Alpha Education Center

KhateebAcademy.com

الإمارات
THE EMIRATES

الحل

اوراق عمل مادة

الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الدراسي الثالث

2024/2023

اسم الطالب : ....

المدرسة : ....

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل

6-1 المساحة المحصورة بين منحنيين

6-2 الحجم : شرائح وأقراص وحلقات

6-3 الاحجام بالأصداف

6-4 طول القوس ومساحة السطح

6-5 حركة المقذوفات

6-6 تطبيقات التكامل على الفيزياء والهندسة

6-7 الاحتمال

هذه الدروس كانت محذوفة في خطة 23/22

الوحدة السابعة : طرائق التكامل

7-1 مراجعة الصيغ وطرائق التكامل

7-2 التكامل بالاجزاء

7-3 طرائق تكامل الدوال المثلثية

7-4 تكامل الدوال النسبية بالكسور الجزئية

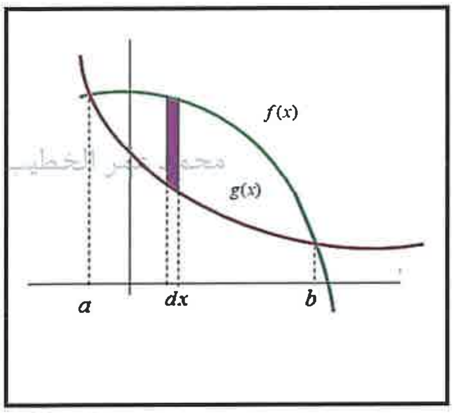
7-5 جداول التكامل

هذا الدرس كان محذوف في خطة 23/22

7-6 نمذجة المعادلات التفاضلية

7-7 المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل /// الدرس الأول : المساحة بين منحنيين



المساحة بين منحنيين

الحالة الأولى : المكامل (dx)

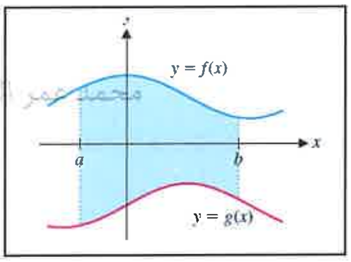
الشريحة (عرض المستطيل) هو dx

(ارتفاع المستطيل) هو $f(x)-g(x)$ عمودي على محور السينات x

وتوازي محور الصادات y

إذا كانت كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $f(x) \geq g(x)$ فإن

المساحة المحصورة بين المنحنين تعطى بالتكامل



$$A = \int_a^b \left[\text{الدالة الأعلى} - \text{الدالة الأدنى} \right] dx$$

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

خطوات إيجاد المساحة

له الأولوية

ارسم الدوال ⇐ ظلل المنطقة المطلوبة ⇐ ارسم الشريحة وحدد المكامل (dx أم dy)

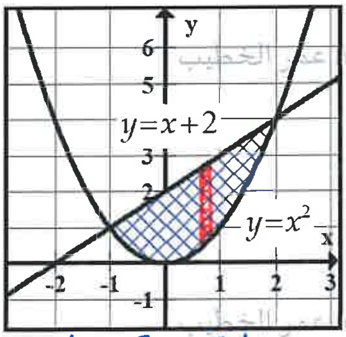
⇐ أوجد حدود التكامل (نقاط التقاطع) ⇐ كامل ⇐ عوض الحدود لإيجاد المساحة

أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = x+2$ ، $y = x^2$

$$A = \int_{-1}^{2} (x+2) - x^2 \, dx$$

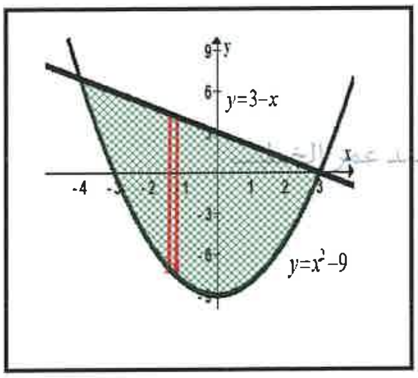
$$= \int_{-1}^{2} 2 + x - x^2 \, dx$$

$$= 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$



الشريحة dx

(1) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = 3 - x$ ، $y = x^2 - 9$



$$A = \int_{-4}^{3} 3 - x - (x^2 - 9)\, dx$$

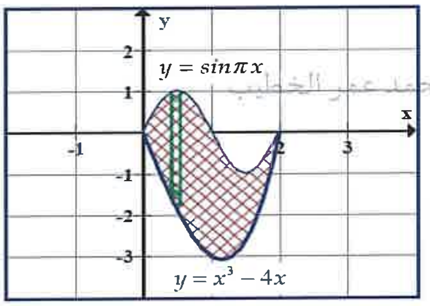
$$= \int_{-4}^{3} 3 - x - x^2 + 9 \quad dx$$

$$= \int_{-4}^{3} 12 - x - x^2 \quad dx$$

$$= 12x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_{-4}^{3} = \frac{343}{6}.$$

---

(2) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = \sin \pi x$ ، $y = x^3 - 4x$



$$A = \int_{0}^{2} \sin \pi x - (x^3 - 4x)\, dx$$

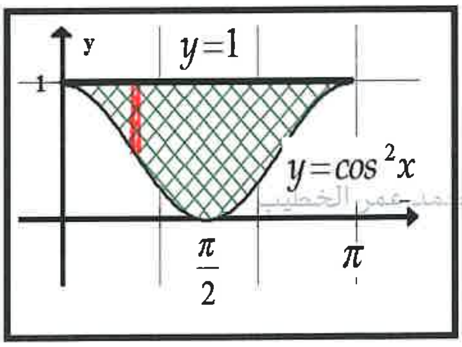
$$= \int_{0}^{2} \sin \pi x - x^3 + 4x \quad dx.$$

$$= -\frac{\cos \pi x}{\pi} - \frac{x^4}{4} + 2x^2 \Big]_{0}^{2}$$

$$= 4.$$

---

(3) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = \cos^2 x$ ، $y = 1$



$$A = \int_{0}^{\pi} 1 - \cos^2 x \quad dx$$

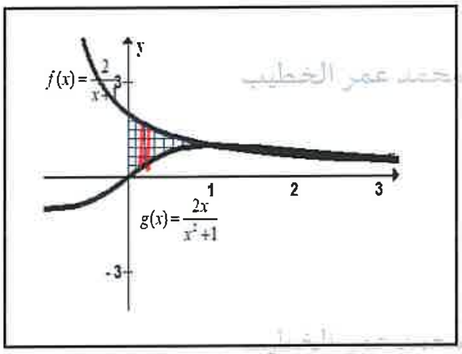
$$= \int_{0}^{\pi} \sin^2 x \quad dx$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big]_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

(1) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ ، $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ والمستقيم $x=0$

حيث نقطة التقاطع $x=1$



$$A=\int_0^1 \frac{2}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$=2\ln|x+1|-\ln|x^2+1|\Big]_0^1$$

$$=2\ln 2-\ln 2$$

$$=\ln 2=0.69.$$

(2) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $f(x)=\dfrac{6}{x^2+1}$ و $g(x)=3$

ملاحظة (استفد من التماثل)

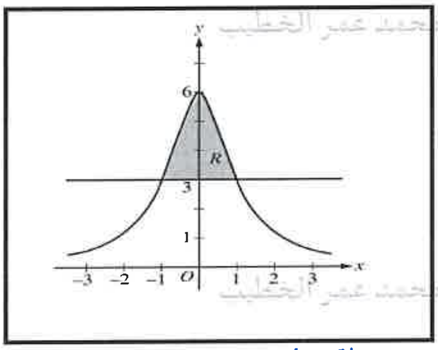
من التماثل

$$A=2\int_0^1 \frac{6}{x^2+1}-3\,dx$$

$$=2\left[6\tan^{-1}x-3x\right]_0^1$$

$$=3\pi-6.$$

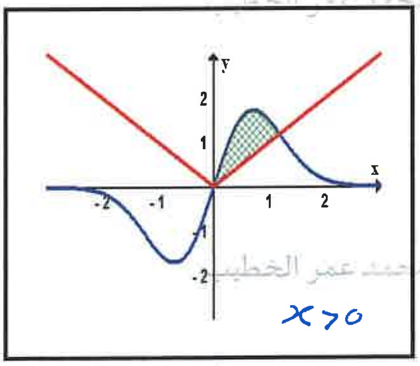
$$=3.42$$



نقاط التقاطع $-1, 1$.

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=4xe^{-x^2}$ و $y=|x|$

حيث نقطة التقاطع $\sqrt{\ln 4}$



$x>0$

$$A=\int_0^{\sqrt{\ln 4}} 4xe^{-x^2}-x\,dx$$

$$=-2\int_0^{\sqrt{\ln 4}} -2xe^{-x^2}-x\,dx$$

$$=-2e^{-x^2}-\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{\ln 4}}$$

$$=\frac{3}{2}-\ln 2$$

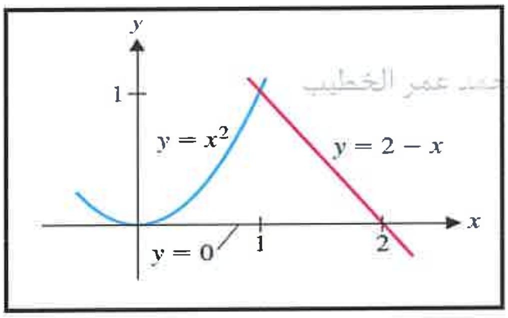
$$=0.8$$

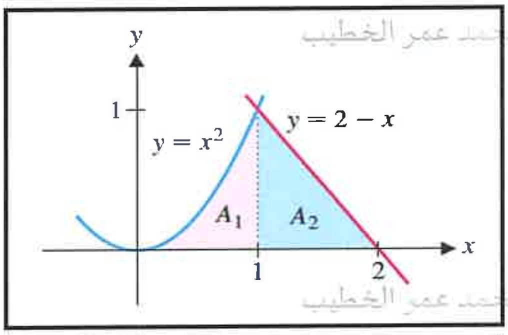
تجزئة المساحة

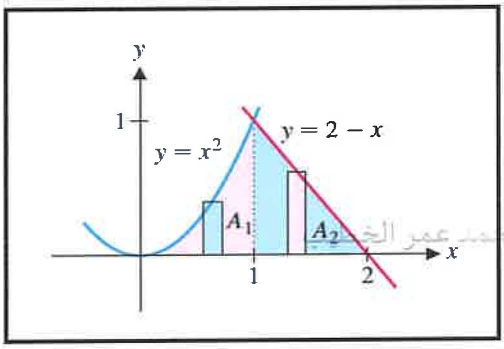
ملاحظة :جزء المساحة عندما يتغير ارتفاع الشريحة

(عندما تتغير احدى الدوال)

(1) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين ومحور x







$$A_1 = \int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$A_2 = \int_1^2 (2 - x)\,dx$$

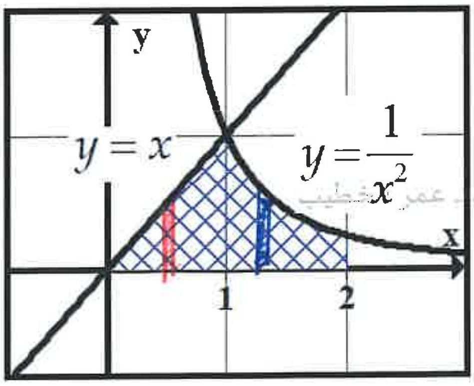
$$= 2x - \frac{x^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{6}$$

(2) أوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور



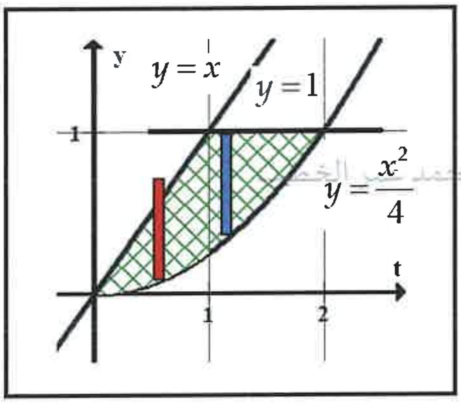
$$A_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^2 x^{-2}\,dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1}\Big]_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(1) اوجد المساحة المحصورة في الشكل



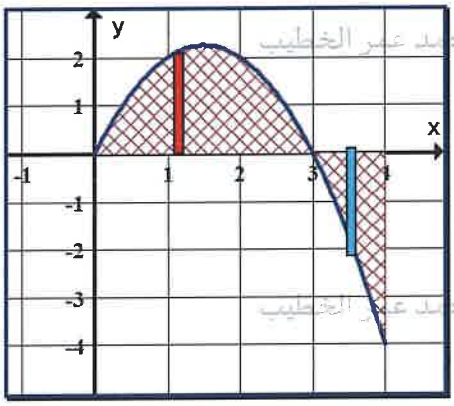
$$A=\int_0^1 x-\frac{x^2}{4}\,dx+\int_1^2 1-\frac{x^2}{4}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\Big]_0^1+x-\frac{x^3}{12}\Big]_1^2$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{5}{12}$$

$$=\frac{5}{6}.$$

(2) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=3x-x^2$ ومحور x والمستقيمين $x=0, x=4$

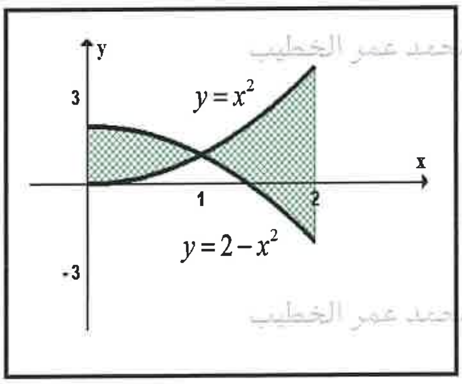


$$A=\int_0^3 3x-x^2-0\,dx+\int_3^4 0-(3x-x^2)\,dx$$

$$=\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]_0^3+-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\Big]_3^4$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{11}{6}=\frac{19}{3}.$$

(3) اوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور



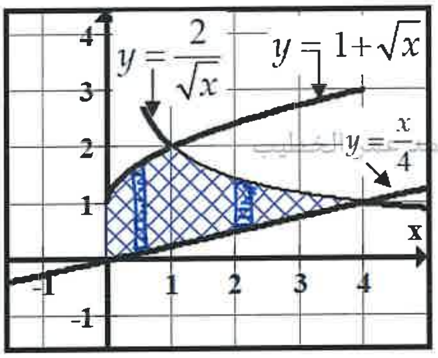
$$A=\int_0^1 (2-x^2-x^2)\,dx+\int_1^2 x^2-(2-x^2)\,dx$$

$$=\int_0^1 2-2x^2\,dx+\int_1^2 2x^2-2\,dx$$

$$=2x-2\frac{x^3}{3}\Big]_0^1+\left(\frac{2x^3}{3}-2x\right)\Big]_1^2$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=4$$

(1) أوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور



$$A_1=\int_0^1\left(1+\sqrt{x}-\frac{x}{4}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(1+x^{1/2}-\frac{1}{4}x\right)dx$$

$$=x+\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{8}x^2\Big]_0^1=\frac{37}{24}.$$

$$A_2=\int_1^4\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x}{4}\,dx$$

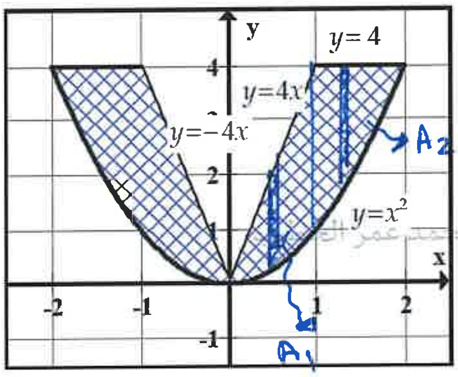
$$=\int_1^4 2x^{-1/2}-\frac{1}{4}x\,dx$$

$$=4x^{1/2}-\frac{1}{8}x^2\Big]_1^4=\frac{17}{8}.$$

$$A=A_1+A_2=\frac{37}{24}+\frac{17}{8}=\frac{11}{3}.$$

---

(2) أوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور



$$A_1=\int_0^1 4x-x^2\,dx$$

$$=2x^2-\frac{x^3}{3}\Big]_0^1=5/3.$$

$$A_2=\int_1^2 4-x^2\,dx$$

$$=4x-\frac{x^3}{3}\Big]_1^2=5/3.$$

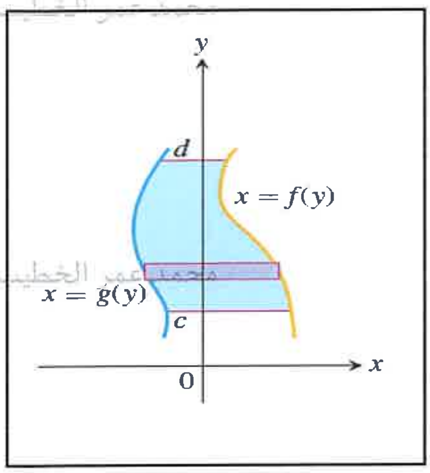
من التماثل.

$$A=2(A_1+A_2)$$

$$=2\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\right)$$

$$=\frac{20}{3}.$$

الحالة الثانية : المكامل (dy)



الشريحة (عرض المستطيل) هو dy

(ارتفاع المستطيل) هو $f(y)-g(y)$ عمودي على محور الصادات y

وتوازي محور السينات x

$$A=\int_c^d \left[\text{الدالة على اليمين} - \text{الدالة على اليسار}\right] dy$$

$$\int_c^d f(y)-g(y) \quad dy$$

يجب أن تكون الدوال بدلالة y

وحدود التكامل من محور y

حالات استخدام المكامل dy

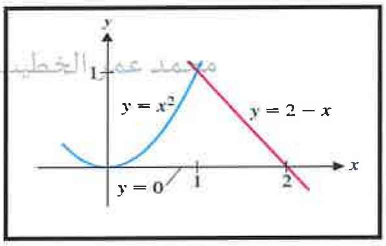
(1) إجباري إذا كانت الخيارات كلها في dy

(2) يفضل إذا كانت المساحة مع dx تحتاج إلى تجزئة

(3) يفضل إذا كان الارتفاع بين نفس العلاقة

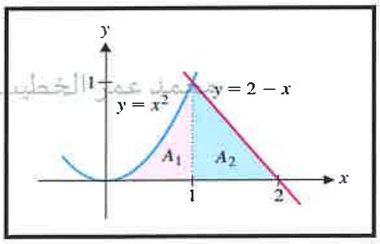
(4) يفضل اذا كانت الدوال (العلاقات) بدلالة y

أوجد المساحة المحصورة بين الدوال $y=x^2, \quad y=2-x, \quad y=0$



أولاً : المكامل dx

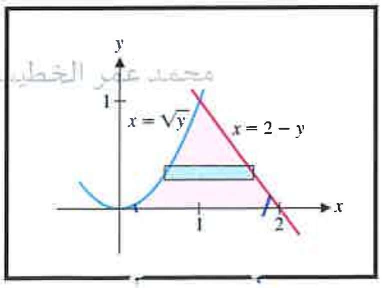
$A_1=\int_0^1 x^2 dx = 1/3$



$A_2=\int_1^2 2-x \ dx = 1/2$

$A = A_1+A_2 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

ثانياً : المكامل dy

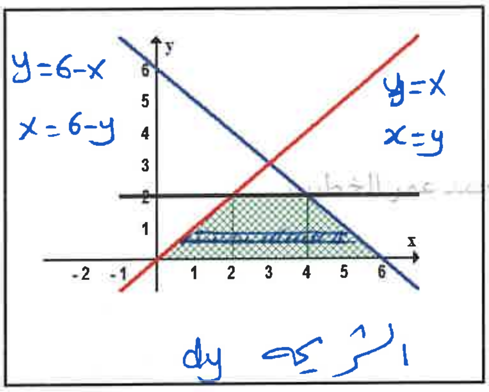


* تكامل منفرد

$A=\int_0^1 R-L \quad dx$

$= \int_0^1 2-y-\sqrt{y} \ dy = 5/6$.

(1) عبر عن المساحة المحصورة بين الدوال $y=0, y=2, y=x, y=6-x,$ بتكامل **منفرد**

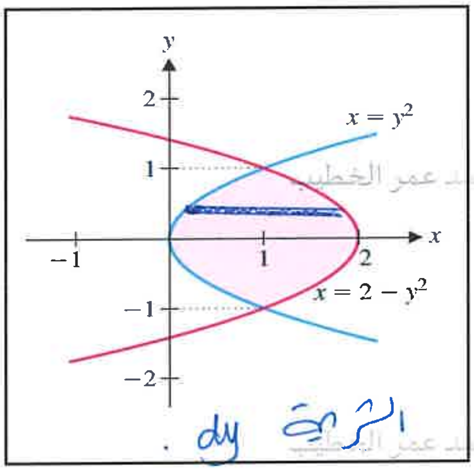


$$A=\int_0^2 6-y-y\ dy$$

$$=\int_0^2 6-2y\ dy$$

$$=8$$

(2) عبر عن المساحة المحصورة بين العلاقتين بتكامل **منفرد**



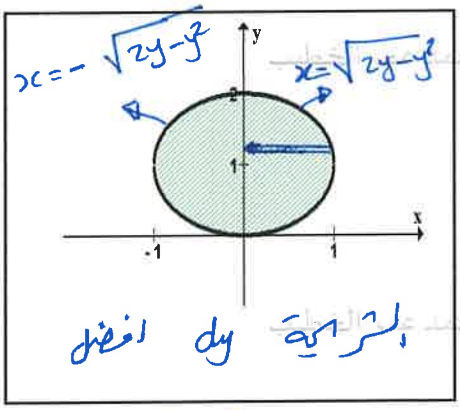
$$A=\int_{-1}^{1} 2-y^2-y^2\ dy$$

$$=\int_{-1}^{1} 2-2y^2\ dy$$

* ويمكن استخدام التماثل.

$$=\frac{8}{3}$$

(3) عبر عن المساحة المحصورة داخل الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2=2y$ بتكامل منفرد



من التماثل.

$$A=2\int_0^2 \sqrt{2y-y^2}\ dy=\frac{\pi}{2}$$

بدون تماثل.

$$A=\int_0^2 \sqrt{2y-y^2}-\left(-\sqrt{2y-y^2}\right) dy$$

$$=\int_0^2 2\sqrt{2y-y^2}\ dy$$

$x^2+y^2=2y$

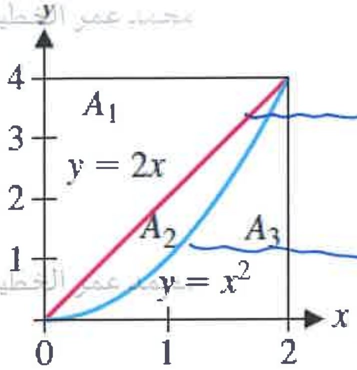
$x^2=2y-y^2$

$x=\pm\sqrt{2y-y^2}$

اعتمد على الشكل المجاور للتعبير عن المساحات التالية

بدلالة التكامل الذي يناسبه في كل مما يلي

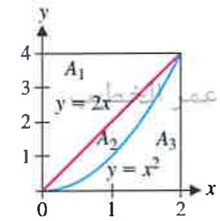
ملاحظة: اكتب التكامل بدلالة dx وبدلالة dy



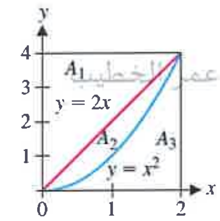
$y = 2x$
$x = \frac{y}{2}$

$y = x^2$
$x = \sqrt{y}$

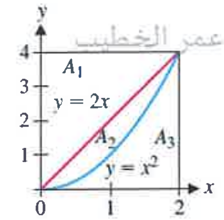
بدلالة dx



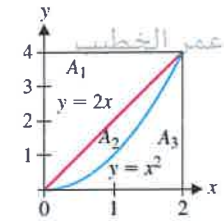
(1) $A_3 = \int_0^2 x^2 \, dx$



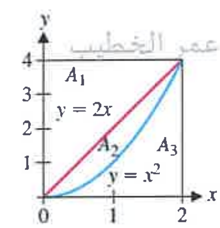
(2) $A_2 = \int_0^2 2x - x^2 \, dx$



(3) $A_1 = \int_0^2 4 - 2x \, dx$

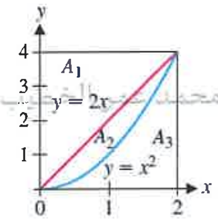


(4) $A_2 + A_3 = \int_0^2 2x \, dx$

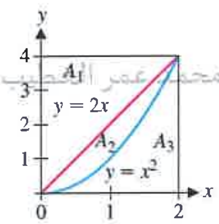


(5) $A_1 + A_2 = \int_0^2 4 - x^2 \, dx$

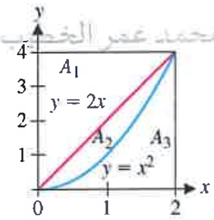
بدلالة dy



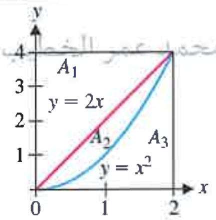
$A_3 = \int_0^4 2 - \sqrt{y} \, dy$



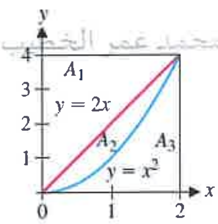
$A_2 = \int_0^4 \sqrt{y} - \frac{y}{2} \, dy$



$A_1 = \int_0^4 \frac{y}{2} \, dy$



$A_2 + A_3 = \int_0^4 2 - \frac{y}{2} \, dy$

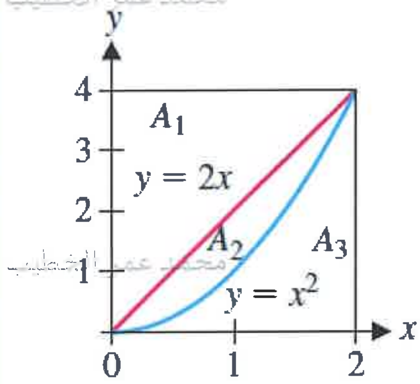


$A_1 + A_2 = \int_0^4 \sqrt{y} \, dy$

اعتمد على الشكل المجاور للتعبير عن كل من التكاملات التالية

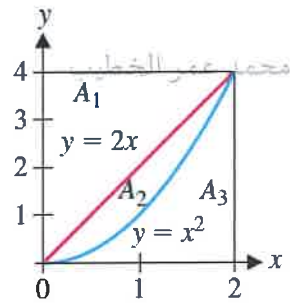
بدلالة A_3, A_2, A_1 في كل مما يلي:

ثم اكتب التكامل بدلالة المكامل الآخر



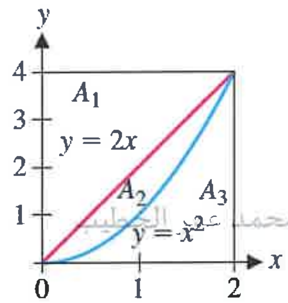
(1) $\int_0^2 (2x - x^2)\, dx$ $= A_2$

$= \int_0^4 \sqrt{y} - \frac{y}{2}\, dy$



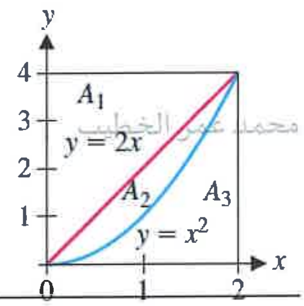
(2) $\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$ $= A_1 + A_2$

$= \int_0^4 \sqrt{y}\, dy$



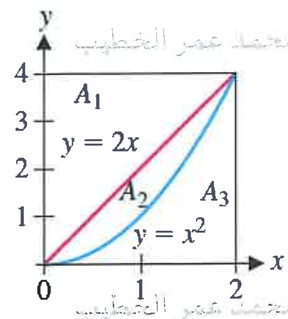
(3) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\, dy$ $= A_3$

$= \int_0^2 x^2\, dx$



(4) $\int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2})\, dy$ $= A_2$

$= \int_0^2 2x - x^2\, dx$



(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = x^2$ و المستقيم $y = 2 - x$

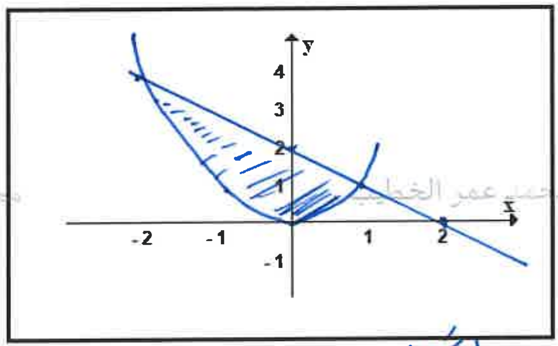
الرسم ...أولاً

التكامل dx

$$A = \int_{-2}^{1} 2 - x - x^2 \, dx$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_{-2}^{1}$$

$$= 9/2$$



حدود التكامل

$x^2 = 2 - x$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = -2 \ , \ x = 1$

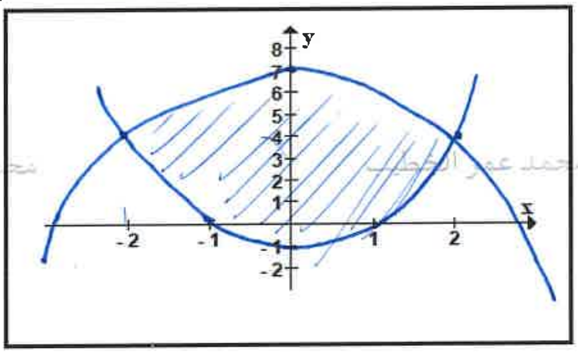
(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 - 1$ و $y = 7 - x^2$

$$A = \int_{-2}^{2} 7 - x^2 - (x^2 - 1) \, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 8 - 2x^2 \, dx$$

$$= 8x - 2\frac{x^3}{3} \Big]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{64}{3}$$



$x^2 - 1 = 7 - x^2$

$2x^2 - 8 = 0$

$x = -2, \ x = 2$

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 - 1$ و $y = \frac{1}{2}x^2$

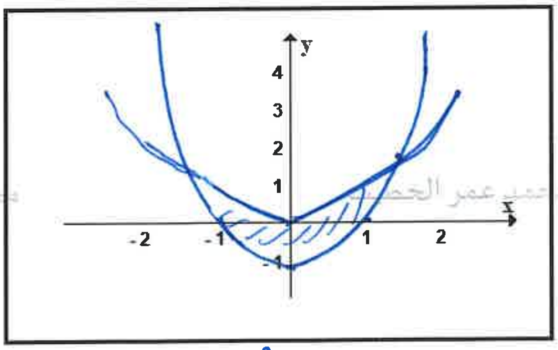
من التماثل

$$A = 2 \int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}x^2 - (x^2 - 1) \, dx$$

$$= 2 \int_{0}^{\sqrt{2}} -\frac{1}{2}x^2 + 1 \quad dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{6}x^3 + x \right]_{0}^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$$



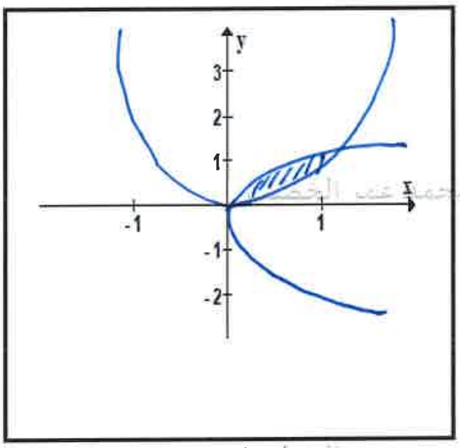
$x^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2$

$\frac{1}{2}x^2 - 1$

$x^2 - 2 = 0$

$x = \pm\sqrt{2}$

(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $x = y^2$



$$A = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 x^{1/2} - x^2 \, dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \Big]_0^1$$

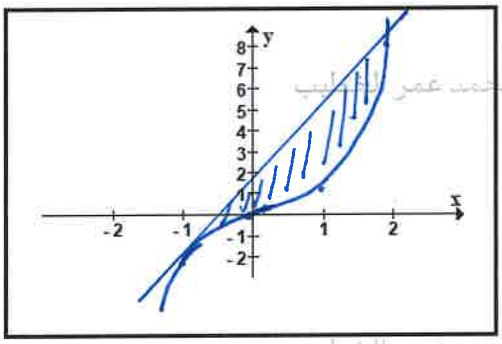
$$= 1/3 .$$

$x^2 = \sqrt{x}$ | $x^4 - x = 0$

$x^4 = x$ | $x = 0, x = 1$

---

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 3x + 2$ و $y = x^3$



$$A = \int_{-1}^2 3x + 2 - x^3 \, dx$$

$$= \frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4} \Big]_{-1}^2$$

$$= \frac{27}{4} .$$

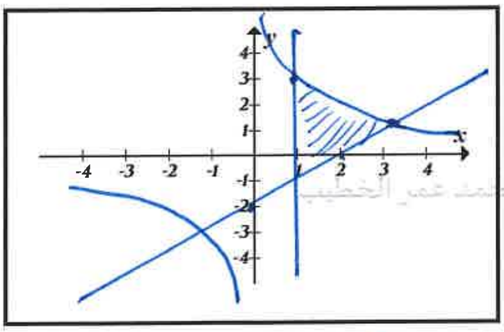
$x^3 = 3x + 2$

$x^3 - 3x - 2 = 0$

$x = -1 , x = 2.$

---

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = \dfrac{3}{x}$ و المستقيمين $y = x - 2$ ، $x = 1$



$$A = \int_1^3 \frac{3}{x} - (x - 2) \, dx$$

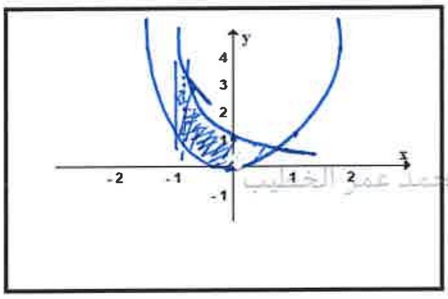
$$= 3 \ln x - \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_1^3$$

$$= 3 \ln 3$$

$\frac{3}{x} = x - 2$ | $x^2 - 2x - 3 = 0$

$3 = x^2 - 2x$ | $x = -1, x = 3$

(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2$ و $y=e^{-x}$ على الفترة $[-1,0]$

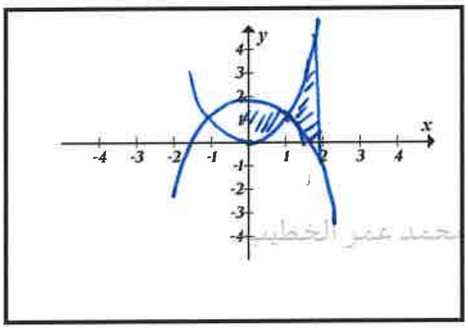


$$A = \int_{-1}^{0} e^{-x} - x^2 \, dx$$

$$= \frac{e^{-x}}{-1} - \frac{x^3}{3} \Big]_{-1}^{0}$$

$$= e - \frac{4}{3}.$$

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2$ و $y=2-x^2$ على $[0,2]$



$2-x^2=x^2$

$2x^2-2=0$

$x=\pm 1$

$$A_1 = \int_0^1 2-x^2-x^2 \, dx$$

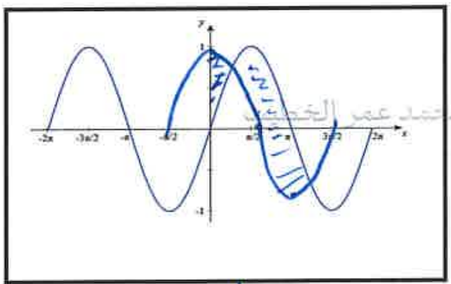
$$= \int_0^1 2-2x^2 \, dx = 4/3.$$

$$A_2 = \int_1^2 x^2-(2-x^2) \, dx$$

$$= \int_1^2 2x^2-2 \, dx = 8/3.$$

$$A = A_1 + A_2 = 4.$$

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=\sin x$ و $y=\cos x$ على الفترة $[0,\pi]$



* نقطة التقاطع:

$\sin x = \cos x$

$\tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4}.$

$$A_1 = \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x \, dx$$

$$= \sin x + \cos x \Big]_0^{\pi/4} = \sqrt{2}-1$$

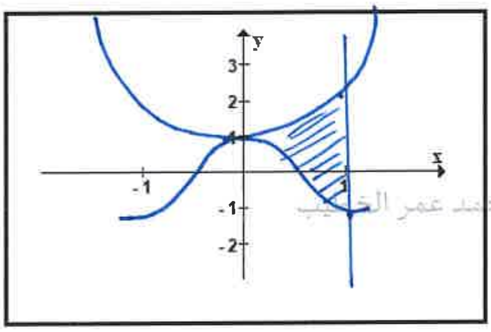
$$A_2 = \int_{\pi/4}^{\pi} \sin x - \cos x \, dx$$

$$= -\cos x - \sin x \Big]_{\pi/4}^{\pi} = \sqrt{2}+1$$

$$A = A_1 + A_2 = \sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1$$

$$= 2\sqrt{2}$$

(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=\cos\pi x$ و $y=x^2+1$ حيث $0\le x\le 1$

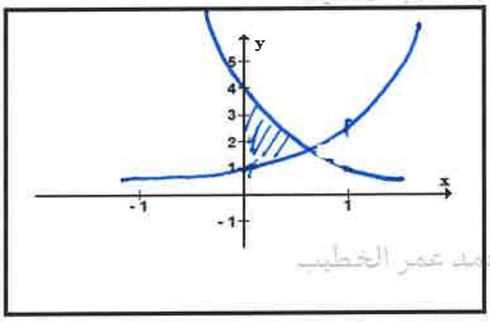


$$A=\int_0^1 x^2+1-\cos\pi x \, dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+x-\frac{\sin\pi x}{\pi}\Big]_0^1$$

$$=\frac{4}{3}.$$

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=e^x$ و $y=4e^{-x}$ و $x=0$



$$A=\int_0^{\ln 2} 4e^{-x}-e^{x}\, dx$$

$$\frac{4e^{-x}}{-1}-e^{x}\Big]_0^{\ln 2}$$

$$=1$$

$$4e^{-x}=e^{x}$$

$$4=\frac{e^{x}}{e^{-x}}$$

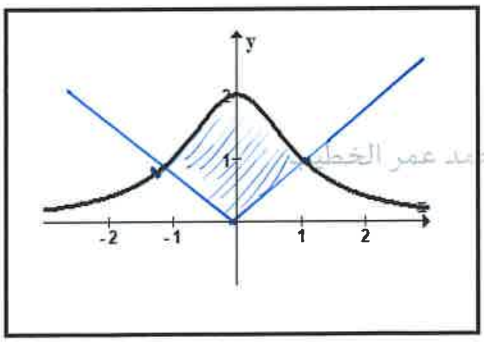
$$4=e^{2x}$$

$$\ln 4=\ln e^{2x}$$

$$\ln 4=2x$$

$$x=\ln 4/2=\ln 2$$

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوال $y=\frac{2}{x^2+1}$ و $y=|x|$ حيث نقاط التقاطع هما $-1,1$



متماثل

$$A=2\int_0^1 \frac{2}{x^2+1}-|x|\, dx$$

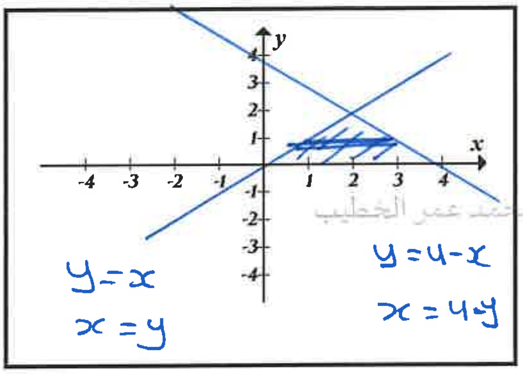
$$=2\int_0^1 \frac{2}{x^2+1}-x\, dx.$$

$$=2\left(2\tan^{-1}x-\frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^1=\pi-1$$

بدون تماثل

$$A=\int_{-1}^{0}\frac{2}{x^2+1}-(-x)\,dx+\int_0^1\frac{2}{x^2+1}-x\,dx$$

(1) اكتب تكامل <u>منفرد</u> يعبر عن المساحة المحصورة بين المستقيمات $y=4-x$ و $y=x$ و $y=0$



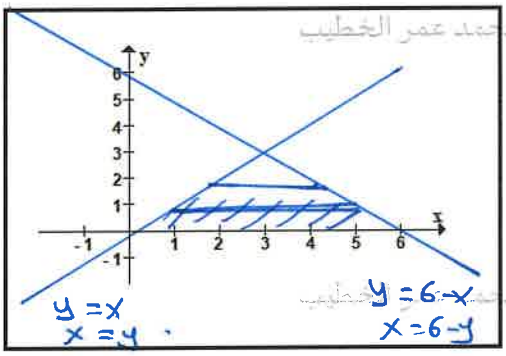
التكامل dy

$$A=\int_0^2 4-y-y \, dy.$$

$$=\int_0^2 4-2y \, dy$$

$$=4y-y^2\Big]_0^2=4.$$

(2) اكتب تكامل <u>منفرد</u> يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال $y=x$ ، $y=6-x$ ، $y=2$ و $y=0$



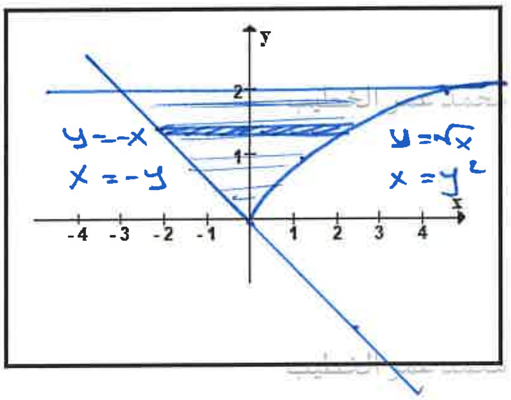
التكامل dy

$$A=\int_0^2 6-y-y \, dy$$

$$=\int_0^2 6-2y \, dy$$

$$=6y-y^2\Big]_0^2=8$$

(3) اكتب تكامل <u>منفرد</u> يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال $y=\sqrt{x}$ و $y=-x$ و $y=2$



التكامل dy

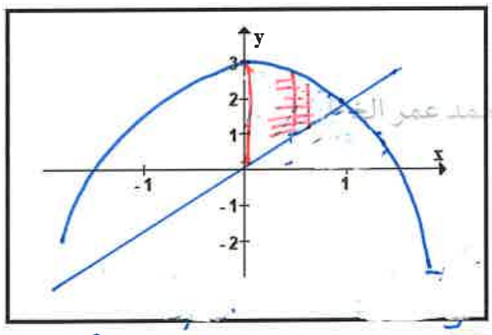
$$A=\int_0^2 y^2-(-y) \, dy$$

$$=\int_0^2 y^2+y \, dy$$

$$=\frac{14}{3}.$$

(4) اكتب تكامل <u>منفرد</u> يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال $y=2x$ ، $y=3-x^2$ ، ~~$y=0$~~ $x\geq 0$

التكامل dx



$3-x^2=2x$ $\quad x=\pm\sqrt{3-y}$

$x^2+2x-3=0 \rightarrow x=1,-3$

$$A=\int_0^1 3-x^2-2x \, dx$$

$$=\int_0^1 3-2x-x^2 \, dx$$

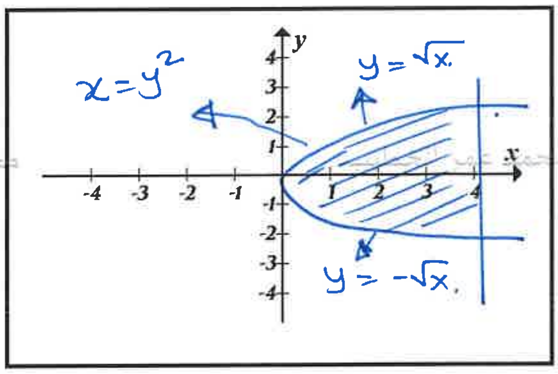
$$=5/3.$$

(1) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال $x = y^2$ ، $x = 4$ ثم أوجد المساحة

$$A = \int_{-2}^{2} 4 - y^2 \; dy$$

أو $$2\int_{0}^{2} 4 - y^2 \; dy$$

أو $$2\int_{0}^{4} \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) \, dx = 2\int_{0}^{4} 2\sqrt{x} \, dx$$

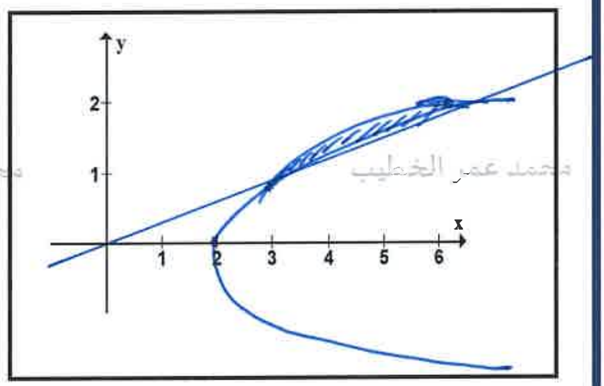


(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات $x = 3y$ و $x = y^2 + 2$

$$A = \int_{1}^{2} 3y - (y^2 + 2) \; dy$$

$$= \int_{1}^{2} -y^2 + 3y - 2 \; dy$$

$$= 1/6$$



$y^2 + 2 = 3y$

$y^2 - 3y - 2 = 0$

$y = 1 , 2$

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = \ln x$ و المحور $y = 0$ و والمستقيم $x = e$

مع dx

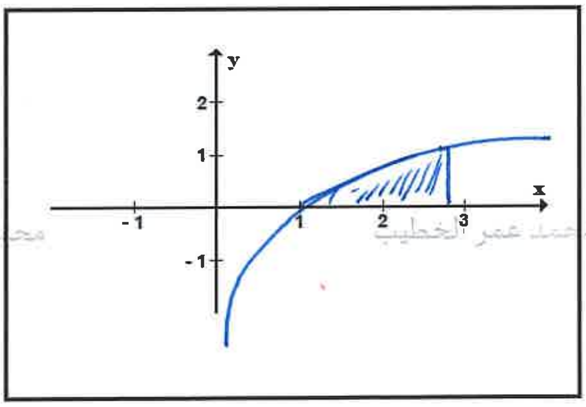
$$A = \int_{1}^{e} \ln x \; dx$$

لا نستطيع ايجاد التكامل (الوحدة السابقة)

مع dy

$$A = \int_{0}^{1} e - e^y \; dy$$

$$= 1$$



$y = \ln x$

$\ln x = y$

$x = e^y$

عندما

$x = e$

$y = 1$

هذه خطوات مقترحة لإيجاد المساحة بدون رسم...   مع العلم ان الرسم هو افضل

يمكن إيجاد المساحة بين دالتين متصلتين $f(x)$ و $g(x)$ بدون خطوة الرسم

(1) نجد نقاط التقاطع بين المنحنين وذلك بجعل $f(x) = g(x)$

عدد نقاط التقاطع 2
ولتكن x_1, x_2
لا يوجد تجزئة مساحة

عدد نقاط التقاطع 3
ولتكن x_1, x_2, x_3
يوجد تجزئة مساحة

(2) تحديد الدالة الأعلى

نختار عدد بين x_1, x_2
ونجد صورته في كل دالة .. فالدالة الأعلى تقابل القيمة الأكبر

نختار عدد بين x_1, x_2
ونجد صورته في كل دالة .. فالدالة الأعلى تقابل القيمة الأكبر
ونختار عدد بين x_2, x_3 ونكرر العملية السابقة

(3) المساحة

$$A = \int_{x_1}^{x_2} [\text{الدالة الأعلى} - \text{الدالة الأسفل}]\, dx \quad , \quad A = \int_{x_1}^{x_2} [\quad]\, dx + \int_{x_2}^{x_3} [\quad]\, dx$$

ملاحظة: يمكن تجاوز الخطوة الثانية وتجاهل الدالة الأعلى والأسفل فتكون المساحة

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

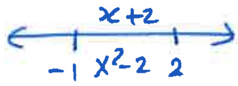
(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x + 2$ و $y = x^2$

نجد نقاط التقاطع .

