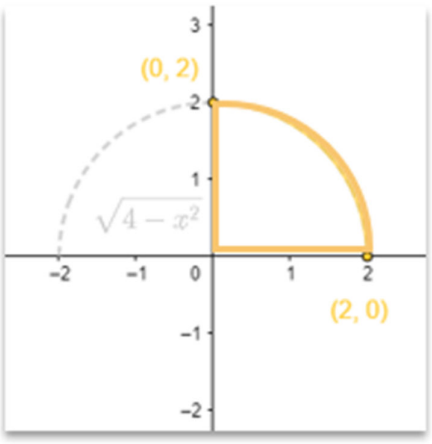
Q38

Use the geometric formula to compute integral $\int_1^4 2x\,dx$ استخدم القوانين الهندسية لحساب التكامل



Q39

Use the geometric formula to compute integral $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ استخدم القوانين الهندسية لحساب التكامل



Theorem 4.3

Suppose that $g(x) \leq f(x)$ for all $x \in [a,b]$, and that g, f are integrable on $[a,b]$ Then,

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

النظرية 4.3

على فرض أن $g(x) \leq f(x)$ لكل $x \in [a,b]$

قابلتان للتكامل على الفترة $[a\,,b]$ ، إذا

$$\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

If $m \leq f(x) \leq M$ for all $x \in [a,b]$ that g, f Then,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

إذا كانت $m \leq f(x) \leq M$ لكل $x \in [a,b]$

فإن

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Q40 **Use Theorem 4.3 to find bounds** $\int_1^2 x^2 e^{-\sqrt{x}}\,dx$ **استخدم النظرية 4.3 لإيجاد حدود**

Integral Mean Value Theorem

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

THEOREM 4.4

If $f(x)$ is continuous on $[a, b]$, then there is a number $c \in (a, b)$ for which

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

النظرية 4.4

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$. فإنه يوجد عدد $c \in (a, b)$ من أجله

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Q41

Compute the average value of: $f(x) = sinx$ on the interval $[0, \pi]$

احسب القيمة المتوسطة لـ $f(x) = sinx$ على الفترة $[0, \pi]$

Q42

Compute the average value

$f(x) = 4x + 3$ **, on the interval** $[0, 2]$

$a)7$

$b)\ 11$

$c)14$

$d)\ 22$

احسب القيمة المتوسطة لـ

$f(x) = 4x + 3$ الفترة على $[0, 2]$

Q43

Compute the average value

$f(x) = x^2 - 2x$, *on the interval* $[-1, 1]$

احسب القيمة المتوسطة لـ

$f(x) = x^2 - 2x$ الفترة على $[-1, 1]$

$a) -13$

$b) \frac{1}{3}$

$c) 13$

$d) 22$

Q44

Compute the average value

$f(x) = 3x^2$, *on the interval* $[0, 2]$

احسب القيمة المتوسطة لـ

$f(x) = 3x^2$ الفترة على $[0, 2]$

$a) 4$

$b) 8$

$c) 12$

$d) 16$

Q45

Compute the average value

$f(x) = 2x + 1$, *on the interval* $[0, 4]$

احسب القيمة المتوسطة لـ

$f(x) = 2x + 1$ الفترة على $[0, 4]$

$a) 5$

$b) 10$

$c) 20$

$d) 80$

Q46

Find a value of c that satisfies the conclusion of the Integral Mean Value Theorem

$f(x) = x^2 - 2x$, *on the interval* $[-1,1]$

$a) \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$

$b) \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

$c) \frac{1}{3}$

$d)\ 0$

جد قيمة c التي تحق نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

$f(x) = x^2 - 2x$ الفترة على $[-1, 1]$

Q47

Find a value of c that satisfies the conclusion of the Integral Mean Value Theorem

$f(x) = 3x^2$, *on the interval* $[0,2]$

$a) \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$b) \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$c) 8$

