

خطوط التقارب :

تمرين (1) ص 107 $f(x) = \frac{1-2x}{x^2-1}$ مطلوب $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ $a=1$ (الكسر هنا لا يختص)

a $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-2x}{x^2-1} = -\infty$

ألاحظ عندما $x^2-1=0$
 $x^2=1 \rightarrow x=-1$
 $x=+1$

وعندما $x \rightarrow 1$ فإن
 $(x^2-1) \rightarrow 0$
 والكسر | تكبر بلا نهاية
 $\rightarrow \infty$ أو $-\infty$

ويمكن ملاحظة ذلك من جدول قيم

0	0.9	0.99	0.999	1
$f(x)$	4.21	49.24	499.24	عز

معرف $f(x) \rightarrow$ تزيد بلا نهاية

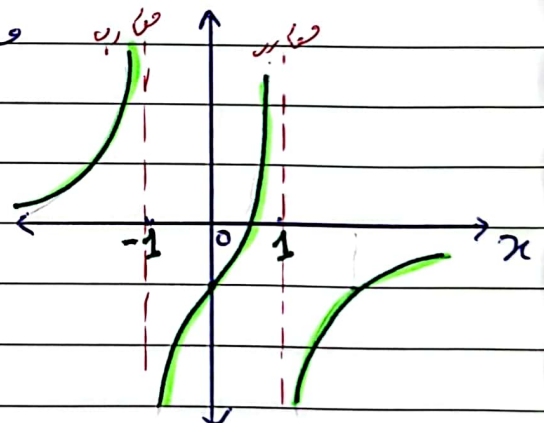
b $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-2x}{x^2-1} = -\infty$

ويمكن ملاحظة ذلك من جدول قيم

x	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	عز	-500.7	-50.7	-5.714

$f(x) \rightarrow$ تنافس
 بلا نهاية

c $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ غير موجود من a و b



لو تذكرنا الرسم البياني لـ $f(x)$ نجد انقطاع لاقتناهي عند $x=1$

تمرين (2) ص 107 $f(x) = \frac{1-2x}{x^2-1}$ مطلوب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

بنفس طريقة النقطة للتمرين 1 نجد:

a $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

b $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

c $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ غير موجود

ويمكن ملاحظة ذلك من الرسم البياني

No:

Date:

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-4x+4}$$

مَرِن (3) ص 107

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ مطلوب}$$

ألاحظ الكسر لا يختصر

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-4}{x^2-4x+4} = -\infty$$

مَن كَبِدَ لِأَمْرٍ مِنْ جِدْوَلِيَّتْ $x \rightarrow 2^-$ نَجِدْ
 $f(x) \rightarrow -\infty$ (صَغِيرٌ بِلَوْنٍ 0)

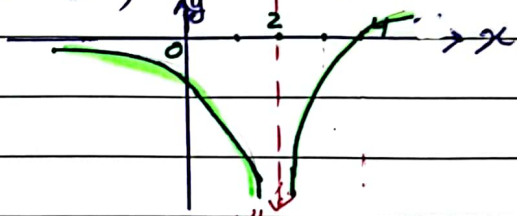
$x \rightarrow 2$
 الصفر → المقام متساو
 ∞ → الكسور

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-4}{x^2-4x+4} = -\infty$$

مَن كَبِدَ لِأَمْرٍ مِنْ جِدْوَلِيَّتْ $x \rightarrow 2^+$ نَجِدْ
 $f(x) \rightarrow -\infty$ (صَغِيرٌ بِلَوْنٍ 0)

$$c) \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x^2-4x+4} = -\infty \right) \text{ من } a \text{ و } b$$

يَمَازِنُ عِلَاقَةً ذَلَالَةً فِي الرِّسْمِ (بَيَانِي)
 الجداول $f(x)$



$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ مطلوب} \quad f(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$$

مَرِن (4) ص 107

$$a) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1-x}{(x+1)^2} = \infty$$

مَن كَبِدَ لِأَمْرٍ مِنْ جِدْوَلِيَّتْ $x \rightarrow -1^-$ نَجِدْ
 $f(x) \rightarrow \infty$ (كَبِيرٌ بِلَوْنٍ 0)

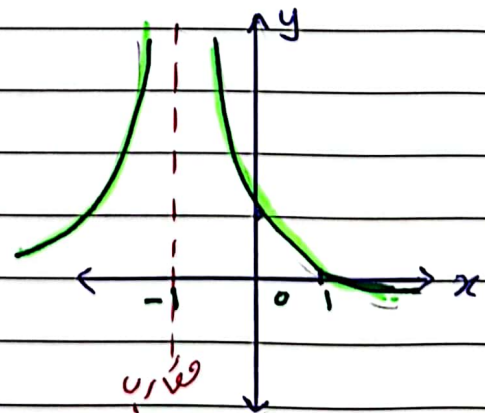
$$b) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-x}{(x+1)^2} = \infty$$

مَن كَبِدَ لِأَمْرٍ مِنْ جِدْوَلِيَّتْ $x \rightarrow -1^+$ نَجِدْ
 $f(x) \rightarrow \infty$ (كَبِيرٌ بِلَوْنٍ 0)

$x \rightarrow -1$
 0 → المقام متساو
 ∞ → الكسور

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

وَيَمَازِنُ عِلَاقَةً ذَلَالَةً فِي الرِّسْمِ (بَيَانِي)
 الجداول $f(x)$



No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4}$$

عزني (5) ص 107

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4} = -\infty$$

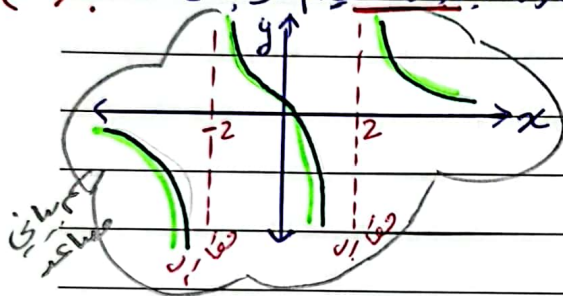
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 4} \text{ غير موجود}$$

$x \rightarrow -2$
 $\infty \rightarrow$ المقام فقط
 $0 \rightarrow$ البسط

يمكن تحديد من $+\infty$ و $-\infty$ من خلال جدول للقيم قريب -2 (أولاً/ثانياً)

أولاً نلاحظ الرسم البياني للدالة
 ويكون $x = -2$ خط تقارب رأسي



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 2x - 3)^{-\frac{2}{3}}$$

نلاحظ عند $x \rightarrow -1$ فإن

$$x^2 - 2x - 3 \rightarrow 0 \text{ (تقريباً من 0 ويكون موجباً)}$$

$$\text{وكذلك } (x^2 - 2x - 3)^{-\frac{2}{3}} \rightarrow \infty$$

$$\text{وبالتالي } (x^2 - 2x - 3)^{-\frac{2}{3}} \rightarrow \infty \text{ (يكون موجباً)}$$

نلاحظ أن $x \rightarrow -1$ فإن
 المقام $\rightarrow 0$ (موجباً)
 البسط $\rightarrow \infty$ (موجباً)

المنطق بطريقة أخرى:

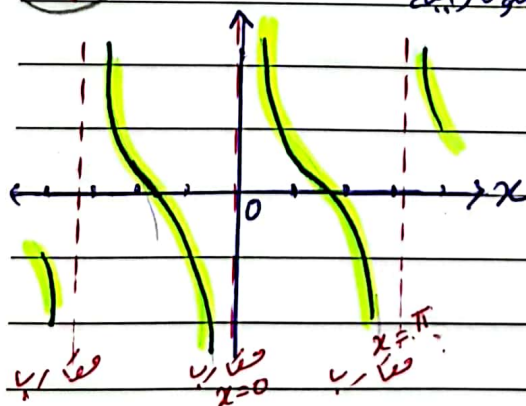
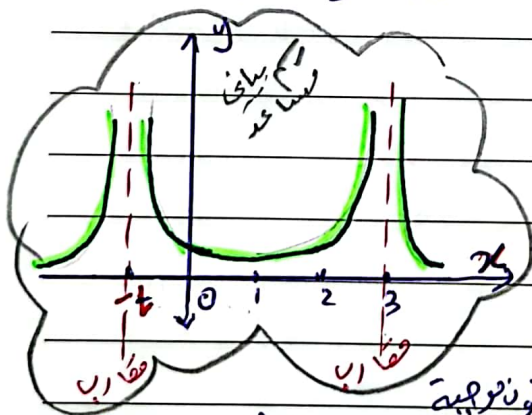
$$(x^2 - 2x - 3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(x^2 - 2x - 3)^{\frac{2}{3}}}$$

