تم تحميل الملف
من موقع بداية

بداية
beadaya.com | موقع بداية التعليمي

للمزيد اكتب
في جوجل
Google



موقع بداية التعليمي كل ما يحتاجه **الطالب والمعلم**
من ملفات تعليمية، حلول الكتب، توزيع المنهج،
بوربوينت، اختبارات، ملخصات، اختبارات إلكترونية،
أوراق عمل، والكثير...

حمل التطبيق

GET IN ON Google Play

Download on the App Store

المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات 3

التعليم الثانوي - نظام المسارات

السنة الثالثة

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

يوزع مجاناً ولا يباع

الفصل 6

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة
Polar Coordinates and Complex Numbers



فيما سبق:

درست القطوع المخروطية ومعادلاتها وتمثيلها بيانيًا.

والآن:

- أمثّل الإحداثيات القطبية بيانيًا.
- أحوّل بين الإحداثيات والمعادلات الديكارتية والقطبية.
- أكتب الأعداد المركبة على الصورة القطبية والصورة الديكارتية وأحول بينهما.

لماذا؟

تصاميم هندسية: يمكن استعمال المعادلات القطبية في عمل تصاميم هندسية فمثلًا لوحة سهام تظهر عليها المواقع بوصفها أعدادًا مركبة على الصورتين القطبية والديكارتية. كما يمكن استعمالها لنمذجة أنماط الصوت التي تساعد على تحديد وضعية تجهيزات المسرح، مثل: السماعات ومكبرات الصوت، وتحديد قوة الصوت ومستوى التسجيل.

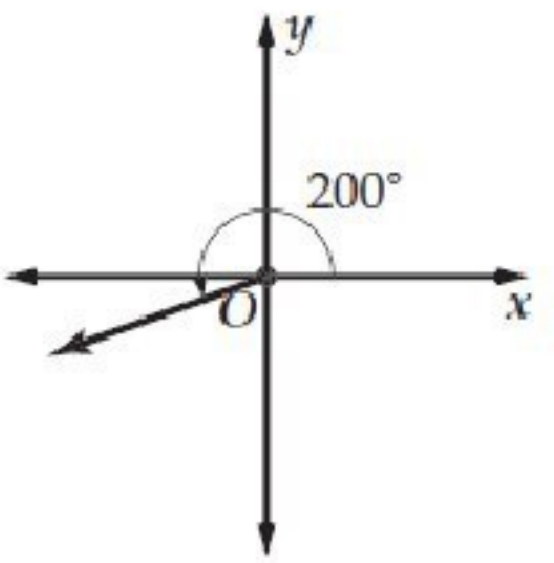
قراءة سابقة: اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل؛ لتساعدك على التنبؤ بالأفكار التي ستتعلمها في هذا الفصل.

التهيئة

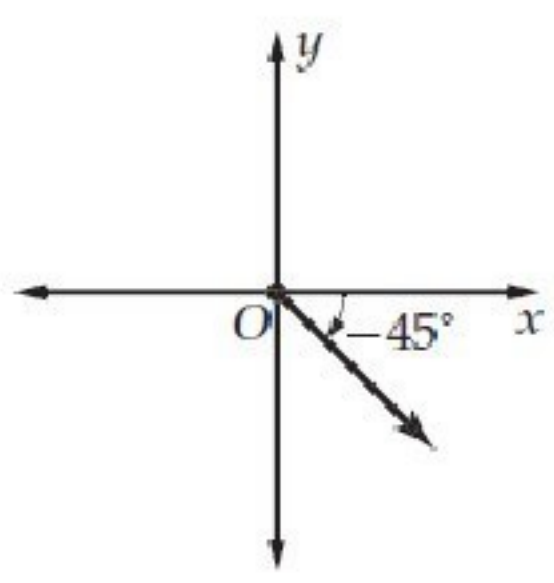
اختبار سريع:

ارسم كلا من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي:

(1

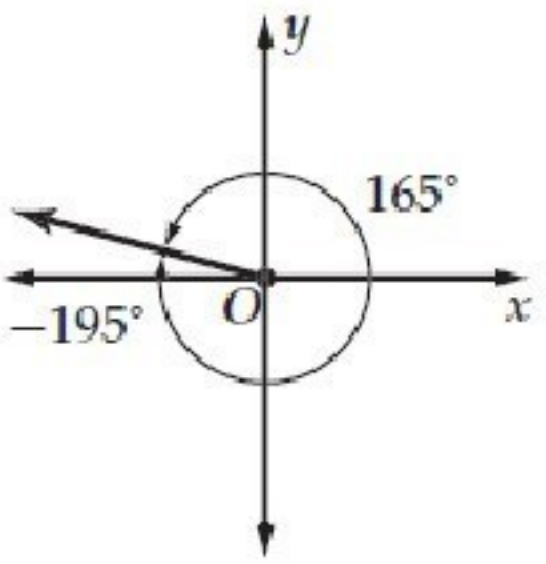


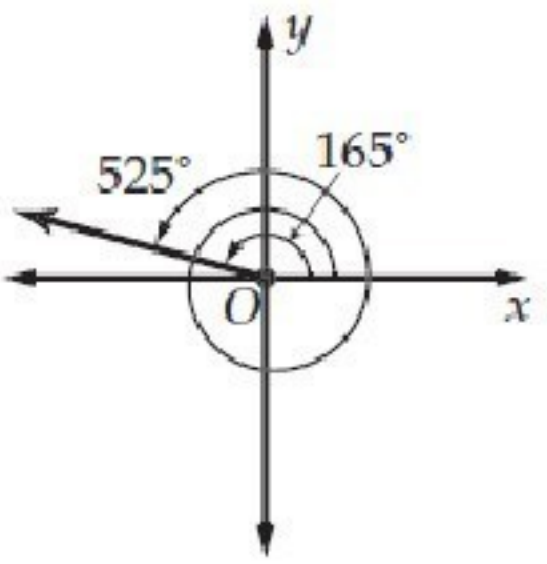
(2



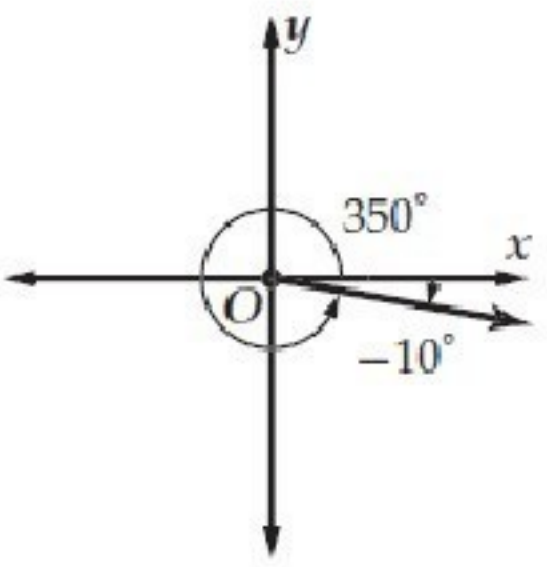
أوجد زاوية بقياس موجب وأخرى بقياس سالب مشتركتين في ضلع الانتهاء مع كل من الزوايا الآتية ومثلها في الوضع القياسي:

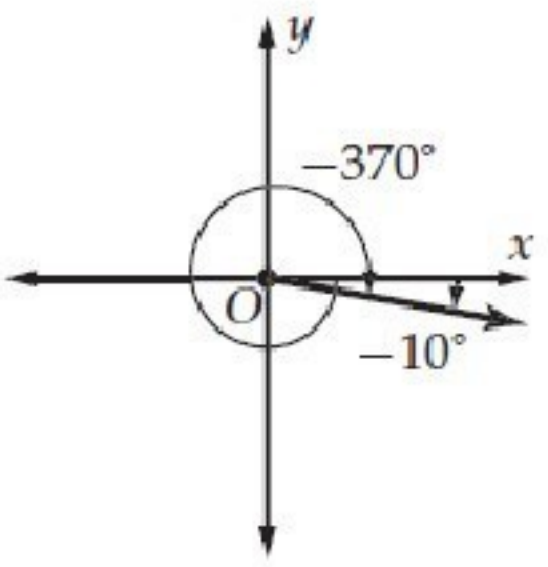
3) $525^\circ, -195^\circ$



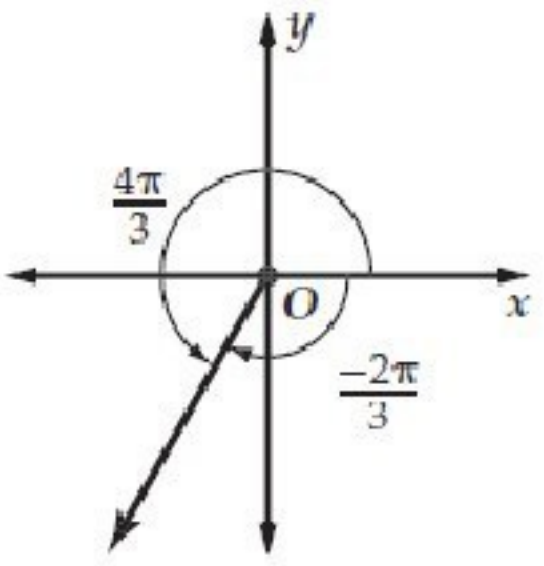


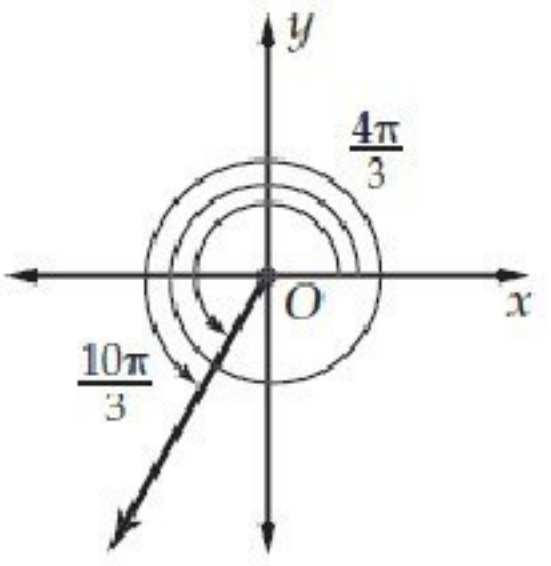
4) $350^\circ, -370^\circ$



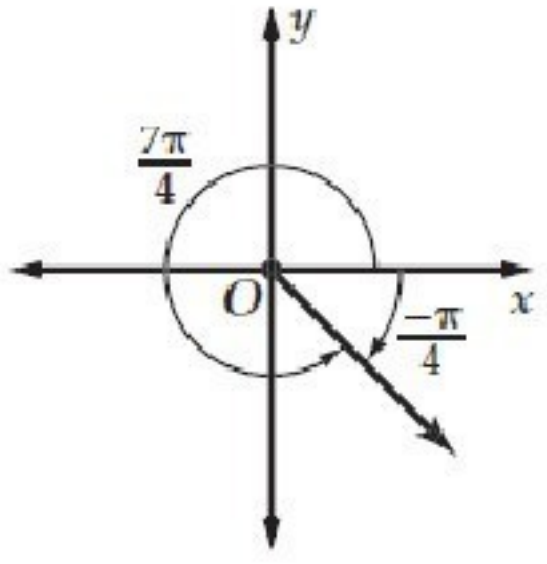


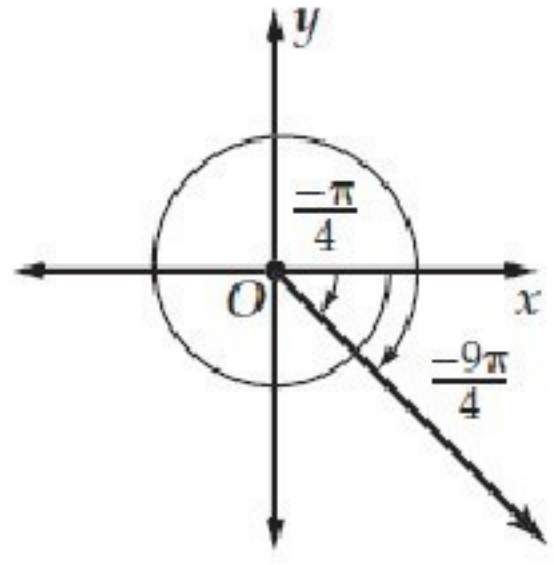
5) $\frac{10\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$





$\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{9\pi}{4}$ (6





حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات في كل مما يأتي:

7) $-\frac{\pi}{3}$

8) 270°

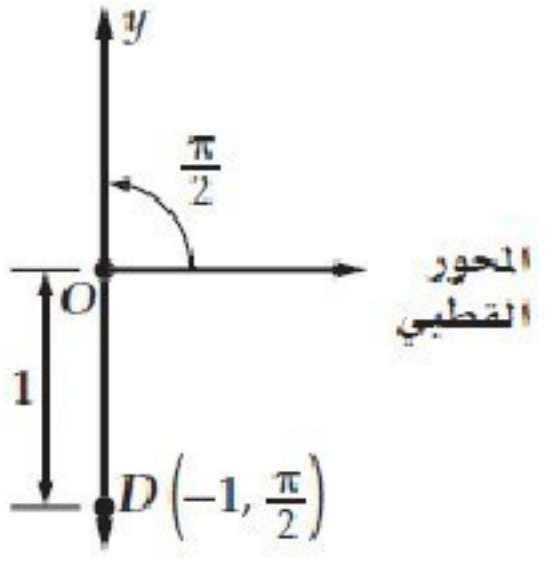
9) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

10) 3.6 m تقريباً

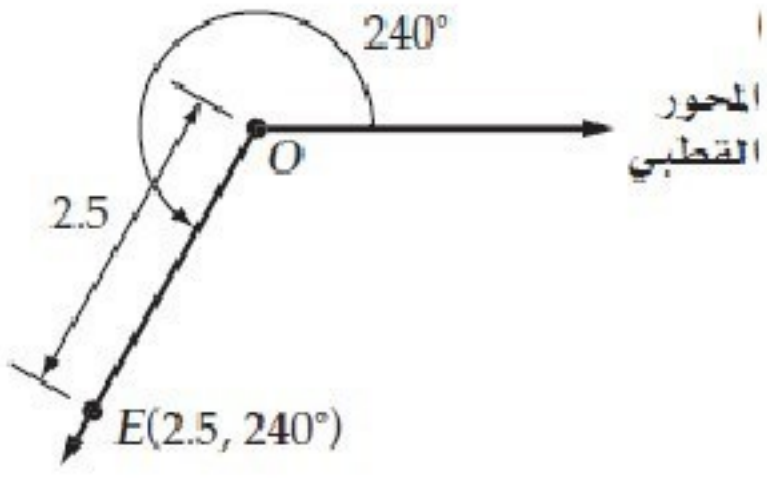
2-1 الإحداثيات القطبية

تحقق

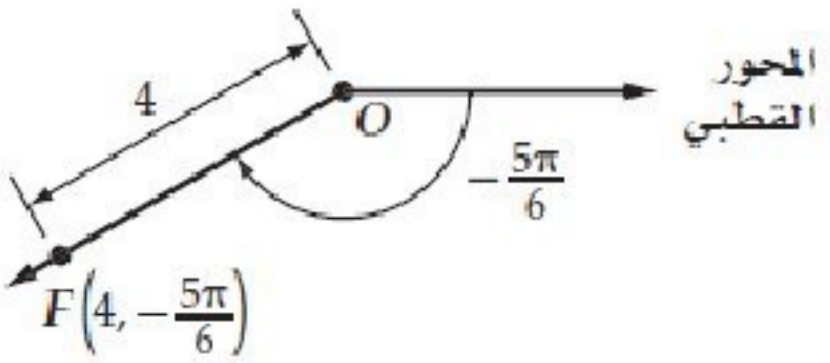
(1A



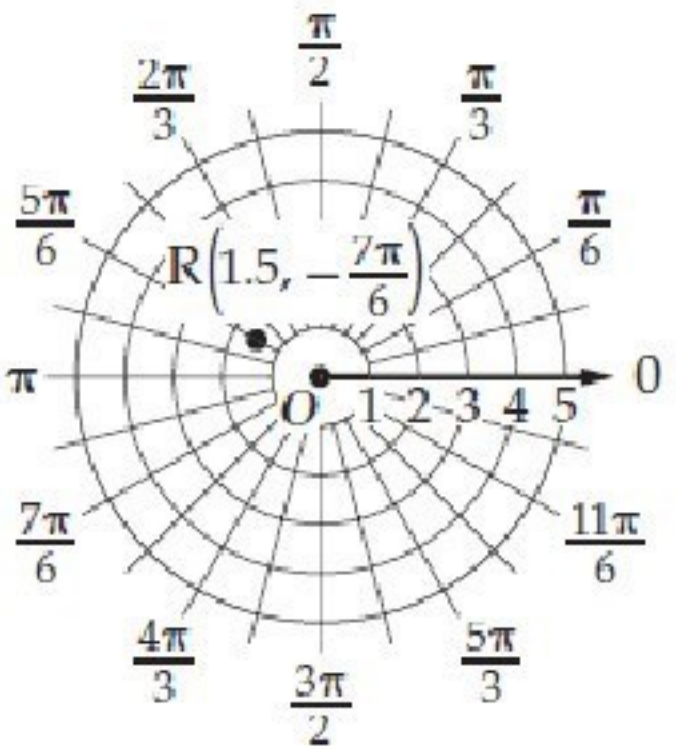
(1B



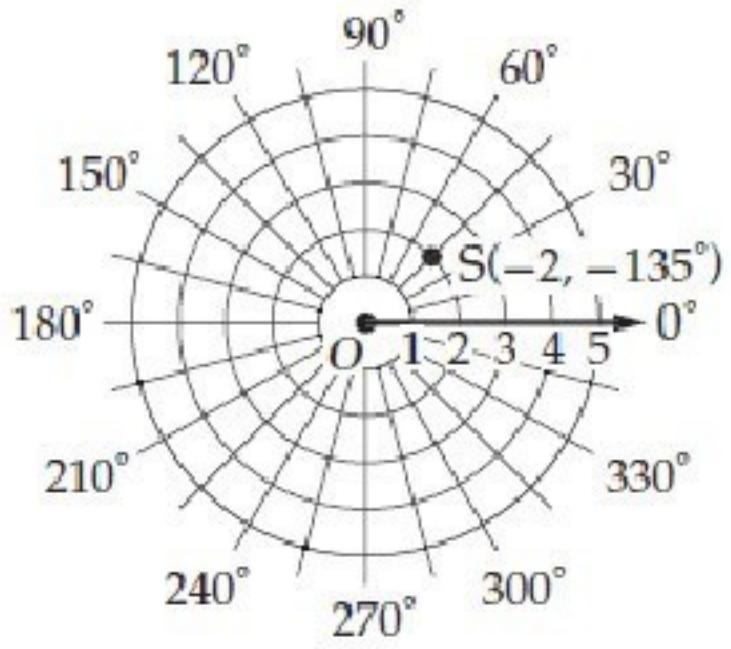
(1C



(2A



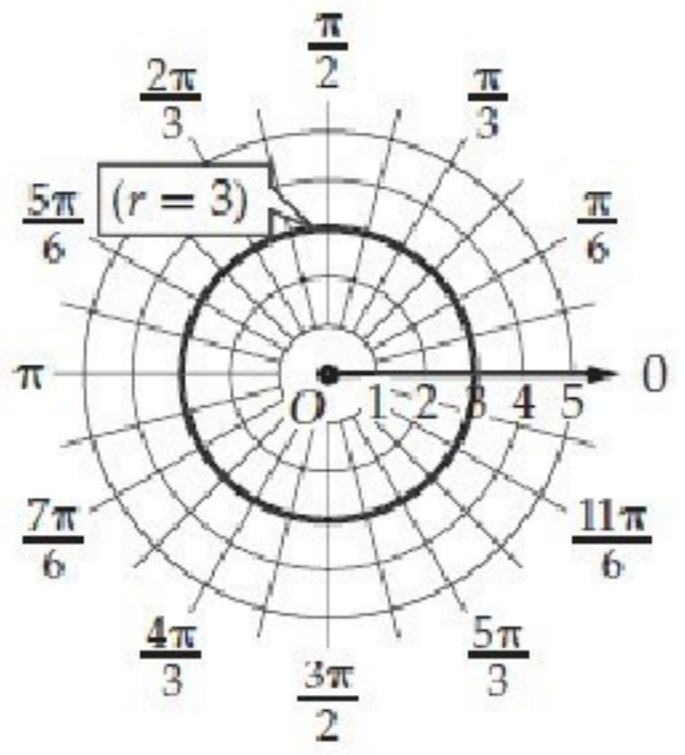
(2B



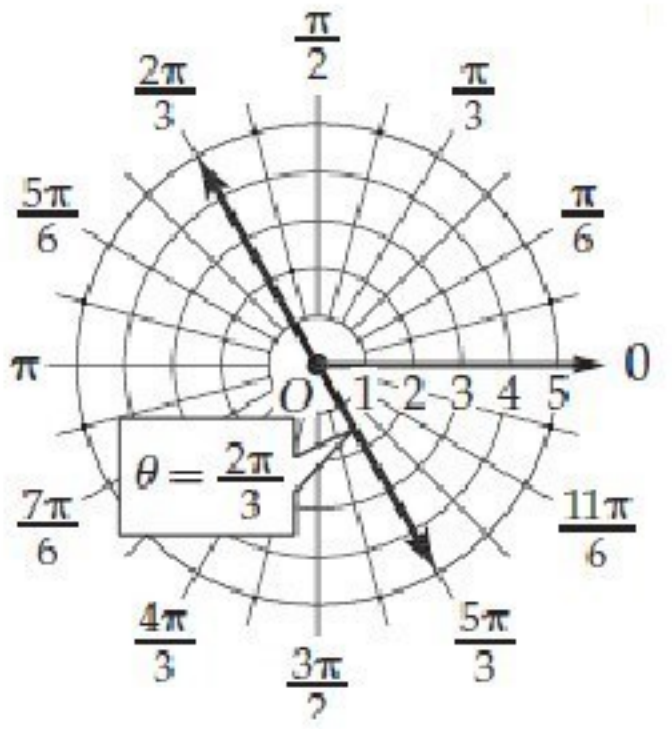
$(5,-120^\circ),(-5,60^\circ),(-5,-300^\circ)$ (3A

$\left(-2,-\frac{11\pi}{6}\right),\left(+2,-\frac{5\pi}{6}\right),\left(+2,-\frac{5\pi}{6}\right)$ (3B

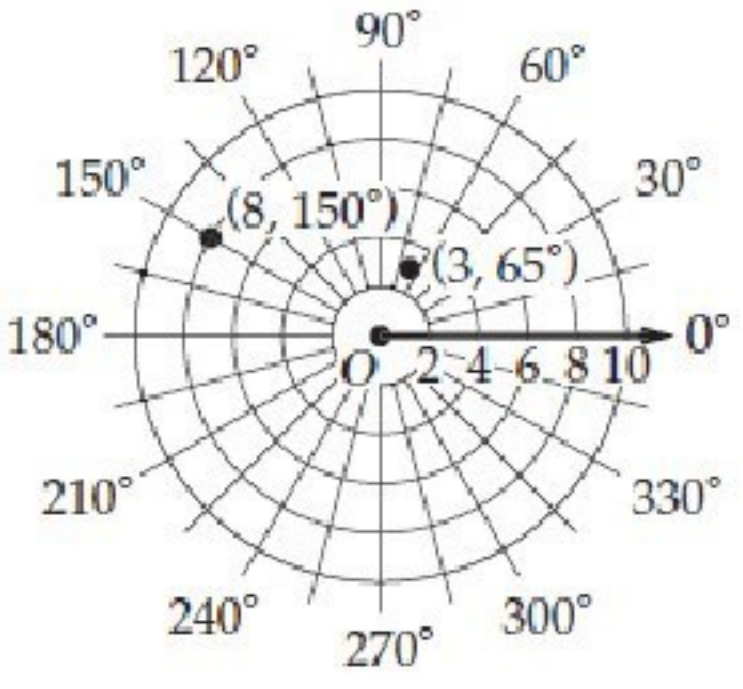
(4A


π/2
2π/3
π/3
5π/6
(r = 3)
π/6
π
0
O 1 2 3 4 5
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2

(4B


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
0
O 1 2 3 4 5
θ = 2π/3
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2

(5A

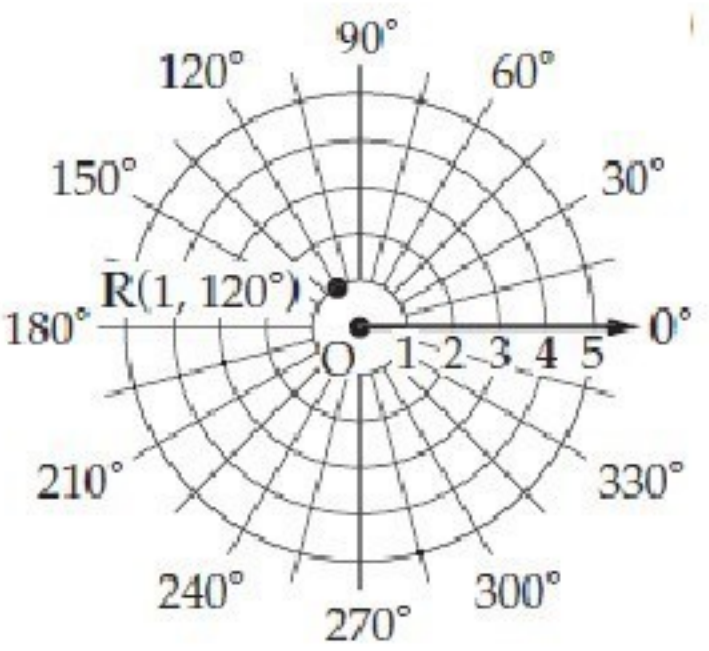


8.30 mil (5B

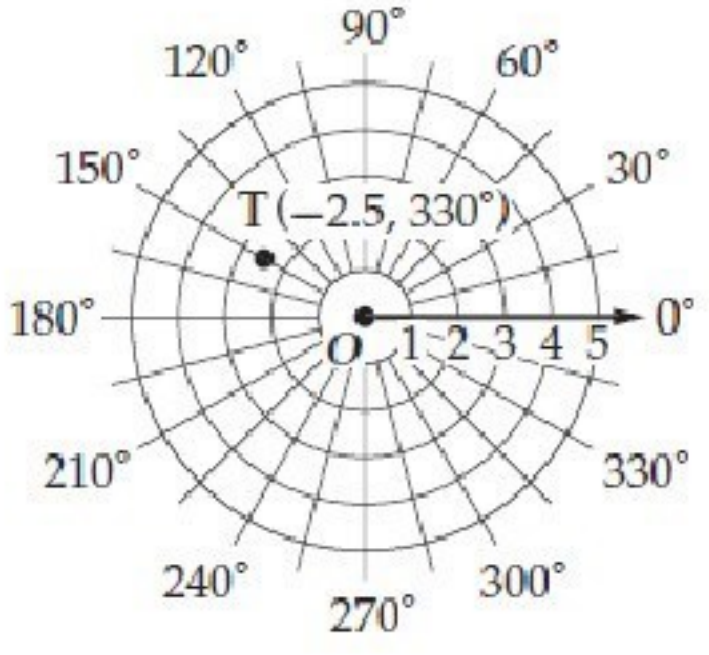
تدرب وحل المسائل:

مثل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

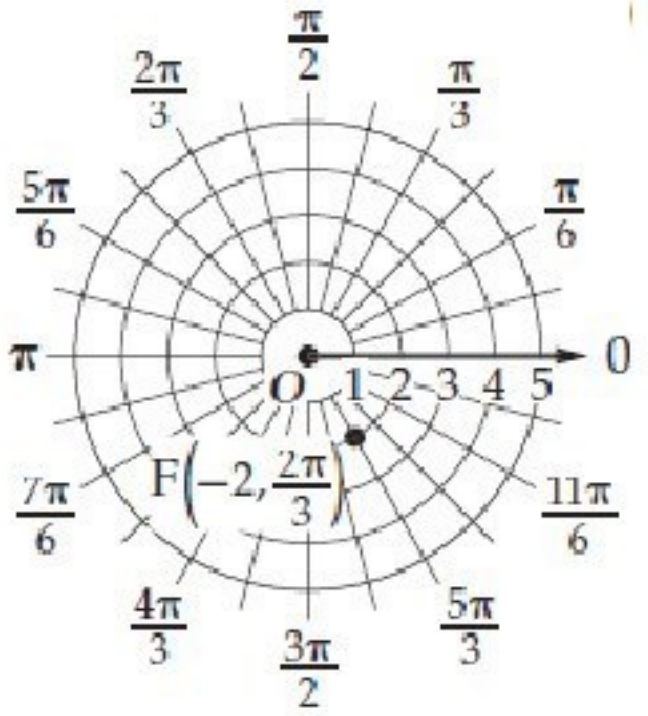
(1



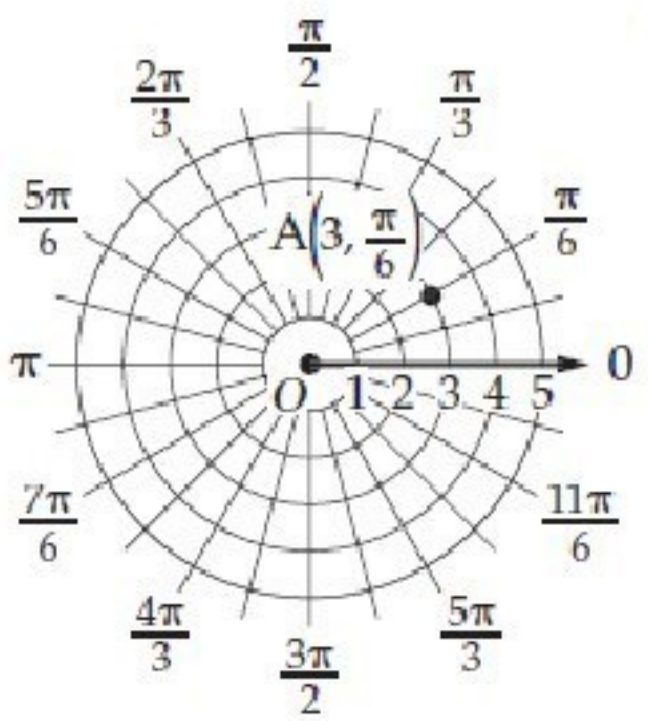
(2



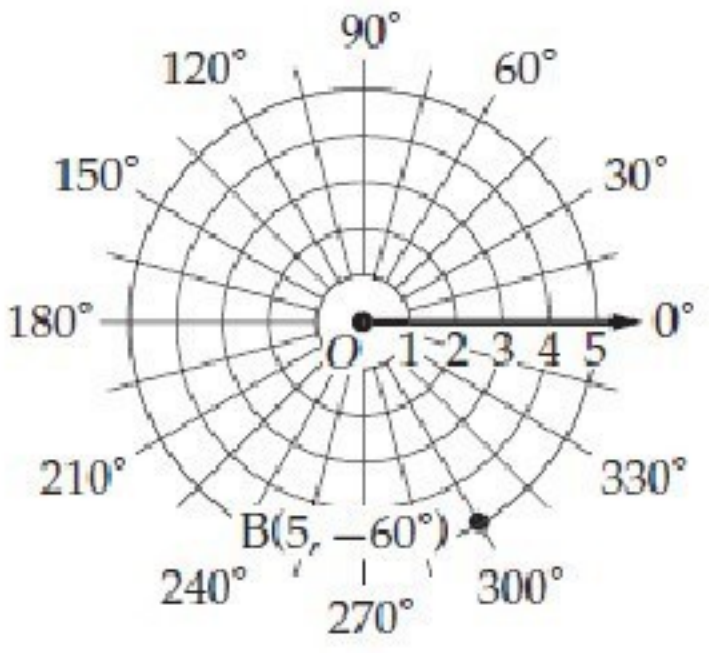
(3


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
0
O 1 2 3 4 5
F(−2, 2π/3)
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2

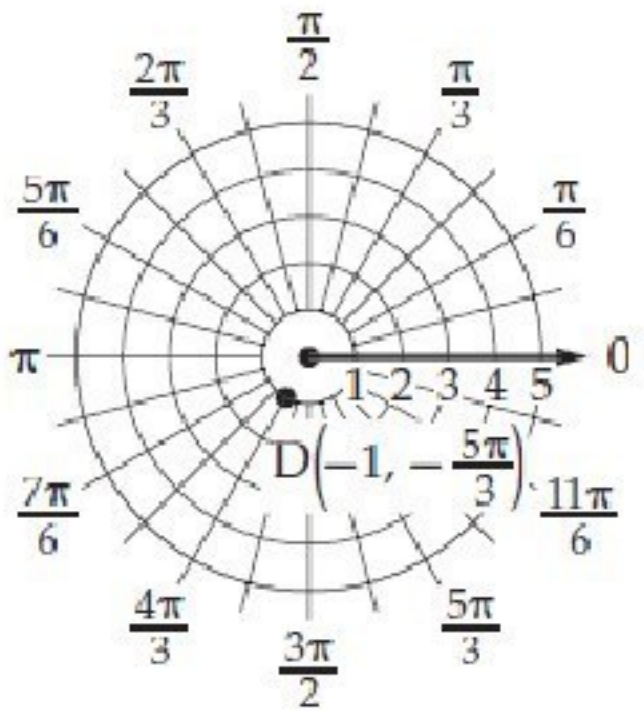
(4


π/2
2π/3
π/3
5π/6
A(3, π/6)
π/6
π
0
O 1 2 3 4 5
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2

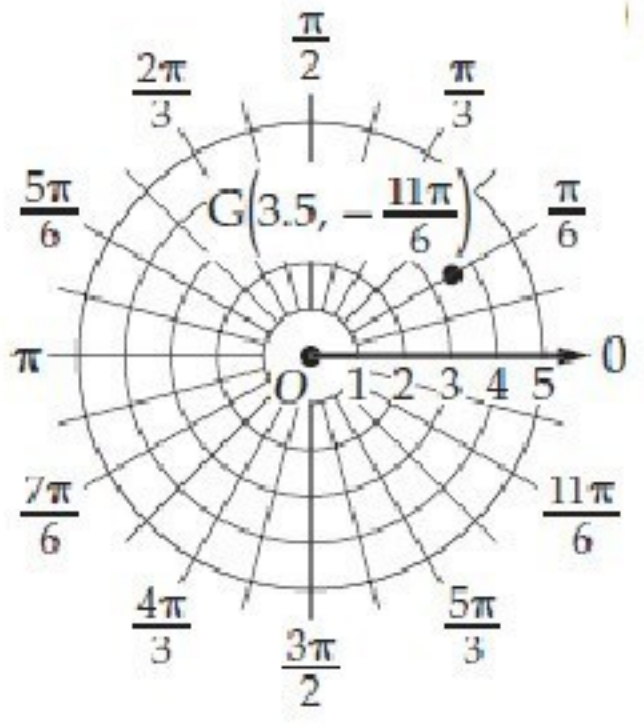
(5


90°
120°
60°
150°
30°
180°
0°
O 1 2 3 4 5
210°
330°
B(5, −60°)
240°
300°
270°

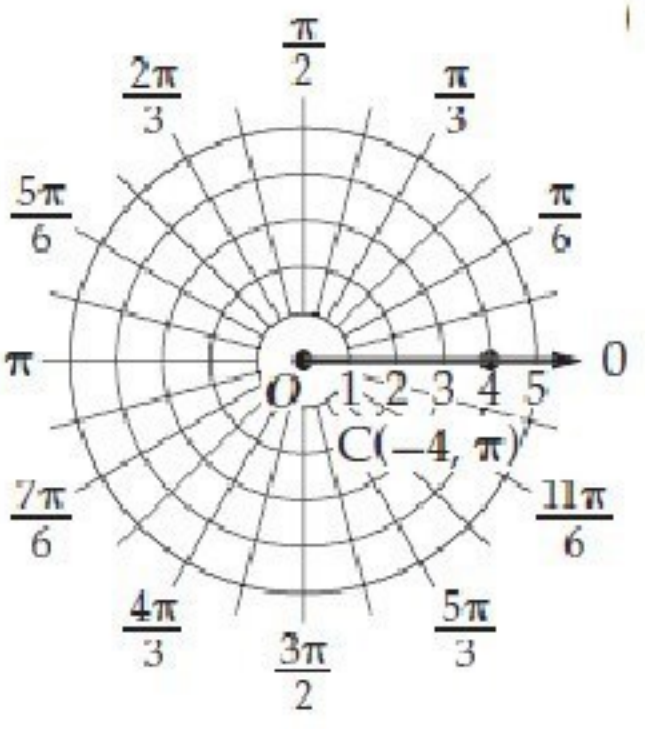
(6


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
0
1 2 3 4 5
D(−1, −5π/3)
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2

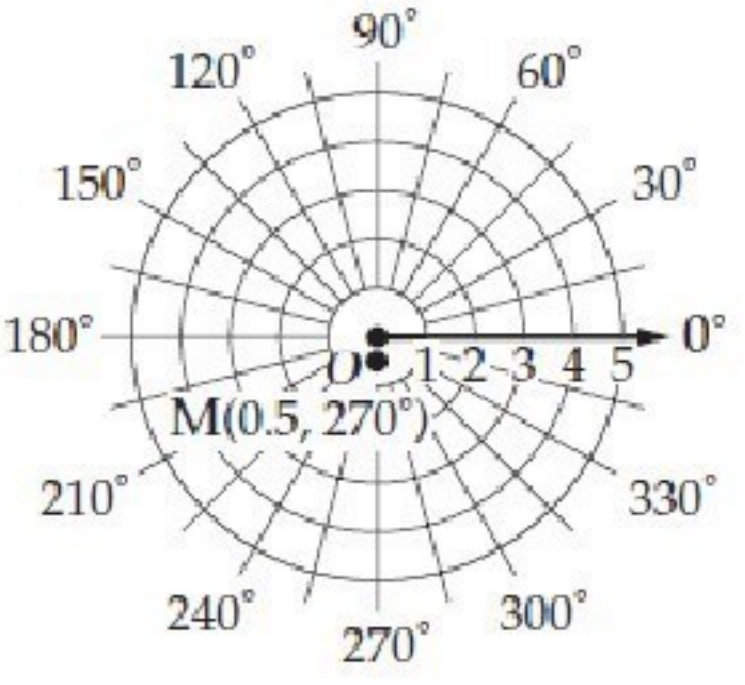
(7


π/2
2π/3
π/3
5π/6
G(3.5, −11π/6)
π/6
π
O
1 2 3 4 5
0
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2

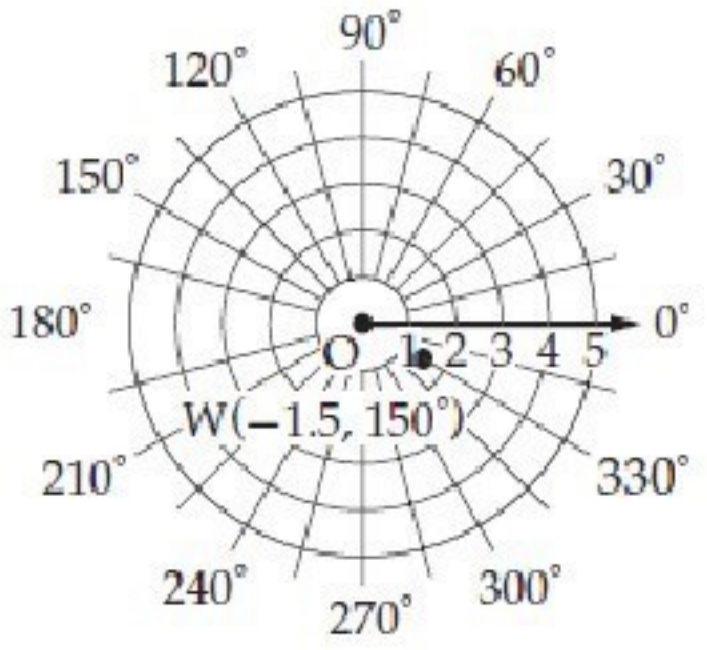
(8


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
O
1 2 3 4 5
0
C(−4, π)
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2

(9

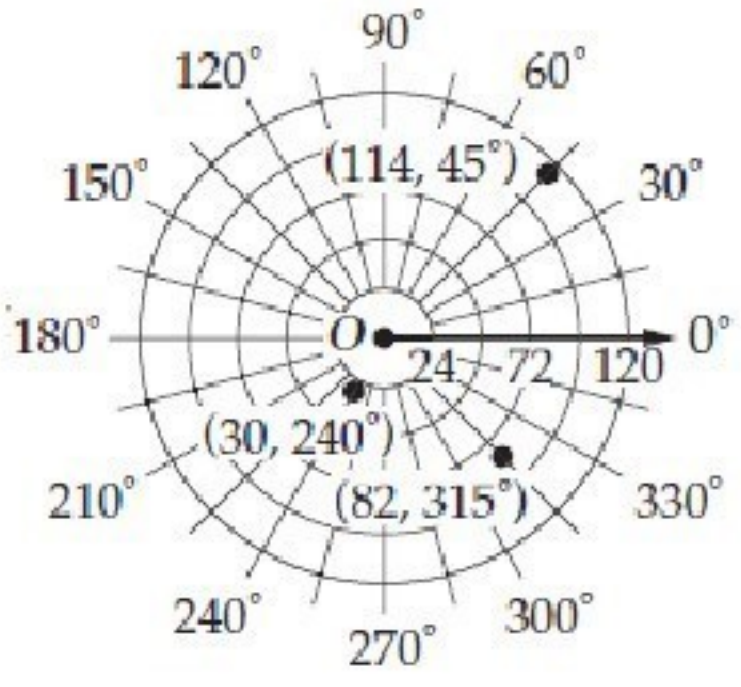


(10



11) رماية:

(a



b) 13 نقطة.