$d) \frac{8}{3}$

جد قيمة c التي تحق نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

$f(x) = 3x^2$ الفترة على $[0, 2]$

5.5 The Fundamental Theorem of Calculus — 5.5 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

Theorem 5.2 — النظرية 5.2

The Fundamental Theorem of Calculus. Part1 — **النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الأول)**

If $f(x)$ is continuous on $[a,b]$ and $F(x)$is any antiderivative of $f(x)$, then

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a\,,b]$ و $F(x)$ هي أي دالة أصلية لـ $f(x)$ فإن

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Q1 Evaluate $\int_1^2 2x\,dx$ اوجد قيمة

$a)\ 2$

$b)\ 3$

$c)\ 6$

$d)\ 7$

Q2 Evaluate $\int_0^3 (x^2 - 2)\,dx$ اوجد قيمة

$a)\ 3$

$b)\ 7$

$c)\ 21$

$d)\ 25$

Q3 Evaluate $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x}\, dx$ اوجد قيمة

$a) -2\ ln2$

$b) -2\ ln3$

$c)\ 2\ ln3$

$d)\ unfined$

Q4 Evaluate $\int_{1}^{x} 12\ t^5\, dt$ اوجد قيمة

$a)\ 2x^6$

$b)\ 2x^6 - 1$

$c)\ 2x^6 + 1$

$d)\ 2x^6 - 2$

Q5 Evaluate $\int_{1}^{4} e^{-2x}\, dx$ اوجد قيمة

$a) -\frac{1}{2}\, e^{-8} + \frac{1}{2} e^{-2}$

$b) -2\ e^{-8} + 1$

$c)\ -\frac{1}{2}\, e^{-8} - 1$

$d)\ -\frac{1}{2}\, e^{-4} + 1$

Q6 Evaluate $\int_{1}^{4} (x\sqrt{x} + \frac{3}{x}) dt$ اوجد قيمة

$a)\ \frac{62}{5} + 3ln4$

$b)\ \frac{62}{5} + ln4$

$c)\ \frac{64}{5} + 3ln4$

$d)\ \frac{62}{5} + 3ln3$

Theorem 5.2

النظرية 5.2

The Fundamental Theorem of Calculus. Part 2

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الثاني)

If $f(x)$ is continuous on $[a,b]$ and

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

, then $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a\,,b]$ و

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

فإن $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

Q7 Find the derivative $F'(x)$ $\boldsymbol{F(x) = \int_1^x (t^2 - 2t + 3)dt}$ اوجد المشتقة $F'(x)$

Q8 Find the derivative $\boldsymbol{f'(x)}$ $\boldsymbol{f(x) = \int_2^x (t^2 - 3t - 4)\,dt}$ اوجد المشتقة $\boldsymbol{f'(x)}$

Q9 Find the derivative $\boldsymbol{f'(x)}$ $\boldsymbol{f(x) = \int_x^2 sect\ dt}$ اوجد المشتقة $\boldsymbol{f'(x)}$

Q10 Find the derivative $\boldsymbol{f'(x)}$ $\boldsymbol{f(x) = \int_1^2 (t^2 + 3t)\ dx}$ اوجد المشتقة $\boldsymbol{f'(x)}$

The Fundamental Theorem of Calculus. Part 2

Chain Rule

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الثاني)

قاعدة السلسلة

If $f(x)$ is continuous on $[a,b]$ and

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(x)dx$$

, then $$F'(x) = f\big(g(x)\big)\ g'(x)$$

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a\ ,b]$ و

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(x)dx$$

فإن $$F'(x) = f\big(g(x)\big)\ g'(x)$$

Q11 Find the derivative $f'(x)$ $\quad f(x) = \int_0^{x^2} sint\ dt$ $\quad$ اوجد المشتقة $f'(x)$

Q12 Find the derivative $f'(x)$ $\quad f(x) = \int_0^{x^2} (e^{-t^2} + 1)\ dt$ $\quad$ اوجد المشتقة $f'(x)$

Q13 Find the derivative $f'(x)$ $\quad f(x) = \int_2^{3x+1} (t^2 + 1)\ dt$ $\quad$ اوجد المشتقة $f'(x)$