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = -1 \,,\, x = 2$



$$A = \int_{-1}^{2} x + 2 - x^2 \, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} 2 + x - x^2 \, dx$$

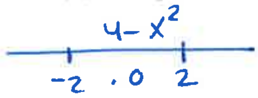
$$= 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_{-1}^{2} = 9/2 .$$

---

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة تحت المنحنى $y = 4 - x^2$ وفوق محور x

$4 - x^2 = 0$

$x = \pm 2$



$$A = \int_{-2}^{2} 4 - x^2 \, dx$$

$$= 4x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{32}{4}$$

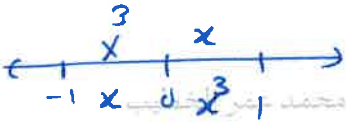
---

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x$ و $y = x^3$

$x^3 = x$

$x^3 - x = 0$

$x = 0 \,,\, \pm 1$



$$A_1 = \int_{-1}^{0} x^3 - x \, dx = \frac{1}{4} .$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} x - x^3 \, dx = \frac{1}{4} .$$

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1/2 .$$

(1) إذا كانت المساحة المحصورة بين الدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = mx$ هي $\frac{4}{3}$ وحدة مساحة،

فأوجد قيمة الثابت m حيث $0 < m$

نجد نقاط التقاطع .

$x^2 = mx$

$x^2 - mx = 0$

$x(x - m) = 0$

$x = 0 , \quad x = m$.

$A = \int_0^m mx - x^2 \, dx$

$\frac{4}{3} = m\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_0^m$.

$\frac{4}{3} = \frac{m^3}{2} - \frac{m^3}{3}$.

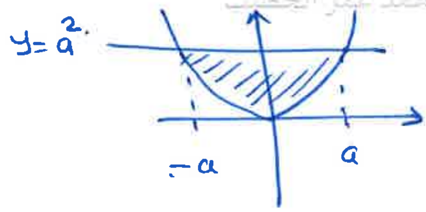
$\frac{4}{3} = \frac{m^3}{6}$

$m^3 = 8 \Rightarrow m = 2$

---

(2) إذا كانت المساحة المحصورة بين الدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = a^2$ هي 36 وحدة مساحة،

فاوجد قيمة الثابت a حيث $0 < a$



$X^2 = a^2$

$x = \pm a$:

$A = 2\int_0^a a^2 - x^2 \, dx$

$36 = 2\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^a$

$36 = 2\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right)$

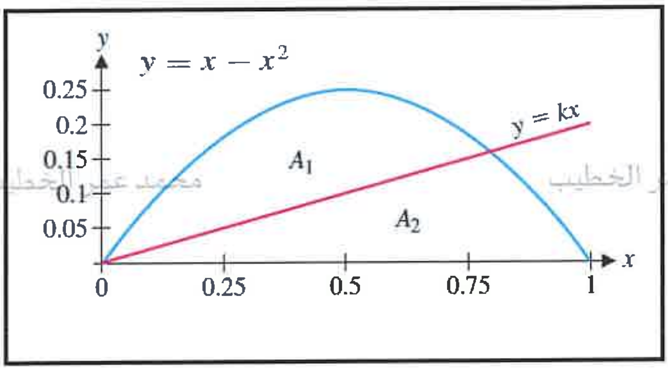
$36 = 2\left(\frac{2a^3}{3}\right)$

$36 = \frac{4}{3}a^3$

$27 = a^3$

$a = 3$

في الشكل المجاور اذا كانت المساحة A_1 تساوي المساحة A_2 حيث $y = x - x^2$ و $y = kx$



(أ) اوجد قيمة A_1

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 x - x^2 \, dx$$

$$2A_1 = 1/6$$

$$A_1 = 1/12$$

(ب) اوجد قيمة k

نقطة التقاطع .

$$x - x^2 = kx.$$

$$x^2 + kx - x = 0$$

$$x(x + k - 1) = 0.$$

$$x = 0 \quad , \quad x + k - 1 = 0$$

$$x = -k + 1$$

$$= 1 - k.$$

$$A_1 = \int_0^{1-k} x - x^2 - kx \, dx$$

$$\frac{1}{12} = \int_0^{1-k} x - kx - x^2 \, dx$$

$$\frac{1}{12} = \int_0^{1-k} x(1-k) - x^2 \, dx$$

$$\frac{1}{12} = \frac{x^2}{2}(1-k) - \frac{x^3}{3} \Big]_0^{1-k}.$$

$$\frac{1}{12} = \frac{(1-k)^2(1-k)}{2} - \frac{(1-k)^3}{3}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{(1-k)^3}{2} - \frac{(1-k)^3}{3}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{(1-k)^3}{6}.$$

$$\therefore (1-k)^3 = 1/2$$

$$1 - k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

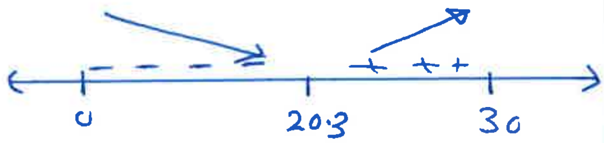
$$k = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

إذا كان معدل تغير عدد المواليد في مدينة ما هو $B(t)=2e^{0.04t}$ مليون شخص ومعدل عدد الوفيات في نفس المدينة هو $D(t)=3e^{0.02t}$ مليون شخص حيث t بالسنوات

(أ) أوجد متى يتزايد و ومتى يتناقص عدد سكان المدينة في الفترة الزمنية $[0,30]$

عدد السكان $P(t)$
معدل التغير في عدد السكان $P'(t)=B(t)-D(t)$

$$P'(t)=B(t)-D(t)$$
$$=2e^{0.04t}-3e^{0.02t}.$$
$$P'(t)=0$$
$$2e^{0.04t}=3e^{0.02t}.$$
$$\frac{e^{0.04t}}{e^{0.02t}}=\frac{3}{2}.$$
$$e^{0.02t}=3/2.$$
$$\ln e^{0.02t}=\ln 3/2$$
$$0.02t=\ln 3/2$$
$$t=\frac{\ln 3/2}{0.02}$$
$$=20.3.$$



$(0\ ,\ 20.3)$ يتناقص عدد السكان

$(20.3\ ,\ 30)$ يتزايد عدد السكان

(ب) أوجد تكامل $P'(t)$ على الفترة $[0,30]$ وفسر ماذا يعني هذا التكامل

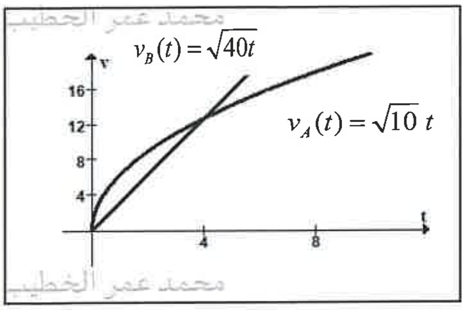
يمثل التكامل صافي التغير (الزيادة او النقصان) في عدد السكان خلال 30 سنة
$\Delta P=\int_0^{30}P'(t)\,dt$

$$\Delta P=\int_0^{30}P'(t)\,dt.$$
$$=\int_0^{30}2e^{0.04t}-3e^{0.02t}\,dt.$$
$$=\left.2\frac{e^{0.04t}}{0.04}-3\frac{e^{0.02t}}{0.02}\right]_0^{30}$$
$$=-7.3.$$

وتعني ان عدد السكان سينقص 7.3 مليون خلال 30 سنة.

(1) تمثل الدلة $v_A(t)=\sqrt{10}\ t$ سرعة السيارة A

وتمثل الدلة $v_B(t)=\sqrt{40t}$ سرعة السيارة B بالمترلكل الثانية



(أ) أوجد المسافة التي تقطعها كل سيارة خلال أول 4 ثواني

وأي السيارتين أسرع خلال أول 4 ثواني

$$d_A=\int_0^4 \sqrt{10}\ t\ dt=\sqrt{10}\ \frac{t^2}{2}\Big]_0^4=25.3\ m.$$

$$d_B=\int_0^4 \sqrt{40t}\ dt=\int_0^4 (40t)^{1/2}=\sqrt{40}\ \frac{t^{3/2}}{3/2}\Big]_0^4=33.7\ m.$$

السيارة B اسرع لانها تقطع مسافة اكبر في نفس الزمن .

(ب) اكتب التكامل الذي يمثل الفرق بين المسافتين التي قطعتهما السيارتين خلال أول 4 ثواني

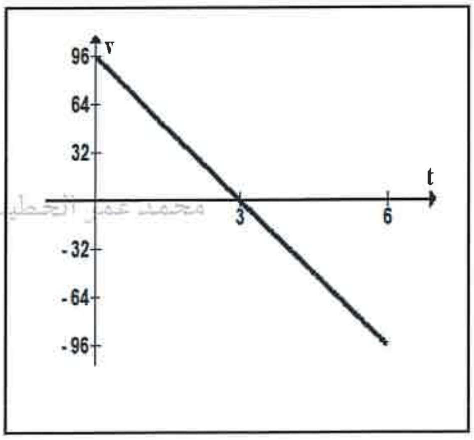
$$d=\int_0^4 \sqrt{40t}-\sqrt{10}t\ \ dt$$

---

(2) يمثل الشكل المجاور العلاقة بين الزمن والسرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم

المسافة تساوي المساحة

الإزاحة تساوي التكامل



(أ) أوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال أول 3 ثواني

$$d=\int_0^3 v(t)\ dt=\frac{1}{2}(3)(96)=144$$

(ب) أوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال أول 6 ثواني

$$d=\int_0^3 v(t)\,dt+\int_3^6 -v(t)\,dt=288$$

(ج) أوجد الإزاحة التي يقطعها الجسم خلال أول 6 ثواني

$$\Delta s=\int_0^6 v(t)\,dt=144-144=0$$

هذا السؤال غير مهم في امتحان الوزارة لانه يعتمد على معلومات كانت محذوفة في الفصل الثاني

الطاقة المفقودة [يعرف تكامل القوة بانه الطاقة (الشغل)]

عند حدوث تصادم بين مضرب التنس والكرة يتغير شكل الكرة ،بحيث تتكمش مسافة x سنتيميتر اولا ،ثم تتمدد ،مما يسبب حركة للكرة ،اذا كانت القوة التي بذلت على الكرة هي $f(x)$ فان القوة اثناء الانكماش تسمى $f_c(x)$ وعند التمدد تسمى $f_e(x)$ ويتم نقل الطاقة الى الكرة اثناء الانكماش وتحركها بعيداً اثناء التمدد وتخسر جزء من طاقتها تسمى الطاقة المفقودة وتساوي

حيث m مسافة الانكماش

$$\int_0^m [f_c(x)-f_e(x)]\,dx$$

وتعرف نسبة الطاقة المفقودة للكرة اثناء الاصطدام بـ

$$\frac{\int_0^m [f_c(x)-f_e(x)]\,dx}{\int_0^m [f_c(x)]\,dx}\times 100\% = 1-\frac{\int_0^m [f_e(x)]\,dx}{\int_0^m [f_c(x)]\,dx}\times 100\%$$

يمثل الجدول التالي بعض البيانات اثناء اصطدام كرة التنس بالمضرب

$x\ cm$	0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x)\ N$	0	110	220	400	700
$f_e(x)\ N$	0	100	200	300	700

$n=4$

اوجد نسبة الطاقة المفقودة باستخدام طريقة سمبسون

$$S_n f(x)=\frac{b-a}{3n}[f(x_0)+4f(x_1)+2f_c(x_2)+4f(x_3)+\cdots+f(x_n)]$$

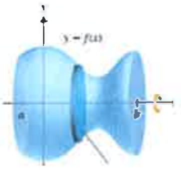
$$S_4 f_c(x)=\frac{1-0}{3(4)}[f_c(0)+4f_c(1)+2f_c(0.5+4f_c(0.75)+f_c(1)]=265$$

$$S_4 f_e(x)=\frac{1-0}{3(4)}[f_e(0)+4f_e(1)+2f_e(0.5)+4f_e(0.75)+f_e(1)]=225$$

نسبة الطاقة المفقودة تساوي $(1-\frac{225}{265})\times 100\% = 15\%$ و نسبة الطاقة المحتفظ بها تساوي 85%

الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل /// الدرس الثاني: الحجم (شرائح وحلقات)

الحجوم



الدورانية

المقطعية (التقطيع)

(1) مساحة المقطع $A(x)$ معلوم

$$V=\int_a^b A(x)\,dx$$

(2) مساحة المقطع $A(x)$ غير معلوم لكن

المقطع معلوم (مربع ،دائرة،...)ومحدود بدالتين

(أ) مربع ، طول ضلعه

$$s=f(x)-g(x)\Longrightarrow A(x)=s^2$$

(ب) دائرة ، نصف قطرها

$$r=\frac{f(x)-g(x)}{2}\Longrightarrow A(x)=\pi r^2$$

(ج) مثلث متساوي الأضلاع ،طول ضلعه

$$l=f(x)-g(x)\Longrightarrow A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

(ج) مربعات ،طول قطرها

$$d=f(x)-g(x)\Longrightarrow A(x)=\frac{1}{2}d^2$$

(3) المجسم هندسي منتظم مثل الهرم

المكامل dx

الشريحة عمودية على محور الدوران

اقراص وحلقات

(1) الدوران حول محور x او $y=0$

$V=\pi\int_a^b r_o^2-r_i^2\quad dx$	$r_o=f(x)$ $r_i=g(x)$

(2) الدوران حول المحور $y=k$

$V=\pi\int_a^b r_o^2-r_i^2\ dx$	$r_o=f(x)-k$ $r_i=g(x)-k$

الشريحة توازي محور الدوران

اصداف

(1) الدوران حول محور y او $x=0$

$V=2\pi\int_a^b r\,h\quad dx$	$r=x$ $h=f(x)-g(x)$

(2) الدوران حول المحور $x=l$

$V=2\pi\int_a^b r\,h\quad dx$	$r=l-x$ $h=f(x)-g(x)$

المكامل dy

الشريحة عمودية على محور الدوران

اقراص وحلقات

(1) الدوران حول محور y او $x=0$

$V=\pi\int_a^b r_o^2-r_i^2\quad dy$	$r_o=f(y)$ $r_i=g(y)$

(2) الدوران حول المحور $x=l$

$V=\pi\int_a^b r_o^2-r_i^2\ dy$	$r_o=l-f(y)$ $r_i=l-g(y)$

الشريحة توازي محور الدوران

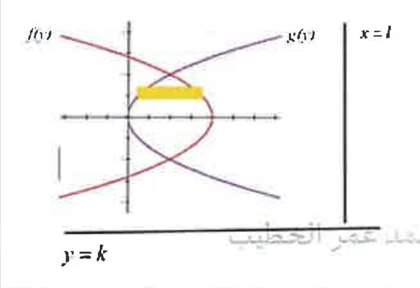
اصداف

(1) الدوران حول محور x او $y=0$

$V=2\pi\int_a^b r\,h\quad dy$	$r=y$ $h=f(y)-g(y)$

(2) الدوران حول المحور $y=k$

$V=2\pi\int_a^b r\,h\,dy$	$r=y-k$ $h=f(y)-g(y)$



ملاحظة: عندما يكون المقطع العرضي هو دائرة .... فإن الحجم المقطعي هو نفسه حجم دوراني

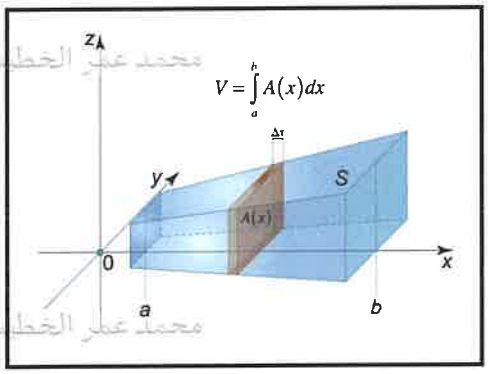
اولاً : الحجوم باستخدام المقاطع العرضية (التقطيع أو الشرائح)

الحالة الأولى : مساحة المقطع معلوم

أذا كانت مساحة المقطع العرضي لمجسم هي $A(x)$

حيث $a \le x \le b$ فان حجم المجسم تعطى بالتكامل

$$v = \int_a^b A(x)\,dx$$



(1) أوجد حجم المجسم الذي مقطعه العرضي $A(x) = 4x$ حيث $0 \le x \le 1$

$$v = \int_0^1 A(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 4x\,dx$$
$$= 2x^2\Big]_0^1 = 2 .$$

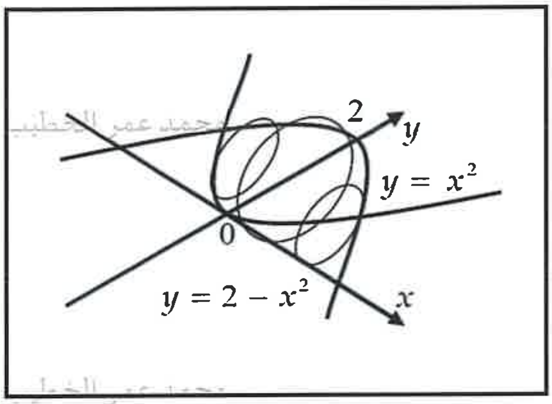
(2) أوجد حجم المجسم الذي مقطعه العرضي $A(x) = 10e^{0.01x}$ حيث $0 \le x \le 10$

$$v = \int_0^{10} 10e^{0.01x}$$
$$= 10\frac{e^{0.01x}}{0.01}\Big]_0^{10}$$
$$= 105$$

(3) أوجد حجم الهرم الذي مقطعه العرضي مربع مساحته $A(x) = \frac{4}{25}(10-x)^2$ وارتفاعه 10 متر

$$v = \int_0^{10} \frac{4}{25}(10-x)^2\,dx$$
$$= \frac{4}{25}\frac{(10-x)^3}{3(-1)}\Big]_0^{10} = \frac{160}{3} .$$

الحالة الثانية : مساحة المقطع غير معلومة (لكن المقطع معلوم و محدد بدالتين)



أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

$y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ ، $-1 \le x \le 1$

في الحالات التالية:

(أ) المقاطع عرضية دائرية متعامدة على محور x

$$r = \frac{f(x) - g(x)}{2} = \frac{2 - x^2 - x^2}{2} = \frac{2 - 2x^2}{2} = \frac{2(1 - x^2)}{2} = 1 - x^2$$

$$V = \int A(x)\,dx = \int \pi r^2\,dx = \int_{-1}^{1} \pi (1 - x^2)^2\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,dx$$

$$= \pi \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \frac{16\pi}{15}.$$

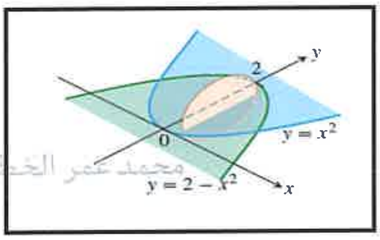
(ب) المقاطع عرضية مربعة متعامدة على محور x

$$S = 2 - x^2 - x^2 = 2 - 2x^2$$

$$V = \int A(x)\,dx = \int s^2\,dx = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)^2\,dx = \int_{-1}^{1} 4(1 - x^2)^2\,dx = \frac{64}{15}.$$

أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ ، $-1 \le x \le 1$

في الحالات التالية:



(أ) المقاطع عرضية نصف دائرة متعامدة على محور x

$$r = \frac{2 - x^2 - x^2}{2} = 1 - x^2$$

$$V = \int A(x)\,dx = \int \frac{1}{2}\pi r^2\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\pi (1 - x^2)^2\,dx = \frac{8\pi}{15}.$$

(ب) المقاطع عرضية مثلثة متساوية الأضلاع متعامدة على محور x

$$L = 2 - x^2 - x^2 = 2 - 2x^2 = 2(1 - x^2)$$

$$V = \int A(x)\,dx = \int \frac{\sqrt{3}}{4} L^2\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2(1 - x^2))^2\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}(1 - x^2)^2\,dx = \frac{16\sqrt{3}}{15}$$

(ج) المقاطع عرضية مربعات اقطارها متعامدة على محور x

$$d = 2 - x^2 - x^2 = 2 - 2x^2 = 2(1 - x^2)$$

$$V = \int A(x)\,dx = \int \frac{1}{2} d^2\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot (2(1 - x^2))^2\,dx = \int_{-1}^{1} 2(1 - x^2)^2\,dx = \frac{32}{15}.$$

(1) أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

$$0 \le x \le \pi \ ، \ y = 0 \ ، \ y = 2\sqrt{\sin x}$$

والمقاطع العرضية هي <u>مثلثات متساوية</u> الأضلاع متعامدة على محور x

$L = 2\sqrt{\sin x} - 0$

$= 2\sqrt{\sin x}$

$V = \int A(x)\, dx$

$= \int \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot L^2\, dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(2\sqrt{\sin x}\right)^2 dx$

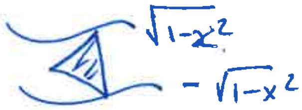
$= \int_0^{\pi} \sqrt{3}\, \sin x\, dx = 2\sqrt{3}$

---

(2) اوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

$$-1 \le x \le 1 \ ، \ y = \sqrt{1-x^2} \ ، \ و \ y = -\sqrt{1-x^2}$$

والمقاطع العرضية هي <u>مثلثات متساوية</u> الأضلاع متعامدة على محور x



$L = \sqrt{1-x^2} - \left(-\sqrt{1-x^2}\right)$

$= 2\sqrt{1-x^2}$

$V = \int A(x)\, dx$

$= \int \frac{\sqrt{3}}{4} l^2\, dx$

$= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

$= \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\left(1-x^2\right) dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

---

(3) أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $0 \le x \le \ln 5 \ ، \ y = 0 \ ، \ y = e^{-2x}$

والمقاطع العرضية هي <u>مربعات</u> متعامدة على محور x

$S = e^{-2x}$

$V = \int A(x)\, dx$

$= \int S^2\, dx$

$= \int_0^{\ln 5} \left(e^{-2x}\right)^2 dx$

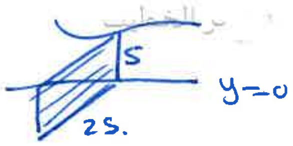
$= \int_0^{\ln 5} e^{-4x}\, dx$

$= \frac{156}{625}$

(1) اوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

$0 \le x \le \pi/4$ ، $y = 0$ ، و $y = \sec x$

والمقاطع العرضية هي مستطيلات عرضها بين الدالتين وطولها ضعف عرضها متعامدة على محور x



$S = \sec x - 0$

$V = \int A(x)\, dx$

$= \int S \cdot 2S\, dx$

$= \int_0^{\pi/4} 2S^2\, dx$

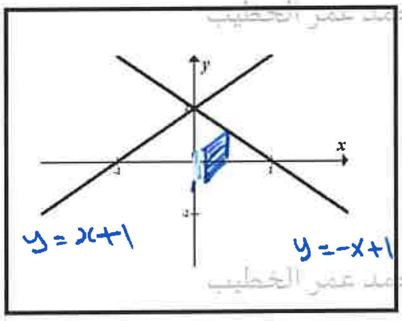
$= \int_0^{\pi/4} 2 \sec^2 x\, dx = 2[\tan x]_0^{\pi/4} = 2.$

---

(2) أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = x+1$ و $y = -x+1$

ومحور x والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور x

يفضل استخدام التماثل



$V = 2\int A(x)\, dx$

$= 2\int S^2\, dx$

$= 2\int_0^1 (-x+1)^2\, dx = 2/3.$

$S = -x+1-0$

$= -x+1$

وبدون تماثل.

$V = \int_{-1}^0 (x+1)^2\, dx + \int_0^1 (-x+1)^2\, dx = 2/3.$

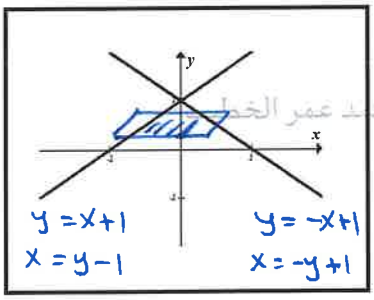
---

(3) أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = x+1$ و $y = -x+1$

ومحور x والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور y

لا يفضل استخدام التماثل لان الجزء الايمن يصبح مستطيل

التكامل dy لان المقطع متعامد ع محور y



$V = \int A\, dy$

$= \int S^2\, dy$

$= \int_0^1 [-2(y-1)]^2\, dy$

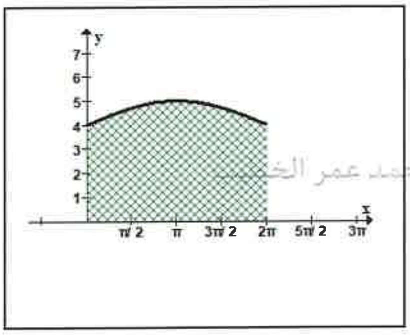
$= 4/3.$

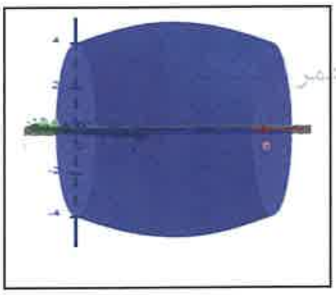
$S = -y+1-(y-1)$

$= -2y+2$

$= -2(y-1)$

(1) إناء فخاري مقاطعه عرضية دائرية نصف قطرها $4+\sin\frac{x}{2}$ ، $0 \le x \le 2\pi$ أوجد حجم الإناء





$$V = \int A(x)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \pi r^2\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \pi\left(4+\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$$

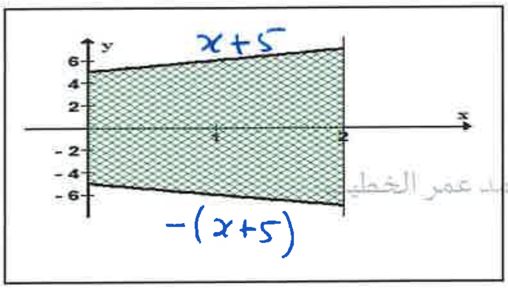
$$= \int_0^{2\pi} \pi\left(16+8\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \pi\int_0^{2\pi} 16+8\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}(1-\cos x)\,dx$$

$$= \pi\left[16x - \frac{8\cos\frac{x}{2}}{1/2} + \frac{1}{2}(x-\sin x)\right]_0^{2\pi} = 33\pi^2+32\pi$$

---

(2) اوجد حجم بركة للسباحة تم مشاهدتها من مكان مرتفع، فكانت على شكل إطار محدود بالمعادلتين $y=\pm(x+5)$ حيث $0 \le x \le 2$ وعمقها معطى بالدالة $x+4$



$$V = \int A(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 2(x+5)(x+4)\,dx$$

$$= \int_0^2 2(x^2+9x+20)\,dx$$

$$= \frac{364}{3}$$

الطول × العرض

$$A(x) = [(x+5)-(-(x+5))]\cdot(x+4)$$

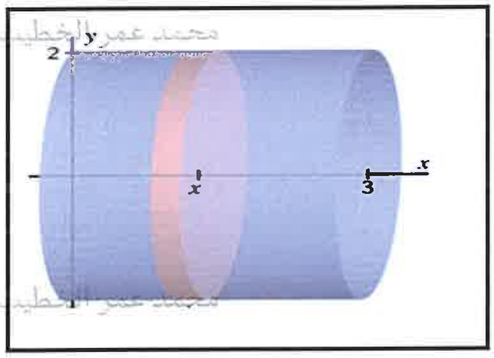
$$= 2(x+5)(x+4)$$

الحالة الثالثة : مساحة المقطع غير معلومة و المقطع غير معلوم

ملاحظة مهمة : يجب أن تكون المقاطع $A(x)$ متشابهة (وممكن أن تكون متطابقة ولكن ليس شرط) في اتجاه واحد (ويكون هو المكامل)

(1) الشكل المجاور يمثل اسطوانة نصف قطرها 2 وارتفاعها 3

اكتب التكامل الذي يمثل حجمها ثم جد قيمة الحجم



مساحة المقطع ثابت... وهو دائرة

$$V = \int A(x)\,dx$$
$$= \int \pi r^2\,dx$$
$$= \int_0^3 \pi (2)^2\,dx = 12\pi$$

$r = 2$ ثابت

المقطع دائرة.

(2) الشكل المجاور يمثل خيمة على شكل منشور،

اكتب التكامل الذي يمثل حجمها ثم جد قيمة الحجم

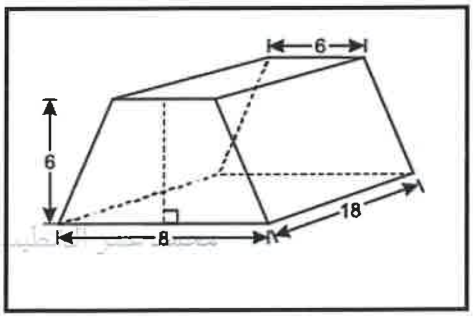
مساحة المقطع ثابت... وهو مثلث

$$V = \int A(x)\,dx$$
$$= \int_0^{80} \frac{1}{2}(50)(40)\,dx$$
$$= 80000$$

المقطع مثلث

(3) الشكل المجاور يمثل بيت على شكل منشور ،

اكتب التكامل الذي يمثل حجمه ثم جد قيمة الحجم



مساحة المقطع ..ثابت وهو شبه منحرف

$$A(x) = \frac{6+8}{2} \cdot (6) = 42$$

$$V = \int A(x)\,dx$$
$$= \int_0^{18} 42\,dx$$
$$= 756$$

أوجد حجم الهرم الذي قاعدته مربعة الشكل، وطول ضلع قاعدته 180 متر وارتفاعه 100 متر

باستخدام التكامل

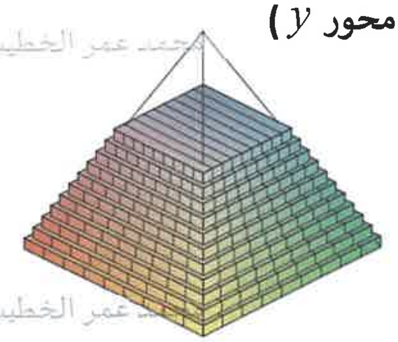
ملاحظة: إذا كان السؤال اختيار من متعدد نستخدم قانون حجم الهرم: وهو ثلث مساحة القاعدة ضرب الارتفاع

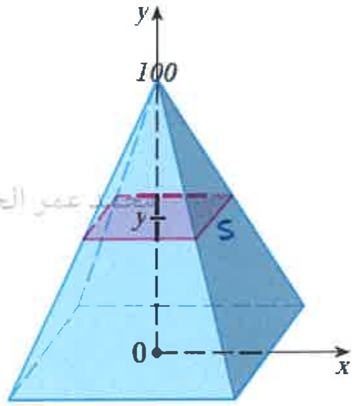
يمكن استخدام القانون $V=\int_0^H (L-\frac{L}{H}x)^2\,dx$ حيث $H=100$ ارتفاع الهرم و $L=180$ طول قاعدة الهرم

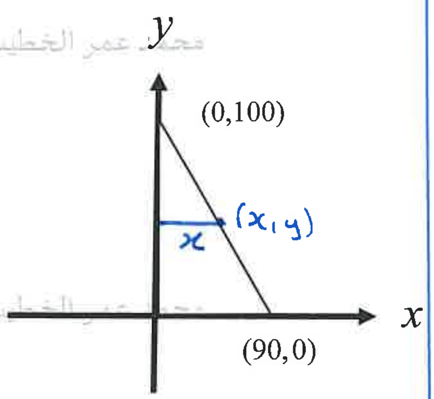
ملاحظة: يتشكل الهرم من تجميع مقاطع عرضية وهي مربعات (متعامدة على محور y)

في اتجاه المحور y لذلك يجب أن يكون المكامل dy

ومساحة المقطع بدلالة y ونجد مساحة المربع عند اي ارتفاع بدلالة y



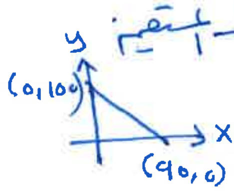




$S = 2x.$

$$V=\int A(y)\,dy.$$
$$=\int s^2\,dy$$
$$=\int (2x)^2\,dy.$$
$$=\int_0^{100}\left[2\cdot\frac{9}{10}(100-y)\right]^2 dy$$
$$=\int_0^{100}\left(\frac{9}{5}(100-y)\right)^2 dy$$
$$=\int_0^{100}\left(180-\frac{9}{5}y\right)^2 dy$$
$$=\frac{\left(180-\frac{9}{5}y\right)^3}{3\left(\frac{-9}{5}\right)}\Bigg]_0^{100}$$
$$=1080000$$

* نجد العلاقة
بين x و y .
من معادلة
الخط المستقيم



$m=\frac{100-0}{0-90}=\frac{-10}{9}$

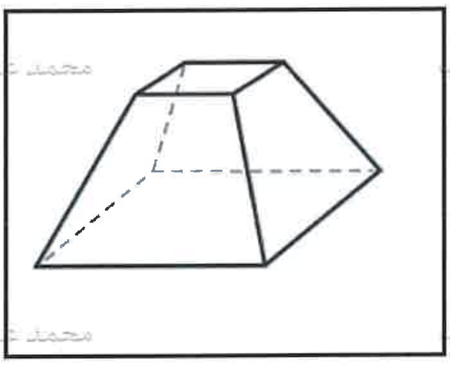
$y-100=\frac{-10}{9}(x-0)$

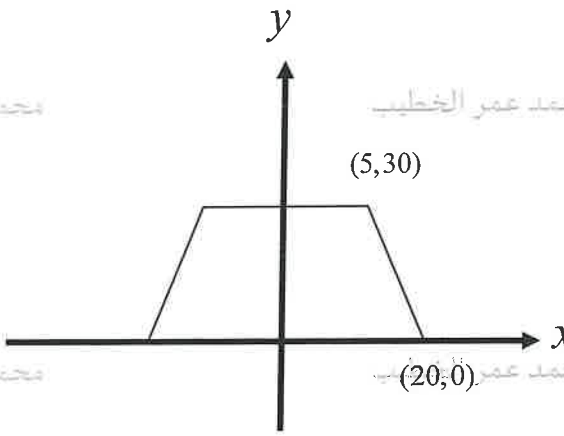
$y-100=\frac{-10}{9}x.$

$x=\frac{-9}{10}(y-100)$

$\rightarrow x=\frac{9}{10}(100-y)$

أوجد حجم الهرم الناقص الذي قاعدته مربعة الشكل، وطول ضلع قاعدته السفلية 40متر، وقاعدته من الأعلى مربعة الشكل وطول ضلعها 10 متر وارتفاعه 30 متر





* المقاطع مربعات في اتجاه محور y (متعامدة).

$$V = \int A(y)\,dy$$

$$= \int s^2\,dy$$

$$= \int_0^{30} (2x)^2\,dy$$

$$= \int_0^{30} (40-y)^2\,dy$$

$$= \left.\frac{(40-y)^3}{3(-1)}\right]_0^{30}$$

$$= 2100$$

نجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين

(20,0) و (5,30)

$$m = \frac{30-0}{5-20} = -2$$

$$y - 30 = -2(x-5)$$

$$y - 30 = -2x + 10$$

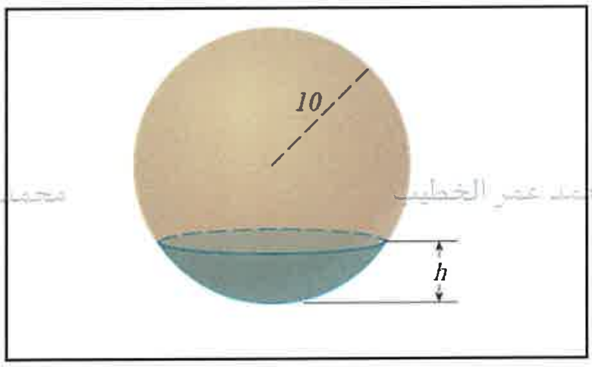
$$-2x + 10 = y - 30$$

$$-2x = y - 40$$

$$2x = 40 - y$$

(1) أثبت أن حجم الماء في الخزان الكروي الذي نصف قطره $10m$ وارتفاعه الماء h يعطى بالعلاقة

$$v(h) = 10\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$



مساحة المقطع عند اي ارتفاع x هي دائرة مساحتها

$A(x) = \pi r^2$.

$= \pi(20x - x^2)$

حجم الماء عند ارتفاع h يكون

$v = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \pi r^2\,dx$

$= \int_0^h \pi(20x - x^2)\,dx$

$= \pi\left(10x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^h$

$= \pi\left(10h^2 - \frac{h^3}{3}\right)$

$= 10\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$ #

من فيثاغورس

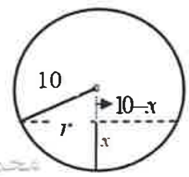
نجد العلاقة بين r و x

$r^2 + (10 - x)^2 = 100$

$r^2 + 100 - 2x + x^2 = 100$

$r^2 = 20x - x^2$

عمق الماء في اي لحظه هو x



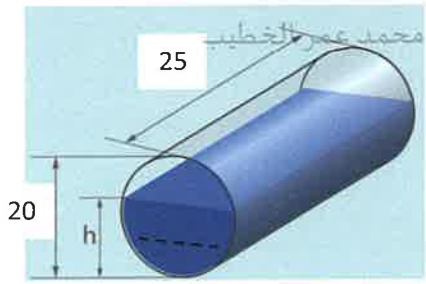
هذه العلاقة صحيحة في الدائرة التي نصف قطرها R

$$r^2 = 2Rx - x^2$$

يفضل حفظها

---

(2) اكتب التكامل الذي يمثل حجم الماء في الخزان الاسطواني القائم كما في الشكل المجاور الذي نصف قطرها $10m$ وارتفاعها $25m$ وارتفاع الماء h



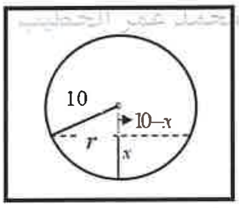
مساحة المقطع عند اي ارتفاع x هو مستطيل مساحته

$A(x) = 2r \cdot 25$

$= 50\sqrt{20x - x^2}$

$v = \int A(x)\,dx$

$= \int_0^h 50\sqrt{20x - x^2}\,dx$.