إذا كانت $-360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$، فأوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة في كل مما يأتي:

12) $(-1, 330^\circ), (1, -210^\circ), (-1, -30^\circ)$

13) $(2, 120^\circ), (2, -240^\circ), (-2, -60^\circ)$

14) $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right), \left(-4, \frac{11\pi}{6}\right), \left(-4, \frac{-\pi}{6}\right)$

15) $\left(3, \frac{5\pi}{3}\right), \left(3, \frac{-\pi}{3}\right), \left(-3, \frac{-4\pi}{3}\right)$

16) $\left(5, \frac{-\pi}{6}\right), \left(-5, \frac{5\pi}{6}\right), \left(-5, \frac{-7\pi}{6}\right)$

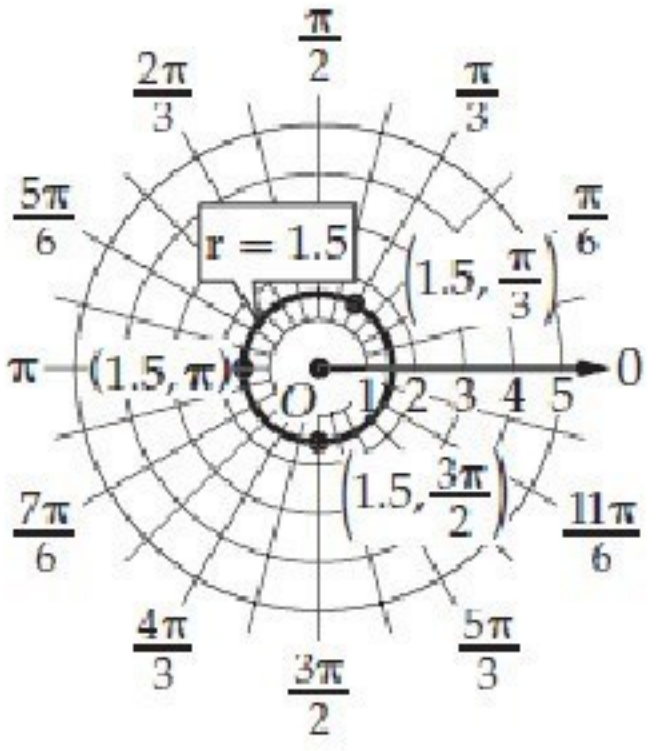
17) $\left(5, \frac{5\pi}{3}\right), \left(5, \frac{-\pi}{3}\right), \left(-5, \frac{2\pi}{3}\right)$

18) $(2, 330^\circ), (-2, 150^\circ), (-2, -210^\circ)$

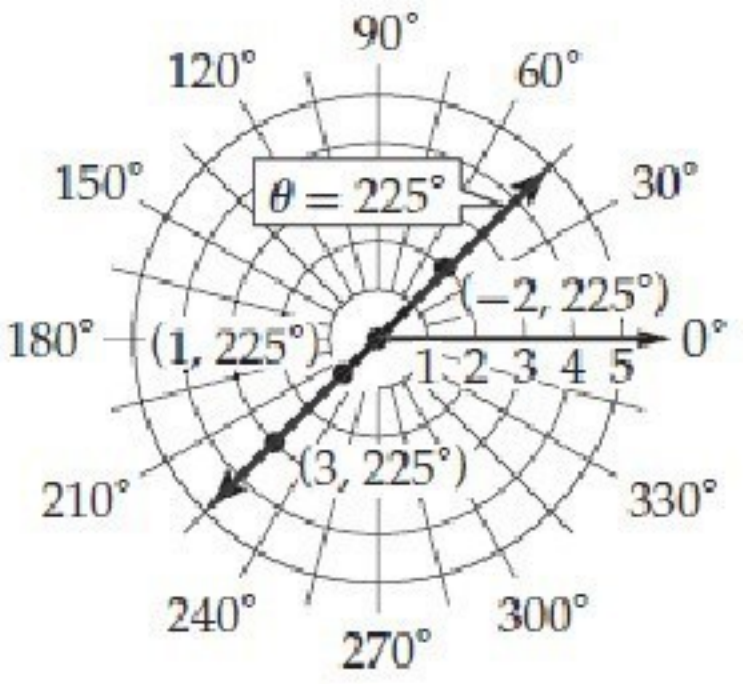
19) $(1, 300^\circ), (1, -60^\circ), (-1, 120^\circ)$

مثل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانياً:

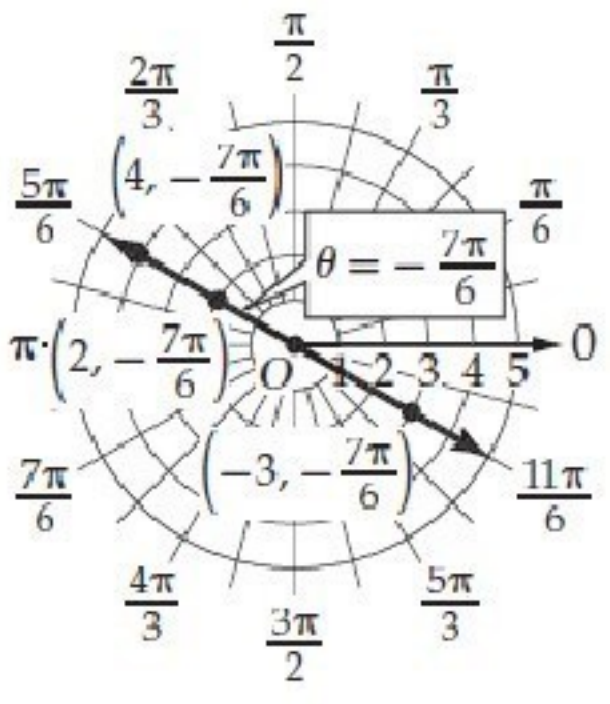
(20



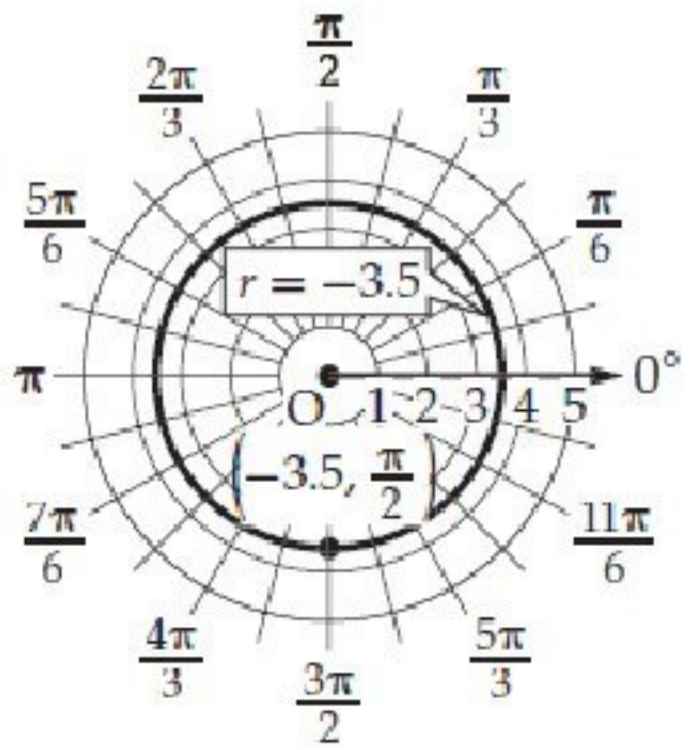
(21



(22



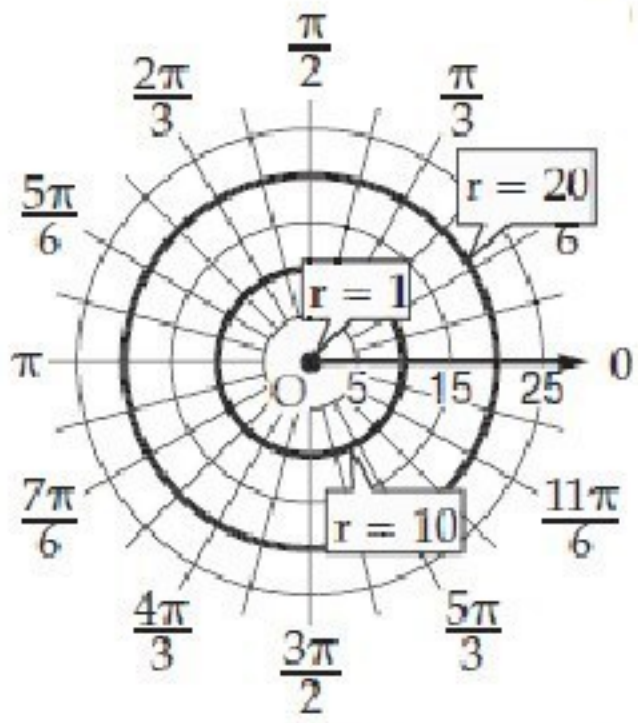
(23



24) القفز بالمظلات:

r = 1, r = 10, r = 20 (a

(b



أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط فيما يأتي:

25) ≈ 5.39

26) ≈ 10.70

27) ≈ 5.97

8 (28

1 (29

3.05≈ (30

7.21≈ (31

5 (32

4.84≈ (33

6.08≈ (34

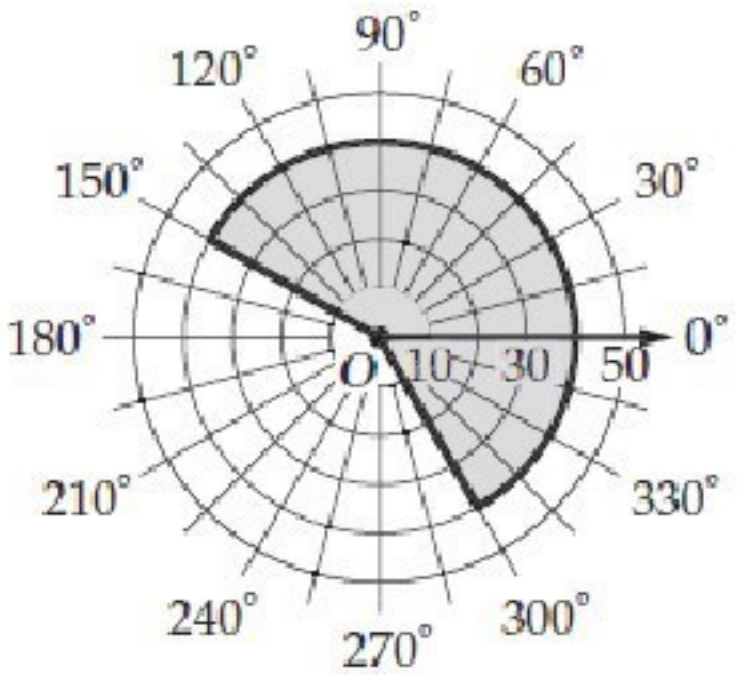
4.26≈ (35

5.35≈ (36

37) مساحون: 542.5 ft.

38) مراقبة:

(a



b) حوالي $2932.2\ m^2$

إذا كانت $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$، فأوجد زوجاً آخر من الإحداثيات القطبية لكل نقطة مما يأتي:

39) $(-5, 60^\circ)$

40) $\left(-2.5, \frac{\pi}{2}\right)$

41) $\left(4, \frac{3\pi}{4}\right)$

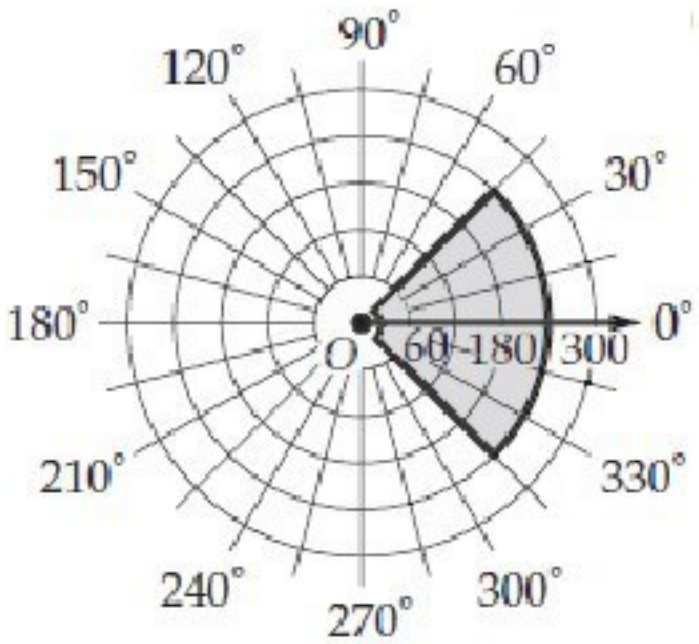
42) $(1.25, 160^\circ)$

43) $\left(1, \frac{3\pi}{8}\right)$

44) $(6, 160^\circ)$

45) مسرح:

(a



b) 8906 مقاعد تقريباً

46) أمن: 10 ft. تقريباً

أوجد الإحداثي المجهول الذي يحقق الشروط المعطاة في كل مما يأتي:

47) $r = -1.40$ أو $r = 6$

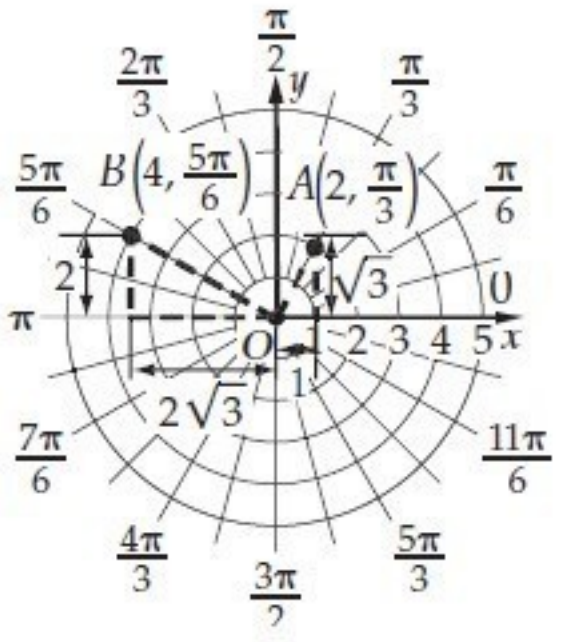
48) $\theta \approx 174.46^\circ$ أو $\theta \approx 75.5$

49) $\theta \approx \dfrac{5\pi}{18}$

50) $r \approx 1$ $r \approx 5.13$ أو

51) تمثيلات متعددة:

(a

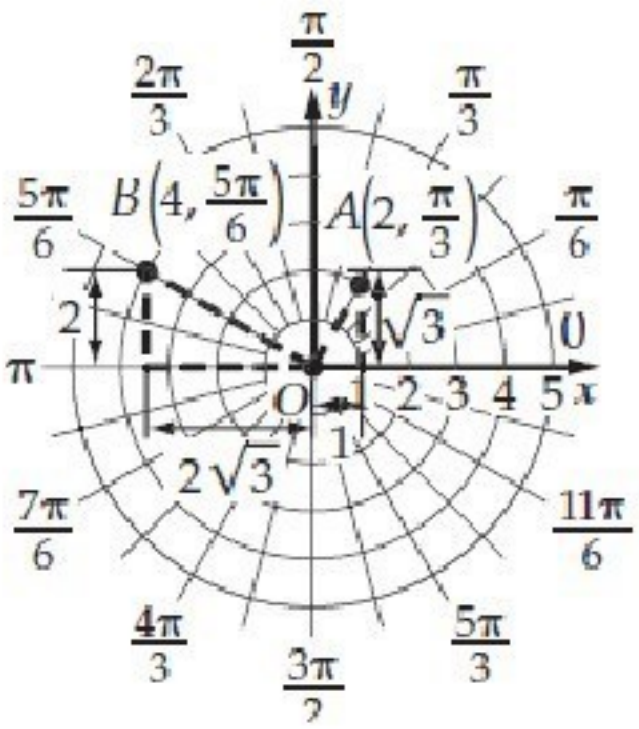


(b

$$x = r\cos\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\sin\frac{\pi}{3} = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

(c



d) يمثل طولا الضلعين الأفقي والرأسي القيمة المطلقة للإحداثيين x, y على الترتيب.

e) إذا كانت إحداثيات النقطة القطبية (r, θ) ، فإن إحداثياتها الديكارتية هي $(r\cos\theta\ , r\sin\theta)$

اكتب المعادلة لكل تمثيل قطبي مما يأتي:

52) إجابة ممكنة: $\theta = \frac{\pi}{12}$

53) $r = 2.5$ أو $r = -2.5$

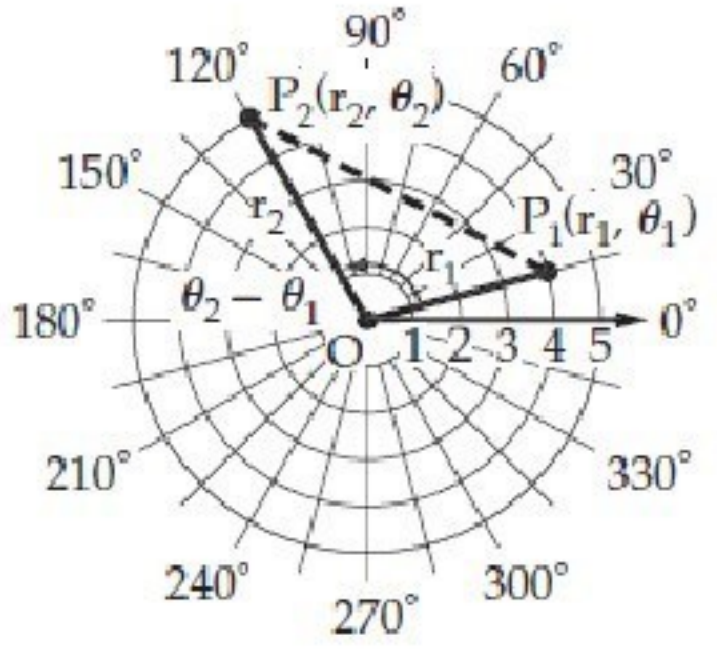
مسائل مهارات التفكير العليا:

54) إجابة ممكنة: تحتوي صيغة المسافة على عمليتي ضرب قيم r وجمعها، وكلتا العمليتين إبدالية. والدالة cos θ دالة زوجية. لذا، $\cos(-\theta) = \cos\theta$، ومنه

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

55) $(5, 233^\circ)$ تقريباً

56)



في المثلث الذي رؤوسه P_1, P_2 والقطب، ضلعان معلومان وزاوية محصورة بينهما؛ لذا وباستعمال قانون جيب التمام، فإن:

$$\text{أو } (P_1P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

57) عندما $\left(\theta_2 - \theta_1\right) = \frac{\pi}{2}$، فإن $\cos\frac{\pi}{2} = 0$، وعليه فإن تبسيط قانون المسافة القطبية يعطي $\sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2}$. وهذه النتيجة تكافئ نظرية فيثاغورس، حيث تمثل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين وتر المثلث القائم الذي رؤوسه هاتان النقطتان ونقطة الأصل.

58) سعيد؛ إجابة ممكنة: عين علي نقطة على المحور القطبي ورسم منها قطعة مستقيمة رأسية طولها 5 وحدات، بينما كان عليه تعيين نقطة تبعد 5 وحدات عن القطب على ضلع الانتهاء للزاوية.

59) في الإحداثيات القطبية، لا يؤخذ ارتفاع الطائرة في الحسبان لتحديد موقعها بشكل دقيق.

مراجعة تراكمية

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u,v، ثم حدد ما إذا كان u,v متعامدين، لكل مما يأتي:

60) 3 –؛ ليسا متعامدين

61) 0؛ متعامدان

62) 14 –؛ ليسا متعامدين

إذا كان $c = (3 , – 6 , 5)$, $b = (2 , 5 , 1)$, $a = (– 4 , 3 , –2)$، فأوجد كلا مما يأتي:

63) (16, – 29, 36)

64) (1, 44, – 17)

أوجد الزاوية θ بين المتجهين u,v لكل مما يأتي:

65) 133.9°

66) 144.3°

67) 61.45°

أوجد إحداثيات مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر الآتية:

68) المركز (0, 1) ، ونصف القطر 3

69) المركز (0 ,1 –) ، ونصف القطر 4

70) المركز (0, 0) ، ونصف القطر 1

تدريب على اختبار:

A (71

B (72

2-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

تحقق

1A) $\left(3,3\sqrt{3}\right)$ أو (3, 5.20) تقريباً

1B) $\left(2.5,2.5\sqrt{3}\right)$ أو (2.5, 4.33) تقريباً

1C) $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ أو (– 2.1, – 2.1) تقريباً

2A) تقريباً $\left(12.8,4.04\right)$, تقريباً $\left(12.8,0.90\right)$

2B) تقريباً $\left(-9.85,6.70\right)$, تقريباً $\left(9.85,3.56\right)$

3) صيد الأسماك:

A) (– 3.44, 4.91) تقريباً

B) (6.32, 108°) تقريباً

$r = 6 \sin \theta$ (4A

$r^2 = \sec 2\theta$ (4B

$x^2 + y^2 = 9$ ، دائرة (5A

$y = \sqrt{3}x$ ، مستقيم (5B

$x^2 + y^2 - 3x = 0$ ، دائرة (5C



تدرب وحل المسائل:

حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي:

1) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

2) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

3) $\left(-2.5, -2.5\sqrt{3}\right)$

4) $(-0.86, -2.35)$ تقريباً

5) $\left(1, \sqrt{3}\right)$

6) (– 4.45, 12.22) تقريباً

7) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

8) (0, 2)

9) $\left(-2\sqrt{3},-2\right)$

10) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كل مما يأتي:

11) $\approx (12.21, 0.96), \approx (-12.21, 4.1)$

أو $\approx\left(12.21,55^{\circ}\right),\approx\left(-12.21,235^{\circ}\right)$

12) $\approx (13.6, 2.84), \approx (-13.6, 5.98)$

أو $\approx\left(13.6,163^{\circ}\right),\approx\left(-13.6,343^{\circ}\right)$

13) $\approx (13.42, 4.25), \approx (-13.42, 1.11)$

أو $\approx\left(13.42,244^{\circ}\right),\approx\left(-13.42,64^{\circ}\right)$

(14 $(12.65, 5.03), (-12.65, 1.89)$

أو $\approx (12.65, 288^\circ), \approx (-12.65, 108^\circ)$

(15 $(3.61, 5.30), (-3.61, 2.16)$

أو $\approx (3.61, -72^\circ), \approx (-3.61, 124^\circ)$

(16 $\left(173, \frac{3\pi}{2}\right), \left(-173, \frac{\pi}{2}\right)$

أو $\approx (173, 270^\circ), \approx (-173, 90^\circ)$

(17 $\approx (3.16, 1.25), \approx (-3.16, 4.39)$

أو $\approx (3.16, 72^\circ), \approx (-3.16, 252^\circ)$

(18 $\approx (19.8, 0.75\pi), \approx (-19.8, 1.75\pi)$

أو $\approx (19.8, 135^\circ), \approx (-19.8, 315^\circ)$

(19 $\approx (60.54, 0.54), \approx (-60.54, 2.61)$

أو $\approx (60.54, 31^\circ), \approx (-60.54, 150^\circ)$

(20 $\approx (5, -0.93), \approx (-5, 2.21)$

أو $\approx (5, 53^\circ), \approx (-5, 127^\circ)$

$$\approx \left(1.41, -\frac{\pi}{4}\right), \approx \left(-1.41, \frac{3\pi}{4}\right)$$ (21

$$\approx \left(1.41, -45^\circ\right), \approx \left(-1.41, 135^\circ\right)$$ أو

$$\approx (2.45,\ 0.62), \approx (-2.45,\ 3.76)$$ (22

$$\approx \left(2.45, 36^\circ\right), \approx \left(-2.45, 216^\circ\right)$$ أو

23) **مسافات:**

a) 1.2 mi شرقاً وَ0.90 mi شمالاً

b) $(2.06,\ 194.04^\circ)$

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

24) مستقيم، $r = -2\sec\theta$

25) دائرة، $r = -10\cos\theta$

26) مستقيم، $r = -3\csc\theta$

27) مستقيم، $r = 5\sec\theta$

28) دائرة، $r = 4\cos\theta$

29) دائرة، $r = -6\sin\theta$

30) مستقيم، $\theta = \frac{\pi}{3}$

31) دائرة، $r = -2\sin\theta$

اكتب كل معادلة قطبية مما يأتي على الصورة الديكارتية

32) $x^2 + y^2 - 3y = 0$

33) $y = -\sqrt{3}x$

34) $x^2 + y^2 = 100$

$x^2 - 4x + y^2 = 0$ (35

$y = 4x$ (36

$y = 8$ (37

$x^2 + y^2 = 16$ (38

$-\frac{1}{7}x = y$ أو $x = -7y$ (39

$y = -x$ (40

$x = 1$ (41

(42 زلازل:

$x^2 + y^2 - 12.6y = 0$ (a،

اكتب كل معادلة قطبية مما يأتي على الصورة الديكارتية

$x + y = 1$ أو $y = 1 - x$ (43

$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = -2$ أو $y = x + 10\sqrt{2}$ (44

$x = -3$، (45

(46 $y = \sqrt{3}x + 4$ أو $\frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x = 10$

(47 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{3}$ أو $-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 4$

(48 $y = x - 5$ أو $x - y = 5$،

(49 $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ أو $x^2 + y^2 - \sqrt{3}x - y = 0$

(50 $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ أو $x^2 + y^2 + 4x - y = 0$

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القطبية

(51 $r = \frac{4}{6\cos\theta - 3\sin\theta}$،

(52 $r = \frac{12}{2\cos\theta - 5\sin\theta}$

(53 $r = 12\cos\theta + 16\sin\theta$

(54 $r = -6\cos\theta + 4\sin\theta$

55) جولف:

$39\pi \text{ yd}^2 \approx 122.52 \text{ yd}^2$

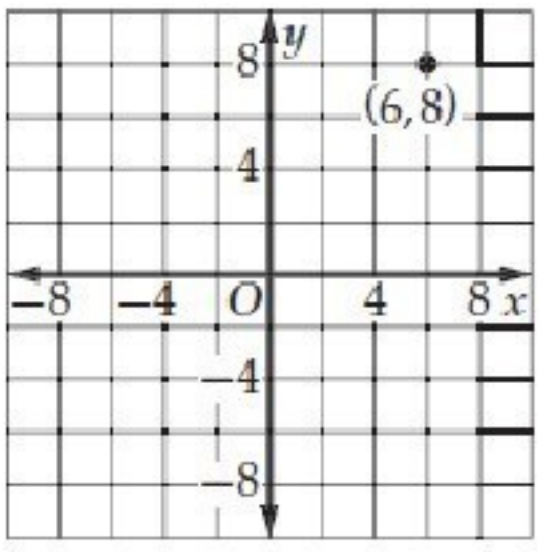
56) عجلة دوارة:

a) $x^2 + (y - 10)^2 = 100$

b) $r = 20 \sin \theta$

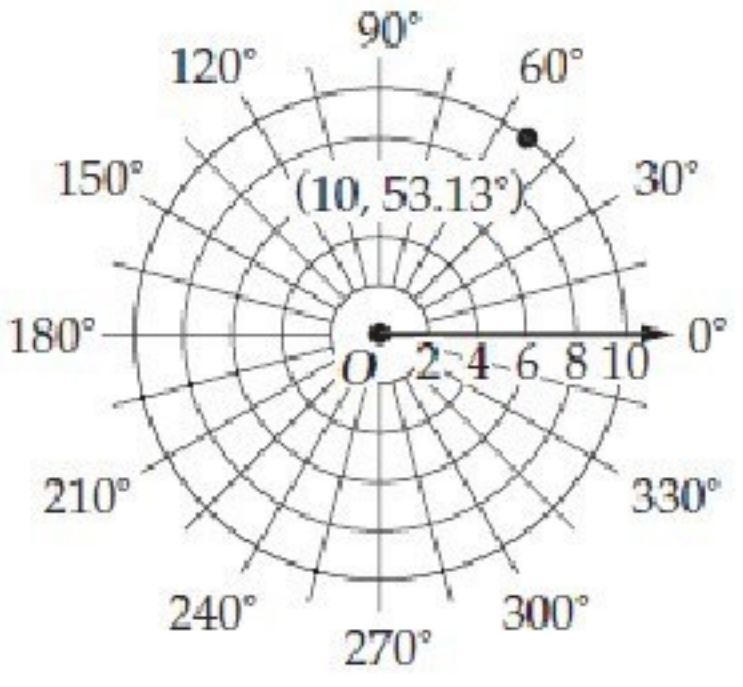
57) تمثيلات متعددة:

a)

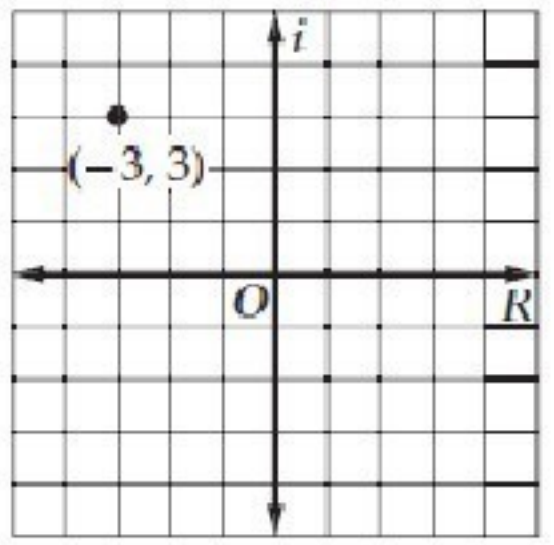


b) (10, 0.93) أو (10, 53.13°)

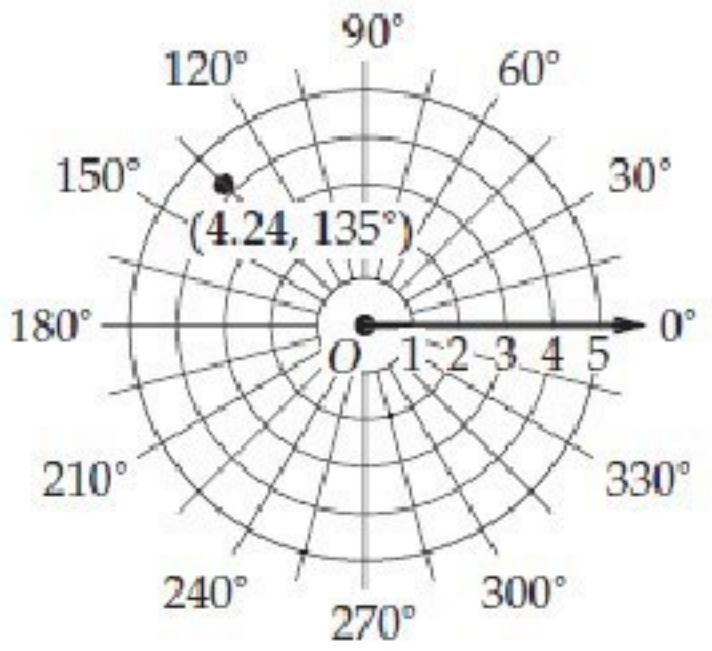
c)



(d



$\left(4.24, \frac{3\pi}{4}\right)$ أو $\left(4.24, 135^\circ\right)$ (e



$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (f

$\theta = \mathbf{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما a موجبة،

$\theta = \mathbf{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما a سالبة.

مسائل مهارات التفكير العليا:

58) **اكتشف الخطأ:** توفيق؛ إجابة ممكنة: استعمل توفيق التعويض الصحيح. وتمثيل معادلته يطابق المعادلة القطبية الأصلية، في حين تمثل إجابة باسل دالة الجيب، ولا تمثل الدائرة التي هي التمثيل البياني للمعادلة القطبية الأصلية.

59) **تحد:** $(x-a)^2+y^2=a^2$ ، المركز $(a, 0)$ ، نصف القطر a

60) **اكتب:** إجابة ممكنة: تمثيل معادلات لا تمثل دوال، كمعادلات الدوائر أسهل باستعمال الصورة القطبية من استعمال الصورة الديكارتية، في حين أن تمثيل معادلات تمثل دوالكالدوال الخطية أسهل باستعمال الصورة الديكارتية.

61) **برهان:** $x = r\cos\theta$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$\frac{x}{\cos\theta} = r \qquad \frac{y}{\sin\theta} = r$$

$$x \cdot \frac{1}{\cos\theta} = r \qquad y \cdot \frac{1}{\sin\theta} = r$$

$$x\sec\theta = r \qquad y\csc\theta = r$$

62) **تحد:**

$$r^2\left(4\cos^2\theta + 3\sin^2\theta\right) + r\left(-8a\cos\theta + 6b\sin\theta\right) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$

$$4r^2\cos^2\theta + 3r^2\sin^2\theta - 8ar\cos\theta + 6br\sin\theta = 12 - 4a^2 - 3b^2$$

$$4\left(r\cos\theta\right)^2 + 3\left(r\sin\theta\right)^2 - 8a\left(r\cos\theta\right) + 6b\left(r\sin\theta\right) = 12 - 4a^2 - 3b^2$$

$$4x^2 + 3y^2 - 8ax + 6by = 12 - 4a^2 - 3b^2$$

$$4x^2 - 8ax + 4a^2 + 3y^2 + 6by + 3b^2 = 12$$

$$4\left(x^2 - 2ax + a^2\right) + 3\left(y^2 + 2by + b^2\right) = 12$$

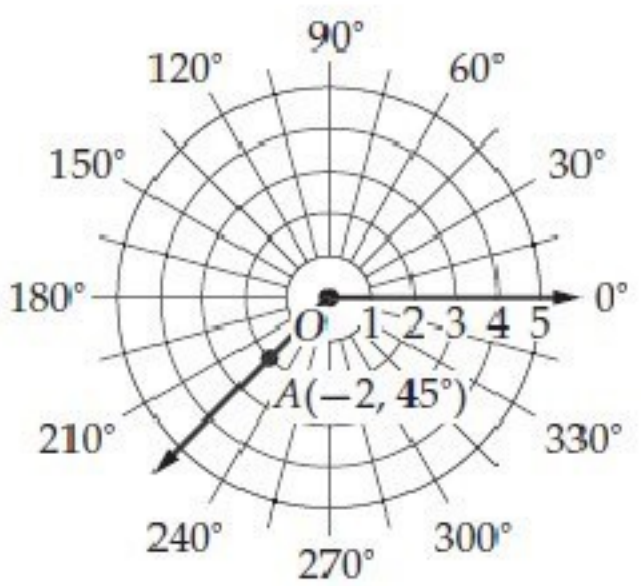
$$4(x-a)^2 + 3(y+b)^2 = 12$$

$$\frac{(x-a)^2}{3} + \frac{(y+b)^2}{4} = 1$$

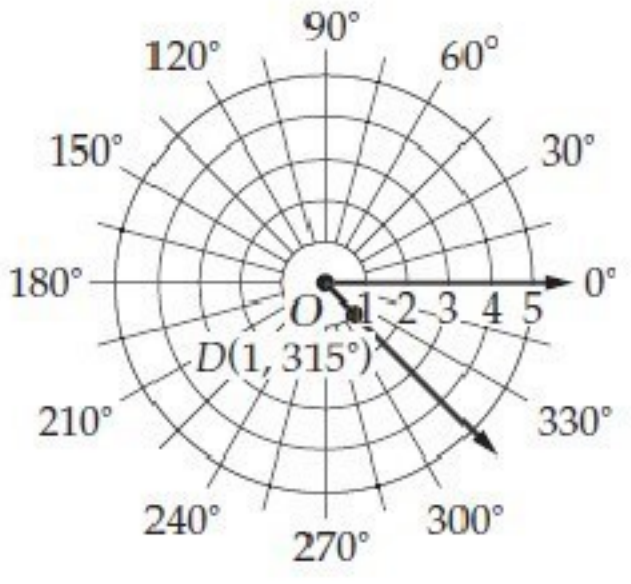
مراجعة تراكمية

مثل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

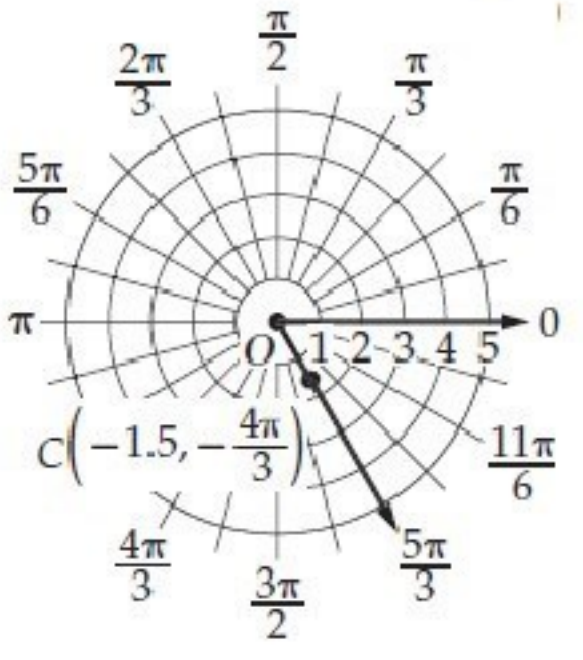
(63



(64



(65



أوجد الزاوية بين المتجهين u,v في كل مما يأتي:

(66 91.8°

(67 90°

(68 طائرات:

(a A (11.5, 3°), B (11.5, 75°), C (11.5, 147°),
D (11.5, 219°), E (11.5, 291°)

(b 13.5 ft

حل كلاً من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام:

(69 $\frac{7 \pm i\sqrt{11}}{2}$

(70 $-1 \pm i\sqrt{3}$

71) $\frac{-3 \pm i\sqrt{71}}{8}$

أوجد طول القطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين في كل مما يأتي، وأوجد إحداثيات نقطة منتصفها:

72) 5.1; (1.5, – 13, 13.5)

73) 15.78; (2.5, 4, 4)

74) 19.31; (2.5, – 2, – 3)

تدريب على اختبار:

75) A

76) A

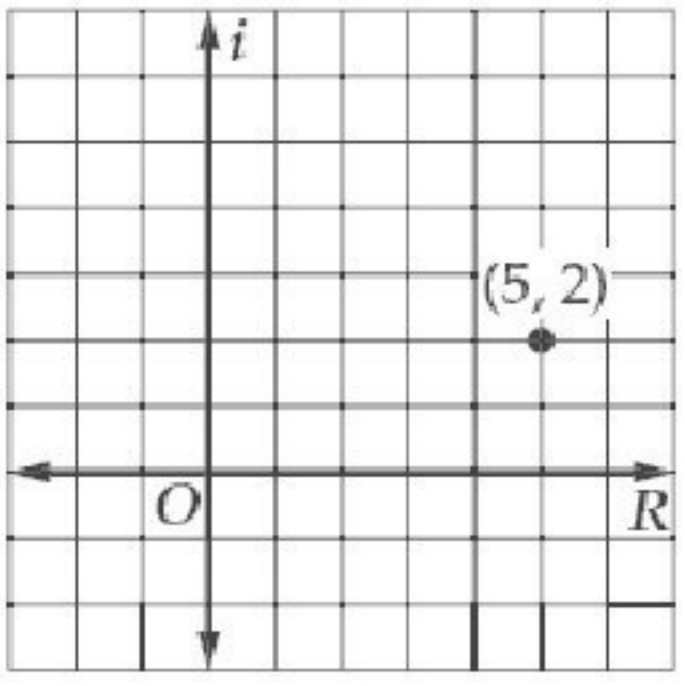
77) C

78) C

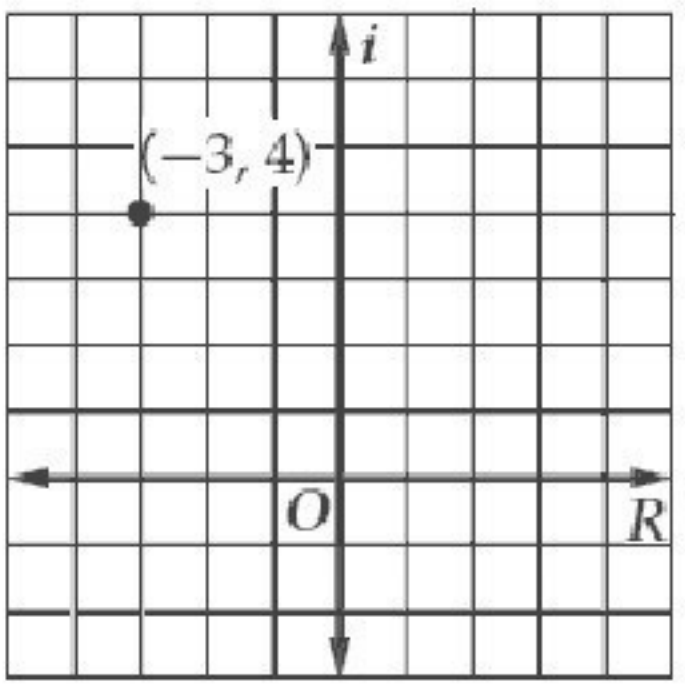
2-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

تحقق

$\sqrt{29} \approx 5.39$ (1A



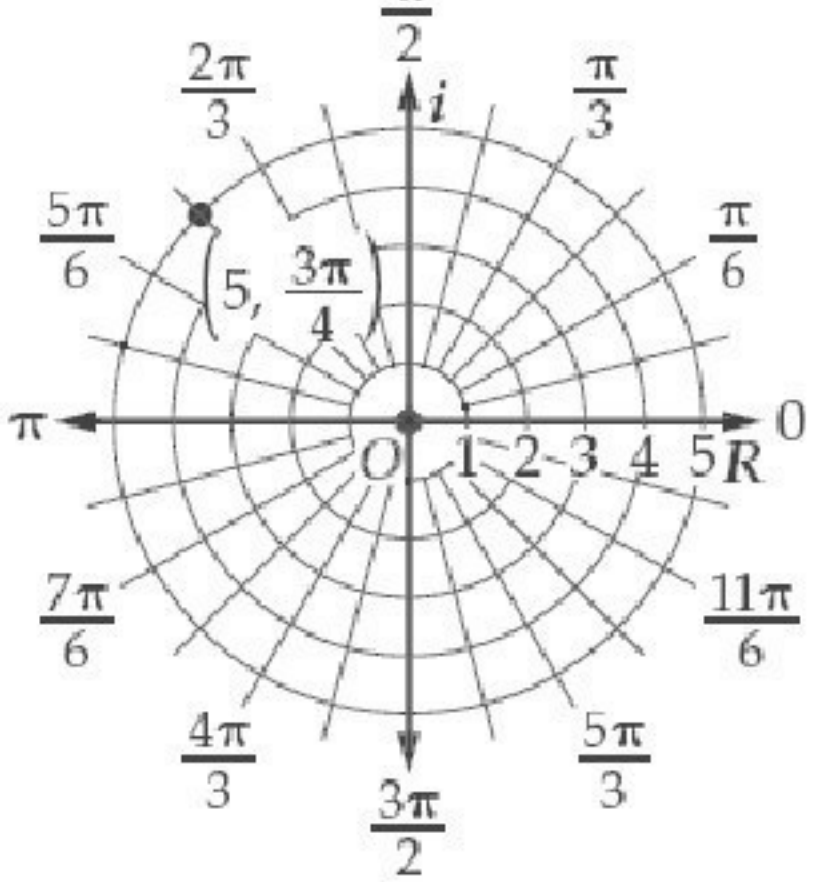
5 (1B



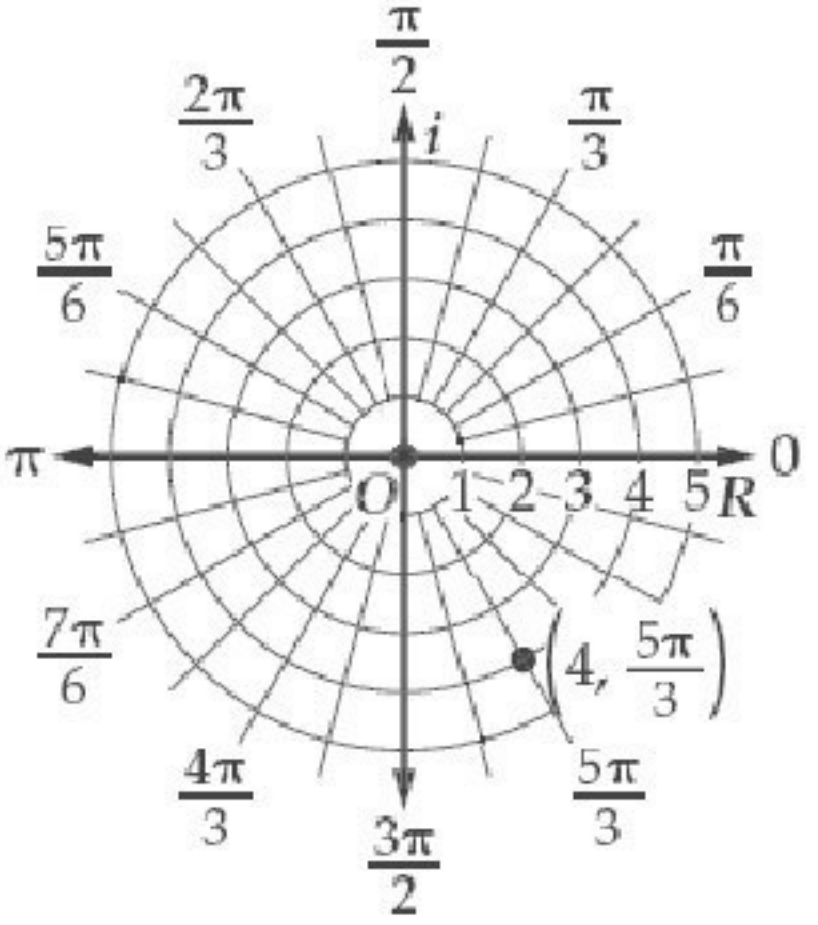
11.4 (cos 0.66 + i sin 0.66) (2A

2.83 (cos 3.93 + i sin 3.93) (2B

$$-\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i \quad \textbf{(3A}$$



$2-2\sqrt{3i}$ (3B



(4A $-3.88+14.49i$ تقريباً

(4A $15\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\,\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ تقريباً ,

(4B $-3.11-11.59i$ تقريباً

(4B $15\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\,\sin\frac{17\pi}{12}\right)$ تقريباً ,

(5 $V=120\left(\cos\theta+j\,\sin\theta\right)$

$I=\left(8+6j\right)\left(\cos\theta+j\,\sin\theta\right)$

Ω $(9.6-7.2j)$ تقريباً

(6A $-8-8\sqrt{3}i$

(6B $-32768+32768\sqrt{3}i$

(7A $\approx 1.37+0.37\text{i}, -1+i, \approx -0.37-1.37\text{i}$

(7B $2\ , -1+\sqrt{3}i\ , -1-\sqrt{3}i$

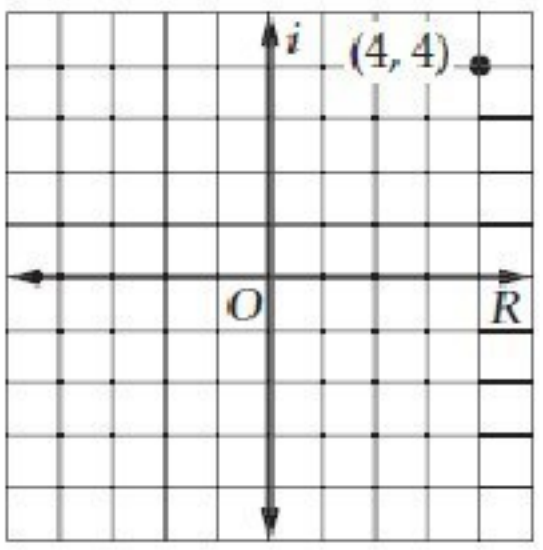
(8A $1\ , -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ , -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(8B $1\ , \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ , -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ , -1\ , -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\ , \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

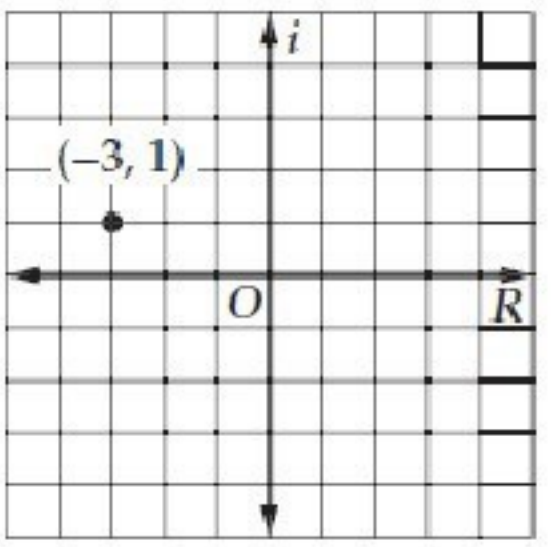
تدرب وحل المسائل:

مثل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

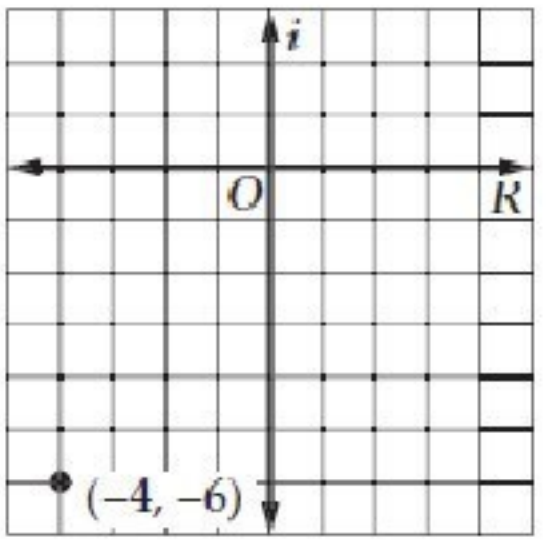
1) ≈ 5.66



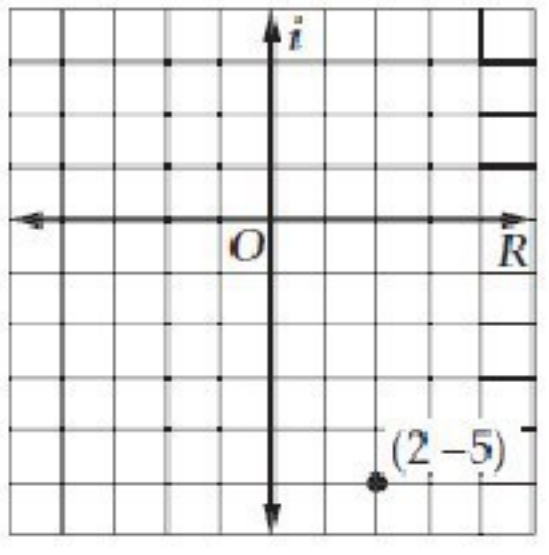
≈ 3.16 **(2**



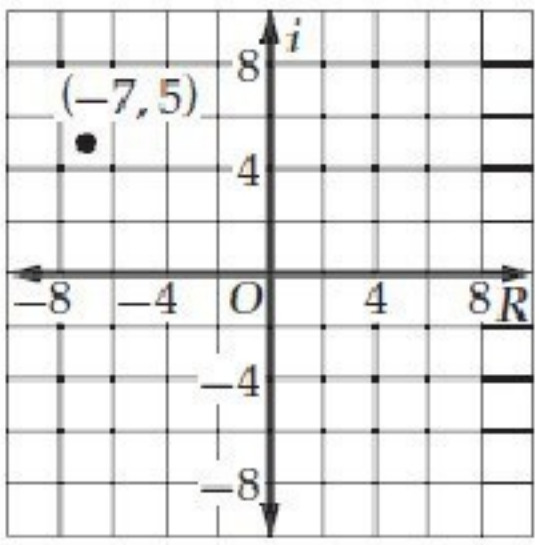
≈ 7.21 **(3**



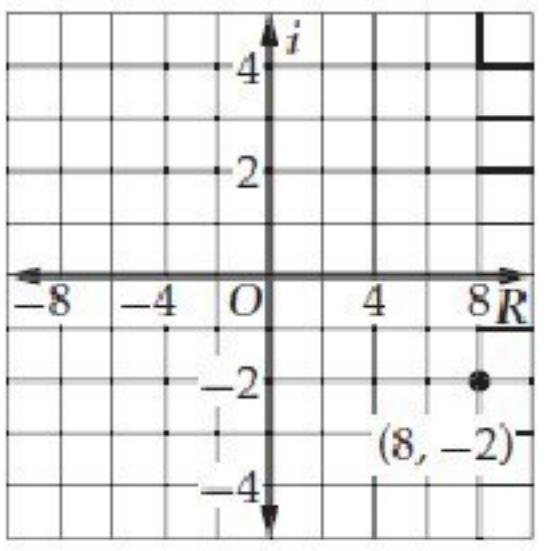
≈ 5.39 (4



≈ 8.60 (5

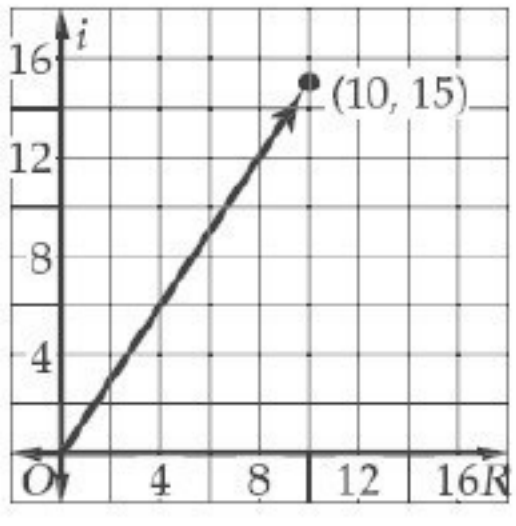


≈ 8.25 (6



7) متجهات:

(a



b) طوله 18.03 N، اتجاهه محدد بالزاوية 56.31°

عبر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

8) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

9) $\approx\sqrt{5}\left(\cos 2.68+i\sin 2.68\right)$

10) $\approx 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-0.34\right)+i\sin-\left(0.34\right)\right)$

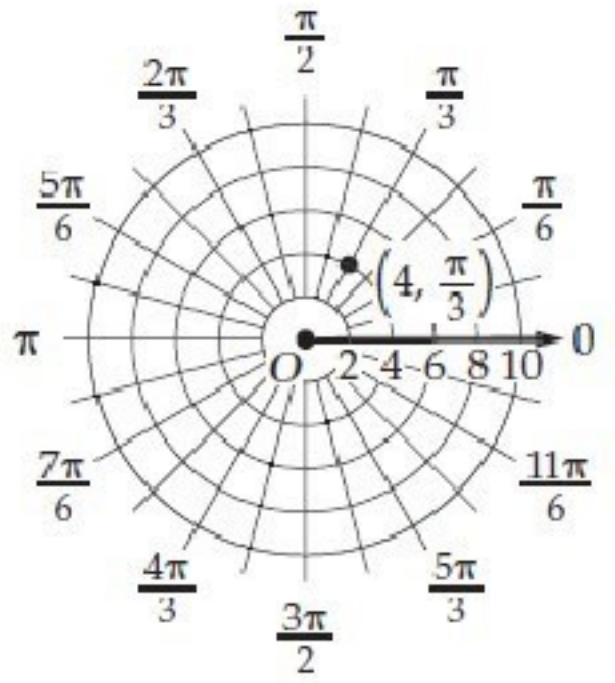
11) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

12) $\approx\sqrt{41}\left(\cos 0.9+i\sin 0.9\right)$

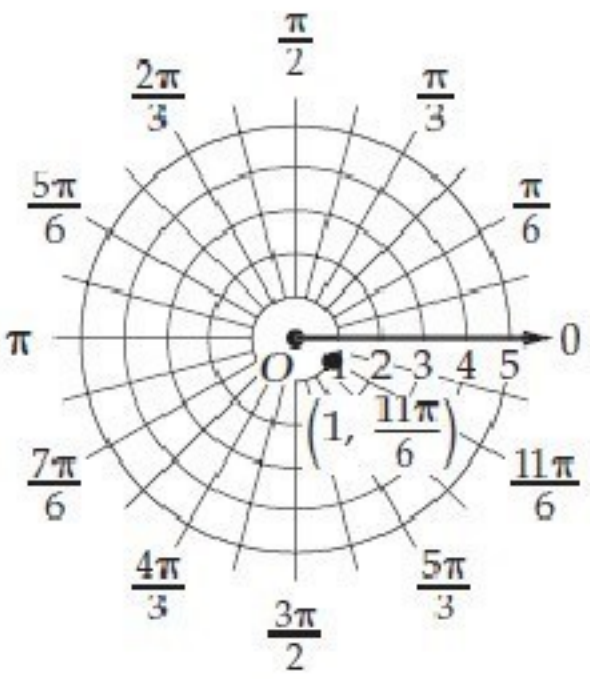
(13 $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

مثل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

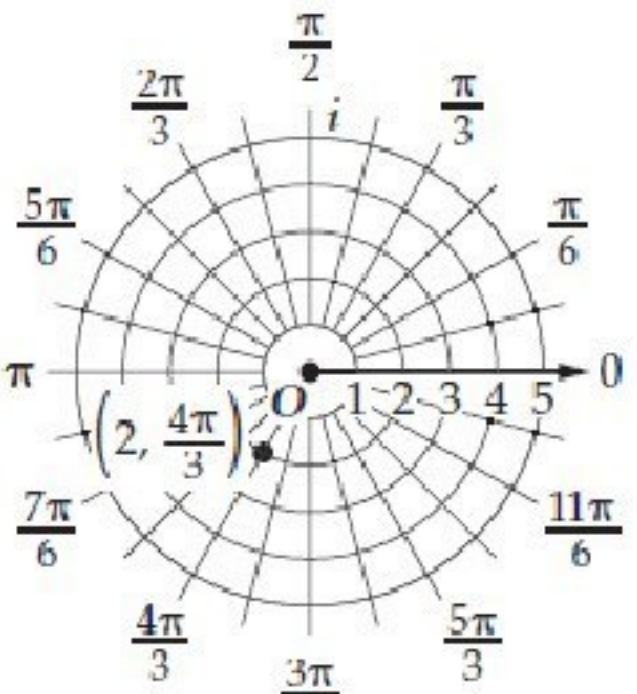
(14 $2+2\sqrt{3}i$



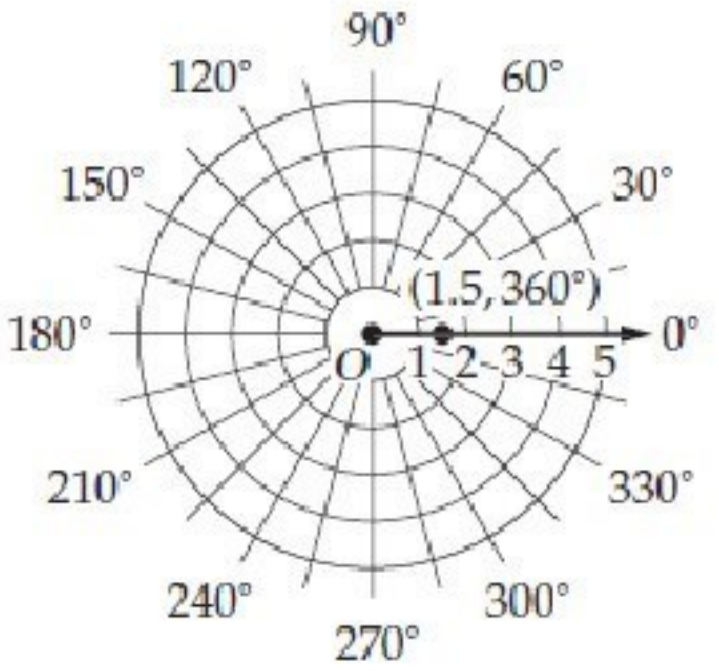
(15 $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$



$-1-\sqrt{3}i$ (16



$\frac{3}{2}$ (17



أوجد الناتج في كل مما يأتي على الصورة القطبية. ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

$$24\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),-12\sqrt{2}+12\sqrt{2}i \quad (18$$

$$10\left(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ\right),-10 \quad (19$$

$$6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right],3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i \quad (20$$

$$4\left(\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ\right),4 \quad (21$$

$$\frac{3}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right],-\frac{3}{4}i \quad (22$$

$$2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),-\sqrt{2}+\sqrt{2}i \quad (23$$

$$3\left(\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ\right),-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i \quad (24$$

$$3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),3i \quad (25$$

$$10\left(\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ\right),5\sqrt{2}-5\sqrt{2}i \quad (26$$

$$\frac{1}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{1}{12}i \quad (27$$

أوجد الناتج لكل مما يأتي بالصورة القطبية، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

4096 (28

256 (29

– 0.03 – 0.07i (30

–16 (31

أوجد جميع الجذور المطلوبة للعدد المركب في كل مما يأتي:

32) $\approx 0.97 + 0.26i$, $\approx 0.26 + 0.97i$, $\approx -0.71 + 0.71i$

$\approx -0.97 - 0.26i$, $\approx -0.26 - 0.97i$, $\approx 0.71 - 0.71i$

33) $\approx 0.22 + 1.67i$, $\approx -1.67 + 0.22i$

$\approx -0.22 - 1.67i$, $\approx 1.67 - 0.22i$

34) $-1 + 2i$, $1 - 2i$

35) تصميم: $1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

36) كهرباء:

a) $3.11 + 3.92\text{j}, 7.37 + 3.12\text{j}$

b) $(10.48 + 7.04\text{j})\ \Omega$

c) $\approx 12.63\ (\cos 0.59 + \text{j} \sin 0.59)\ \Omega$

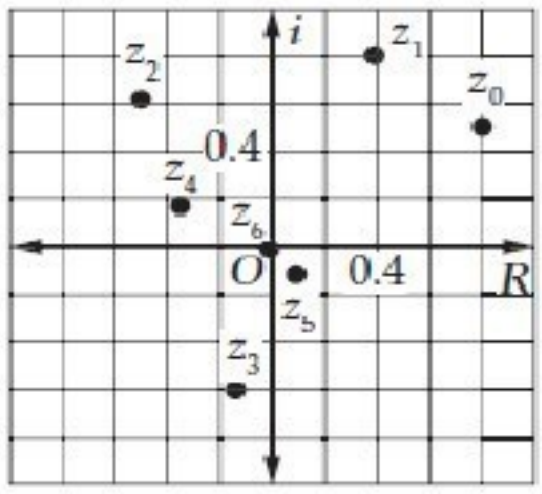
37) انماط:

a) $z_1 \approx 0.39 + 0.8i$, $z_2 \approx -0.49 + 0.62i$

$z_3 \approx -0.14 - 0.61i$, $z_4 \approx -0.35 + 0.17i$

$z_5 \approx 0.09 - 0.12i$, $z_6 \approx -0.0063 - 0.0216i$

(b



c) إجابة ممكنة: عند تطبيق $f(z) = z^2$، في كل مرة، فإن العدد المركب الناتج يقترب من نقطة الأصل وتقترب قيمته المطلقة من الصفر. لذا Z_{100} تقع قريبة جداً من نقطة الاصل

38) إجابة ممكنة: أوجد الصورة القطبية للجذر $(-1-i)$ فستكون

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

ثم أوجد $$\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^4$$

تحصل على العدد المركب z، ثم أوجد جذوره الاخرى، و تكون الاجابة النهائية هي:

$$-4\ ;1+i\ ,-1+i\ ,-1-i\ ,1-i$$

حل كلا من المعادلات الآتية باستعمال صيغة الجذور المختلفة:

39) $$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ ,-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ ,-i$$

40) $$2.77+1.15i\ ,-1.15+2.77i$$

$$\approx -2.77-1.15i\ ,1.15-2.77i$$

41) $$0.79+0.79i,\ -1.08+0.29i,\ 0.29-1.08i$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

42) **اكتشف الخطأ:** باسم؛ إجابة ممكنة: لقد قام أحمد بتحويل العدد المركب إلى الصورة القطبية فقط؛ لذا عليه استعمال نظرية ديموافر لحساب القوة الخامسة.

تحد:

(43

$$3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),\ 3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\ 3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right),\ 27i$$

(44

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ 2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$
$$2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right),\ 2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right),\ -16$$

45) **برهان:**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)}{r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}\right)$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}\right)\cdot\left(\frac{\cos\theta_2-i\sin\theta_2}{\cos\theta_2-i\sin\theta_2}\right)$$
$$=\frac{r_1}{r_2}$$

$$\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - i^2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\cos\theta_2 - i^2\sin^2\theta_2}\right) = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - i^2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right)$$

$$\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \text{in}\theta_1\sin\theta_2\right)$$

$$\frac{r_1}{r_2}\left[\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right) + i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_1\right)\right]$$

$$\frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right]$$

46) تحد: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

47) اكتب:

1) اكتب الصيغة العامة للجذور النونية للعدد المركب وهي:

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0,1,2,\ldots,n-1$

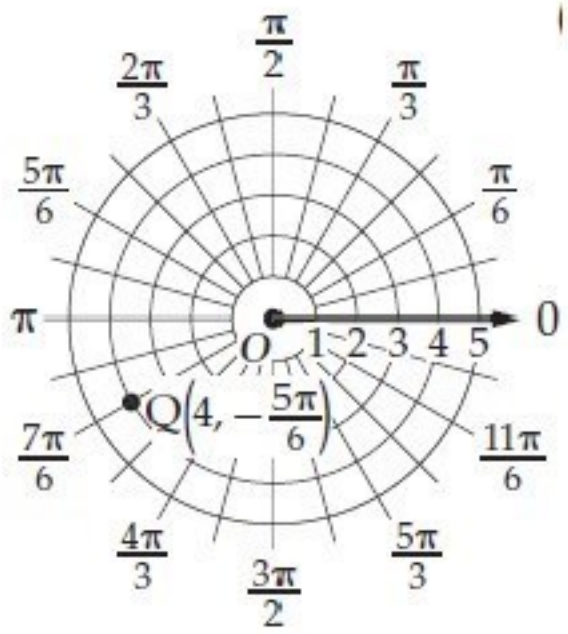
2) عوّض عن n بالقيمة المطلوبة، إذا أردت إيجاد الجذور الرباعية ($n = 4$) وإذا أردت إيجاد الجذور الخماسية ($n = 5$) ، وهكذا.

3) افترض أن $k = 0$ ، وعوض في الصيغة العامة؛ لإيجاد الجذر الأول، ثم افترض أن $k = 1$ ، وعوِّض لإيجاد الجذر الثاني، وهكذا حتى تصل إلى $n - 1$ ، فتحصل على جميع الجذور المطلوبة.

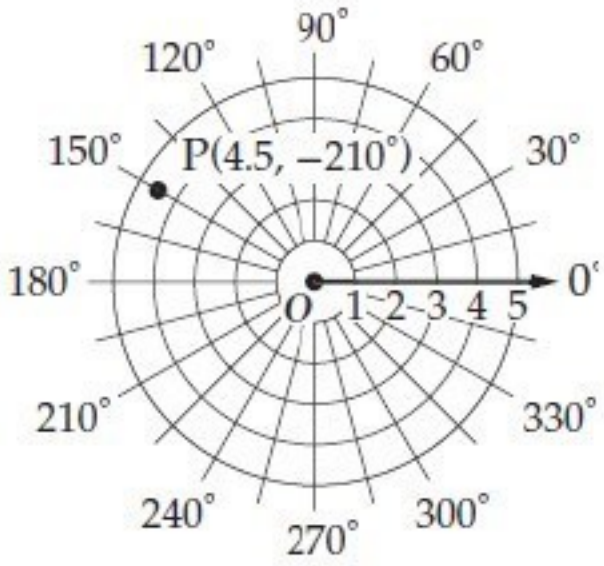
مراجعة تراكمية

مثل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

48)

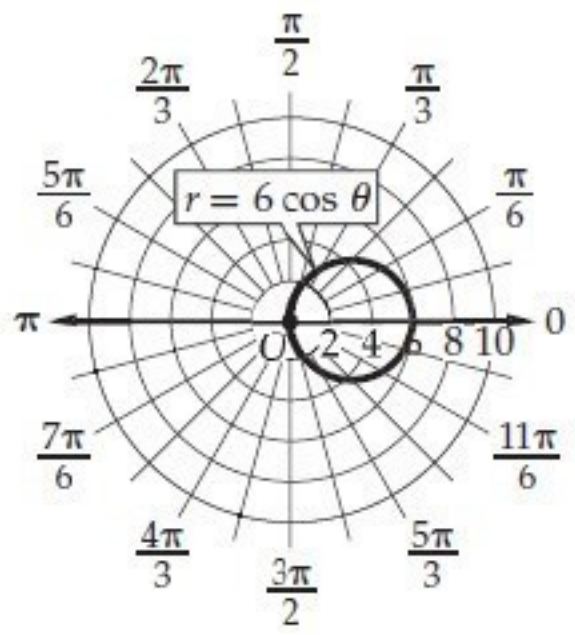


49)

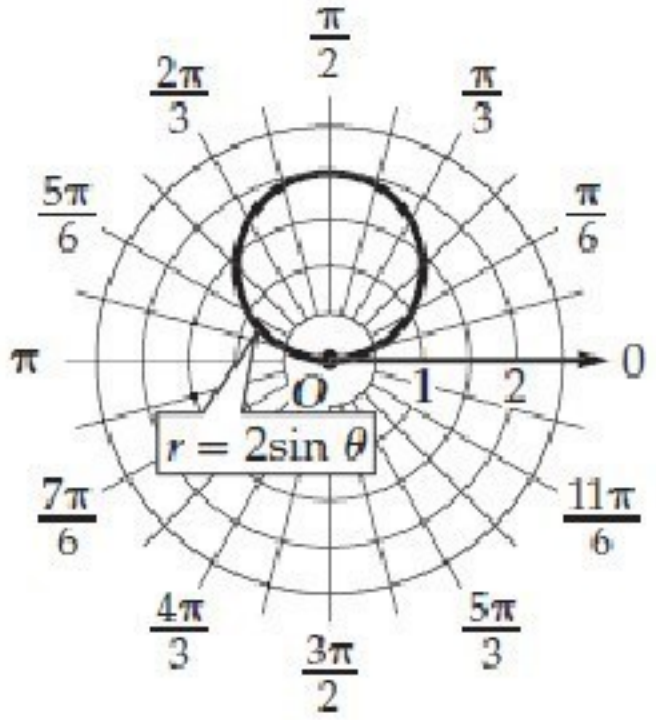


حدد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية مما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية، وعزز إجابتك بتمثيلها في المستوى القطبي:

50) دائرة، $r = 6 \cos \theta$



51) دائرة، $r = 2\sin\theta$



أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي:

52) $\approx \sqrt{29}$

53) ≈ 4.84

حول الإحداثيات القطبية لكل مما يأتي إلى إحداثيات ديكارتية:

54) $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

55) $\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$

تدريب على اختبار:

A (56

C (57

A (58

دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة مما يأتي:

1) التمثيل القطبي

2) المستوى المركب أو مستوى آرجاند

3) نظام الإحداثيات القطبية

4) السعة

5) القطب

6) المقياس

7) مستوى آرجاند

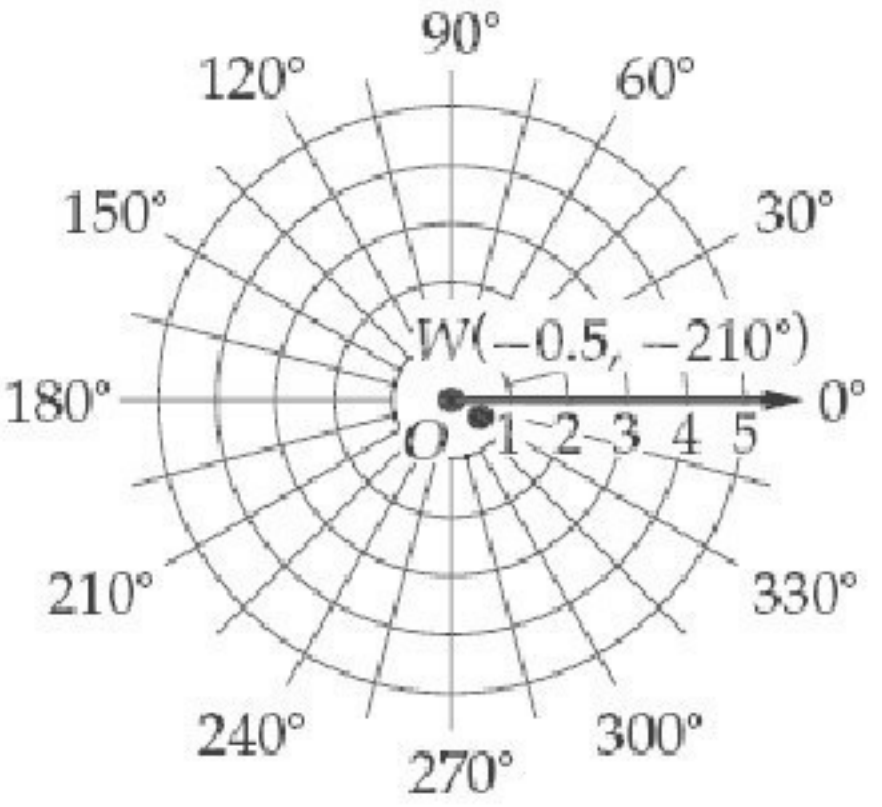
8) المحور القطبي

مراجعة الدروس:

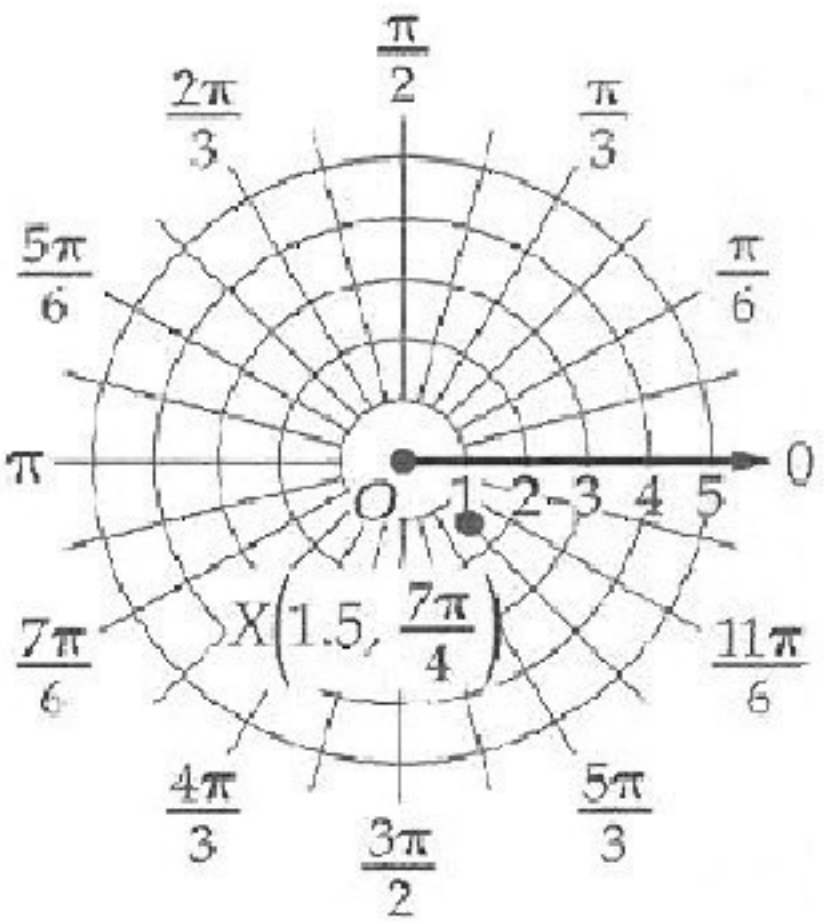
1–2: الإحداثيات القطبية:

مثل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي:

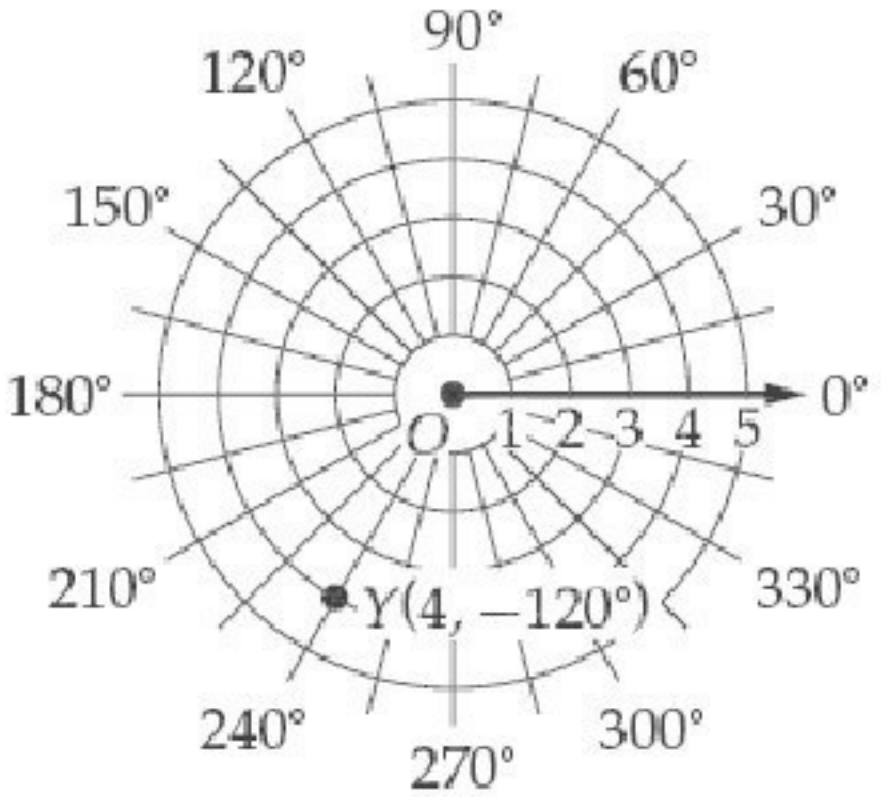
9)



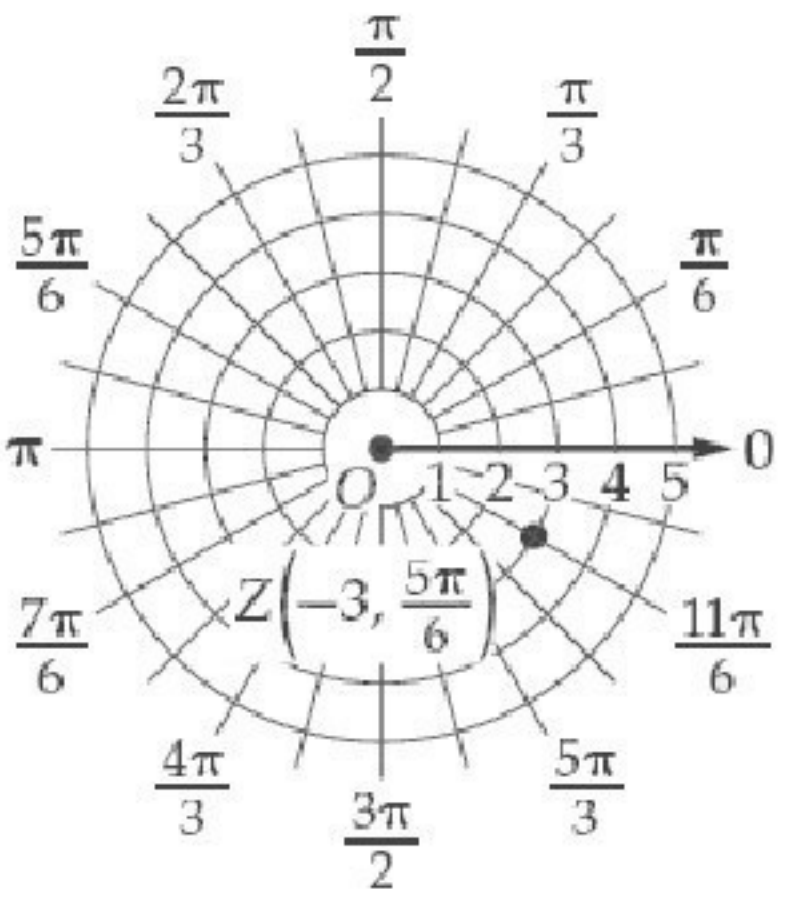
(10



(11

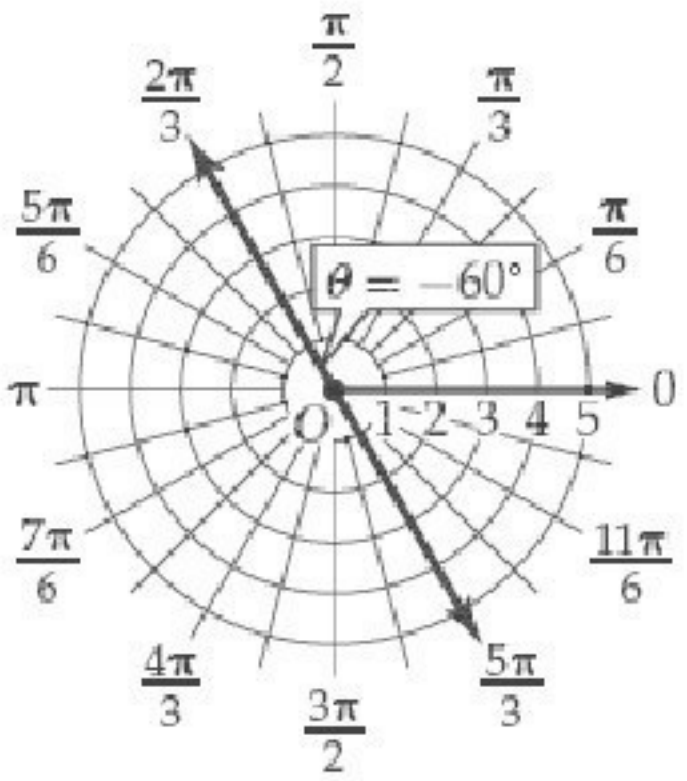

90°
120°
60°
150°
30°
180°
0°
O
1
2
3
4
5
210°
330°
Y(4, −120°)
240°
300°
270°

(12

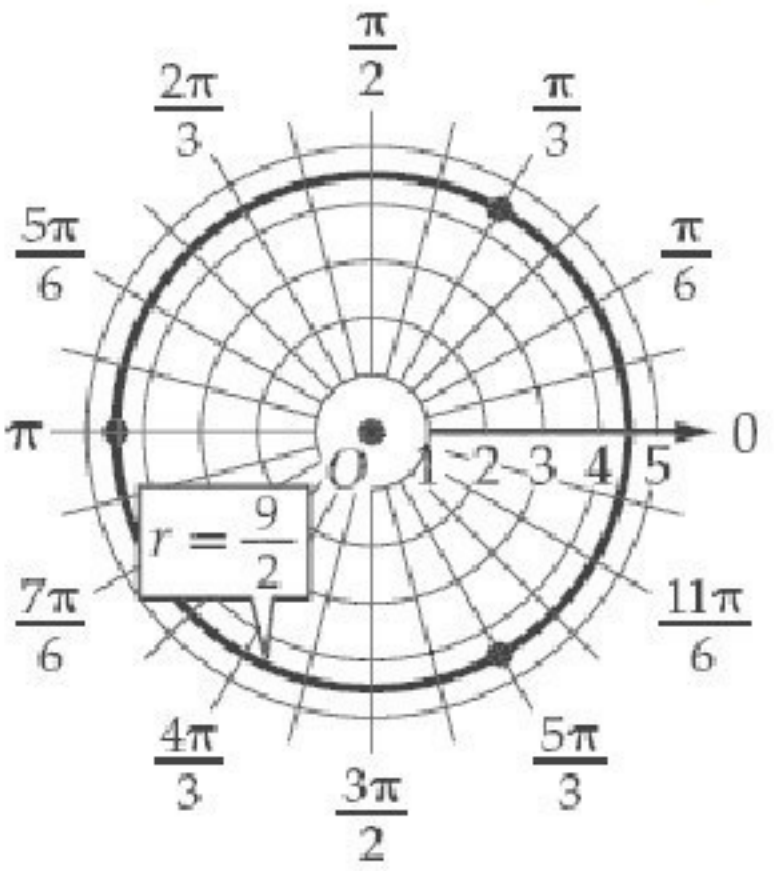

π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
0
O
1
2
3
4
5
Z(−3, 5π/6)
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2

مثل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانياً:

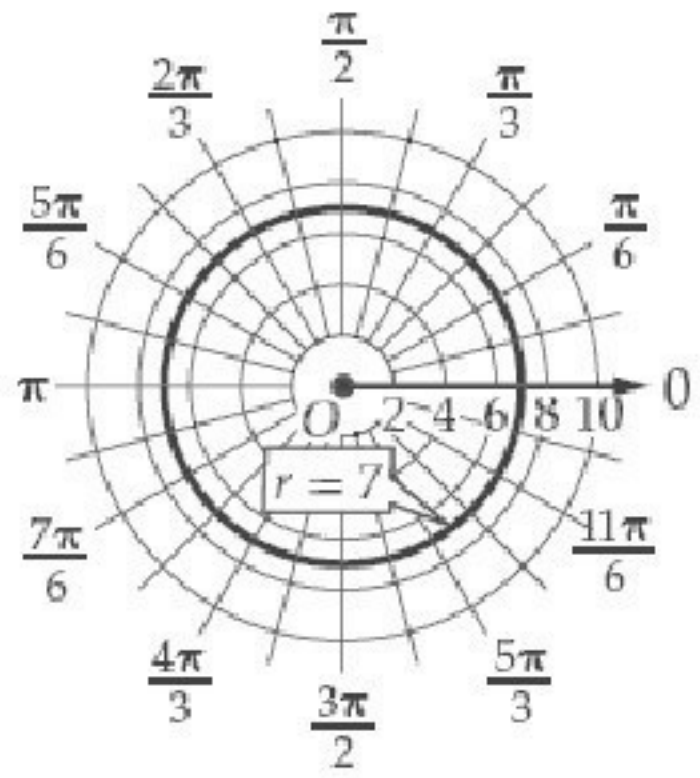
(13



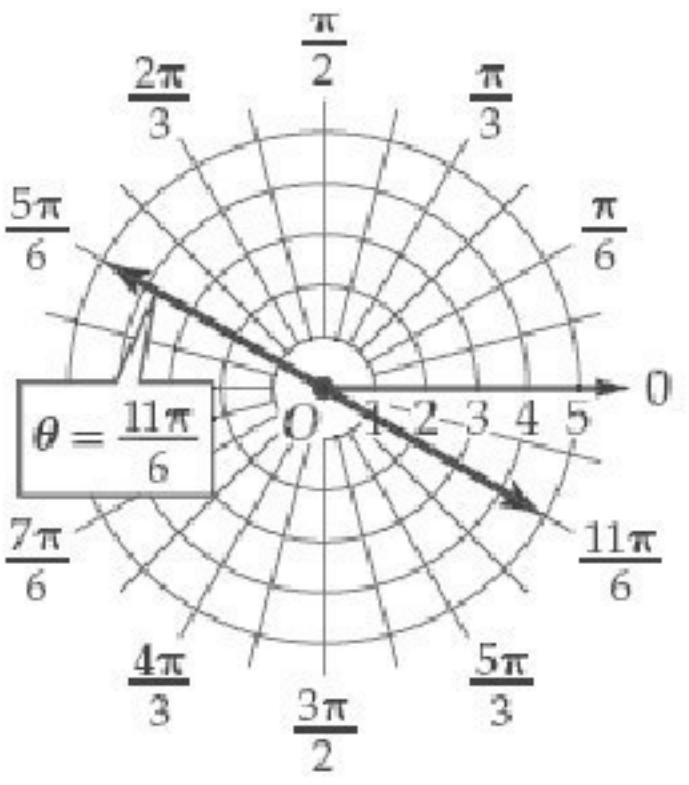
(14



(15


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
π
0
O 2 4 6 8 10
$r = 7$
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{11\pi}{6}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$

(16


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
0
$\theta = \frac{11\pi}{6}$
O 1 2 3 4 5
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{11\pi}{6}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط مما يأتي:

17) 4.36

18) 1

19) 6.74

20) 7.28

2–2: الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات:

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كل مما يأتي، حيث $-2\pi \le \theta \le 2\pi$

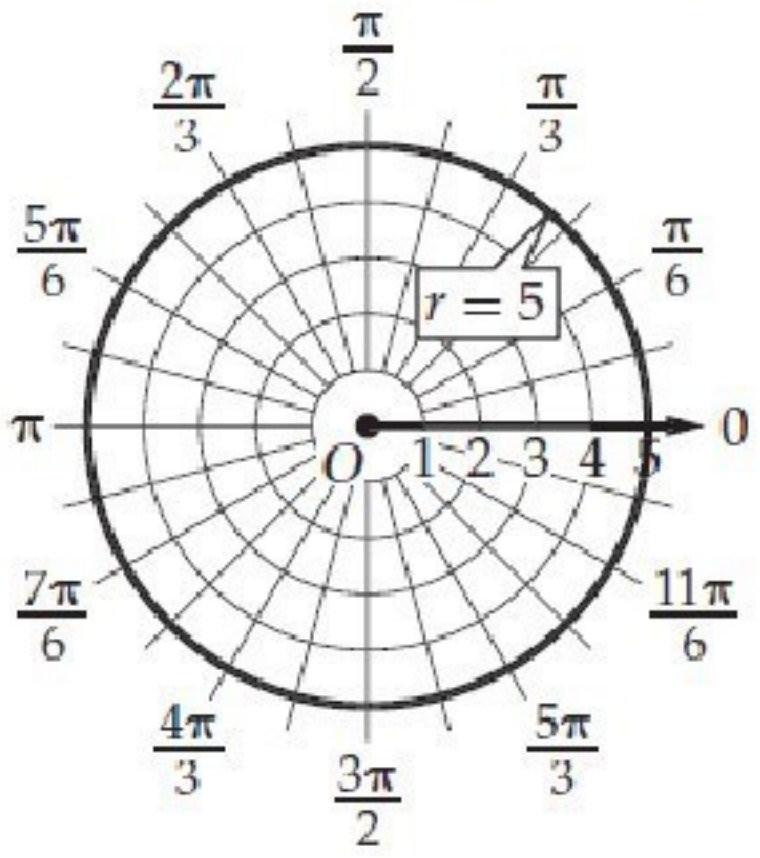
21) (5.1, 1.77), (– 5.10, 4.91)

22) (7.62, 1.17), (– 7.62, 4.31)

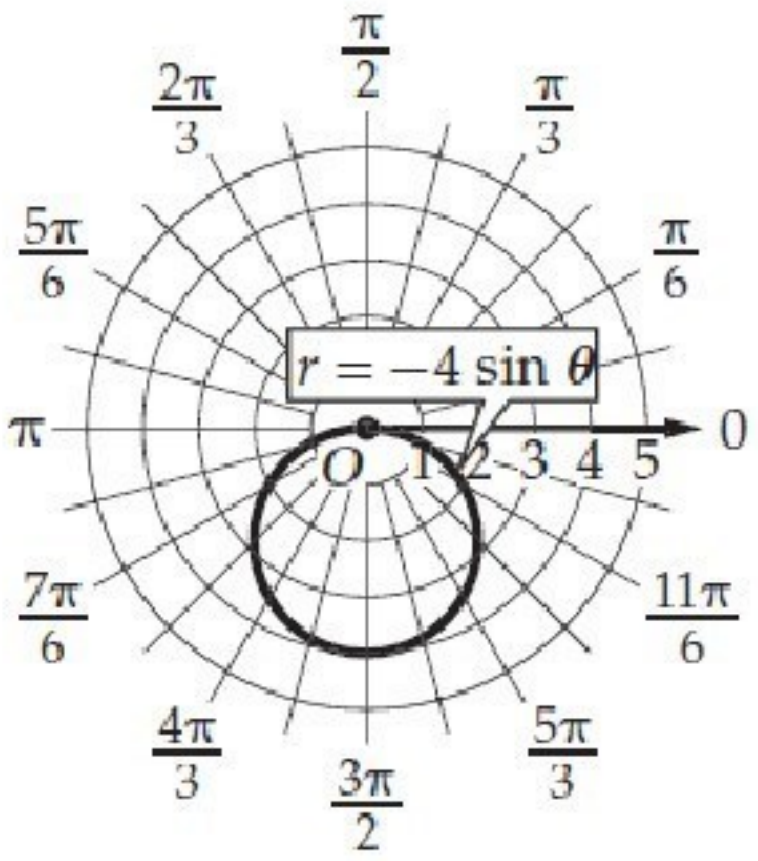
23) (2.24, 1.11), (– 2.24, 4.25)

اكتب كل معادلة على الصورة الديكارتية، وحدد نوع تمثيلها البياني:

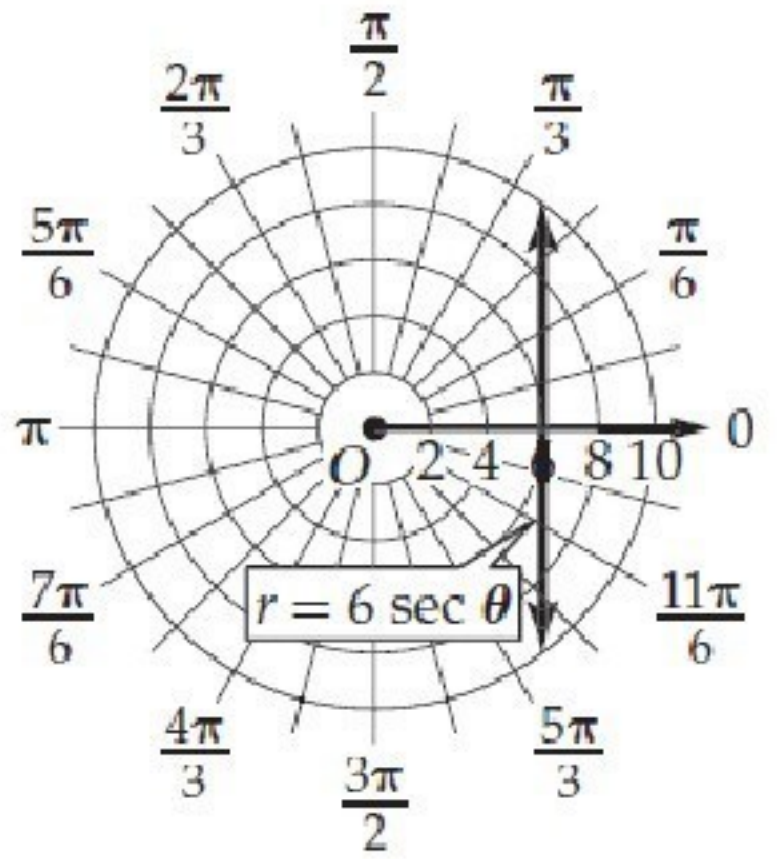
24) $x^2 + y^2 = 25$، دائرة



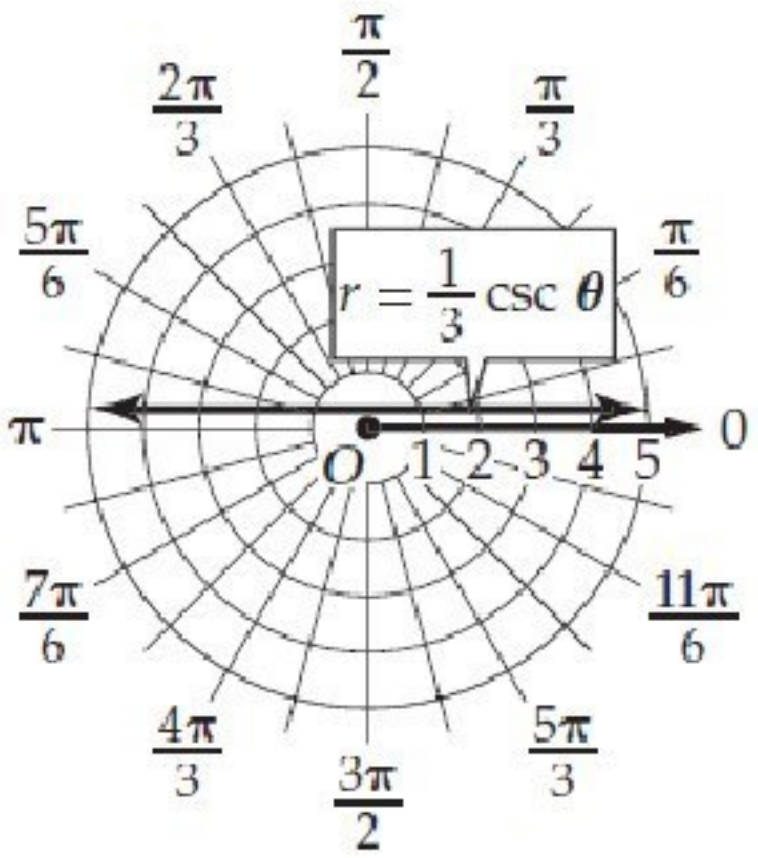
25) $x^2 + (y+2)^2 = 4$، دائرة



26) $x = 6$، مستقيم



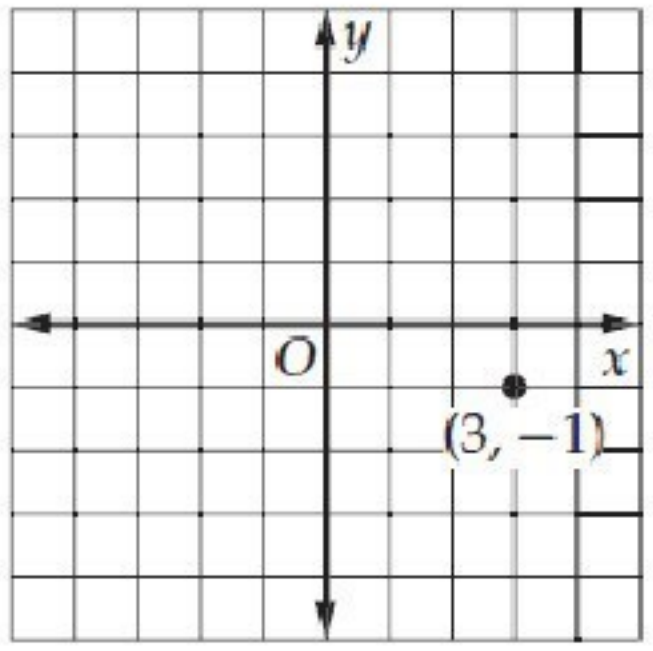
(27 $y = \frac{1}{3}$، مستقيم



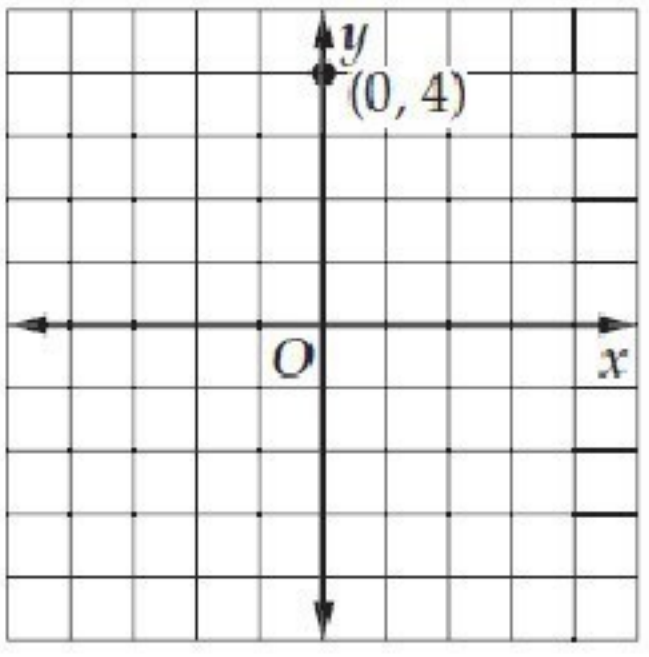
3–2: الأعداد المركبة ونظرية ديموافر:

مثل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

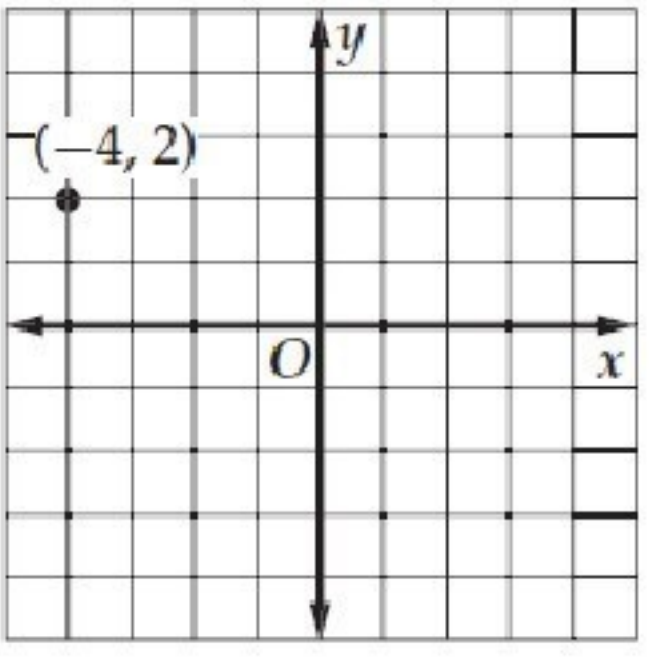
28) $\sqrt{10}$



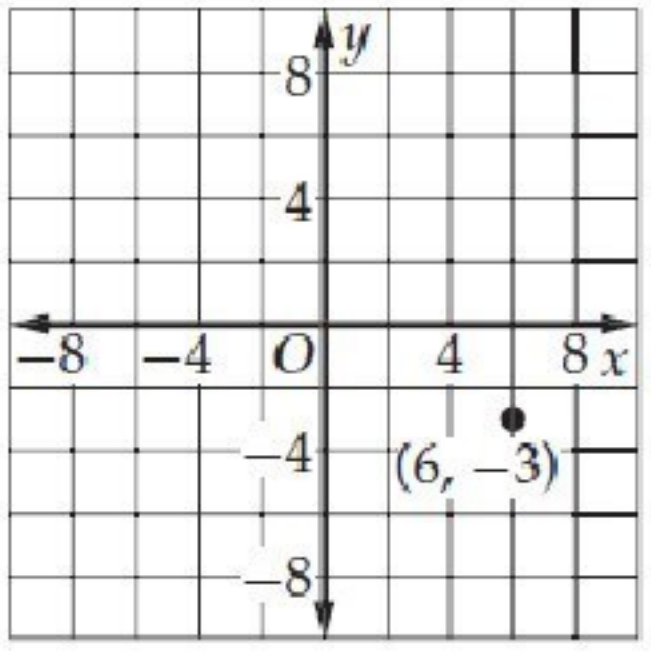
29) 4



30) $2\sqrt{5}$



$3\sqrt{5}$ (31



عبر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

(32 $\approx 3.317(\cos 0.441 + i \sin 0.441)$

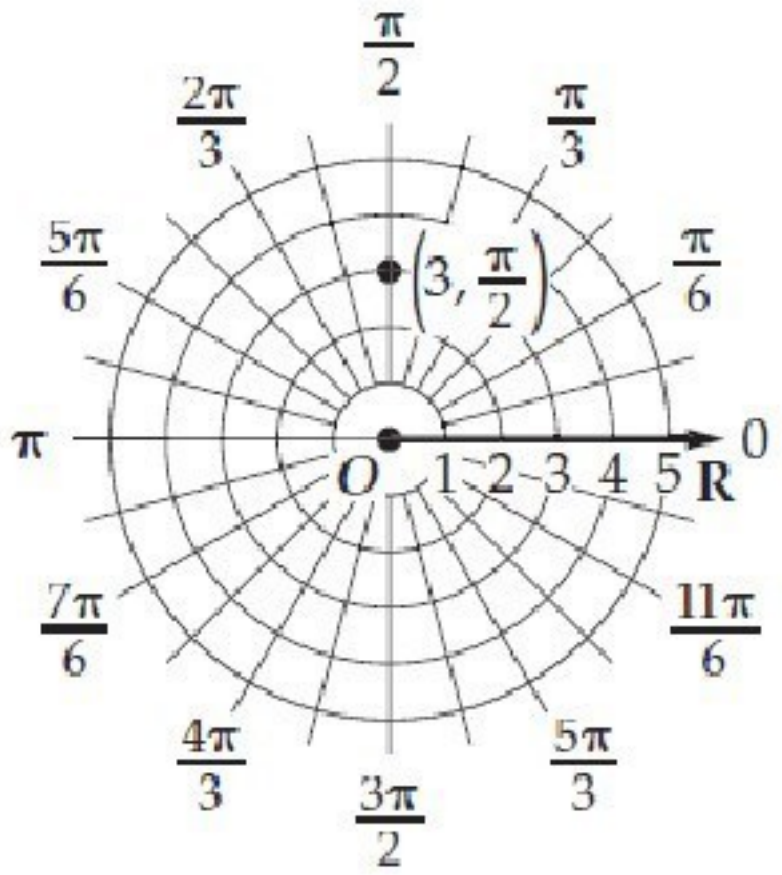
(33 $\approx 9.434[\cos(2.1294) + i \sin(2.1294)]$

(34 $\approx 4.359(\cos 3.55 + i \sin 3.55)$

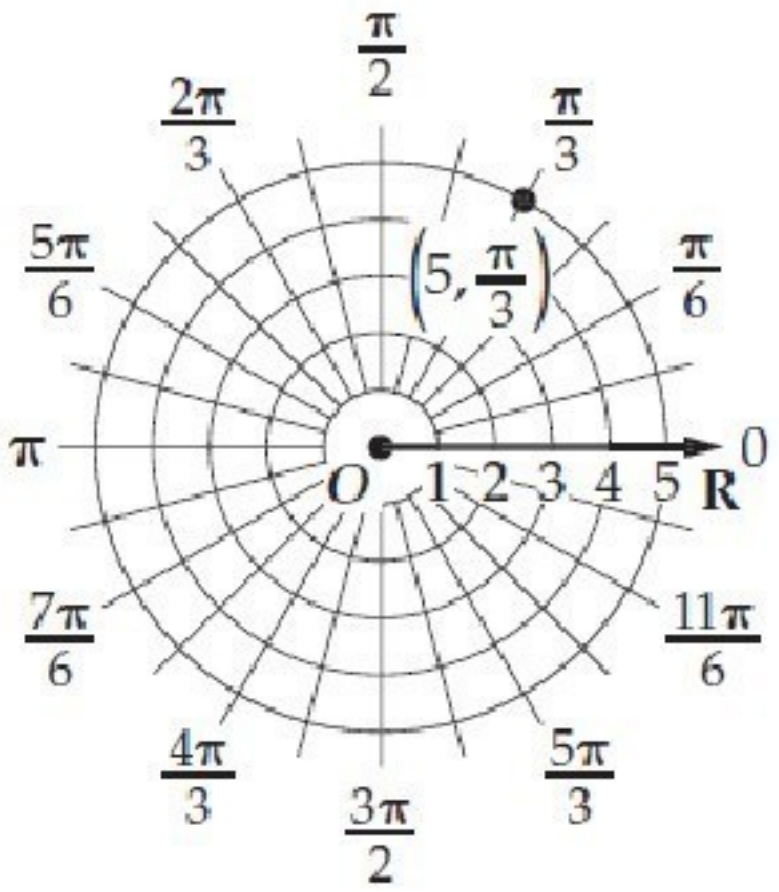
(35 $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

مثل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

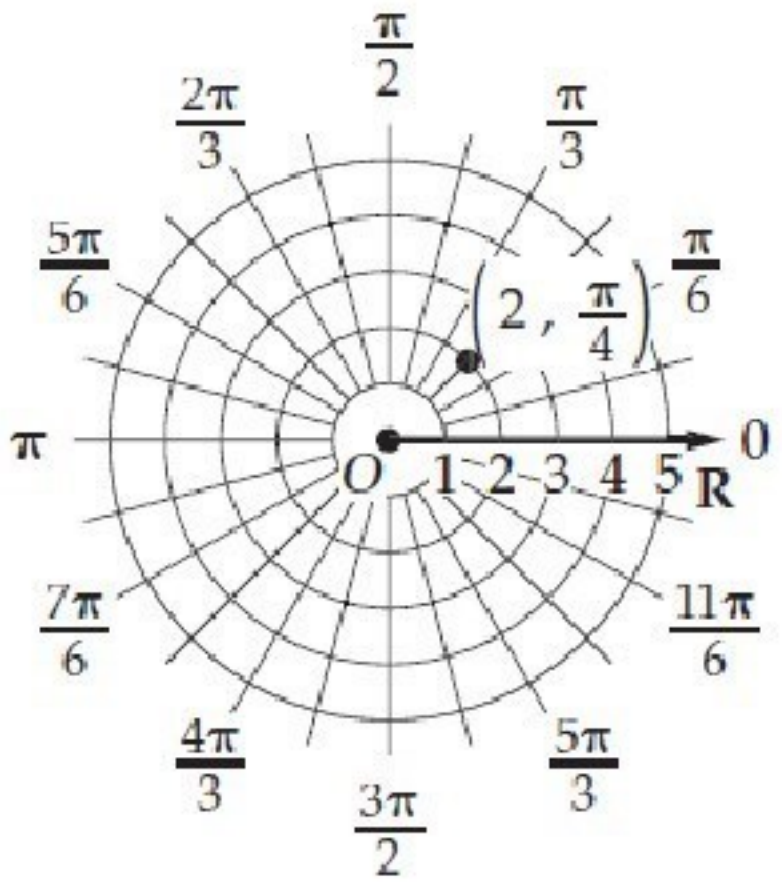
(36 $3i$



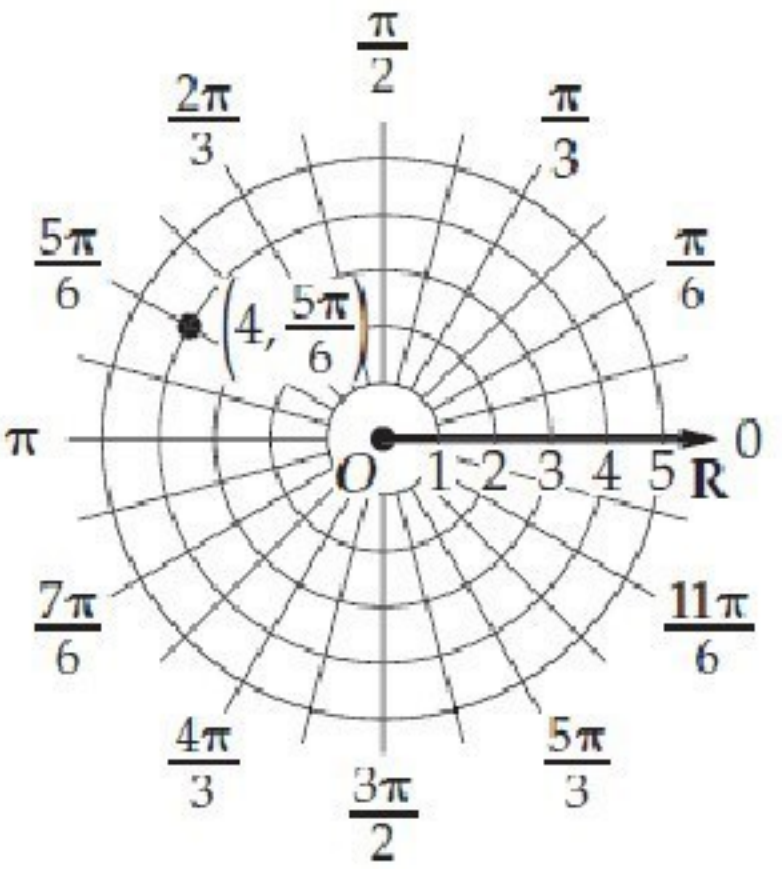
(37 $2.5 + 2.5\sqrt{3}i$



$\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ (38



$-2\sqrt{3} + 2i$ (39



أوجد الناتج في كل مما يأتي على الصورة القطبية، ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

$$8\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$$ (40

$-4\sqrt{3} - 4i$

$$4\left[\cos\left(345^\circ\right)+i\,\sin\left(345^\circ\right)\right]$$ (41

$$\approx 3.86-1.04i$$

$$15\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$ (42

$$\frac{15}{2}+\frac{15\sqrt{3}}{2}i$$

$$2\left[\cos\left(60^\circ\right)+i\,\sin\left(60^\circ\right)\right]$$ (43

$$1+i\sqrt{3}$$

44) تقريباً – 23 – 119i

$$\approx 107+0.21i$$, (45

$$\approx -0.21+1.07i$$,

$$\approx -1.07-0.21i \ , \approx 0.21-1.07i$$

تطبيقات ومسائل:

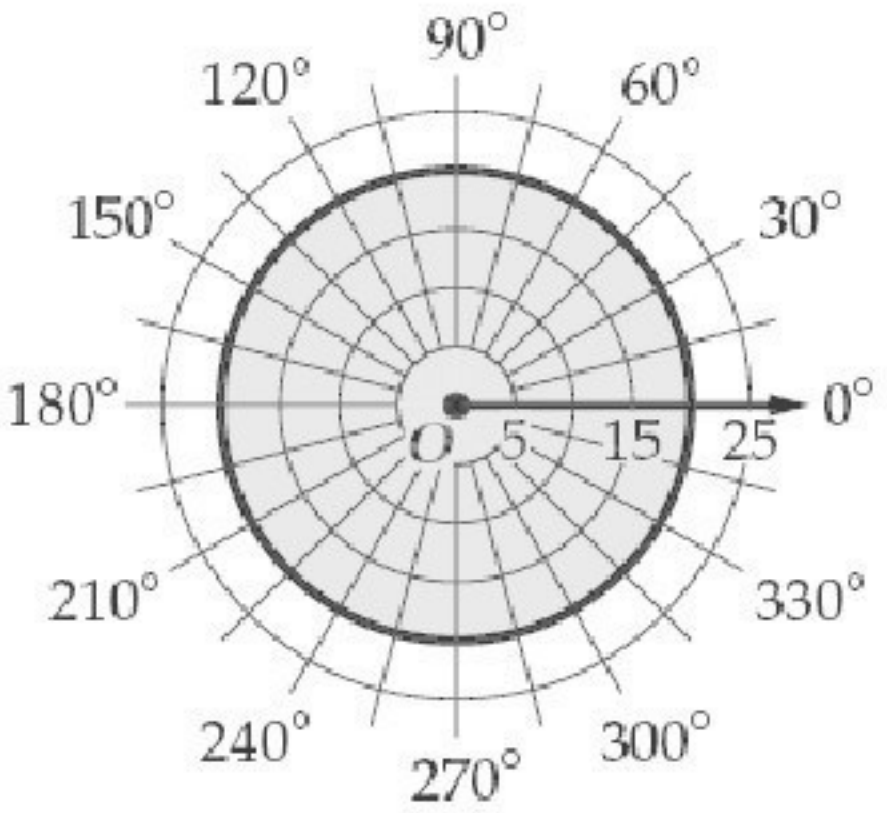
46) ألعاب:

a) 20

b) إجابة ممكنة: $(2, 180^\circ)$ أو $(2, 0^\circ)$

47) حدائق:

a)



b) $838\ ft^2$ تقريباً

48) عجلة دوارة:

a) $\left(12.9\ ,\ \frac{\pi}{12}\right)$

b) (12.5, 3.3)

c) 3 ft.

49) كهرباء:

a) $(15.2 - 37.9j)\ \Omega$

b) $(21.9 + 66.0j)$ أمبير

50) تحويل جوكوسكي:

a) 1

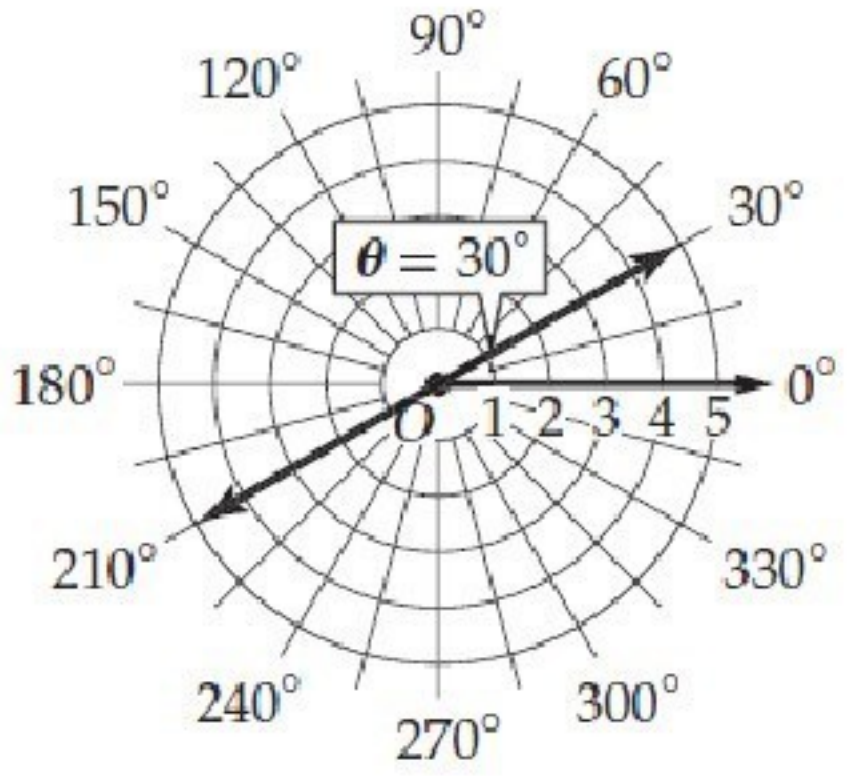
اختبار الفصل

1) $\left(2.5\,,\frac{\pi}{3}\right),\left(2.5\,,-\frac{5\pi}{3}\right),\left(-2.5\,,\frac{4\pi}{3}\right)$

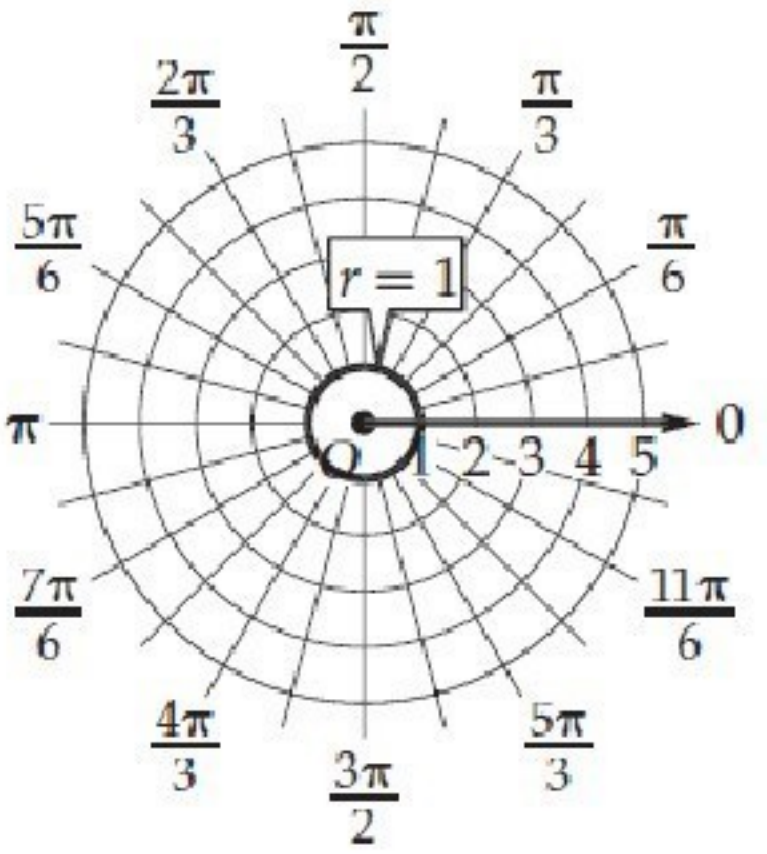
2) $\left(4\,,\frac{19\pi}{12}\right),\left(4\,,-\frac{5\pi}{12}\right),\left(-4\,,\frac{7\pi}{12}\right)$

مثل بيانيا في المستوى القطبي كلا من المعادلات الآتية:

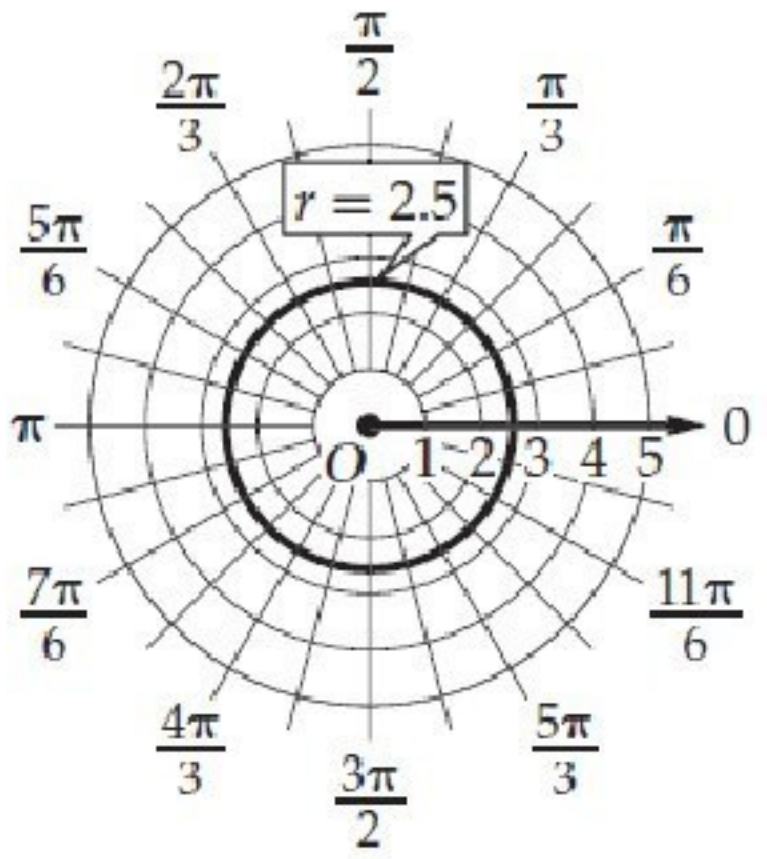
3)



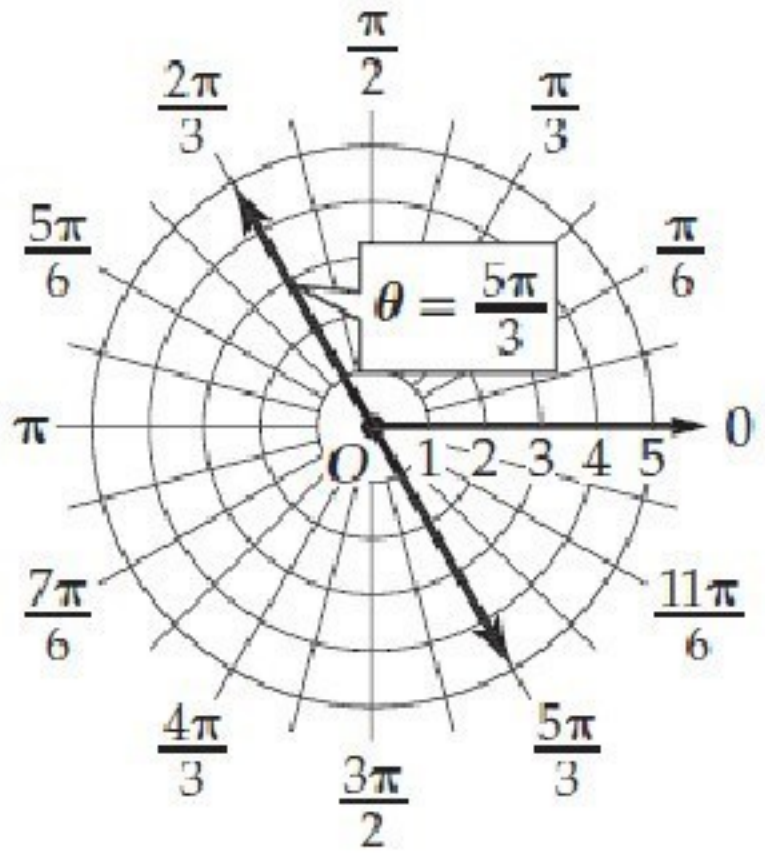
(4


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
r = 1
π
0
O 1 2 3 4 5
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2

(5


π/2
2π/3
π/3
r = 2.5
5π/6
π/6
π
0
O 1 2 3 4 5
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2

(6



7) رادار:

a) (– 28, 60)

b) إجابة ممكنة: (90, 303.7°)

c) 156 mi

8) دائرة، $r = 14 \cos \theta$

9) $(16.2 + 21.6j)\ \Omega$

10) D

أوجد كل قوة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وقرب إلى أقرب عدد صحيح إذا لزم الأمر:

11) $47 - 52i$

12) $1081 + 840i$

الفصل 7

الاحتمال والإحصاء
Probability and Statistics



فيما سبق:

درست إحصائيات العينة ومعالم المجتمع واحتمالات الحوادث المركبة.

والآن:

- أميّز المسوحات، والدراسات والتجارب.
- أكوّن التوزيعات الاحتمالية، وتمثيلاتها البيانية، وأستعملها في إيجاد الاحتمال.
- أستعمل القانون التجريبي لإيجاد الاحتمالات.
- أميّز بين العينة الإحصائية، والمجتمع الإحصائي.

لماذا؟

التربية: يستعمل الاحتمال والإحصاء في دراسة الفرضيات التربوية واختبارها. حيث تُستعمل المسوحات، وتجرى التجارب؛ لتحديد الطرائق التعليمية التي تؤدي إلى تعلم أفضل. ويستعمل الإحصاء في تحديد الدرجات عند تمثيل درجات الفصول بيانيًا، أو عندما يريد المعلمون تقييم درجات الطلاب.

قراءة سابقة: كوّن قائمة بالأشياء التي تعرفها عن الاحتمال والإحصاء، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

التهيئة

اختبار سريع:

حدد ما إذا لزم كانت الحوادث الآتية مستقلة، أوغير مستقلة:

1) مستقلة

2) غير مستقلة

3) مستقلة

حدد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تتطلب تطبيق التباديل أو التوافيق في حلها:

4) تباديل

5) تباديل

6) توافيق

اكتب مفكوك كل من العبارات الآتية:

(7 $a^4-8a^3+24a^2-32a+16$

(8 $64a^6+192a^5b+240a^4b^2+160a^3b^3+60a^2b^4+12ab^5+b^6$

(9 $243x^5-810x^4y+1080x^3y^2-720x^2y^3+240xy^4-32y^5$

(10 $\frac{a^5}{32}+\frac{5a^4}{8}5a^3+20a^2+40a+32$

3-1 الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة

تحقق

1A) متحيزة؛ لأن الرياضة المفضلة للاعبي كرة السلة في الغالب هي كرة السلة.

1B) متحيزة؛ لأن رياضتهم المفضلة الأكثر احتمالاً ستكون كرة القدم.

2A) هذا سؤال متحيز؛ لأنه ذكر مادة محددة، ولم يذكر غيرها.

2B) سؤال متحيز؛ لأنه حدد مادتين للاختيار بينهما.

2C) سؤال غير متحيز؛ لأنه يعطي الإجابة التي يبحث عنها من دون تحيز.

3) دراسة قائمة على الملاحظة

4) دراسة مسحية؛ حيث من الأفضل أن يتم اختيار عينة عشوائية من المدرسة الثانوية، لتحصل على عينة غير متحيزة.

5) ارتباط؛ حيث إن الدراسة قد تساعد على الحصول على تقدير ممتاز، ولكنها لا تضمن ذلك.



تدرب وحل المسائل:

حدد ما إذا كانت من الدراستين المسحيتين الآتيتين تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسر إجابتك:

1) متحيزة؛ لأن الوجبة الأكثر تفضيلاً من وجهة نظرهم ستكون المشويات.

2) متحيزة؛ لأن الأشخاص المستهدفين يميلون إلى الطوم أكثر من غيرهم.

3) غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها ليكون في العينة.

4) متحيزة؛ لأن مهنتهم المستقبلية الأكثر تفضيلاً بالنسبة لهم ستكون الطب

حدد سؤال الدراسة المسحية الذي تحصل منه على الإجابة المطلوبة بشكل أفضل:

b (5

c (6

a (7

حدد ما إذا كان كل موقف من المواقف الآتية يمثل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بين ما اذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا:

8) دراسة تجريبية: اختار المعلم شعبتين بشكل عشوائي. المجموعة التجريبية تراجع المادة مع المعلم في الحصص. والمجموعة الضابطة هي الشعبة أخرى، وهذه دراسة متحيزة؛ لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

9) دراسة قائمة على الملاحظة.

10) دراسة تجريبية، لأنه تم تقسيم الأشخاص الى مجموعتين عشوائياً. تتضمن المجموعة التجريبية من يقرأ القرآن الكريم قبل النوم، وتتضمن المجموعة الضابطة من لا يفعل ذلك، وهذه تجربة متحيزة؛ لأن كل مشارك يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

11) دراسة قائمة على الملاحظة.

12) دراسة قائمة على الملاحظة.

حدد ما إذا كانت كل من الحالات الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة بالملاحظة، أو دراسة تجريبية، وفسر إجابتك:

13) دراسة تجريبية: المستهدفون أشخاص لديهم صلع. والمجموعة التجريبية تتلقى معالجة، بينما المجموعة الضابطة تتلقى معالجة شكلية.

14) مسحية، من الأفضل أن تستطلع آراء أشخاص يختارون بصورة عشوائية.

15) دراسة قائمة على الملاحظة.

16) دراسة قائمة على الملاحظة.

17) دراسة تجريبية: الفئة المستهدفة بساتين فيها غزلان. والمجموعة التجريبية بساتين تتلقى معالجة معينة تبعد الحيوانات عنها، وبقية البساتين هي المجموعة الضابطة وتتلقى معالجة شكلية.

بين ما إذا كانت كل من العبارات الآتية تظهر ارتباطاً، أو سببية، وفسر إجابتك:

18) ارتباط، مع أن ممارسة الرياضة تجعل الإنسان في نفسية أفضل، إلا أن أحداً منهما لا يتسبب بالضرورة في الآخر.

19) العبارة تظهر سببية؛ لأن نزول المطر بغزارة سبب كاف لوحده، لعدم ذهاب الطلاب إلى المدرسة، على الرغم من أن الغياب يمكن أن تسببه عوامل اخرى مثل المرض.

20) العبارة تظهر سببية؛ لأن الحر في الصيف سبب مباشر في زيادة مبيعات المشروبات الباردة، فجسم الإنسان بحاجة الى سوائا أكثر لتعويض ما يفقده.

21) ارتباط، مع أن الاثنين يرتبطان كل منهما بالأخر، لكن كثرة القراءة قد لا تؤثر في الذكاء.

22) ارتباط، حيث إن للدراسة علاقة بين الاثنين، لكن أحدهما قد لا يسبب الآخر.

23) ارتباط، مع أنه ربما توجد علاقة بين الاثنين، إلا أن أحدهما قد لا يسبب الآخر.

24) استبانات: إجابة ممكنة: نعم متحيزة؛معظم العاملين الذين يتركون عملهم في الشركة،هم غير راضين عنها،وإلا لم يتركوها.

مسائل مهارات التفكير العليا:

25) اكتشف الخطأ: إجابة ممكنة: ليس أي منهما، كلا التجربتين متحيزتان؛ لأن الموجودين في المجموعة التجريبية يعلمون ذلك.

26) تحد: إجابة ممكنة: الدراسات المسحية بالهاتف تكون عادة متحيزة؛ لأن الذين لم تُدرج أسماؤهم لن يتم الاتصال بهم، وكذلك الذين ليس لديهم هواتف.

27) اكتب: إجابة ممكنة: تُسحب العينات العشوائية من المجتمع الكلي للحصول على عينة ممثلة للمجتمع ، وبغرض تجنب التحيز. يتم استعمال الإختيار العشوائي؛ لتحديد الأفراد في كل من المجموعتين التجريبية والضابطة، بحيث يكون لكل منهم الفرصة ذاتها ليكون ضمن أي من المجموعتين. كما يتم التأكد أن كل فرد لا يعرف إلى أي مجموعة ينتمي.

28) مسألة مفتوحة:

a) إجابة ممكنة: دراسة مسحية تتناول استطلاع رأي 50 طالبا في الصف الأول الثانوي حول الطريقة التي سيقررون بناء عليها مسار التعليم الثانوي المفضل لهم. العينة: سجل طلاب المدرسة جميعهم في قائمة، واسحب عشوائيا 50 طالبا . موضوع الدراسة المسحية: طريقة تحديد الطالب خياره في مسار التعليم الثانوي الذي يرغب فيه على مقياس من 1 إلى 5 ، حيث يدل الرمز 1 على المعارضة بشدة، والرمز 5 على الموافقة بشدة.

b) إجابة ممكنة: ألاحظ 20 طالباً نصفهم لديه غرفة للدراسة، وأقارن درجاتهم في نهاية الفصل.

c) إجابة ممكنة: اختر عينة من 20 شخصا عشوائيا مصابين بالرشح. أعط نصفهم علاجا، وأعط النصف الآخر علاجا شكليا، وقارن بين النتائج بعد 3 أسابيع . المجموعة التجريبية هي مجموعة الأشخاص الذين أعطوا العلاج المقصود، والمجموعة الضابطة هم الذين أعطوا علاجا محايدا (شكليا).

29) تبرير: إجابة ممكنة: يمكن أن يحدث التحيز في الدراسة التجريبية عندمايعلم الأفراد في المجموعة التجريبية أنها هي المجموعة التي ينتمون إليها. فمثلا إذا علم أفراد مجموعة تجريبية أنهم يتعرضون لعلاج بقصد زيادة مستوى الطاقة لديهم، فقد يحاولون التأثير في نتائج الدراسة، وإثبات أن العلاج فاعل أو غير فاعل، وكذلك إذا علم أفراد المجموعة الضابطة أنهم يأخذون علاجا غير فاعل، فلن تكون لديهم الدافعية لاستكمال التجربة.

مراجعة تراكمية

إذا كان $u = (2, -3)$, $v = (1, 6)$ ، فأوجد كلا مما يأتي:

30) $\langle 4 , -6 \rangle$

31) $\langle 3 , 3 \rangle$

32) $\langle 3 , -12 \rangle$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول AB المعطاة بدايته ونهايته في كل مما يأتي:

33) $\sqrt{123}$, $\langle -1 , 1 , -11 \rangle$

34) $\sqrt{29}$, $\langle 3, -4 , -2 \rangle$

حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكل نقطة مما يأتي:

35) $(0, 3)$

36) $\left(-\sqrt{3} , -1\right)$

37) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4} , \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

عبر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

38) $\approx 10\ (\cos 0.93 + i \sin 0.93)$

39) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}\right)$

تدريب على اختبار:

حدد ما إذا كانت كل حالة من الحالات الآتية تمثل دراسة تجريبية أو دراسة بالملاحظة، وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة، ثم بين ما إذا كانت متحيزة أو لا:

40) دراسة تجريبية: وضع الأشخاص في مجموعات عشوائية. تتضمن المجموعة التجريبية التي تقوم بالتدريبات الرياضية لمدة ساعة واحدة يومياً، وتتضمن المجموعة الضابطة من لا يفعل ذلك، وكتلة الجسم للمجموعة التجريبية ربما تصبح أكبر.

الدراسة التجريبية متحيزة، لأن أفراد المجموعة التجريبية يعلمون أنهم يخضعون لدراسة، وأفراد المجموعة الضابطة أنهم لا يتدربون أسوة بأفراد المجموعة التجريبية.

41) دراسة قائمة على الملاحظة

42) دراسة قائمة على الملاحظة

3-1 توسع: معمل الحاسبة البيانية: تقويم البيانات المنشورة

حلل النتائج:

قارن تمثيلك البياني بتمثيل الصحيفة:

1) نعم

2) إجابة ممكنة: تمثيل الصحيفة، لأنه مضلل، حيث بدأ التدريج على المحور الرأسي من العدد250 وليس من الصفر، ولذلك تظهر المبيعات في السنوات 94 – 90 ، وكأنها أكثر من ضعف المبيعات في السنوات 89 – 85 ، وهي في الحقيقة ليست كذلك.

3) إجابة ممكنة: يريد المعرض أن يُظهر أن الزيادة في المبيعات متسارعة بشكل كبير، وهذا ليس مقبولاً؛ لأن البيانات يجب أن تعرض بصورة واضحة.

3-2 التحليل الإحصائي

تحقق

1) المنوال؛ حيث إن الغالبية العظمى من القيم متساوية.

2A) ± 1.75%

2B) بين 39.25% و42.75%

3A) $\mu = 30.6, \sigma = 2.74$

3B) إجابة ممكنة: يجب أن يزداد المتوسط قليلاً تبعاً لذلك، أما الانحراف المعياري فيزداد بشكل كبير.

$\mu = 32.2, \sigma = 8.19$

تدرب وحل المسائل:

أي مقاييس النزعة المركزية يناسب بصورة أفضل البيانات الآتية؟

1) المتوسط؛ لأنه لا توجد قيم متطرفة.

2) الوسيط؛ لأنه توجد قيمة متطرفة.

3) الوسيط؛ لأنه توجد قيمة واحدة متطرفة، و لا توجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات.

4) المتوسط؛ لأنه لا توجد قيم متطرفة.

5) الوسيط؛ لأنه يوجد قيمة واحدة متطرفة أكبر بكثير من بقية القيم وهي66

6) طقس: المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة في البيانات.

7) ألعاب أولمبية:

a) هامش خطأ المعاينة

قانون هامش خطأ المعاينة $= \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$n = 5824$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{5824}}$$

$$\approx \pm 1.31\%$$

$$0.29 + 0.0131 = 0.3031 \approx 30.3\% \text{ (b}$$

$$0.29 - 0.0131 = 0.2769 \approx 27.7\%$$

الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا بأنهم سيشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز تقع بين 27.7% و30.3%

8) رياضة:

a) هامش خطأ المعاينة

قانون هامش خطأ المعاينة $= \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$n = 5669$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{5669}}$$

$$\approx \pm 1.33\%$$

$$0.31 + 0.0133 = 0.3233 \approx 32.3\% \text{ (b}$$

$$0.31 - 0.0133 = 0.2967 \approx 29.7\%$$

الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين أفادوا أنهم يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهرياً تقع بين 29.7% و32.3%

9) تمارين رياضية:

a) $\approx \pm 1.54\%$

b) بين 76.5% و 79.5%أي في الفترة $(79.5\% , 76.5\%)$

10) قيادة:

a) ≈ 4.3

b) الانحراف المعياري للدولة الثانية أكبر كثيرا من الانحراف المعياري للدولة الأولى؛ لذا فالسرعات القصوى في الدولة الأولى أكثر تجانسا؛ أي أن السرعات القصوى قريبة بعضها من بعض، مقارنة بالسرعات القصوى في الدولة الثانية التي تتضمن سرعات قصوى كبيرة جدا، وأخرى صغيرة جدا.

11) تدريب:

0.12

12) اختبارات:

a) المتوسط = 21.18 و الوسيط = 21.4 والقيمتان قريبتان إحداهما من الأخرى

b) 1.02

c) المتوسط الجديد = 21.23

الوسيط الجديد = 21.45

يرتفع المتوسط و الوسيط قليلا.

13) مدارس:

a) المتوسط؛ لا توجد قيم متطرفة في البيانات.

2.35 (b

مسائل مهارات التفكير العليا:

14) مسألة مفتوحة:

إجابة ممكنة:

كتل طلاب الصف الثالث الثانوي (بالكيلوجرام)			
55	61	112	69
62	66	108	91
51	83	79	81
77	92	86	58

لا يوجد منوال، الوسيط = 78، والمتوسط 76.9375. والانحراف المعياري 18 تقريباً.

15) تحد: 2066

16) تبرير: إجابة ممكنة: عند حذف القيمة المتطرفة الكبيرة، ستكون بقية القيم قريبة بعضها من بعض؛ لذا سينقص الانحراف المعياري وينقص المتوسط لبقية القيم أيضاً؛ لأن القيمة المتطرفة الكبيرة هي التي تؤدي الى ارتفاع قيمة المتوسط.

17) تبرير: إجابة ممكنة: سيزداد الوسيط كذلك بمقدار 10، فمثلاً إذا كان الوسيط لمجموعة بيانات يساوي 18، وزيدت كل مفردة بمقدار 10، فإن الوسيط يزداد بمقدار 10 ليصبح 28. ويزداد المتوسط أيضاً بمقدار 10؛ لأن البيانات جميعها زادت بالمقدار نفسه، فمثلاً المتوسط لمجموعة

الأعداد 2 ,2 ,2 ,2 ,2 هو 2، إذا زيدت كل مفردة بمقدار 10 فإنها تصبح 12 ,12 ,12 ,12 ,12، ويصبح المتوسط للمجموعة الجديدة يساوي 12. أما الانحراف المعياري فإنه لا يتأثر مع زيادة كل مفردة بالقيمة نفسها؛ حيث إن مقدار التباعد في القيم يبقى نفسه، فزيادة كل مفردة بمقدار ثابت لا تؤثر في تباعد القيم الجديدة.

18) اكتب: إجابة ممكنة: مع أن كلاً من المتوسط والوسيط يمثل مركز البيانات، فإن الوسيط هو القيمة التي تقع في منتصف البيانات، بينما يتأثر المتوسط بالقيم جميعها.

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت كل دراسة مسحية مما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، وفسر إجابتك:

19) غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في المجتمع الفرصة نفسها ليكون في العينة.

20) متحيزة؛ لأن لاعبي كرة السلة في الغالب يكونون أطول من المعدل العام لأطوال طلاب المدرسة، لذلك لا تمثل أطوال لاعبي كرة السلة أطوال الطلاب.