عند $x \rightarrow -1$ المقام $\rightarrow 0$ (موجباً)

وبالتالي $\rightarrow \infty$ (الكسرا)

نجد أيضاً أنها باختيار خواص

مناسبة (مربعاً) $(x^2 - 2x - 3)$ ستكون موجبة



$$\lim_{x \rightarrow 0} \cot x$$

عزني (7) ص 107

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \text{ غير موجود}$$

نلاحظ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ وعند $x \rightarrow 0$ فإن $\cos x \rightarrow 1$ و $\sin x \rightarrow 0$ (موجباً)
 ونلاحظ أيضاً $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ وعند $x \rightarrow 0$ فإن $\cos x \rightarrow 1$ و $\sin x \rightarrow 0$ (موجباً)
 ونلاحظ أيضاً $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ وعند $x \rightarrow 0$ فإن $\cos x \rightarrow 1$ و $\sin x \rightarrow 0$ (موجباً)

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \cdot \sec^2 x \quad \text{تمرين (8) ص 107}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \cdot \sec^2 x = x \cdot \frac{1}{(\cos x)^2} = \frac{x}{\cos^2 x}$$

الأولى بالترتيب عند حساب المقام

ملاحظة: عند $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$
 $\cos^2 x \rightarrow 0$ المقام فقط
 $\rightarrow \infty$ الكسرة

عند الأول في اختيار رقم مناسب $(x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+)$ ثم $(x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-)$

أو بتذكر $(x \rightarrow \frac{\pi}{2})$ لكل كاف سيكون السهل موجب

مربع $\rightarrow$ (موجب) $\leftarrow$ $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ في الربع الأول يكون x موجب
 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$ في الربع الثاني يكون x موجب

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 4x - 1}$$

تمرين (9) ص 108

الآن: (البسط $\rightarrow \infty$) وكذلك (المقام $\rightarrow \infty$) صيغة غير محددة $\frac{\infty}{\infty}$
 الحذر! بطول: يتبع كل حد في البسط وفي المقام على أكبر أس للعدد في المقام (x^2)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

نذكر نظرية لوبيط 103 ص
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$
 لأنني عدد دقيقي

$$= \frac{1 - 0 - 0}{3 + 0 - 0} = \frac{1}{3}$$

الحل الآخر: بما أن $x \rightarrow \infty$ نكتب من (Lim) بسط باقى (الحل)
 وكذلك (Lim) المقام

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 4x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^2 - 3x - 1}$$

تمرين (10) ص 108

طريقة أخرى بقرينة كل عدد حقيقي ولفاء على x^2

$$\text{وبما أن } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ (بقرينة)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2-0+0}{4-0-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

حل أسير بقرينة كل عدد حقيقي ولفاء على x^2 (بقرينة $x \rightarrow \infty$)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{4+x^2}}$$

تمرين (11) ص 108

طريقة أخرى: نخرج x^2 كما فعلنا في المثال الجبر في المثال

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2(\frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-x\sqrt{\frac{4}{x^2} + 1}}$$

$$\sqrt{x^2} = -x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{x^2} + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$$

أسلوب آخر (مماثل) بالاحتفاظ بالـ x^2 في المقام (بقرينة $x \rightarrow \infty$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{-x} = 1$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

نذكر
ولأن $x \rightarrow -\infty$ فإن x سالبة
 $\sqrt{x^2} = |x| = -x$
ولأن $x \rightarrow \infty$ فإن x موجبة
 $\sqrt{x^2} = |x| = x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{4x^3 - 5x - 1}$$

تمرين (12) ص 108

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}}{4 - \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \frac{0-0}{4-0-0} = 0$$

إما بقرينة كل عدد حقيقي ولفاء على x^3 (بقرينة $x \rightarrow \infty$)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x-3}\right)$$

مَرْنِي (13) ص 108

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}}\right)$$

طريقة أخرى:

بقسمة كل حد على x (أعلى أس في المقام)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{x - \frac{3}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x+0}{x-0}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

عند $\frac{1}{x} \rightarrow 0$
عند $x \rightarrow \infty$

طريقة ثانية: (ربما تكون سهلة للطلاب)

(وقد لا تكون دقيقة، تأملوا)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x-3}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x-3}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x \sin x)$$

مَرْنِي (14) ص 108

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ \sin x \rightarrow 0^+ \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x \cdot \sin x \rightarrow 0^+$$

$$\ln(x \cdot \sin x) \rightarrow -\infty$$

الطلاب فقط للسهولة عند معرفة

$$(x \rightarrow 0) \Rightarrow (\ln(x)) \rightarrow -\infty$$

عند $\ln 0$ غير معرف

$$u = (x \cdot \sin x)$$

$$u \rightarrow 0^+ \text{ فـ } x \rightarrow 0^+ \text{ فـ } u \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

مَرْنِي (15) ص 108

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(e)^{\frac{2}{x^3}}} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ \frac{2}{x^3} \rightarrow \infty \end{array} \right\}$$

المقام كبير
الكسر $\rightarrow 0$ طريقة ثانية (نقلب الأيسر بـ e ونغير إشارة الأس $\frac{-2}{x^3}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{x^3}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\infty} \rightarrow 0$$

الأس $\frac{2}{x^3}$ يكبر ولا يس بـ $\frac{1}{e}$ أقل من 1 وكلما زاد الأس اقترب القيمة من 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^u = \lim_{u \rightarrow \infty} e^u$$

$$\rightarrow e^{-\infty} \rightarrow 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \frac{-2}{x^3} \rightarrow -\infty \end{array} \right\} u \rightarrow -\infty$$

طريقة أسرع:

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e)^{\frac{-(x+1)}{x^2+2}}$$

مَرْنِي (16) ص 108

لاحظ عندما $x \rightarrow \infty$

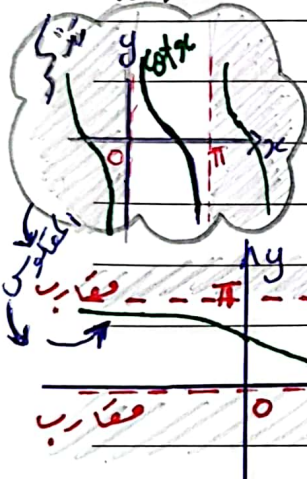
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-(x+1)}{x^2+2} \right) = 0$$

عَيِّن ايجادها بحد و لِيَمَّ
وعَيِّن ايجادها بقسمة كل حد في
البسط والمقام على x^2

عَيِّن ايجادها بأخذ الحد الأعلى من
في كل من البسط والمقام لأنه $x \rightarrow \infty$ (كلها كثيرة حدود)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (e)^{\frac{-(x+1)}{x^2+2}} = e^0 = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cot^{-1} x = 0$$

تذكر $\cot^{-1} x$ يعني ايجاد زاوية θ بحيث $\cot \theta = x$

$x \rightarrow \infty$ يعني $\cot \theta \rightarrow \infty$

وهذا يعني $\theta \rightarrow 0$

لو لاحظنا الرسم البياني

$$f(x) = \cot^{-1} x$$

كثيراً أفرغ الأيمن $x \rightarrow \infty$

نجد الرسم يقترب من المحور x ($f(x) \rightarrow 0$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sec^{-1} \frac{x^2+1}{x+1}$$