$r^2 = 2Rx - x^2$

ثانياً : الحجوم الدورانية : الأقراص (الحلقات) والأصداف

الحجوم الدورانية ← الدرس الثاني ← الأقراص (الحلقات) : الشريحة عمودية على محور الدوران

الحجوم الدورانية ← الدرس الثالث ← الأصداف : الشريحة توازي محور الدوران

ملاحظة: عندما يكون حجم المجسم ناتج عن دوران مساحة المنطقة R المحصورة بدالة مع أحد المحاور فإننا نستخدم الأقراص أما إذا كانت المساحة محصورة وليست مع محور الدوران فإننا نستخدم الحلقات .

الاقراص الشريحة عمودية على محور الدوران

ملاحظة (1) إذا كان الدوران حول محور السينات فإن سمك القرص الدائري سيكون المكامل (dx)

(2) إذا كان الدوران حول محور الصادات فإن سمك القرص الدائري سيكون المكامل (dy)

الحالة الأولى: الدوران حول محور السينات (x)

إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $f(x) \geq 0$ ومحور السينات والمستقيمين $x = a, x = b$ حول محور السينات (x) يعطى بالتكامل

مساحة القرص الدائري

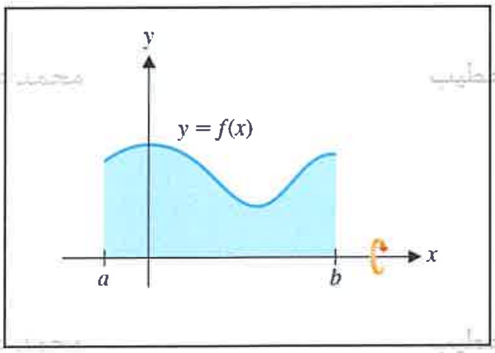
$$A = \pi r^2 = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2$$

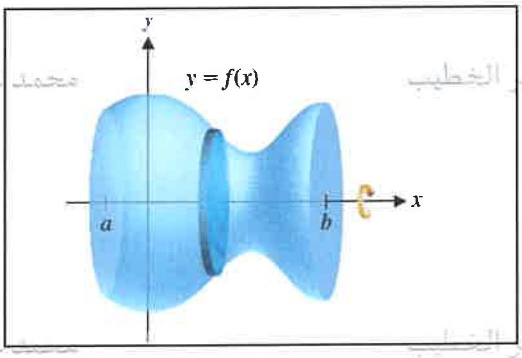
سمك القرص الدائري dx

$$v = \int_a^b A\, dx =$$

$$= \int_a^b \pi r^2\, dx$$

$$= \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$



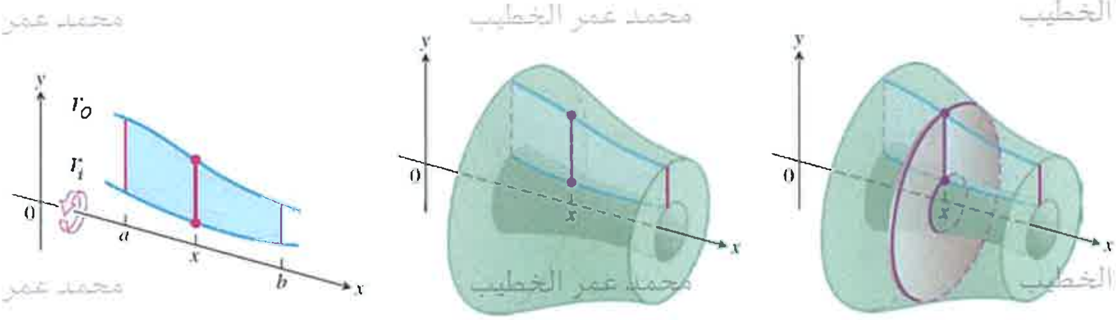


الحلقات (المجسمات المجوفة)

إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنيين $f(x), g(x)$ حيث $f(x) \ge g(x)$

والمستقيمين $x = a , x = b$ حول محور x يعطى بالتكامل

$$v = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx$$



نستخدم هذا القانون (أفضل)

$$v = \pi \int_a^b ({r_O}^2 - {r_I}^2)\, dx$$

حيث

r_O نصف قطر الدوران الخارجي (بعد الدالة الخارجية عن محور الدوران)

و r_I نصف قطر الدوران الداخلي (بعد الدالة الداخلية عن محور الدوران)

ملاحظة مهمة قبل البدأ بالحل:

إذا كانت الطريقة محددة وهي (أقراص /حلقات) ومحور الدوران محدد

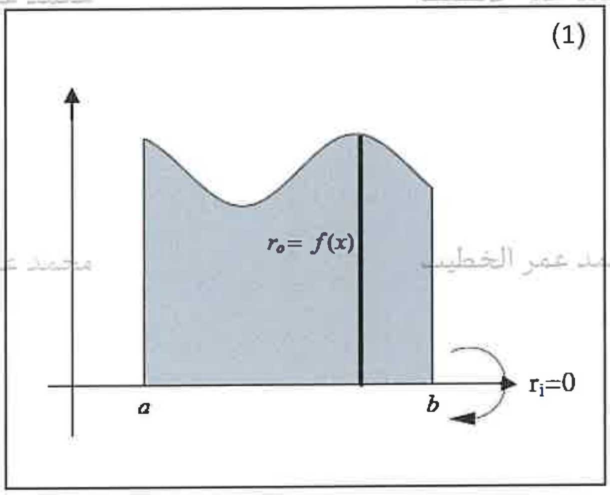
فان الشريحة (الارتفاع) يجب أن يتم اختيارها بحيث تعامد محور الدوران

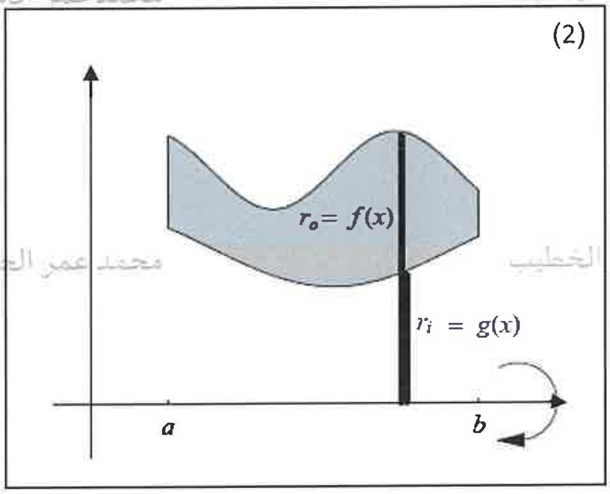
ملاحظة مهمة: إذا كان محور الدوران هو نفسه محور التماثل للشكل، فإنه يكفي تدوير نصف المنحنى وليس المنحنى كامل

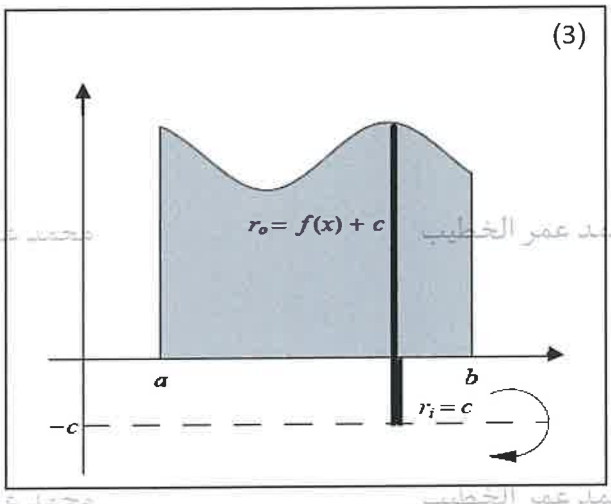
حالات نصف القطر الداخلي والخارجي مع محاور الدوران والمكامل dx

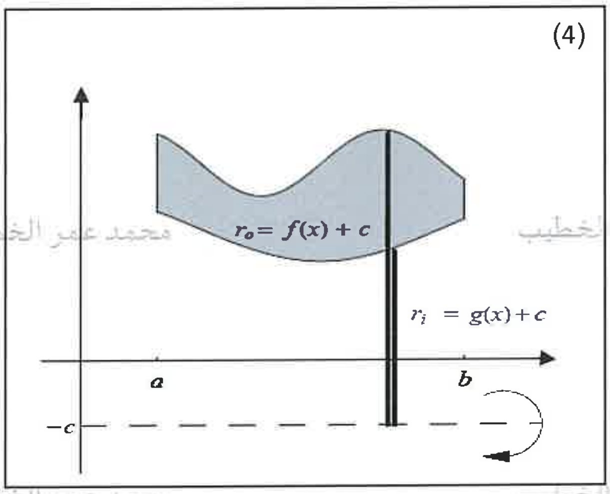
هذه الحالات ليست حفظ

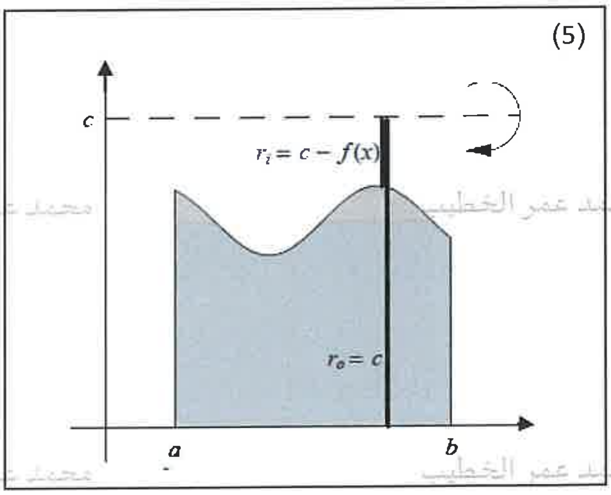
$$v = \pi \int_a^b r_o^{\,2} - r_i^{\,2} \quad dx$$

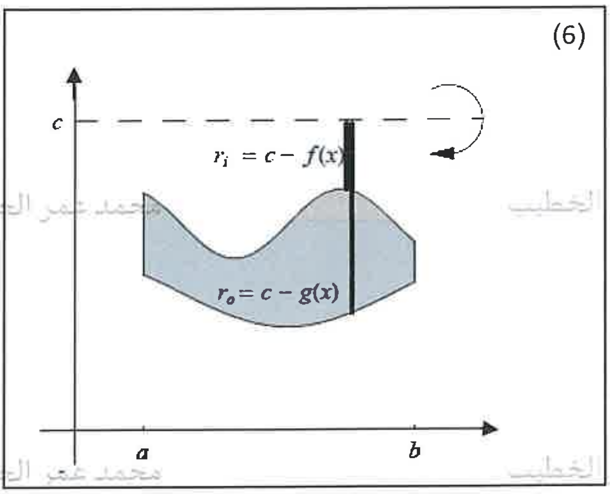




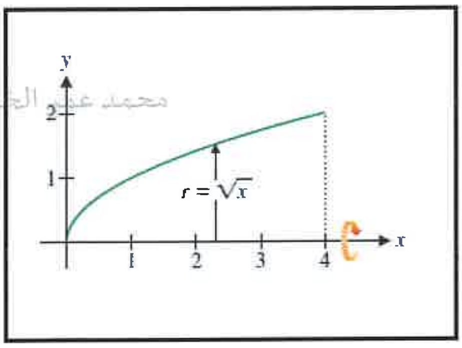


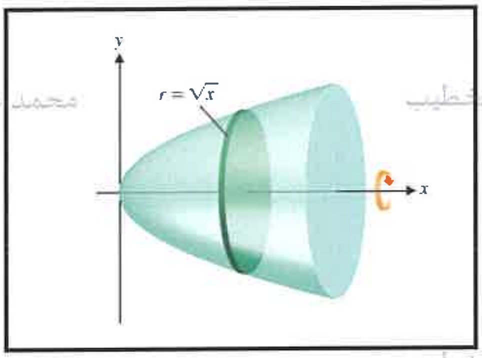






(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=\sqrt{x}$ والمستقيم $y=0$ على الفترة $[0,4]$ حول محور x بطريقة **الأقراص**





ملاحظة مهمة... قبل البدأ بالحل: لاحظ أن الطريقة محددة وهي اقراص /حلقات، ومحور الدوران محدد وهو(x) فإن الشريحة يجب أن يتم اختيارها بحيث تعامد محور الدوران فيكون (dx) وهو المكامل

أقراص.

∴ محور الدوران ⊥ الشريحة

∴ الشريحة dx .

$r_o=\sqrt{x}-0=\sqrt{x}$

$r_i=0-0=0$

$$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^4(\sqrt{x})^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^4 x\,dx$$

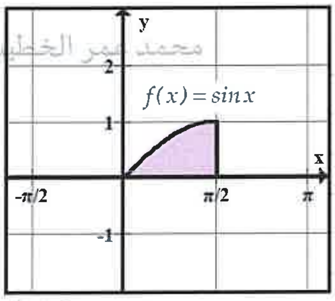
$$=8\pi.$$

---

(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالدالة $f(x)=\sin x$ والمستقيم $y=0$ على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

حول محور x بطريقة **الأقراص**



أقراص.

∴ محور الدوران ⊥ الشريحة.

∴ الشريحة dx

$r_o=\sin x$

$r_i=0$

$$V=\int r_o^2-r_i^2\,dx$$

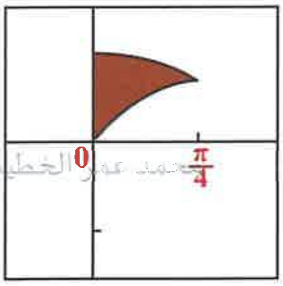
$$=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^2\,dx$$

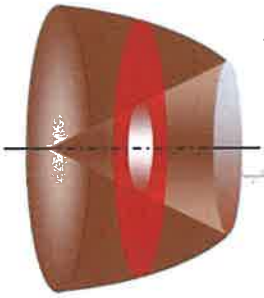
$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{\pi^2}{4}$$

(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالدالتين $y=\sin x$ و $y=\cos x$ والمستقيم $x=0$

على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ حول محور x





<u>بطريقة الحلقات</u>

حلقات

∴ محور الدوران أفقي.

∴ أفقي dx

$r_o = \cos x$

$r_i = \sin x$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^{\pi/4} \cos^2 x - \sin^2 x \, dx$

$= \pi \int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx$

$= \pi \left. \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/4} = \pi/2.$

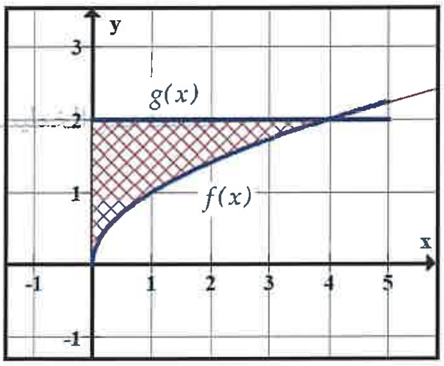
---

(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالدالتين $y=\sqrt{x}$ و والمستقيم $y=2$

والمستقيم $x=0$

حول محور x <u>بطريقة الحلقات</u>



حلقات.

∴ محور الدوران أفقي

∴ أفقي dx

$r_o = 2$

$r_i = \sqrt{x}$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^4 2^2 - (\sqrt{x})^2 \, dx$

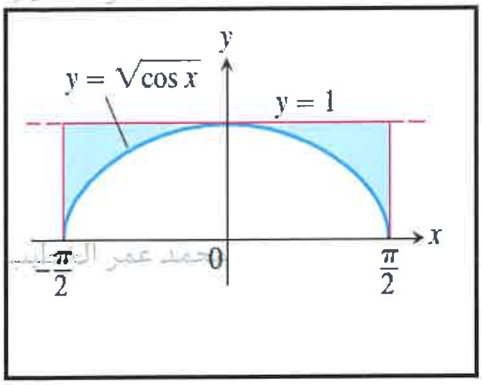
$= \pi \int_0^4 4 - x \, dx$

$= 8\pi$

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالدالة $y=\sqrt{\cos x}$ والمستقيم $y=1$

على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ حول محور x بطريقة **الحلقات**



حلقات

محور الدوران $\perp$ الشريحة

$\therefore$ شريحة dx

$r_o = 1$

$r_i = \sqrt{\cos x}$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1^2 - \left(\sqrt{\cos x}\right)^2 dx$$

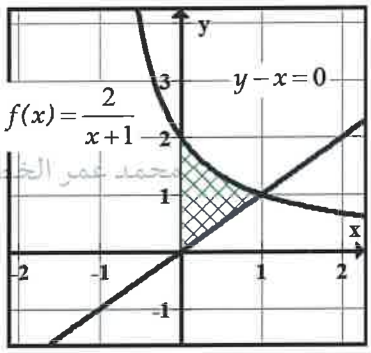
$$= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - \cos x \, dx = \pi^2 - 2\pi .$$

---

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالدالة $y=\frac{2}{x+1}$ والمستقيم $y=x$

والمستقيم $x=0$ حول محور x بطريقة **الحلقات**



حلقات.

محور الدوران $\perp$ الشريحة

$\therefore$ شريحة dx

$r_o = \frac{2}{x+1}$

$r_i = x$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1}\right)^2 - x^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{4}{(x+1)^2} - x^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 4(x+1)^{-2} - x^2 \, dx$$

$$= \frac{5\pi}{3} .$$

الحالة الثانية: الدوران حول محور الصادات (y)

أن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $g(y)\geq 0$ ومحور y والمستقمين $y=c, y=d$ حول محور y يعطى بالتكامل

$$v=\int_c^d A(y)\,dx=$$

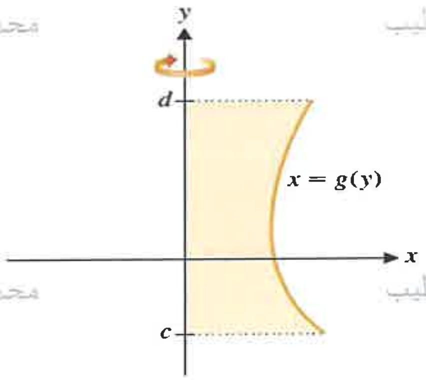
$$=\int_c^d \pi r^2\,dx$$

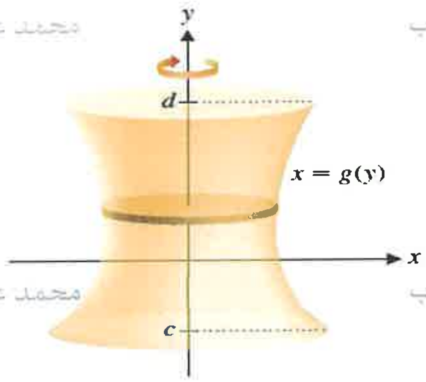
$$=\pi\int_c^d [g(y)]^2\,dy$$

مساحة القرص الدائري

$$A=\pi r^2=\pi x^2=\pi[g(y)]^2$$

سمك القرص الدائري dy



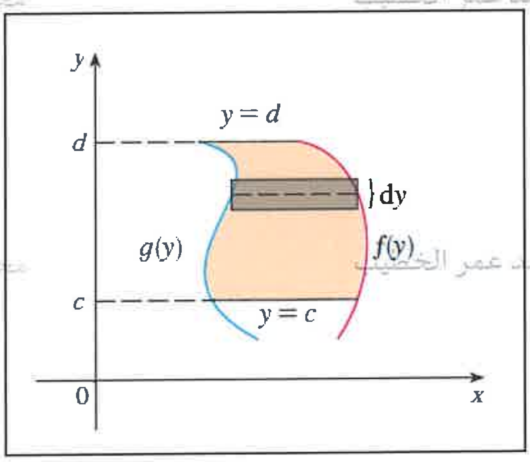


إنّ حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بمنحنى الدالتين $g(y)$ و $f(y)$ حيث $f(y)\geq g(y)$ والمستقمين $y=c, y=d$ حول محور y هو

$$v=\int_c^d A(y)\,dy$$

$$=\pi\int_c^d r_o^{\,2}-r_i^2\,dy$$

$$=\pi\int_c^d [f(y)]^2-[g(y)]^2\,dy$$

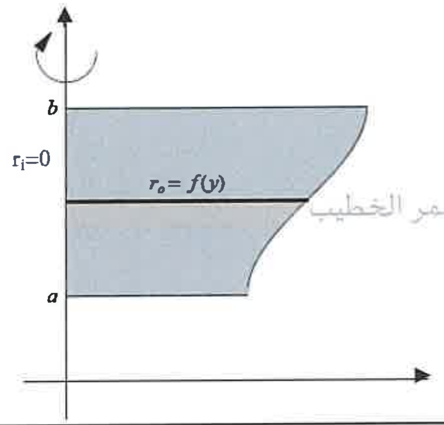


حالات نصف القطر الداخلي والخارجي مع محاور الدوران والمكامل dy

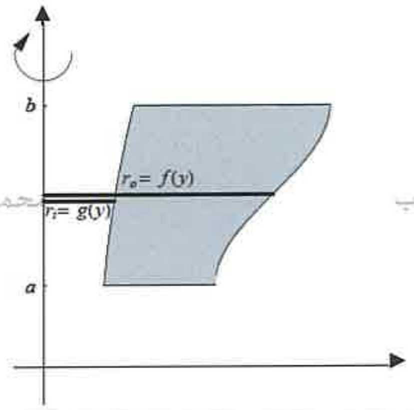
$$v = \pi \int_a^b r_o^2 - r_i^2 \quad dy$$

هذه الحالات ليست حفظ

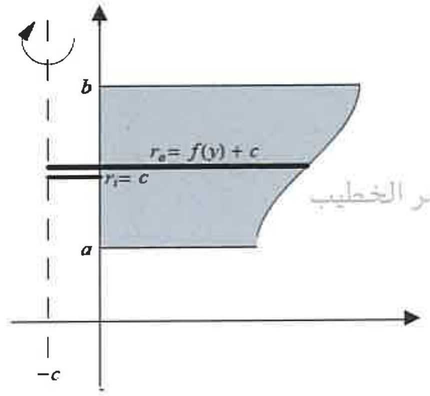
(1)



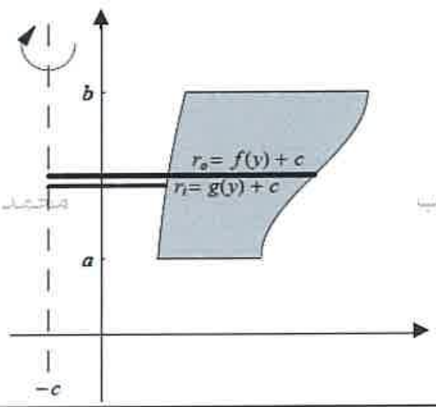
(2)



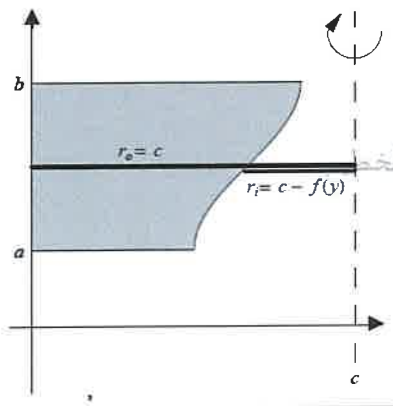
(3)



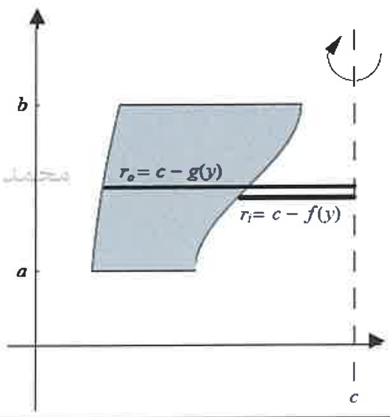
(4)

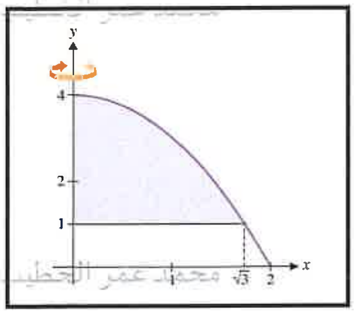


(5)



(6)





(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمنحنى $y = 4 - x^2$ والمستقيم $x = 0$ والمستقيم و $y = 1$

حول محور y بطريقة **الأقراص**

ملاحظة مهمة قبل البدأ بالحل: لاحظ أن الطريقة محددة وهي أقراص / الحلقات، ومحور الدوران محدد وهو (y) فان الشريحة يجب أن يتم اختيارها بحيث تعامد محور الدوران فتكون (dy)

أقراص

محور الدوران ⊥ الشريحة.

∴ الشريحة dy

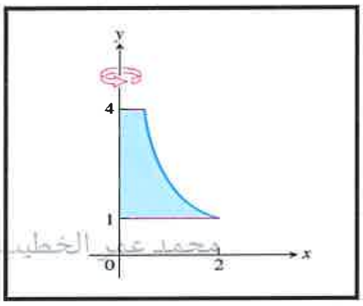
$r_o = \sqrt{4-y}$

$r_i = 0$.

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_1^4 (\sqrt{4-y})^2 dy$$

$$= \pi \int_1^4 (4-y) dy = \frac{9\pi}{2}.$$



(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$y = \frac{2}{x}$ والمستقيم $y = 1$ و المستقيم $y = 4$ ومحور y

حول محور y بطريقة **الأقراص**

أقراص

∴ محور الدوران ⊥ الشريحة

∴ الشريحة dy .

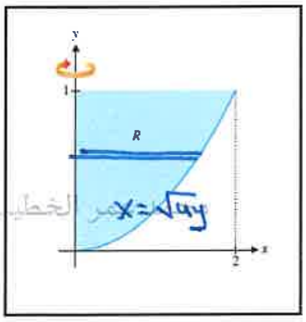
$r_o = \frac{2}{y}$

$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_1^2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy$$

$$= 3\pi.$$



$y = \frac{1}{4}x^2$

$x^2 = 4y$

$x = \pm\sqrt{4y}$.

(3) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$y = \frac{1}{4}x^2$ والمستقيم $y = 1$ و المستقيم $x = 0$

حول محور y بطريقة **الأقراص**

أقراص.

∴ محور الدوران ⊥ الشريحة

∴ الشريحة dy

$r_o = \sqrt{4y}$

$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

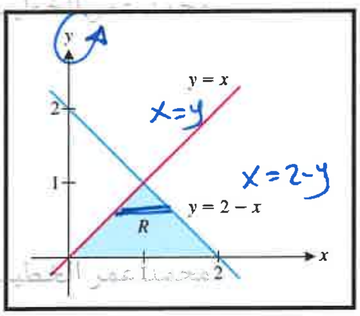
$$= \pi \int_0^1 (\sqrt{4y})^2 \, dy$$

$$= 2\pi.$$

(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمستقيم $y = 2 - x$ والمستقيم $y = x$ و $y = 0$ حول المحور y

بطريقة الحلقات.



بالشريحة ⊥ محور الدوران.

التكامل dy.

$r_o = 2-y$

$r_i = y.$

$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

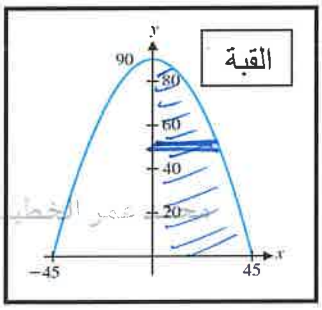
$$= \pi \int_0^1 (2-y)^2 - y^2 \, dy.$$

$$= 2\pi.$$

---

(2) إذا كان شكل القبة يتكون من تدويرالمساحة المحصورة بالمنحنى $y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$

ومحور السينات حول محور y ، أوجد حجم هذه القبة بطريقة الأقراص



ملاحظة مهمة: إذا كان محور الدوران هو نفسه محور التماثل

للشكل فإنه يكفي تدوير نصف المنحنى وليس المنحنى كامل

أقراص.

∴ محور الدوران ⊥ الشريحة

∴ التكامل dy

$$y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$$

$$\frac{2x^2}{45} = 90 - y$$

$$x^2 = \frac{45}{2}(90-y)$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}$$

$$r_o = \sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}$$

$$r_i = 0$$

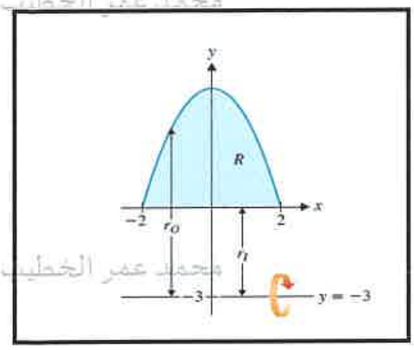
$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^{90} \left(\sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}\right)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^{90} \frac{45}{2}(90-y) \, dy$$

$$= 91125\pi.$$

الحالة الثالثة: الدوران حول مستقيم أفقي أو رأسي



(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$y = 4 - x^2$ ومحور x حول المستقيم $y = -3$ **بطريقة الحلقات**

حلقات .

∴ محور الدوران ∥ السينات .

∴ التكامل dx

$r_o = 4 - x^2 - (-3)$
$= 7 - x^2$

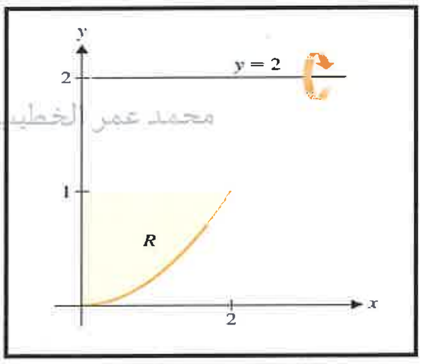
$r_i = 0 - (-3)$
$= 3$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} (7 - x^2)^2 - 3^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} 49 - 14x^2 + x^4 - 9 \, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} (40 - 14x^2 + x^4) \, dx = \frac{1472\pi}{5}$$



(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ والمستقيم $y = 1$ و محور y

حول المستقيم $y = 2$ **بطريقة الحلقات**

حلقات .

محور الدوران ∥ السينات

∴ التكامل dx

$r_o = 2 - \frac{1}{4}x^2$

$r_i = 2 - 1 = 1$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{0}^{2} (2 - \tfrac{1}{4}x^2)^2 - 1^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{0}^{2} (4 - x^2 + \tfrac{1}{16}x^4) - 1 \, dx$$

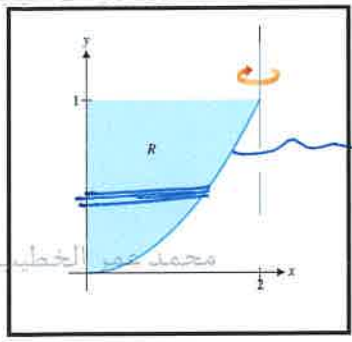
$$= \pi \int_{0}^{2} 3 - x^2 + \tfrac{1}{16}x^4 \, dx$$

$$= \frac{56}{15}\pi$$

(1) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالمنحنى $y=\frac{1}{4}x^2$ والمستقيم $y=1$ ومحور y

حول المستقيم $x=2$ بطريقة **الحلقات**



$y=\frac{1}{4}x^2$

$4y=x^2$

$x^2=4y$

$x=\pm\sqrt{4y}$.

حلقات

∴ محور الدوران ⊥ الشريحة .

∴ الشريحة dy

$$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\ dy$$

$$=\pi\int_0^1 2^2-\left(2-\sqrt{4y}\right)^2\ dy .$$

$r_o=2-0=2$

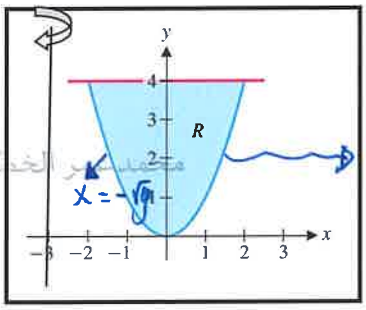
$r_i=2-\sqrt{4y}$

---

(2) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالمنحنى $y=x^2$ المستقيم $y=4$

حول المستقيم $x=-3$ بطريقة **الحلقات**



$x=\sqrt{y}$

حلقات

∴ محور الدوران ⊥ الشريحة

∴ الشريحة dy.

$$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\ dy$$

$$=\pi\int_0^4 \left(\sqrt{y}+2\right)^2-\left(-\sqrt{y}+2\right)^2 dy$$

$r_o=\sqrt{y}-(-2)$

$=\sqrt{y}+2$

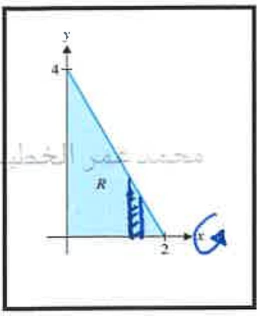
$r_i=-\sqrt{y}-(-2)$

$=-\sqrt{y}+2$

تمارين متنوعة

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمستقيم $y = 4 - 2x$ والمحورين

(1) حول محور x



اقراص.

الشرائح dx.

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

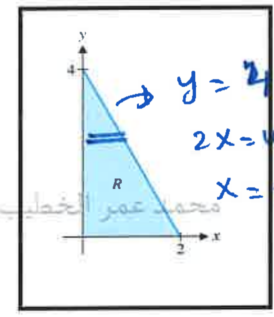
$= \pi \int_0^2 (4-2x)^2 \, dx$

$r_o = 4 - 2x - 0 = 4 - 2x$

$r_i = 0 - 0 = 0$

---

(2) حول محور y



$y = 4 - 2x$

$2x = 4 - y$

$x = 2 - \frac{1}{2}y$

اقراص.

الشرائح dy

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

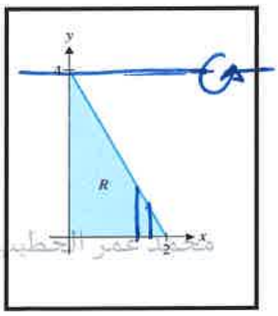
$= \pi \int_0^4 (2 - \frac{1}{2}y)^2 \, dy$

$r_o = 2 - \frac{1}{2}y - 0$

$r_i = 0 - 0.$

---

(3) حول المستقيم $y = 4$



حلقات.

الشرائح dx.

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^2 4^2 - (2x)^2 \, dx$

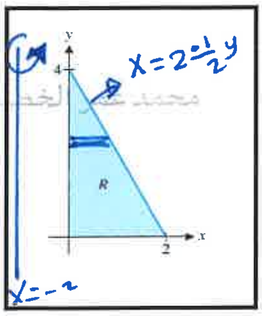
$= \pi \int_0^2 16 - 4x^2 \, dx$

$r_o = 4 - 0 = 4$

$r_i = 4 - (4 - 2x) = 2x$

---

(4) حول لمستقيم $x = -2$



حلقات

الشرائح dy

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

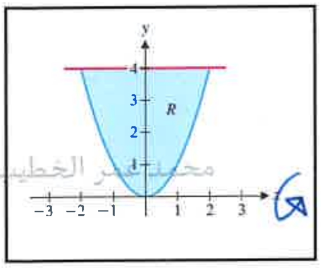
$= \pi \int_0^4 (4 - \frac{1}{2}y)^2 - 2^2 \, dy$

$r_o = 2 - \frac{1}{2}y - (-2) = 4 - \frac{1}{2}y$

$r_i = 0 - (-2) = 2$

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = 4$



(1) حول محور x

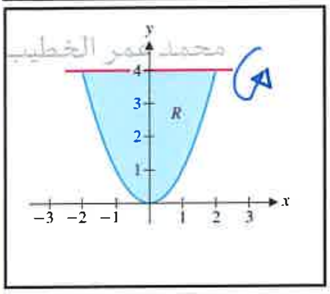
dx حلقات

$r_o = 4 - 0 = 4$

$r_i = x^2 - 0 = x^2$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_{-2}^{2} 4^2 - (x^2)^2 \, dx.$



(2) حول محور $y = 4$

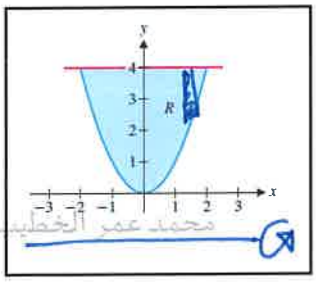
dx أقراص

$r_o = 4 - x^2$

$r_i = 4 - 4 = 0$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^2 \, dx$



(3) حول محور $y = -2$

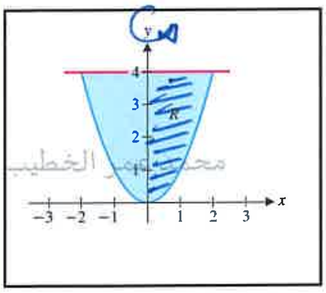
dx حلقات.

$r_o = 4 - (-2) = 6$

$r_i = x^2 - (-2) = x^2 + 2$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int 6^2 - (x^2+2)^2 \, dx$



(4) حول محور y

* بما أن محور الدوران نفس محور التماثل.
يكفي تدوير نصف الشكل.

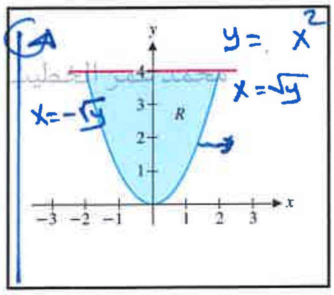
dy أقراص

$r_o = \sqrt{y} - 0$

$r_i = 0 - 0$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

$= \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 \, dy.$



(5) حول محور $x = -4$

dy حلقات

$r_o = \sqrt{y} - (-4) = \sqrt{y} + 4$

$r_i = -\sqrt{y} - (-4) = -\sqrt{y} + 4$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

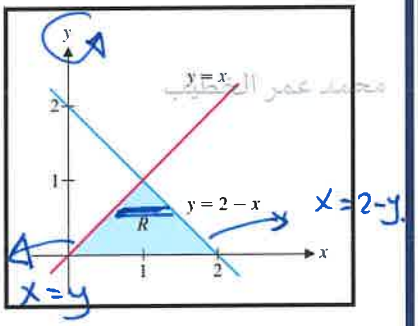
$= \pi \int_0^4 (\sqrt{y}+4)^2 - (-\sqrt{y}+4)^2 \, dy$

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

(1) المحصورة بالمستقيم $y=2-x$ والمستقيم $y=x$ و $y=0$ حول المحور y

$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dy$

$=\pi\int_0^1 (2-y)^2-y^2\,dy.$



$r_o=2-y-0$

$r_i=y-0$

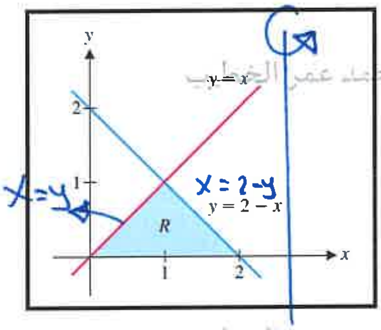
---

(2) المحصورة بالمستقيم $y=2-x$ والمستقيم $y=x$ و $y=0$ حول المحور $x=3$

طبقات dy

$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dy$

$=\pi\int_0^1 (3-y)^2-(1+y)^2\,dy$



$r_o=3-y$

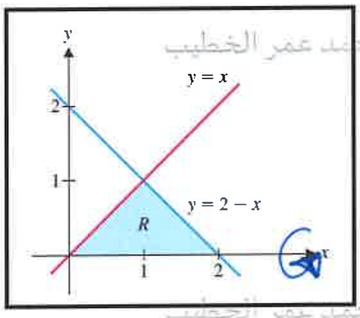
$r_i=3-(2-y)$

$=1+y$

---

(3) المحصورة بالمستقيم $y=2-x$ والمستقيم $y=x$ و $y=0$ حول المحور x

اقراص dx $\Leftarrow$ يوجد تجزئة مساحة.



$V_1=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dx$ $\qquad r_o=x$, $r_i=0$

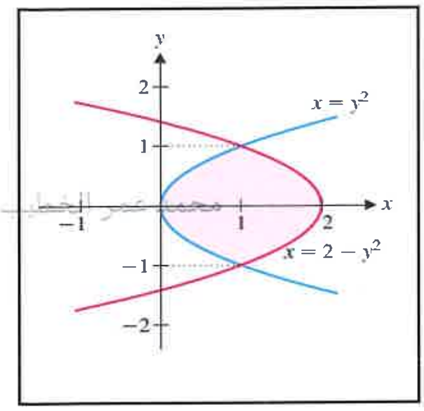
$=\pi\int_0^1 (x)^2\,dx$

$V_2=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dx$ $\qquad r_o=2-x$, $r_i=0$

$=\pi\int_1^2 (2-x)^2\,dx$

$V=V_1+V_2 = \pi\int_0^1 x^2\,dx+\pi\int_1^2 (2-x)^2\,dx.$

(1) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المظللة R



حول محور y ($x = 0$)

حلقات dy

$r_o = 2 - y^2$

$r_i = y^2$

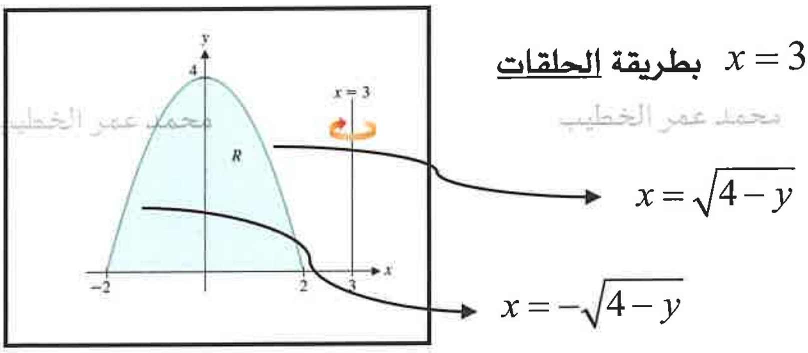
$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (2 - y^2)^2 - (y^2)^2 \, dy$$

---

(2) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$y = 4 - x^2$ ومحور x حول المستقيم $x = 3$ بطريقة الحلقات



حلقات dy

$r_o = 3 - (-\sqrt{4 - y})$

$= 3 + \sqrt{4 - y}$

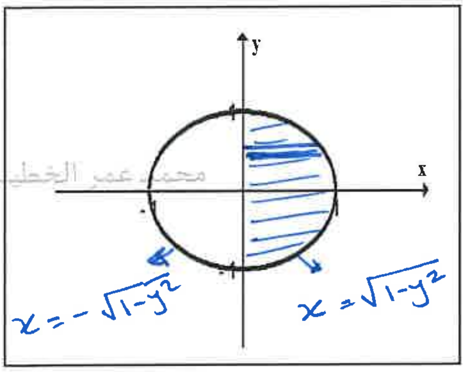
$r_i = 3 - \sqrt{4 - y}$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_{0}^{4} (3 + \sqrt{4 - y})^2 - (3 - \sqrt{4 - y})^2 \, dy$$

(1) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $x^2+y^2=1$

حول المستقيم y



يكفي تدوير نصف الشكل .