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u},\mathbf{v}$ في كل مما يأتي، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أو لا:

21) 0، متعامدان

22) 32، غير متعامدين

23) -40 ، غير متعامدين

24) 2، غير متعامدين

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كل مما يأتي:

25) $(12.53, 1.07), (-12.53, 4.21)$

26) $(9.22, 2.92), (-9.22, 6.06)$

27) $(3.16, 0.32), (-3.16, 3.46)$

تدريب على اختبار:

28) D

29) D

3-3 الاحتمال المشروط

تحقق

1) $\frac{1}{3}$

2) $\frac{1}{4}$

3) B

تدرب وحل المسائل:

يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء، و 6 كرات حمراء، و10 كرات صفراء، و6 كرات بيضاء، و 5 كرات خضراء. إذا سحبت كرة واحدة عشوائياً، فأوجد الاحتمال في كل حالة مما يأتي:

1) $\frac{5}{27}$

2) $\frac{1}{5}$

3) $\frac{10}{21}$

4) $\frac{11}{29}$

5) 0

6) قطاعات دائرية:

$\frac{1}{4}$ أو 25%

7) فحص القيادة:

a) $\frac{32}{41}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{7}$

8) دروس التقوية:

a) $\frac{78}{199}$

b) $\frac{9}{35}$

c) $\frac{121}{175}$

C (9

D (10

إذا ألقيت أربع قطع نقد متمايزة مرة واحدة، فأجب عما يأتي:

11) $\frac{2}{5}$

12) $\frac{4}{15}$

13) $\frac{1}{15}$

14) $\frac{1}{5}$

15) بطاقات:

$\frac{1}{13}$

(16

(a $\frac{2}{5}$

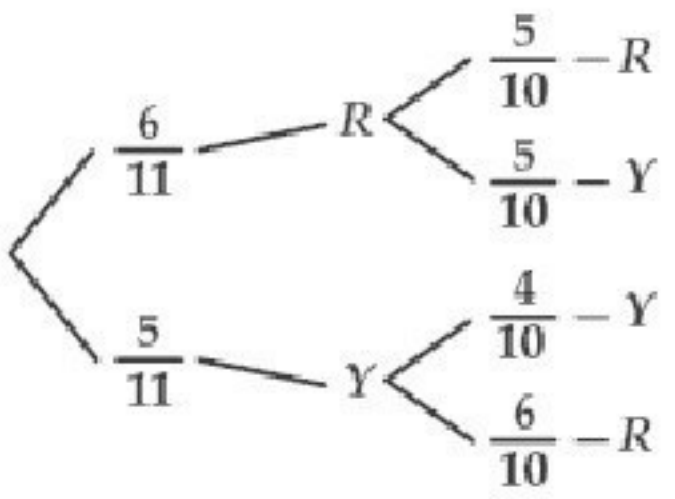
(b $\frac{1}{3}$

مسائل مهارات التفكير العليا:

17) تحد: 0.25%

18) اكتب: إجابة ممكنة: عندما تكون الحادثتان A و B مستقلتين، فإن احتمال حدوث إحداهما لا يؤثر في حدوث الأخرى. فمثلاً: إلقاء حجر النرد لا يؤثر في سحب بطاقة. فاحتمال سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 من بين بطاقات مرقمة علماً بأن الرقم 3 ظهر على حجر النرد يكافئ احتمال سحب الرقم 3 من البطاقات فقط. أي أن $P(A \mid B) = P(A)$. وعندما تكون الحادثتان غير مستقلتين يطبق الاحتمال المشروط. فمثلاً: احتمال سحب البطاقة التي تحمل الرقم 3 دون إرجاع يؤثر في احتمال سحب بطاقة أخرى، حيث يقل فضاء العينة.

19) تبرير: إجابة ممكنة: صندوق به 11 كرة، منها 6 حمراءَ و 5 صفراء. سحب كرتان على التوالي دون إرجاع، استعمل الرسم الشجري لبيان الاحتمالات جميعها.



20) تبرير: إجابة ممكنة: 50%؛ ليس للرميات السابقة تأثير في الرمية 21، فهي حوادث مستقلة.

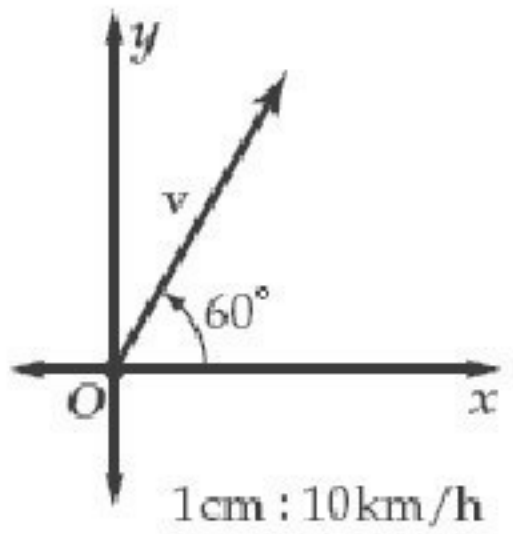
21) مسألة مفتوحة: إجابة ممكنة:

الصف	هندسة	طب
سنة أولى	6	9
سنة ثانية	8	5

احتمال أن يكون من كلية الطب علماً بأنه في السنة الجامعية الأولى يساوي $\frac{3}{5}$

مراجعة تراكمية

22) إجابة ممكنة:



23) ثقافة مالية:

a) المتوسط 26489 ريالاً، والوسيط 25738 ريالاً

b) 2736.46 ريالاً

c) يزداد المتوسط ليصل إلى 26655.67 ويبقى الوسيط كما هو.

حدد إذا كانت دراسة مسحية مما يأتي، تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة. وفسر إجابتك:

24) متحيزة؛ لأن الأشخاص الذين تم مسح رأيهم قد يظنون أن الأطباق التي يقدمها المطعم هي الأكثر شعبية.

25) غير متحيزة؛ لأن لكل شخص في مجتمع الدراسة فرصة متساوية لأن يكون ضمن عينة الدراسة التي استطلعت آراؤهم.

تدريب على اختبار:

26) A

27) $\frac{1}{2}$

اختبار منتصف الفصل

حدد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة، وفسر إجابتك:

1) متحيزة؛ لأن الذين تم استطلاع آرائهم يكون لديهم أطفال أكثر من غيرهم في العادة.

2) غير متحيزة؛ لأن مجتمع الدراسة هو الموظفون في الشركة، ولكل موظف الفرصة نفسها لأن يكون في العينة.

3) غير متحيزة؛ طلاب المدرسة جميعهم يشكلون المجتمع، وكل طالب له الفرصة نفسها أن يكون في العينة.

4) D

حدد ما إذا كانت كل من الحالتين الآتيتين تمثل دراسة تجريبية او دراسة بالملاحظة. وإذا كانت دراسة تجريبية، فحدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة، ثم اذكر إن كانت متحيزة أو لا:

5) دراسة قائمة على الملاحظة

6) دراسة تجريبية: المجموعة التجريبية هي النصف الذي حصل على ساعة لتناول الغداء. والمجموعة الضابطة هي النصف الآخر من الموظفين.

7) المتوسط، لا يوجد قيم متطرفة في البيانات.

8)

a) $\frac{24}{41}$

b) $\frac{17}{30}$

إذا إلقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال كل مما يأتي:

9) $\frac{1}{3}$

10) $\frac{1}{3}$

11) D

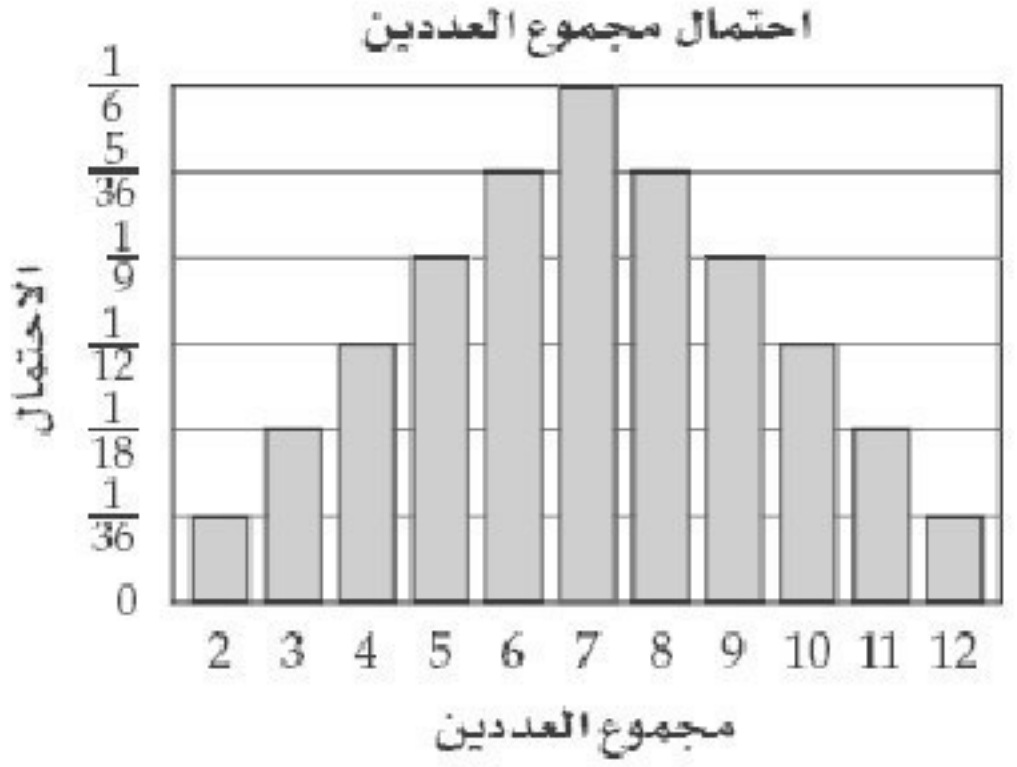
3-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

تحقق

1) 16.5% تقريباً

2) $\frac{1}{56}$ أو 2% تقريباً

3A)



$$7\ ,\ \frac{1}{6} \quad (3B$$

$$\frac{1}{6} \quad (3C$$

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+\ldots+12\times\frac{1}{36}=7 \quad (4$$

تدرب وحل المسائل:

1) $\frac{1}{3}$

2) 13.9% تقريباً

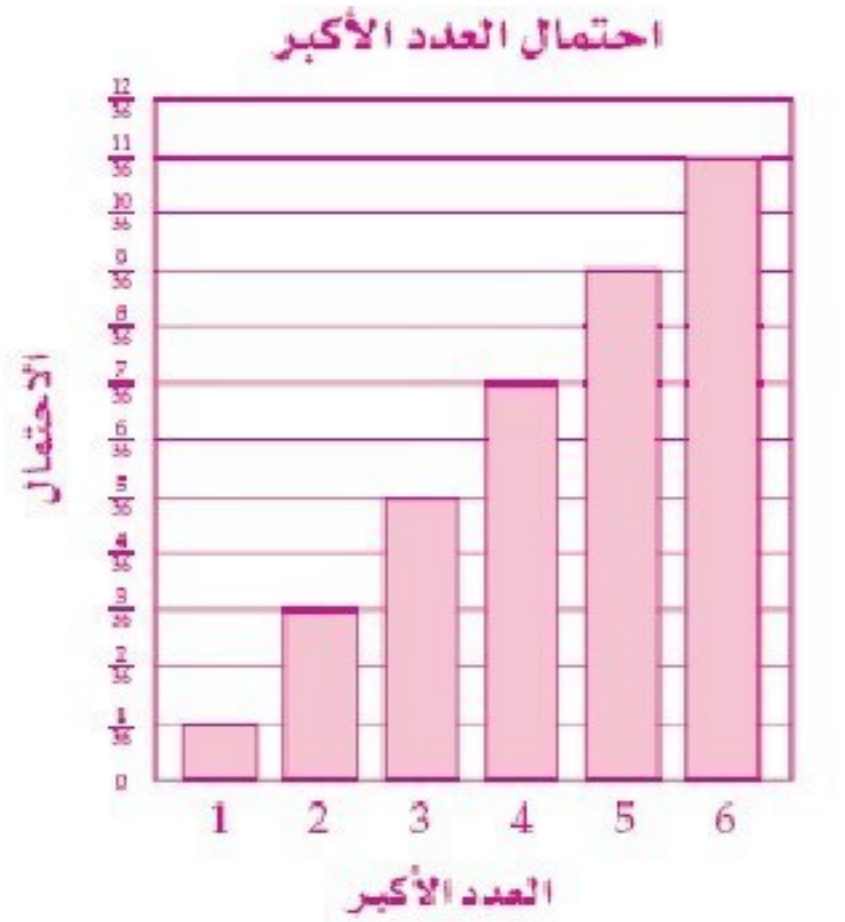
3) $\frac{1}{1680}$ أو 0.06% تقريباً

4) مختبر:

$$\frac{1}{15600}$$

(5

(a



$1 , \frac{1}{36}$ (b

$\frac{1}{9}$ (c

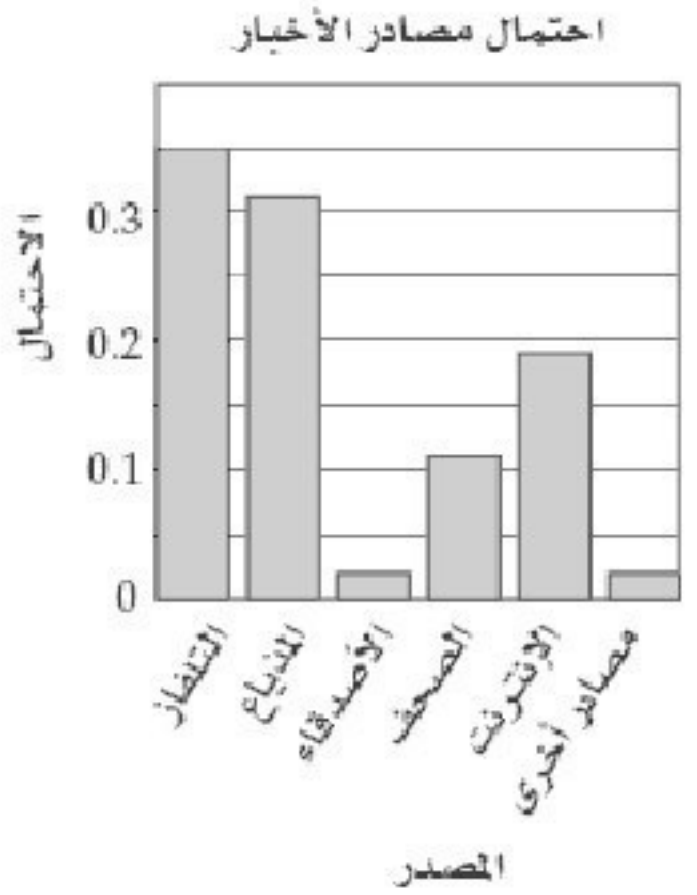
6) اخبار:

a) احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي اكبر من او يساوي 0 و أصغر من أو يساوي 1، ومجموعها يساوي 1؛

$0.35 + 0.31 + 0.02 + 0.11 + 0.19 + 0.02 = 1$

b) 30% أو 0.3

(c



7) 3

8) جوائز:

2.9

9)أزهار:

(a $\frac{1}{5}$ أو 20%

(b 35%

10) تبرعات:

a) $\frac{9}{23}$ أو 39.1% تقريباً

b) $\frac{58}{115}$ أو 50.4 تقريباً

11) جوائز: $\frac{69}{4900}$ أو 1.4% تقريباً

12) العاب رياضية:

34.8% تقريباً

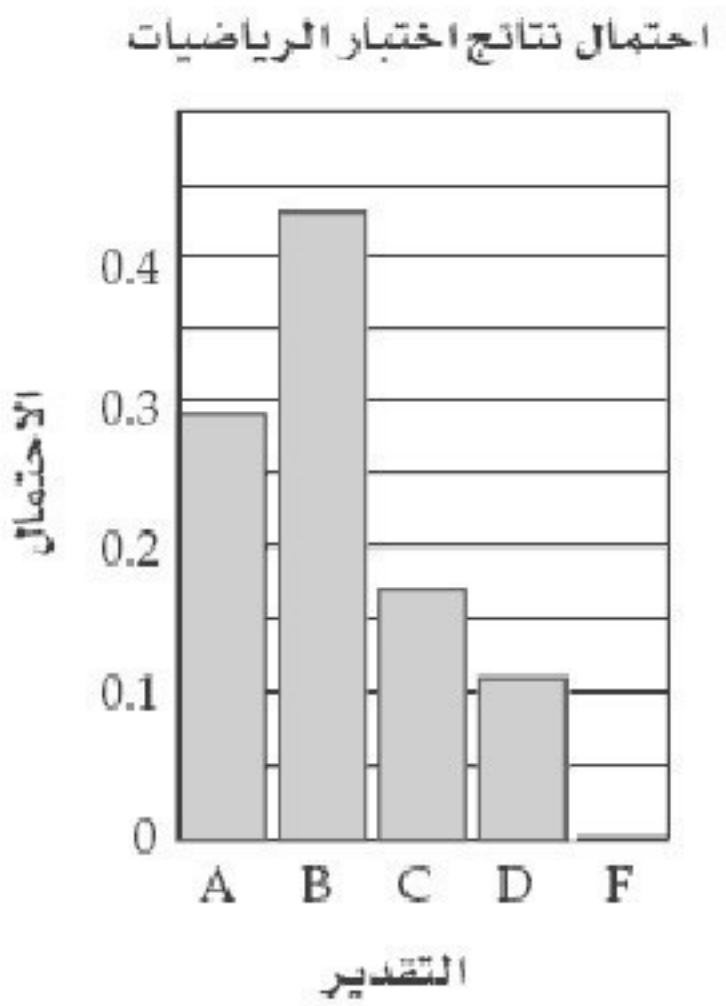
13) درجات:

a) احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي اكبر من أو يساوي 0 و أصغر من أو يساوي 1 ومجموعها يساوي 1؛

$0.29 + 0.43 + 0.17 + 0.11 + 0 = 1$

b) 0.72

(c



14) كرات زجاجية:

(a

أحمر / أحمر	11%
أحمر / أسود	16%
أحمر / أخضر	18%
أحمر / أبيض	12%
أسود / أسود	5%
أسود / أخضر	12%
أسود / أبيض	8%
أخضر / أبيض	9%
أخضر / أخضر	6%
أبيض / أبيض	3%

b) كرتان من اللون الأبيض

c)12% تقريباً

15) مسابقات:

a) احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي أكبر من أو يساوي 0 وأصغر من أو يساوي 1 ومجموعها يساوي 1؛

$$0.05+0.05+0.15+0.10+0.30+0.15+0.20=1$$

b) 50%

16) أمطار:

$$E(x)=(0\cdot 0.1)+(1\cdot 0.1)+(2\cdot 0.15)+(3\cdot 0.15)+(4\cdot 0.25)+ \\ +(5\cdot 0.1)+(6\cdot 0.08)+(7\cdot 0.05)+(8\cdot 0.02)$$

$$E(x)=0+0.1+0.3+0.45+1+0.5+0.48+0.35+0.16$$

= 3.34 أيام ممطرة

17) بطاقات:

9

مسائل مهارات التفكير العليا:

18) اكتشف الخطأ: إجابة ممكنة: فاطمة؛ زينب لم تأخذ في الحسبان كل الاحتمالات، فمثلاً عند حساب أن يكون المجموع 5 فقد أخذت في الحسبان وقوف المؤشر على الرقم 3 ثم 2، ولم تأخذ بعين الاعتبار وقوفه على 2 ثم 3.

19) تبرير: إجابة ممكنة: غير صحيحة أبداً؛ يُبنى الاحتمال التجريبي على التجارب، بينما يُبنى الاحتمال النظري على ما يتوقع الحصول عليه.

20) مسألة مفتوحة: إجابة ممكنة: القرص الدوار المكون من 5 مناطق متطابقة مظللة بالألوان وهي الأحمر، والأزرق، والأصفر، والأخضر، والبني.

اللون	بني	أخضر	أصفر	أزرق	أحمر
الاحتمال	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

مراجعة تراكمية

(21 1.7 cm, 39°

(22 $x^2 + y^2 - 12x = 0$

(23 $\frac{1}{2}$

تدريب على اختبار:

(24 B

(25 D

3-5 التوزيع الطبيعي

تحقق

1) التواء موجب

2) 99.5% تقريباً

3) درجات:

3A) 68 موظفاً

3B) 97.5%



1) درجات: التواءً موجباً

2) التواءً موجباً

3) 16% تقريباً

إذا توزعت البيانات في الأسئلة 7 – 4 توزيعاً طبيعاياً، وكان المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل منها كما هو موضح، فأوجد الاحتمال المطلوب:

4) 2.5%

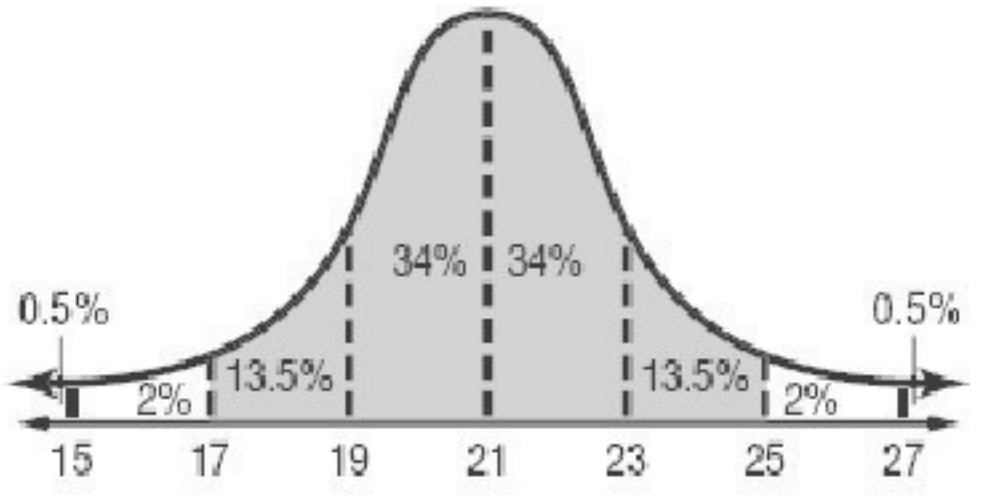
5) 0.16

6) 81.5%

7) 97%

8) مدارس:

(a



تبعد كل من 19, 23 انحرافاً معيارياً واحداً عن المتوسط الحسابي؛

لذلك $34\% + 34\% = 68\%$ من البيانات تقع بين الدرجتين 19, 23.

و لأن $50 \times 68\% = 34$، لذا يوجد 34 طالباً تقريباً تقع درجاتهم بين 19, 23.

b) تبعد كل من 17, 25 عن المتوسط انحرافين معياريين؛ لذلك

$95\% = 13.5\% + 34\% + 34\% + 13.5\%$ اذن 95% من البيانات تقع بين الدرجتين 17, 25

إذن الاحتمال المطلوب يساوي تقريباً 95%

9) بطاريات السيارة:

13600 (a

500 (b

c) 3200

d) 81.5% تقريباً

10) صحة:

a) 16% تقريباً

b) 855

11) طعام:

a) 68% تقريباً

b) 34% تقريباً

c) 0.5% تقريباً

d) 16% تقريباً

12) طول:

a) 22 طالباً تقريباً

b) 83.5% تقريباً

13) صناعة:

a) 3 عبوات تقريباً

b) 81.5% تقريباً

مسائل مهارات التفكير العليا:

14) اكتشف الخطأ: أمينة؛ وزعت مريم المدى على الفترات بالتساوي

15) تحد: 1600

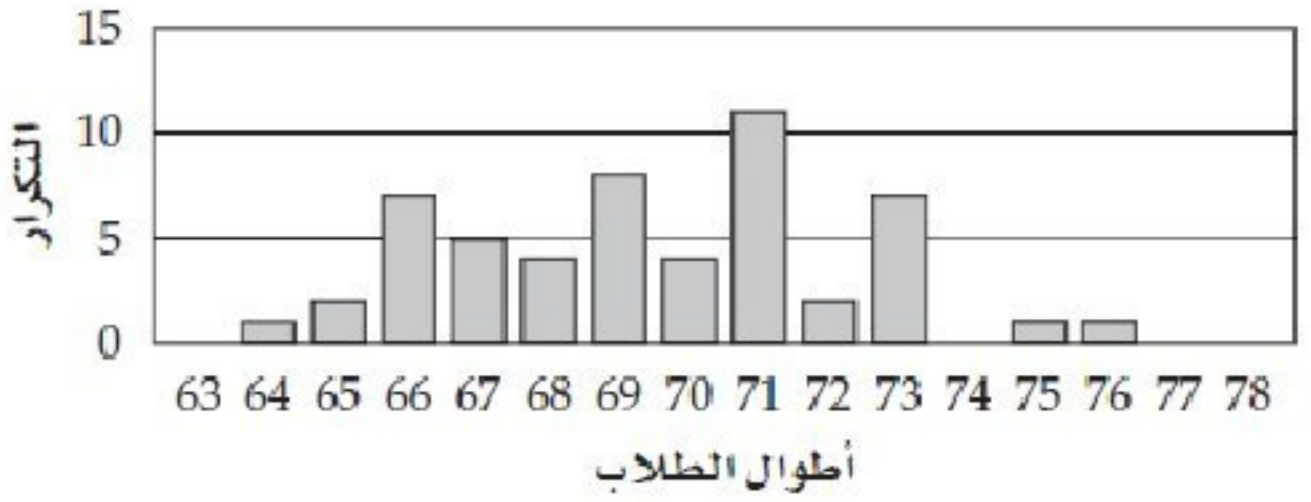
16) اكتب: إجابة ممكنة: عندما تشمل البيانات أطوال طلاب المرحلة الابتدائية جميعهم إضافة إلى أطوال الهيئة التدريسية والإدارية في المدرسة، فإن معظم الحالات تكون متركزة في الجهة اليسرى (الطلاب)، بينما تكون أطوال فئة الهيئة التدريسية والإدارية إلى الجهة اليمنى، وبذلك فإن هذا التوزيع يكون ملتوياً التواءً موجباً. وفي صف يكون تحصيل الطلاب فيه عالياً، فإن معظم البيانات لتحصيل الطلاب تتركز في الجهة اليمنى من التوزيع، ويوجد عدد قليل من البيانات في الجهة اليسرى. عند ذلك يكون التوزيع سالب الالتواء. وعندما تشمل البيانات معدلات الطلاب في جميع انحاء المملكة مثلاً، فإن معظم الحالات تكون متمركزة في الوسط، مع وجود بعض الحالات إلى اليمين وبعضها إلى اليسار، عند ذلك يكون التوزيع طبيعياً.

17) تبرير: إجابة ممكنة: صحيح، فحسب القانون التجريبي، فإن 68% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط قيمة الانحراف المعياري

18) مسألة مفتوحة:

أطوال الطلاب بالبوصات							
70	65	71	69	66	71	72	73
70	69	73	66	72	69	68	71
70	67	73	71	71	67	69	65
71	68	68	73	66	69	66	67
66	73	64	67	71	71	73	67
73	75	71	71	76	69	69	66
68	71	69	66	70			

المتوسط للبيانات 69.47 in، الانحراف المعياري 2.73 in



19) إجابة ممكنة: يعد إلقاء مكعب الأرقام (6 – 1) مثالاً على التوزيع الاحتمالي المنفصل، وفي مثل هذا التوزيع يوجد عدد محدود من الإمكانات، أما التوزيع الاحتمالي المتصل، فيمكن أن يمثله أعمار 400 بطارية، حيث يمكن للعمر أن يأخذ أي قيمة في الفترة التي يشكلها مجال التوزيع.

مراجعة تراكمية

20) طلاب: 16.5% تقريباً

21) $\frac{3}{14}$

22) تقريباً $x^2 = -2158(y - 325)$

تدريب على اختبار:

23) D

24) D

25) صناعة:

a) 50%

b) 815

3-5 توسع: معمل الجبر: القانون التجريبي والمئينات

نشاط:

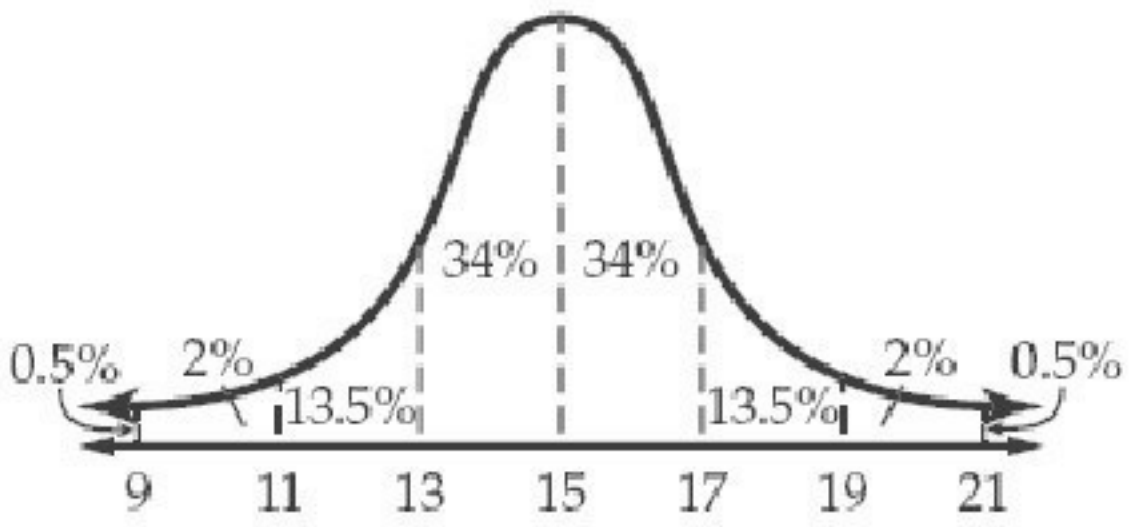
الخطوة 2: الدرجة 35 تمثل المئين 84.

الخطوة 3: الدرجة 40 تمثل المئين 79.5.

الخطوة 4: 45

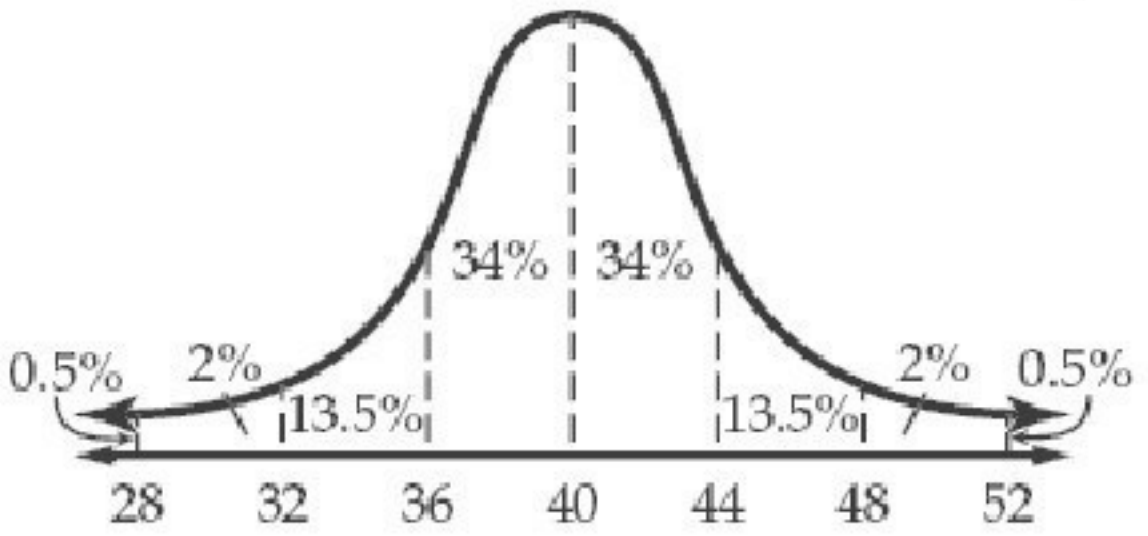
تمارين:

1)



الدرجة 21 تقابل المئين 99.5، و الدرجة 15 تقابل المئين 50، والدرجة 13 تقابل المئين 16.

(2



الدرجة 52 تقابل المئين 99.5، والدرجة 40 تقابل المئين 50 ، والدرجة 44 تقابل المئين84

3-6 التوزيعات ذات الحدين

تحقق

1A) ليست ذات حدين، P (S) = 61%, P (F) = 1 – 61% = 39%، في حين أن 24% لا يحبون الزي الموحد، وهذا لا يساوي 39%. وهذا يعني أنه ليس لكل محاولة نتيجتان فقط.

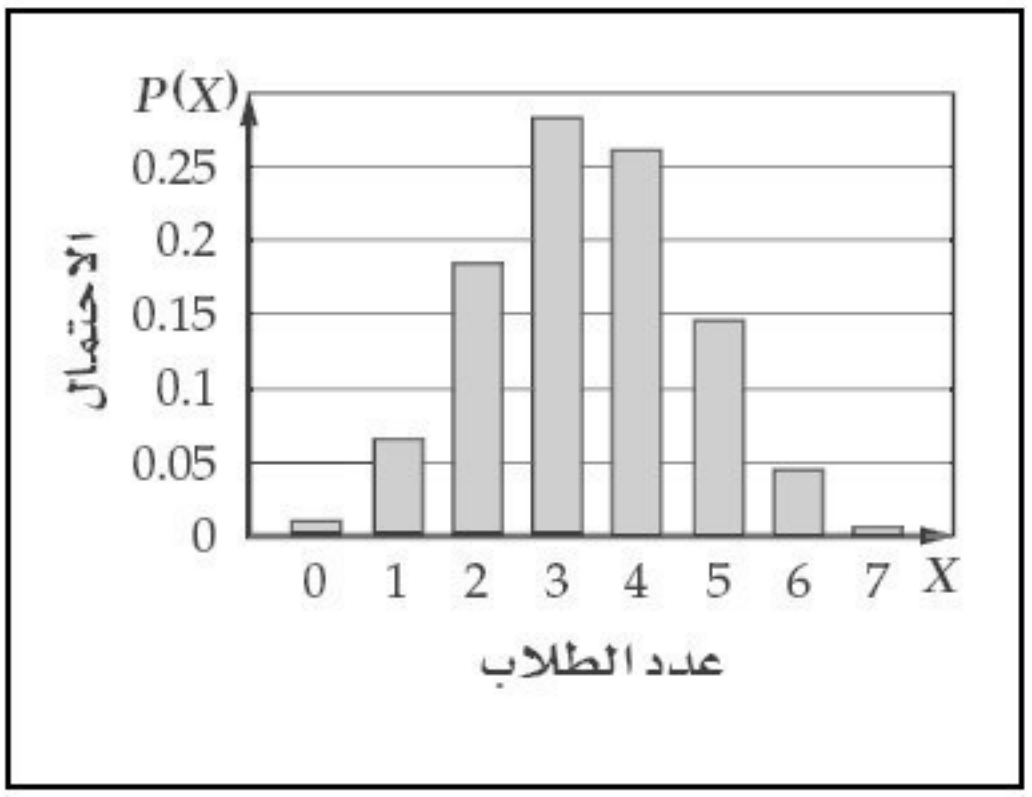
1B) تجربة ذات حدين،

$$n = 20\ , p = \frac{1}{4}\ , q = \frac{3}{4}\ ,$$
$$X = 0\ , 1\ , 2\ , \ldots\ , 20$$

X	$P(X)$
0	0.010
1	0.066
2	0.184
3	0.283

(2

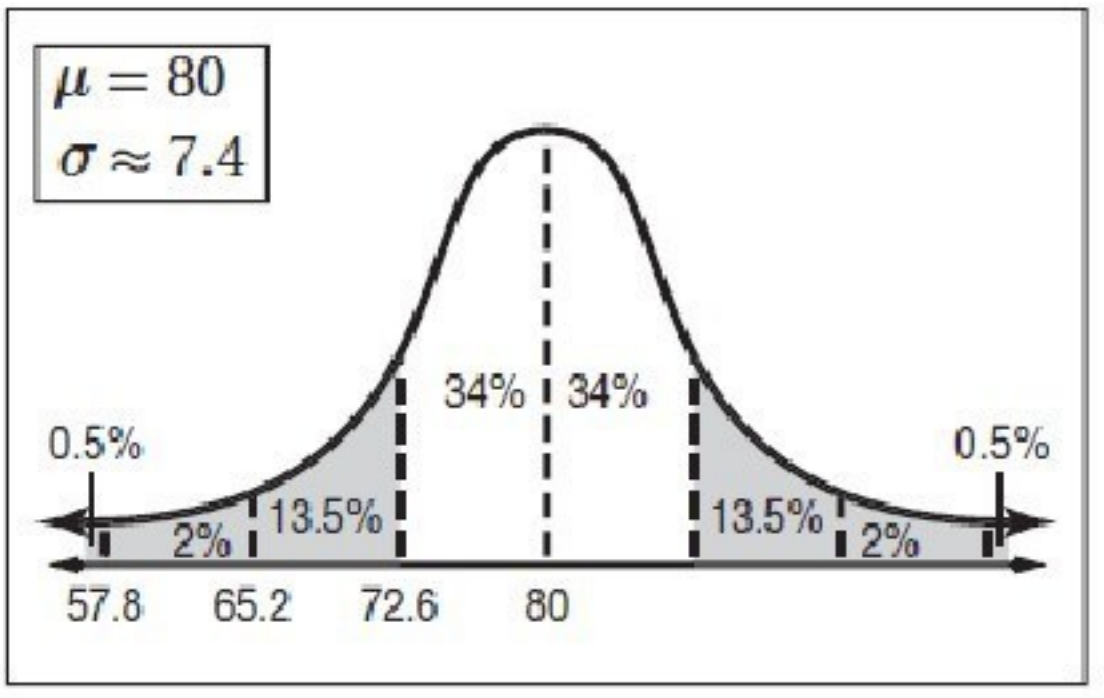
4	0.261
5	0.145
6	0.045
7	0.006



$P\,(X < 4) = 0.543 = 54.3\%$

3) $\mu = 3.36,\ \sigma^2 = 1.747,\ \sigma = 1.322$، تقريباً 3 طلبة من بين 7 يدرسون لغة عالمية في سنة التخرج.

(4



الدراسة التي قامت بها آية تعد تجربة ذات حدين فيها:

$$n = 250\ ,\ p = 0.32\ ,\ q = 1 - 0.32 = 0.68$$

وحيث إن:

$$np = 250(0.32) = 80 > 5$$
$$nq = 250(0.68) = 170 > 5$$

فإنه يمكننا استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب الاحتمال على النحو الآتي:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{250 \times 0.32 \times 0.68} \approx 7.4$$

العدد 65 أصغر من المتوسط بمقدار انحرافين معياريين تقريبًا؛ لذا يكون احتمال أن يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية يساوي تقريباً

$$(13.5 + 34 + 50)\% = 97.5\%$$

وعليه فإن احتمال المتممة وهي ألا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية يساوي تقريباً:

$$1 - 97.5\% = 2.5\%$$

تدرب وحل المسائل:

حدد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أ يمكن جعلها ذات حدين. وإن كانت كذلك. فاكتب قيم n,p,q ، ثم اكتب كل قيم المتغير العشوائي الممكنة. وإذا لم تكن تجربة ذات حدين، فبين السبب:

1) تجربة ذات حدين؛ $n = 10$، $P = \frac{1}{6}$ لكل رمية، $q = \frac{5}{6}$، قيم المتغير العشوائي 10 – 0.

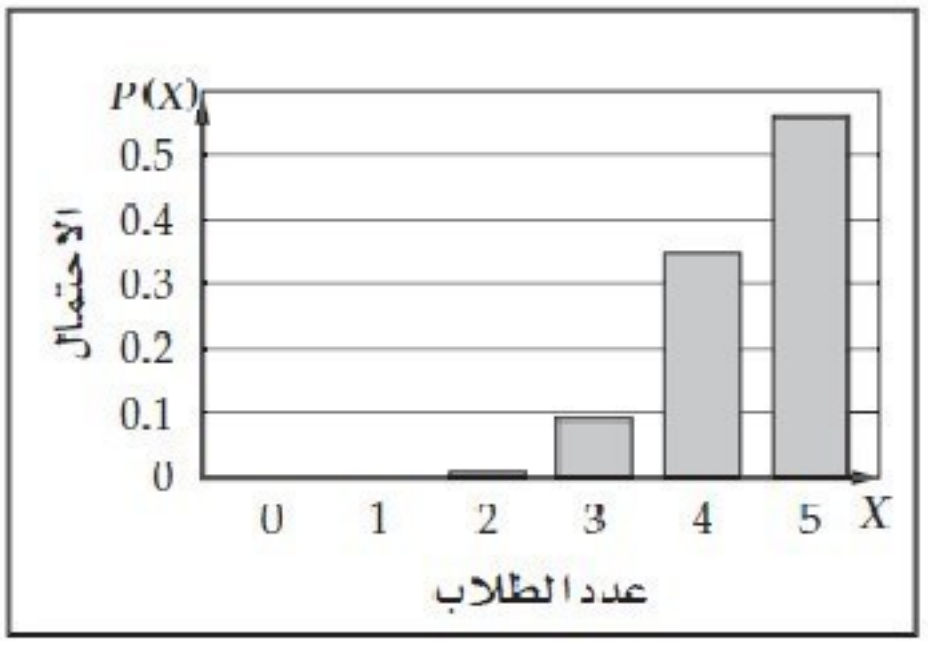
2) تجربة ذات حدين؛ $n = 20$، $P = \frac{1}{2}$، $q = \frac{1}{2}$، قيم المتغير العشوائي 20 – 0.

3) ليست تجربة ذات حدين؛ إجابة ممكنة: لأنه يوجد أكثر من نتيجتين متوقعتين؛ لأن العمر قد يكون أي عدد ضمن المعقول.

4) ليست تجربة ذات حدين؛ إجابة ممكنة: بما أنك تسحب كرات دون إرجاع، فإن الاحتمالات تختلف في كل سحب لنقص عدد الكرات.

كون توزيع ذات الحدين لكل متغير عشوائي مما يأتي، ومثله الأعمدة، ثم أوجد الوسط وفسر معناه في سياق الموقف، ثم أوجد التباين، والانحراف المعياري.