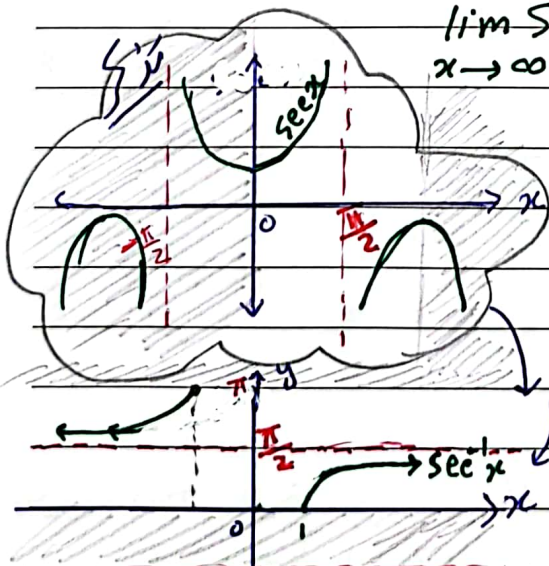
مَرْنِي (18) ص 108

لاحظ عندما $x \rightarrow \infty$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \infty$$

غير محدد (كثير جداً)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sec^{-1} u = \frac{\pi}{2}$$



مَرْنِي (19) ص 108

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(e)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sin(e^u) = \sin(e^{\infty})$$

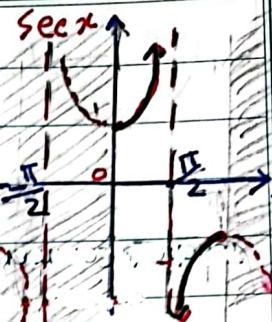
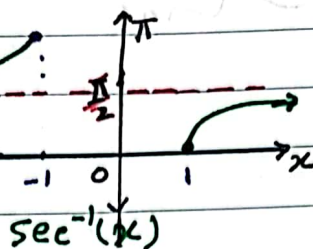
بفرص $u = \frac{1}{x^2}$ يصبح المطلوب: $\lim_{u \rightarrow \infty} \sin(e^u)$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \sin z = \sin 0 = 0$$

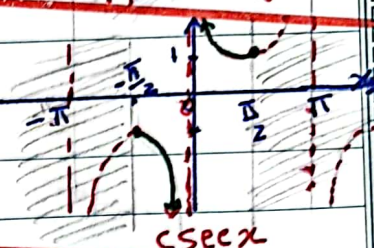
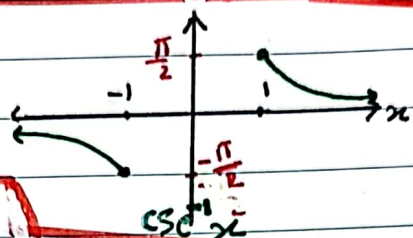
(ملاحظة في الصفحة التالية)

بيان دوال العكوس
ملتبسة

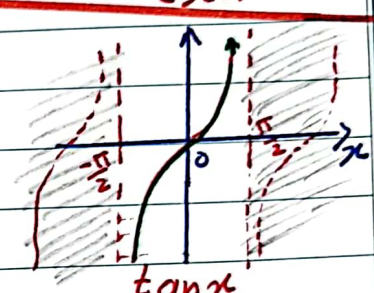
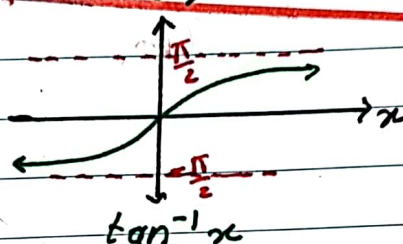
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \csc^{-1} x = 0$$

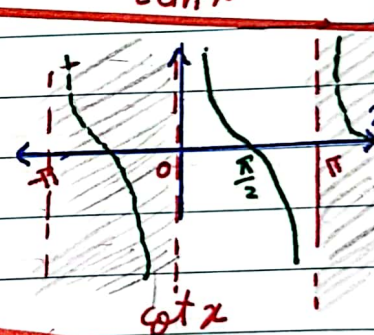
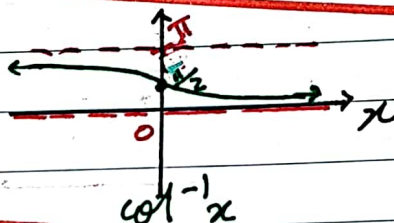


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cot^{-1} x = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cot^{-1} x = \pi$$

الطرف الأيسر بعض
بعض الخصائص

بالاستقامة بالرسم
أو حفظاً

في الوسط مثل
بيان الدوال

$$\begin{aligned} f(x) &= \sec^{-1} x \\ f(x) &= \csc^{-1} x \\ f(x) &= \tan^{-1} x \\ f(x) &= \cot^{-1} x \end{aligned}$$

رسم المعكوس

بعد اختيار جزء

مناسب من مجال

الدوال على اليمين

الطرف الأيمن مثل
الدوال

$$\begin{aligned} y &= \sec x \\ y &= \csc x \\ y &= \tan x \\ y &= \cot x \end{aligned}$$

فكونها معكوس

Assessment مناسب

Objectives متطلبات (حفظ)

الجزء الذي لا يعكس معكوس

Date

No:

Date:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(e)^{\frac{1}{x^2}}$$

محلّی (19)

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x^2}} \rightarrow e^{+\infty} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \sin(\infty) = \sin 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\tan^{-1} x)$$

محلّی (20) ص 108

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

لو فرضنا $u = \tan^{-1} x$ نجد: (من خلال تذكرنا لبيان دالة $u = \tan^{-1} x$)

(أو من خلال جدول قيم $x \rightarrow \infty$ وبتدريجاً نجد النهاية كالتالي: $\frac{\pi}{2}$)

$$\lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(u)$$

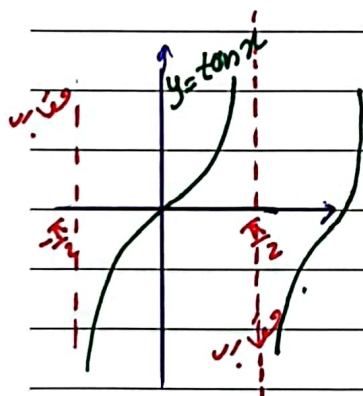
يصبح المطلوب

$$u \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (\tan^{-1} x \rightarrow \frac{\pi}{2}) \Rightarrow (\sin(\tan^{-1} x)) \rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

النهاية = 1



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{-\tan x}$$

محلّی (21) ص 108

$$① x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow \tan x \rightarrow +\infty$$

$$-\tan x \rightarrow -\infty$$

$$e^{-\tan x} = \frac{1}{e^{\tan x}} \rightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (e^{-\tan x}) = 0$$

(ملاحظة) أومن معلوماتنا السابقة عن دالة $\tan x$

المقام يتغير بلاشعنا عنه $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ وبالنسبة للكسر يتناهي إلى صفر

$$② x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+ \Rightarrow \tan x \rightarrow -\infty$$

$$-\tan x \rightarrow +\infty$$

$$(e)^{-\tan x} \rightarrow +\infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} e^{-\tan x} = \infty$$

من ① و ② نجد:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{-\tan x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{-\tan x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} e^{-\tan x} = \lim_{u \rightarrow \infty} e^u = \infty$$

طريقة أخرى بفرض $u = -\tan x$

والنهاية غير موهبة

No:

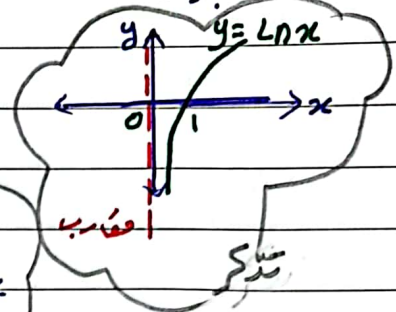
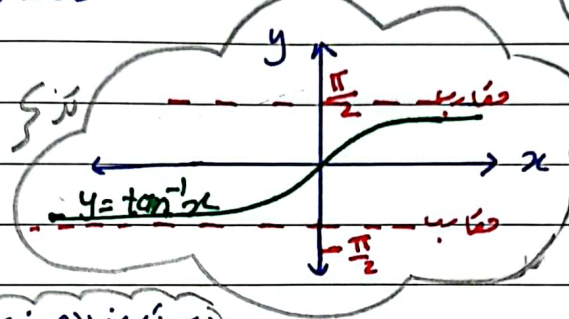
Date:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$$

تمرين (22) ص 108

$$(x \rightarrow 0^+) \Rightarrow (\ln x \rightarrow -\infty) \quad \text{بفرض } u = \ln x$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(u) = -\frac{\pi}{2}$$