اقراص . dy

$r_o=\sqrt{1-y^2}$

$r_i=0$

$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dy$

$=\pi\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2 dy$

$=\frac{\pi^2}{2}$.

$x^2+y^2=1$

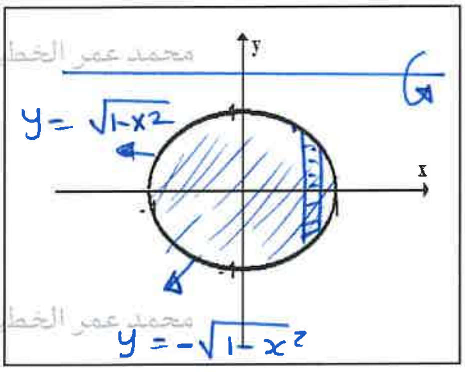
$x^2=1-y^2$

$x=\pm\sqrt{1-y^2}$.

---

(2) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $x^2+y^2=1$

حول المستقيم $y=2$



حلقات .

الرسم ⊥ محور الدوران

التكامل dx

$r_o=2-(-\sqrt{1-x^2})$

$=2+\sqrt{1-x^2}$

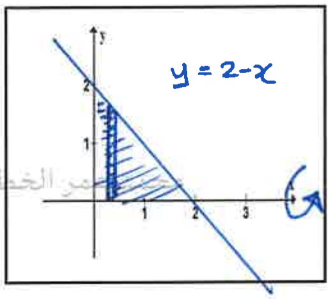
$r_i=2-\sqrt{1-x^2}$

$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dx$

$=\pi\int_{-1}^{1}\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$.

اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y=2-x$ و $y=0$ و $x=0$

(1) حول محور x



dx اقراص

$r_o = 2-x$

$r_i = 0$

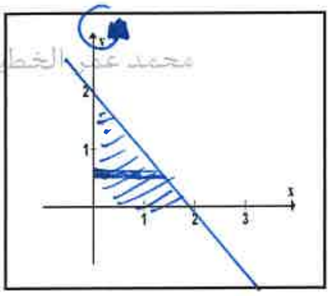
$$V = \pi\int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi\int_0^2 (2-x)^2 \, dx$$

$$= \frac{8}{3}\pi .$$

---

(2) حول محور y



dy اقراص

$r_o = 2-y$

$r_i = 0$

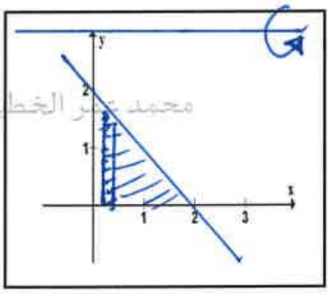
$$V = \pi\int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi\int_0^2 (2-y)^2 \, dy$$

$$= \frac{8}{3}\pi .$$

---

(3) حول المستقيم $y=3$



dx حلقات

$r_o = 3-0$
$= 3$

$r_i = 3-(2-x)$
$= 1+x$

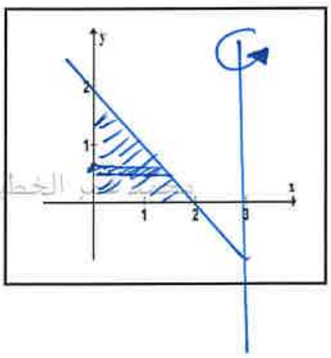
$$V = \pi\int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi\int_0^2 3^2 - (1+x)^2 \, dx$$

$$= \frac{28}{3}\pi$$

---

(4) حول المستقيم $x=3$



dy حلقات

$r_o = 3-0 = 3$

$r_i = 3-(2-y)$
$= 1+y$

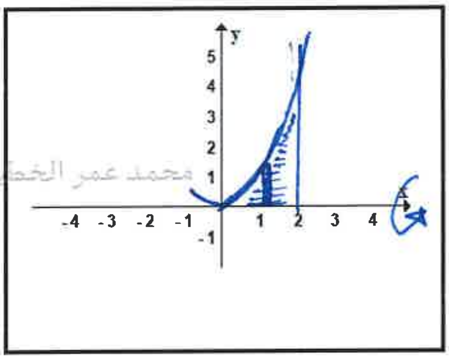
$$V = \pi\int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi\int_0^2 3^2 - (1+y)^2 \, dy$$

$$= \frac{28}{3}\pi .$$

أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = 0$ و $x = 2$

(1) حول محور x



اقراص dx

$r_o = x^2 - 0$

$r_i = 0 - 0$

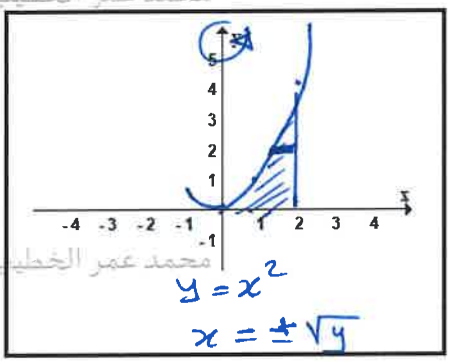
$V = \pi \int r^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^2 x^2 \, dx$

$= \frac{8}{3}\pi$.

---

(2) حول محور y



حلقات dy

$r_o = 2 - 0$

$= 2$

$r_i = \sqrt{y}$

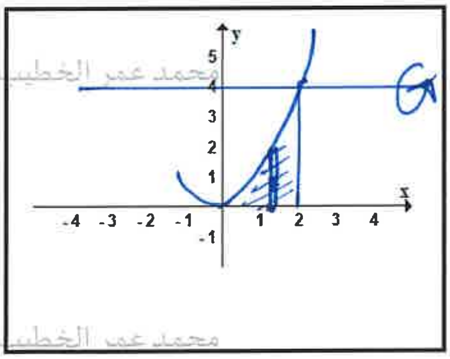
$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

$= \pi \int_0^4 2^2 - (\sqrt{y})^2 \, dy$

$= 8\pi$

---

(3) حول المستقيم $y = 4$



حلقات dx

$r_o = 4 - 0$

$= 4$

$r_i = 4 - x^2$

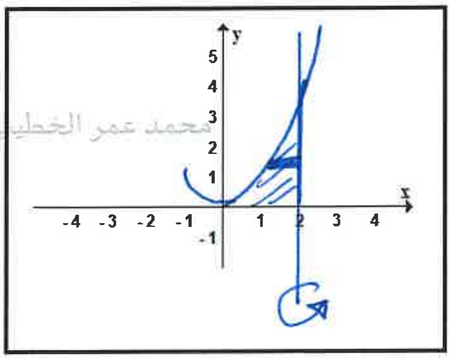
$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^2 4^2 - (4 - x^2)^2 \, dx$

$= \frac{224}{15}\pi$.

---

(4) حول المستقيم $x = 2$



اقراص dy

$r_o = 2 - \sqrt{y}$

$r_i = 2 - 2 = 0$

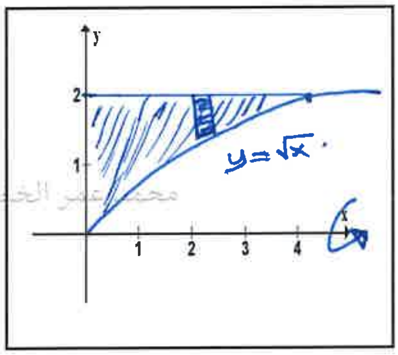
$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

$= \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{y})^2 \, dy$

$= \frac{8}{3}\pi$.

اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y=\sqrt{x}$ و $y=2$ و $x=0$

(1) حول محور x



حلقات dx

$r_o = 2 - 0$

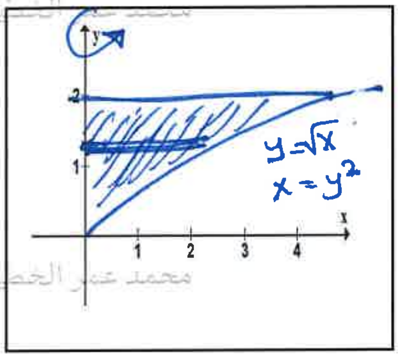
$r_i = \sqrt{x} - 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^4 2^2 - (\sqrt{x})^2 \, dx$$

$$= 8\pi$$

(2) حول محور y



اقراص dy

$r_o = y^2$

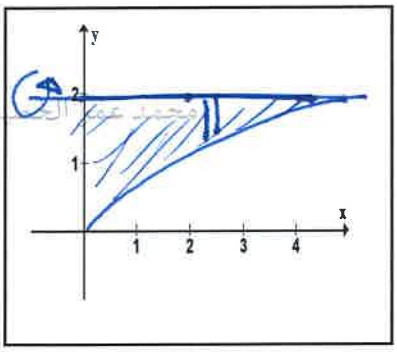
$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^2 (y^2)^2 \, dy$$

$$= \frac{32}{5}\pi$$

(3) حول المستقيم $y=2$



اقراص dx

$r_o = 2 - \sqrt{x}$

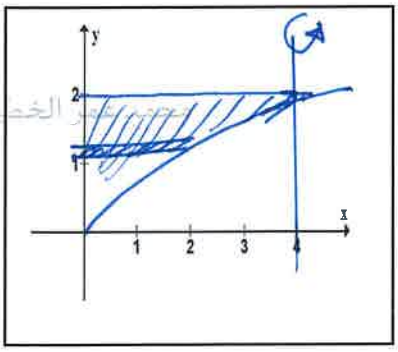
$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^4 (2-\sqrt{x})^2 \, dx$$

$$= \frac{8}{3}\pi$$

(4) حول المستقيم $x=4$



حلقات dy

$r_o = 4 - 0$

$r_i = 4 - y^2$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

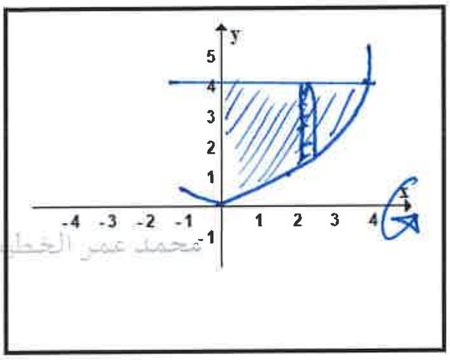
$$= \pi \int_0^2 4^2 - (4-y^2)^2 \, dy$$

$$= \frac{224}{15}\pi$$

أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمستقيم $y=4$ والمستقيم $x=0$

و المنحنى $y=\frac{1}{4}x^2$

(1) حول محور x



حلقات dx.

$$v=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dx$$

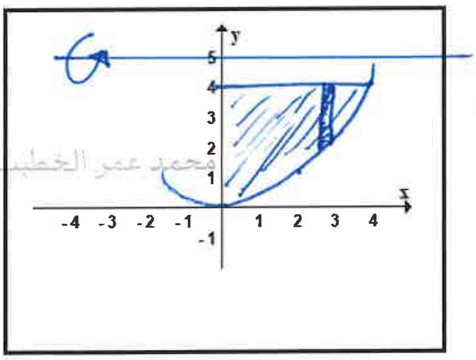
$r_o=4-0$

$r_i=\frac{1}{4}x^2$

$$=\pi\int_0^4 4^2-\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx$$

$$=\frac{256}{5}\pi.$$

(2) حول المستقيم $y=5$



حلقات dx

$$v=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dx$$

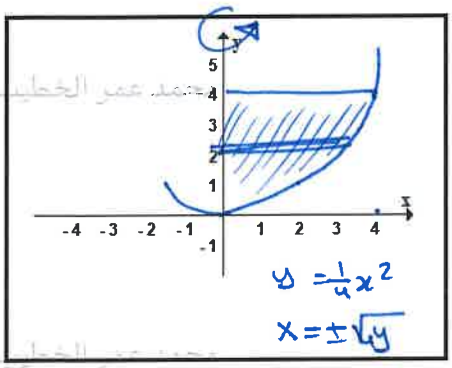
$r_o=5-\frac{1}{4}x^2$

$r_i=5-4=1$

$$=\pi\int_0^4\left(5-\frac{1}{4}x^2\right)^2-1^2\,dx$$

$$=\frac{832}{15}\pi.$$

(3) حول محور y



$y=\frac{1}{4}x^2$

$x=\pm\sqrt{4y}$

أقراص dy

$$v=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dy$$

$r_o=\sqrt{4y}-0$

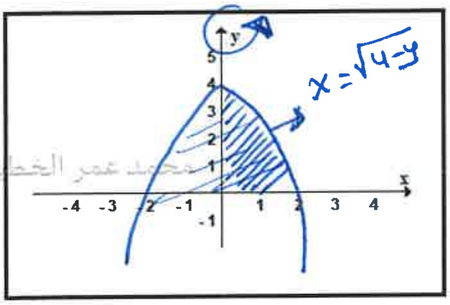
$r_i=0$

$$=\pi\int_0^4\left(\sqrt{4y}\right)^2\,dy$$

$$=32\pi.$$

أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=4-x^2$

(1) حول محور y



يكفي تدوير نصف الشكل (القبة).

مقاطع dy

$r_o=\sqrt{4-y}$

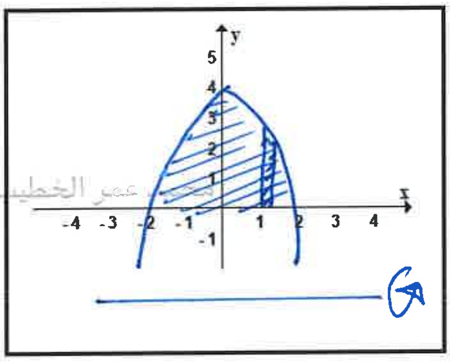
$r_i=0$

$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dy$

$=\pi\int_0^4(\sqrt{4-y})^2\,dy$

$=8\pi$.

(2) حول المستقيم $y=-3$



حلقات dx

$r_o=4-x^2-(-3)$

$=7-x^2$

$r_i=0-(-3)$

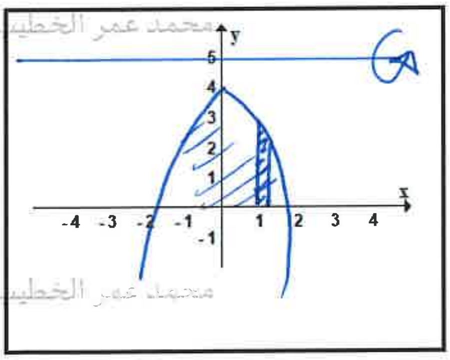
$=3$

$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dx$

$=\pi\int(7-x^2)^2-3^2\,dx$

$=\dfrac{1472}{15}\pi$.

(3) حول المستقيم $y=5$



حلقات dx.

$r_o=5-0=5$

$r_i=5-(4-x^2)$

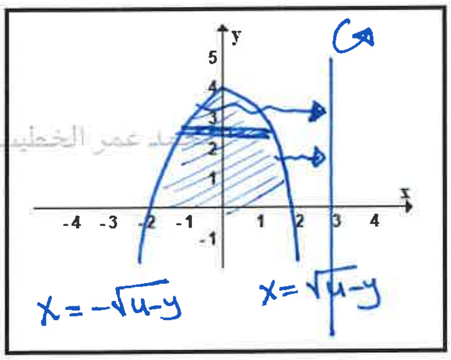
$=1+x^2$

$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dx$

$=\pi\int_{-2}^{2}5^2-(1+x^2)^2\,dx$

$=\dfrac{1088}{15}\pi$.

(4) حول المستقيم $x=3$



حلقات dy

$r_o=3+\sqrt{4-y}$

$r_i=3-\sqrt{4-y}$

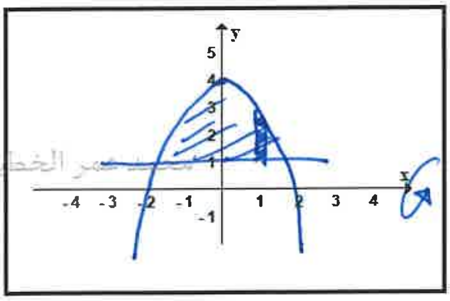
$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dy$

$=\pi\int_{-2}^{2}(3+\sqrt{4-y})^2-(3-\sqrt{4-y})^2\,dy$

$=64\pi$

أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=4-x^2$ والمستقيم $y=1$

(1) حول محور x



حلقات dx

$r = 4 - x^2 - 0$

$r_i = 1 - 0$

حدود التكامل

$4 - x^2 = 1$

$x^2 - 3 = 0$

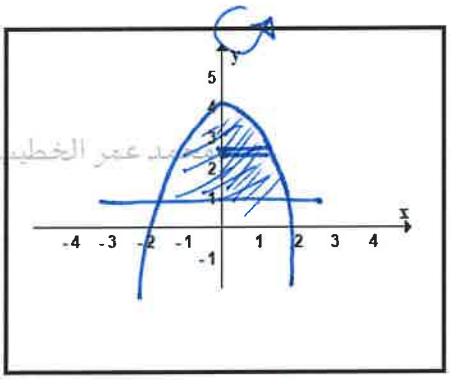
$x = \pm\sqrt{3}$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (4-x^2)^2 - 1^2 \, dx$$

$$= \frac{88\sqrt{3}}{5} \pi$$

(2) حول محور y



يكفي تدوير نصف الشكل (القبة)

اقراص dy

$r_o = \sqrt{4-y}$

$r_i = 0$

$y = 4 - x^2$

$x^2 = \sqrt{4-y}$

$x = \pm\sqrt{4-y}$

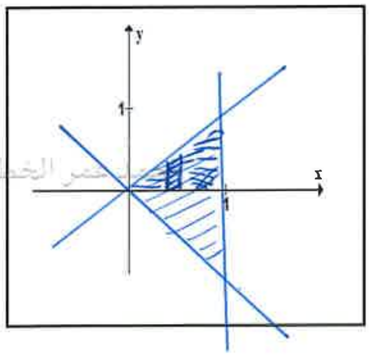
$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_1^4 (\sqrt{4-y})^2 \, dy$$

$$= \frac{3}{2} \pi$$

أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بالمنحنى $y=x$ و $y=-x$ و $x=1$

(1) حول محور x يكفي تدوير نصف الشكل.



أقراص dx

$r_o = x$

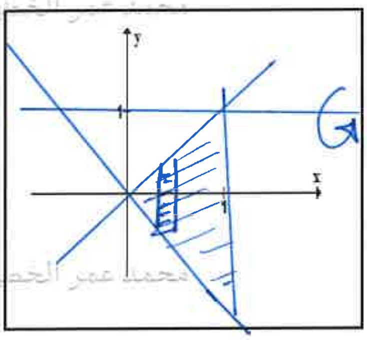
$r_i = 0$

$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x)^2 \, dx = 1/3 .$$

---

(2) حول محور $y=1$



حلقات dx

$r_o = 1-(-x)$
$= 1+x$

$r_i = 1-x$

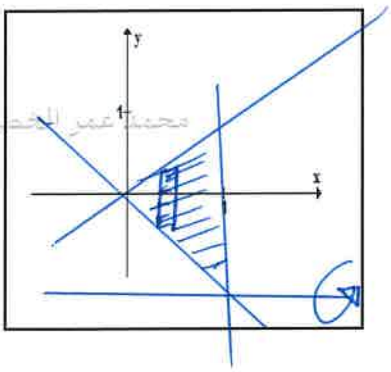
$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (1+x)^2 - (1-x)^2 \, dx$$

$$= 2\pi .$$

---

(3) حول محور $y=-1$



حلقات dx

$r_o = x-(-1)$
$= x+1$

$r_i = -x-(-1)$
$= -x+1$

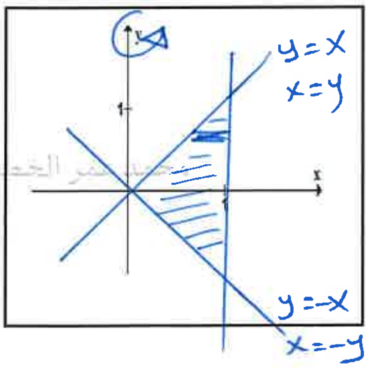
$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x+1)^2 - (-x+1)^2 \, dx$$

$$= 2\pi .$$

---

(4) حول محور y حلقات dy تجزئة مساحة.



$r_o = 1$
$r_i = y$

$r_o = 1$
$r_i = -y$

$$v_1 = \pi \int_0^1 1^2 - y^2 \, dy = \frac{2}{3}\pi .$$

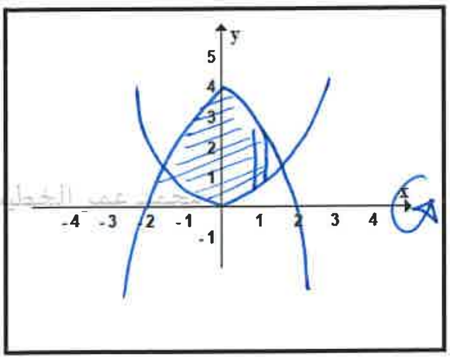
$$v_2 = \pi \int_{-1}^0 1^2 - (-y)^2 \, dy = \frac{2}{3}\pi$$

$$v = v_1 + v_2 = \frac{4}{3}\pi$$

* ممكن استخدام التماثل مع الحجم الدورانية لكن الأفضل لا (في هذه الحالة ممكنة)

(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y=4-x^2$ و $y=x^2$

حول محور x



حلقات dx

$r_o = 4-x^2$

$r_i = x^2$

$$V = \pi\int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

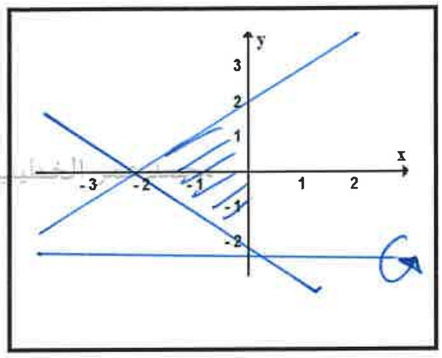
$$= \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4-x^2)^2 - (x^2)^2 \, dx$$

$$= \frac{64}{3}\sqrt{2}\,\pi$$

---

(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة المستقيم $y=x+2$

والمستقيم $y=-x-2$ و $x=0$ حول المستقيم $y=-2$



حلقات dx

$$V = \pi\int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi\int_{-2}^{0} (x+4)^2 - (-x)^2 \, dx$$

$$= 16\pi$$

$r_o = x+2-(-2)$

$= x+4$

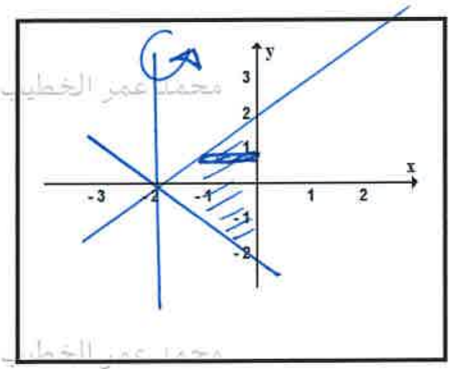
$r_i = -x-2-(-2)$

$= -x$

---

(3) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة المستقيم $y=x+2$ والمستقيم

$y=-x-2$ و $x=0$ حول المستقيم $x=-2$



حلقات dy * يوجد تجزئة مساحة

$$V_1 = \pi\int_{0}^{2} 2^2 - y^2 \, dy = \frac{16}{3}\pi$$

$r_o = 0-(-2)$

$= 2$

$r_i = y-2-(-2)$

$= y$

$$V_2 = \pi\int_{-2}^{0} 2^2 - (-y)^2 \, dy = \frac{16}{3}\pi$$

$r_o = 0-(-2) = 2$

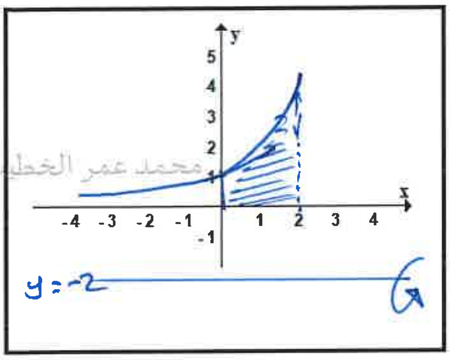
$r_i = -y-2-(-2)$

$= -y$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{32}{3}\pi$$

(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y = e^x$ و $y = 0$ ، $x = 0$ ، $x = 2$

حول محور $y = -2$



حلقات dx

$r_o = e^x - (-2)$
$= e^x + 2$

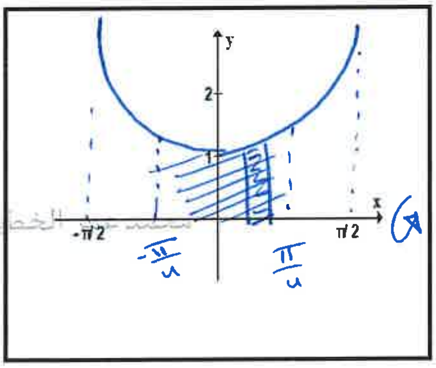
$r_i = 0 - (-2)$
$= 2$

$$v = \pi \int_0^2 (e^x + 2)^2 - (2)^2 \, dx$$

$= 52.4\pi$

(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y = \sec x$ و $y = 0$ ،

$x = \frac{-\pi}{4}$ ، $x = \frac{\pi}{4}$ حول محور x



حلقات dx

$r_o = \sec x$

$r_i = 0$

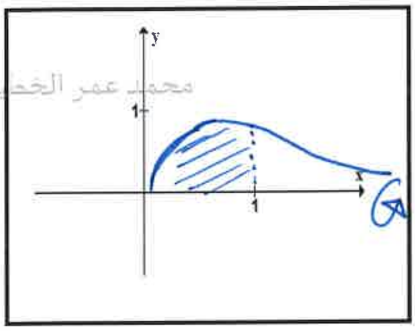
$$v = \pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x \, dx$$

$= 2\pi$

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+2}}$ و $y=0$ ، $x=1$

حول محور x

اقراص dx.



$r_o = \sqrt{\dfrac{x}{x^2+2}}$

$r_i = 0$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{\dfrac{x}{x^2+2}}\right)^2 dx$

$= \pi \int_0^1 \dfrac{x}{x^2+2} \, dx$

$= \dfrac{\pi}{2} \int_0^1 \dfrac{2x}{x^2+2} \, dx$

$= \dfrac{\pi}{2} \ln|x^2+2| \Big]_0^1 = \dfrac{\pi}{2} \ln \dfrac{3}{2}$.

الرسم صعب.

* يكفي ان تعلم ان الدالة موجبة فقط والحل بدون رسم.

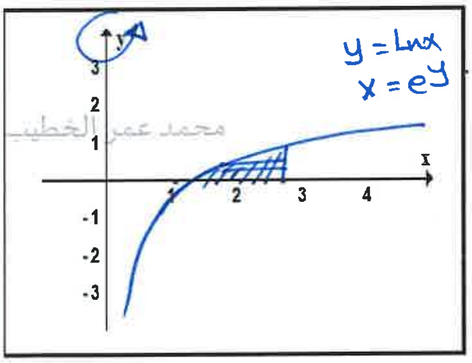
---

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة R

بالمنحنى $y=\ln x$ والمستقيم $y=0$ على الفترة $[1,e]$

حول y

حلقات dy



$r_o = e - 0 = e$

$r_i = e^y$.

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

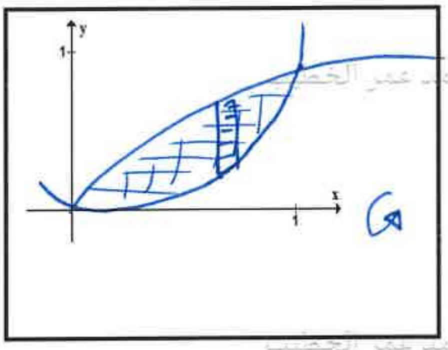
$= \pi \int_0^1 (e)^2 - (e^y)^2 \, dy$

$= \pi \int_0^1 e^2 - e^{2y} \, dy$

$= \pi \left(e^2 y - \dfrac{e^{2y}}{2} \right) \Big]_0^1 = \dfrac{\pi}{2} (e^2+1)$

يمثل كل من التكاملات التالية حجم مجسم بطريقة الاقراص والحلقات، ارسم المنطقة R التي تمثل الحجم وحدد محور الدوران الذي ينتج عنه المجسم

(1) $\int_0^1 \pi\left[(\sqrt{x})^2-(x^2)^2\right]dx$



الشريحة dx ، الطريقة حلقات .

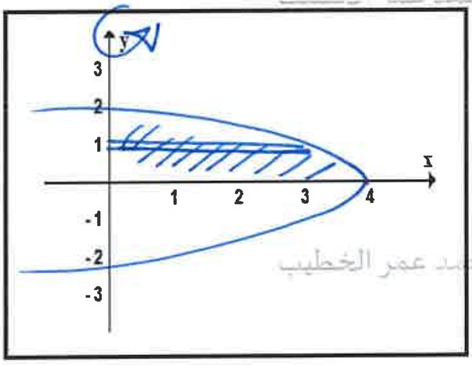
∴ محور الدوران x .

$r_o = \sqrt{x} \rightarrow f(x) = \sqrt{x}$

$r_i = x^2 \rightarrow g(x) = x^2$

---

(2) $\int_0^2 \pi(4-y^2)^2\, dy$



الشريحة dy ، الطريقة - اقراص / حلقات .

∴ محور الدوران y

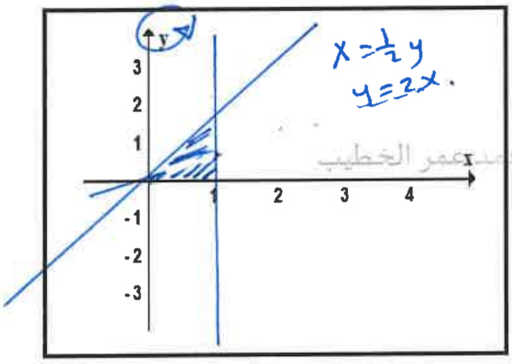
$r_o = 4-y^2 \Rightarrow f(y) = 4-y^2$

$r_i = 0 \Rightarrow g(y) = 0$

لاحظ حدود التكامل من 0 إلى 2

---

(3) $\pi\int_0^2 (1)^2-(\frac{1}{2}y)^2\, dy$



الشريحة dy ، الطريقة حلقات

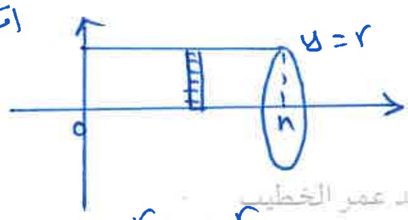
∴ محور الدوران y

$r_o = 1 \Rightarrow x = 1$

$r_i = \frac{1}{2}y \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$

(1) اثبت أن حجم الاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها h هو $v = \pi r^2 h$

أقراص dx



$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^h r^2 \, dx$$

$$= \pi r^2 \cdot h \quad \#$$

$r_o = r$

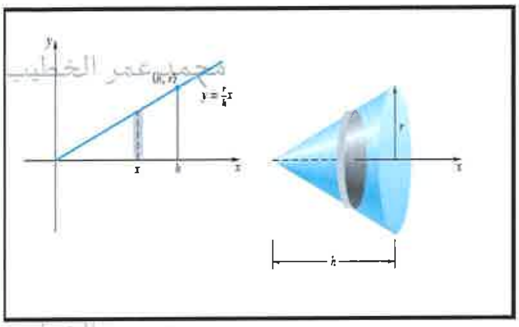
$r_i = 0$

---

(2) يتشكل المخروط القائم الذي نصف قطر قاعدة r

وارتفاعه h من تدوير المستقيم الذي معادلته $y = \dfrac{r}{h} x$

حول المحور x أثبت أن حجم المخروط هو $v = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$



أقراص dx

$r_o = \dfrac{r}{h} x$

$r_i = 0$

$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x\right)^2 dx$$

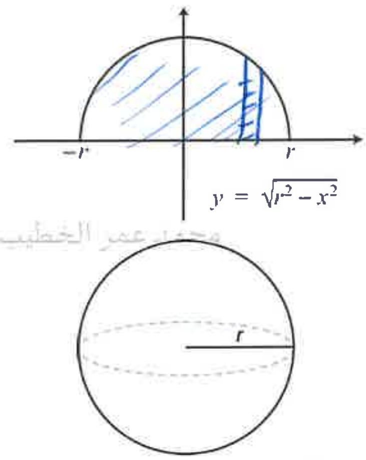
$$= \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 \, dx$$

$$= \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big]_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \#$$

---

(3) تتشكل الكرة التي نصف قطرها r من تدوير الجزء العلوي من معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$

حول المحور x، أثبت أن حجم الكرة هو $v = \dfrac{4}{3}\pi r^3$



أقراص dx

$r_o = \sqrt{r^2 - x^2}$

$r_i = 0$

$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx$$

$$= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big]_{-r}^{r}$$

$$= \pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right] = \frac{4}{3} \pi r^3$$

الحجوم الدورانية (الأصداف)

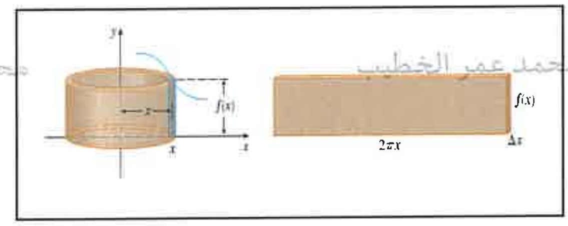
الشريحة توازي محور الدوران

الحالة الأولى: الدوران على محور الصادات (y)

إنّ حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $f(x) \geq 0$ ومحور x والمستقمين $x = a, x = b$ حول محور y بطريقة الأصداف هو

$$v = 2\pi \int_a^b r\ h\ dx = \int_a^b 2\pi\ x\ f(x)\ dx$$

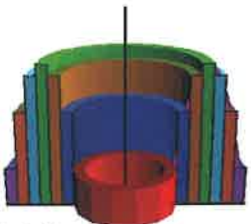
السماكة	الارتفاع	نصف القطر
المكامل	هو البعد بين الدالتين	وهو بعد الشريحة عن محور الدوران



ملاحظة مهمة قبل البدأ بالحل:

إذا كانت الطريقة محددة وهي أصداف، ومحور الدوران محدد،

فإن الشريحة (الارتفاع) يجب أن يتم اختيارها بحيث توازي محور الدوران



(1) إذا كان الدوران حول محور الصادات فإن السماكة تكون من (x) و سيكون المكامل (dx)

(2) إذا كان الدوران حول محور السينات فإن السماكة تكون من (y) و سيكون المكامل (dy)

(3) يكون نصف القطر هو البعد بين الشريحة ومحور الدوران

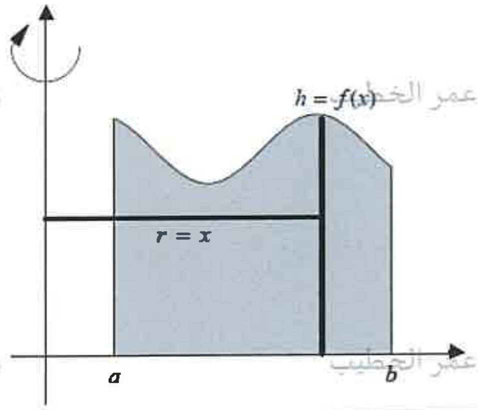
(4) يكون الارتفاع هو البعد بين الدالتين

حالات نصف القطر والارتفاع مع محاور الدوران والمكامل dx

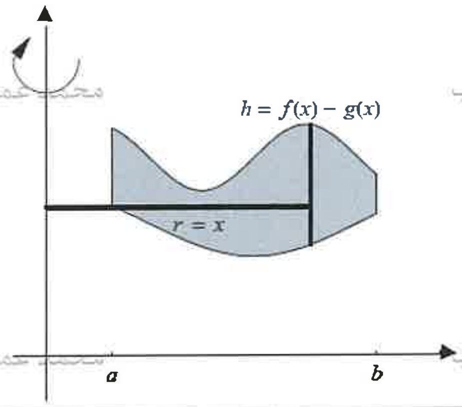
$$v = 2\pi \int_a^b r\, h \quad dx$$

ملاحظة: نصف القطر ..دائما $r = x - c$ أو $r = c - x$ وممكن أن تكون $c = 0$

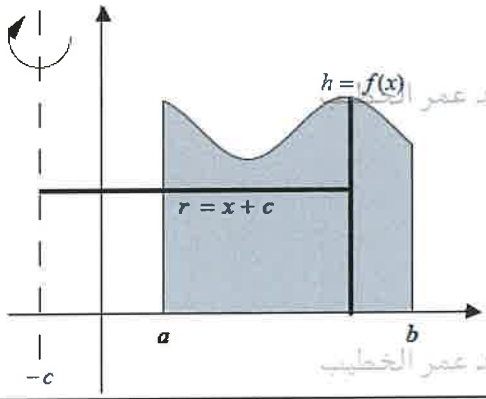
(1)



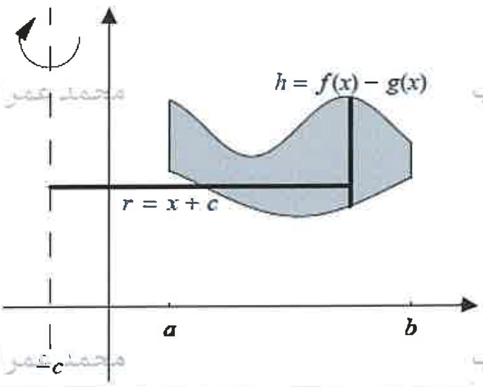
(2)



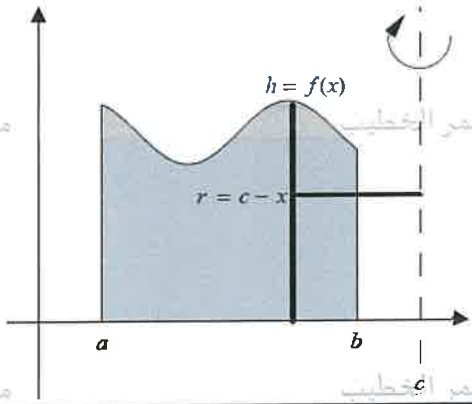
(3)



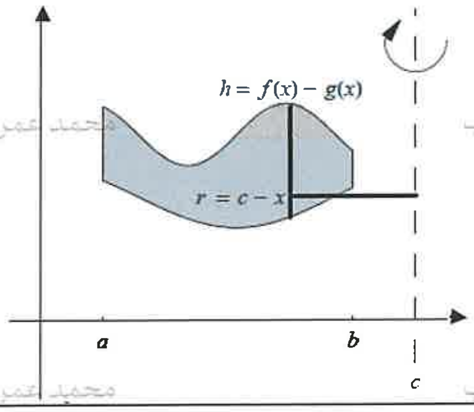
(4)



(5)



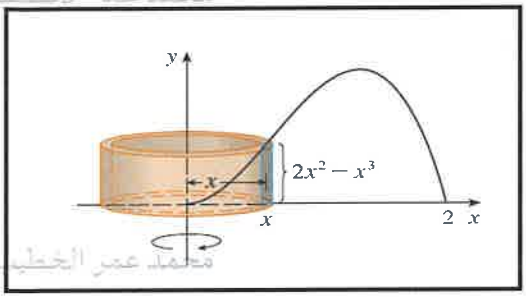
(6)



(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالمنحنى $y = 2x^2 - x^3$ والمستقيم $y = 0$

حول محور y بطريقة **الأصداف**



ملاحظة مهمة قبل البدأ بالحل: لاحظ أن الطريقة محددة وهي الأصداف، ومحور الدوران محدد وهو (y)

فان الشريحة (الارتفاع) يجب أن يتم اختيارها بحيث توازي محور الدوران فتكون (dx) وهو المكامل

أصداف .

∴ الشريحة // محور الدوران

∴ المكامل dx

$r = x - 0$

$h = 2x^2 - x^3 - 0$

$V = 2\pi \int r\, h\, dx$

$= 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3)\, dx$

$= \frac{16}{5}\pi$.

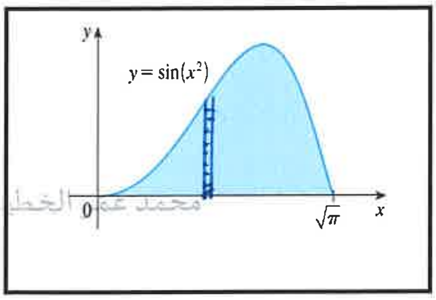
حاول إيجاد الحجم بطريقة الحلقات ... ماذا تلاحظ؟ لا يمكن

---

(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالمنحنى $y = \sin x^2$ والمستقيم $y = 0$

حول محور y بطريقة **الأصداف**



أصداف .

محور الدوران // الشريحة

∴ المكامل dx

$r = x - 0$

$h = \sin x^2 - 0$

$V = 2\pi \int r\, h\, dx$

$= 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2\, dx$

تكامل بالتعويض .

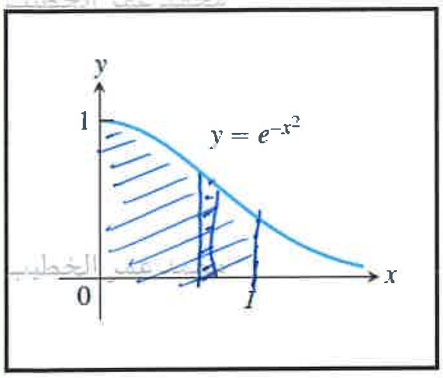
$= 2\pi$.

حاول إيجاد الحجم بطريقة الحلقات ... ماذا تلاحظ؟ لا يمكن

(1) ظلل المنطقة المحصورة بالمنحنى $y=e^{-x^2}$ ومحور x على الفترة

$[0,1]$ ثم أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

حول محور y بطريقة الأصداف



الأصداف

∴ محور الدوران // الشريحة

∴ التكامل dx

$r = x - 0$

$h = e^{-x^2} - 0$

$$v = 2\pi \int r h \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x e^{-x^2} dx$$

$$= \frac{2\pi}{-2} \int_0^1 -2x e^{-x^2} dx$$

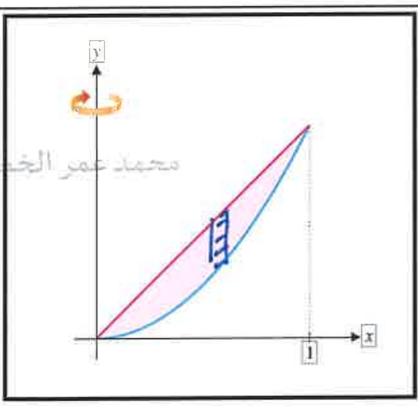
$$= -\pi e^{-x^2} \Big]_0^1 = \pi\left(1 - \tfrac{1}{e}\right)$$

---

(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمنحنى $y=x^2$ والمستقيم $y=x$

حول محور y بطريقة الأصداف



الأصداف.