(5

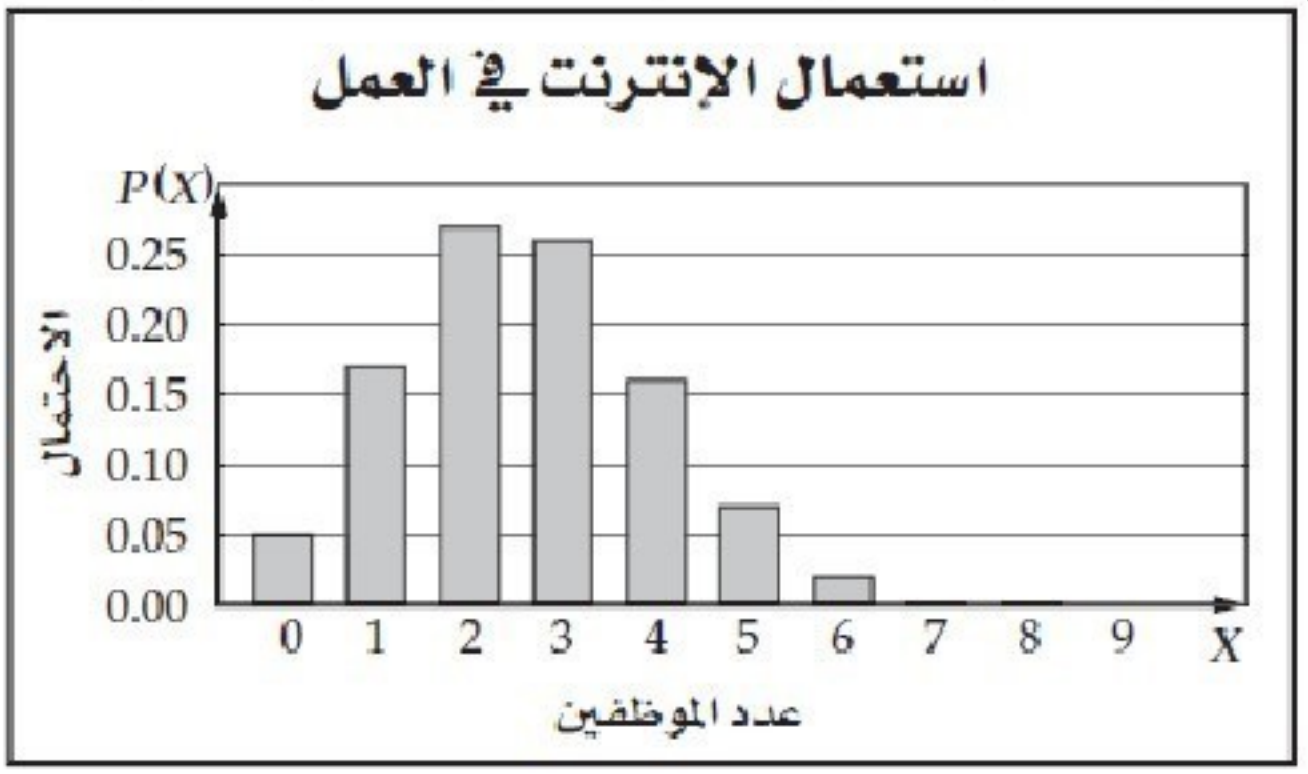


X	$P(X)$
0	0.00
1	0.00
2	0.01
3	0.09

$\mu \approx 4.45$؛ إجابة ممكنة: من بين 5 طلاب من طلاب المرحلة الثانوية 4 منهم تقريباً يتابعون مباريات منتخبهم الوطني، $\sigma = 0.70$، $\sigma^2 \approx 0.49$

(6

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X)$	0.05	0.17	0.27	0.26	0.16	0.07	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00

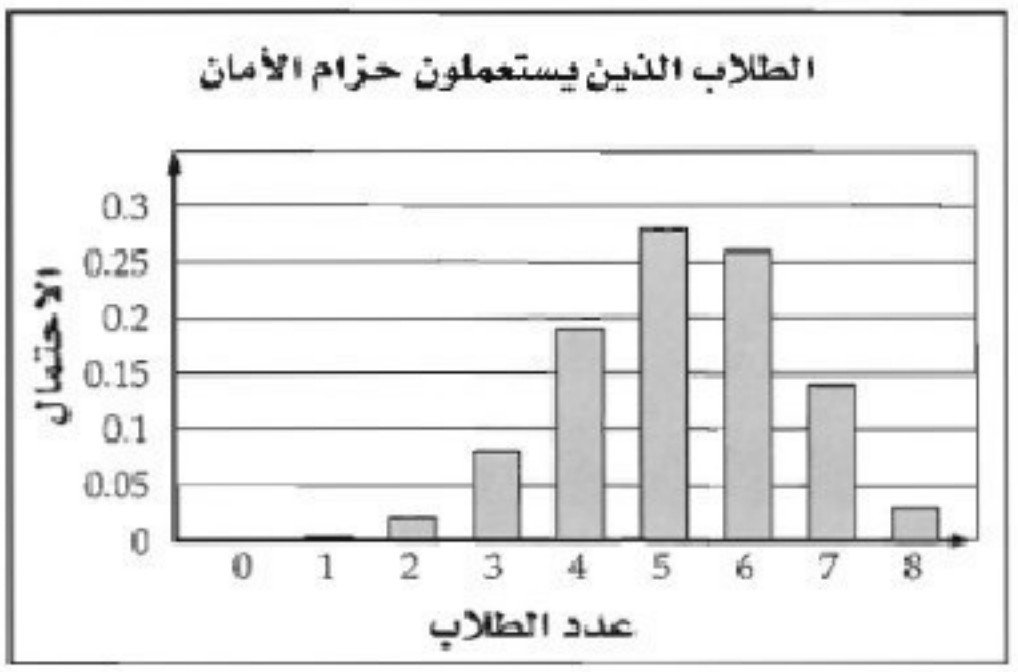


$\mu \approx 2.60$؛ إجابة ممكنة: من بين 10 موظفين 3 منهم تقريباً يستعملون الإنترنت في العمل،

$\sigma \approx 1.39$ ،$\sigma^2 \approx 1.92$

7)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X)$	0.00	0.003	0.02	0.08	0.19	0.28	0.26	0.14	0.03



$\mu \approx 5.20$؛ إجابة ممكنة: من بين 8 طلاب من طلاب الجامعات الذين يملكون سيارات خاصة5 منهم تقريباً يستعملون حزام الأمان أثناء قيادة سياراتهم، $\sigma^2 \approx 1.82$، $\sigma = 1.35$

8) أعمال صيفية: 2.5% تقريباً

9) رخصة قيادة:0.99013 أو 99% تقريباً

10) كرة قدم: 0.792 أو 79.2% تقريباً

11) رياضيون:

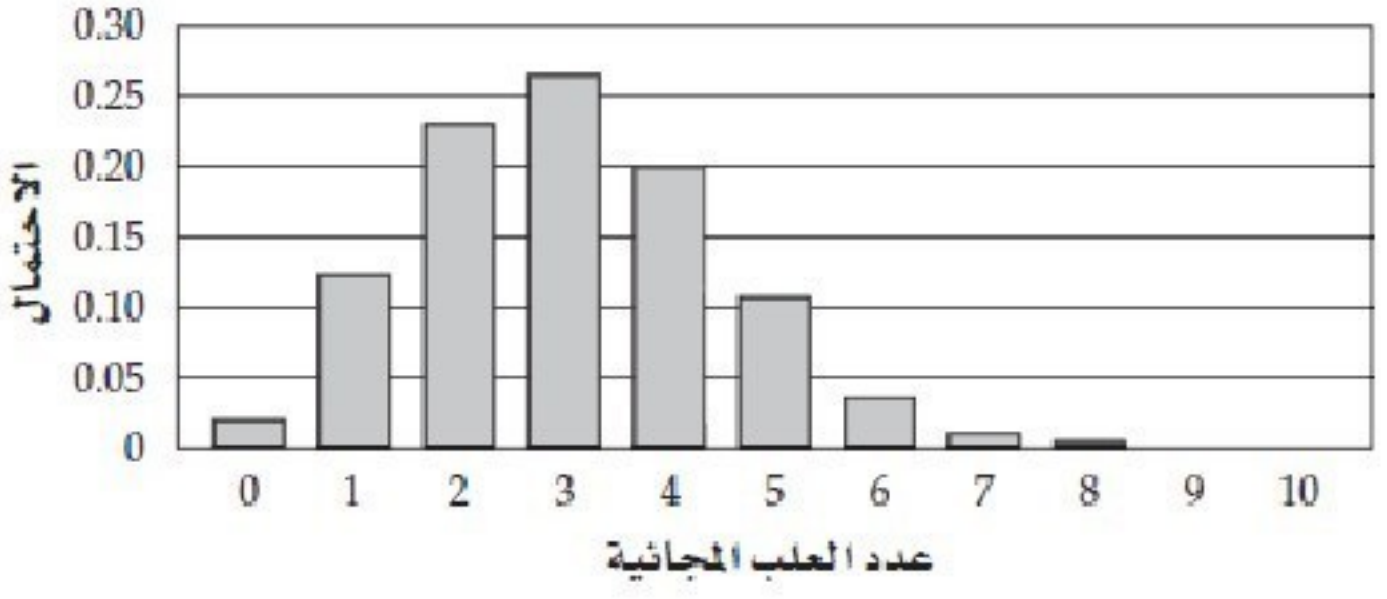
(a

عدد الطلاب	الاحتمال
0	00.0064%
1	00.15%
2	01.5%
3	08.2%
4	24.6%
5	39.3%
6	26.2%

(b 1.7% تقريباً

12) غسيل سيارات: 42.8%

13) حوافز دعائية:



14) برامج دينية: 16% تقريباً

إذا علمت أن نسبة النجاح في توزيع ذات حدين 60%، ويوجد 18 محاولة، فأجب:

15) 0.0000069% تقريباً

16) 0.0145 أو 1.45% تقريباً

17) تنس طاولة:

a) 13.8% تقريباً

b) 99.8% تقريباً

c) 55.6% تقريباً

لكل من توزيعات ذات الحدين الآتية يدل الرمز n على عدد المحاولات، ويدل الرمز p على احتمال نجاح كل محاولة. أوجد احتمال الحصول على s من النجاحات:

18) 0.744 أو 74.4% تقريباً

19) 0.322 أو 32.2% تقريباً

20) 0.767 أو 76.7% تقريباً

21) 0.99 أو 99% تقريباً

22) 0.526 أو 52.6% تقريباً

23) 0.889 أو 88.9% تقريباً

مسائل مهارات التفكير العليا:

24) تتحد: 156 تقريباً

25) تبرير: في بعض الأحيان، إذا كانت الحادثة تتألف من عدد كبير من العناصر مقارنة بالحادثة المتممة، فإننا نقوم بإيجاد احتمال الحادثة المتممة، وتطرح الناتج من الواحد الصحيح. فمثلاً: عندما يكون فضاء العينة مكوناً من الأعداد 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7، وأردنا إيجاد احتمال الحصول على الأعداد 3, 4, 5, 6, 7 فإنه بدلاً من إيجاد الاحتمال لكل من الأعداد

7 – 3 وجمع هذه الاحتمالات، يكون من الأفضل إيجاد الاحتمال لكل من الأعداد الثلاثة

0, 1, 2، وطرح الناتج من العدد 1.

26) مسألة مفتوحة: إجابة ممكنة: إذا عُلم أن نسبة القطع المعيبة في مصنع 3%، واشترى تاجر 500 قطعة اختيرت عشوائياً، فإنه يستطيع أن يجد احتمال وجود 10 قطع معيبة من بينها، حيث $n = 500$, $p = 3\%$, $q = 97\%$.

27) اكتب: اجابة ممكنة: التوزيع ذو الحدين يوضح احتمالات أعداد مرات النجاح لتجربة ذات الحدين في n من المحاولات.

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كانت المعادلة في كل مما يأتي تمثل دائرة، او قطعاً مكافئاً، أو قطعاً ناقصاً، اوقطعاً زائداً، دون كتابتها على الصورة القياسية:

28) قطع ناقص

29) قطع مكافئ

30) دائرة

31) سرعة: 68

32) دراسة جامعية:

50%

تدريب على اختبار

33) اختبار

a) 0.003

b) 0.00003

0.056 (c

0.25 (d

D (34

دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي من القائمة أعلاه:

1) التوزيع الاحتمالي

2) ارتباط

3) متحيزة

4) المجموعة الضابطة

5) هامش خطأ المعاينة

1 – 3: الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة:

حدد ما إذا كانت كا دراسة مسحية فيما يأتي تتبني عينة متحيزة أو غير متحيزة، ثم فسر إجابتك:

6) غير متحيزة؛ لكل متسوق في المجتمع العام الفرصة نفسها، لأن يكون في العينة.

7) غير متحيزة؛ لكل طالب في المدرسة الفرصة نفسها، ليكون في العينة.

8) متحيزة؛ لأن زبائن المطعم الذين تقدم له الاستبانة غالباً يفضلون هذا المطعم.

حدد ما إذا كانت كل حالة تحتاج إلى دراسة مسحية او دراسة بالملاحظة او دراسة تجريبية:

9) دراسة قائمة على الملاحظة

10) دراسة تجريبية

2 – 3: التحليل الإحصائي:

11) فصول السنة: 1.7% ± تقريباً

12) سباحة: 6.37 ثوانٍ

3 – 3: الاحتمال المشروط:

13) كرة طائرة: 35%

14)

a) $\frac{6}{11}$

b) $\frac{22}{27}$

4 – 3: الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية:

قرعة الألعاب:

15) $\frac{15}{575}$

16) $\frac{11}{115}$

17) $\frac{7}{115}$

18) $\frac{6}{115}$

19) بطاقات: 6.5 تقريباً

5 – 3: التوزيع الطبيعي:

في كل من السؤالين الاتيين توزيع طبيعي بوسط وانحراف معياري، أوجد الاحتمال المطلوب في كل منهما:

97.5% (20

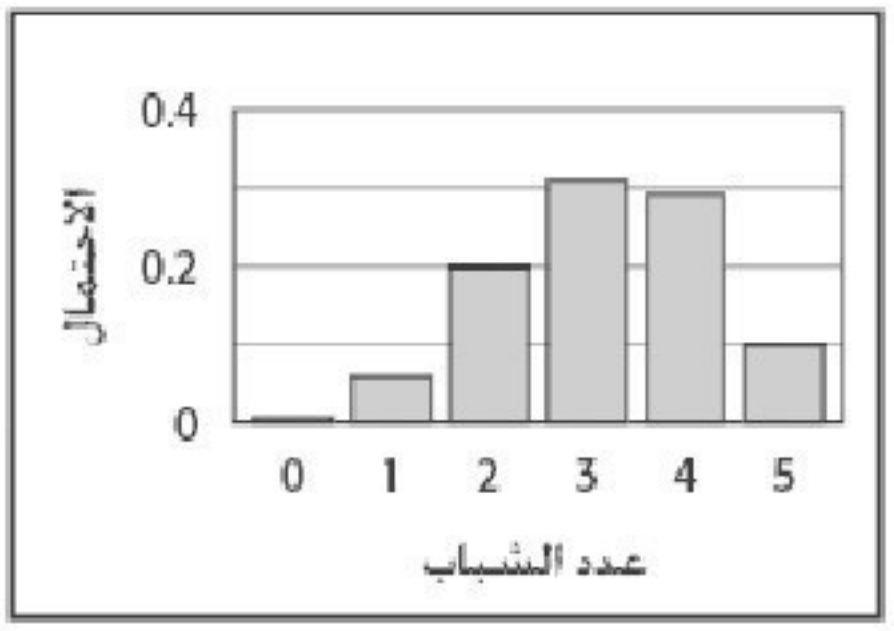
84% (21

2.5% (22

6 – 3: التوزيعات ذات الحدين:

23) أشخاص مشهورون:

(a



X	$P(X)$
0	0.007
1	0.059
2	0.201
3	0.342
4	0.291
5	0.099

73.3% (b

24) ساعات: 2.5 %

تطبيقات ومسائل:

25)

a) هذه دراسة قائمة على الملاحظة

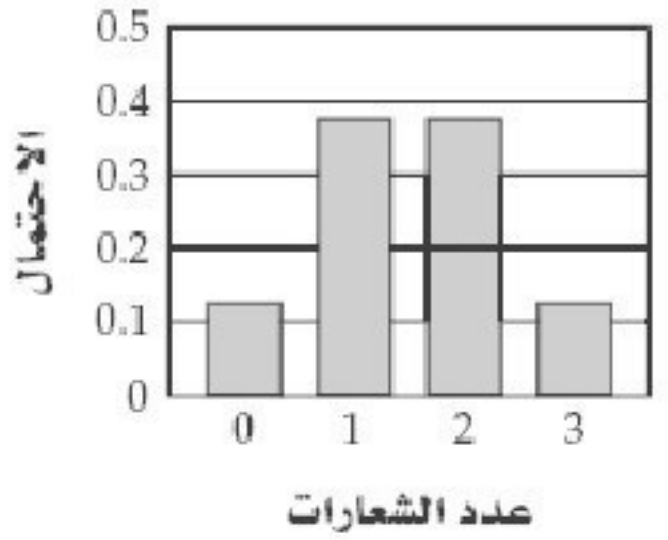
b) هذه دراسة تجريبية؛ لأنه تم اختيار المجموعتين عشوائياً، وإحدى المجموعتين (التجريبية) خضعت لدورة تدريبية في اللغة الإنجليزية، والأخرى (الضابطة) لم تخضع لأي دورة تدريبية، وهي دراسة تجريبية متحيزة؛ لأن كل موظف يعرف المجموعة التي ينتمي إليها.

26) 7.55 تقريباً

27) $\frac{1}{9}$

28)

X	0	1	2	3
P (X)	0.125	0.375	0.375	0.125



29) 97.5% تقريباً

30) 0.5% تقريباً

اختبار الفصل

حدد ما إذا كانت العبارات الآتية تصف ارتباطاً او سببية، ثم فسر إجابتك:

1) ارتباط: على الرغم من أن البرق يسبق الرعد دائما، ولكن هذا لا يعني أن البرق هو الذي يسبب الرعد.

2) ارتباط: مع وجود علاقة بين الحدثين، إلا أن نايف قد يركض لسبب آخر.

حدد ما إذا كانت كل من المسموحات الآتية تتبني عينة متحيزة أو غير متحيزة، ثم فسر إجابتك:

3) متحيزة؛ لأن الناس الذين تم استطلاع آرائهم يرون أهمية كبرى لوجود الإنترنت، فهم يشترون من خلاله.

4) غير متحيزة؛ كل فرد في المجتمع له الفرصة نفسها ليكون في العينة.

أي مقاييس النزعة المركزية يناسب كلا من البيانات الآتية بصورة أفضل؟ ولماذا؟

5) المتوسط؛ لأن البيانات لا تتضمن قيماً متطرفة.

6) الوسيط؛ لأن البيانات تتضمن قيماً متطرفة، ولا توجد فجوات كثيرة في المنتصف.

فيما يأتي الوسط والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات تتوزع توزيعاً طبيعياً، أوجد الاحتمال المطلوب في كل منها:

7) 97.5%

8) 84%

يحتوي كيس على 10 كرات زجاجية زرقاء، و 8 كرات حمراء، و 12 خضراء وجميعها متماثلة، سحبت كرتان واحدة تلو الأخرى، أوجد الاحتمال لكل من:

9) $\frac{8}{29}$

10) $\frac{1}{3}$

11) اختبارات:

a) $\frac{12}{15}$ أو 80%

b) $\frac{6}{9} \approx 67\%$

12) اختيار من متعدد: D

13)

X	0	1	2
P (X)	0.1	0.6	0.3

14) طقس: 84.1%تقريباً

15) حديقة: 0.24665 تقريباً أو 24.7%

الفصل 8

النهايات والاشتقاق
Limits and Differentiation



فيما سبق:
درسْتَ النهايات ومُعدلات التغيّر.

والآن:
- أحسبُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية.
- أجدُ مُعدلات التغيّر اللحظية.
- أجدُ مشتقات دوال كثيرات الحدود، وأحسب قيمها.
- أجد المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.
- أجد الدالة الأصلية، وأستعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في إيجاد التكامل المحدد.

لماذا؟

الأفعوانية: يُعد الاشتقاق وسيلة فاعلة ومهمة عند دراسة مُعدلات التغيّر غير الثابتة، فإذا ركبت الأفعوانية يومًا، فإن سرعتك وتسارعك يتغيران باستمرار مع الزمن بالاعتماد على موقعك، وستدرس في هذا الفصل مسائل تحتوي مواقف مشابهة.

قراءة سابقة: استعمل أسئلة اختبار منتصف الفصل؛ لتساعدك على توقع محتوى النصف الأول من الفصل.

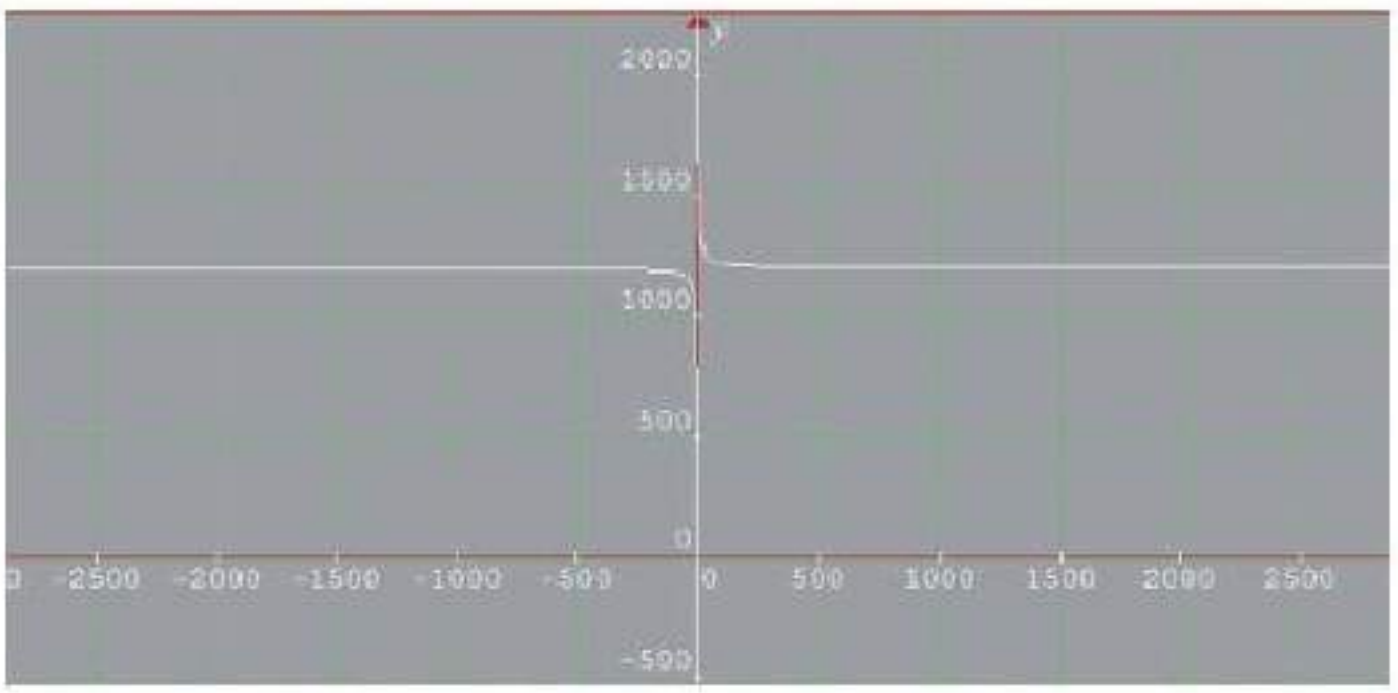
التهيئة

اختبار سريع:

1) يظهر من المنحنى أن $q(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$ ، و $q(x) \to 0$ عندما $x \to -\infty$

2) يظهر من المنحنى أن $m(x) \to -5$ عندما $x \to \infty$، و $m(x) \to -5$ عندما $x \to -\infty$.

3)



تقترب قيمة $A(x)$ من 1200 عندما تقترب x من موجب ما لا نهاية.

4) -17

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية والأفقية (إن وجدت) لكل دالةمما يأتي:

5) $y = 2$

6) $x = 10$

7) $x = -2 , x = 4 , y = 1$

8) $x = 2 , y = 1$

9) $-12 , -17 , -22 , -27$

10) $-19 , -25 , -31 , -37$

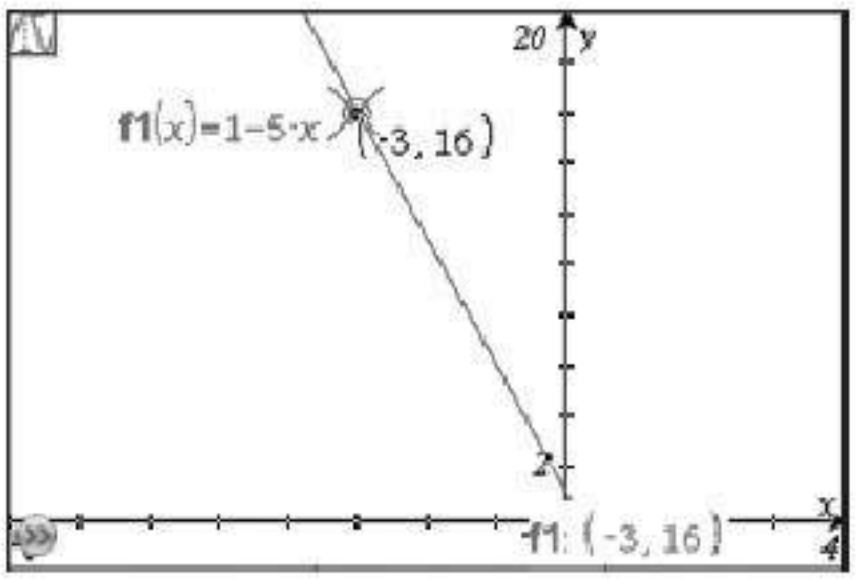
11) $80 , -160 , 320 , -640$

12) $0 , 7 , 14 , 21$

4-1 تقدير النهايات بيانياً

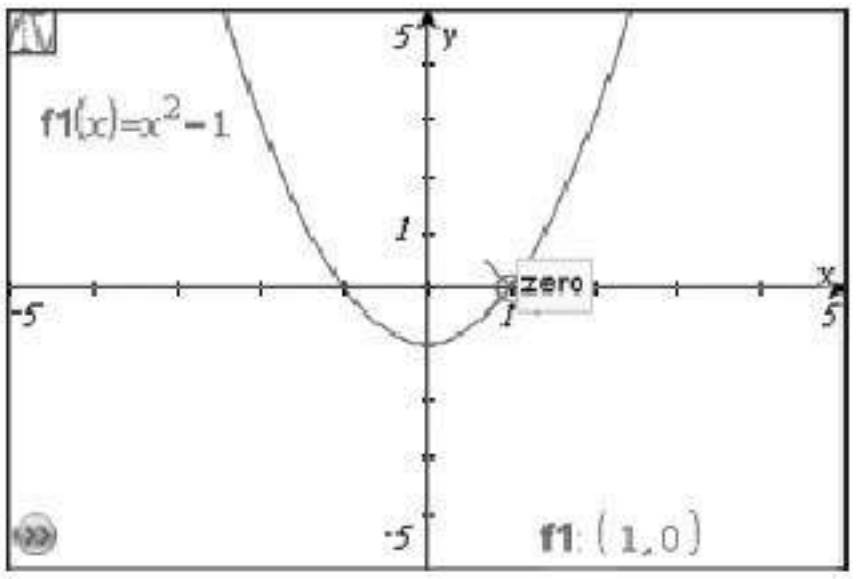
تحقق

16 (1A



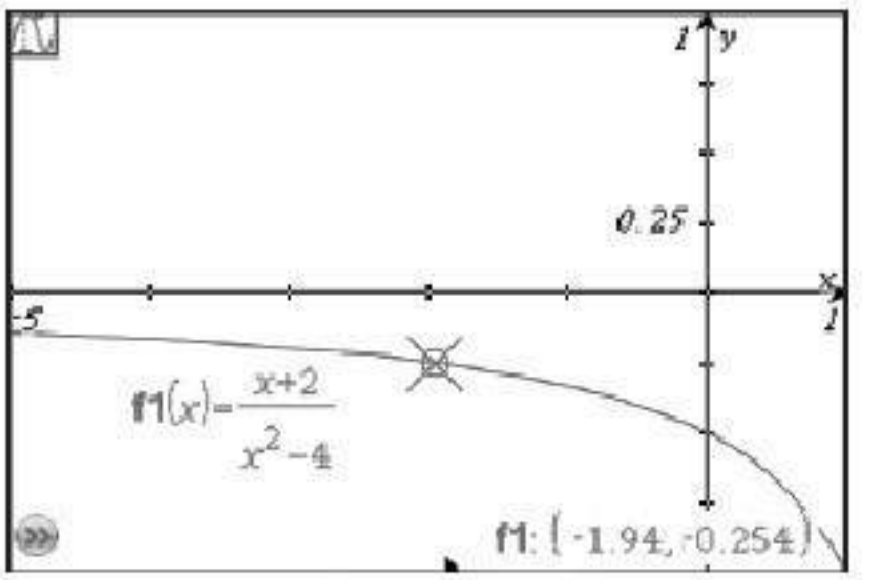
x	-3.01	-3.001	-3	-2.999	-2.99
$f(x)$	16.05	16.005		15.995	15.95

0 (1B



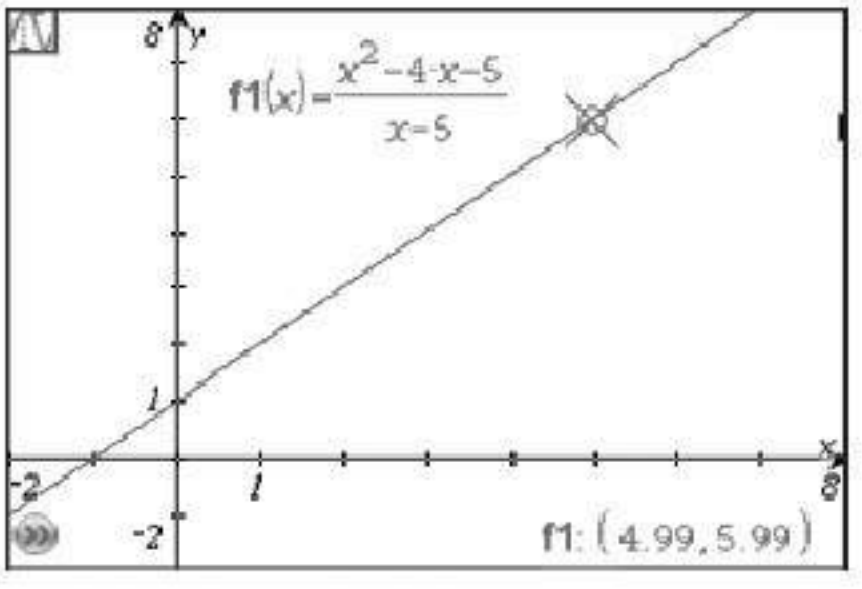
x	0.99	0.999	1	1.001	1.01
$f(x)$	−0.0199	− 0.001999		0.002001	0.0201

– 0.25 (2A



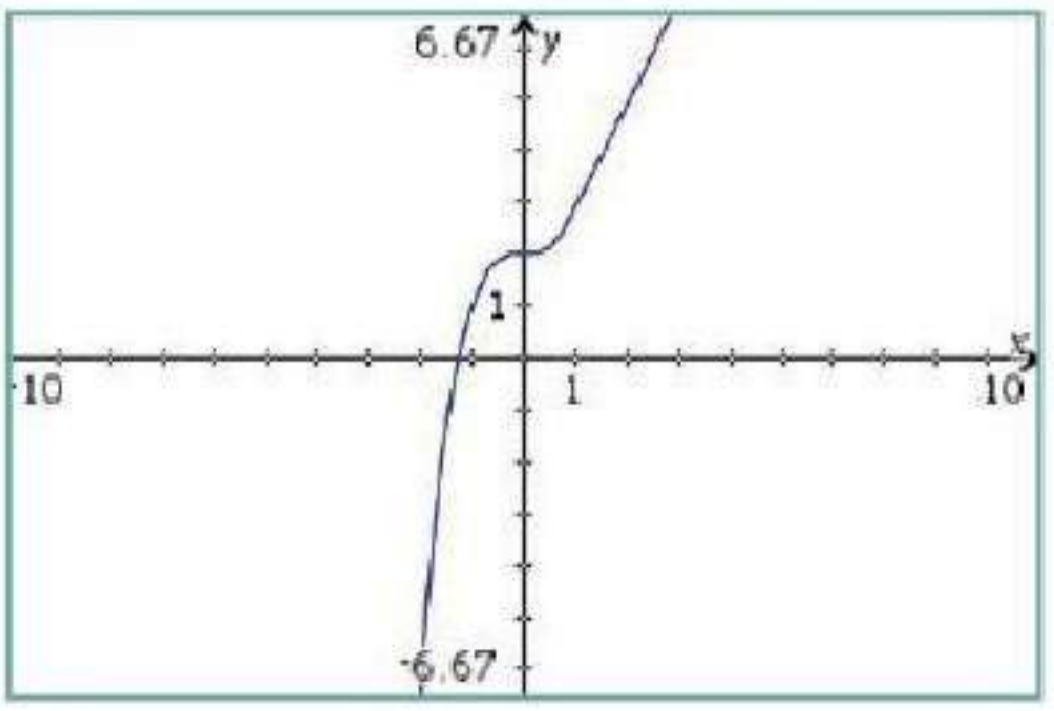
x	–1.99	–1.999	– 2	–2.001	–2.01
$f(x)$	–0.2506	–0.2501		–0.2499	–0.2494

6 (2B



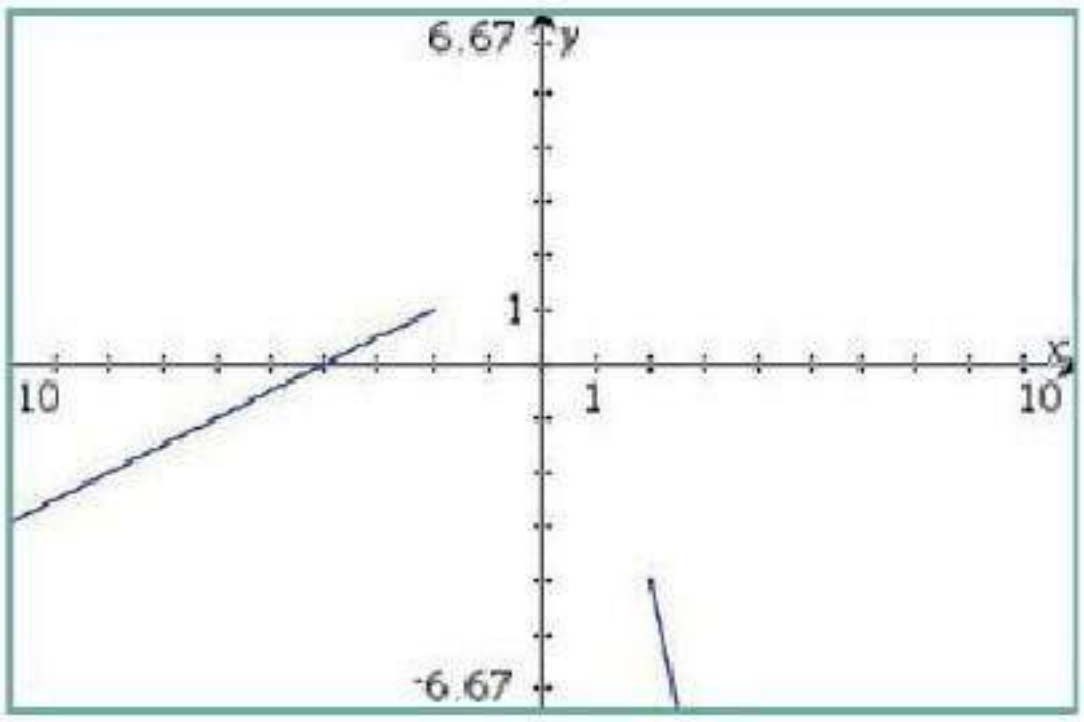
x	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	5.99	5.999		6.001	6.01

(3A



$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

(3B



$$\lim_{x\to -2^-} g(x) = 3$$
$$\lim_{x\to -2^+} g(x) = -4$$

$\lim_{x\to -2} g(x)$ غير موجودة

(4A غير موجودة

(4B $-\infty$

(5A غير موجودة

(5B 0

(6A – 3

(6B 0

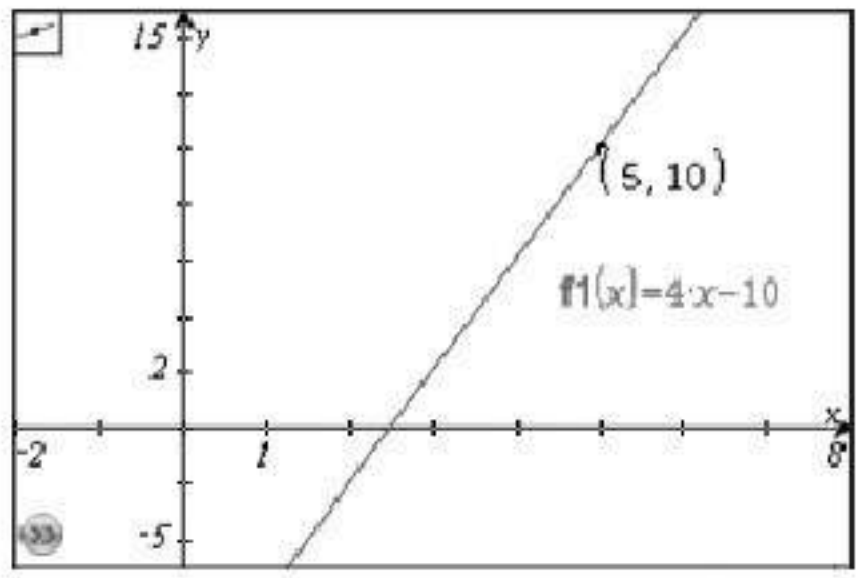
(6C غير موجودة

(7A $\lim_{t\to\infty} V(t)$ غير موجودة، حيث يتذبذب منحنى $V(t)$ بين -165 و165 كلما ازدادت t وهذا يعني أن الجهد الكهربائي في المقبس يتذبذب بين $-165, 165$ مع مرور الزمن

(7B $\lim_{t\to\infty} P(t) = 230$ سيصبح عدد الذبابات 230 ذبابة مع مرور الزمن.

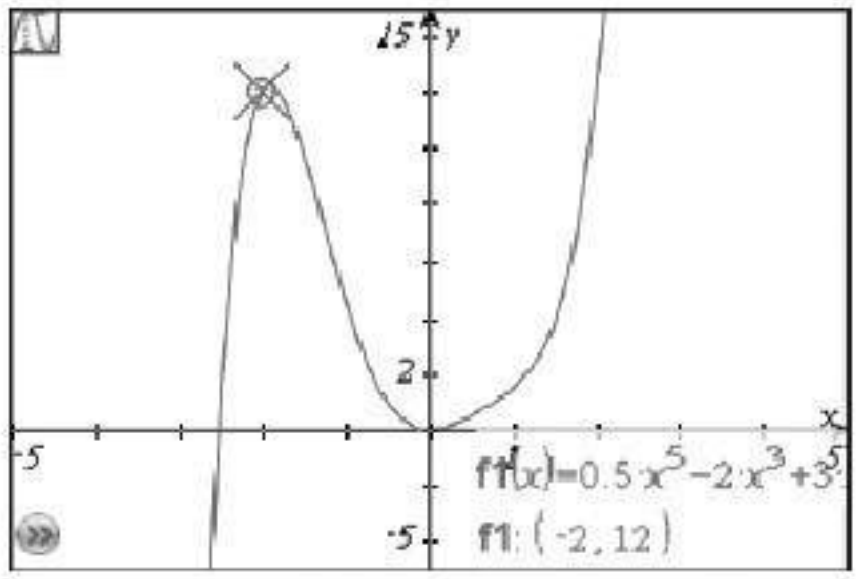
تدرب وحل المسائل:

10 (1



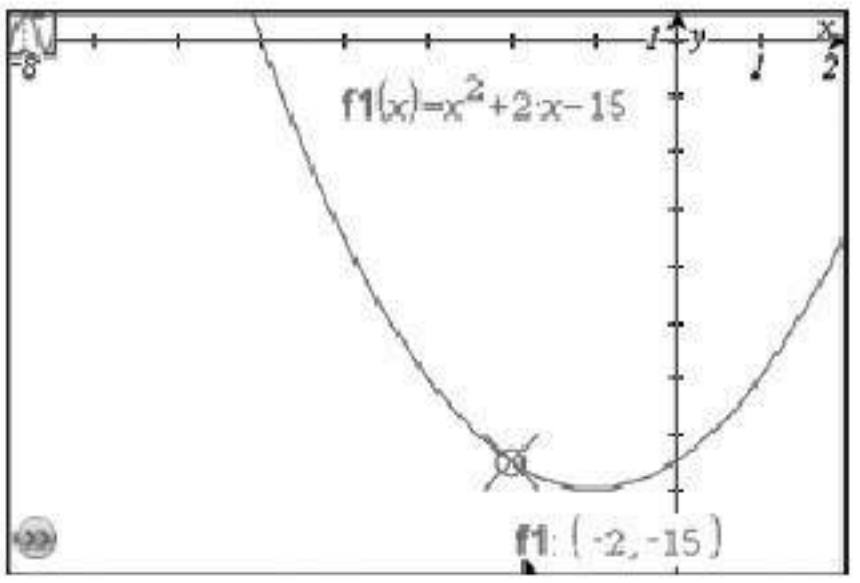
x	4.99	4.999	5	5.001	5.01
$f(x)$	9.96	9.996		10.004	10.04

12 (2



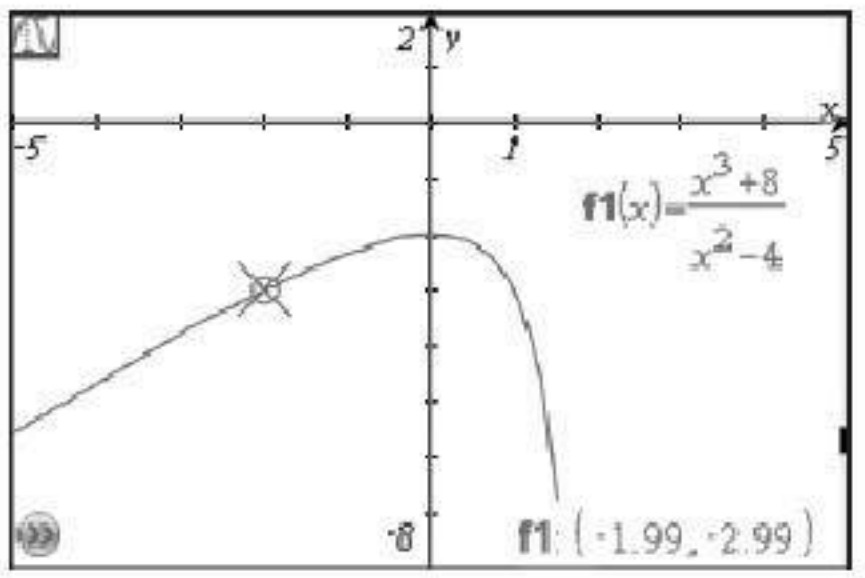
x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	11.72	11.972		12.028	12.28

15 (3



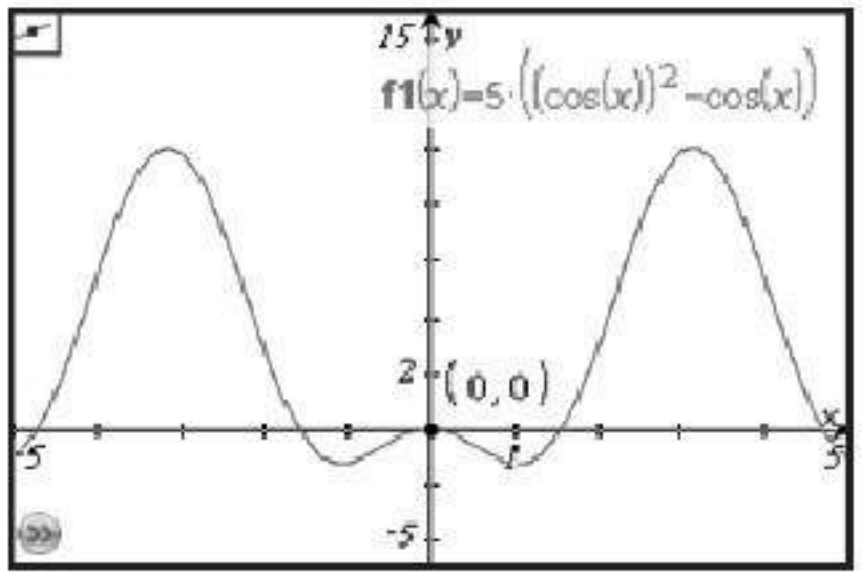
x	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99
$f(x)$	−14.98	− 14.998		−15.002	−15.02

– 3 (4



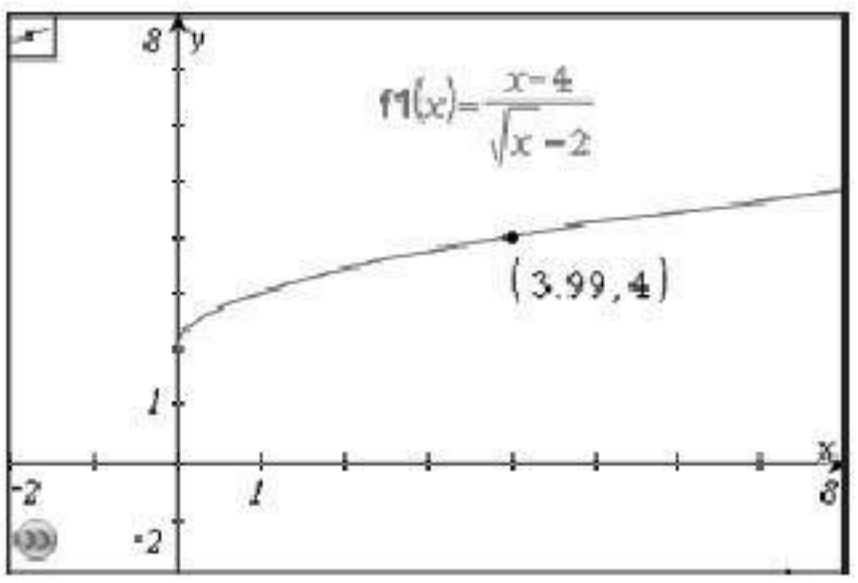
x	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99
$f(x)$	− 3.008	−3.0008		−2.9993	−2.993

0 (5



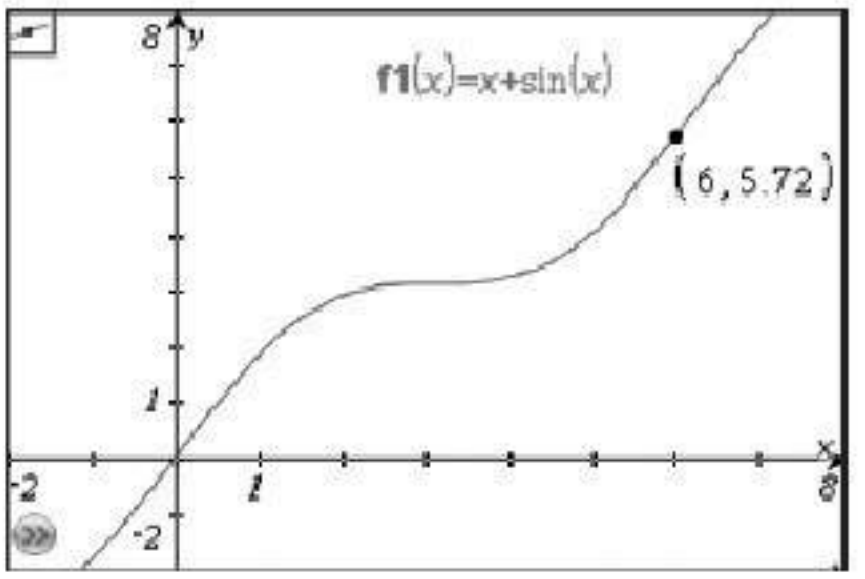
x	−0.01	−0.001	− 2	0.001	0.01
$f(x)$	−0.0002	−0.000002		−0.000002	−0.0002

4 (6



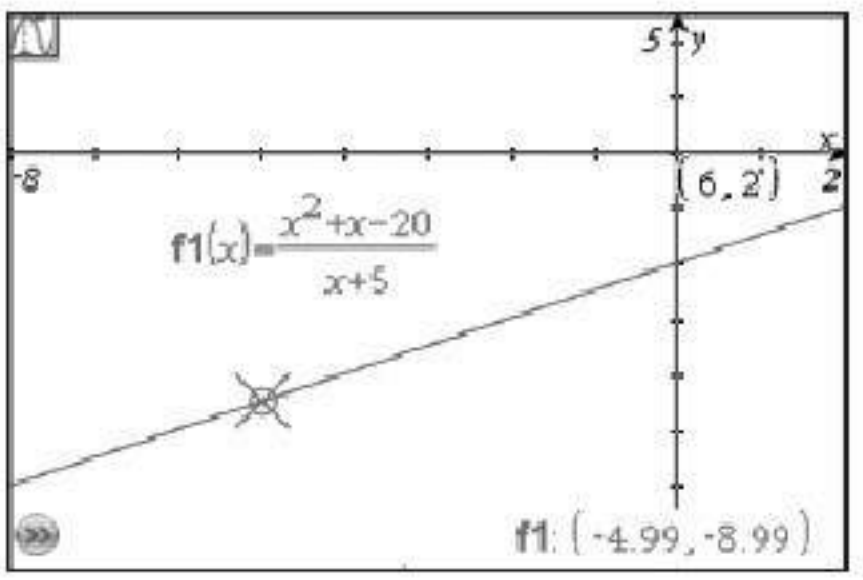
x	3.99	3.999	4	4.001	4.01
$f(x)$	3.998	3.9997		4.0002	4.003