The Fundamental Theorem of Calculus. Part 2

General Form

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الثاني)

الحالة العامة

If $f(x)$ is continuous on $[a,b]$ and

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(x)dx$$

Then, $F'(x) = f(g(x))\ g'(x) - f(h(x))\ h'(x)$

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a\ ,b]$ و

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(x)dx$$

فإن $F'(x) = f(g(x))\ g'(x) - f(h(x))\ h'(x)$

Q14 Find the derivative $f'(x)$ $f(x) = \int_{e^x}^{2-x} sint^2\ dt$ اوجد المشتقة $f'(x)$

Q15 Find the derivative $f'(x)$ $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} sin(3t)\ dt$ اوجد المشتقة $f'(x)$

Q16 Find the derivative $f'(x)$ $f(x) = \int_{2x}^{x^2} \sqrt{t^2+1}\, dt$ اوجد المشتقة $f'(x)$

Q17 Find the derivative $f'(x)$ $f(x) = \int_{2-x}^{xe^x} e^{2t} dt$ اوجد المشتقة $f'(x)$

Computing the Distance Fallen by an Object

حساب مسافة الهبوط لجسم يسقط

Q18

Suppose the downward velocity of a sky diver is given by $v(t) = 9(1 - e^{-t}) m/s$ for the first 5 $seconds$ of a jump. Compute the distance fallen.

على فرض أن السرعة المتجهة (إلى الأسفل) لأحد لاعبي القفز الحر معطى بالدالة $v(t) = 9(1 - e^{-t})\ m/s$ لأول 5 ثوان من القفز. احسب المسافة المجتازة عند الهبوط.

Q19

Iman drives the car at $f(t) = 55 + 10\cos t\ \frac{km}{h}$ and Mahmoud drives the car at $f(t) = 50 + 2t\ \frac{km}{h}$

Assuming that Iman and Mahmoud stand in the same location at time t=0

Calculate $\int_0^x (f(t) - g(t))dt$ and interpret the integration in terms of the race between Iman and .Mahmoud

تقود إيمان السيارة بسرعة $f(t) = 55 + 10\cos t\ \frac{km}{h}$ ويقود محمود السيارة بسرعة $f(t) = 50 + 2t\ \frac{km}{h}$

على فرض أن إيمان ومحمود يقفان في الموقع نفسه عند الزمن $t = 0$

احسب $\int_0^x (f(t) - g(t))dt$ وفسر التكامل بدلالة السباق بين إيمان و محمود ,

Rate of Change and Total Change of Volume of a Tank معدل التغير وإجمالي التغير في حجم الخزان

Q20

Suppose that water flows in and out of a storage tank. The net **rate of change** (that is the rate in minus the rate out) **of water is** $f(t) = 20(t^2 - 1)$ **liter per minute.**

a) For $0 \leq t \leq 3$, determine **when the water** level is **increasing** and when the water level is **decreasing.**

b) If the tank has 200 **liters** of water at time $t = 0$, determine **how many liters** are in the tank at time $t = 3$ **minutes**

على فرض أن ماءا تتدفق في خزان وتتسرب خارجه كان المعدل الصافي للتغير يساوي $f(t) = 20(t^2 - 1)$ لترات في الدقيقة

أ) لكل $0 \leq t \leq 3$ حدد متى يزداد مستوى الماء ومتى ينخفض.

ب) إذا كان الخزان يسع $200\ L$ من الماء عند الزمن $t = 0$ فحدد كم لترا في الخزان في الزمن $t = 3$ دقائق .

Q21

Suppose that the rate of change of water in a storage tank is $f(t) = 10\sin t \text{ L/min}$.

a) For $0 \le t \le 2\pi$, determine **when the water** level is **increasing** and when the water level is **decreasing.**

b) If the tank has 100 **liters** of water at time $t = 0$, determine **how many liters** are in the tank at time $t = \pi$ **minutes**

على فرض أن تغير الماء في خزان $f(t) = 10\sin t \text{ L/min}$

a) لكل $0 \le t \le 2\pi$ حدد متى يزداد مستوى الماء ومتى يتناقص.