الرسم التالي للمساعدة

تمرين (23) ص 108 [a] $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ مطلوب تحديد خطوط التقارب رأسي وأفقي لكل جانب (طرفا) من خط التقارب

تحديد هل هو $f(x) \rightarrow \infty$ أو $f(x) \rightarrow -\infty$ للمقارب الرأسية

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{4-x^2} = \infty \rightarrow \text{المقارب } \infty \rightarrow \text{الكسر}$$

(نحدد لا بد من جهة جدول قيم أو عن الرسم)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{4-x^2} = -\infty$$

يوجد مقارب رأسي $x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{4-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{4-x^2} = -\infty$$

يوجد مقارب رأسي $x=2$

المقاربات الأفقية: درجة بسط > درجة مقام

$y=0$ مقارب أفقي

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

تذكر: ∞ أو $-\infty$ $f(x)$ و $(x \rightarrow A)$ يكون $x=A$ مقارب رأسي

$f(x) \rightarrow B$ و $x \rightarrow \infty$ تكون $y=B$ مقارب أفقي

والدالة في [a] هذا الرسم البياني

No. المطوية المطلوب (تقارب) Date: $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$
(الكسرية) (خطوط)

تمرين (23) ص 108 [B]

$$4-x^2=0 \Rightarrow x = \pm 2$$

المقاربات الرأسية

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow -2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -2^+$$

$$x = -2$$

مقارب رأسي

$$\lim_{x \rightarrow +2^-} f(x) = +\infty$$

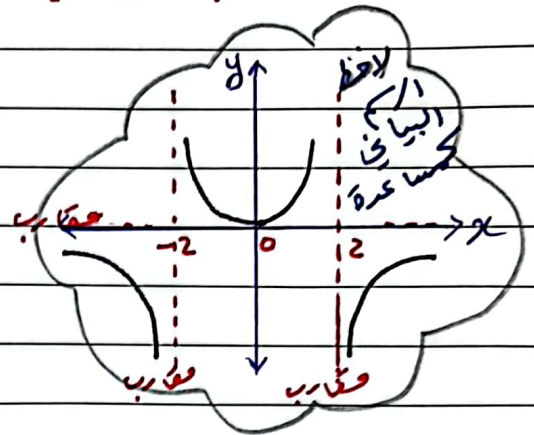
$$x \rightarrow +2^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +2^+} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow +2^+$$

$$x = +2$$

مقارب رأسي



المقاربات الأفقية:

(درجة كثيرة الحدود في البسط = درجة كثيرة الحدود في المقام) كثير الحدود في المقام

$$y = \frac{1}{-1} = -1$$

المعامل الأخرى في البسط
المعامل الأخرى في المقام

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

تمرين (24) ص 108 [A]

$$x^2 \geq 0$$

المقاربات الرأسية: لا يكون المقام صفرًا أبدًا، (مميز أبدًا) $4+x^2 > 0$

$$\sqrt{4+x^2} > 0$$

لا يوجد مقارب رأسي

المقاربات الأفقية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

لإزالة الطريقة أدنى:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(\frac{4}{x^2} + 1)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x\sqrt{\frac{4}{x^2} + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{\frac{4}{x^2} + 1}} = \frac{1}{-\sqrt{0+1}} = -1$$

خط مقارب أفقي $y = 1$ عندما $x \rightarrow \infty$

خط مقارب أفقي $y = -1$ عندما $x \rightarrow -\infty$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$$

$$x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = -x$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$= -x$$

$$x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = -x$$

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$$

للطلاب قد يكون أسهل (وليس بالدرجة المطلوبة)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow y = 1, y = -1$$

مطلوب خطوط التقارب
Date: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

تمرين (24) ص 108 [b]

المقاربات الرأسية: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

(نبحث في أمثلة مقام) ويكون $f(x) \rightarrow +\infty$

عندما $x \rightarrow 2^- \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

وعندما $x \rightarrow -2^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

مقارب رأسي $x = +2$

مقارب رأسي $x = -2$

المقاربات الأفقية لاحظ أن $-2 < x < +2$

(أي لا يكون $x \rightarrow +\infty$ أو $x \rightarrow -\infty$ خارج المجال)

لا يوجد مقاربات أفقية

تذكر
هذه الدالة معرفة

عندما $4 - x^2 > 0$

$4 > x^2$

$-2 < x < +2$

$x \rightarrow 2^-$ من يسار نقطة

$x \rightarrow -2^+$ من اليمين نقطة

و يمكن بطريقة أخرى للمقاربات الأفقية: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(\frac{4}{x^2} - 1)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x| \sqrt{\frac{4}{x^2} - 1}} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \sqrt{\frac{4}{x^2} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{0-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{\frac{4}{x^2} - 1}} = \frac{1}{-\sqrt{0-1}}$$

وكلاهما غير موجود (غير معرف)

تمرين (25) ص 108 $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

(الكسر لا يبسط هنا)
مطلوب خطوط التقارب

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$
 $x = 3$

المقاربات الرأسية
(نبحث في أمثلة مقام)

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

مقارب رأسي $x = -1$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

مقارب رأسي $x = 3$

المقاربات الأفقية: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$

$y = 3$ مقارب أفقي

No: مطلوب مظهر التقارب Date:

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2+x-2}$$

مركز (26) ص 108

$$f(x) = \frac{(1-x)}{(x-1)(x+2)}$$

بين التكامل، الاختصار، للكسر هنا:

$$= \frac{1}{(x+2)}$$

ستوجد نقطة عند $x=1$
 $x=1 \rightarrow y = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ $(1, \frac{1}{3})$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

للمقاربات الرأسية:
 (نقطة في أصغر المقام)

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \infty$$

$\Rightarrow$ مقارب رأسي $x = -2$

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

درجته البسط أقل من درجته المقام: $y=0$ مقارب أفقي

(وهو نفس المحور x)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ مقارب}$$

$$f(x) = 4 \tan^{-1}(x) - 1$$

مركز (27) ص 108

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4 \left(\frac{\pi}{2} \right) - 1 = 2\pi - 1 \approx 5.28$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 \left(-\frac{\pi}{2} \right) - 1 = -2\pi - 1 \approx -7.28$$

$$y = 2\pi - 1 \text{ و } y = -2\pi - 1 \text{ مقاربان أفقيان}$$

لا يوجد مقارب رأسي لأن:

$$y = f(x) \rightarrow \pm \infty$$

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$$

$$4x - \frac{\pi}{2} < 4 \tan^{-1} x < 4x + \frac{\pi}{2}$$

$$-7.28 \approx -2\pi - 1 < 4 \tan^{-1} x - 1 < 2\pi - 1 \approx 5.28$$

$f(x)$ محدود بين عددين

لا يمكن $f(x) \rightarrow \pm \infty$

No:

Date:

مطلوب المقاربات $f(x) = \ln(1 - \cos x)$ ص 108

تذكر أن دالة اللوغاريتم معرفة عندما: $1 - \cos x > 0$ أي: $\cos x > 1$

وعندما: $1 - \cos x = 0$

(حل واحد) $x = 0 \rightarrow \cos x = 1$

والحل واحد لكل عام لهذه المعادلة $x = 0 + 2n\pi$

خطوط تقارب رأسية $x = 2n\pi$

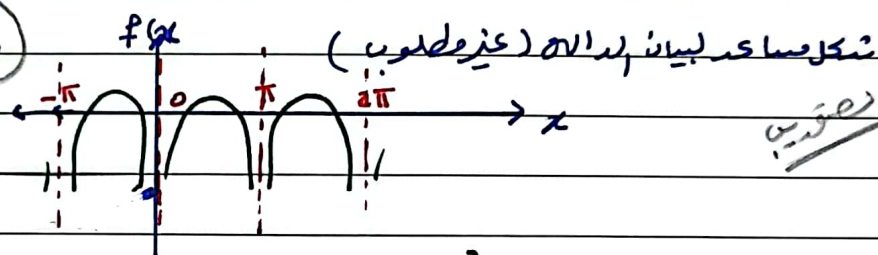
لا يوجد خطوط تقارب أفقية

(لأن يكون $f(x) \rightarrow \infty$)