∴ محور الدوران // الشريحة

∴ التكامل dx

$r = x$

$h = x - x^2$

$$v = 2\pi \int r h \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x(x - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^2 - x^3 \, dx$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

الحالة الثانية : الدوران حول محور السينات (x)

إنّ حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنيين g, f حيث $f(y) \geq g(y)$

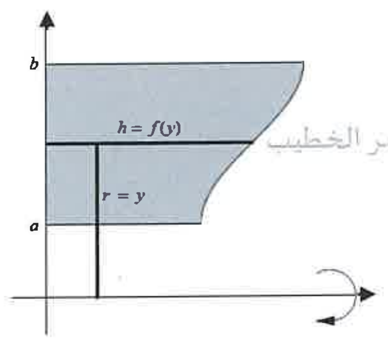
والمستقمين $y = a, y = b$ حول محور x بطريقة الأصداف هو

$$v = \int_a^b 2\pi \; y \left[f(y) - g(y) \right] dy \;=\; 2\pi \int_a^b r\, h \quad dy$$

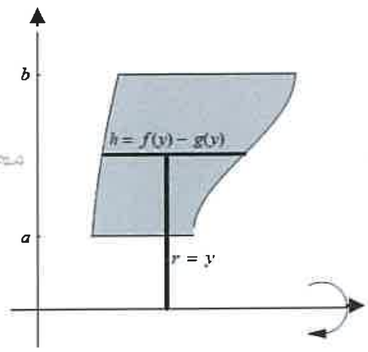
حالات نصف القطر والارتفاع مع محاور الدوران والمكامل dy

ملاحظة: نصف القطر ..دائماً $r = y - c$ او $r = c - y$ وممكن أن تكون $c = 0$

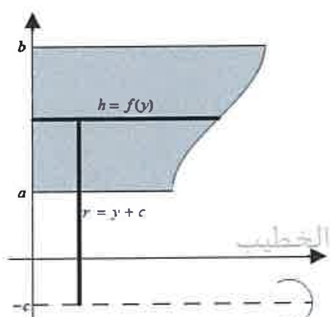
(1)



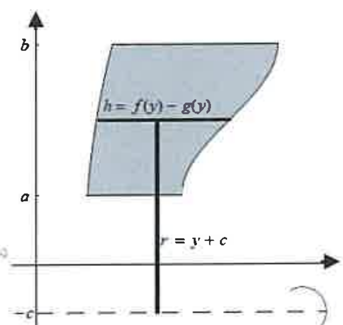
(2)



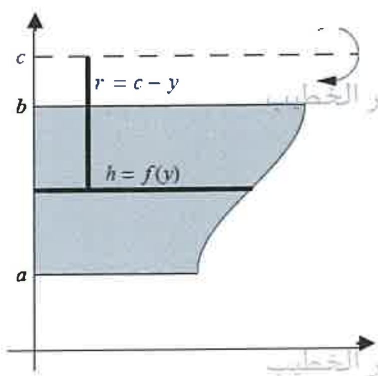
(3)



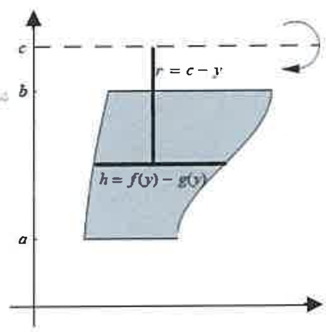
(4)



(5)



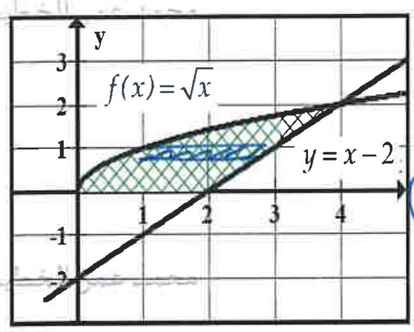
(6)



أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالدالة $y=\sqrt{x}$ والمستقيم $y=x-2$ والمستقيم $y=0$

حول محور x بطريقة **الأصداف**



أصداف .

∴ محور الدوران // الشريحة

∴ التكامل dy .

$r = y - 0 = y$

$h = y + 2 - y^2$

$= 2 + y - y^2$

$V = 2\pi \int rh \, dy$

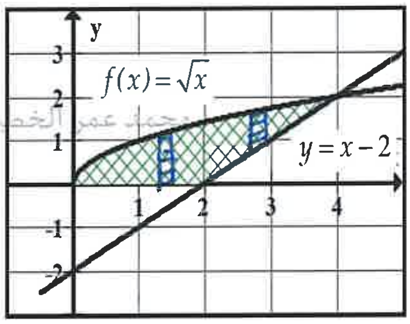
$= 2\pi \int_0^2 y(2+y-y^2)\, dy$

$= 2\pi \int 2y + y^2 - y^3 \, dy$

$= \frac{16\pi}{3}$.

هل يمكن حل السؤال بطريقة الحلقات؟ وأيهما أسهل؟

(الأصداف أسهل لوجود تجزئة مساحة في حالة الحلقات)



بطريقة الحلقات .

∴ محور الدوران ⊥ الشريحة

∴ التكامل dx .

يوجد تجزئة مساحة

$V_1 = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$r_o = \sqrt{x}$

$r_i = 0$

$= \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 \, dx = 2\pi$

$r_o = \sqrt{x}$

$r_i = x - 2$

$V_2 = \pi \int (\sqrt{x})^2 - (x-2)^2 \, dx = \frac{10\pi}{3}$

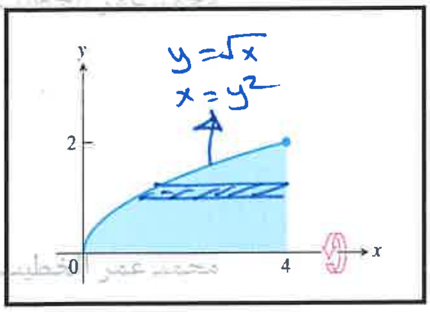
$V = V_1 + V_2 = \frac{16\pi}{3}$

لاحظ ان الأصداف أسهل .

(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمنحنى $y=\sqrt{x}$ والمستقيم $x=4$ ومحور x

حول محور x بطريقة الأصداف



اصداف

∵ محور الدوران // الشريحة

∵ التكامل d

$$v = 2\pi \int r h \, dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 y(4-y^2)\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 4y - y^3 \, dy$$

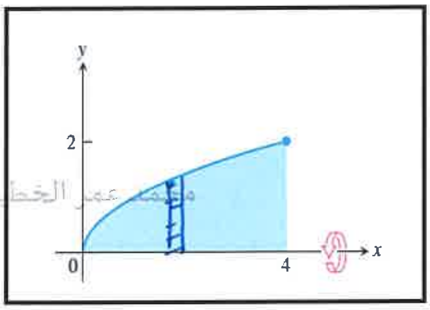
$$= 8\pi$$

$r = y - 0 = y$

$h = 4 - y^2$

---

(2) حل السؤال السابق بطريقة الأقراص، وحدد أيهما أسهل؟



اقراص.

∵ محور الدوران ⊥ الشريحة

∵ التكامل dx

$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 \, dx$$

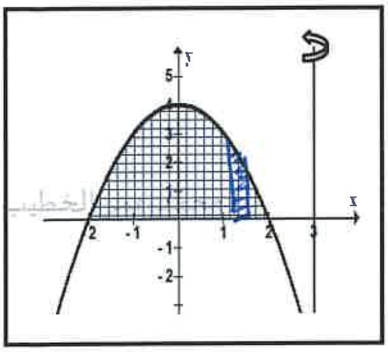
$$= 8\pi$$

$r_o = \sqrt{x}$

$r_i = 0$

الأقراص اسهل.

الحالة الثالثة : الدوران حول محور يوازي محور السينات x أو يوازي محور الصادات y



(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$y = 4 - x^2$ ومحور x

حول المستقيم $x = 3$ بطريقة الأصداف

اصداف

∴ محور الدوران // الشرحة

∴ التكامل dx

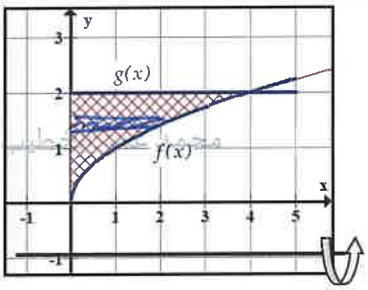
$r = 3 - x$

$h = 4 - x^2 - 0$

$v = 2\pi \int r h \, dx$

$= 2\pi \int_{-2}^{2} (3-x)(4-x^2) \, dx$

$= 64\pi$



(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالدالة $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = 2$ ومحور y

حول المستقيم $y = -1$ بطريقة الأصداف

اصداف .

∴ محور الدوران // الشرحة

∴ التكامل dy

$r = y - (-1)$
$= y + 1$

$h = y^2 - 0$
$= y^2$

$v = 2\pi \int r h \, dy$

$= 2\pi \int_{0}^{2} (y+1) y^2 \, dy$

$= 2\pi \int_{0}^{2} y^3 + y^2 \, dy$

$= \frac{40}{3}\pi$

الطريقة الأفضل (الأقراص / الحلقات أم الأصداف)

خطوات إيجاد الحجوم الدورانية بالطريقة الأفضل والأسهل:

ارسم الدوال ← ظلل المنطقة ← حدد محور الدوران ← ارسم ا لشريحة وحدد المكامل dx أو dy (الاولوية للمكامل المكتوبه فيه الدالة ولا يعمل تجزئه مساحة) ← حدد الطريقة (أقراص / حلقات أم أصداف) حسب التوازي والتعامد ← أوجد حدود التكامل (نقاط التقاطع) ← كامل ← عوض الحدود لإيجاد الحجم

حالات استخدام المكامل dy

(1) إجباري إذا كانت الخيارات كلها في dy

(2) يفضل إذا كانت المساحة مع dx تحتاج إلى تجزئة

(3) يفضل إذا كان الارتفاع بين نفس العلاقة

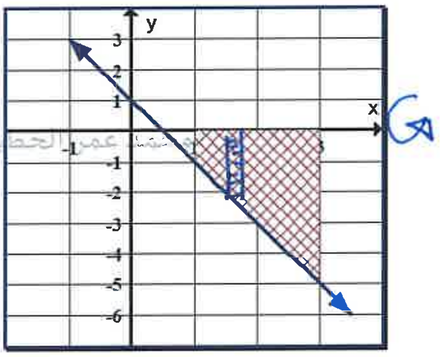
(4) إذا كانت الدالة او المعادلة مكتوبة بدلالة y

(5) إذا كان التكامل مع dx صعب

اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالمستقيم $y=-2x+1$ ومحور x

على الفترة $[1,3]$ حول محور x



الشريحة dx (مناسبة)

الشريحة ⊥ محور الدوران

∴ الطريقة (أقراص)

$r_o = 0-(-2x+1)$

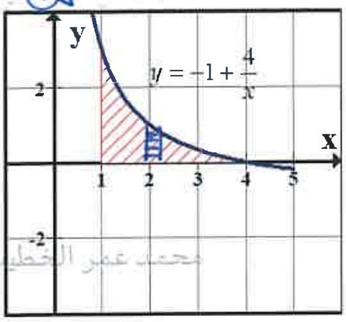
$= 2x-1$

$r_i = 0$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_1^3 (2x-1)^2 \, dx$

$= \frac{62\pi}{3}$



(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالدالة $y=-1+\frac{4}{x}$ ومحور x على الفترة $[1,4]$ حول محور y

الشريحة dx (مناسبة).

الشريحة // محور الدوران

∴ الطريقة (أصداف)

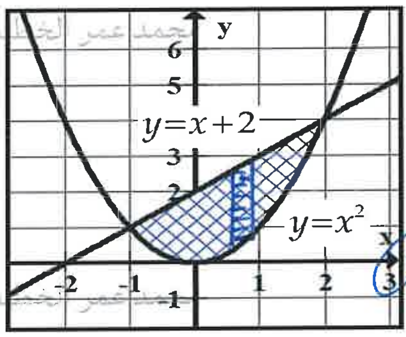
$$V = 2\pi \int r h \, dx$$

$$= 2\pi \int_1^4 x\left(-1+\frac{4}{x}\right) dx$$

$$= 2\pi \int_1^4 (-x+4)\, dx = 9\pi.$$

$r = x$

$h = -1+\frac{4}{x}.$



(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالدالة $y=x^2$ والمستقيم $y=x+2$ حول محور x

الشريحة dx (مناسبة).

الشريحة ⊥ محور الدوران

∴ الطريقة حلقات.

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (x+2)^2 - (x^2)^2 \, dx.$$

$r_o = x+2-0$

$r_i = x^2-0$

$$= \frac{72}{5}\pi.$$

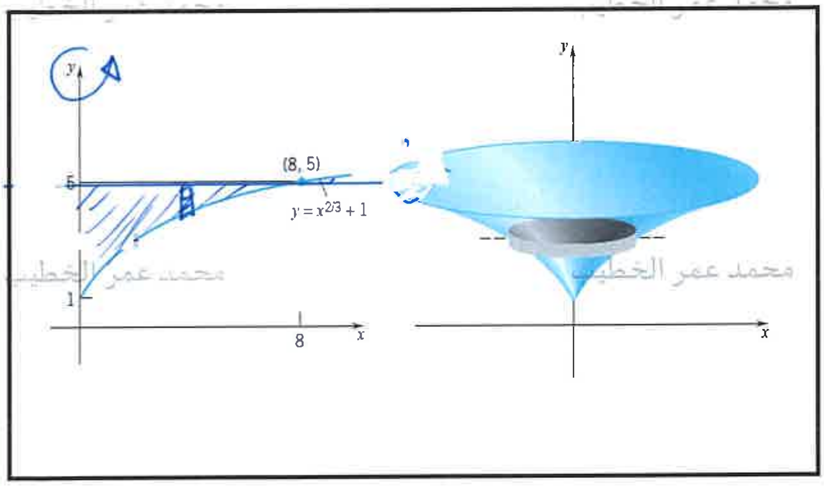
(1) اوجد حجم المجسم الناتج

عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمنحنى $y = x^{\frac{2}{3}} + 1$

والمستقيم $y = 5$ و المستقيم $x = 0$

حول محور y



الشريحة dx (مناسبة)

الشريحة // محور الدوران

∴ الطريقة (أصداف)

$r = x$

$h = 5 - (x^{2/3} + 1)$

$= 4 - x^{2/3}$.

$V = 2\pi \int rh \, dx$

$= 2\pi \int_0^8 x(4 - x^{2/3}) \, dx$

$= 2\pi \int_0^8 4x - x^{5/3} \, dx$

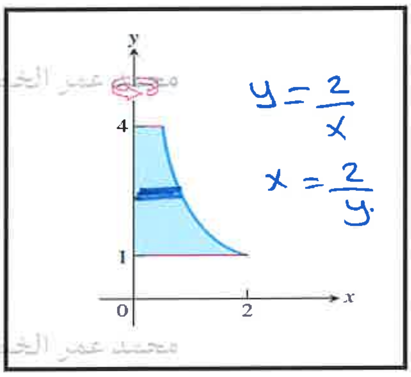
$= 64\pi$.

---

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمنحنى $y = \dfrac{2}{x}$ والمستقيم $y = 1$ و المستقيم $y = 4$

ومحور y حول محور y



الشريحة dx غير مناسبة (تجزئة)

الشريحة dy مناسبة.

الشريحة ⊥ محور الدوران.

∴ الطريقة (أقراص)

$r_o = \frac{2}{y}$

$r_i = 0$

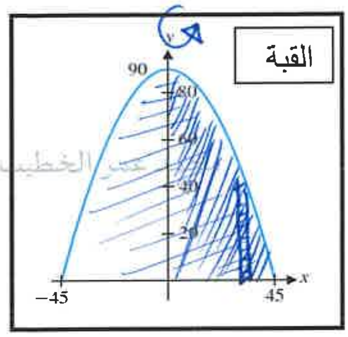
$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$

$= \pi \int_1^4 \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy$

$= 3\pi$.

اذا كان شكل القبة يتكون من تدويرالمساحة المحصورة بالمنحنى $y=-\frac{2}{45}x^2+90$ ومحور x

حول محور y أوجد حجم هذه القبة (حل بالأقراص والأصداف)



ملاحظة مهمة : إذا كان محور الدوران هو نفسه محور التماثل للشكل فإنه يكفي تدوير نصف المنحنى وليس المنحنى كامل

الشريحة dx (مناسبة)

الشرائح // محور الدوران

:: الطريقة الأصداف

$$V = 2\pi\int rh\,dx$$

$r = x$

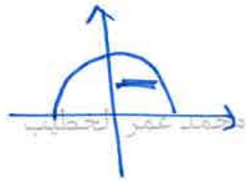
$h = \frac{-2}{45}x^2+90$

$$= 2\pi\int_0^{45} x\left(\frac{-2}{45}x^2+90\right)dx$$

$$= 2\pi\int_0^{45} -\frac{2}{45}x^3+90x\,dx$$

$$= 91125\pi$$

طريقة ثانية للسؤال: إذا كان شكل القبة يتكون من مقاطع عرضية دائرية متعامدة على محور y و قطرها محدود بالمنحنى $y=-\frac{2}{45}x^2+90$ حيث $-45\le x\le 45$ فاوجد حجم القبة



$$V = \int A(y)\,dy$$

$$= \int \pi r^2\,dy$$

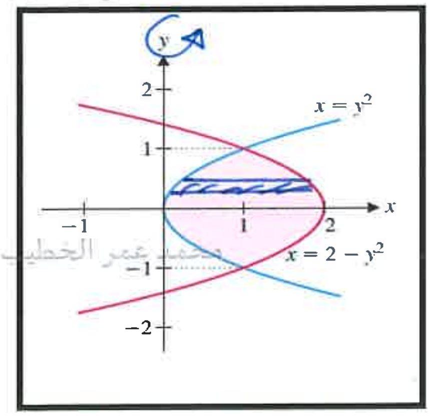
$$= \int_0^{90} \pi\left(\sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}\right)^2 dy = 91125\pi$$

$y = \frac{-2}{45}x^2+90$

$\frac{2}{45}x^2 = 90-y$

$x = \pm\sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}$

أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المظللة R



(1) حول محور y ($x=0$)

الشريحة المناسبة dy وليس dx.

الشريحة ⊥ محور الدوران.

∴ الطريقة حلقات.

$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$r_o = 2 - y^2$$

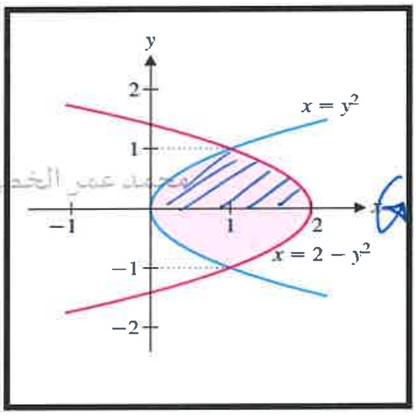
$$r_i = y^2 - 0$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (2-y^2)^2 - (y^2)^2 \, dy$$

$$= \frac{16\pi}{3}.$$

---

(2) حول محور x ($y=0$)



بما أن الشكل متماثل حول محور الدوران.

يكفي تدوير نصف الشكل (العلوي)

الشريحة dy مناسبة.

الشريحة dy // محور الدوران

∴ الطريقة أصداف

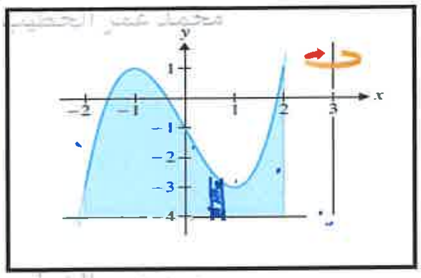
$$v = 2\pi \int r h \, dy$$

$$r = y$$

$$h = 2 - y^2 - y^2 = 2 - 2y^2$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1} y(2 - 2y^2) \, dy$$

$$= \pi$$



(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران

المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y = x^3 - 3x - 1$

والمستقيم $y = -4$ على الفترة $-2 \le x \le 2$ حول المستقيم $x = 3$

الشريحة dx (مناسبة)

∴ أسطوانة.

$V = 2\pi \int r\, h\, dx$

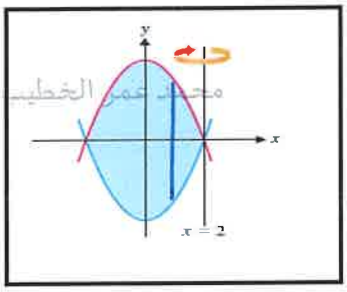
$r = 3 - x$

$h = x^3 - 3x - 1 - (-4)$

$= x^3 - 3x + 3$

$= 2\pi \int_{-2}^{2} (3-x)(x^3 - 3x + 3)\, dx$

$= \frac{392}{3}\pi$



(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران

المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y = 4 - x^2$

والمنحنى $y = x^2 - 4$ حول المستقيم $x = 2$

الشريحة dx (مناسبة)

أسطوانة

$V = 2\pi \int r\, h\, dx$

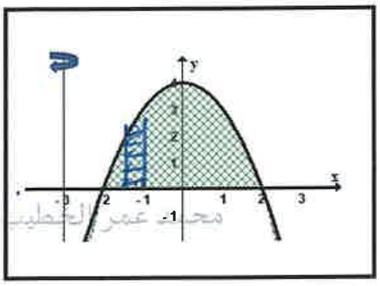
$r = 2 - x$

$h = 4 - x^2 - (x^2 - 4)$

$= 8 - 2x^2$

$= 2\pi \int_{-2}^{2} (2-x)(8-2x^2)\, dx$

$= \frac{256}{3}\pi$



(3) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمنحنى $y = 4 - x^2$ ومحور x حول المستقيم $x = -3$

الشريحة dx مناسبة

∴ أسطوانة

$V = 2\pi \int r\, h\, dx$

$r = x - (-3)$

$= x + 3$

$h = 4 - x^2 - 0.$

$= 2\pi \int_{-2}^{2} (x+3)(4-x^2)\, dx = 64\pi.$

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالمستقيم $y = 4 - 2x$ والمحورين

$y = 4 - 2x$

$2x = 4 - y$

$x = 2 - \frac{1}{2}y$

(1) حول محور x

أقراص dx

$r_o = 4 - 2x$

$r_i = 0$

$$V = \pi \int_0^2 (4-2x)^2 \, dx$$

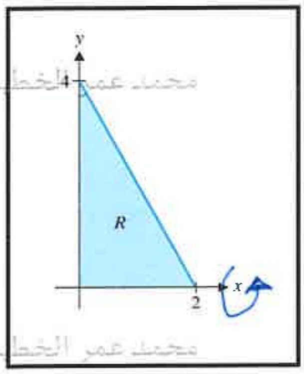
$$= \frac{32}{3}\pi$$

أصداف dy

$r = y$

$h = 2 - \frac{1}{2}y$

$$V = 2\pi \int_0^4 y\left(2 - \frac{1}{2}y\right) dy$$



(2) حول محور y

أصداف dx

$r = x$

$h = 4 - 2x$

$$V = 2\pi \int_0^2 x(4-2x)\, dx$$

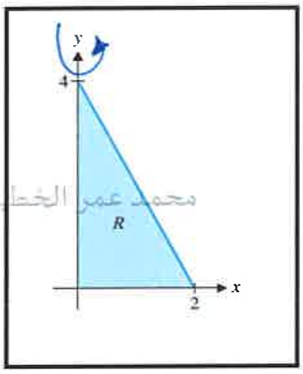
$$= \frac{16}{3}\pi$$

أقراص dy

$r_o = 2 - \frac{1}{2}y$

$r_i = 0$

$$V = \pi \int_0^4 \left(2 - \frac{1}{2}y\right)^2 dy$$



(3) حول المستقيم $x = -1$

أصداف dx

$r = x - (-1)$

$= x + 1$

$h = 4 - 2x$

$$V = 2\pi \int_0^2 (x+1)(4-2x)\, dx$$

$$= \frac{40}{3}\pi$$

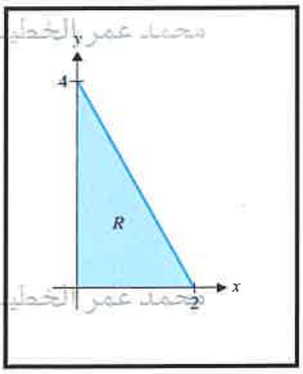
حلقات dy

$r_o = 2 - \frac{1}{2}y - (-1)$

$= 2 - \frac{1}{2}y + 1$

$r_i = 0 - (-1) = 1$

$$V = \pi \int_0^4 \left(3 - \frac{1}{2}y\right)^2 - 1 \quad dy$$



(4) حول المستقيم $y = -2$

حلقات dx

$r_o = 4 - 2x - (-2)$

$= 6 - 2x$

$r_i = 0 - (-2) = 2$

$$V = \pi \int_0^2 (6-2x)^2 - 4 \quad dx$$

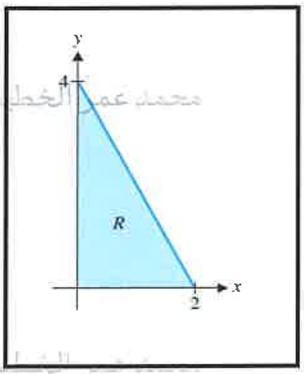
$$= \frac{80}{3}\pi$$

أصداف dy

$r = y - (-2) = y + 2$

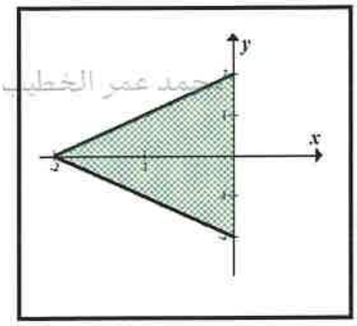
$h = 2 - \frac{1}{2}y$

$$V = 2\pi \int_0^4 (y+2)\left(2 - \frac{1}{2}y\right) dy$$



اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

(1) المحصورة بالمستقيم $y = x + 2$ والمستقيم $y = -x - 2$ و $x = 0$ حول المحور x



اقراص dx يكفي تدوير الجزء العلوي فقط

$r_o = x + 2$

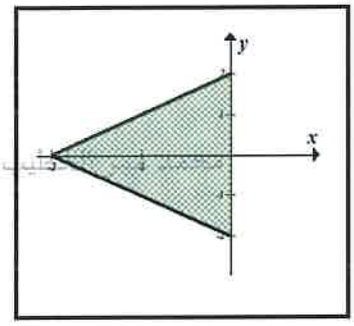
$r_i = 0$

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_{-2}^{0} (x+2)^2 \, dx$

$= \frac{8}{3} \pi$

(2) المحصورة بالمستقيم $y = x + 2$ والمستقيم $y = -x - 2$ و $x = 0$ حول المحور y



اسطوانات dx

$V = 2\pi \int r h \, dx$

$= 2\pi \int_{-2}^{0} (-x)(2x+4) dx$

$= \frac{16}{3} \pi$

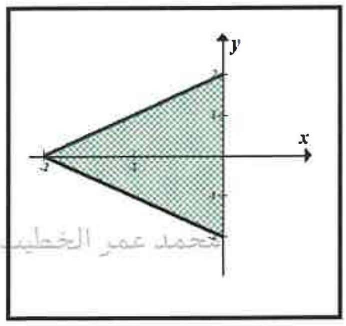
$r = 0 - x$

$= -x$

$h = x + 2 - (-x - 2)$

$= 2x + 4$

(3) المحصورة بالمستقيم $y = x + 2$ والمستقيم $y = -x - 2$ و $x = 0$ حول المحور $x = 1$



اسطوانات dx

$V = 2\pi \int r h \, dx$

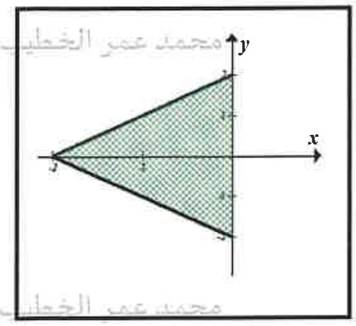
$= 2\pi \int_{-2}^{0} (1-x)(2x+4) dx$

$= \frac{40}{3} \pi$

$r = 1 - x$

$h = 2x + 4$

(4) المحصورة بالمستقيم $y = x + 2$ والمستقيم $y = -x - 2$ و $x = 0$ حول المحور $y = -2$



حلقات dx

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_{-2}^{0} (x+4)^2 - (-x)^2 \, dx$

$= 16 \pi$

$r_o = x + 2 - (-2)$

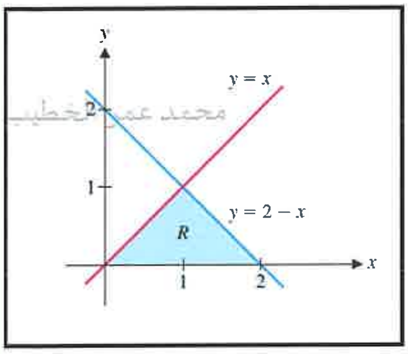
$= x + 4$

$r_i = -x - 2 - (-2)$

$= -x$

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

(1) المحصورة بالمستقيم $y=2-x$ والمستقيم $y=x$ و $y=0$ حول المحور x



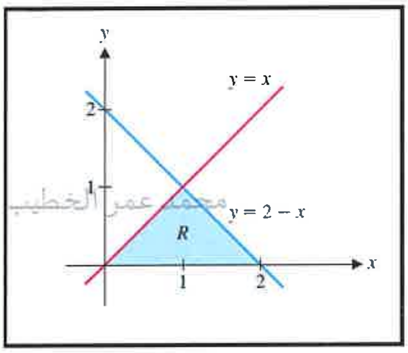
dy اصداف

$$V = 2\pi \int_0^1 y(2-2y)\,dy$$

$r = y - 0 = y$

$h = 2 - y - y$
$= 2 - 2y$

(2) المحصورة بالمستقيم $y=2-x$ والمستقيم $y=x$ و $y=0$ حول المحور y



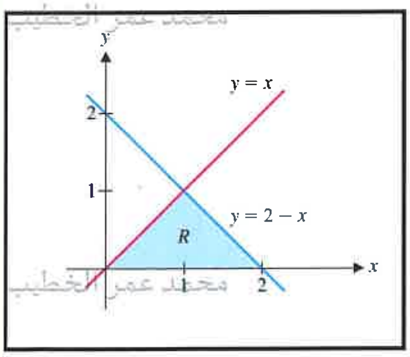
dy حلقات

$$V = \pi \int_0^1 (2-y)^2 - y^2\,dy$$

$r_o = 2 - y$

$r_i = y$

(3) المحصورة بالمستقيم $y=2-x$ والمستقيم $y=x$ و $y=0$ حول المحور $x=3$



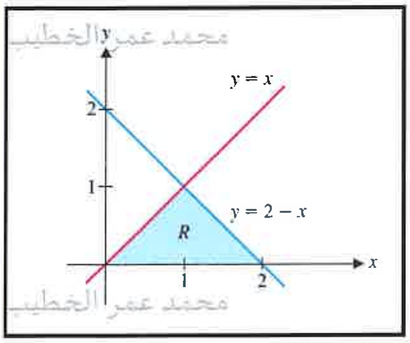
dy حلقات

$$V = \pi \int_0^1 (3-y)^2 - (1+y)^2\,dy$$

$r_o = 3 - y$

$r_i = 3 - (2 - y)$
$= 1 + y$

(4) المحصورة بالمستقيم $y=2-x$ والمستقيم $y=x$ و $y=0$ حول المحور $y=2$



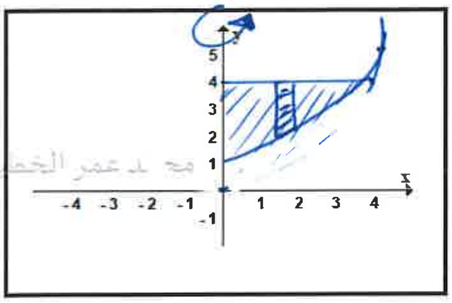
dy اصداف

$$V = 2\pi \int_0^1 (2-y)(2-2y)\,dy$$

$r = 2 - y$

$h = 2 - y - y$
$= 2 - 2y$

(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=\frac{1}{4}x^2+1$ والمستقيم $x=0$ والمستقيم $y=4$ حول محور y



أصداف dx

$$V = 2\pi\int r h\, dx$$

$r = x$

$$= 2\pi\int_0^4 x\left(3-\frac{1}{4}x^2\right)dx$$

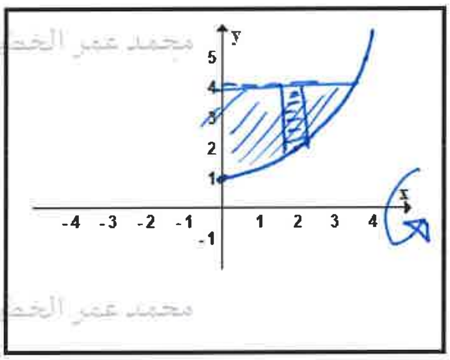
$h = 4-\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)$

$= 3-\frac{1}{4}x^2$

$$= 16\pi$$

---

(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=\frac{1}{4}x^2+1$ والمستقيم $x=0$ والمستقيم $y=4$ حول محور x



حلقات dx

$$V = \pi\int r_o^2 - r_i^2\, dx$$

$$= \pi\int_0^4 4^2 - \left(\frac{1}{4}x^2+1\right)^2 dx$$

$r_o = 4$

$r_i = \frac{1}{4}x^2+1$

$$= \frac{548}{15}\pi$$

---

(3) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{x}$ والمستقيم $x=4$ حول المستقيم $x=4$

أصداف dx

$$V = 2\pi\int r h\, dx$$

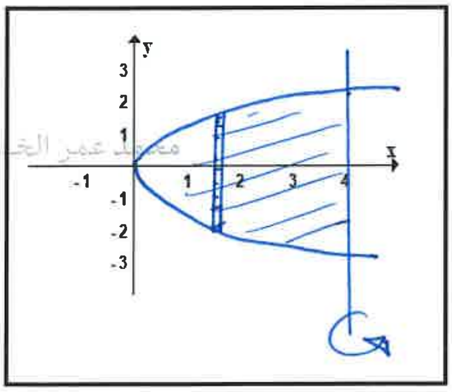
$$= 2\pi\int_0^4 (4-x)\cdot 2\sqrt{x}\, dx$$

$r = 4-x$

$h = \sqrt{x}-(-\sqrt{x})$

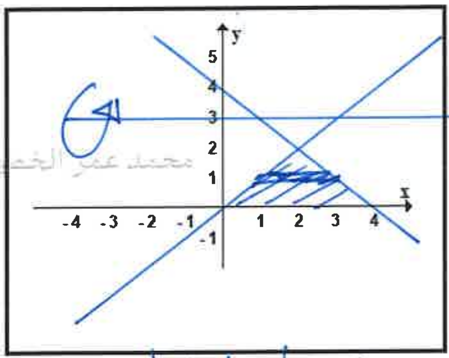
$= 2\sqrt{x}$

$$= \frac{512}{15}\pi$$



(1) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمستقيم $y=4-x$ والمستقيم $y=x$ والمستقيم $y=0$

(أ) حول المستقيم $y=3$



dy أصداف

$r = 3-y$

$h = 4-y-y$
$= 4-2y$

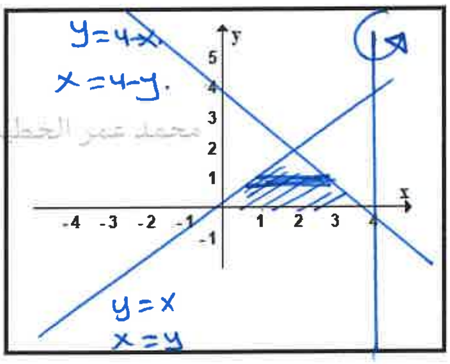
$$V = 2\pi \int rh\, dy$$
$$= 2\pi \int_0^2 (3-y)(4-2y)\, dy$$
$$= \frac{56}{3}\pi$$

نقاط التقاطع

$y = 4-y$

$2y = 4 \rightarrow y = 2$

(ب) حول المستقيم $x=4$



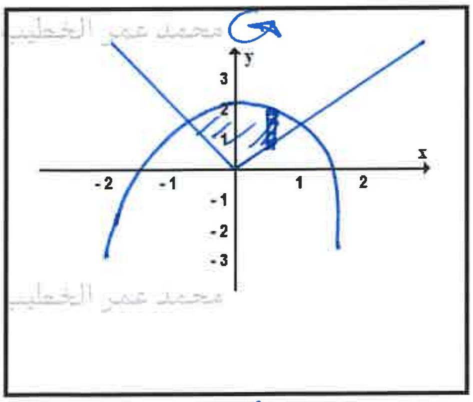
dy حلقات

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2\, dy$$
$$= \pi \int_0^2 (4-y)^2 - y^2\, dy$$
$$= 16\pi$$

$r_o = 4-y$

$r_i = 4-(4-y)$
$= y$

(2) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالدالتين $y=2-x^2$ ، $y=|x|$ حول المحور y



يكفي تدوير جزء لأن محور الدوران نفسه محور التماثل

$$V = 2\pi \int rh\, dx$$
$$= 2\pi \int_0^1 x(2-x-x^2)\, dx$$
$$= \frac{5}{6}\pi$$

dx أصداف

$r = x$

$h = 2-x^2-x$
$= 2-x-x^2$

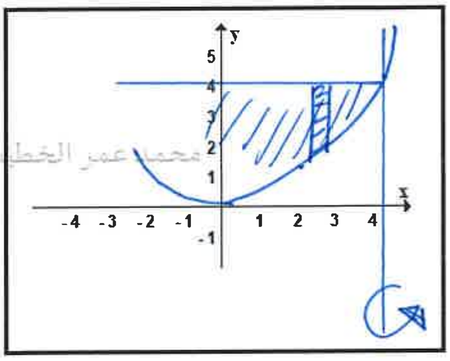
$2-x^2 = x \quad , x>0$

$x^2+x-2=0$

$x=1 \quad , \quad x=-2$ مرفوض

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=\frac{1}{4}x^2$ والمستقيم $y=4$

على الفترة $[0,4]$ حول المستقيم $x=4$



اصداف dx

$V=2\pi\int rh\,dx$

$r=4-x$

$h=4-\frac{1}{4}x^2$

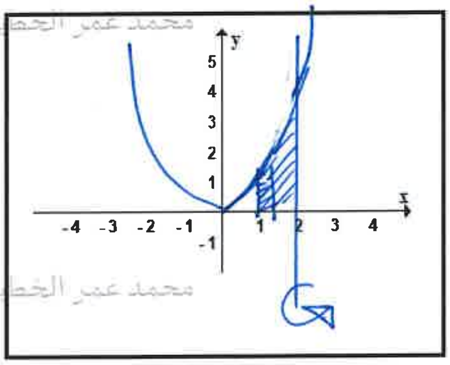
$=2\pi\int_0^4(4-x)(4-\frac{1}{4}x^2)dx$

$=\frac{160}{3}\pi$

---

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=x^2$ والمستقيم $y=0$

و $x=2$ حول المستقيم $x=2$



اصداف dx

$V=2\pi\int rh\,dx$

$=2\pi\int_0^2(2-x)\,x^2\,dx$

$=8\pi/3$

$r=2-x$

$h=x^2$

حلقات dy

$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\,dy$

$=\pi\int_0^4(2-\sqrt{y})^2dy$

$r_o=2-\sqrt{y}$

$r_i=0$

$y=x^2$

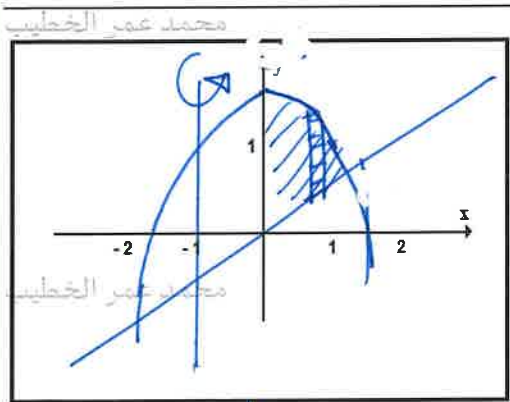
$x=\pm\sqrt{y}$

---

(3) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمنحنى $y=2-x^2$ والمستقيات $y=x$ ، $x>0$ ومحور y

حول $x=-1$



اصداف dx

$V=2\pi\int rh\,dx$

$=2\pi\int_0^1(x+1)(2-x-x^2)dx$

$=\frac{19}{12}\pi$

$r=x-(-1)$

$=x+1$

$h=2-x^2-x$

$=2-x-x^2$

نقاط التقاطع

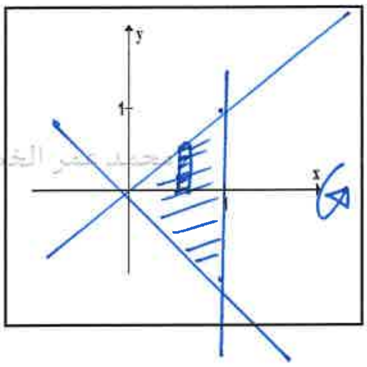
$2-x^2=x$, $x>0$

$x^2+x-2=0$

$x=1$, -2 مرفوض

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بالمنحنى $y=x$ و $y=-x$ و $x=1$

حول محور x



يكفي تدوير الجزء العلوي.

الشريحة ⊥ محور الدوران

∴ الطريقة اقراص

$r_o = x$

$r_i = 0$

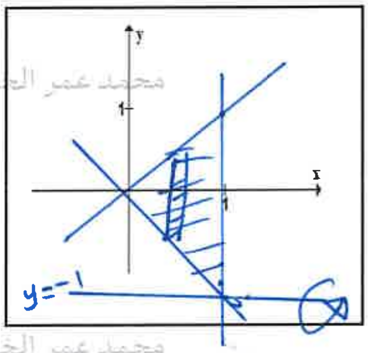
$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^1 x^2 \, dx$

$= \pi/3$.

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بالمنحنى $y=x$ و $y=-x$ و $x=1$

حول محور $y=-1$



الشريحة dx مناسبة.

الشريحة ⊥ محور الدوران

∴ الطريقة حلقات

$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_0^1 (x+1)^2 - (-x+1)^2 \, dx$.

$= \frac{8}{3}\pi$.

$r_o = x-(-1)$

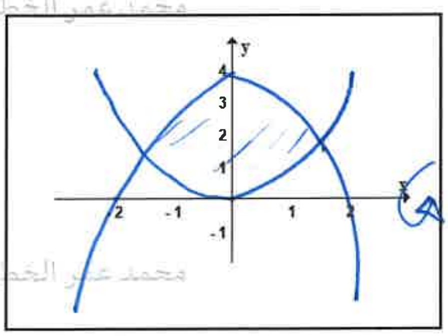
$= x+1$

$r_i = -x-(-1)$

$= -x+1$

(3) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y=4-x^2$ و $y=x^2$

حول محور x



الشريحة dx (مناسبة)

الشريحة ⊥ محور الدوران

∴ الطريقة حلقات

$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$

$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4-x^2)^2 - (x^2)^2$

$= 32\sqrt{2} - \frac{32\sqrt{2}}{3}$.