ت) إذا كان الخزان يسع $100\ L$ من الماء عند الزمن $t = 0$ فحدد كم لترا في الخزان في الزمن $t = \pi$ دقائق.

Finding a Tangent Line for a Function Defined as an Integral إيجاد المماس للدالة المعرفة على أنها تكامل.

Q22

For the function $F(x) = \int_4^{x^2} \ln(t^3 + 4)\, dt$ $x = 2$ جد معادلة المماس عند . $F(x) = \int_4^{x^2} \ln(t^3 + 4)\, dt$ للدالة

find the equation of the tangent line at $x = 2$

Q23

For the function $y = \int_2^x cos(\pi t^3)\, dt$ $x = 2$ جد معادلة المماس عند . $y = \int_2^x cos(\pi t^3)\, dt$ للدالة

find the equation of the tangent line at $x = 2$

Q24

For the function $y = \int_0^x e^{-t^2+1}dt$ find the equation of the tangent line at $x = 0$

للدالة $y = \int_0^x e^{-t^2+1}dt$. جد معادلة المماس عند $x = 0$

Q25

For the function $y = \int_{-1}^x ln(t^2 + 2t + 2)dt$ find the equation of the tangent line at $x = -1$

للدالة $y = \int_{-1}^x ln(t^2 + 2t + 2)dt$.

جد معادلة المماس عند $x = -1$

Q26 **Identify all local extrema of** $f(x) = \int_0^x t^2 - 3t + 2)\, dt$.

حدد مواقع القيم القصوى المحلية

Q27 **Use the Fundamental Theorem of Calculus**

To find antiderivative of

استخدم النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل لإيجاد الدالة الأصلية لكل من

$a)\ e^{-x^2}$

$b)\ sin\sqrt{x^2+1}$

Q28

Use the graph, f **is continuous on** $[0, 5]$

Assuming that

$$H(x) = \int_0^{\frac{x}{2}+3} f(t)\,dt$$

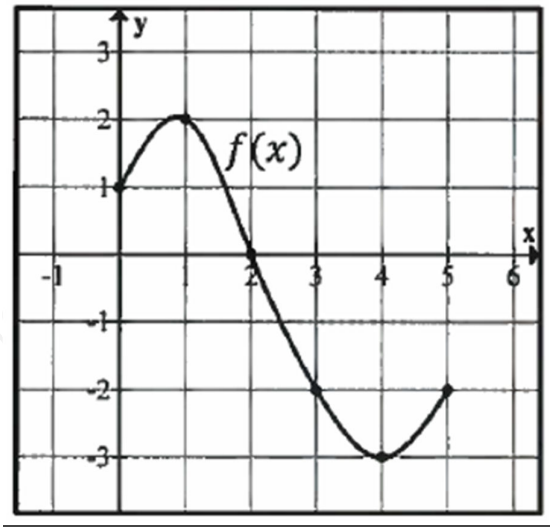
Evaluate $H'(2)$

الشكل التالي يمثل بيان الدالة f المتصلة على $[0, 5]$

بفرض أن:

$$H(x) = \int_0^{\frac{x}{2}+3} f(t)\,dt$$

أوجد قيمة $H'(2)$



Q29

If $\int_0^k (2kx - x^2)dx = 18$ **, find the value** k

إذا كان $\int_0^k (2kx - x^2)dx = 18$. أوجد قيمة k

Q30

If the mean value of $f(x)$ on the interval $[2, 5]$ is 4

Find $\int_2^5 (3f(x) + 2)dx$

إذا علمت أن القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ في الفترة $[2, 5]$ تساوي 4