$x \rightarrow 2n\pi$

$(1 - \cos x) \rightarrow 0$

$\ln(1 - \cos x) \rightarrow -\infty$



مطلوب كثيرة خطوط التقارب الرأسية والمائلة $y = f(x) = \frac{x^3}{4 - x^2}$ ص 108

المقاربات الرأسية: $4 - x^2 = 0 \rightarrow x = 2, x = -2$

ص 108 $\lim_{x \rightarrow \pm 2} f(x)$

الكرسي (نتيجة في أصغر المقام)

درجة البسط < درجة المقام لا يوجد مقارب أفقية

درجة البسط > درجة المقام بـ 1 يوجد مقارب مائل

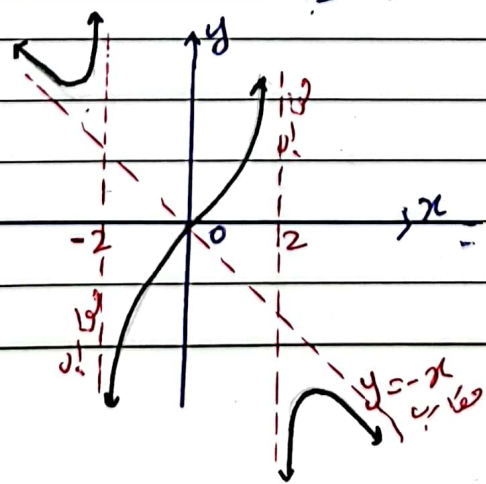
نتيجة معادلة بقية بسط على المقام الناتج = y (دالة الاضمار بالباقي)

ممكن إجراء عملية مطوية

$$\begin{array}{r} \text{ناتج} \\ 4 - x^2 \overline{) -x} \\ \underline{x/3} \\ +4x + x/3 \end{array}$$

معادلة البقية المقارب المائل $y = -x$

باقي $4x$ (أقل من درجة المقام)



شكل مساعد (غير مطلوب)

No: مطلوب المقادير الأساسية والمقادير المائلة

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$$

تمرين (30) ص 108

المقادير الأساسية:

الكسر مبسط $\rightarrow$ (نبحث في أصفار المقام) $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty \end{array} \right\} \text{مقارب رأسي } x = 2$$

(درجة البسط < درجة المقام) لا يوجد مقارب أفقي

• درجة البسط: 2 تزيد عن درجة المقام: 1 $\rightarrow$ يوجد مقارب مائل
بقسمة البسط على المقام:

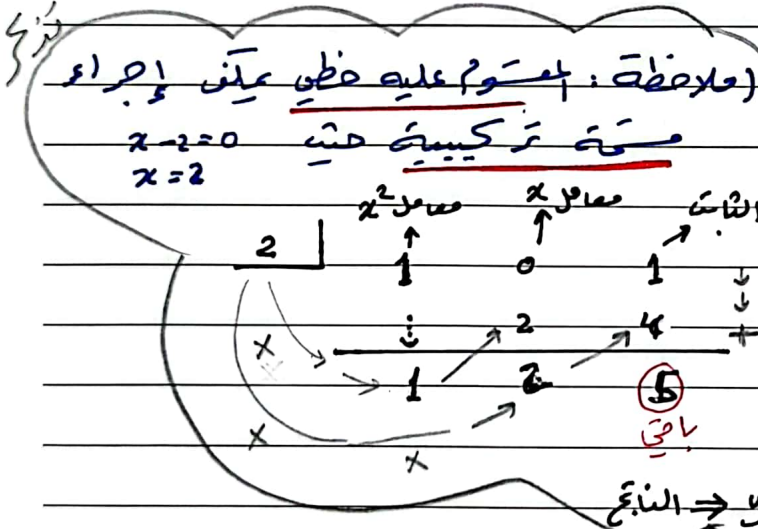
مقارب مائل $y = x + 2$

$$\begin{array}{r} \text{الناقص} \\ (x+2) \overline{) x^2+1} \\ \underline{-x^2+2x} \\ 2x+1 \\ \underline{-2x+4} \\ 5 \end{array}$$

الباقى 5

(الناقص من الدرجة الأولى)
معاملاته 1 ثم 2

الناقص $\Rightarrow y = x + 2$



تمرين (31) ص 108

مطلوب خطوط المقارب الأساسية والمائلة

$$y = \frac{x^3}{x^2 + x - 4}$$

المقادير الأساسية

الكسر مبسط $\rightarrow$ نبحث في أصفار المقام: $x^2 + x - 4 = 0$
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$
 $x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$

يوجد مقادير أساسيان $x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \approx 1.56$ و $x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \approx -2.56$

لا يوجد مقارب أفقي

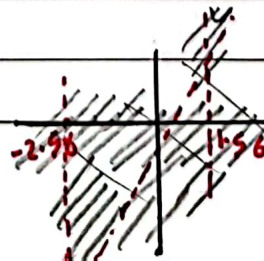
نقسم البسط على المقام (قسمة مطولة)

المقارب المائل $y = x - 1$

$$\begin{array}{r} x \overline{) x^3} \\ \underline{-x^2+x-4} \\ x^3 \\ \underline{-x^3+x^2-4x} \\ x^2+4x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^2+4x \\ \underline{+x^2+x+4} \\ 5x+4 \end{array}$$

الباقى $5x + 4$



- المقاربات الرأسية $x^3+2=0 \Rightarrow x^3=-2$
 الكسوف (نتج في أصفار المقام) $x = \sqrt[3]{-2}$ مقارب رأسي (26-1-1-26) x
 • لا مقارب أفقي (درجة البسط أكبر من درجة المقام)
 • المقارب المائل نقيم البسط على المقام (قسمة مطولة)

المقارب المائل $y = x$

$$\begin{array}{r} x^3+2 \overline{) x^4} \\ \underline{-x^4} \\ -2x \end{array}$$

بقي $-2x$

- تمرين (33) 108 ص $f(x) = \frac{80x^{-0.3} + 60}{2x^{-0.3} + 5}$ حجم بونيو العين x : كثافة الصوديوم على بونيو
 مطلوب اوجد $f(x)$ الحجم عند $x=0$ لا يوجد بونيو $(x=0)$
 (2) يوجد كمية لا نهائية من الصوديوم $(x \rightarrow \infty)$

① لا يوجد بونيو $x=0$ نفوض (مبدئياً)

غير معرف $f(0) = \frac{80(0)^{-0.3} + 60}{2(0)^{-0.3} + 5}$

لاحظ $\frac{1}{(0)^{0.3}} = 0^{-0.3}$
 اولا حفظ x موجبة

لذلك نوجد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{80 \left(\frac{1}{x^{0.3}} \right) + 60}{2 \left(\frac{1}{x^{0.3}} \right) + 5}$$

للاختصار أو لتبسيط الأمر

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{80 + 60x^{0.3}}{2 + 5x^{0.3}}$$

$$= \frac{80 + 6(0)}{2 + 5(0)} = \frac{80}{2} = 40 \text{ m.m}$$

② يوجد كمية غير متناهية من الصوديوم $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{80x^{-0.3} + 60}{2x^{-0.3} + 5}$$

$$= \frac{80(0) + 60}{2(0) + 5} = 12 \text{ m.m}$$

لاحظ: $x^{-0.3} = \frac{1}{x^{0.3}}$
 وعند $x \rightarrow \infty \Rightarrow \left(\frac{1}{x^{0.3}} \right) \rightarrow 0$

No:

Date:

$$f(x) = \frac{80x^{-0.3} + 60}{8x^{-0.3} + 15} \quad \text{مركبي (34) } 108$$

تكم البؤنة: $f(x)$

كتابة البؤنة: x

① لا يوجد بؤنة $x=0$

لو عوضنا بفصل على كذا في غير صفر

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{80x^{-0.3} + 60}{8x^{-0.3} + 15} \quad \leftarrow x x^{0.3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{80 + 60x^{0.3}}{8 + 15x^{0.3}} = \frac{80}{8} = 10 \text{ m.m} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{80(0) + 60}{8(0) + 15} = 4 \text{ m.m} \quad \text{② بؤنة لا نهائي}$$

$$f(x) = \frac{80x^{-0.3} + 60}{2x^{-0.3} + 5} \quad \text{مركبي (35) } 108$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 8 \quad \text{لصبح ①}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{80 + 60x^{0.3}}{2 + 5x^{0.3}} = 8$$

$$f(x) = \frac{80x^{-0.3} + 60}{10x^{-0.3} + 30} \quad \text{لصبح : عدل : } \frac{80}{2} = 8$$