$r_o = 4-x^2-0$

$r_i = x^2-0$

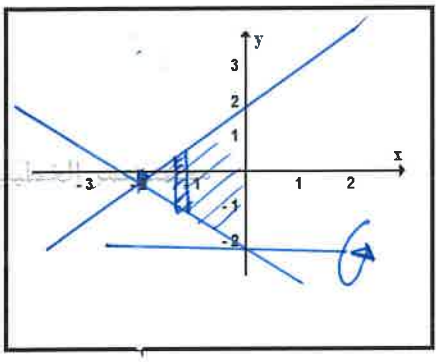
نقاط التقاطع

$x^2 = 4-x^2$

$2x^2 = 4$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة المستقيم $y = x + 2$ والمستقيم $y = -x - 2$ و $x = 0$ حول المستقيم $y = -2$



الشريحة dx ⊥ محور الدوران

∴ حلقات dx

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{0} (x+4)^2 - (-x)^2 \, dx$$

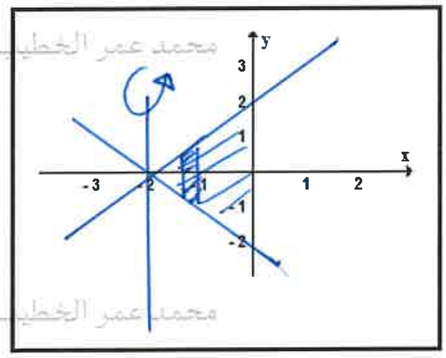
$$= 16\pi$$

$r_o = x + 2 - (-2)$
$= x + 4$

$r_i = -x - 2 - (-2)$
$= -x$

---

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة المستقيم $y = x + 2$ والمستقيم $y = -x - 2$ و $x = 0$ حول المستقيم $x = -2$



الشريحة dx // محور الدوران

∴ اصداف dx

$$V = 2\pi \int r h \, dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{0} (x+2)(2x+4) \, dx$$

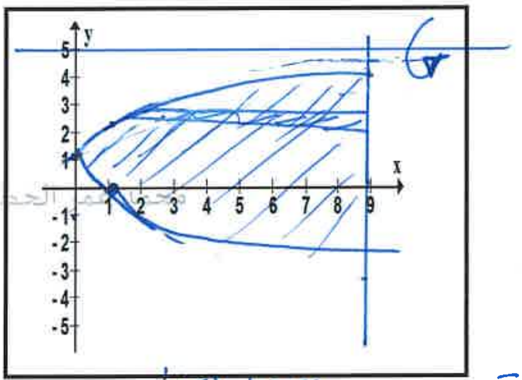
$$= \frac{32}{3}\pi$$

$r = x - (-2)$
$= x + 2$

$h = x + 2 - (-x - 2)$
$= 2x + 4$

---

(3) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بواسطة $x = (y-1)^2$ والمستقيم $x = 9$ حول المستقيم $y = 5$



تقاطع
$9 = (y-1)^2$
$y = -2, 4.$

الشريحة dy مناسبة.

∴ اصداف dy.

$$V = 2\pi \int r h \, dy$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{4} (5-y)(9-(y-1)^2) \, dy$$

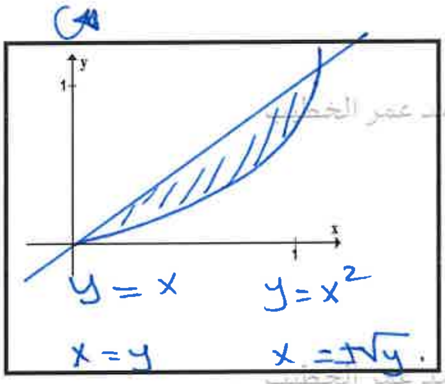
$$= 288\pi$$

$r = 5 - y$

$h = 9 - (y-1)^2$

يمثل كل من التكاملات التالية حجم مجسم ،ارسم المنطقة R وحدد محور الدوران الذي ينتج عنه المجسم ثم حول التكامل بدلالة y

(1) $\int_0^1 2\pi\, x(x-x^2)\,dx$



هذا الحجم بطريقة الاصداف

∴ محور الدوران // الشريحة (المكامل) dx

∴ محور الدوران y

$r = x \quad , \quad h = x - x^2$

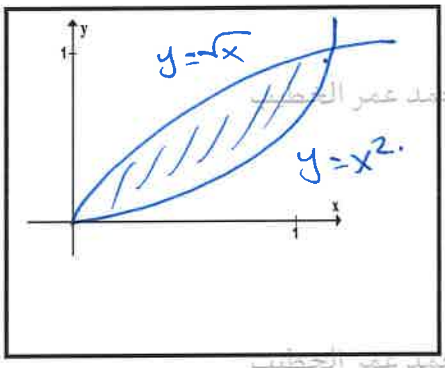
$r_o = \sqrt{y}$

$r_i = y$

$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 - y^2 \, dy$

---

(2) $\int_0^1 \pi\left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right] dx$



هذا الحجم بطريقة الحلقات

∴ محور الدوران ⊥ الشريحة dx

∴ محور الدوران x

$r_o = \sqrt{x} \quad , \quad r_i = x^2$

$V = 2\pi \int_0^1 y(\sqrt{y} - y^2)\, dy$

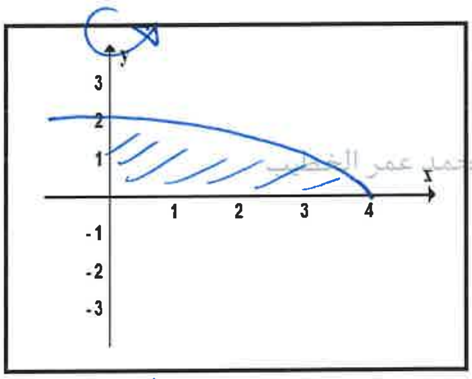
$r = y$

$h = \sqrt{y} - y^2$

---

(3) $\int_0^2 \pi(4-y^2)^2\, dy$

ملاحظة: يوجد أكثر من جواب للسؤال



هذا الحجم بطريقة الاقراص

∴ محور الدوران ⊥ الشريحة dy

∴ محور الدوران y

$r_o = 4 - y^2 \quad , \quad r_i = 0$

$V = 2\pi \int_0^4 x\sqrt{4-x}\, dx$

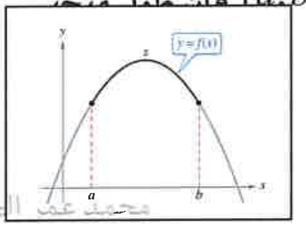
$r = x$

$h = \sqrt{4-x}$

الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل /// الدرس الرابع : طول القوس ومساحة السطح

طول القوس (المنحنى)

إذا كانت $y=f(x)$ دالة قابلة للإشتقاق، ومشتقتها متصلة على الفترة $[a,b]$ فإن طول منحنى الدالة يعطى بالتكامل



$$s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx=\int_a^b \sqrt{1+[y')]^2}\ dx$$

اكتب التكامل الذي يمثل طول منحنى الدالة y على الفترة المعطى (بدون إجراء عملية التكامل)

(1) $y=x^3 \quad , \ -1\le x\le 1$

$y=x^3$

$y'=3x^2$

$(y')^2=9x^4$

$S=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+9x^4}\ dx$

(2) $y=e^x \quad , \ [0,1]$

$y=e^x$

$y'=e^x$

$(y')^2=(e^x)^2=e^{2x}$

$S=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\ dx.$

(3) $y=lnx \quad , \ [1,3]$

$y=\ln x$

$y'=\frac{1}{x}$

$(y')^2=\frac{1}{x^2}.$

$S=\int_1^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ dx.$

(4) $y=\tan x \quad , \ 0\le x\le \pi/4$

$y=\tan x.$

$y'=\sec^2 x$

$(y')^2=\sec^4 x.$

$S=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\sec^4 x}\ dx$

(5) $y=\int_0^x u\ sinu\ \ du \quad , \ [0,\pi]$

$y=\int_0^x u\sin u\,du$

$y'=x\sin x.$

$(y')^2=x^2\sin^2 x.$

$S=\int_0^{\pi}\sqrt{1+x^2\sin^2 x}\ dx.$

(1) أوجد طول منحنى الدالة $y=\sqrt{3}\,x+1$ على الفترة $[0,5]$

$y=\sqrt{3}\,x+1$

$y'=\sqrt{3}$

$(y')^2=3$

$S=\int_0^5 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$=\int_0^5 \sqrt{1+3}\,dx$

$=10$

(2) أوجد طول منحنى الدالة $y=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ حيث $1\le x\le 4$

$y'=(x-1)^{1/2}$

$(y')^2=\left((x-1)^{1/2}\right)^2$

$=x-1$

$S=\int_1^4 \sqrt{1+x-1}\,dx$

$=\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

$=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_1^4=\frac{2}{3}(7)=\frac{14}{3}$

(3) أوجد طول منحنى الدالة $y=\sqrt{1-x^2}$ حيث $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$

$y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$(y')^2=\frac{x^2}{1-x^2}$

$S=\int_{-1/2}^{1/2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx$

$=\int_{-1/2}^{1/2}\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,dx$

$=\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$=\sin^{-1}x\Big]_{-1/2}^{1/2}=\pi/3$

(1) أوجد طول منحنى الدالة $y = \ln \cos x$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

$(y')^2 = \tan^2 x$

$S = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 x}\, dx$

$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x}\, dx$

$= \int_0^{\pi/4} |\sec x|\, dx$

$= \int_0^{\pi/4} \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x|\Big]_0^{\pi/4} = \ln(\sqrt{2}+1)$

---

(2) أوجد طول منحنى الدالة $f(x)$ حيث $f'(x) = \sqrt{x^2-2x}$ على الفترة $[2,3]$

$f'(x) = \sqrt{x^2-2x}$

$(f'(x))^2 = x^2-2x$

$S = \int_2^3 \sqrt{1+x^2-2x}\, dx$

$= \int_2^3 \sqrt{x^2-2x+1}\, dx$

$= \int_2^3 \sqrt{(x-1)^2}\, dx = \int_2^3 |x-1|\, dx = \int_2^3 (x-1)\, dx = 3/2$

---

(3) أوجد طول منحنى الدالة $f(x)$ حيث $f(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{4t^2-1}\, dt$ على الفترة $[-2,0]$

$f'(x) = \sqrt{4x^2-1}$

$(f'(x))^2 = 4x^2-1$

$|x|$: $-x$ on $[-2,0]$, x after 0

$S = \int_{-2}^0 \sqrt{1+4x^2-1}\, dx$

$= \int_{-2}^0 \sqrt{4x^2}\, dx$

$= \int_{-2}^0 |2x|\, dx$

$= \int_{-2}^0 -2x\, dx = 4$

(1) أوجد طول منحنى الدالة $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$ حيث $0\le x\le 1$

$f'(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

$[f'(x)]^2=\frac{1}{4}(e^{x}-e^{-x})^2$

$=\frac{1}{4}((e^{x})^2-2e^{x}\cdot e^{-x}+(e^{-x})^2)$

$=\frac{1}{4}((e^{x})^2-2+(e^{-x})^2)$

$S=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4}((e^{x})^2-2+(e^{-x})^2)}\,dx$

$=\int_0^1\sqrt{\frac{4+(e^{x})^2-2+(e^{-x})^2}{4}}\,dx$

$=\int_0^1\frac{1}{2}\sqrt{(e^{x})^2+2+(e^{-x})^2}\,dx$

$=\int_0^1\frac{1}{2}\sqrt{(e^{x}+e^{-x})^2}\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x}+e^{-x}\,dx=\frac{e^2-1}{2e}$

(2) أوجد طول منحنى الدالة $f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2x}$ على الفترة $[1,3]$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$

$=\frac{1}{2}(x^2-\frac{1}{x^2})$

$[f'(x)]^2=\frac{1}{4}(x^4-2x^2\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4})$

$=\frac{1}{4}(x^4-2+\frac{1}{x^4})$

$S=\int_1^3\sqrt{1+\frac{1}{4}(x^4-2+\frac{1}{x^4})}\,dx$

$=\int_1^3\sqrt{\frac{4+x^4-2+1/x^4}{4}}\,dx$

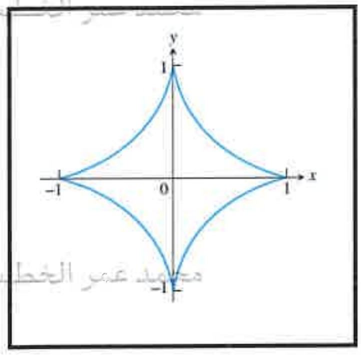
$=\frac{1}{2}\int_1^3\sqrt{x^4+2+1/x^4}\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_1^3\sqrt{(x^2+\frac{1}{x^2})^2}\,dx$

$=\frac{1}{2}\int_1^3\left|x^2+\frac{1}{x^2}\right|dx=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2+\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{14}{3}$

تمثل العلاقة $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

الشكل النجمي المجاور أوجد طول منحنى الشكل



ملاحظة : طول المنحنى النجمي الذي معادلته $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ **هو** $s=6a$

نكتب المعادلة بدلالة x.

$$x^{2/3}+y^{2/3}=1$$

$$y^{2/3}=1-x^{2/3}$$

$$y=\left(1-x^{2/3}\right)^{3/2}$$

$$y'=\frac{3}{2}\left(1-x^{2/3}\right)^{1/2}\cdot -\frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$=-x^{-1/3}\left(1-x^{2/3}\right)^{1/2}$$

$$(y')^2=x^{-2/3}\left(1-x^{2/3}\right)$$

$$=x^{-2/3}-1$$

من التماثل

$$S=4\int_0^1\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$=4\int_0^1\sqrt{1+x^{-2/3}-1}\,dx$$

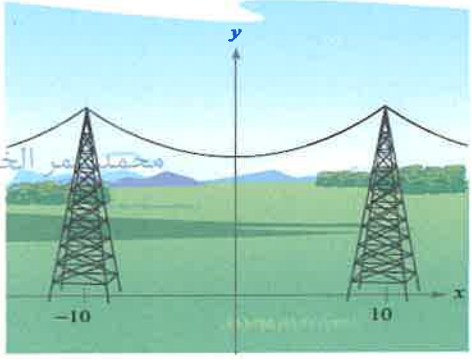
$$=4\int_0^1\sqrt{x^{-2/3}}\,dx$$

$$=4\int_0^1\left(x^{-2/3}\right)^{1/2}dx$$

$$=4\int_0^1 x^{-1/3}\,dx$$

$$=6$$

يمثل الشكل المجاور كابل كهربائي يمتد بين عمودين للكهرباء والمسافة بينهم $20\ m$



حيث تمثل المعادلة

$$y = 5\left(e^{x/10} + e^{-x/10}\right)$$

ارتفاع الكابل عند أي مسافة x حيث $-10 \le x \le 10$

ملاحظة : عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما $2L\ ft$ ، و معادلته $y = \frac{2L}{4}\left(e^{x/L} + e^{-x/L}\right)$

حيث $-L \le x \le L$ فان التكامل الذي يمثل طول الحبل هو

$$s = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(e^{x/L} + e^{-x/L}\right)dx = \int_{0}^{L}\left(e^{x/L} + e^{-x/L}\right)dx$$

أوجد طول الكابل الكهربائي بين العمودين

$$S = \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

$$y' = 5\left(e^{x/10}\cdot\frac{1}{10} + e^{-x/10}\cdot\left(\frac{-1}{10}\right)\right)$$

$$= \frac{5}{10}\left(e^{x/10} - e^{-x/10}\right)$$

$$(y')^2 = \frac{1}{4}\left(\left(e^{x/10}\right)^2 - 2\, e^{x/10}\cdot e^{-x/10} + \left(e^{-x/10}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(e^{x/10}\right)^2 - 2 + \left(e^{-x/10}\right)^2\right).$$

بالتماثل

$$= 2\int_{0}^{10} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\left(e^{x/10}\right)^2 - 2 + \left(e^{-x/10}\right)^2\right)}\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{10} \sqrt{\frac{4 + \left(e^{x/10}\right)^2 - 2 + \left(e^{-x/10}\right)^2}{4}}\, dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_{0}^{10} \sqrt{\left(e^{x/10}\right)^2 + 2 + \left(e^{-x/10}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{0}^{10} \sqrt{\left(e^{x/10} + e^{-x/10}\right)^2}\, dx$$

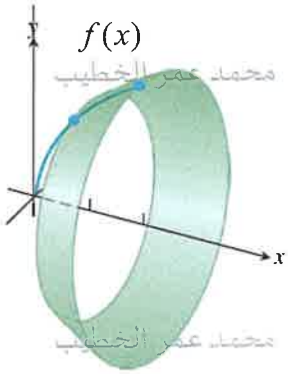
$$= \int_{0}^{10} \left| e^{x/10} + e^{-x/10} \right| dx$$

$$= \int_{0}^{10} e^{x/10} + e^{-x/10}\, dx = 23.5$$

مساحة السطح

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق ،ومشتقتها متصلة على الفترة $[a,b]$ فإن مساحة السطح الناتج عن دوران الدالة حول محور x يعطى بالتكامل

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\ \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ \ dx \quad = \int_a^b 2\pi y\ \sqrt{1+[y']^2}\ \ dx$$

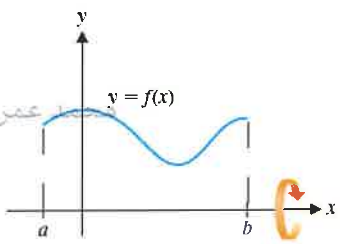


إذا كانت $x = g(y)$ دالة قابلة للإشتقاق ،ومشتقتها متصلة على الفترة $[c,d]$ فإن مساحة السطح الناتج عن دوران الدالة حول محور y يعطى بالتكامل

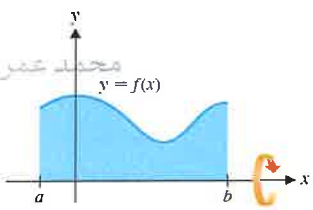
$$S = \int_c^d 2\pi g(y)\ \sqrt{1+[g'(y)]^2}\ \ dy$$

ملاحظات :

(1) اذا تم تدوير المنحنى $y = f(x)$ حول محور على x على الفترة $[a,b]$ فان مساحة السطح تكون هي المساحة الجانبية وليست الكلية (بدون القاعدتين)



(2) اذا تم تدوير المساحة المحصورة بالدالة $y = f(x)$ ومحور x حول محور x على الفترة $[a,b]$ فان مساحة السطح تكون هي المساحة الكلية وليست الجانبية (يجب اضافة القاعدتين)



(1) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة y حول محور x

على الفترة المعطى (بدون إجراء عملية التكامل)

$(a)\ y=\sin x \quad , \ [0,\pi]$

$y = \sin x$

$y' = \cos x$

$(y')^2 = \cos^2 x$

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}\ dx$$

$(b)\ y=e^x \quad , \ [0,1]$

$y = e^x$

$y' = e^x$

$(y')^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$

$$S = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1+(e^x)^2}\ dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1+e^{2x}}\ dx$$

$(c)\ y=\ln x \quad , \ [1,2]$

$y = \ln x$

$y' = \frac{1}{x}$

$(y')^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1/x^2$

$$S = 2\pi \int_1^2 \ln x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\ dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 \frac{\ln x}{x} \sqrt{x^2+1}\ dx$$

$(d)\ y=\tan x \quad , \ \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$y = \tan x$

$y' = \sec x$

$(y')^2 = \sec^4 x$

$$S = 2\pi \int_0^{\pi/4} \tan x \sqrt{1+\sec^4 x}\ dx$$

---

(2) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران المعادلة $g(y)=y^2+1$

حيث $0 \le y \le 1$ حول محور y (بدون إجراء عملية التكامل)

$g'(y) = 2y$

$(g'(y))^2 = 4y^2$

$$S = 2\pi \int_0^1 g(x) \sqrt{1+(g'(y))^2}\ dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (y^2+1)\sqrt{1+4y^2}\ dy$$

(1) اوجد مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y=2$ حول محور x حيث $0\le x\le 5$

$$S = 2\pi \int_0^5 y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$y=2$

$y'=0$

$$= 2\pi \int_0^5 2\sqrt{1+0}\,dy$$

$$= 20\pi$$

---

(2) اوجد مساحة السطح المتولد من دوران الدالة $f(x)=\sqrt{3}x$ حول محور x حيث $1\le x\le 7$

$$S = 2\pi \int_1^7 \sqrt{3}x\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\,dx$$

$f(x)=\sqrt{3}x$

$f'(x)=\sqrt{3}$

$(f'(x))^2=3$

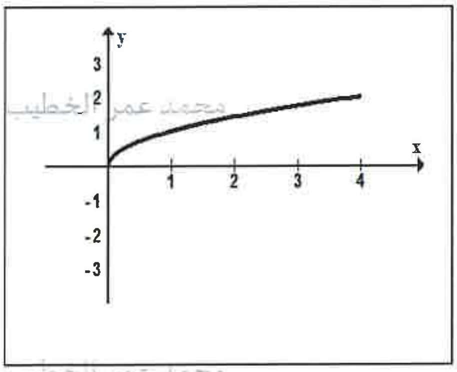
$$= 2\pi \int_1^7 2\sqrt{3}x$$

$$= 4\sqrt{3}\pi \int_1^7 x\,dx$$

$$456\pi\sqrt{3}$$

---

(3) اوجد مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ حول محور x على الفترة $[0,4]$



$$S = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\,dx$$

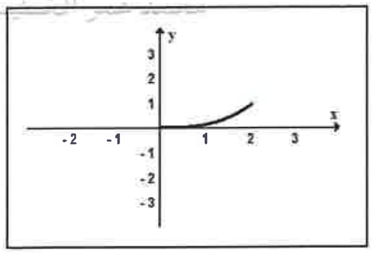
$$= \cancel{2}\pi \int_0^4 \cancel{\sqrt{x}}\,\frac{\sqrt{4x+1}}{\cancel{2\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \pi \int_0^4 (4x+1)^{1/2}\,dx = 36.17$$

$f(x)=\sqrt{x}$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$[f'(x)]^2=\frac{1}{4x}$



(1) اوجد مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $f(x)=\frac{1}{9}x^3$

حول محور x على الفترة $[0,2]$

$f'(x)=\frac{1}{3}x^2$

$=\left(\frac{1}{3}x^2\right)^2$

$=\frac{1}{9}x^4$

$U=9+x^4$

$\frac{du}{dx}=4x^3$

$\frac{du}{4x^3}=dx$

$x=0 \Rightarrow U=9$

$x=2 \Rightarrow U=25$

$$S=2\pi\int_0^2 \frac{1}{9}x^3\sqrt{1+\frac{1}{9}x^4}\,dx$$

$$=2\pi\int \frac{1}{9}x^3\cdot\sqrt{\frac{9+x^4}{9}}\,dx$$

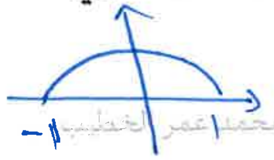
$$=\frac{2\pi}{9}\int_0^2 x^3\cdot\frac{1}{3}\sqrt{9+x^4}\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{27}\int \cancel{x^3}\cdot\sqrt{u}\cdot\frac{du}{4\cancel{x^3}}$$

$$=\frac{\pi}{54}\int_9^{25}u^{1/2}\,du=\frac{98\pi}{81}$$

---

(2) اوجد مساحة سطح المجسم المتولد عن دوران الدالة $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ حول محور x على الفترة $[-1,1]$ تساوي



يمكن استنتاج ان الناتج هو المساحة السطحية للكرة التي نصف قطرها 1 لذلك فيكون $S=4\pi$

$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$[f'(x)]^2=\frac{x^2}{1-x^2}$

$$S=2\pi\int\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx$$

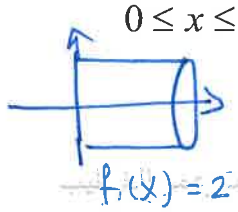
$$=2\pi\int\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}\cancel{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\,dx$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}dx=4\pi$$

(1) اوجد مساحة السطح المتولد عن دوران المساحة المحصورة بالدالة $y=2$ حول محور x حيث $0\le x\le 5$

$$S = 2\pi \int_0^5 2\sqrt{1+0}\,dx = 20\pi .$$



يجب اضافة القاعدتين

مساحة السطح تساوي المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$$20\pi + 2(4\pi) = 28\pi .$$

---

(2) اوجد مساحة السطح المتولد من دوران المربع المكون من جميع قيم (x,y) حيث $-1\le x\le 1$ و $-1\le y\le 1$ حول المحور y

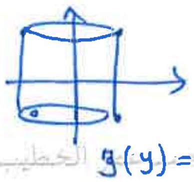
الشكل الناتج
اسطوانة رأسية

(بما انه تم تدوير المنطقة المحصورة بالمربع .... يعني المساحة)

يمكننا استنتاج ان الناتج هو مساحة الكلية للاسطوانة التي نصف قطرها 1 وارتفاعها 2

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy .$$ (اكمل بالتشابه)

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} 1\sqrt{1+0}\,dy = 4\pi .$$



المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$$= 4\pi + 2\pi$$
$$= 6\pi$$

---

(3) اذا تم تدوير المثلث الذي رؤوسه $(1,-1), (0,1), (-1,1)$ حول المحور y احسب مساحة السطح

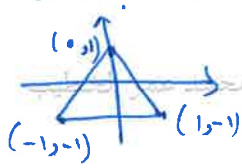
* يمكننا استنتاج ان الشكل الناتج هو مخروط نصف قطره 1 وارتفاعه 2.

الحل بالتكامل : يكفي تدوير الجزء الايمن للشكل .

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}(1-y)\sqrt{1+\tfrac{1}{4}}\,dy$$

$$= \pi\sqrt{5} .$$



معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(1,-1)$ ، $(0,1)$ هي

$$y-1 = -2(x-0)$$
$$x = \tfrac{1}{2}(1-y)$$
$$g(y) = \tfrac{1}{2}(1-y)$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$\pi + \pi\sqrt{5} = \pi(\sqrt{5}+1).$$

$g = 9.8 m/s^2 \quad or \quad g = 32 ft/s^2$

اولاً : حركة المقذوف في بعد واحد

(1) تعطى معادلة حركة مقذوف يتحرك رأسياً للأعلى أو للأسفل عند أي زمن t في المعادلة التفاضلية

$h''(t) = y''(t) = -g = -32 ft/s^2 \quad , y'(0) = v_0 \quad , y(0) = y_0$ بالقدم ft

أو

$h''(t) = y''(t) = -g = -9.8 m/s^2 \quad , y'(0) = v_0 \quad , y(0) = y_0$ بالمتر m

والحل يكون

معادلة السرعة الرأسية ← $v(t) = y'(t) = -g\,t + v_0$

معادلة الارتفاع ← $h(t) = y(t) = -\frac{1}{2} g\,t^2 + v_0 t + y_0$

(2) تعطى معادلة حركة مقذوف يتحرك أفقياً لليمين أو لليسار عند أي زمن t في المعادلة التفاضلية

$x''(t) = 0 \quad , x'(0) = v_0 \quad , x(0) = x_0$

والحل يكون

معادلة السرعة الأفقية ← $x'(t) = v_0$

معادلة المدى الافقي ← $x(t) = v_0 t + x_0$

ملاحظات مهمة:

(1) تكون السرعة المتجهه موجبة إذا كانت الحركة للأعلى(لليمين) وسالبة إذا كانت الحركة للأسفل (لليسار)

(2) يصل الجسم أقصى ارتفاع عندما تنعدم السرعة ($h'(t) = y'(t) = 0$)

$$\boxed{H = \frac{v_0^{\,2}}{2g}}$$

(3) زمن التحليق أو زمن الرحلة يحدث عندما يكون الارتفاع يساوي صفر ($h(t) = y(t) = 0$)

$$\boxed{T = \frac{2v_0}{g}}$$

اكتب المعادلة التفاضلية مع الشروط الابتدائية لكل مما يلي:

$g=32$

(1) قذفت كرة للأعلى من الأرض بسرعة متجهة قدرها $48\ ft/s$

$y''(t)=-32$, $y'(0)=48$, $y(0)=0$

(2) قذفت كرة للأعلى من يد شخص ترتفع عن الارض $1m$ وبسرعة متجهة قدرها $7m/s$

$g=9.8$

$y''(t)=-9.8$, $y'(0)=7$, $y(0)=1$.

(3) سقطت كرة من برج ارتفاعه $100\,ft$

$y''(t)=-32$, $y'(0)=0$, $y(0)=100$

سقوط حر

(4) قذفت كرة وزنها $50gm$ من برج ارتفاعه $75\,ft$ وبسرعة متجهة للأسفل قدرها $18\,ft/s$

$y''(t)=-32$, $y'(0)=18$, $y(0)=75$

الوزن لا يؤثر.

(5) اكتب معادلة السرعة المتجهة والارتفاع لحل المعادلة التفاضلية بالشروط الابتدائية التالية:

$$h''(t)=y''(t)=-16\ m/s^2 \quad , \quad y'(0)=10 \quad , \quad y(0)=120$$

$y'(t)=-16t+v_0$

$=-16t+10$

$y(t)=-8t^2+10t+y_0$

$=-8t^2+10t+120$.

قذفت كرة من الارض رأسياً للأعلى بشكل مستقيم وبسرعة متجهة ابتدائية $19.6\, m/s$ ، بتجاهل مقاومة الهواء

(1) اكتب المعادلة التفاضلية التي تتمزج معادلة الارتفاع مع الشروط عند أي زمن t

$h''(t) = -9.8 \quad , h'(0) = 19.6 \quad , h(0) = 0$

(2) أوجد معادلة الارتفاع عند أي زمن t

$h'(t) = \int -9.8\, dt$

$= -9.8t + c_1$

$h'(0) = 19.6 \Rightarrow c_1 = 19.6.$

$h'(t) = -9.8t + 19.6$

$h(t) = \int -9.8t + 19.6\, dt$

$= -4.9t^2 + 19.6t + c_2$

$h(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$\therefore h(t) = -4.9t^2 + 19.6t.$

(3) أوجد ارتفاع الكرة بعد 3 ثواني

$h(3) = -4.9(3)^2 + 19.6(3)$

$= 14.7m.$

(4) أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة

اقصى ارتفاع عندما السرعة = صفر.

$h'(t) = 0$. زمن اقصى ارتفاع

$-9.8t + 19.6 = 0$

$t = 2$

اقصى ارتفاع

$h(2) = -4.9(2)^2 + 19.6(2)$

$= 19.6$

(5) أوجد زمن التحليق للكرة (مقدار الزمن التي تبقى فيه الكرة بالهواء)

$h(t) = 0$

$-4.9t^2 + 19.6t^2 = 0$

$t = 0 , \quad t = 4.$

زمن التحليق 4 ثواني

(1) تسقط قطرات المطر من غيمة على ارتفاع $1000\,m$ عن سطح الارض أوجد السرعة المتجهة لقطرة الماء عند اصطدامها بالأرض (تجاهل مقاومة الهواء)

قطرة الماء مثل الكرة ، مثل الغطاس، مثل أي جسم

$h''(t) = -9.8$, $h'(0) = 0$, $h(0) = 100$

$h'(t) = -9.8t + v_0$
$= -9.8t$

$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$
$= -4.9t^2 + 1000$

$h(t) = 0$
$-4.9t^2 + 1000 = 0$
$t = 14.28$

$h'(14.28) = -9.8(14.28) = -140$

---

(2) قذف جسم للأسفل من ارتفاع $160\,ft$ عن سطح الأرض وبسرعة متجهة $48\,ft/s$ أوجد السرعة المتجهة للجسم عند اصطدامه بالأرض (تجاهل مقاومة الهواء)

$h''(t) = -32$, $h'(0) = -48$, $h(0) = 160$

$h'(t) = -32t - 48$

$h(t) = -16t^2 - 48t + 160$

زمن الرحلة

$h(t) = 0$
$\Rightarrow t = 2$

زمن الاصطدام

$h'(2) = -32(2) - 48$
$= -112\ ft/s$

---

(3) سقطت كرة رأسياً من ارتفاع $80\ ft$ وفي نفس الوقت تم قذف كرة رأسيا من الأرض للأعلى وبسرعة $40\,ft/s$ ، حدد الارتفاع الذي تلتقي عنده الكرتين (تجاهل مقاومة الهواء)

$h''(t) = -32$, $h'(0) = 0$, $h(0) = 80$

$h'(t) = -32t$

$h(t) = -16t^2 + 80$

$h''(t) = -32$, $h'(0) = 40$, $h(0) = 0$

$h'(t) = -32t + 40$

$h(t) = -16t^2 + 40t$

عندما تكون الكرتان على نفس الارتفاع

$-16t^2 + 80 = -16t^2 + 40t$

$\Rightarrow t = 2$. زمن الالتقاء

$h(2) = -16(2)^2 + 80 = 16$

(1) إذا كان أقصى ارتفاع تصل إليه قدمي لاعب كرة سلة لتسديد الكرة هي $1.35\ m$ أوجد السرعة المتجهة الابتدائية التي قفز بها اللاعب ليصل إلى هذا الارتفاع (تجاهل مقاومة الهواء)

* ممكن اعتبار قدم اللاعب كرة.

$h''(t) = -9.8 \quad , \quad h'(0) = v_0 \quad , \quad h(0) = 0$

$h'(t) = -9.8t + v_0$

$h(t) = -4.9t^2 + v_0 t + 0.$

زمن اقصى ارتفاع

$h'(t) = 0$

$-9.8t + v_0 = 0$

$t = \frac{v_0}{9.8}.$

$h\left(\frac{v_0}{9.8}\right) = 1.35$

$-4.9\left(\frac{v_0}{9.8}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{9.8}\right) = 1.35$

$\frac{-4.9}{9.8^2}v_0^2 + \frac{v_0^2}{9.8} = 1.35$

بالضرب في 9.8^2.

$-4.9v_0^2 + 9.8v_0^2 = 1.35 \times 9.8^2$

$4.9v_0^2 = 1.35 \times 9.8^2$

$v_0^2 = \frac{1.35 \times 9.8^2}{4.9}.$

$v_0^2 = 26.46$

$v_0 = \sqrt{26.46} \approx 5\ m/s.$

الموجب فقط لان الجسم صاعد

(2) يسقط جسم من ارتفاع $H\ ft$ من سطح الارض

(أ) بين أن الجسم يصل إلى الأرض بعد الزمن $T = \frac{1}{4}\sqrt{H}\ s$ (تجاهل مقاومة الهواء)

$h''(t) = -32 \ , \ h'(0) = 0 \ , \ h(0) = H.$

$h'(t) = -32t$

$h(t) = -16t^2 + H$

$h(0) = 0$

$\Rightarrow -16t^2 + H = 0 \Rightarrow H = 16t^2$

$t^2 = \frac{H}{16}$

$t = +\sqrt{\frac{H}{16}} = \frac{\sqrt{H}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{H}$ #

(ب) بين أن السرعة المتجهة للجسم عند اصطدامه بالأرض هي $V = -8\sqrt{H}\ ft/s$ (تجاهل الهواء)

$h'(t) = -32t.$

$h(t) = -16t^2 + H.$

$h(0) = 0$

$\Rightarrow t = \frac{1}{4}\sqrt{H}.$

$h'\left(\frac{1}{4}\sqrt{H}\right) = -32\left(\frac{1}{4}\sqrt{H}\right)$

$= -8\sqrt{H}$ #

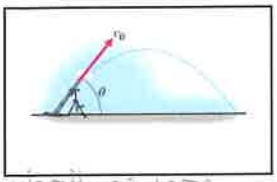
$g = 9.8 m/s^2 or\ g = 32 ft/s^2$

ثانياً : حركة المقذوف في بعدين

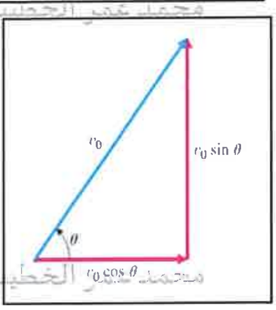
نحتاج في حركة المقذوف في بعدين إلى معادلات الحركة الرأسية والأفقية

(1) تعطى معادلة حركة مقذوف يتحرك رأسياً للأعلى أو الأسفل عند أي زمن في المعادلة التفاضلية

$$y''(t) = -9.8 m/s^2 or -32 ft/s^2 \quad , y'(0) = v_0 \sin\theta \quad , y(0) = y_0$$



حيث θ زاوية ميل المقذوف عن المستوى الأفقي



معادلة السرعة الراسية ← $y'(t) = -g\,t + v_0 \sin\theta$

معادلة الارتفاع ← $y(t) = -\frac{1}{2} g\,t^2 + v_0 \sin\theta\, t + y_0$

(2) تعطى معادلة حركة مقذوف يتحرك أفقياَ لليمين أو لليسار عند أي زمن في المعادلة التفاضلية

$$x''(t) = 0 \quad , x'(0) = v_0 \cos\theta \quad , x(0) = x_0$$

معادلة السرعة ← $x'(t) = v_0 \cos\theta$

معادلة المدى الافقي ← $x(t) = v_0 \cos\theta\, t + x_0$

السرعة الأفقية دائما ثابتة طول فترة

ملاحظات (من الفيزياء)

(1) زمن التحليق للمقذوف $T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$

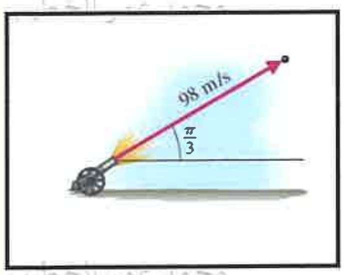
(2) اقصى ارتفاع $H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$

(3) المدى الافقي $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

تستخدم هذه القوانين للتاكد من الاجابات او لمسائل اختيار من متعدد

تطلق قذيفة بسرعة ابتدائية متجهة قدرها $98\ m/s$ ،

بزاوية ميل قدرها $\theta = \dfrac{\pi}{3}$



$g = 9.8$, $v_0 = 98$

$\theta = \pi/3$, $y_0 = 0$.

(1) أوجد معادلة الحركة الرأسية في أي زمن t (معادلة الارتفاع)

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta\, t + y_0$$

$$= -4.9 t^2 + 98 \sin\frac{\pi}{3}\, t + 0.$$

$$= -4.9 t^2 + 49\sqrt{3}\, t.$$

(2) أوجد معادلة الحركة الافقية في أي زمن t

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t + x_0.$$

$$= 98 \cos\frac{\pi}{3}\, t + 0$$

$$= 49 t.$$

(3) أوجد زمن التحليق للقذيفة

$$y(0) = 0$$

$$-4.9 t^2 + 49\sqrt{3}\, t = 0$$

$$t = 0 \quad , \quad t = 10\sqrt{3}\ s.$$

(4) أوجد المدى الأفقي (أقصى بعد تصل إليه القذيفة)

$$y(0) = 0.$$

$$t = 10\sqrt{3}.$$

$$x(10\sqrt{3}) = 49(10\sqrt{3})$$

$$= 849\ m.$$

(1) يتم اطلاق جسم من ارتفاع $6\,ft$ بزاوية 20° و بسرعة ابتدائية $48\ ft/s$

اوجد زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم

$g=32,\ v_0=48,\ y_0=6,\ \theta=20^\circ$

$y'(t)=-gt+v_0\sin\theta$

$=-32t+48\sin 20^\circ$

$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta\, t+y_0$

$=-16t^2+48\sin 20\, t+6$.

زمن التحليق

$y(t)=0$

$-16t^2+48\sin 20\, t+6=0$

$t=1.31\ s$.

المدى الأفقي

$x'(t)=v_0\cos\theta$

$=48\cos 20^\circ$

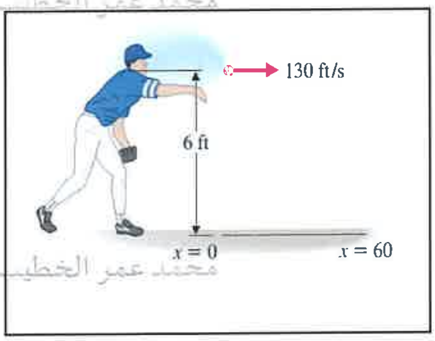
$x(t)=v_0\cos\theta\, t+x_0$

$=48\cos 20^\circ\, t$

$x(1.31)=48\cos 20^\circ\,(1.31)$

$=59\ ft$.

(2) يطلق لاعب، كرة بيسبول من ارتفاع $6\,ft$ وبسرعة أفقية ابتدائية قدرها $130\ ft/s$



الزاوية $\theta=0$

السرعة الأفقية ثابتة

(أ) أوجد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى المنصة (على بعد $60\,ft$)

$g=32,\ v_0=130,\ y_0=6,\ \boxed{\theta=0}$

$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta\, t+y_0$

$=-16t^2+6$.

$x(t)=v_0\cos\theta\, t+x_0$

$=130t$.

$x(t)=60 \Rightarrow 130t=60 \Rightarrow t=0.46 \Rightarrow y(0.46)=2.6\ ft$.

(ب) اكتب المعادلة التي تربط x و y

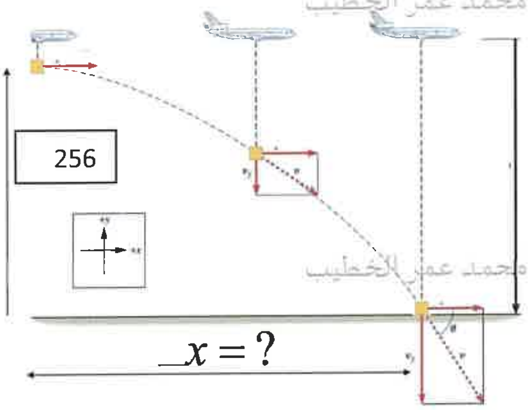
$x(t)=130t \Rightarrow t=\frac{x}{130}$.

$y(t)=-16t^2+6$

$=-16\left(\frac{x}{130}\right)^2+6=-\frac{16}{130^2}x^2+6$.