أوجد $\int_2^5 (3f(x) + 2)dx$

Q31

If the mean value of $f(x) = 6x$ on the interval $[n, 2n]$ is 27

Find n, such that $n \neq 0$

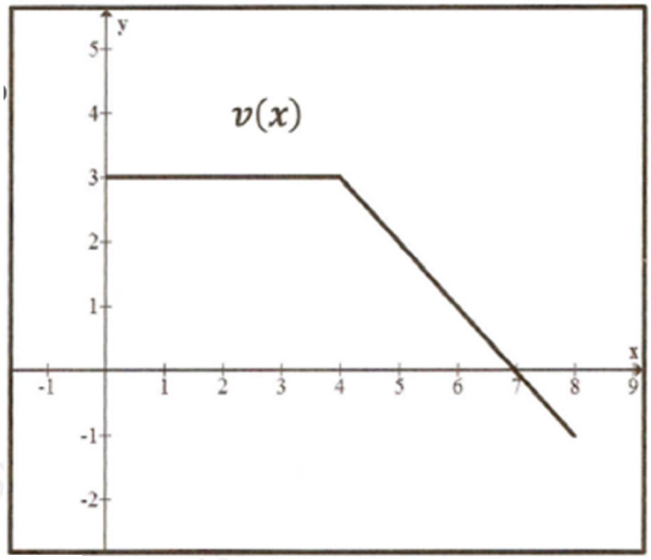
إذا علمت أن القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 6x$ على الفترة $[n, 2n]$ تساوي 27

أوجد قيمة n حيث $n \neq 0$

Q32

الرسم البياني التالي يمثل الدالة v المتصلة على الفترة $[0\ ,8]$ والعلاقة $s = \int_0^t v(x)dx$ تمثل دالة الموضع عند الزمن t لعنكبوت يتحرك على حائط لأعلى بشكل رأسي .
احسب المسافة المجتازة عند الهبوط.

حيث t مقاسة بالدقائق **(min)** ، v مقاسة بـ **(in/min)**



The following graph represents the continuous function v on the interval $[0\ ,8]$, and the relationship $s = \int_0^t v(x)dx$ represents the position function at time t for a spider moving vertically upward on a wall. .Calculate the distance traveled upon landing

where t is measured in minutes (min), v is measured in (in/min)

استخدم الرسم البياني للإجابة عن الأسئلة التالية:

1)أوجد سرعة العنكبوت $t = 5$ Find the velocity of spider

2)أوجد موقع العنكبوت $t = 7$ Find the position of spider

3)أوجد الفترة التي تكون عندها العجلة مساوية للصفر Find the interval when the acceleration is zero

5.6 Integration by Substitution
5.6 التكامل بالتعويض

Integration by Substitution

Integration by Substitution consists of the following general steps:

- **Choose a new variable u**
- **Compute $\frac{du}{dx}$**
- **Replace all terms in the integral with expressions involving u , du**
- **Evaluate the resulting u integral.**
- **Replace u in the antiderivative with expression in x**

التكامل بالتعويض

من الخطوات العامة لإجراء التكامل بالتعويض:

- **اختر متغيرا جديدا u**
- **احسب $\frac{du}{dx}$**
- **استبدل جميع الحدود في التكامل بتعابير تتضمن u و du**
- **جد قيمة تكامل u**
- **استبدل u في الدالة الأصلية بالمتغير x**

Q1 Evaluate $\int (x^3+5)^{100}(3x^2)dx$ **اوجد قيمة**

Q2 Compute $\int (3x+2)^{20} dx$ احسب

Q3 Compute $\int (3tanx+4)^5 sec^2 x dx$ احسب

Q4 Compute $\int \frac{(tan^{-1}x)^2}{1+x^2} dx$ احسب

Q5 Compute $\int x^3(x^4+1)^{\frac{-2}{3}}dx$ احسب

Q6 Compute $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}dx$ احسب

Q7 Compute $\int \frac{4}{x(lnx+1)^2}dx$ احسب

www.manasra.academy

Q8 Evaluate the indicated integral. أوجد قيمة التكامل غير المحدود. $\int e^x \sqrt{e^x + 4}\ dx$