سجّلها 10

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \text{لصبح : ②}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{80x^{-0.3} + 60}{2x^{-0.3} + 5} = 2 \quad \text{لطف } x \rightarrow \infty \quad \text{عدل : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{80x^{-0.3} + 60}{2x^{-0.3} + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{80(0) + 60}{2(0) + 5} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{80}{5} = 2$$

$$f(x) = \frac{80x^{-0.3} + 60}{2x^{-0.3} + 30} \quad \text{لصبح : عدل : } \frac{80}{5} = 2$$

الاعتدال (النهائي) المطلوب من خلال ① و ②

$$f(x) = \frac{80x^{-0.3} + 60}{10x^{-0.3} + 30}$$

لطف

No:

Date:

$$f(x) = \frac{20x^{-0.4} + 16}{g(x)}$$

مَرْيَم (36) ص 108

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 5$$

من خلال المَرَيَمِينِ 33 و 34 البَينِ المَقَامِينِ

$$g(x) = ax^{-0.4} + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{20x^{-0.4} + 16}{ax^{-0.4} + b} = \frac{20}{a}$$

وَصَدْنَا :
(بعد القَسْرِ البَينِ والمَقَامِينِ $x^{-0.4}$)

$$\frac{20}{a} = 5 \Rightarrow a = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{20x^{-0.4} + 16}{ax^{-0.4} + b} = \frac{16}{b}$$

وَصَدْنَا :

$$\frac{16}{b} = 4 \Rightarrow b = 4$$

$$g(x) = 4x^{-0.4} + 4$$

$$L(t) = \frac{-\sqrt{\frac{32}{k}}}{1 + (e)^{-2t\sqrt{32k}}} \quad \text{مَرْيَمِ (37) ص 108}$$

مَطْلُوبُ ① المَصَاعِلُ : عِنْدَمَا $k = 0.00064$

$$-\sqrt{\frac{32}{k}} = -\sqrt{\frac{32}{0.00064}} = 223.6 \approx 224$$

$$k = 0.00128 \Rightarrow -\sqrt{\frac{32}{0.00128}} \approx 158$$

مَطْلُوبُ ② عَالِ التَّغْيِيرِ الوَاجِبِ لِجَرَاؤِهِ عَلَى k لِحَقْقِ المَصَاعِلِ لِأَقْصَى سَرْعَةٍ لِلنَّصْفِ

$$-\sqrt{\frac{32}{k}} \quad \text{المَصَاعِلُ}$$

$$\frac{1}{2}x = -\sqrt{\frac{32}{k}} \quad \text{نَحْفِظُ لِلنَّصْفِ يَصْبِيحُ :}$$

$$-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{32}{k}} = -\sqrt{\frac{32}{4k}}$$

ضَرْبَتْ k بِ (4) (هُوَ المَصَاعِلُ المَطْلُوبُ)

مَرْيَمِ (38) ص 108

No. التاريخ Date:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2+x)}{\ln(x^2+3x+3)}$$

تمرين (39) ص 108

المطلوب: بيانياً وعددياً

x	10	100	1000	عددياً
$f(x)$	0.5081	0.5005	0.50003	

$$f(x) \rightarrow 0.5$$

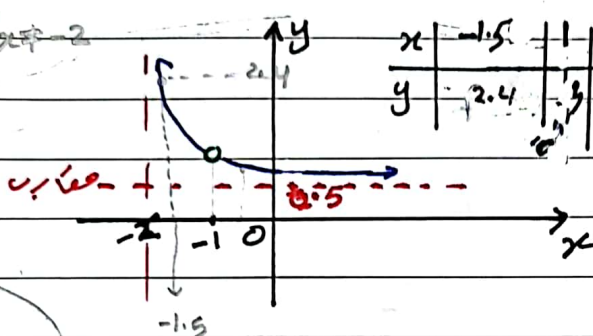
عقد دالتنا

$$x > -2$$

بيانياً: باستخدام برنامج الرسم

أو: جدول القيم مشهور ($x+2 > 0$ و $x^2+3x+3 > 0$ و $x^2+3x+3 \neq 1$)

$$x \neq -1 \quad x \neq -2$$



x	-1.5	-1	-0.5	0	1	2
y	2.4	0.72	0.63	0.56	0.54	

الاجابة

$$\begin{aligned} 2+e^{2x} &> 0 \\ e^{2x} &> -2 \\ 1+e^x &> 0 \\ e^x &> -1 \end{aligned}$$

المطلوب: بيانياً وعددياً
(تجريب الخلية)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2+e^{2x})}{\ln(1+e^x)}$$

تمرين (40) ص 108

جدول قيم

x	-1	0	1	10	50
y	2.4	1.58	1.7	1.99	2

$$f(x) \rightarrow 2 \quad (3 \text{ دليل})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

(في دليل المعلم E مكتوب 3 ؟)

ولرسم البياني نستخدم برنامج الرسم أو جدول القيم

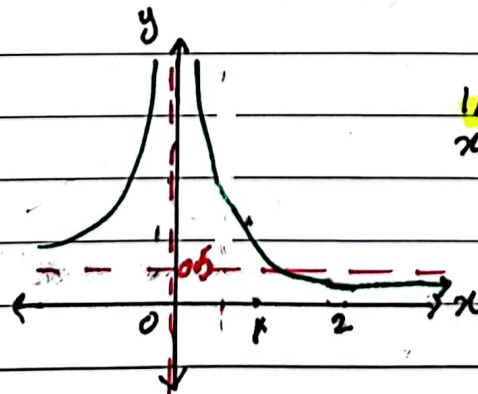
المطلوب: تجريب الخلية وعددياً وبيانياً

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4x+7}{2x^2+x} = 0.5$$

تمرين (41) ص 108

$\Rightarrow$ دليل عددي

x	-3	-1	0	1	2	10	100
y	1.86	1.9	محددة صفر المقام	1.3	0.3	3.19	0.48



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.5$$

x	1000	10000
y	0.498	0.499

وبالرسم البياني نلاحظ ذلك

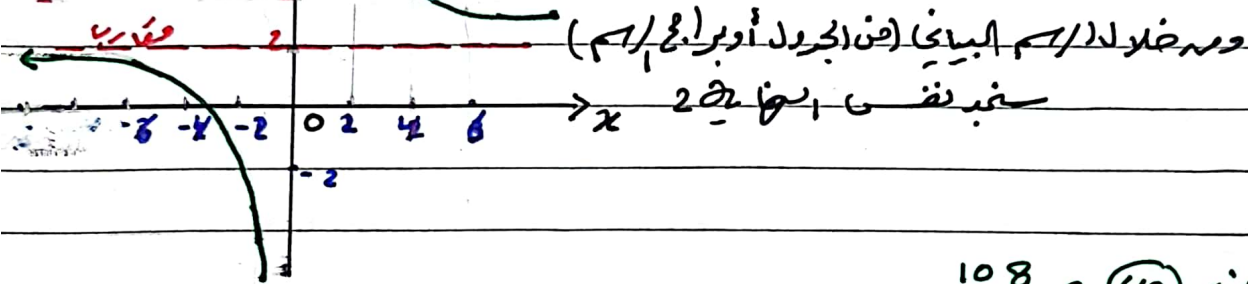
تمرين (42) م 108 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 7x^2 + 1}{x^3 - x \ln x}$ مطلوب تخمين الخيارات عددياً وبيانياً

x	-1000	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1.99	1.92	1.29	0.6	-0.3	-5.9	غير معرف	10.1	5.6	4.3

← x ← $-\infty$
 ← $f(x)$ ← 2
 (صفر المقام) عند $x=0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