5.72 (7



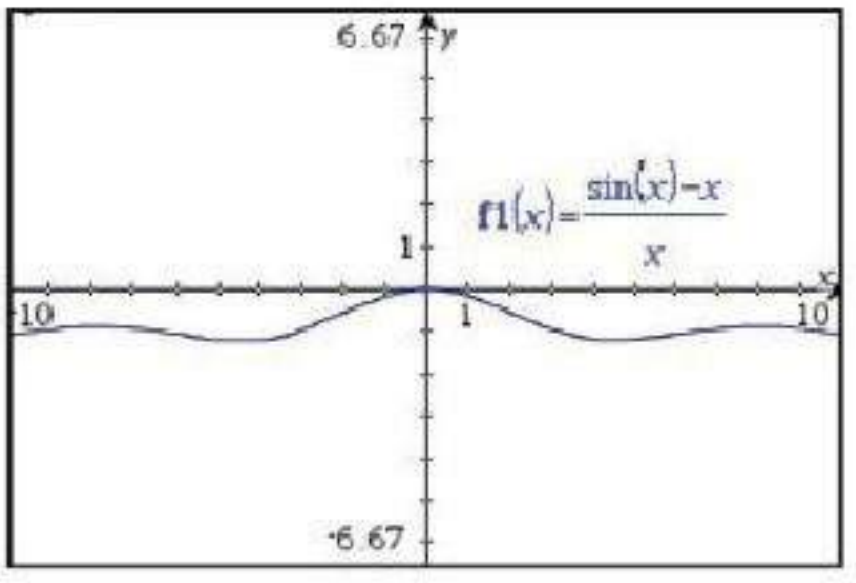
x	5.99	5.999	6	6.001	6.01
$f(x)$	5.70	5.719		5.723	5.74

– 9 (8

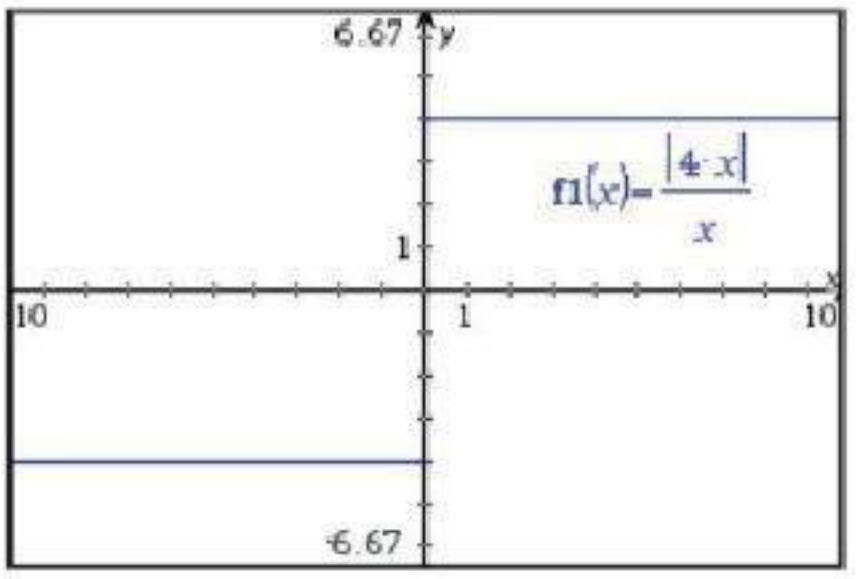


x	−5.01	−5.001	−5	−4.999	−4.99
f (x)	−9.01	−9.001		−8.999	−8.99

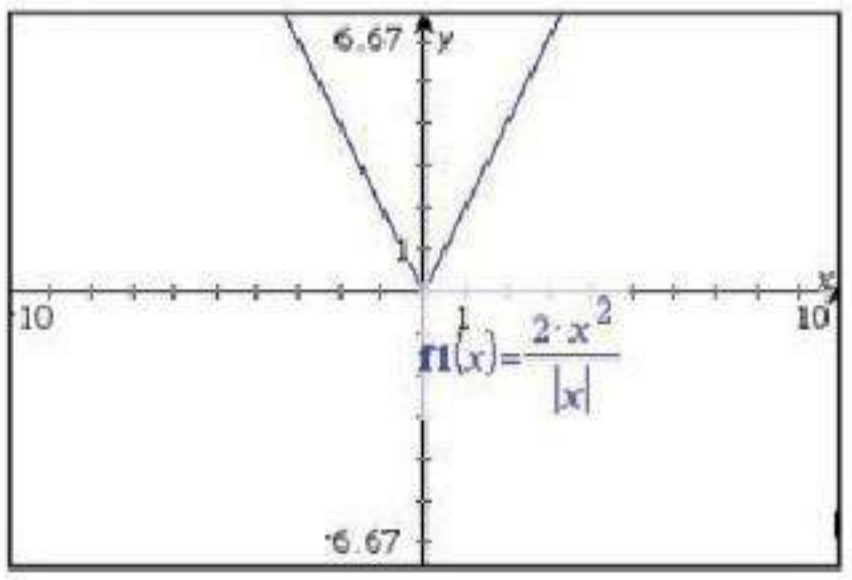
0 (9


6.67
y
$f1(x)=\frac{\sin(x)-x}{x}$
1
x
10
1
10
-6.67

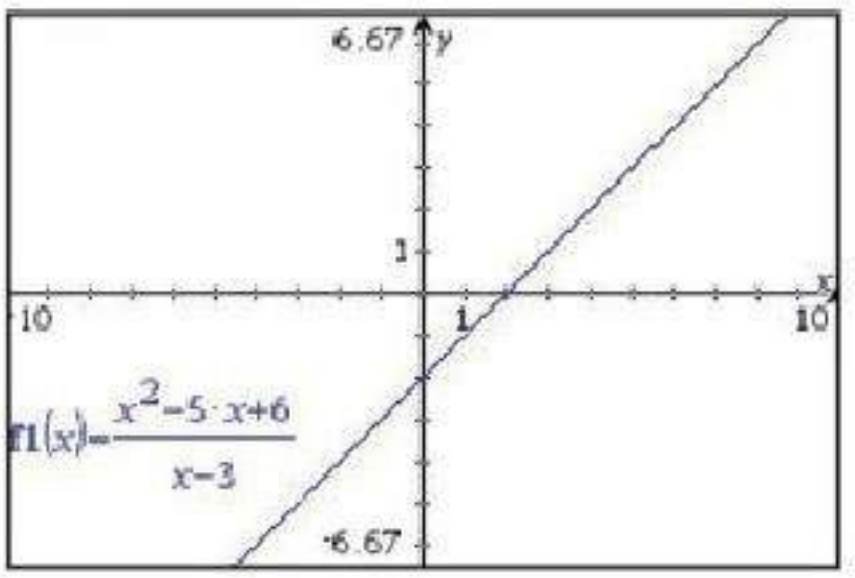
– 4 (10


6.67
y
$f1(x)=\frac{|4\cdot x|}{x}$
1
x
10
1
10
-6.67

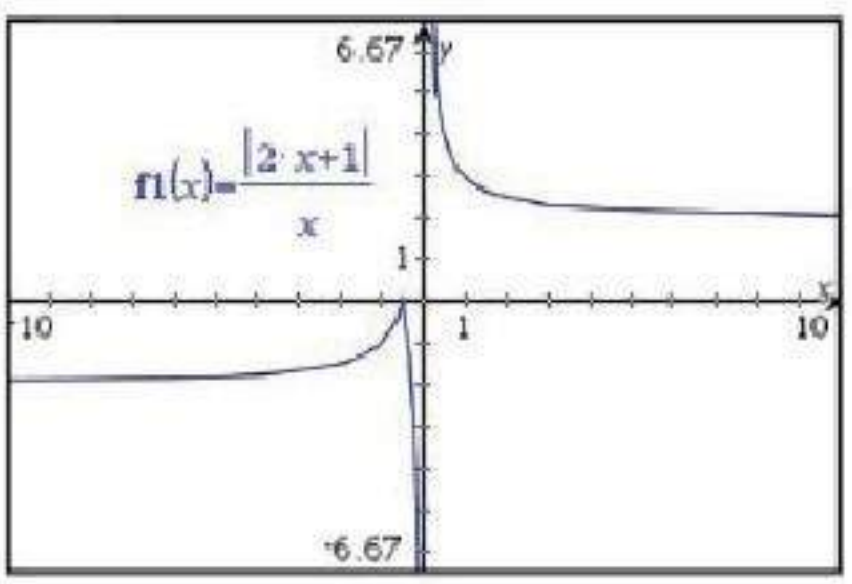
0 (11


6.67
y
1
x
10
1
10
$f1(x)=\frac{2\cdot x^2}{|x|}$
-6.67

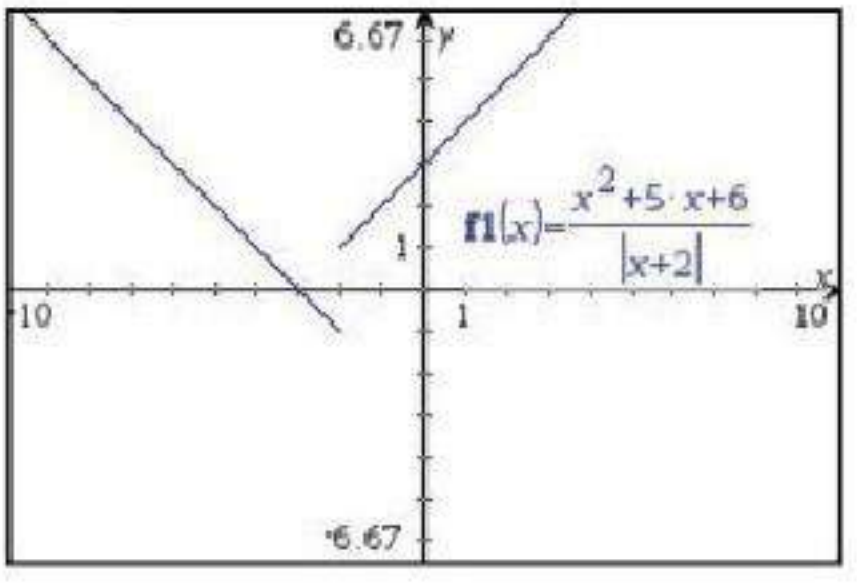
1 (12



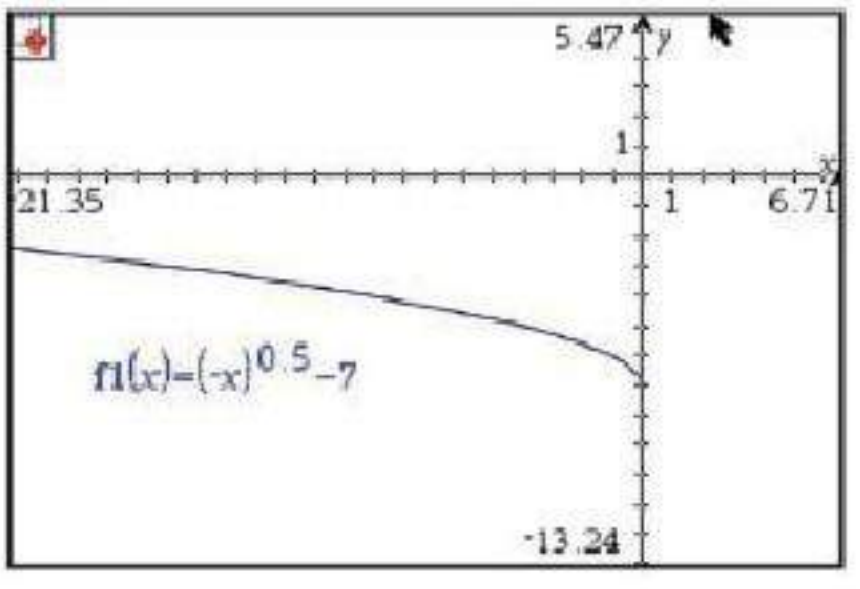
0 (13



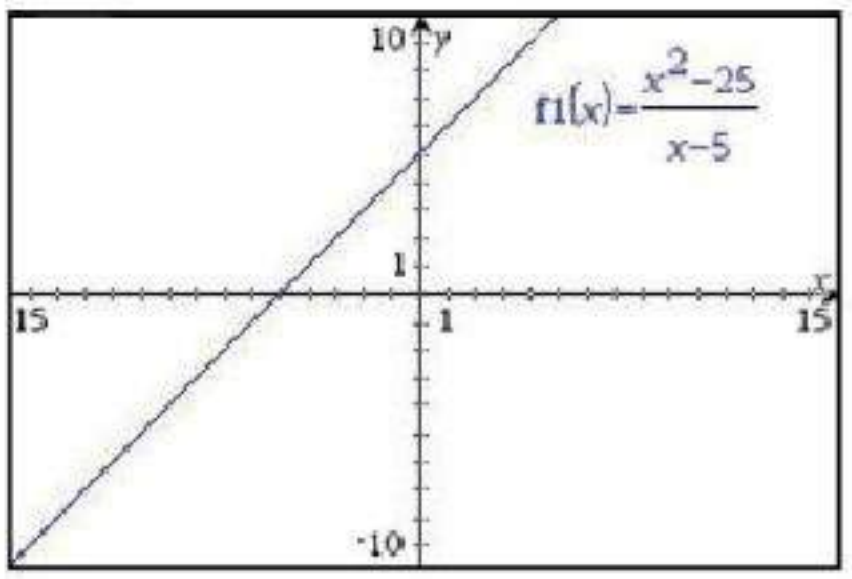
14) غير موجودة



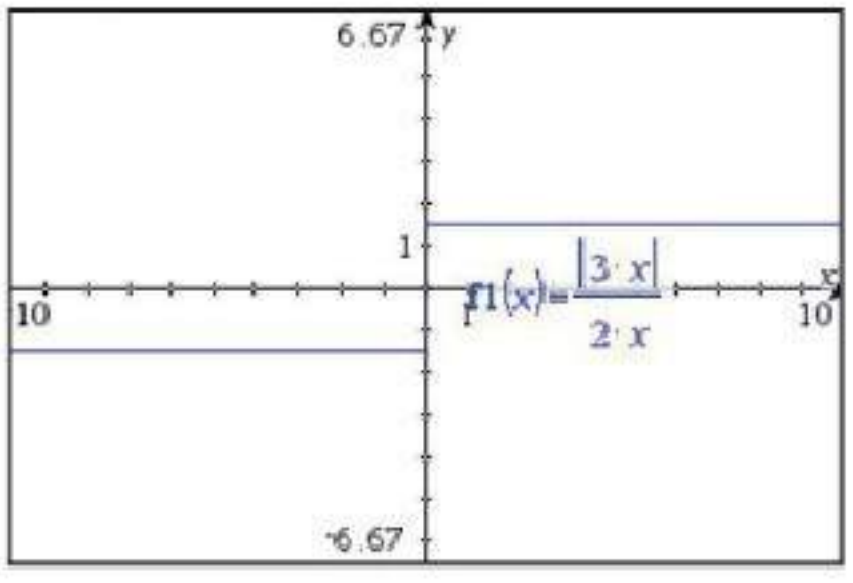
– 7 (15



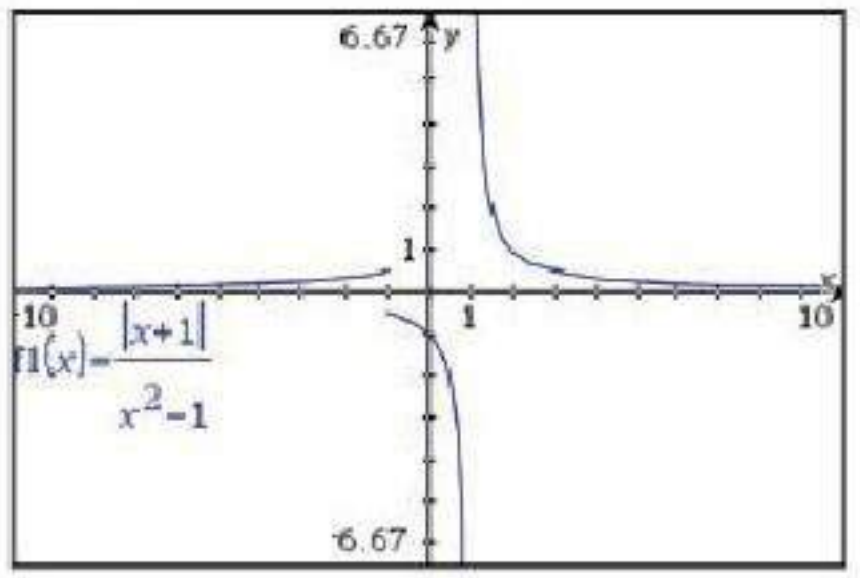
10 (16



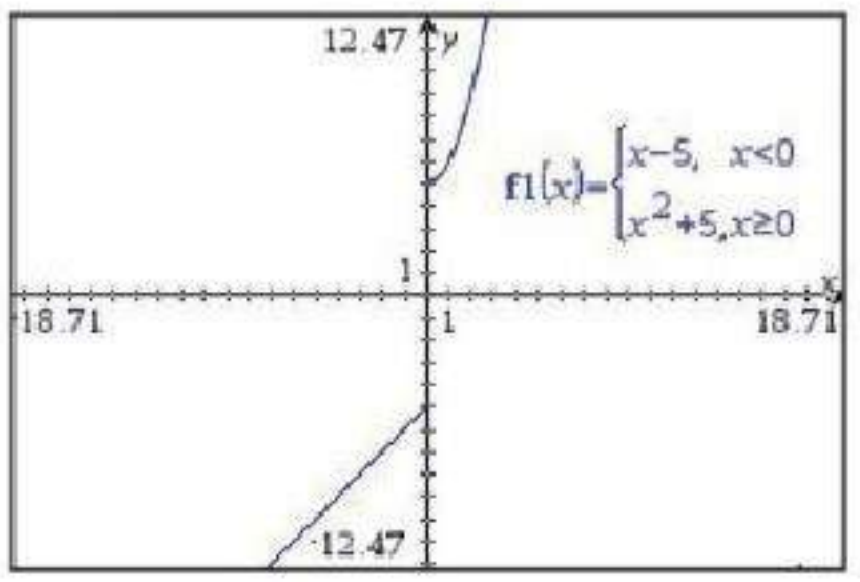
17) غير موجودة



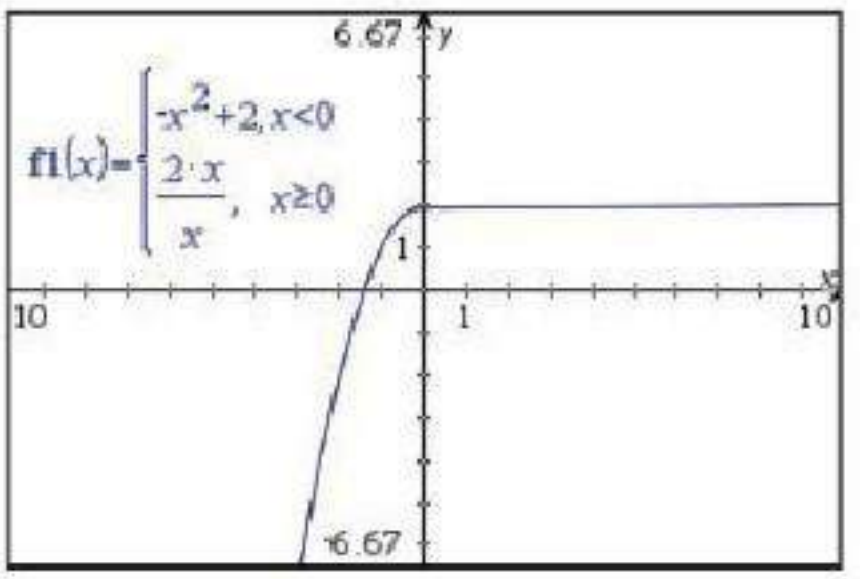
18) غير موجودة



19) غير موجودة



2 (20



3 (21

∞ (22

– 6 (23

24) غير موجودة

25) ∞ –

26) غير موجودة

27) ∞

28) ∞

29) $-\infty$

30) 0

31) غير موجودة

32) 1–

33) غير موجودة

34) 0

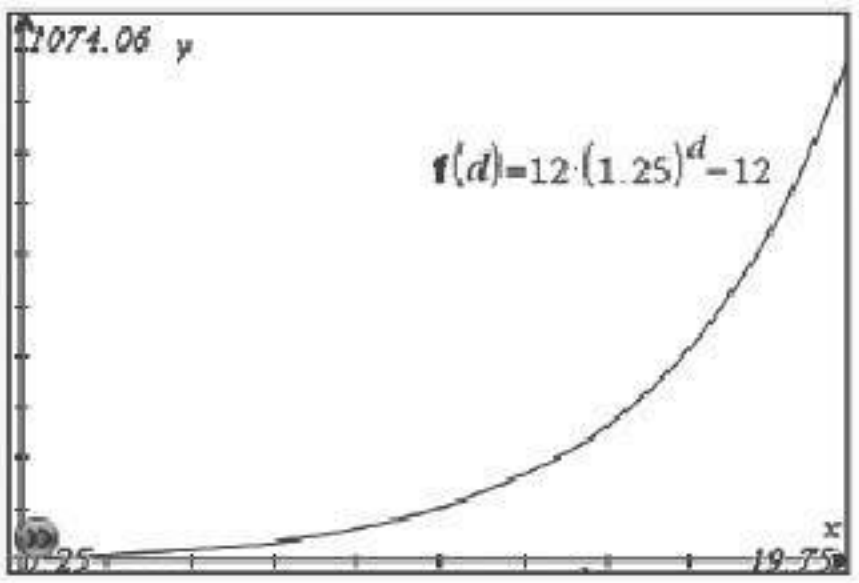
35) دواء:

a) $\lim_{w \to 1} f(w) = 250$; $\lim_{w \to 3} f(w) = 100$

b) 0؛ إجابة ممكنة: سيقضي اللقاح على العدوى مع مرور الزمن.

36) برامج تلفزيونية:

(a

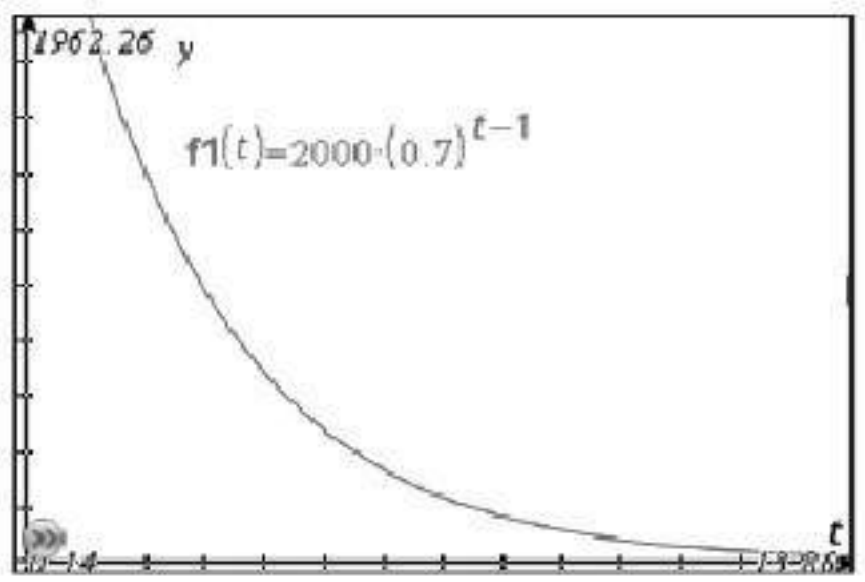


b) نحو 25، نحو 100، نحو 1031، نحو 7875584 شخصاً سوف يشاهدون البرنامج بعد مرور شهرين.

c) ∞، إجابة ممكنة: يعني الناتج أن عدد مشاهدي البرنامج سيزداد بشكل لا نهائي.

37) كيمياء:

(a



b) 480.2 , 80.71 , 13.56

c) 0

d) لا؛ مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية 6666.67 m تقريباً، وهو أقل من 7000 m، والذي يساوي بُعد المستشفى.

38) 1 –

39) 4

40) غير موجودة

41) 1

42) 6

43) 2.5

حاسبة بيانية:

44) غير موجودة؛ يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند $x = 1$

45) غير موجودة؛ يوجد خط تقارب رأسي للدالة عند $x = 2$

46) غير موجودة؛ تذبذب

47) غير موجودة؛ تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد 5 – من اليمين ومن اليسار.

مسائل مهارات التفكير العليا:

48) اكتشف الخطأ: كلاهما على خطأ، إذا اقتربت الدالة من قيمتين مختلفتين من اليمين واليسار، فإن النهاية غير موجودة عند تلك النقطة.

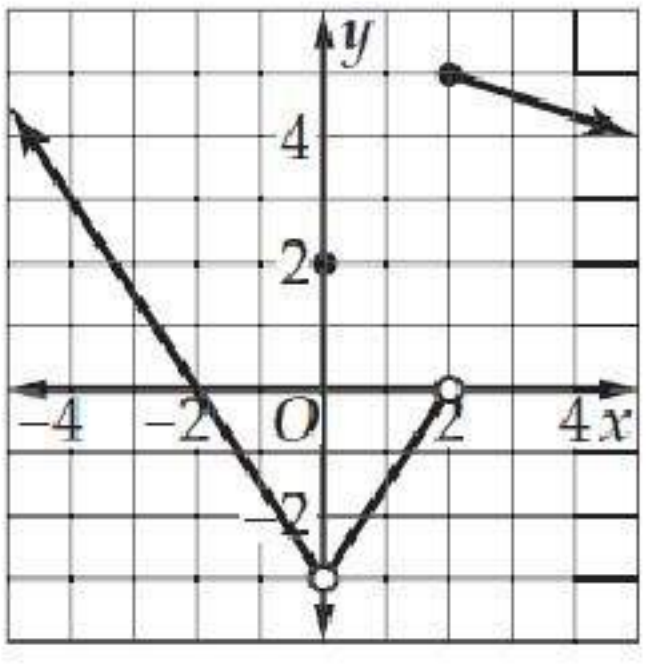
49) مسألة مفتوحة: إجابة ممكنة:

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\quad g(x)=\begin{cases}2x & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$$

50) تحد: $\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة؛ $\lim_{x\to 2} g(x)$ غير موجودة؛ إجابة ممكنة: إذا كان مقام الدالة النسبية صفرا، والبسط لا يساوي صفرا عند نقطة معطاة، فإن النهاية غير موجودة.

51) تبرير: أحياناً؛ إجابة ممكنة: لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c على قيمة الدالة عند النقطة c. فإذا كانت الدالة غير متصلة عند c، وكان $f(c)=L$، فإن نهاية الدالة قد تكون قيمة مختلفة عن L.

52) مسألة مفتوحة: إجابة ممكنة:



53) تحد:

a) غير موجودة

b) غير موجودة

c) 1 –

54) إجابة ممكنة: إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = a$، فإنه يمكنك إيجاد النهاية بالتعويض عن x بـ a في الدالة، أما إذا لم تكن الدالة متصلة، فبإمكانك التبسيط ثم التعويض عن x بـ a. وإذا لم تفد أي من الطريقتين، فإننا نقدر النهاية باستعمال التمثيل البياني.

مراجعة تراكمية

(55

$$\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\cot\theta}\right)$$

$$=\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\cos\theta\div\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$=\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$=\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$=\sin\theta\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$=\cos^2\theta$$

56) الدالة متصلة عند جميع قيم x ماعدا عند $x=-5$

حيث أن (غير معرفة) $h(-5)=\frac{0}{0}$

لكن: $\lim_{x\to-5}h(x)=\lim_{x\to-5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)}=-10$

و بما أن $h(-5)$ غير معرفة، $\lim_{x\to-5}h(x)$ موجودة فإنه يوجد نقطة عدم اتصال قابل للإزالة عند $x=-5$

57) 0.219

58) 63°

59) 93.4°

تدريب على اختبار:

60) C

61) A

4-2 حساب النهايات جبرياً

تحقق

1A) -4

1B) $\frac{1}{9}$

1C) $\sqrt{2}$

2A) 3

2B) $\frac{-1}{7}$

2C) بما أم هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما $x = 2$ فلا يمكننا حسابها بالتعويض المباشر

(2D غير ممكن؛ لأنه اذا كانت $f\left(x\right)=x+6$ فإن $f\left(-8\right)=-8+6<0$ إذن لا يمكن حساب $\lim_{x\to-8}\sqrt{f\left(x\right)}$

(3A 20

(3B $\frac{1}{5}$

(4A 10

(4B $-\frac{1}{4}$

(5A $-\infty$

(5B ∞

(5C $-\infty$

(6A 0

$-\infty$ (6B

3.5 (6C

0 (7A

∞ (7B

3 (7C



استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

1) -25

2) 29

3) 21.11

4) -46

5) 6

6) 42

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلافاذكر السبب:

7) ليس ممكناً؛ فالمقام يساوي صفراً عندما $x = 16$.

8) 30

9) 2

10) ليس ممكناً؛ قيمة الدالة $f\left(x\right)=\sqrt{2-x}$، هي $\sqrt{-1}$ عندما $x=3$ وهي ليست معرفة.

11) 188

12) – 66.84

13) فيزياء:

$\lim_{v\to 0} m=m_0$، عندما تقترب سرعة الجسم من الصفر، فإن كتلته تقترب من كتلته الابتدائية، أو كتلته في وضع السكون.

احسب كل نهاية مما يأتي:

14) 3

15) 8

16) 1.46

17) -2

18) -8

19) $\frac{1}{6}$

احسب كل نهاية مما يأتي:

20) ∞

21) $\frac{3}{4}$

22) $-\infty$

23) ∞

24) 0

25) 2

26) اسفنج:

a) 25 mm

b) 130 mm

c) لن يتعدى طول حيوان الإسفنج 130 mm

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إذا كانت موجودة:

27) 0

28) -4

29) 2

30) ∞

31) $\frac{1}{4}$

32) ∞

33) -5

34) 5

35) غير موجودة

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إذا كانت موجودة:

36) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\pi}{\pi}=\dfrac{0}{\pi}=0$

37) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+2^{x}-\cos x\right)=1+0+2^{0}-\cos 0=1$

38) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 2x}{x}=\dfrac{\tan\pi}{\frac{\pi}{2}}=0$

39) -0.5

أوجد $\lim_{h \to 0} \frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$ لكل دالة مما يأتي:

40) 2

41) -9

42) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

43) $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

44) $2x$

45) $2x+8$

46) فيزياء: 0.0000125

مسائل مهارات التفكير العليا:

47) برهان: $\lim_{x\to c} p(x) = \lim_{x\to c}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right)$

$$\lim_{x\to c} p(x) = \lim_{x\to c} a_n x^n + \lim_{x\to c} a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to c} a_2 x^2 + \lim_{x\to c} a_1 x + \lim_{x\to c} a_0$$

$$p(x) = a_n\left(\lim_{x\to c} x\right)^n + a_{n-1}\left(\lim_{x\to c} x\right)^{n-1} + \ldots + a_2\left(\lim_{x\to c} x\right)^2 + a_1 \lim_{x\to c} x + \lim_{x\to c} a_0$$

$$\lim_{x\to c} p(x) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0 = p(c)$$

48) برهان: أثبت أن العبارة صحيحة عند $n = 1$،

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^1 = L^1 = L = \lim_{x\to c}\left[f(x)\right]$$

أي أن العبارة صحيحة عند $n = 1$. افترض أن العبارة صحيحة عند $n = k$ حيث k عدد صحيح موجب أي: $\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^k L^k$.

والمطلوب إثبات أن العبارة صحيحة عند $n = k + 1$ أي $\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^{k+1} = L^{k+1}$

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^{k+1} = \lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^k \cdot \lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^1$$

$$= L^k \cdot L^1 = L^{k+1}$$

أي أن العبارة صحيحة عندما $n = k + 1$. وحسب مبدأ الاستقراء الرياضي، فإن العبارة صحيحة لأي عدد صحيح موجب n.

49) تحد: إذا كانت $m > n$، فإن النهاية تساوي 0. إذا كانت $m = n$

فإن النهاية تساوي $\frac{a_n}{b_m}$

إذا كانت $m < n$، فإن النهاية إما $+\infty$ أو $-\infty$.

50) تبرير: صحيحة أحياناً، تكون صحيحة إذا كانت $r(x)$ معرفة عند c.

51) اكتب: إجابة ممكنة:

الخاصية	التعريف	مثال
خاصية المجموع	$\lim_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)$	$\lim_{x\to 2}\left[x+5\right]=\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$
خاصية الفرق	$\lim_{x\to c}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)$	$\lim_{x\to 2}\left[x-5\right]=\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}5$
خاصية الضرب في ثابت	$\lim_{x\to c}\left[kf(x)\right]=k\lim_{x\to c}f(x)$	$\lim_{x\to 2}2x=2\lim_{x\to 2}x$
خاصية الضرب	$\lim_{x\to c}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}g(x)$	$\lim_{x\to 2}\left[x^2(x-5)\right]=\left(\lim_{x\to 2}x^2\right)\left(\lim_{x\to 2}x-5\right)$
خاصية القسمة	$\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}$ حيث $\lim_{x\to c}g(x)\neq 0$	$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2}{(x-5)}\right]=\frac{\lim_{x\to 2}x^2}{\left(\lim_{x\to 2}x-5\right)}$ حيث $\lim_{x\to 2}(x-5)\neq 0$
خاصية القوة	$\lim_{x\to c}\left[f(x)^n\right]=\left[\lim_{x\to c}f(x)\right]^n$	$\lim_{x\to 2}\left[(x-5)^2\right]=\left[\lim_{x\to 2}(x-5)\right]^2$
خاصية الجذر النوني	$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to c}f(x)}$ اذا كانت $\lim_{x\to c}f(x)>0$ عندما n زوجي	$\lim_{x\to 9}\sqrt{(x-5)}=\sqrt{\lim_{x\to 9}(x-5)}$

مراجعة تراكمية

52) $1 \oplus -1$

56) 0، غير معرفة

57) 4، 2

أوجد $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل زوج من الدوال الآتية، ثم حدِّد مجال الدالة الناتجة:

58)

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ &= x^2-2x+x+9\\ &= x^2-x+9\end{aligned}$$

المجال: $(-\infty, \infty)$ أو R

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ &= x^2-2x-x-9\\ &= x^2-3x-9\end{aligned}$$

المجال: $(-\infty, \infty)$ أو R

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= (x^2 - 2x) \cdot (x + 9)$$
$$= x^3 + 9x^2 - 2x^2 - 18x$$
$$= x^3 + 7x^2 - 18x$$

المجال: $(-\infty , \infty)$ أو R

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$= \frac{x^2 - 2x}{x + 9}$$

المجال: $\{x | x \neq -9 , x \in R\}$

(59

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= \frac{x}{x+1} + x^2 - 1$$

المجال: $\{x | x \neq -1 , x \in R\}$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= \frac{x}{x+1} - x^2 + 1$$

المجال: $\{x | x \neq -1 , x \in R\}$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= \frac{x}{\cancel{x+1}} \cdot (x-1)\cancel{(x+1)}$$
$$= x(x-1)$$

المجال: $\{x | x \neq -1 , x \in R\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$= \frac{x}{x+1} \div \left(x^2 - 1\right)$$
$$= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x^2-1}$$

المجال: $\{x | x \neq -1 , x \neq 1 , x \in R\}$

تدريب على اختبار:

C (60

A (61

B (62

4-3 استكشاف: معمل الحاسبة البيانية: ميل المنحنى

تمارين:

1) -6

2) 12

3) 1

4) 0.5

حلل النتائج

5) إجابة ممكنة: كلما اقتربت نقاط تقاطع القاطع من نقطة (a, b) ، على المنحنى، فإن القاطع يقترب أكثر فأكثر من المماس للمنحنى عند النقطة (a, b).

6) إجابة ممكنة: إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة عند تلك النقطة.

4-3 المماس والسرعة المتجهة

تحقق

6 (1A

–4 (1B

$m = 2x - 4$ (2A

$m = 3x^2$ (2B

3) 17 ft/s إلى الأعلى.

4) – 224 ft/s

5) $v(t) = 90 - 32t$

تدرب وحل المسائل:

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

1) 3, 5 –

2) –3, – 3

3) $-3, -\frac{1}{3}$

4) 12, 3

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

5) $m = -2$

6) $m = -2x + 4$

7) $m = -2x$

$$m = -\frac{2}{x^3}$$ (8

$$m = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$$ (9

$m = -6x^2$ 10

11) تزلج:

$m = 0.18t^2 - 2.16t$ (a

$-3.6\ ,\ -6.3\ ,\ -6.3$ (b

تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي بعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأميال بعد t دقيقة. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم بالميل لكل ساعة في الفترة الزمنية المعطاة

(تذكر بأن تحوّل الدقائق إلى ساعات):

12) 45 mi/h تقريباً

13) 65 mi/h تقريباً

14) 49 mi/h تقريباً

15) 45 mi/h تقريباً

16) $\dfrac{-64t^2 + 130t + 2625}{2t - 15}$

تمثِّل $f(t)$ في كل مما يأتي بعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللّحظية لهذا الجسم عند الزمن المعطى:

17) –96 ft/s

18) 12.4 ft/s

19) – 512 ft/s

20) – 121.6 ft/s

21) –58.2 ft/s

22) -57.6 ft/s

تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي المسافة التي يقطعها جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن :

23) $v(t) = 28t$

24) $v(t) = 1 - 6t$

25) $v\,(t) = 5$

26) $v\,(t) = -\ 2t + 4$

27) $v\,(t) = 24t - 6t^2$

28) $v\,(t) = 9t^2 + 6$

29) قفز مظلي:

a) -112 ft/ s

b) -64 ft/ s, $-\ 160$ ft/ s

$v(t) = -32t$ (c

30) غوص:

– 7.4 m/ s (a

$v(t) = -9.82t - 0.04$, – 29.5 m/ s (b

31) كرة قدم:

$-32t + 75$ (a

59 ft/ s (b

$t \approx 2.344$ s (c

90.39 ft تقريباً (d

32) فيزياء:

$9t^2 + 8$ (a

44 m, 152 m, 332 m (b

مسائل مهارات التفكير العليا:

33) اكتشف الخطأ: جميل؛ إجابة ممكنة: ميل المنحنى هو 1 – عندما $x < 0$، 1 عندما $x > 0$.

لذا، فإن التمثيل البياني للميل يتكون من مستقيمين أفقيين:

$y = \begin{cases} -1 , x < 0 \\ 1 , x > 0 \end{cases}$؛ ولذلك يكون غير متصل.

34) $m = 8x^3 + 9x^2 - 2$

35) خاطئة؛ إجابة ممكنة: إذا لم يكن المنحنى دائرة فمن الممكن أن يقطع المماس هذا المنحنى في نقاط أخرى غير نقطة التماس، على سبيل المثال، المنحنى الذي يمثل الدالة $y = \sin x$.

36) صح، إجابة ممكنة: بما أن $s(t)$ دالة خطية، فإن ميلها ثابت ويساوي a، وبذلك تكون السرعة المتجهة اللحظية للجسم تساوي a دائماً.

37) إجابة ممكنة: إذا مثلت دالة المسافة التي يقطعها جسم بيانيا، فإن المماس عند نقطة القيمة العظمى (أو الصغرى) يكون أفقيا؛ أي موازيا للمحور x، وميله يساوي صفرا. ولذلك تكون السرعة المتجهة اللحظية تساوي صفرا عند نقطة القيمة العظمى (أو الصغرى)

مراجعة تراكمية

38) 22

39) 1

40) 0

41) $\frac{3}{2}$

42) 0

تدريب على اختبار:

43) A

44) C

45) C

اختبار منتصف الفصل

قدِّر كل نهاية مما يأتي:

1) 1

2) 1

3) 12

4) 0

5) 0.66

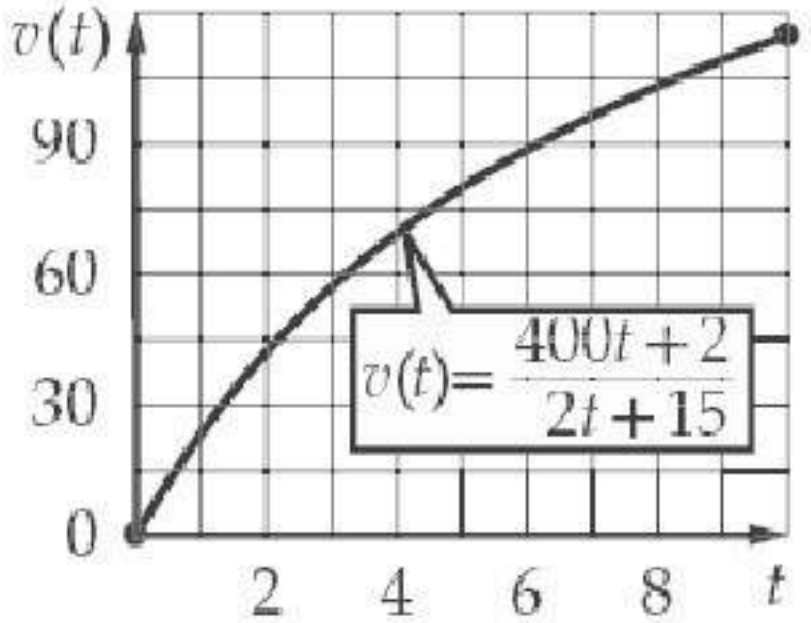
6) 2

7) −1

8) 0.33

(9

(a



b) 42000, 80000, 115000 ريال

c) 200

d) إن قيمة التحفة لن تزيد عن 200000 ريال.

احسب كل نهاية مما يأتي بالتعويض المباشر ، إذا كان ممكنا، وإلا فاذكر السبب.

10) ليس ممكناً؛ عندما $x = 9$، فإن المقام يساوي صفراً.

11) 20 –

12) حياة برية: 500 غزال

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:

13) ∞

14) $\frac{1}{2}$

15) 0

16) $-\infty$

17) A

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

18) $1, -5$

19) $-5, -5$

20) $-5, 3$

21) ألعاب نارية:

a) $v(t) = -32t + 90$

b) 74 ft/ s

c) 129.76 ft تقريباً

22) اختيار من متعدد: H

تعطى المسافة التي يقطعها جسم متحرك بالأميال بعد t دقيقة بالدالة $s(t)$.

أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم في كل مما يأتي بالميل لكل ساعة على الفترة الزمنية المعطاة. تذكَّر أن تحول الدقائق إلى ساعات.

23) 42 mi/ h

24) 123 mi/ h

25) 54 mi/ h تقريباً

26) 120 mi/ h تقريباً

أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يعطى موقعه عند أي زمن بالعلاقة $h(t)$ في كل مما يأتي:

27) $v(t) = 8t - 9$

28) $v(t) = 2 - 26t$

29) $v(t) = 2 - 10t$

30) $v(t) = 12t - 3t^2$

4-4 المشتقة

تحقق

$f'(x)=12x\ ,f'(2)=24\ ,\ f'(5)=60$ (1A

$f'(x)=-10x+2\ ,f'(1)=-8\ ,\ f'(4)=-38$ (1B

$j'(x)=4x^3$ (2A

$k'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ (2B

$m'(x)=-\frac{5}{x^6}$ (2C

$$f'(x)=10x^4-3x^2 \quad \text{(3A}$$

$$g'(x)=15x^4+24x^3 \quad \text{(3B}$$

$$h'(x)=12x^2-3 \quad \text{(3C}$$

$$v(t)=55-32t \quad \text{(4}$$

5) أقصى ارتفاع وقدره 330 ft، وذلك عند 0 s، وأدنى ارتفاع 10 ft عند 4 s.

$$h'(x)=\left(5x^4+26x\right)\left(7x^3-5x^2+18\right)+\left(x^5+13x^2\right)\left(21x^2-10x\right) \quad \text{(6A}$$

$$h'(x)=\left(2x+3x^2+1\right)\left(8x^2+3\right)+\left(x^2+x^3+x\right)\left(16x\right) \quad \text{(6B}$$

$$\frac{155}{\left(12x+5\right)^2} \quad \text{(7A}$$

$$\frac{-12x^2+24}{\left(2x^2+4\right)^2}$$ (7B

تدرب وحل المسائل:

أوجد مشتقة كلِّ دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقةعند النقاط المعطاة:

1) $f'(x)=8x\ ,f'(2)=16,\ f'(-1)=-8$

2) $g'(t)=-2t+2\ ,g'(5)=-8,\ g'(3)=-4$

3) $m'(j)=14,m'(-7)=14,\ m'(-4)=14$

4) $v'(n)=10n+9\ ,v'(7)=79,\ v'(2)=29$

5) $r'(b)=6b^2-10\ ,r'(-4)=86,\ r'(-3)=44$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

6) $y'(f)=-11$

7) $z'(n)=4n+7$

$$g'(h) = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{h^{\frac{2}{3}}} - 3h^{\frac{1}{2}} \quad (8$$

$$b'(m) = 2m^{-\frac{1}{3}} - 3m^{\frac{1}{2}} \quad (9$$

$$n'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t^3} - \frac{6}{t^4} \quad (10$$

$$f'(x) = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \quad (11$$

$$q'(c) = 9c^8 - 15c^4 + 10c - 3 \quad (12$$

$$p'(k) = 5.2k^{4.2} - 38.4k^{3.8} + 3 \quad (13$$

14) درجات الحرارة:

$$f'(h) = -0.0108h^2 - 0.02h + 2.04 \quad (a$$

$$f'(2) \approx 1.96^\circ F \ , f'(14) \approx -0.36^\circ F \ , f'(20) \approx -2.68^\circ F \quad (b$$

c) $68.92^{\circ}F$

استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة، ثم أوجد نقاط القيم العظمىوالصغرى لكل دالة مما يأتي على الفترة المعطاة.