$a)\ \frac{2}{3}(e^x + 4)^{\frac{3}{2}} + c$

$b)\ \frac{3}{2}(e^x + 4)^{\frac{1}{2}} + c$

$c) 2(e^x + 4)^{\frac{3}{2}} + c$

$d) (e^x + 4)^{\frac{3}{2}} + c$

Q9 Evaluate the indicated integral. أوجد قيمة التكامل غير المحدود. $\int \sqrt{1 + 10x}\ dx$

$a)\ \frac{1}{15}(1 + 10x)^{\frac{3}{2}} + c$

$b)\ \frac{1}{10}(1 + 10x)^{\frac{3}{2}} + c$

$c) \frac{1}{6}(1 + 10x)^{\frac{3}{2}} + c$

$d) \frac{1}{15}(1 + 10x)^{\frac{2}{3}} + c$

Q10 Evaluate the indicated integral. أوجد قيمة التكامل غير المحدود. $\int \frac{sinx}{\sqrt{cosx}}\ dx$

$a) -2\sqrt{cosx} + C$

$b)\ 2\sqrt{cosx} + c$

$c) -2cos^{\frac{3}{2}}x + c$

$d) -\sqrt{cosx} + c$

Q11 **Evaluate the indicated integral.** $\int x^2\sqrt{x^3+2}\ dx$ أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

a) $\frac{2}{9}(x^3+2)^{\frac{3}{2}}+c$

b) $\frac{2}{3}(x^3+2)^{\frac{3}{2}}+c$

c) $\frac{2}{9}(x^3+2)^{\frac{1}{2}}+c$

d) $\frac{1}{2}(x^3+2)^{\frac{3}{2}}+c$

Q12 **Evaluate the indicated integral.** $\int x^3\sqrt{x^4+3}\ dx$ أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

a) $\frac{1}{3}(x^4+3)^{\frac{3}{2}}+c$

b) $\frac{1}{6}(x^4+3)^{\frac{3}{2}}+c$

c) $\frac{1}{4}(x^4+3)^{\frac{3}{2}}+c$

d) $\frac{1}{12}(x^4+3)^{\frac{3}{2}}+c$

Q13 **Evaluate the indicated integral.** $\int sec^2x\sqrt{tanx}\ dx$ أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

a) $\frac{1}{3}(tanx)^{\frac{3}{2}}+c$

b) $\frac{2}{3}(tanx)^{\frac{1}{2}}+c$

c) $\frac{3}{2}(tanx)^{\frac{3}{2}}+c$

d) $\frac{2}{3}(tanx)^{\frac{3}{2}}+c$

Q14 Evaluate the indicated integral. $\int sin^3x\ cosx\ dx$ أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$a)\ \frac{1}{4}(sinx)^4 + c$

$b)\ \frac{1}{4}sinx^4 + c$

$c) 4sin^4x + c$

$d)\ \frac{1}{3}sin^4x + c$

Q15 Evaluate the indicated integral. $\int x^2\ cosx^3\ dx$ أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$a)\ \frac{1}{3}sin^3x + c$

$b)\ \frac{1}{3}sinx^3 + c$

$c)\ -\frac{1}{3}sinx^3 + c$

$d)\ -\frac{1}{3}sin^3x + c$

Q16 Evaluate the indicated integral. $\int sinx\ (cosx + 3)^{\frac{3}{4}}\ dx$ أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$a)\ \frac{-4}{7}(cosx + 3)^{\frac{7}{4}} + c$

$b)\ \frac{-4}{7}(cosx + 3)^{\frac{4}{7}} + c$

$c)\ \frac{4}{7}(cosx + 3)^{\frac{7}{4}} + c$

$d)\ \frac{4}{7}(cosx + 3)^{\frac{4}{7}} + c$

Q17 **Evaluate the indicated integral.** أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$$\int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$$