$x \rightarrow -\infty$



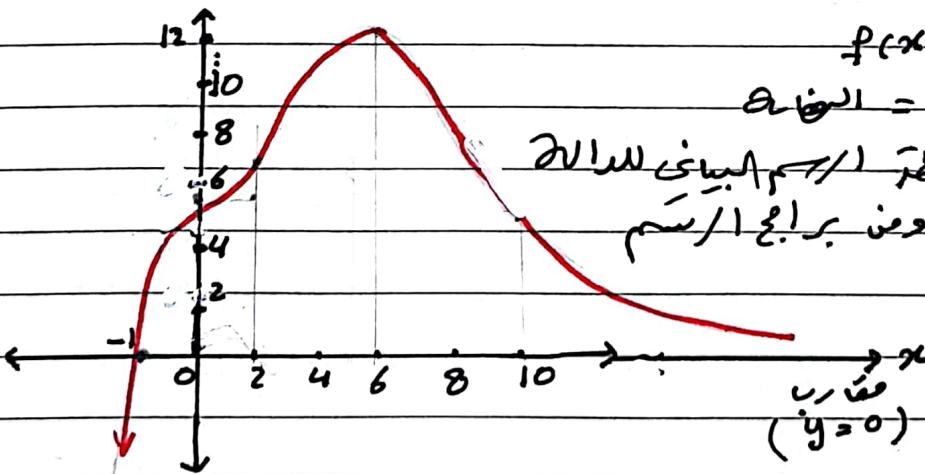
تمرين (43) م 108 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x + 5}{(e)^{x/2}}$ مرفقة دالماً

x	-1	0	2	6	8	10	100	1000
$f(x)$	0	5	7.7	12.2	10.1	7.1	1.9×10^{-16}	صفر... قرين 0

$x \rightarrow \infty$
 $f(x) \rightarrow 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

ويمكن ملاحظة الرسم البياني للدالة
 من الجردل أو من برانج / رسم



$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

تمرين (44) م 108 $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{x/3} - x^4)$

x	-2	-1	0	1	2	10	1000
$f(x)$	-15.6	-0.4	1	0.6	-13.3	-9851	كبير عددياً

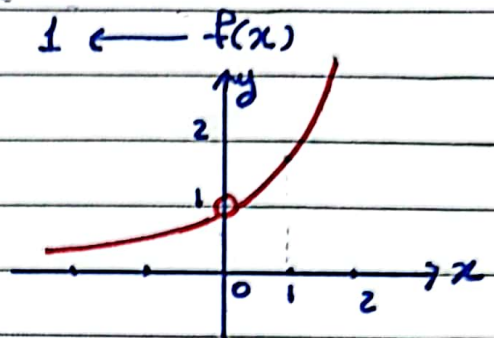
$f(x) \rightarrow \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{x/3} - x^4) = \infty$ يؤكد ذلك الرسم

تمرین (45) ص 108 مطلوب تخمین الیافی عددیاً و بیانیاً $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$x \rightarrow 0^-$	-1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	1
عددیاً				غیر			
$f(x)$	0.6	0.995	0.9995	غیر	1.0005	1.005	1.7

$f(x) \rightarrow 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

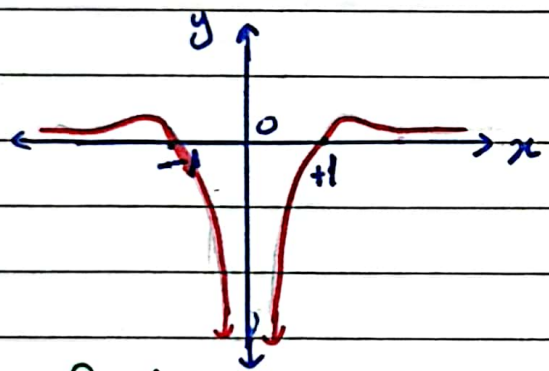


واریسم الیافی یسین ذلك (x ≠ 1)

تمرین (46) ص 108 مطلوب تخمین الیافی عددیاً و بیانیاً $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x^2}{x^2}$

$x \rightarrow 0^-$	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	1
عددیاً			غیر			
y	-92103	-13815510	غیر	-13815510	-92103	0
$f(x)$	$\rightarrow -\infty$		از	$\rightarrow -\infty$		

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$



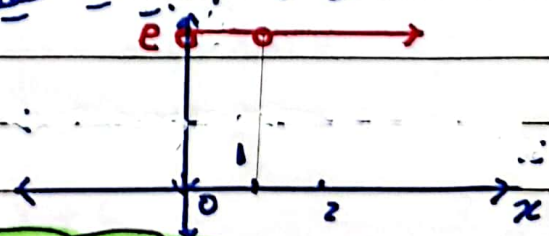
واریسم الیافی یوکده هذہ الیافی

تمرین (47) مطلوب تخمین عددی و بیانی الیافی $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{\frac{1}{\ln x}}$

x	0	0.001	0.01	1	2
$f(x)$	غیر	2.71828	2.71828	غیر	2.71828
	عزیز	$\downarrow$	$\downarrow$	عزیز	$\downarrow$
		e	e		e

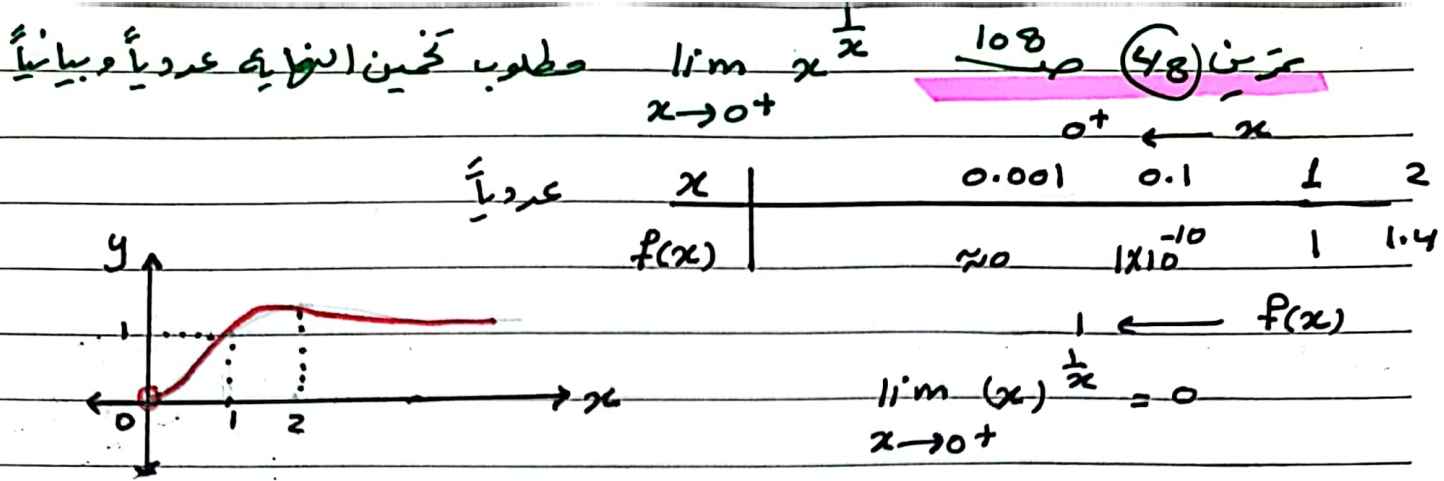
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e$

واریسم الیافی یسقیف ذلك



تذکره
 • الدالة معرفة عندما $x > 0$
 (سبب $\ln x$)
 • وعندما $\ln x \neq 0$ (مقام)
 $x \neq 1$

لاحظ $y = (x)^{\frac{1}{\ln x}}$
 نأخذنا $\ln y = \ln(x^{\frac{1}{\ln x}})$
 للطرفین $\ln y = \frac{1}{\ln x} \cdot \ln x$
 $\ln y = 1 \Rightarrow y = e$
 انبیه $y = e \Rightarrow f(x) = e \Rightarrow \lim f(x) = e$



مَرَبِن (49) ص 108 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - 2x + 1} - 2x)$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 2x + 1} - 2x)(\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2x)}{x(\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2x)}$ حسب المبرور 2 والملاحظ

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 2x + 1})^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2x}$ البسط فرق مربعين

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2x}$ نقسم كل حد في البسط على x

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2x}{x} + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \frac{2x}{x}}$ وكل حد في المقام على x
على $\sqrt{x^2} = x$ (موجب)
(x^2 تدخل تحت الجذر x^2)

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2}$
 $= \frac{-2 + 0}{\sqrt{4 - 0 + 0} + 2} = \frac{-2}{\sqrt{4} + 2} = -\frac{1}{2}$