(1) تريد طائرة على ارتفاع $256\,ft$ ، اسقاط إمدادات إلى موقع معين على الأرض، إذا كان للطائرة سرعة أفقية $100\,ft/s$، فما المسافة التي ينبغي أن تبعدها الطائرة عن الهدف عند إطلاق الإمدادات من أجل أن تسقط في الموقع المستهدف. (اوجد المدى الافقي للمقذوف)

$g = 32,\ v_0 = 100,\ y_0 = 256\ \boxed{\theta = 0}$



$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta\, t + y_0$

$= -16t^2 + 256.$

$y(t) = 0 \Rightarrow t = 4$ زمن الحلق:

$x(t) = v_0 \cos\theta\, t + x_0$

$= 100t.$

$x(4) = 100(4) = 400\ ft.$

(2) يتم اطلاق كرة قدم من ارتفاع $6\,ft$ و بسرعة ابتدائية $80\ f/s$ وبزاوية $8°$ يقف شخص في نهاية الملعب ويبعد $40\,yd$ في اتجاه الرمي ،هل سيلتقط هذا الشخص الكرة

ملاحظة
$1yd = 3\,ft$

$g = 32,\ v_0 = 80,\ y_0 = 6,\ \theta = 8°$

$40yd = 120ft$

$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta\, t + y_0$

$= -16t^2 + 80\sin 8°\, t + 6.$

$y(t) = 0$ زمن التحليق

$t = 1.05$

$x(t) = v_0 \cos\theta t + x_0$

$= 80 \cos 8°\, t$

$x(1.05) = 83.$

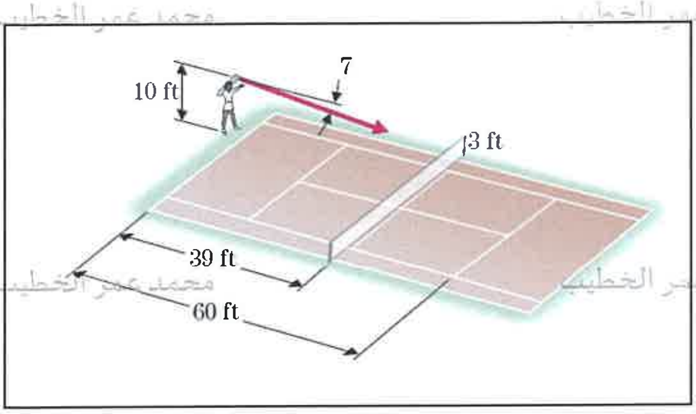
لا يستطيع ان يمسك الكرة لانها ستقع على بعد 83 قدم وليس على بعد 120 قدم

يطلق لاعب، كرة تنس من ارتفاع $10\ ft$

و بسرعة ابتدائية $176\ ft/s$

وبزاوية ميل أسفل الخط الأفقي قياسها 7°

كما هو موضح بالشكل



$g=32 \quad v_0=176$

$y_0=10 \,, \theta=-7^\circ$

(1) أوجد معادلة الحركة الرأسية في أي زمن t

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta\, t + y_0$

$= -16t^2 + 176\sin(-7^\circ)\, t + 10.$

$= -16t^2 - 21.45t + 10.$

(2) أوجد معادلة الحركة الأفقية في أي زمن t

$x(t) = v_0 \cos\theta\, t + x_0$

$= 176\cos(-7^\circ)\, t = 174.7t.$

(3) أوجد زمن وصول الكرة إلى الشبكة

$x(t) = 39.$

$176\cos(-7^\circ)\, t = 39.$

$t = 0.22\,s.$

(4) أوجد ارتفاع الكرة عن الأرض عند وصول الكرة إلى الشبكة، هل ستمر الكرة فوق الشبكة ؟

$y(0.22) = 4.4\ ft$

نعم ستمر.

وهو أعلى من ارتفاع الشبكة.

(5) أوجد زمن التحليق للكرة

$y(t) = 0$

$-16t^2 - 21.45t + 10 = 0 \Rightarrow t = 0.366\,S$

(6) أوجد المدى الأفقي للكرة

$x(0.366) = 174.7(0.366)$

$= 63.97\ ft.$

(7) هل ستكون الكرة داخل أم خارج الحد (على بعد $60\ ft$ من اللاعب)

لا، بل خارج الملعب (خلف الخط)

ثالثاً: حركة المقذوف في ثلاث أبعاد (معادلة الحركة لقذيفة جنونية)

قوة ماغنوس

تعطى المسافة الجانبية لكرة تتحرك وتدور بمعدل w راديان في الثانية بالمعادلة التفاضلية

$$x''(t)=\frac{-0.1}{m}\sin(4wt+\theta_0) \quad , \quad x'(0)=0 \quad , \quad x(0)=0$$

حيث θ_0 الزاوية الابتدائية عند رمي الكرة

و m كتلة الكرة ب صلج و x بالقدم

أوجد معادلة الحركة الجانبية لكرة البيسبول التي تزن 0.01 صلج والتي تدور بمعدل $w=2$ راديان بالثانية حيث ترمى الكرة من الموقع صفر والزاوية الابتدائية صفر والسرعة الابتدائية صفر.

ثم أوجد موقع الكرة الجانبية بعد نصف ثانية

$$x''(t)=\frac{-0.1}{0.01}\sin(4\times 2\times t+0) \quad , \quad x'(0)=0 \quad , \quad x(0)=0$$

$$x''(t)=-10\sin(8t) \quad , \quad x'(0)=0 \quad , \quad x(0)=0$$

$x'(t) = \int x''(t)\,dt$

$= \int -10\sin(8t)\,dt$

$= \frac{10}{8}\cos(8t) + C_1$

$x'(0)=0 \Rightarrow C_1 = -1.25$

$x'(t) = 1.25\cos(8t) - 1.25$

$= 1.25(\cos 8t - 1)$

$x(t) = \int 1.25(\cos 8t - 1)\,dt$

$= 1.25\left(\frac{\sin 8t}{8} - t\right) + C_2$

$x(0)=0 \Rightarrow C_2 = 0$

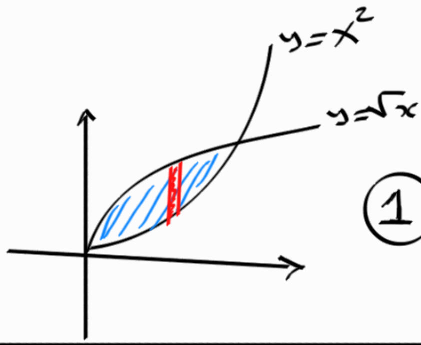
$X(t) = 0.156\sin 8t - 1.25t$

$X(\tfrac{1}{2}) = -0.74$

انتهت الوحدة السادسة بحمد الله

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$\boxed{B}$

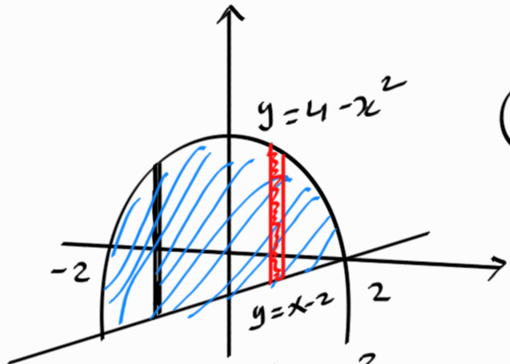


1

$$A = \int_{-3}^{2} 4 - x^2 - (x-2)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{2} -x^2 - x + 6\,dx$$

$\boxed{B}$



2

$4 - x^2 = x - 2$

$x^2 + x - 6 = 0$

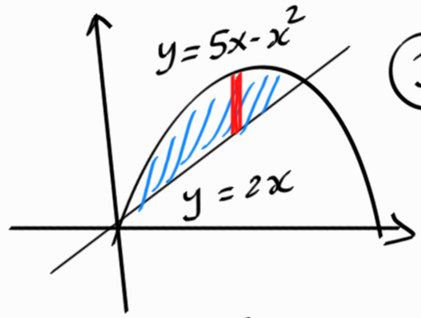
$x = -3,\ x = 2$

$$A = \int_0^3 (5x - x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2)\,dx$$

$$= \frac{9}{2}$$

$\boxed{B}$



3

$5x - x^2 = 2x$

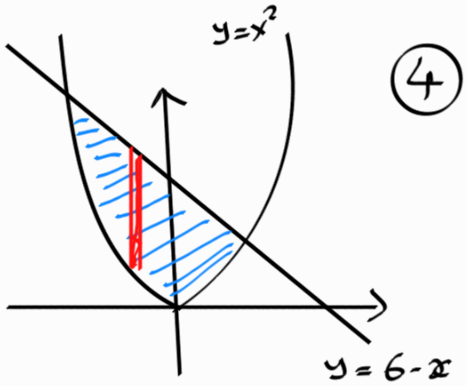
$x^2 - 3x = 0$

$x = 0,\ x = 3$

$$A = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx$$

$$= \frac{125}{6}$$

$\boxed{D}$



4

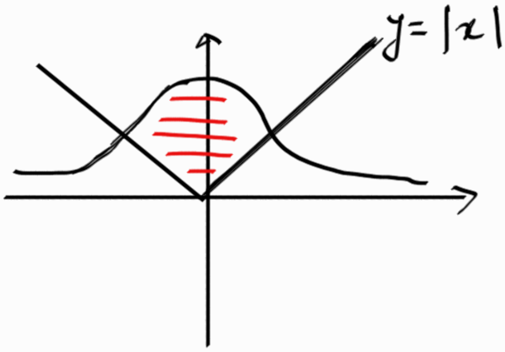
$x^2 = 6 - x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x = -3,\ x = 2$

⑤ لاحظ أن الدالة $y=\frac{2}{x^2+1}$ مرسومة

ترسم المطلق



من التماثل

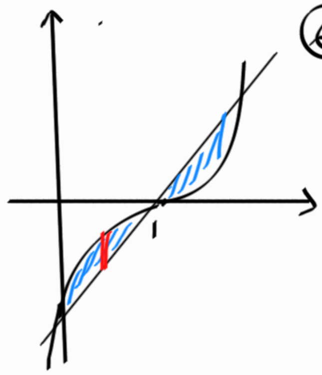
$$A = 2\int_0^1 \frac{2}{x^2+1} - x \, dx$$

$$= 2\left[2\tan^{-1}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 4\tan^{-1}x - x^2\Big]_0^1 \qquad \boxed{B}$$

---

⑥



من التماثل

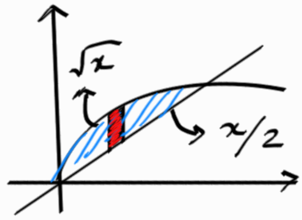
$$A = 2\int_0^1 (x-1)^3 - (x-1)\, dx$$

$$= 2\left[\frac{(x-1)^4}{4} - \frac{(x-1)^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 1/2 \qquad \boxed{A}$$

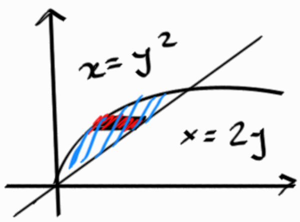
---

⑦



$$R = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx$$

او



$$R = \int_0^2 (\underbrace{2y}_{\text{يمين}} - \underbrace{y^2}_{\text{يسار}})\, dy$$

$\boxed{C}$

---

⑧

$$A = \int_{-1}^3 -y^2 + 10 - (y-2)^2 \, dy$$

$$= -\frac{y^3}{3} + 10y - \frac{(y-2)^3}{3}\Big]_{-1}^3 = \frac{64}{3} \qquad \boxed{B}$$

(9)

الافضل dy

$y - 2 = 4 - y^2$

$y^2 + y - 6 = 0$

$y = -3 \ , \ y = 2$

$$A = \int_{-3}^{2} 4 - y^2 - (y-2) \, dy$$

$$= \int_{-3}^{2} -y^2 - y + 6 \, dy$$

$$= \frac{125}{6}$$

$\boxed{D}$

---

(10)

الشريحة dy

$y = \frac{x^2}{4}$

$4y = x^2$

$x = \pm \sqrt{4y}$

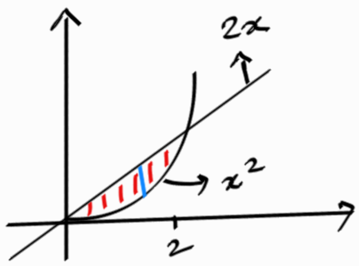
$x = \pm 2\sqrt{y}$

$$A = \int_0^1 (2\sqrt{y} - y) \, dy$$

$\boxed{A}$

---

(11)

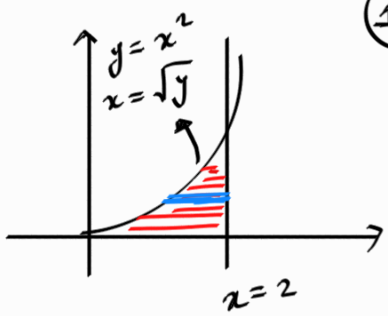


$$\int_0^2 (2x - x^2) \, dx = A_2$$

$\boxed{B}$

---

(12)



$$\int_0^4 (2 - \sqrt{y}) \, dy = A_3$$

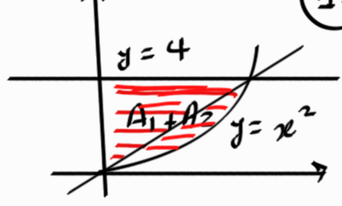
اليمين
$x = 2$

اليسار
$x = \sqrt{y}$

$\boxed{C}$

---

(13)



$$\int_0^2 4 - x^2 \, dx = A_1 + A_2$$

$y = 4$

$y = x^2$

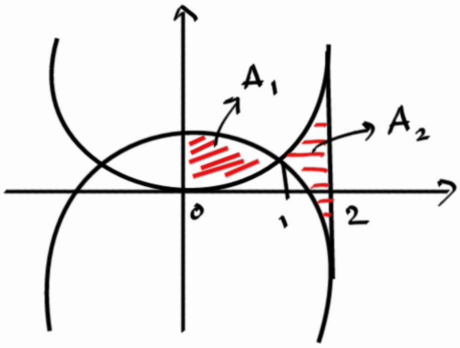
$\boxed{D}$

(14)

$$A_1 = \int_0^1 2 - x^2 - x^2 \, dx = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_1^2 x^2 - (2 - x^2) \, dx = \frac{8}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$$



$\boxed{D}$

$$x^2 = 2 - x^2$$

$$2x^2 = 2$$

$$x = -1 \ , \ x = 1$$

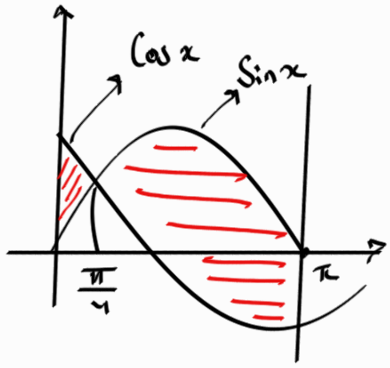
---

(15)

$$A_1 = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) \, dx$$

$$A_2 = \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) \, dx$$

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) \, dx$$



$\boxed{C}$

$$\sin x = \cos x$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \begin{cases} Q_1 \to x = \frac{\pi}{4} \\ Q_3 \to x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

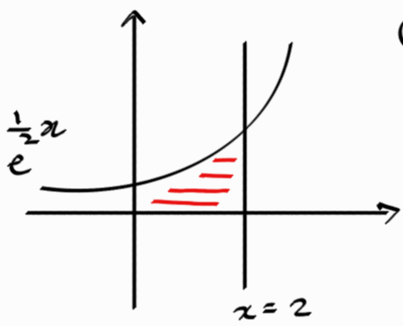
خارج الفترة $[0, \pi]$

---

(16)

$$A = \int_0^2 e^{\frac{1}{2}x} \, dx$$

$$= 2 e^{\frac{1}{2}x} \Big]_0^2 = 2e - 2$$



$\boxed{A}$

---

(17) من أحد تعريفات المساحة

$$A = \int_a^b | f(x) - g(x) | \, dx$$

$\boxed{B}$

بغض النظر انه يوجد نقاط تقاطع بين الدالتين في الفترة

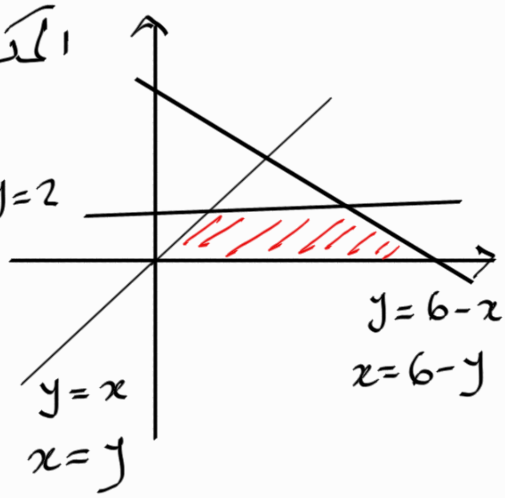
(18)

اكمال dy

$$A = \int_0^2 6 - y - y \quad dy$$

$$= \int_0^2 6 - 2y \quad dy$$

$\boxed{B}$



---

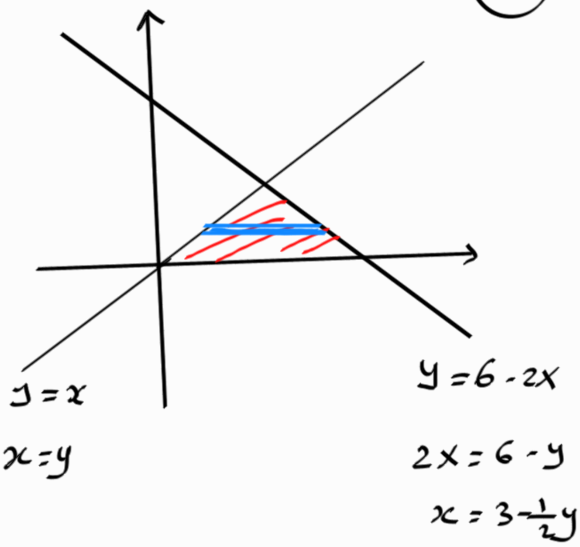
(19)

اجباري dy

$$A = \int 3 - \tfrac{1}{2}y - y \quad dy$$

$$= \int_0^2 3 - \tfrac{3}{2}y \quad dy$$

$\boxed{C}$



$$3 - \tfrac{1}{2}y = y$$

$$3 = y + \tfrac{1}{2}y$$

$$3 = \tfrac{3}{2}y$$

$$y = 2$$

---

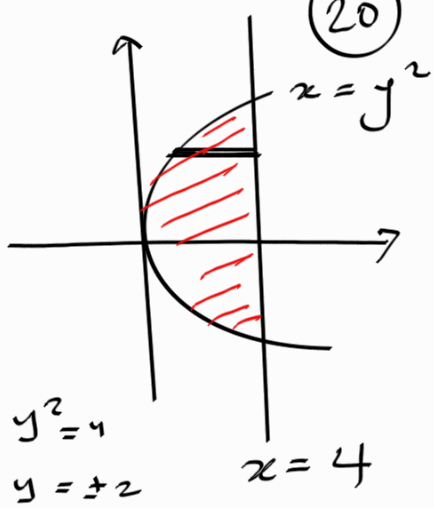
(20)

اكمال مل اجباري dy بسبب الخيارات

$$A = \int_{-2}^{2} 4 - y^2 \quad dy$$

$$= 2\int_0^2 4 - y^2 \quad dy \qquad \text{اوس، التماثل}$$

$\boxed{C}$



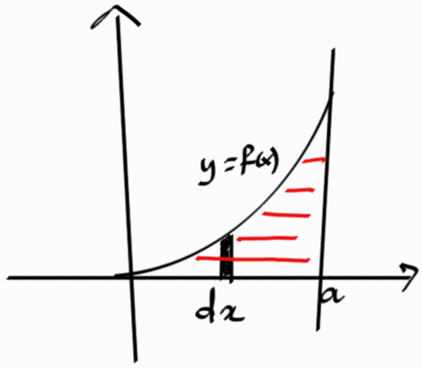
$y^2 = 4$

$y = \pm 2$

21

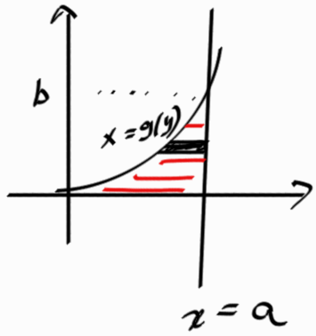
$$A = \int_0^a f(x)\, dx$$

او

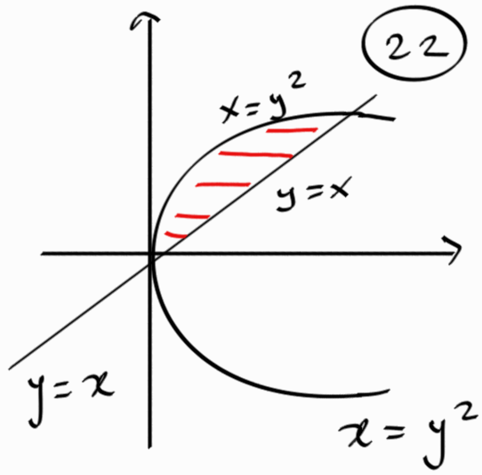


$$A = \int_0^b a - g(y) \quad dy$$

$\boxed{B}$



22



ع التكامل dx

$$A = \int_0^1 \sqrt{x} - x \quad dx$$

$$= 1/6 \qquad \boxed{C}$$

نقاط التقاطع

$\sqrt{x} = x$

$x^2 = x$

$x = 0 , 1$

ع التكامل dy

$$A = \int_0^1 y - y^2 \quad dy$$

$$= 1/6$$

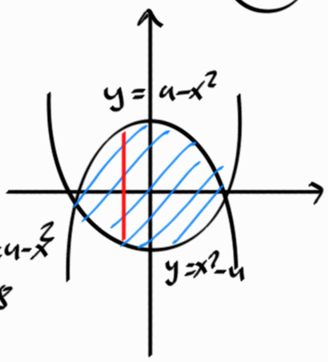
23

$$A = \int_{-2}^{2} (4-x^2) - (x^2-4)\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 8 - 2x^2 \, dx$$

$$= \frac{64}{3}$$

$\boxed{A}$



$x^2-4 = 4-x^2$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

24

$$\int_{0}^{2} f(x) - g(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(2)(2)$$

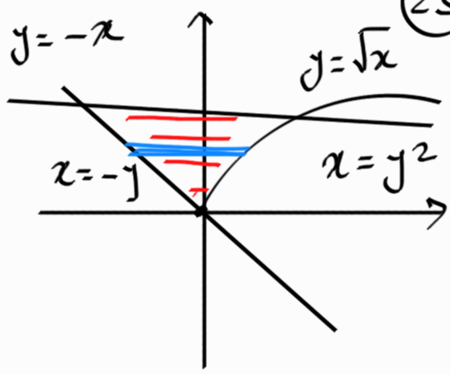
$$= 2$$

$\boxed{A}$

مساحة المثلث

25

الشريحة dy



$$A = \int_{0}^{2} (y^2 - (-y))\, dy$$

$\boxed{A}$

$$= \int_{0}^{2} (y^2 + y)\, dy$$

26

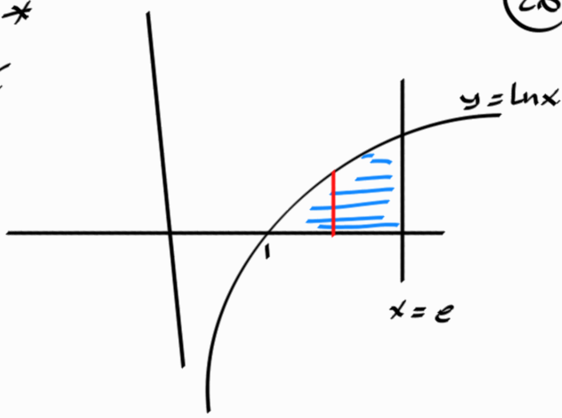
$$A = \int_{1}^{e} \ln x \, dx$$

* غير موجود بالخيارات

او

$$A = \int_{0}^{1} e - e^{y} \, dy$$

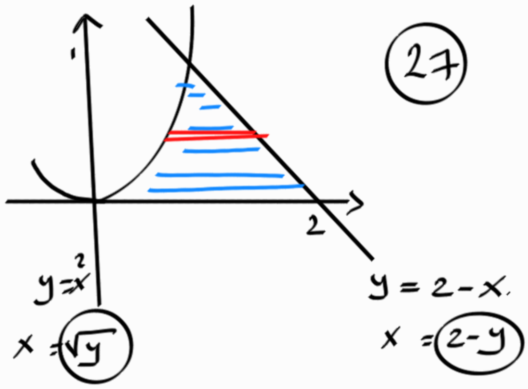
$\boxed{B}$



27

اجباري dy لان الخيارات في dy

$$A = \int_0^1 2 - y - \sqrt{y} \; dy$$



$\boxed{D}$

28

الشريحة dy أفضل

$$A = \int_0^b g^{-1}(y) - f^{-1}(y) \; dy$$

$y = g(x)$

$x = g^{-1}(y)$

$\boxed{D}$

29

$$A = \int_0^K Kx - x^2 \; dx$$

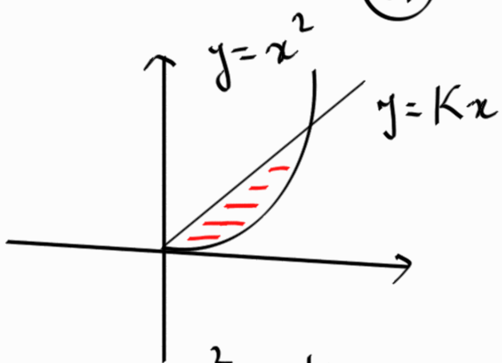
$$\frac{4}{3} = K\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_0^K$$

$$\frac{4}{3} = \frac{K^3}{2} - \frac{K^3}{3}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{K^3}{6}$$

$$8 = K^3 \longrightarrow K = 2$$

$\boxed{B}$



$x^2 = Kx$

$x^2 - Kx = 0$

$x = 0, \; x = K$

30

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 x - x^2 \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$A_1 = A_2 \rightarrow \quad A_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{12} \qquad \boxed{A}$$

31

$$P'(t) = B(t) - D(t)$$

$$= 10 + 2t - (4 + t)$$

$$= 6 + t$$

$$\Delta P = \int_0^{30} P'(t) \, dt = 630$$

صافي التغير في
عدد السكان

$$= \int_0^{30} 6 + t \cdot dt = 630$$

∴ عدد السكان $= 10000 + 630 = 10630$

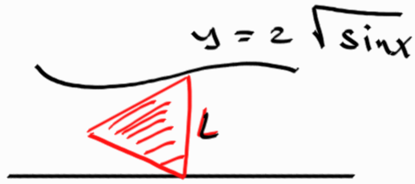
$\boxed{A}$

الوحدة السادسة - الدرس الثاني

$$A = \int_0^{10} A(x)\,dx$$ ①

$$= \int_0^{10} \frac{4}{25}(10 - x)\,dx = 8$$ $\boxed{A}$

$$V = \int_0^{\pi} A(x)\,dx$$ ②



$$= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{4} l^2\,dx$$

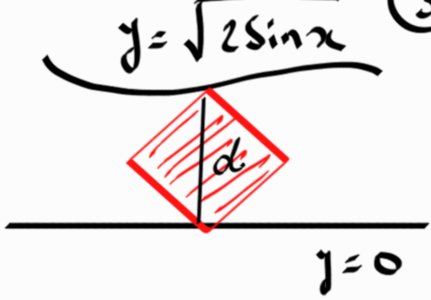
$$= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{\sin x}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{4}\, 4 \sin x\,dx$$

$L = 2\sqrt{\sin x}$

$$= -\sqrt{3}\cos x\Big]_0^{\pi} = 2\sqrt{3}$$ $\boxed{B}$

$$V = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} d^2\,dx$$ ③



$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\sin x}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\, 2\sin x\,dx$$

$d = \sqrt{2\sin x} - 0$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$$ $\boxed{B}$

ملاحظة: مساحة المربع الذي طول قطره d هو $\frac{1}{2} d^2$

④

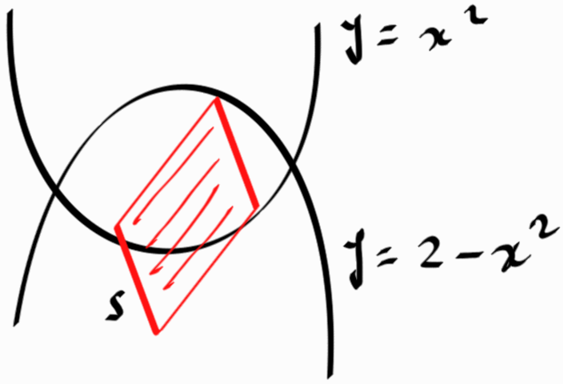
$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} s^2\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (2-2x)^2\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 16 - 16x^2 + 4x^2\, dx$$

$$= \frac{64}{15} \qquad \boxed{B}$$



$$S = 2 - x^2 - x^2$$
$$= 2 - 2x^2$$

---

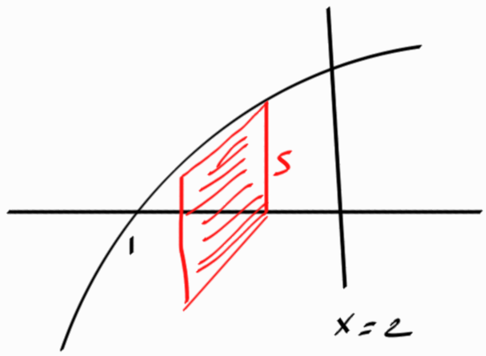
⑤

$$V = \int A(x)\, dx$$

$$= \int_{1}^{2} s^2\, dx$$

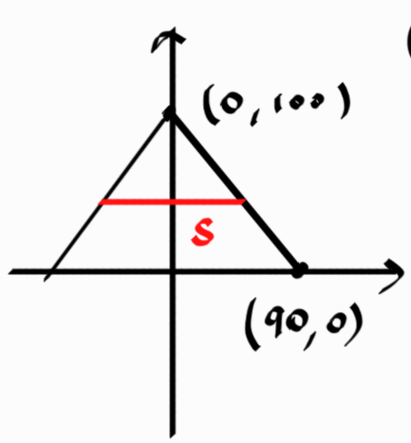
$$= \int_{1}^{2} (\ln x)^2\, dx$$

$$\boxed{C}$$



$$s = \ln x - 0$$
$$= \ln x.$$

6



نجد العلاقة بين x ، y

$$m = \frac{100-0}{0-90} = \frac{-10}{9}$$

$$y - 100 = \frac{-10}{9}(x - 0)$$

ولازم نكتب المعادلة بدلالة y

$$x = \frac{-9}{10}(y - 100)$$

$$V = \int_0^{100} A(y)\, dy$$

$$= \int_0^{100} s^2\, dy$$

$$= \int_0^{100} (2x)^2\, dy$$

$$= \int_0^{100} \left(\frac{-9}{5}(y-100)\right)^2 dy$$

$$= \int_0^{100} \left(180 - \frac{9}{5}y\right)^2 dy$$

أو

$$= \int_0^{100} \left(180 - \frac{9}{5}x\right)^2 dx \quad \boxed{A}$$

* ممكن حفظ القانون التالي (خاص بالهرم)

$$V = \int_0^{H} \left(L - \frac{L}{H}x\right)^2 dx$$

$$= \int_0^{100} \left(180 - \frac{180}{100}x\right)^2 dx$$

$$= \int_0^{100} \left(180 - \frac{9}{5}x\right)^2 dx$$

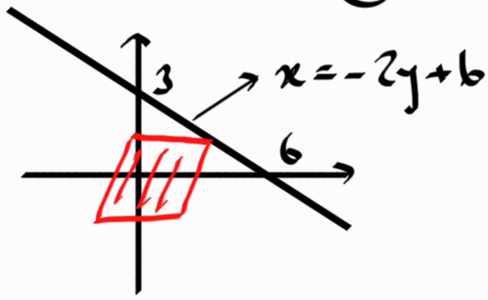
⑦

$$V = \int A(y)\, dy$$

$$= \int_0^3 S^2\, dy$$

$$= \int_0^3 (-2y+6)^2\, dy$$

$$= \left.\frac{(-2y+6)^3}{3(-2)}\right]_0^3 = 36 \quad \boxed{B}$$



$S = -2y+6 - 0$

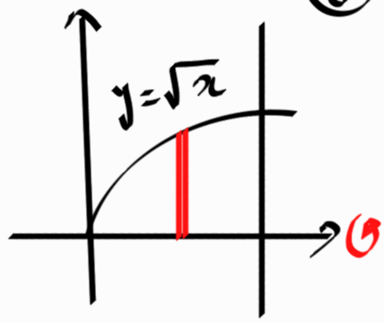
---

⑧

الطريقة اقراص :

:: الشرائح ⊥ محور الدوران (x)

:: الشرائح dx



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 - 0^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^4 x\, dx = 8\pi \quad \boxed{C}$$

$r_o = \sqrt{x} - 0$

$r_i = 0 - 0$

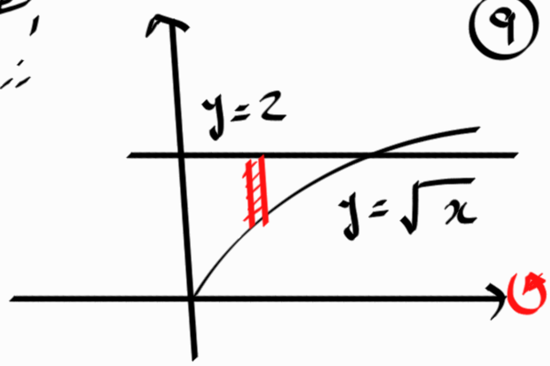
---

⑨

الطريقة حلقات :

:: الشرائح ⊥ محور الدوران (x)

:: الشرائح dx



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^4 2^2 - (\sqrt{x})^2\, dx$$

$$= 8\pi \quad \boxed{C}$$

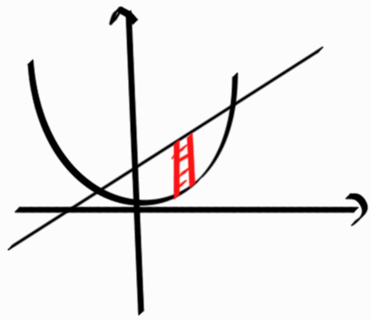
$r_o = 2 - 0$

$r_i = \sqrt{x} - 0$

(10)

الطريقة حلقات :

∴ الشريحة ⊥ محور الدوران ← الشريحة dx



$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (x+2)^2 - (x^2)^2 \, dx$$

$$= \frac{72\pi}{5} \quad \boxed{A}$$

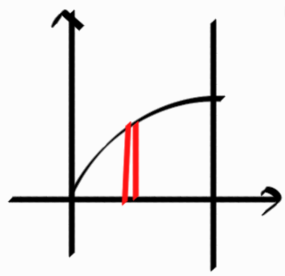
$r_o = x + 2 - 0$

$r_i = x^2 - 0$

---

(11)

الشريحة dx



$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} \, dx$$

$$= \pi \left[\ln|x^2+1| \right]_0^1 = \pi \ln 2$$

$\boxed{B}$

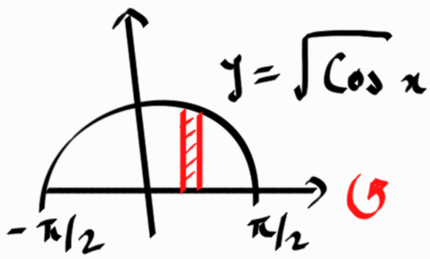
$r_o = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

$r_i = 0$

---

(12)

الشريحة dx ⊥ محور الدوران



$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$$

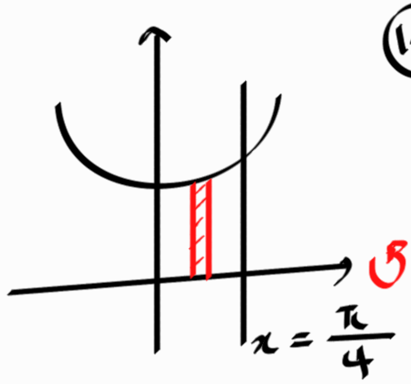
$$= 2\pi \quad \boxed{B}$$

$r_o = \sqrt{\cos x} - 0$

$r_i = 0 - 0$

الشريحة dx ⊥ محور الدوران

13



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$$

$$= \pi \left[\tan x\right]_0^{\pi/4} = \pi \quad \boxed{A}$$

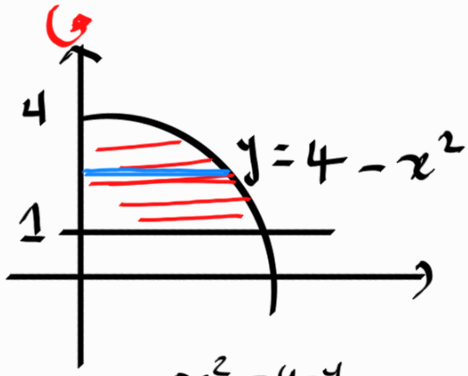
$r_o = \sec x - 0$

$r_i = 0 - 0$

الطريقة اقراص

14

الشريحة ⊥ محور الدوران (y) ⟸ شريحة dy



$x^2 = 4 - y$

$x = \pm\sqrt{4-y}$

$x = \sqrt{4-y}$

$r_o = \sqrt{4-y}$

$r_i = 0$

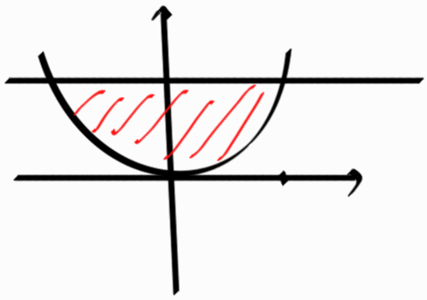
$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_1^4 \left(\sqrt{4-y}\right)^2 dy$$

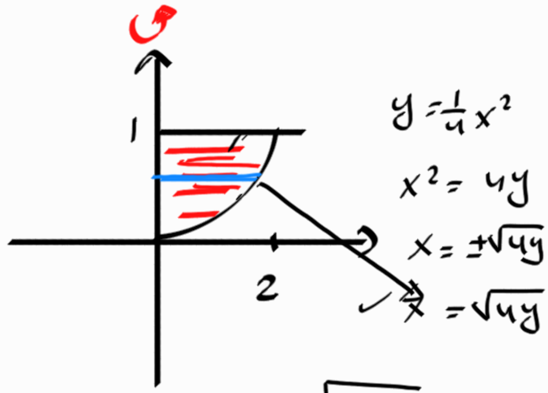
$$= \pi \int_1^4 4 - y \, dy$$

$$= \frac{9\pi}{2} \quad \boxed{A}$$

(15)



* بما أن محور الدوران هو نفسه محور التماثل للدالة فقط نأخذ نصف المنحنى.



الطريقة اقراص.

∴ الشريحة ⊥ محور الدوران ⇐ الشريحة dy

$r_o = \sqrt{4y}$

$r_i = 0$

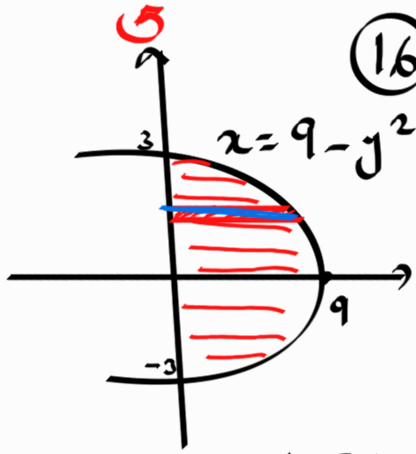
$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{4y}\right)^2 - 0 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 4y \, dy = 2\pi \quad \boxed{B}$$

---

(16)



$$v = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_{-3}^{3} (9 - y^2) \, dy$$

$$= \frac{1296\pi}{5} \quad \boxed{C}$$

اقراص.

∴ الشريحة ⊥ محور الدوران

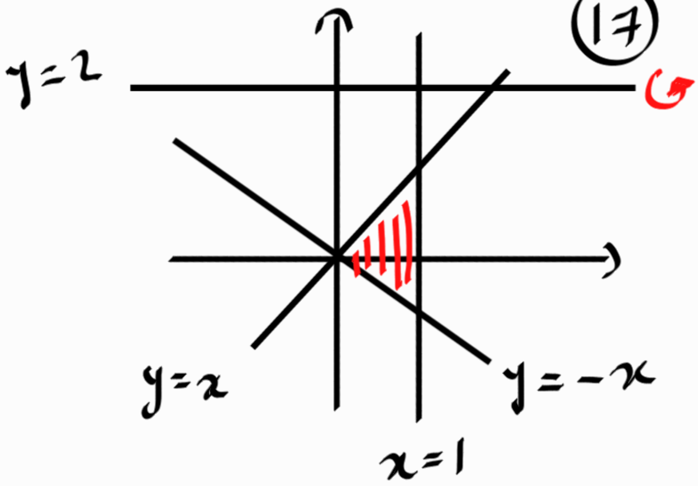
∴ الشريحة dy

$r_o = 9 - y^2 - 0$

$r_i = 0 - 0$

17

المتكامل dx من الخيارات
الشريحة ⊥ محور الدوران
" الشريحة dx



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

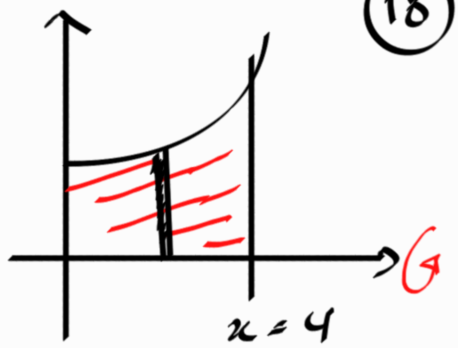
$$= \pi \int_0^1 (2+x)^2 - (2-x^2)^2 \, dx$$

$\boxed{D}$

$r_o = 2-(-x)$
$= 2+x$
$r_i = 2-x$

18

الشريحة ⊥ محور الدوران (x)
" الشريحة dx



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

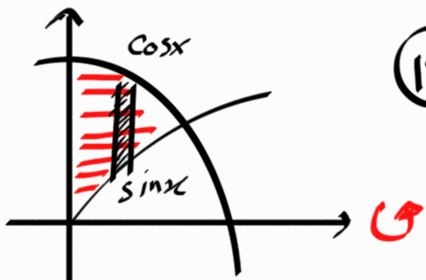
$$= \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^4 x^2+1 \, dx \quad \boxed{A}$$

$r_o = \sqrt{x^2+1}$
$r_i = 0$

19

الشريحة dx



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} \cos^2 x - \sin^2 x \, dx$$

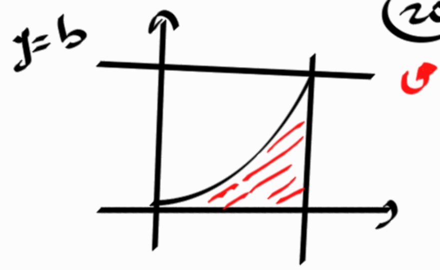
$$= \pi \int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx$$

$$= \pi/2 \quad \boxed{C}$$

نقاط التقاطع

$\sin x = \cos x$
$\tan x = 1$
$x = \pi/4$
$r_o = \cos x$
$r_i = \sin x$

20



حلقات

الشريحة ⊥ محور الدوران ← التكامل dx

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

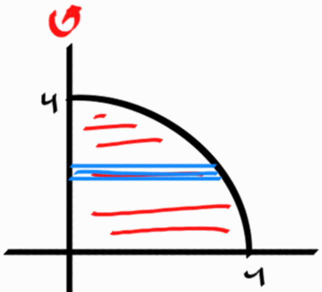
$$= \pi \int_0^a b^2 - [b - f(x)]^2 \, dx$$

$\boxed{A}$

$r_o = b - 0$

$r_i = b - f(x)$

21



الشريحة ⊥ محور الدوران

∴ الشريحة dy

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^4 \left(\sqrt{16 - y^2}\right)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 16 - y^2 \, dy = \frac{128}{3}\pi$$

$\boxed{A}$

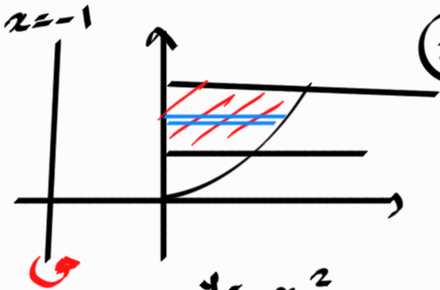
$y = \sqrt{16 - x^2}$

$y^2 = 16 - x^2$

$x^2 = 16 - y^2$

$x = \sqrt{16 - y^2}$

22



حلقات .