$a)\sin\left(\frac{1}{x}\right)+c$

$b\ -sin\left(\frac{1}{x}\right)+c$

$c)cos\left(\frac{1}{x}\right)+c$

$d)-cos\left(\frac{1}{x}\right)+c$

Q18 **Evaluate the indicated integral.** أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\,dx$$

$a)2ln(\sqrt{x}+1)+c$

$b)\frac{1}{2}ln(\sqrt{x}+1)+c$

$c)2ln(\sqrt{x})+1+c$

$d)-2ln(\sqrt{x}+1)+c$

Q19 **Evaluate the indicated integral.** أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

$a)2ln(x^2+4)+c$

$b)\frac{1}{2}ln(x^2+4)+c$

$c)-\frac{1}{2}ln(x^2+4)+c$

$d)\frac{1}{2}x\,ln(x^2+4)+c$

Q20 **Evaluate the indicated integral.** أوجد قيمة التكامل غير المحدود. $\int \frac{4}{x(lnx+1)^2}\ dx$

$a) \frac{-4}{lnx+1}+c$

$b) \frac{4}{lnx+1}+c$

$c) \frac{-8}{lnx+1}+c$

$d) \frac{-2}{lnx+1}+c$

Q21 **Evaluate the indicated integral.** أوجد قيمة التكامل غير المحدود. $\int tan2x\ dx$

$a) \frac{1}{2}ln|cos2x|+c$

$b) -\frac{1}{2}ln|cos2x|+c$

$c) \frac{1}{2}ln|cos2x|+c$

$d) -\frac{1}{2}ln|cos2x|+c$

Q22 **Evaluate the indicated integral.** أوجد قيمة التكامل غير المحدود. $\int \frac{(sin^{-1}x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

$a) \frac{(sin^{-1}x)^4}{4}+c$

$b) -\frac{(sin^{-1}x)^4}{4}+c$

$c) \frac{sin^{-1}x^4}{4}+c$

$d) \frac{(sin^{-1}x^2)^4}{4}+c$

Q23 Evaluate the indicated integral. $\int x^2 \sec^2 x^3 \, dx$ أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$a) \frac{1}{3}\tan x^3 + c$

$b) \frac{1}{3}\cot x^3 + c$

$c) \frac{1}{3}\sec^2 x^4 + c$

$d) \frac{1}{3}\tan^3 x + c$

Q24 Evaluate the indicated integral. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$ أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$a) \frac{\sin^{-1} x^2}{2} + c$

$b) -\frac{\sin^{-1} x^2}{2} + c$

$c) \frac{\sin^{-1} x^4}{4} + c$

$d) \frac{(\sin^{-1} x^2)^4}{4} + c$

Q25 Evaluate the indicated integral. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$ أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$a) \frac{1}{2}(1-x^4)^{\frac{1}{2}} + c$

$b) -\frac{1}{2}(1-x^4)^{\frac{1}{2}} + c$

$c) -2(1-x^4)^{\frac{1}{2}} + c$

$d) -\frac{1}{2}(1-x^4)^{\frac{3}{2}} + c$

Q26 Evaluate the indicated integral.

أوجد قيمة التكامل غير المحدود. $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$

$a)\ \frac{1}{3}tan^{-1}x^3 + c$

$b)\ \frac{1}{2}tan^{-1}x^4 + c$

$c)\ \frac{1}{2}tan^{-1}x^2 + c$

$d)\ \frac{1}{3}tan^{-1}x + c$

Q27 Evaluate the indicated integral.

أوجد قيمة التكامل غير المحدود. $\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$

$a)\ \frac{1}{3}\ ln(1+x^6) + c$

$b)\ \frac{5}{6}\ ln(1+x^6) + c$

$c)\ \frac{1}{6}\ ln(1+x) + c$

$d)\ \frac{1}{6}\ ln(1+x^6) + c$

Q28 Evaluate the indicated integral.