تذكر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0$ عند صيغ موجب n

مَرَبِن (50) ص 108 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{5x^2 + 4x + 7} - \sqrt{5x^2 + x + 3})$ نضرب ونقسم على رافق المقدار (+)

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2 + 4x + 7) - (5x^2 + x + 3)}{(\sqrt{5x^2 + 4x + 7} + \sqrt{5x^2 + x + 3})}$ يصبح البسط فرق مربعين

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x} + \frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{7}{x^2}} + \sqrt{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}}$ نحذف كل الحدود في البسط والمقام على x^2 (ملاحظة في المَرَبِن 49)

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{\sqrt{5 + \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}} + \sqrt{5 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{3 + 0}{\sqrt{5 + 0 + 0} + \sqrt{5 + 0 + 0}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

مَرْنِي (51) ص 108 $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ درجة $P(x)$ < درجة $q(x)$
حل 1 $f(x) = y$ خط تقارب أفقي ؟

لوقسمنا البسط على المقام (حيث درجة q هي n مثلاً)
سنحصل على [بالمعنى كثيرة حدود] + (بالمعنى درجة أقل من n معشوقاً على q)
وعندها : $x \rightarrow \infty$: الناتج $\rightarrow \infty$ و $\frac{\text{الباقى}}{\text{المسحوق عليه}} \rightarrow 0$
لن نحصل على (عدد $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \text{عدد}$) لوجود تقارب أفقي

مثال : $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 3}$

$= (x + 5) + \frac{16}{x - 3}$
بقي مسحوق عليه

$x \rightarrow \infty \rightarrow (\infty + 0)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16}{x - 3} = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 5) = \infty$

وهذا لن يساعد على عدد عندما $x \rightarrow \infty$

لن يوجد A بحيث $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$
لن يوجد تقارب أفقي $y = A$

مَرْنِي (52) ص 108 $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ درجة $P(x)$ > درجة $q(x)$
حد خط التقارب الأفقي

درجة البسط أقل من درجة المقام (لحد الأعلى أو في كل منهما)
وعندما $x \rightarrow \infty$ سنكتفي به كثيرات (الحدود في البسط والمقام) باقية
ذو الأس الأعلى وعند الاختصار نحصل على $\frac{\text{عدد}}{x^n}$

ونظام أ - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0$

يوجد خط تقارب أفقي $y = 0$

مَرْنِي (53) ص 108 $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ له خط تقارب مائل $y = x + 2$

خط التقارب المائل من الدرجة الأولى وعند إجراء القسمة

سيكون الباقي $x + 2$ من الدرجة الأولى

سيزيد الأس في P عن الأس في q بـ 1

(درجة P أكبر من درجة q) بـ 1

تمرين (54) ص 108 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ له خط تقارب أفقي $y=2$

عند وجود أفقي مقارب: عدد $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$
أي وجود ختصار لـ x

وبالتالي ستكون درجة $p(x)$ نفس درجة $q(x)$

تمرين (56) ص 108 $f(x) = \frac{x^2-4}{q(x)}$ مطلوب q (دالة تربيعية)
بحيث $y=2$ مقارب أفقي
و $x=3$ مقارب رأسي

معطى q دالة تربيعية

أصغرها $x=3$ سقطين مقاربان رأسيان

فستكون في الشكل: $q(x) = a(x-3)(x+3)$

وعند ذلك الأعداد تصبح معادلات $x^2 = a \dots$ ؟ أكبر صمد في المعاد

ومعادل أكد آس في البسط أصلاً 1

مقارب $y = \frac{1}{a} = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{a}$
 $\Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$q = \frac{1}{2}(x-3)(x+3)$

$\frac{1}{2}(x^2-9) = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}$

تمرين (55) $f(x) = \frac{x^2-4}{q(x)}$ مطلوب q (دالة) بحيث: $y = -\frac{1}{2}$ مقارب أفقي
 $x=3$ مقارب رأسي

$x=3$ مقارب رأسي $\rightarrow$ أحد أصغرها المعاد

وستكون درجة المعاد مثل درجة البسط 2

أي q دالة تربيعية $\rightarrow$ أحد أصغرها 3

كذلك الآخر؟ $a(x-3)(x-2)$

سيكون شكل $f(x)$: $= \frac{(x-2)(x+2)}{a(x-3)(x-2)}$

والمطلوب فقط هو سقطين مقارب أي $x-3$ لا يختصر

والمعامل الثاني تم إضماره (سيعطينا فجوة)

لصحتن $(x-2)$ أو $(x+2)$

مثلاً $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{-2(x-2)(x-3)}$

تمرين (57) ص 108 $f(x) = \frac{x^3 - 3}{g(x)}$ أوجد g بحيث لا يوجد خط تقارب رأسي • لا يوجد خط تقارب رأسي • يوجد مقارب عمودي $y = x$

لا يوجد خط تقارب رأسي أي لا يوجد

$$\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = \infty$$

(لا يوجد أصفار للمقام)

للمقارب المائل $y = x$ يعني درجة البسط أكبر من درجة المقام بـ 1
المقام عن الدرجة الثانية

والمعامل الرئيس له سيكون 1 $y = x$ معاملة $\frac{1}{x}$ معامل x^3 (بسط)
لا يوجد أصفار للمقام $\frac{1}{x}$ معامل x^2 (مقام)

$$g(x) = x^2 + 3 \quad \text{مثلاً :}$$

$$g(x) = x^2 + 10 \quad \text{ومثلاً :}$$

تمرين (58) ص 109 $f(x) = \frac{x-4}{g(x)}$ أوجد g بحيث : • $y = \pm 1$ مقاربان أفقيان • لا يوجد مقارب رأسي

يسود التفكير بالتمرين بعيداً عن ذهن الطالب (غير مفتح برأيي)

لاحظنا سابقاً ص 106 كتاب الطالب للدالة $y = \tan^{-1} x$ مقاربان أفقيان

$$y = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{هنا فلو ضربنا بـ } \frac{2}{\pi} \text{ يصبح } \pm 1$$

لا يوجد مقارب رأسي $g(x)$ ليس له أصفار

؟ إجابة $(x-4) \cdot g(x) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} x$ (في دليل المعلم ص 5) ؟

$$f(x) = \frac{(x-4)}{\left(\frac{2}{\pi} \tan^{-1} x\right)} \quad \text{صحيح}$$

عند $x=0$ فجرة

تمرين (59) ص 109 صحيحة دائماً
تمرين (60) (خطأ عند $b=0$) وغير ذلك تكون صحيحة

خطأ

صحيحة دائماً

صحيحة دائماً

خطأ (مثلاً : $f(x) = 2x$ و $g(x) = x$)

تمرین (65) ص 109 مطلوب مثال جیب: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

جیب صفوالمقام a أي $h(a) = 0$ ولا يوجد خط تقاطع رأسي $x = a$

مثال: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

صفوالمقام $a = 0 = x$

لأن لا يوجد تقاطع رأسي عند $x = 0$

$(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1)$

تمرین (66) مطلوب إثبات نظرية (5.2) ص 104

P_n كثيرة حدود من الدرجة n ومعاملها الرئيسي a_n

$\lim_{x \rightarrow \infty} P_n(x) = \begin{cases} \infty & : a_n > 0 \\ -\infty & : a_n < 0 \end{cases}$

$[a]$ فردی أعلى أس x عدد n فردی ومعاملها الرئيسي a_n

$\lim_{x \rightarrow \infty} P_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + \text{عدد } x^{n-1} + \text{عدد } x^{n-2} + \dots + \text{عدد } x^0)$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left[a_n + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right]$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^n (a_n + 0 + 0 + \dots + 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n)$

$x \rightarrow \infty \Rightarrow x^n \rightarrow +\infty$ (فردی)
 $\nwarrow$ (زوجی)

$+ a x^2 \rightarrow +\infty$ موجب: a
 $- a x^2 \rightarrow -\infty$ سالب: a

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow x^n \rightarrow +\infty$ (زوجی): $[b]$

$a x^n \rightarrow +\infty$ موجب: a

$a x^n \rightarrow -\infty$ سالب: a

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow x^n \rightarrow -\infty$ (فردی): n

$a x^n \rightarrow -\infty$ موجب: a

$a x^n \rightarrow +\infty$ سالب: a