الشريحة ⊥ محور الدوران

∴ الشريحة dy .

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_1^4 (\sqrt{y} + 1)^2 - 1^2 \, dy$$

$\boxed{B}$

$y = x^2$

$x = \sqrt{y}$

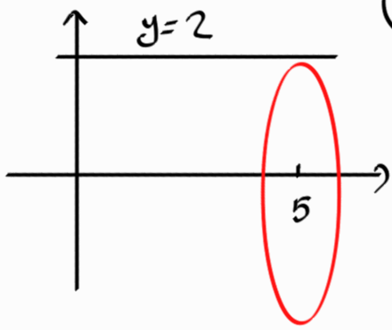
$r_o = \sqrt{y} - (-1)$

$= \sqrt{y} + 1$

$r_i = 0 - (-1)$

$= 1$

23

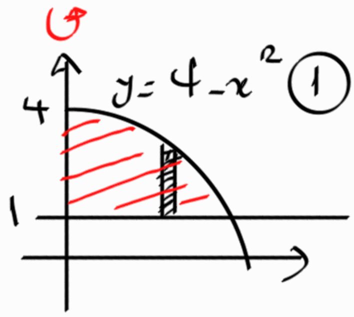


الشكل اسطوانة نصف قطرها 2

و ارتفاعها 5

الوحدة السادسة - الدرس الثالث

①



- يمكن حل السؤال بطريقتين
لكن الأسهل الأصداف

الشريحة dx // محور الدورات

∴ الطريقة أصداف

$r = x - 0 = x$

$h = 4 - x^2 - 1$

$= 3 - x^2$

الحدود :

$4 - x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{3}$

$$V = 2\pi \int r\,h\,dx$$

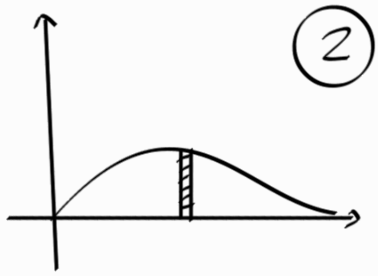
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x(3 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{9\pi}{2}$$

$\boxed{A}$

---

②



الشريحة dx // محور الدورات

∴ أصداف

$r = x$

$h = x(x-1)^2$

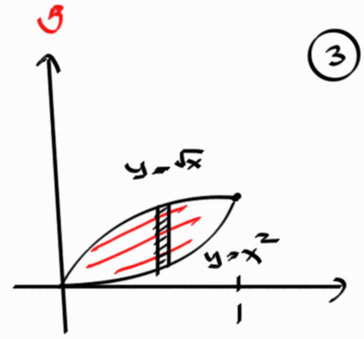
$$V = 2\pi \int r\,h\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x \cdot x(x-1)^2\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^2 (x-1)^2\,dx$$

$\boxed{C}$

(3)



الشريحة dx // محور الدوران ← اصداف

$$V = 2\pi \int r\,h\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x\left(\sqrt{x} - x^2\right) dx$$

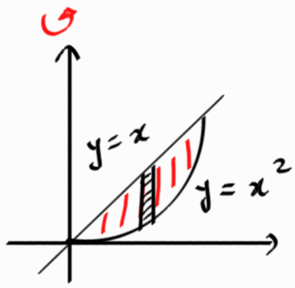
$$= \frac{3\pi}{10} \qquad \boxed{A}$$

$r = x - 0$

$h = \sqrt{x} - x^2$

---

(4)



$x = 0$ يعني محور y

لاحظ الخيارات كلها بدلالة dx

$$V = 2\pi \int r\,h\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x\left(x - x^2\right) dx$$

$\boxed{C}$

الشريحة dx // محور الدوران

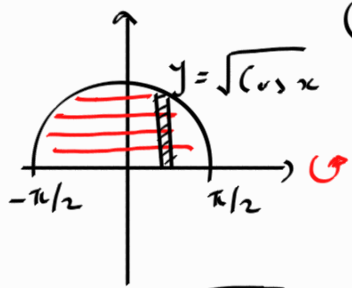
∴ الطريقة اصداف

$r = x - 0 = x$

$h = x - x^2$

---

(5)



الأفضل اقراص

الشريحة dx ⊥ محور الدوران ← اقراص

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sqrt{\cos x}\right)^2 - 0 \quad dx$$

$$= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$$

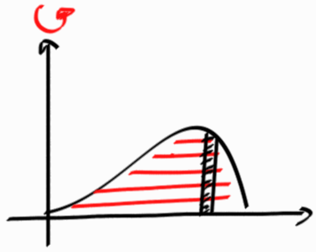
$$= 2\pi \qquad \boxed{B}$$

$r_o = \sqrt{\cos x} - 0$

$r_i = 0 - 0$

⑥

لا يمكن حل السؤال الا بالأصداف



الشريحة dx // محور الدوران ⇐ أصداف

$r = x - 0$

$h = \sin x^2 - 0$

$$V = 2\pi \int r\,h\,dx$$

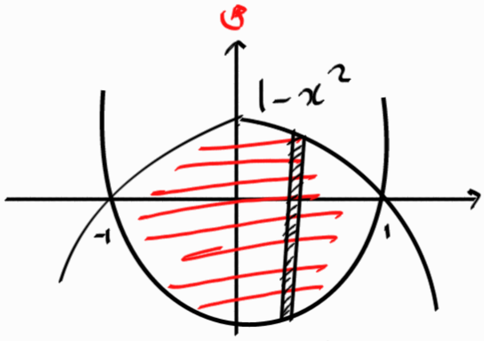
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx$$

التكامل بالتعويض

$$= 2\pi \qquad \boxed{B}$$

---

⑦



ارتفاع الشريحة

$$h = 1 - x^2 - (x^2 - 1)$$

$$= 1 - x^2 - x^2 + 1$$

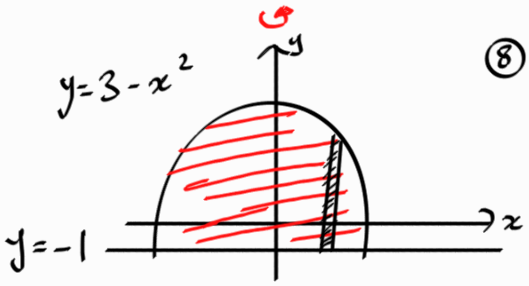
$$= 2 - 2x^2 \qquad \boxed{B}$$

ونصف القطر $r = x$

والحجم يكون $2\pi \int_0^1 x(2 - 2x^2)\,dx$

---

⑧



لما ان الشكل متماثل حول محور الدوران

نأخذ فقط نصف الشكل

نقاط التقاطع

$3 - x^2 = -1$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$r = x$

$h = 3 - x^2 - (-1)$

$= 4 - x^2$

الشريحة // محور الدوران ⇐ أصداف

$$V = 2\pi \int r\,h\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 x(4 - x^2)\,dx$$

خطأ تكون $\longleftarrow$

-2

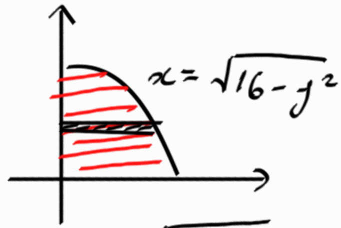
$$= 8\pi \qquad \boxed{B}$$

9

الشريحة // محور الدوران ← اصداف

$$v = 2\pi \int_0^4 x\sqrt{16 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{128}{3}\pi \qquad \boxed{A}$$



$r_o = \sqrt{16-y^2}$

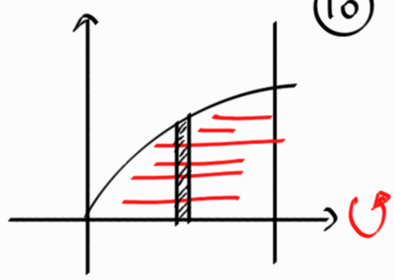
$r_i = 0$

الأفضل الشريحة dy ← أقراص

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{16-y^2}\right)^2 dy$$

$$= \frac{128}{3}\pi$$

10



الشريحة dx ⊥ محور الدوران

∴ أقراص

$r_o = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}\right)^2 dx$$

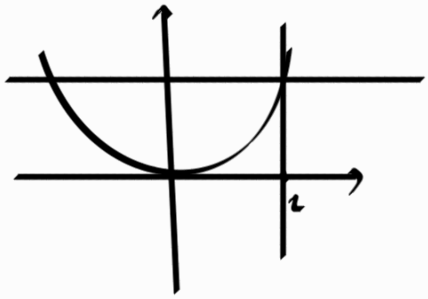
$$= \pi \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx$$

$$= \pi \ln|x^2+1| \Big]_0^1 = \pi \ln 2$$

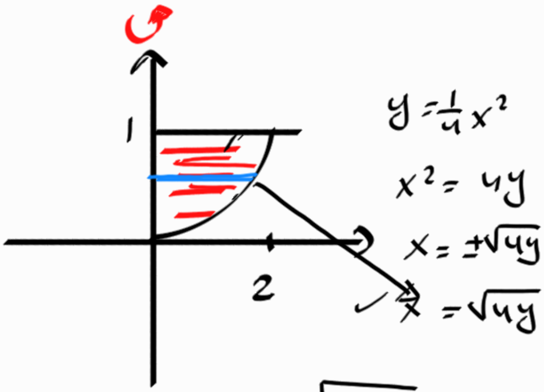
$\boxed{B}$

---

(11)



بما أن محور الدوران هو نفسه محور التماثل للدالة فقط نأخذ نصف المنحنى.



محور الدوران y

الشريحة ⊥ محور الدوران

∴ الشريحة dy

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{4y}\right)^2 - 0 \, dy$$

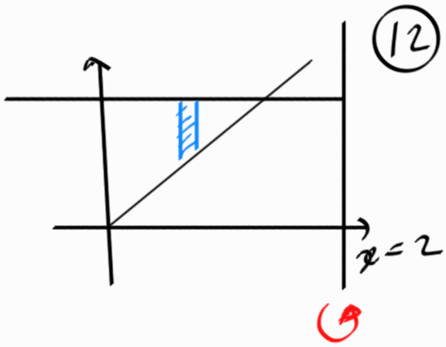
$$= \pi \int_0^1 4y \, dy = 2\pi \quad \boxed{B}$$

$r_o = \sqrt{4y}$

$r_i = 0$

---

(12)



لاحظ الخيارات كلها بدلالة dx

$$V = 2\pi \int r h \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (2-x)(1-x) \, dx$$

$\boxed{D}$

الشريحة dx // محور الدوران

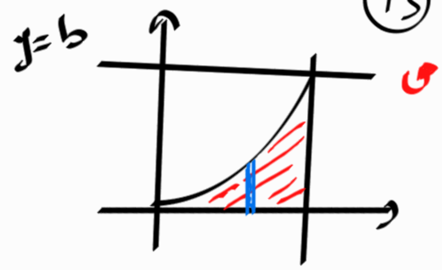
∴ الطريقة الأسطوانية

$r = 2 - x$

$h = 1 - x$

13

حلقات



الشريحة ⊥ محور الدوران ← التكامل dx

$v_o = b - 0$

$v_i = b - f(x)$

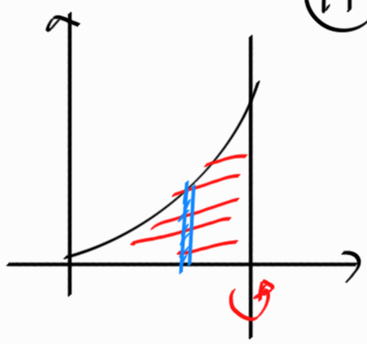
$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^a b^2 - [b - f(x)]^2 \, dx \qquad \boxed{A}$$

14

يمكن ان يكون الحل بالاقراص او الاطواق

نبدأ بالتكامل dx



الشريحة // محور الدوران ← اطواق

$$V = 2\pi \int r h \, dx$$

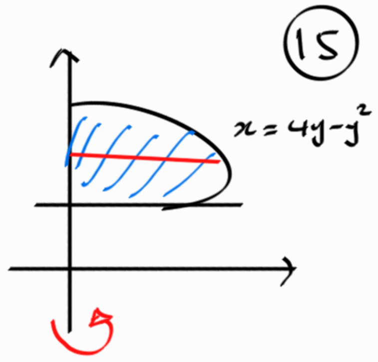
$$= 2\pi \int_0^a (a - x) f(x) \, dx$$

$r = a - x$

$h = f(x)$

15

خطأ التفكير بالتكامل dx



الشريحة dy ⊥ محور الدوران

← اقراص

$r_o = 4y - y^2$

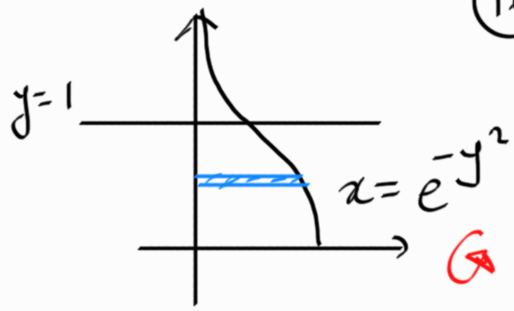
$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_1^4 (4y - y^2)^2 \, dy$$

$$= \frac{153}{5} \pi \qquad \boxed{B}$$

16



الشريحة dy // محور الدوران

∴ اصداف

$$V = 2\pi \int r\,h \; dy$$

$r = y - 0$

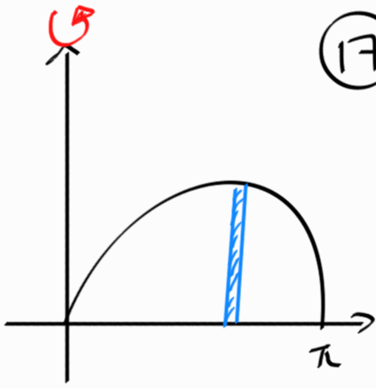
$h = e^{-y^2} - 0$

$$= 2\pi \int_0^1 y\,e^{-y^2}\,dy$$

$$= -\pi\, e^{-y^2}\Big]_0^1 = \pi\left(1 - 1/e\right)$$

$\boxed{A}$

17



التكامل dx من الخيارات

∴ اصداف

$$V = 2\pi \int r\,h \; dx$$

$r = x$

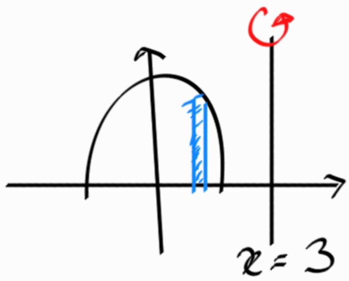
$h = 3\sin x$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot 3\sin x$$

$$= 6\pi \int_0^{\pi} x \sin x$$

$\boxed{A}$

18



$$V = 2\pi \int r\,h \; dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} (3-x)(4-x^2)\; dx$$

$$= 64\pi$$

$\boxed{D}$

الشريحة dx // محور الدوران

∴ الطريقة اصداف

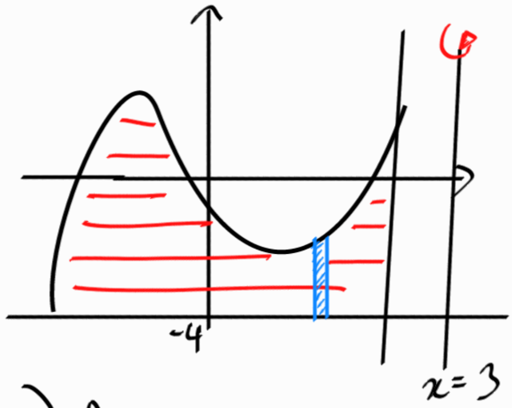
$r = 3 - x$

$h = 4 - x^2 - 0$

(19)

الشريحة dx // محور الدوران

∴ الطريقة المجوف



$$V = 2\pi \int r\, h\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} (3-x)(x^3 - 3x + 3)\, dx$$

$$= \frac{392}{5}\pi \qquad \boxed{A}$$

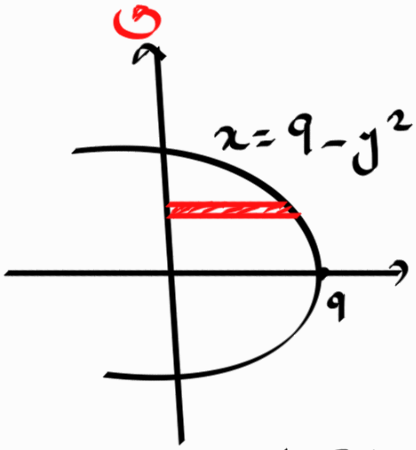
$r = 3 - x$

$h = x^3 - 3x - 1 - (-4)$

$= x^3 - 3x + 3$

---

(20)



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \; dy$$

$$= \pi \int_{-3}^{3} (9 - y^2)\, dy$$

$$= \frac{1296}{5}\pi \qquad \boxed{C}$$

افتراض:

∴ الشريحة ⊥ محور الدوران

∴ الشريحة dy

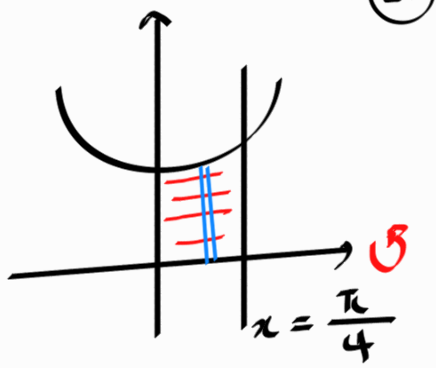
$r_o = 9 - y^2 - 0$

$r_i = 0 - 0$

(21)

الشريحة dx $\perp$ محور الدوران

∴ الطريقة اقراص



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x^2 \, dx$$

$$= \pi \left[\tan x\right]_0^{\pi/4} = \pi \quad \boxed{A}$$

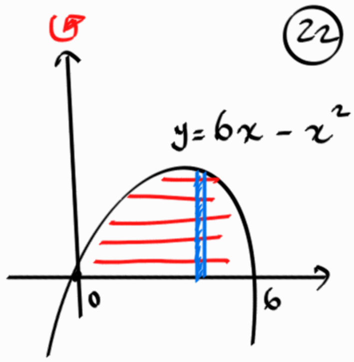
$r_o = \sec x - 0$

$r_i = 0 - 0$

---

(22)

الشريحة dx $//$ محور الدوران ← اسطوانات



$$V = 2\pi \int r h \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^6 x\,(6x - x^2)\, dx$$

$\boxed{A}$

$r = x - 0$

$h = 6x - x^2 - 0$

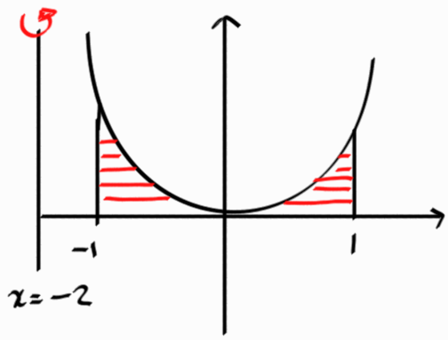
---

(23)

الخيارات بدلالة dx

الشريحة dx $//$ محور الدوران

∴ الطريقة اسطوانات



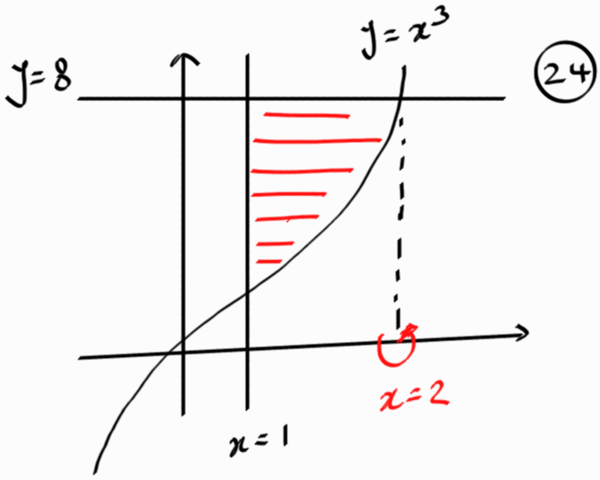
$r = x - (-2) = x + 2$

$h = x^2$

$$V = 2\pi \int r h \, dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} (x+2)\, x^2 \, dx$$

$\boxed{B}$



الشريحة // dx // محور الدوران

∴ اسطوانات

$r = 2 - x$

$h = 8 - x^3$

في هذا السؤال الخيارات

بدلالة dx ، dy

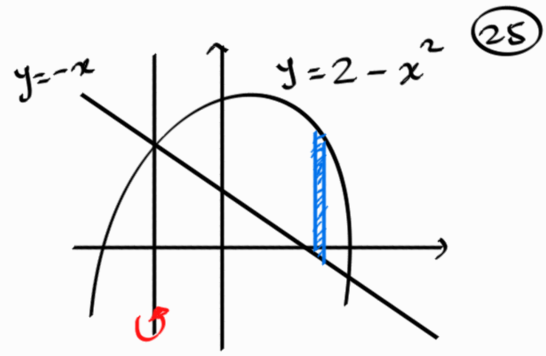
لذلك ابدأ بالطريقة الأسهل

$$V = 2\pi \int_1^2 (2-x)(8-x^3)\, dx$$

نبحث عن هذا الجواب

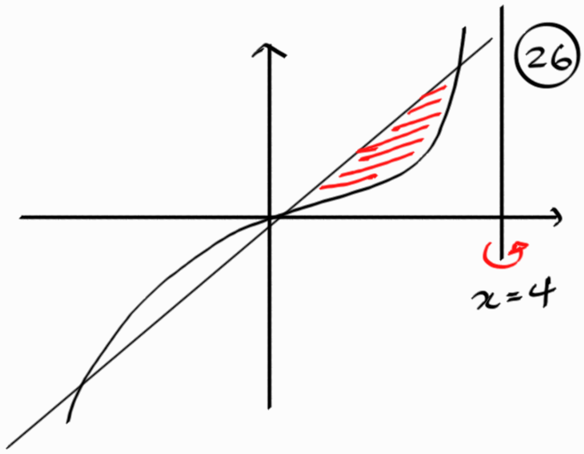
∴ موجود $\boxed{C}$

لو لم يكن موجود نختار الطريقة الثانية



$$r = x - (-1)$$
$$= x + 1$$

$\boxed{D}$



الشريحة // dx // محور الدوران

∴ اسطوانات

$r = 4 - x$

$h = x - x^3$

بما ان الخيارات بدلالة dx ، dy

نبحث عن الطريقة الافضل

$$V = 2\pi \int r\, h\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (4-x)(x-x^3)\, dx$$

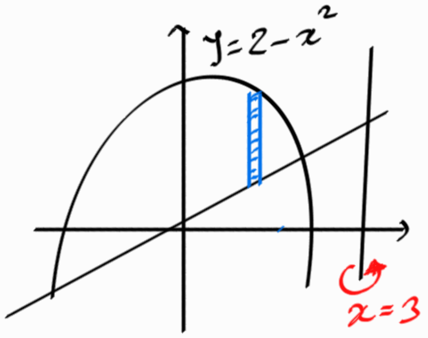
موجود

$\boxed{C}$

(27)

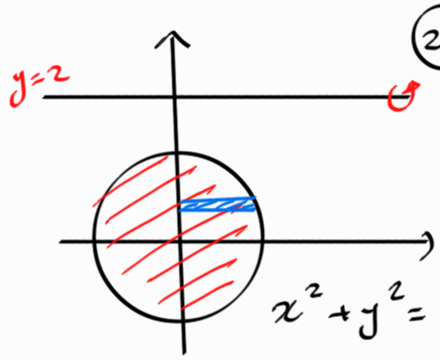
$$h = 2 - x^2 - x$$
$$= 2 - x - x^2$$

$\boxed{A}$



---

(28)



$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^2 = 1 - y^2$$
$$x = \pm\sqrt{1-y^2}$$

$$r = 2 - y$$
$$h = \sqrt{1-y^2} - \left(-\sqrt{1-y^2}\right)$$
$$= 2\sqrt{1-y^2}$$

المكا ل dy من الخيارات

الشريحة // محور الدوران

∴ الصداف

$$V = 2\pi \int r\, h \; dy$$
$$= 2\pi \int_{-1}^{1} (2-y) \cdot 2\sqrt{1-y^2} \; dy$$
$$= 4\pi \int_{-1}^{1} (2-y)\sqrt{1-y^2} \; dy$$

$\boxed{C}$

---

(29)

$$V = 2\pi \int_0^2 (4-y)(y+4) \; dy$$

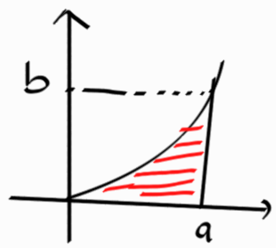
الطريقة الصداف و الشريحة dy

∴ محور الدوران // الشريحة

$$r = 4 - y$$

∴ محور الدوران $y=4$ $\boxed{A}$

(30)



$$V = \pi \int_0^b a^2 - \left[g(y)\right]^2 \, dy$$

التكامل dy و الطريقة حلقات

الشريحة $\perp$ dy محور الدوران.

∴ محور الدوران هو محور y او مستقيم يوازيه

يكون $\boxed{x=0}$ او $x=a$

$\boxed{A}$

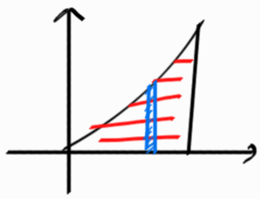
هذا مستحيل

$r_o = 0$

$r_i = a - g(y)$

---

(31)



التكامل dx و الطريقة حلقات

∴ محور الدوران هو محور x او محور يوازيه

$y=0$ او $y=b$

هذا مستحيل لانه

$r_o = f(x) - 0$

$r_i = 0$

هذا محور الدوران

$\boxed{D}$

---

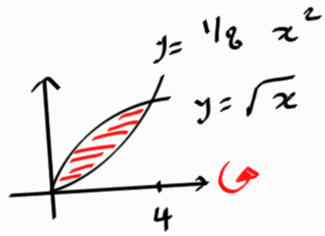
(32)

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 - \left(\frac{1}{8}x^2\right)^2 \, dx$$

هذا التكامل بطريقة الحلقات و التكامل dx فان محور الدوران هو محور x

$r_o = \sqrt{x}$, $r_i = \frac{1}{8}x^2$

فيكون



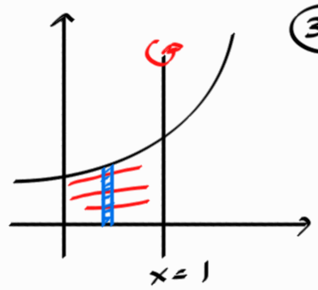
$V = 2\pi \int r\, h \, dy$

$= 2\pi \int_0^2 y\left(\sqrt{8}\, y - y^2\right) dy$ $\boxed{A}$

$y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2$

$y = \frac{1}{8}x^2 \rightarrow x = \sqrt{8}\, y$

33



المكامل dx من الخيارات

الشريحة // محور الدوران

∴ اصداف

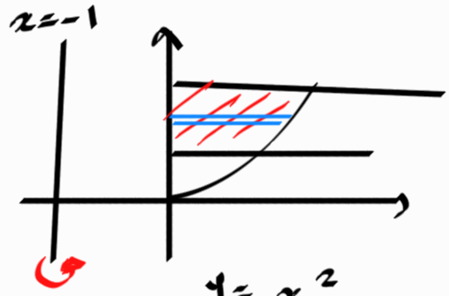
$$V = 2\pi \int r\, h \; dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (1-x)\, e^{2x} \, dx \qquad \boxed{C}$$

$r = 1 - x$

$h = e^{2x}$

34



حلقات .

الشريحة ⊥ محور الدوران

∴ الشريحة dy .

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dy$$

$$= \pi \int_1^4 (\sqrt{y} + 1)^2 - 1^2 \, dy$$

$\boxed{B}$

$y = x^2$

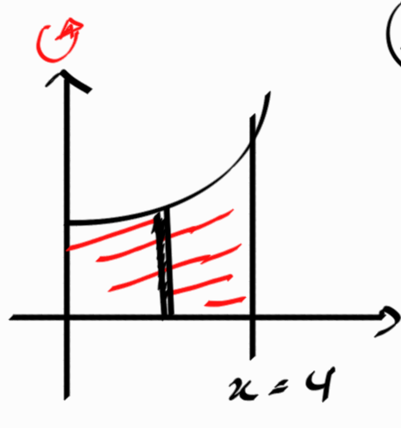
$x = \sqrt{y}$

$r_o = \sqrt{y} - (-1)$

$= \sqrt{y} + 1$

$r_i = 0 - (-1) = 1$

35



المكامل dx من الخيارات

الشريحة // محور الدوران

∴ اصداف

$$V = 2\pi \int r\, h \; dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 x \sqrt{x^2+1} \; dx$$

$\boxed{A}$

$r = x$

$h = \sqrt{x^2+1}$

الوحدة السادسة - الدرس الرابع

①

$$S = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \sec^4 x}\, dx$$

$\boxed{B}$

$f(x) = \tan x$

$f'(x) = \sec^2 x$

$[f'(x)]^2 = \sec^4 x$

---

②

$$S = \int_1^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{1 + x - 1}\, dx$$

$$= \int_1^3 \sqrt{x}\, dx = 2.8 \quad \boxed{B}$$

$f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$

$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(x-1)^{1/2}$

$= \sqrt{x-1}$

$(f'(x))^2 = x - 1$

3

$$S = \int_2^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$[f'(x)]^2 = x^2 - 2x$$

$$= \int_2^4 \sqrt{1 + x^2 - 2x}\, dx$$

$$= \int_2^4 \sqrt{x^2 - 2x + 1}\, dx$$

$$= \int_2^4 \sqrt{(x-1)^2}\, dx$$

$$= \int_2^4 |x-1|\, dx$$

اطلق لهم

$1-x$	$x-1$
	1

$$= \int_2^4 (x-1)\, dx = 4$$

$\boxed{B}$

لو كانت الفترة من $[0,4]$

يصبح

$$\int_0^4 |x-1|\, dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)\, dx + \int_1^4 (x-1)\, dx$$

4

$$f(x) = \int_3^x \sqrt{4t^2 - 1}\, dt$$

$$f'(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$$

$$[f'(x)]^2 = 4x^2 - 1$$

$$S = \int_3^5 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$= \int_3^5 \sqrt{1 + 4x^2 - 1}\, dx$$

$$= \int_3^5 \sqrt{4x^2}\, dx$$

$$= \int_3^5 |2x|\, dx$$

$$-2x \quad | \quad 2x$$
$$0$$

$$= \int_3^5 2x\, dx = 16 \quad \boxed{C}$$

5

$$y = \ln \sec x$$

$$y' = \frac{\sec x \tan x}{\sec x}$$

$$= \tan x$$

$$(y')^2 = \tan^2 x$$

$$S = \int_0^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$= \int_0^b \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^b \sqrt{\sec^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^b |\sec x|\, dx \quad \boxed{A}$$

ملاحظة:

اذا لم يكن في احد الخيارات المطلق ، ضع الجواب بدون مطلق و لكن الصح وجود المطلق

⑥

$$y = \int_0^x e^{-u} \sin u \, du$$

$$y' = e^{-x} \sin x .$$

$$(y')^2 = (e^{-x} \sin x)^2$$

$$= e^{-2x} \sin^2 x$$

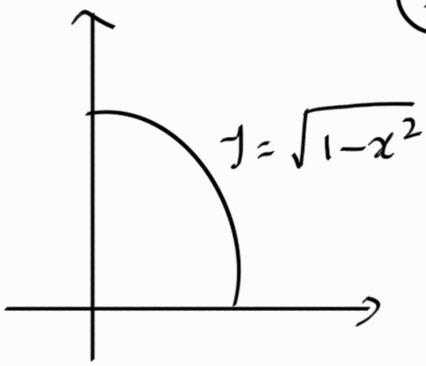
$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + e^{-2x} \sin^2 x} \, dx$$

$\boxed{B}$

(7)

ممكن حل السؤال مباشرة
على ان الطول هو ربع محيط دائرة
نصف قطرها $r = 1$
فيكون



$$S = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2\pi(1) = \frac{\pi}{2} \qquad \boxed{A}$$

او

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\, dx$$

$$= \lim_{t \to 1} \int_0^t \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\, dx$$

يسمى هذا التكامل
معتل وهو غير مطلوب
لان احد حدود التكامل
هي عند العقام

$$= \lim_{t \to 1} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{t \to 1} \sin^{-1} x \Big]_0^t = \sin^{-1} 1$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

(8)

$$y = 10\left(e^{x/20} + e^{-x/20}\right)$$

يمكن استخدام القانون حيث $L = 20$

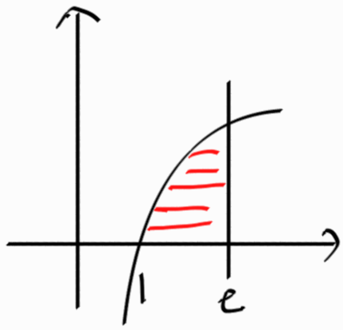
$$S = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} e^{x/L} + e^{-x/L}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-20}^{20} e^{x/20} + e^{-x/20}\,dx$$

$\boxed{B}$

---

(9)



$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$[f'(x)] = \frac{1}{x^2}$

$$S = 2\pi\int_1^e f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_1^e \ln x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_1^e \ln x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_1^e \frac{\ln x}{|x|}\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\pi\int_1^e \frac{\ln x}{x}\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$\boxed{C}$

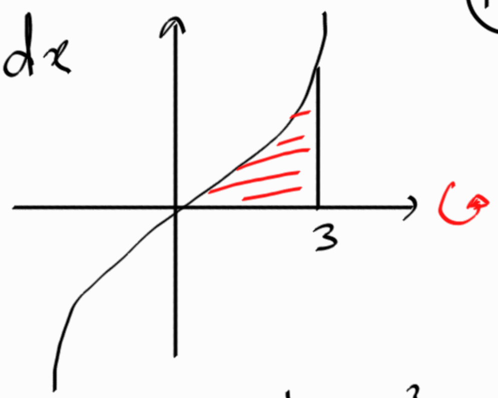
(10)

$$S = 2\pi \int_0^3 f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 \frac{1}{9}x^3 \sqrt{1+\frac{1}{9}x^4}\,dx$$

$$= \frac{2\pi}{9}\int_0^3 x^3\sqrt{1+\frac{1}{9}x^4}\,dx$$

$\boxed{D}$



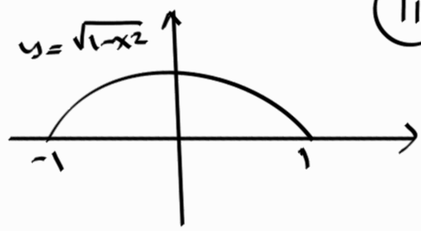
$$f(x) = \frac{1}{9}x^3$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2$$

$$\left[f'(x)\right]^2 = \frac{1}{9}x^4$$

---

(11)



مساحة السطح هي المساحة السطحية للكرة التي نصف قطرها 1 فتكون

$$S = 4\pi r^2$$

$$= 4\pi$$

$\boxed{D}$

او الحل بالتكامل

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$(y')^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$S = 2\pi\int_{-1}^{1} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1} 1\,dx$$

$$= 4\pi$$

$\boxed{D}$

(12)

$$S = \int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$(f'(x))^2 = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)}\, dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{4 + x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}}{4}}$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \left|x + \frac{1}{x}\right| dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x + \frac{1}{x}\, dx \quad \boxed{A}$$

$$S = \int_1^4 \sqrt{1 + 9x^2}\, dx$$

(13)

$$[f'(x)]^2 = 9x^4$$

$$f'(x) = 3x^2 \quad , \quad f'(x) = -3x^2$$

$$f(x) = x^3 + c \quad , \quad f(x) = -x^3 + c$$

$$f(1) = 6 \rightarrow c = 5 \quad , \quad f(1) = 6 \rightarrow c = 7$$

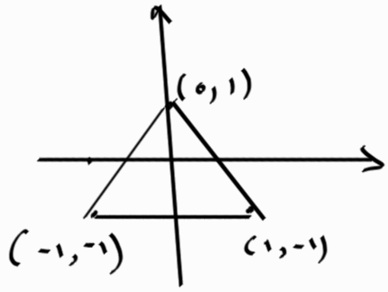
$$f(x) = x^3 + 5 \quad , \quad f(x) = x^3 + 7$$

$\boxed{B}$

$f(x) = x^3 + 5$ احد الحلول

عليك حل السؤال بالنظر الى الخيارات وهو الافضل

الشكل الناتج مخروط .



يكفي تدوير الجزء الايمن فقط .

نجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين

$(0,1)$ ، $(1,-1)$

$m = -2$

$y - 1 = -2x$

$x = \frac{y-1}{-2}$

$= \frac{1}{2}(1-y)$.

$g(y) = \frac{1}{2}(1-y)$

$g'(y) = \frac{-1}{2}$

$(g'(y))^2 = \frac{1}{4}$.

المساحة الجانبية

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1-y) \sqrt{1 + \frac{1}{4}}\, dy$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1-y) \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}\, dy$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\pi \int_{-1}^{1} 1-y\, dy$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\pi \cdot 2$$

$$= \sqrt{5}\pi$$

المساحة الكلية للمجسم هي

المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$\pi(1)^2 + \sqrt{5}\pi$$

$$= \sqrt{5}\pi + \pi \qquad \boxed{B}$$

الوحدة السادسة - الدرس الخامس

①

$y_0 = 6 \quad , \quad v_0 = 1.2$

$y(0) = 6 \quad , \quad y'(0) = -1.2$

$\boxed{A}$ سالب لان الجسم متجه للاسفل

---

②

$v_0 = 19.6$

$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0$

$= -\frac{1}{2}(9.8) t^2 + 19.6 t + 0$

$= -4.9 t^2 + 19.6 t$

$y(t) = 0 \rightarrow -4.9t^2 + 19.6 t = 0$

$t = 4 \text{ s} \quad \boxed{B}$

---

③

$y_0 = 44.1 \quad , \quad v_0 = 0$ قطعة

$y(t) = -4.9t^2 + 0t + 44.1$

$= -4.9t^2 + 44.1$

$y'(t) = -9.8t$

$y(t) = 0 \longrightarrow t = 3$

$y'(3) = -9.8(3) = -29.4 \quad \boxed{B}$

$y''(t) = -32$, $y'(t) = -48$, $y(0) = 160$ ④

ع السالب

$y(t) = -16t^2 - 48t + 160$

زمن الرحلة

$y(t) = 0$

$-16t^2 - 48t + 160 = 0$

$t = 2$, $t = -5$

مرفوض

$y'(t) = -32t - 48$

$y'(2) = -32(2) - 48 = -112$ ft/s $\boxed{A}$

$v_0 = 98$ m/s $\qquad \theta = \pi/6$ ⑤

$h(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta \, t + y_0$

$= -\frac{1}{2}(9.8) t^2 + 98 \sin\frac{\pi}{6} t + 0$

$= -4.9t^2 + 49t$

$\boxed{D}$

$$v_0 = 98 \text{ m/s} \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$ ⑥

$$x''(t) = 0$$

$$x(t) = v_0 \cos\theta \, t + x_0$$

$$= 98 \cos\frac{\pi}{6} \, t + 0$$

$$x(t) = 49\sqrt{3} \, t \qquad \boxed{A}$$

$$v_0 = 98 \quad , \quad \theta = \pi/6$$ ⑦

$$y(t) = -4.9t^2 + 98 \sin\frac{\pi}{6} \, t + y_0$$

$$= -4.9t^2 + 49t$$

$$y(t) = 0 \longrightarrow t = 0 \, , \quad t = 10$$

$$x(t) = 49\sqrt{3} \, t \quad \left(v_0 \cos\theta + x_0 \right)$$

$$x(t) = 49\sqrt{3}\,(10) = 848.7 \qquad \boxed{C}$$

$v_0 = 40\ m/s \quad , \quad \theta = 30^\circ$ (8)

$$y(t) = -4.9t^2 + 40 \sin 30^\circ\, t + 0$$
$$= -4.9t^2 + 20t$$

$$y(t) = 0$$
$$-4.9t^2 + 20t = 0 \longrightarrow t = 4.08$$

$$X(t) = 40 \cos 30^\circ\, t + 0 = 20\sqrt{3}\, t$$

$$X(4.08) = 20\sqrt{3}\,(4.08) = 141.4\ m \quad \boxed{B}$$

---

(9)

$g = 9.8 \quad , \quad v_0 = 115 \quad , \quad y_0 = 1050 \quad , \boxed{\theta = 0}$

$$y(t) = -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta\, t + y_0$$
$$= -4.9t^2 + 115 \sin 0\, t + 1050$$
$$= -4.9t^2 + 1050$$

زمن التحليق

$$y(t) = 0$$
$$-4.9t^2 + 1050 = 0$$
$$\Longrightarrow t = 14.63$$

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t + x_0$$
$$= 115 \cos 0\, t + 0$$
$$= 115\, t.$$

$$x(14.63) = 115(14.63) = 1682\ m.$$

$v_0 = 4\ ft/s \quad , \quad \theta = 45^\circ$ 10

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t + x_0$$
$$= 4 \cos\frac{\pi}{4}\, t + 0$$
$$= 2\sqrt{2}\, t \longrightarrow t = \frac{x}{2\sqrt{2}} \quad \text{--- } (1)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta\, t + y_0$$
$$= -16 t^2 + 4 \sin\frac{\pi}{4}\, t + 0$$
$$= -16 t^2 + 2\sqrt{2}\, t \quad \text{--- } (2)$$

عوض 1 في 2

$$y(t) = -16 \left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 2\sqrt{2}\,\frac{x}{2\sqrt{2}} = -2x^2 + x$$

$\boxed{A}$

$y''(t) = -32 \quad , \quad y'(0) = 0 \quad , \quad y(0) = H$ 11

$$y(t) = -16 t^2 + H$$
$$y(0) = 0$$
$$-16 t^2 + H = 0$$
$$t^2 = \frac{H}{16} \rightarrow t = \sqrt{\frac{H}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{H}$$

$\boxed{D}$