أوجد قيمة التكامل غير المحدود. $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

$a)\ tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ ln(1+x^2) + c$

$b)\ tan^{-1}x + \ln(1+x^2) + c$

$c)\ \frac{1}{2}\ ln(1+x^2) + c$

$d)\ tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ ln(1+x) + c$

Q29 **Evaluate the indicated integral.** أوجد قيمة التكامل غير المحدود. $\int \frac{1+x}{1-x^2}\ dx$

$a) -\frac{1}{2}\ ln(1-x^2)+c$

$b\ ) ln(1-x)+c$

$c) -ln(1-x)+c$

$d) \frac{1}{2}\ ln(1-x^2)+c$

Q30 **Evaluate the indicated integral.** أوجد قيمة التكامل غير المحدود. $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}\ dx$

$a) 2tan^{-1}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)+c$

$b\ ) 3tan^{-1}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)+c$

$c) \frac{2}{5}tan^{-1}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)+c$

$d) -\frac{2}{5}tan^{-1}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)+c$

Q31 **Evaluate the indicated integral.** أوجد قيمة التكامل غير المحدود. $\int \frac{x\sqrt{x}}{1+x^5}\ dx$

$a) 2tan^{-1}\left(x^{\frac{5}{2}}\right)+c$

$b\ ) 3tan^{-1}\left(x^{\frac{5}{2}}\right)+c$

$c) \frac{2}{5}tan^{-1}\left(x^{\frac{5}{2}}\right)+c$

$d) -\frac{2}{5}tan^{-1}\left(x^{\frac{5}{2}}\right)+c$

Q32 Evaluate the indicated integral. أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$$\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}\ dx$$

$a) 2tan^{-1}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)+c$

$b) 3tan^{-1}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)+c$

$c) \frac{2}{5}tan^{-1}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)+c$

$d) -\frac{2}{5}tan^{-1}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)+c$

Q33 Evaluate the indicated integral. أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$$\int x\sqrt{2-x}\ dx$$

Q34 Evaluate the indicated integral. $\int \frac{2x+3}{x+7}\,dx$ أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

Q35 Evaluate the indicated integral. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+3}}\,dx$ أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

Q36 Evaluate the indicated integral. $\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\, dx$ أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

Q37 Evaluate the indicated integral. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\, dx$ أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

Q38 Evaluate the definite integral. $\int_1^2 x^3 \sqrt{x^4+5}$ جد قيمة التكامل المحدود.

Q39 Evaluate the definite integral. $\int_0^{15} x\, e^{-x^2/2}\, dx$ جد قيمة التكامل المحدود.

Q40 Evaluate the definite integral. $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}$ جد قيمة التكامل المحدود.

Q41 Evaluate the definite integral. $\int_1^3 x\sin(\pi x^2)\,dx$ جد قيمة التكامل المحدود.

Q42 Evaluate the definite integral. $\int_{-1}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$ جد قيمة التكامل المحدود.

Q43 Evaluate the definite integral. $\int_{0}^{2} x^2 e^{x^3}\,dx$ جد قيمة التكامل المحدود.

www.manasra.academy

Q44 Evaluate the definite integral. $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ جد قيمة التكامل المحدود.

Q45 Evaluate the definite integral. $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{x}}\,dx$ جد قيمة التكامل المحدود.

Q46 Evaluate the definite integral. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cotx\, dx$ جد قيمة التكامل المحدود.

Q47 Evaluate the definite integral. $\int_{1}^{e} \frac{lnx}{x} dx$ جد قيمة التكامل المحدود.

Q48 Evaluate the definite integral. $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ جد قيمة التكامل المحدود.

Q49 Evaluate the definite integral. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ جد قيمة التكامل المحدود.

Q50 Evaluate $\int_0^{\pi/2} cosx.\ f(sinx)dx \quad if \int_0^1 f(x)dx = 2$ احسب

Q51 Evaluate $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx \quad if \int_1^2 f(x)dx = 3$ احسب

Q52

Make the indicated substitution for an unspecified function $f(x)$. ضع التعويض المعطى لدالة غير محددة $f(x)$

$$u = x^2 \ for \int_0^2 xf(x^2)dx$$