15) نقطة حرجة $(-8\ ,\ -2)$ ، صغرى $(-8\ ,\ -2)$، عظمى $(-5\ ,\ 10)$

16) لا يوجد نقاط حرجة في الفترة $[1\ ,\ 4]$ ، صغرى $(1\ ,\ 5)$، عظمى $(4\ ,\ 350)$

17) نقطة حرجة $(-5\ ,\ -10)$ ، صغرى $(-6\ ,\ -11)$، عظمى $(-3\ ,\ 2)$

18) نقطة حرجة $(-9\ ,\ 405)$ ، صغرى $(-11\ ,\ 385)$، عظمى $(-9\ ,\ 405)$

19) نقطة حرجة $(1\ ,\ 1)$ ، صغرى $(0\ ,\ 0)$، عظمى $(3\ ,\ 9)$

20) نقطتان حرجتان $(-3\ ,\ 21.5)$و $(2\ ,\ 0.67)$، صغرى $(2\ ,\ 0.67)$، عظمى $(5\ ,\ 32.17)$

21) رياضة:

a) $h'(t) = 65 - 32t$

b) $(0 , 3)$, $(2.03 , 69.02)$ تقريباً

c) نعم؛ أقصى ارتفاع يمكن أن تبلغه الكرة هو 69.02 ft تقريباً. وهذا أعلى من 68 ft.

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

22) $f'(x) = 4(x^2 + 9) + 2x(4x + 3)$

23) $g'(x) = (12x^3 + 2)(5 - 3x) - 3(3x^4 + 2x)$

24) $s'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t}(3t^{11} - 4t) + (\sqrt{t} + 2)(33t^{10} - 4)$

25) $g'(x) = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2\right) + (0.5x^4 - 3x) + (3x^3 - 3)\left(x^{\frac{3}{2}} + 2x\right)$

(26

$$'(t)=\left(3t^{2}+2-7t^{6}\right)\left(t^{6}+3t^{4}-22t\right)+\left(t^{3}+2t-t^{7}\right)\cdot\left(6t^{5}+12t^{3}-22\right)$$

$$q'(a)=\left(\frac{8}{9}a^{\frac{1}{8}}-\frac{1}{4}a^{-\frac{5}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}}-13a\right)+\left(a^{\frac{9}{8}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}a^{\frac{1}{4}}-13\right)$$ (27

(28

$$f'(x)=\left(7x^{4}+2.7\right)\left(7.3x^{9}-0.8x^{5}\right)+\left(1.4x^{5}+2.7x\right)\cdot\left(65.7x^{8}-4x^{4}\right)$$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالةمما يأتي:

$$f'(m)=-\frac{12}{\left(3+2m\right)^{2}}$$ (29

$$r'(t)=\frac{10t}{\left(3-t^{2}\right)^{2}}$$ (30

$$m'(q)=\frac{q^{6}-2q^{4}-8q^{3}-9q^{2}-8q}{\left(q^{3}-2\right)^{2}}$$ (31

$$f'(x)=\frac{4x^{2}+3x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}+12}{2\left(-x^{2}+3\right)^{2}}$$ (32

$$q'(r)=\frac{r^{2}-15}{r^{4}}$$ (33

$$t'(w)=\frac{1}{2}w^{-\frac{1}{2}}+\frac{7}{2}w^{\frac{5}{2}}$$ (34

(35

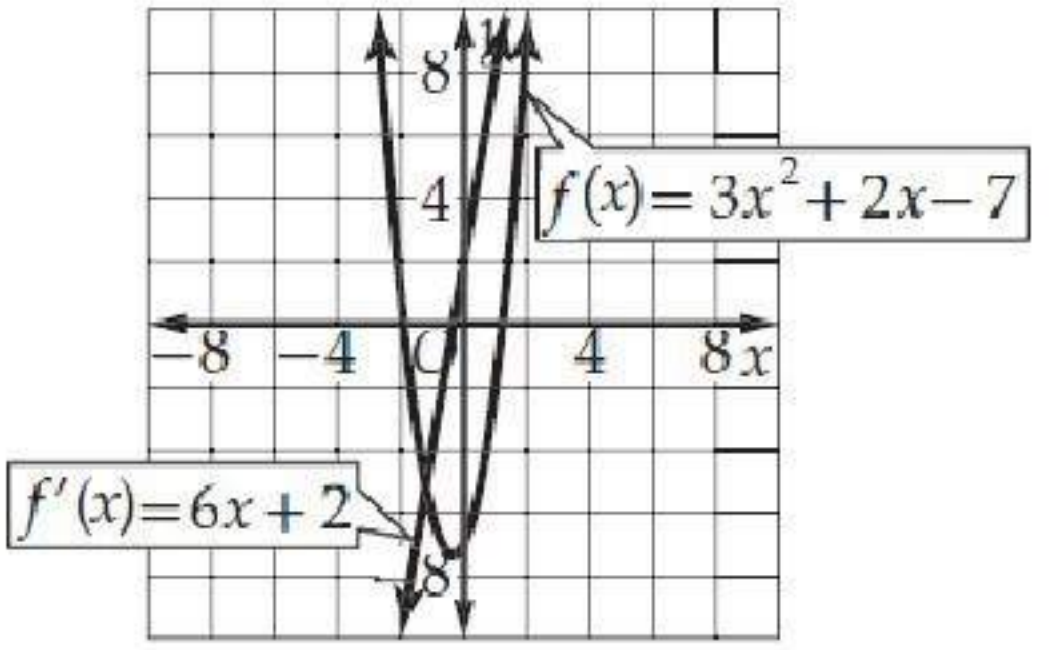
$$r(d)=d(80-2d)$$ (a

$$r'(d)=-4d+80$$ (b

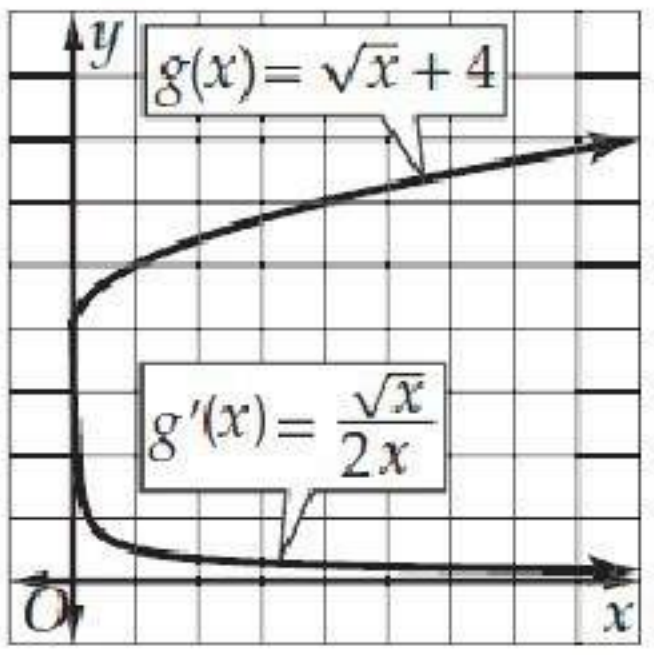
20 (c ريالاً

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي، ثم مثِّل الدالة والمشتقة بيانياً على المستوى الإحداثي نفسه.

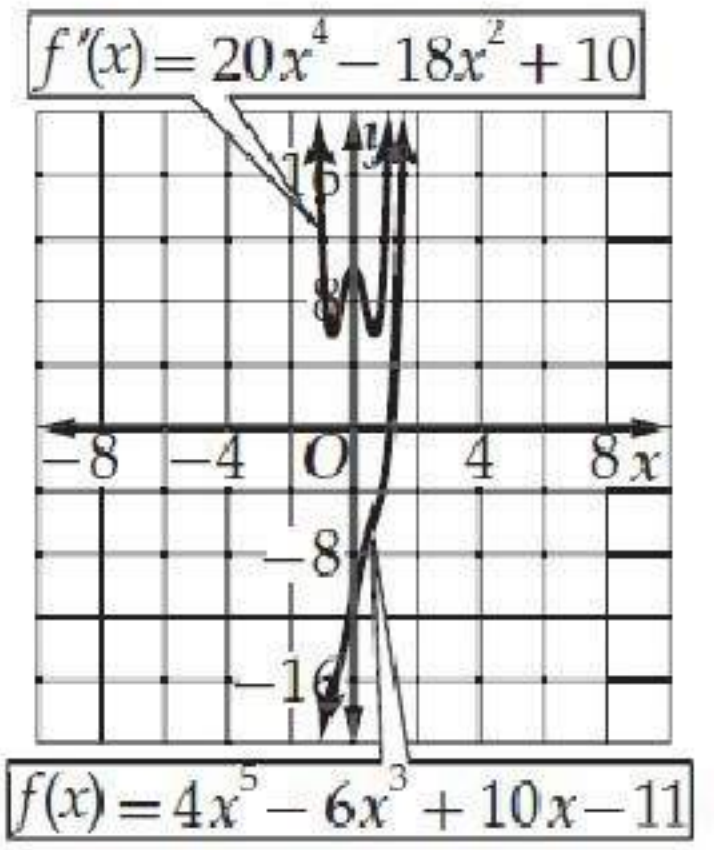
(36 $f'(x) = 6x + 2$



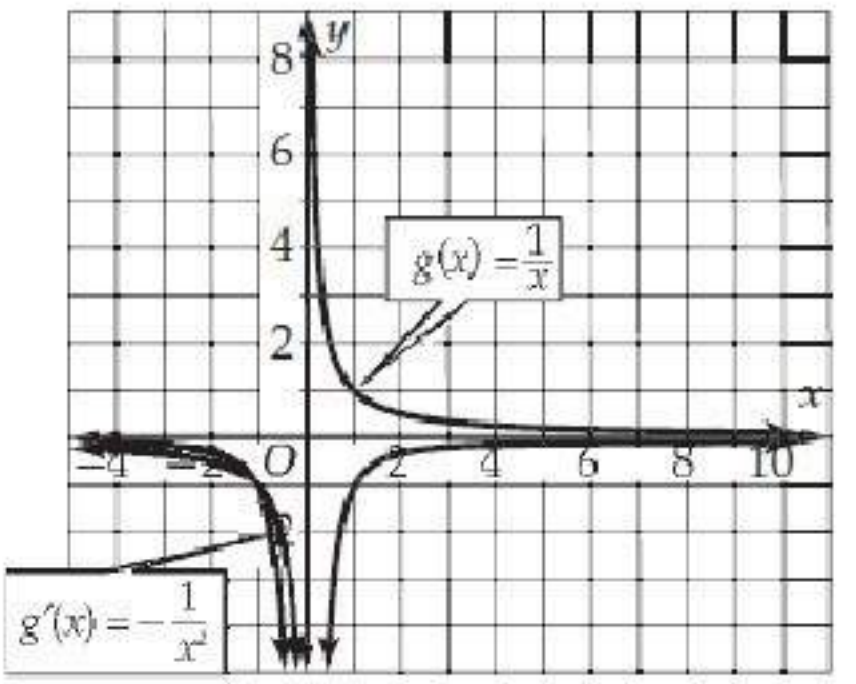
(37 $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x}$



$$f'(x) = 20x^4 - 18x^2 + 10 \quad (38$$



$$g'(x) - \frac{1}{x^2} \quad (39$$



(40

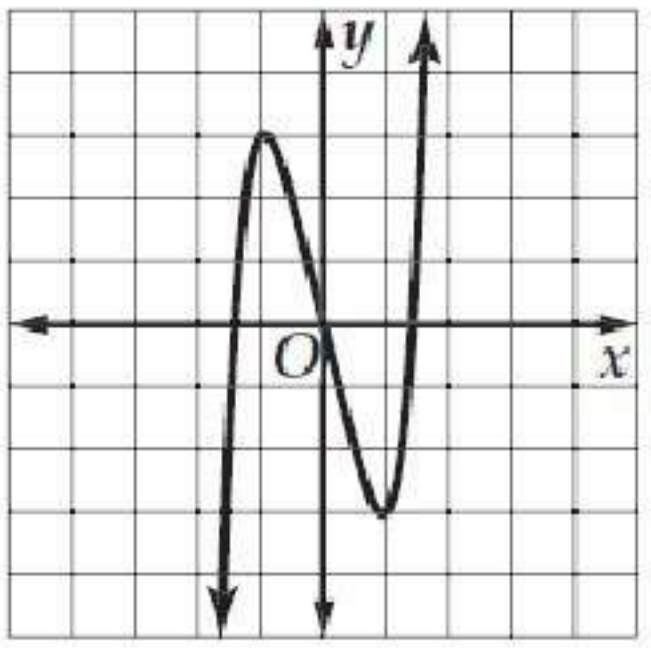
$$f''(x) = 80x^3 - 12x \quad \text{(a}$$

$$g'''(x) = -420x^4 + 96x - 42 \quad \text{(b}$$

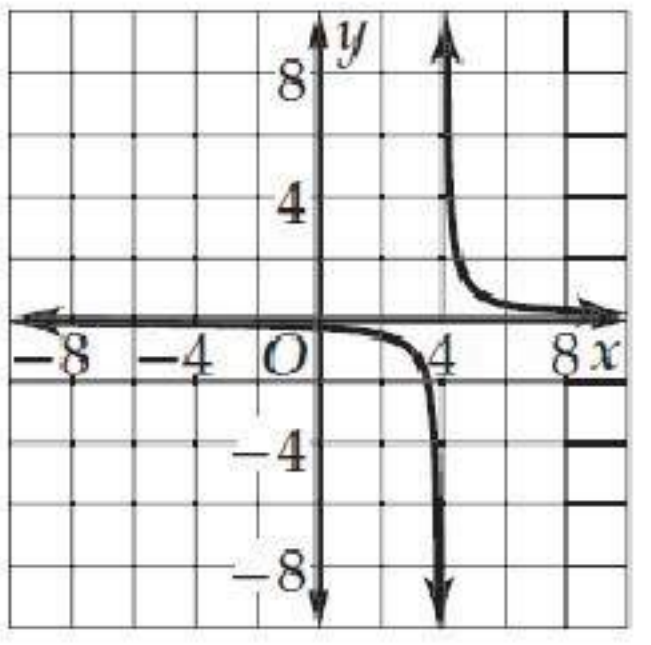
$$h^{(4)}(x) = 1080x^{-7} + 240x^{-6} \quad \text{(c}$$

مثِّل منحنى دالة لها الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

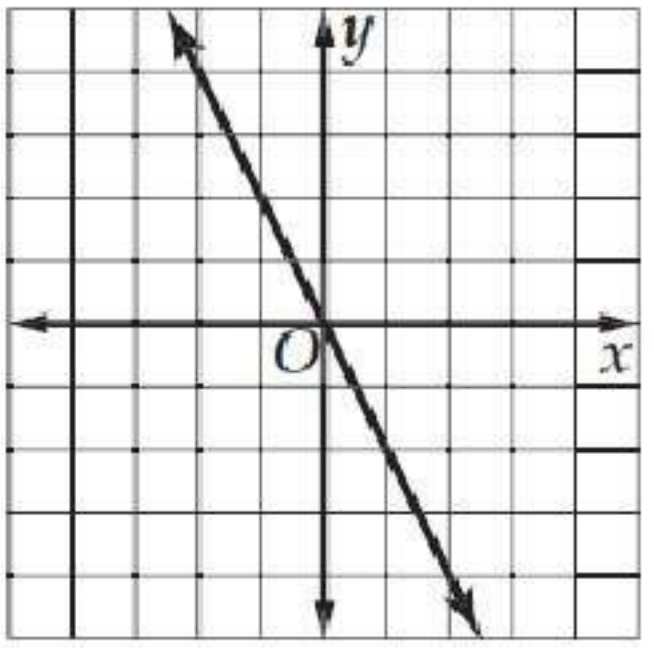
41) إجابة ممكنة:



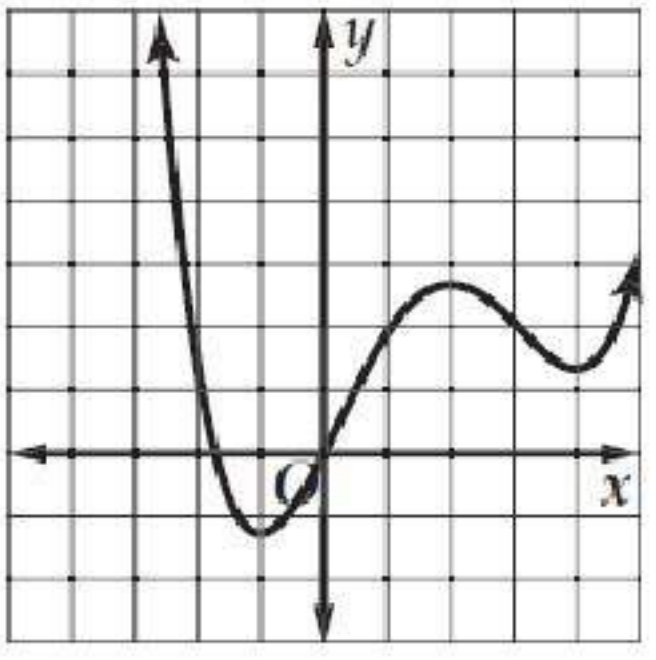
42) إجابة ممكنة:



43) إجابة ممكنة:



44) إجابة ممكنة:

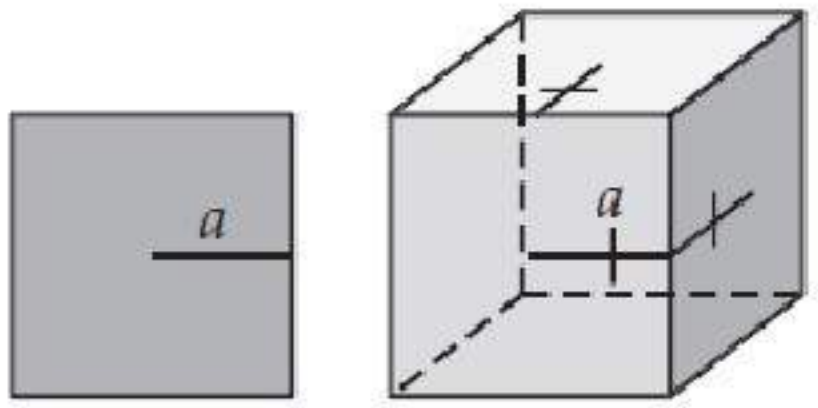


45) تمثيلات متعددة:

a) $A' = 2\pi r$

b) إجابة ممكنة: مشتقة صيغة مساحة الدائرة هي صيغة محيط الدائرة.

(c



$A = 4a^2,\ A' = 8a,\ V = 8a^3,\ V' = 24a^2$ (d

e) عند كتابة مساحة المربع بدلالة بعد المركز عن الأضلاع، فإن مشتقة صيغة المساحة هي محيط المربع. وعند كتابة حجم المكعب بدلالة بعد المركز عن الأوجه، فإن مشتقة صيغة الحجم هي مساحة السطح الكلية للمكعب.

مسائل مهارات التفكير العليا:

46) اكتشف الخطأ: عبد الله، إجابة ممكنة: وجد عبد الله $f'(x)=12x+4$، ثم ربَع الطرفين.

أما أحمد فقد ربَع الدالة الأصلية، ثم أوجد المشتقة.

47) تحد: $f'(y)=30x^2y^2-12xy-11x^8z^7$

48) برهان: إجابة ممكنة:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right]+\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\left[\lim_{h\to 0}g(x+h)\right]+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

49) تبرير: صحيحة؛ إجابة ممكنة: إن قوة $f(x)$ هي $5n+3$. بحسب قاعدة مشتقة القوة، تصبح هذه القوة معامل في المشتقة. وتصبح القوة في المشتقة أقل بواحد من $5n+3$ أي $(5n+3)-1$ أو $5n+2$.

50) برهان: إجابة ممكنة:

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)}{g(x+h)g(x)}$$

$$=\frac{g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)\lim_{h\to 0}g(x+h)}$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

51) اكتب: إجابة ممكنة: من الممكن أن يكون لدالتين مختلفتين المشتقة نفسها؛ لأن مشتقة أي ثابت هي 0، أي أنه لأي دالتين تختلفان بانسحاب رأسي فإن لهما المشتقة نفسها. فمثلاً للدالتين $f(x)=x^2$ و $g(x)=x^2+3$ المشتقة نفسها وهي $2x$.

مراجعة تراكمية

(52 $-3, 3$

(53 $-2, -2$

(54 $6, 12$

(55 -8

(56 $-\frac{1}{3}$

(57 $-\frac{1}{2}$

(58 7

(59 3

تدريب على اختبار:

D (60

C (61

A (62

4-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

تحقق

1) المساحة باستعمال 6 مستطيلات = 2240 وحدة مربعة،

المساحة باستعمال 8 مستطيلات = 2268 وحدة مربعة،

المساحة باستعمال 12 وحدة مستطيلة = 2288 وحدة مربعة.

2) المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي15.4 وحدة مربعة،

الأطراف اليسرى = 25 وحدة مربعة،

الوسط = 20.2 وحدة مربعة.

3A) وحدة مربعة

3B) 4.5 وحدة مربعة

4A) $\frac{26}{3}$ وحدات مربعة

4B) 60 وحدة مربعة

5) **طلاء:** لا؛ مساحة كل جزء من الجدار $16.67\ ft^2$ تقريباً، بما أن المطلوب طلاء جزأين من الجدار، أي (16.67) 2 ، ويساوي $33.34\ ft^2$ تقريباً.

إذن كمية الطلاء لا تكفي.

تدرب وحل المسائل:

قرّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة مستعملا الطرف المعطىلتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عددها في كلٍ من الأشكال أدناه:

1) 15 وحدة مربعة تقريباً

2) 9.25 وحدات مربعة تقريباً

3) 14.29 وحدة مربعة تقريباً

4) 0.65 وحدة مربعة تقريباً

5) أرضيات:

a) طرفا منحنى نصف الدائرة هما طرفا الفترة [1, 10] ، وباستعمال الأطراف اليسرى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة نجد أن

$$R_1 = 1 \cdot f(0) = \left(-0^2 + 10 \cdot 0\right)^{0.5} = 0$$
$$R_2 = 1 \cdot f(1) = \left(-1^2 + 10 \cdot 1\right)^{0.5} = 3$$
$$R_3 = 1 \cdot f(2) = \left(-2^2 + 10 \cdot 2\right)^{0.5} = 4$$
$$R_4 = 1 \cdot f(3) = \left(-3^2 + 10 \cdot 3\right)^{0.5} \approx 4.58$$
$$R_5 = 1 \cdot f(4) = \left(-4^2 + 10 \cdot 4\right)^{0.5} \approx 4.90$$
$$R_6 = 1 \cdot f(5) = \left(-5^2 + 10 \cdot 5\right)^{0.5} = 5$$
$$R_7 = 1 \cdot f(6) = \left(-6^2 + 10 \cdot 6\right)^{0.5} \approx 4.90$$
$$R_8 = 1 \cdot f(7) = \left(-7^2 + 10 \cdot 7\right)^{0.5} \approx 4.58$$
$$R_9 = 1 \cdot f(8) = \left(-8^2 + 10 \cdot 8\right)^{0.5} = 4$$
$$R_{10} = 1 \cdot f(9) = \left(-9^2 + 10 \cdot 9\right)^{0.5} = 3$$

المساحة الكلية تساوي 37.96 وحدة مربعة تقريباً.

b) في هذا الجزء من السؤال، سوف نستعمل الأطراف اليمنى لمستطيلات، والأطراف اليسرى لمستطيلات أخرى.

$$R_1 = 1 \cdot f(0) = \left(-0^2 + 10 \cdot 0\right)^{0.5} = 0$$
$$R_2 = 1 \cdot f(1) = \left(-1^2 + 10 \cdot 1\right)^{0.5} = 3$$
$$R_3 = 1 \cdot f(2) = \left(-2^2 + 10 \cdot 2\right)^{0.5} = 4$$
$$R_4 = 1 \cdot f(3) = \left(-3^2 + 10 \cdot 3\right)^{0.5} \approx 4.58$$
$$R_5 = 1 \cdot f(4) = \left(-4^2 + 10 \cdot 4\right)^{0.5} \approx 4.90$$
$$R_6 = 1 \cdot f(6) = \left(-6^2 + 10 \cdot 6\right)^{0.5} \approx 4.90$$
$$R_7 = 1 \cdot f(7) = \left(-7^2 + 10 \cdot 7\right)^{0.5} \approx 4.58$$
$$R_8 = 1 \cdot f(8) = \left(-8^2 + 10 \cdot 8\right)^{0.5} = 4$$
$$R_9 = 1 \cdot f(9) = \left(-9^2 + 10 \cdot 9\right)^{0.5} = 3$$
$$R_{10} = 1 \cdot f(10) = \left(-10^2 + 10 \cdot 10\right)^{0.5} = 0$$

المساحة الكلية تساوي 32.96 وحدة مربعة تقريباً.

c) 39.27 وحدة مربعة، التقريب الأول أفضل.

إجابة ممكنة: المساحة الإضافية الواقعة خارج نصف الدائرة والمحتواه في التقريب الأول تساعد على حساب مساحة المنطقة التي لم تدخل في حسابات المستطيلات. نصف القطر يساوي 5 وحدات.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} r\, 5^2 \\ &= 12.5\pi \\ &\approx 39.27 \end{aligned}$$

التقريب الأول هو الأقرب إلى المساحة الحقيقية.

إجابة ممكنة: المساحات خارج نصف الدائرة، والمحتواة داخل مستطيلات التقريب الأول تعوِض المساحة داخل نصف الدائرة، وغير المحصورة بالمستطيلات.

قرّب مساحة المنطقة المظلّلة تحت منحنى الدالة في كلٍّ من الأشكال الآتيةمستعملا الأطراف اليمنى ثم اليسرى؛ لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عرض كلٍّ منها، ثم أوجد الوسط للتقريبين:

6) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي13.5 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 10.5 وحدات مربعة، الوسط للمساحة هو 12 وحدة مربعة.

7) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي12.75 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 12.25 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 12.5 وحدة مربعة.

8) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي162.94 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 171.94 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 167.44 وحدة مربعة.

9) المساحة باستعمال الأطراف اليمنى هي 18.91 وحدة مربعة، المساحة باستعمال الأطراف اليسرى هي 19.66 وحدة مربعة، الوسط للمساحة هو 19.28 وحدة مربعة.

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالةوالمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

10) 84 وحدة مربعة

11) 12 وحدة مربعة

12) $\frac{70}{3}$وحدة مربعة

13) $\frac{32}{3}$وحدة مربعة

14) $\frac{26}{3}$ وحدات مربعة

15) 12 وحدة مربعة

16) $\frac{100}{3}$ وحدة مربعة

17) 48 وحدة مربعة

18) طباعة: 3750 ريالاً

19)

a) الارتفاع = 4 وحدات،

القاعدة = 4 وحدات،

المساحة = 8 وحدات مربعة.

b) 8 وحدات مربعة

20) $\frac{2}{3}$ وحدة مربعة

21) 1.75 وحدة مربعة

22) $\frac{52}{3}$ وحدة مربعة

23) 12.5 وحدة مربعة

24) 8 وحدات مربعة

25) 0.75 وحدة مربعة

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالةوالمحور x ، والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\frac{32}{3}$ وحدات مربعة

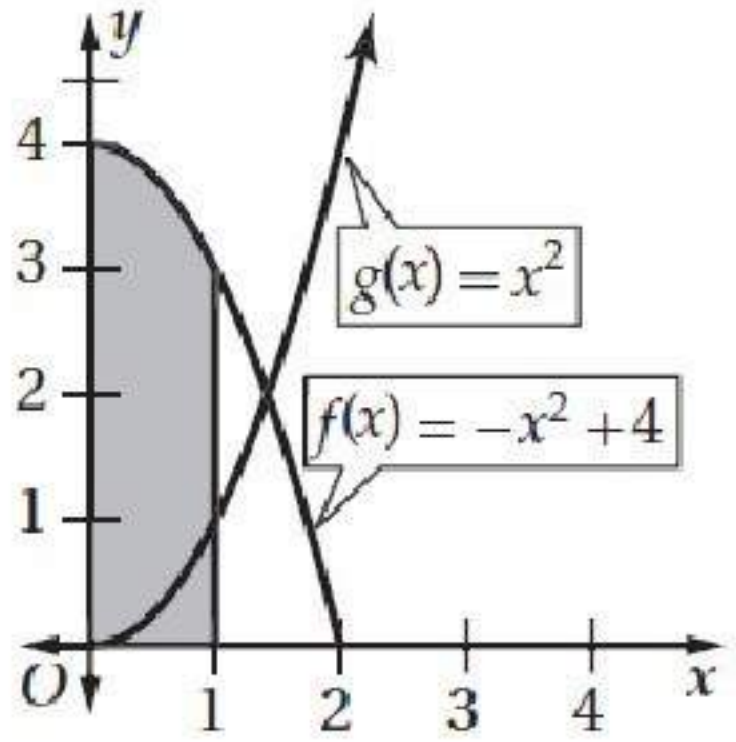
27) 4 وحدات مربعة

28) 14 وحدة مربعة

29) 3.75 وحدات مربعة

30) تمثيلات متعددة:

(a



(b $\int_0^1 \left(-x^2 + 4\right) dx = 3\frac{2}{3}$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

c) إجابة ممكنة: إذا أردنا إيجاد المساحة المحصورة بين المنحنيين، فإننا نبدأ بالتكامل $\int_0^1 \left(-x^2 + 4\right) dx$ **، والذي يمثل المساحة الكلية بين** $f(x)$ **والمحور** x**. وبما أننا لا نحتاج للمساحة تحت** $g(x)$**، لذا فإننا نطرح المساحة الناتجة عن التكامل** $\int_0^1 x^2 dx$ **من** $\int_0^1 \left(-x^2 + 4\right) dx$

لنحصل على $3\frac{1}{3}$ **أو 3.33 تقريباً**

(d $3\frac{1}{3}$, $-2x^2 + 4$

e) عند حساب المساحة المحصورة بين منحنى دالتين، بإمكاننا حساب المساحة المحصورة تحت كل منحنى، ثم نطرح المساحة الصغرى من المساحة الكبرى، أو نطرح الدالة الصغرى من الدالة الكبرى، و نحسب تكامل الدالة الناتجة.

مسائل مهارات التفكير العليا:

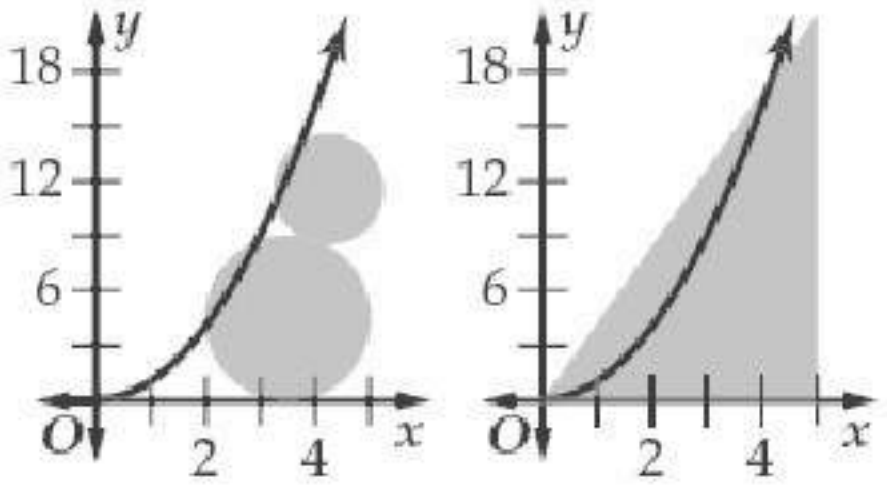
31) اكتشف الخطأ: كلاهما خطأ؛ إجابة ممكنة: إذا كانت الدالة متزايدة، فإن استعمال الأطراف اليمنى للمستطيلات سيُعطي مساحات أكبر من تلك المساحة تحت المنحنى، في حين يُعطي استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات مساحات أصغر. أما إذا كانت الدالة متناقصة، فإن استعمال الأطراف اليسرى للمستطيلات، سيُعطي قيمة أكبر للمساحة ويُعطي استعمال الأطراف اليمنى قيمة أصغر.

32) تبرير: إجابة ممكنة: يعطي التكامل مساحة كل مقطع عرضي، ونحصل على حجم النفق بضرب هذه المساحة في طول النفق.

33) اكتب: انظر إجابات الطلاب.

34) تحد: $\frac{t^3}{3} + 2t$

35) اكتب: إجابة ممكنة: يُعطي المثلث تقريباً جيداً للمساحة، وذلك اعتماداً على شكل المنحنى كما هو مبين أدناه، أما إذا كان للدالة عدة نقاط حرجة، فإنه من الصعب استعمال المثلثات، أما الدوائر فيصعب استعمالها؛ وذلك لأنها تترك مساحات واسعة خارجها؛ لذا فإن المثلثات أسهل للاستعمال عند تقريب المساحة؛ بسبب مرونة التعامل معها مقارنة مع الدوائر.



مراجعة تراكمية

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

36) $j'(x)=\left(6x^2+11\right)\left(2x^8-12x^2\right)+\left(2x^3+11x\right)\left(16x^7-24x\right)$

37) $f'(k)=\left(15k^{14}+2k+2\right)\left(k-7k^2\right)+\left(k^{15}+k^2+2k\right)\left(1-14k\right)$

38) $s'(t)=\frac{\sqrt{t}}{2t}\left(3t^8-5t\right)+\left(\sqrt{t}-7\right)\left(24t^7-5\right)$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عندما $x=1$**:**

39) 3

40) -7

41) 1

42) 3

43) 1 –

44) $\frac{2}{9}$

تدريب على اختبار:

45) A

46) D

47) D

4-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

تحقق

أوجد دالّتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

1A) إجابة ممكنة: x^2+28 , x^2-7 , x^2+5 , x^2

1B) إجابة ممكنة: $x^{-3}+9$, $x^{-3}-4$, $x^{-3}+33$, x^{-3}

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

2A) $F(x)=\frac{6}{5}x^5+C$

2B) $F(x)=\frac{-5}{x^2+C}$

2C) $F(x)=x^8+3x^2+2x+C$

3) سقوط حر:

A) $s(t) = -16t^2 + 120$

B) تصل المحفظة إلى سطح الأرض بعد 2.74 s.

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

4A) 117

4B) 46

احسب كل تكامل مما يأتي:

5A) $2x^3 + 4x^2 - 3x + C$

5B) 15.6

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

6A) 116.62 J

6B) 501.76 J

تدرب وحل المسائل:

(1 $F(x)=\frac{1}{6}x^{6}+C$

(2 $F(z)=\frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}}+C$

(3 $Q(r)=\frac{15}{28}r^{\frac{7}{5}}+\frac{15}{32}r^{\frac{4}{3}}+\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}+C$

(4 $W(u)=\frac{1}{9}u^{6}+\frac{1}{24}u^{4}+\frac{1}{5}u^{2}+C$

(5 $U(d)=\frac{3}{d^{4}}-\frac{5}{2d^{2}}-2d^{3}+3.5d+C$

(6 $M(t)=4t^{4}-4t^{3}+10t^{2}-11t+C$

7) سقوط حر:

a) $s(t) = -16t^2 + C$

b) $s(t) = -16t^2 + 64$

c) 28 ft

احسب كل تكامل مما يأتي:

8) $3m^2 + 3m^4 + C$

9) 127.5

10) 46.5

11) 7.99

12) $0.68t^5 - 0.3t^4 + 1.15t^2 - 5.7t + C$

13) $2w^{7.1} - 3w^{6.7} + 4w^{3.3} + 3w + C$

14) حشرات:

a) $s(t) = -16t^2 + 34t$

b) 2.125 s

15) $264600\ ft^2$

احسب كل تكامل مما يأتي:

16) 12

17) 27

18) 2.5

19) 16.4

20) 28.5

21) مقذوفات:

a) 237 ft

b) تقريباً 123.16 ft/s –

22) $-x^3-4x^2+24$

23) $2x^5-4x^3+5x-5775$

24) -92

25) $-3x^3-2x^2-576$

26) $4x^8-5x^6-4x^4+5x^3+7x^2-7x$

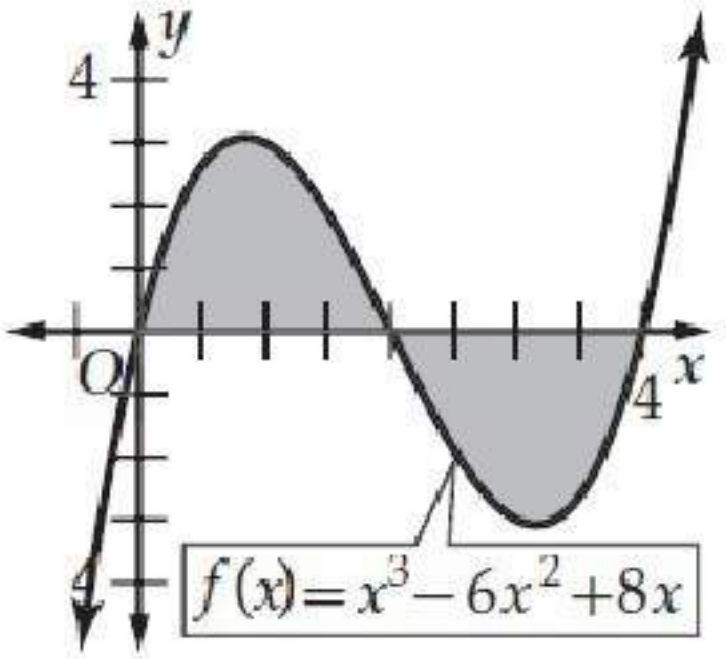
27) $-7x^3+44x+57$

28) حجم الكرة: $\frac{4}{3}\pi R^3$

29)مساحات : 6 وحدات مربعة

30) تمثيلات متعددة:

(a



(b 4, – 4

c) إجابة ممكنة: يظهر أن المساحة فوق المحور x موجبة، والمساحة تحت المحور x هي سالب التكامل.

(d 0, 8

e) التكامل هو حاصل جمع التكاملين فوق وتحت المحور x.

أما المساحة الكلية فهي حاصل جمع القيم المطلقة للتكاملين.

مسائل مهارات التفكير العليا:

31) تحد: $\frac{1}{2}\pi r^2$

تبرير: حدِّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائما، أو صحيحة أحيانا، أو غير صحيحة أبدا. برّر إجابتك:

32) أحياناً؛ إجابة ممكنة: يؤدي تغيير ترتيب حدود التكامل إلى تغيير إشارته ما لم تكن قيمة التكامل صفراً.

33) أحياناً؛ إجابة ممكنة: إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية، فإن العبارة تكون صحيحة دائماً.

34) أحياناً؛ إجابة ممكنة: إذا كان $f(x)$ دالة زوجية وكل من a, b سالباً.

35)

$$\int_a^b (n+m)dx = \int_a^b n\,dx + \int_a^b m\,dx$$

$$nx+mx\Big|_a^b = nx\Big|_a^b + mx\Big|_a^b$$

$$(nb+mb)-(na+ma) = (nb-na)+(mb-ma)$$
$$nb+mb-na-ma = nb+mb-na-ma$$

36) بما أن التمثيل البياني للدالة $f(x)$ يقع تحت المحور x، فإن إشارة $f(x)$ سالبة. وبما أن $f(x)$ سالبة وΔx موجبة، فإن كل حد في $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ سالب.

وعليه فإن المجموع سالب؛ لأن $\int_a^b f(x)dx$ هو نهاية مجاميع سالبة، لذا يكون سالباً.

37) إجابة ممكنة: إذا احتوت الدالة $F(x)$ على الثابت C، فإنه سيظهر في كل من $F(b)$ و$F(a)$ ولأننا نطرح هاتين القيمتين، فإن C تحذف.

مراجعة تراكمية

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالةوالمحور x ، والمعطاة بالتكامل في كل مما يأتي:

38) 512

39) 30

استعمل قاعدة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

40) $\frac{8k^{11}+55k^{10}+42k^{4}+154k^{3}}{\left(2k^{4}+11k^{3}\right)^{2}}$

41) $\frac{2n^{4}+2n^{2}+4}{\left(n^{2}+1\right)^{2}}$

42) $a = 6$

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

43) $m = 2x$

44) $m = 3x^2$

تدريب على اختبار:

45) C

دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك:

1) معدل التغير اللحظي

2) التكامل المحدد

3) التعويض المباشر

4) دالة أصلية

5) الصيغة غير المحددة

6) الاشتقاق

7) المؤثر التفاضلي

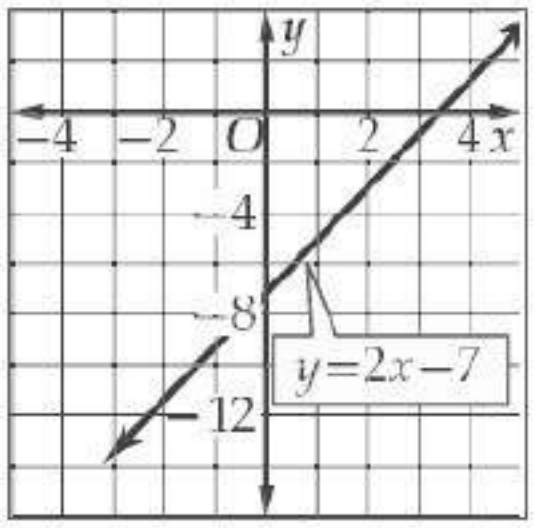
8) السرعة المتجهة اللحظية

مراجعة الدروس:

1 – 4: تقدير النهايات بيانياً:

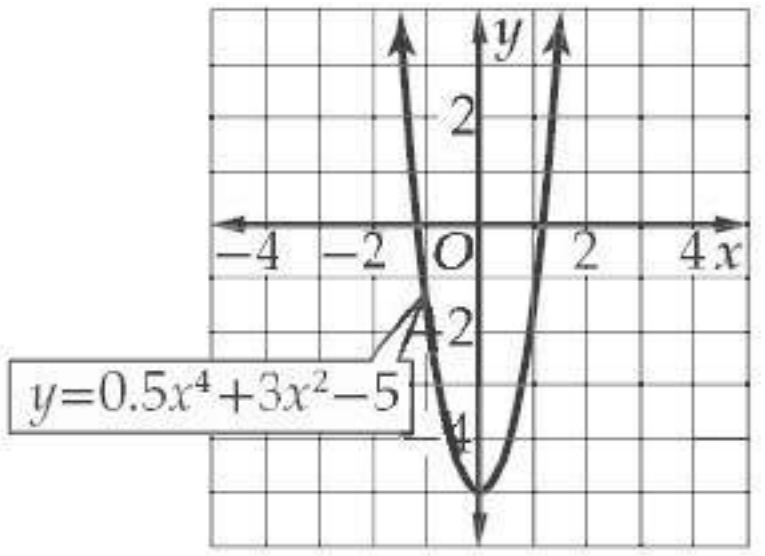
قدر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك باستعمال جدول قيم:

9) $\lim_{x \to 3} (-1)$



x	2.99	2.999	3	3.001	3.01
$f(x)$	–1.02	–1.002		–0.998	–0.998

10) $\lim_{x \to -1.5}$



x	0.99	0.999	1	1.001	1.001
$f(x)$	–1.579	– 1.508		–1.499	–1.492

قدِّر كل نهاية مما يأتي:

11) 5

12) غير موجودة

13) ∞

14) غير موجودة

2 – 4: حساب النهايات جبرياً:

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

15) 9

16) 19

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا،وإلا فاذكر السبب.

17) ليس ممكناً؛ فالمقام يساوي صفراً عند $x = 25$.

18) -17

احسب كل نهاية مما يأتي:

19) $-\frac{1}{6}$

20) $-\infty$

3 – 4: المماس والسرعة المتجهة:

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة :

21) 1 – , 1 –

22) 2 – , 0

23) $m = -2x + 3$

24) $m = 3x^2 + 4$

تمثِّل $s(t)$ في كل مما يأتي موقع جسم بالأقدام بعد t ثانية . أوجد سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند الزمن المعطى:

25) $v(0.5) = -1$ ft/s

26) $v(3.5) = -147$ ft/s

27) $v(t) = 24t$

28) $v(t) = -4t + 3$

4 – 4: المشتقات:

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي باستعمال النهايات ، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة.

29) $g'(t) = -2t + 5, g'(-4) = 13, g'(-1) = 3$

30) $m'(j) = 10; m'(5) = 10, m'(-3) = 10$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

31) $p'(v) = -9$

32) $z'(n) = 8n + 9$

33) $t'(x) = -\frac{18}{5}x^{\frac{1}{5}}$

34) $g'(h) = 3h^{\frac{1}{4}} - 4h^{-\frac{1}{2}}$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة؛ لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(35 $$f'(m)=\frac{-25}{(5+2m)^2}$$

(36 $$m'(q)=\frac{4q^5-96q^3+6q}{(q^2-12)^2}$$

5 – 4: المساحة تحت المنحنى والتكامل:

قرّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى كل دالة مما يأتي باستعمال الأطراف اليمنى و 5مستطيلات:

37) 5.16 وحدة مربعة

38) 11.28 وحدة مربعة

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالةوالمحور x ، والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

39) 4.67 وحدات مربعة تقريباً

40) 37.5 وحدة مربعة تقريباً

41) 4.67 وحدات مربعة تقريباً

42) 55.5 وحدة مربعة تقريباً

6 – 4: النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل:

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

(43 $G(n)=\frac{5}{2}n^2-2n+C$

(44 $R(q)=-q^3+\frac{9}{2}q^2-2q+C$

(45 $M(t)=\frac{3}{2}t^4-4t^3+t^2-11t+C$

(46 $p(h)=h^7+\frac{2}{3}h^6-3h^4-4h+C$

احسب كل تكامل مما يأتي:

(47 $\frac{8}{3}x^3+C$

(48 $\frac{2}{3}x^3-4x+C$

(49 2466.53 وحدة مربعة

50) 3294 وحدة مربعة

تطبيقات ومسائل:

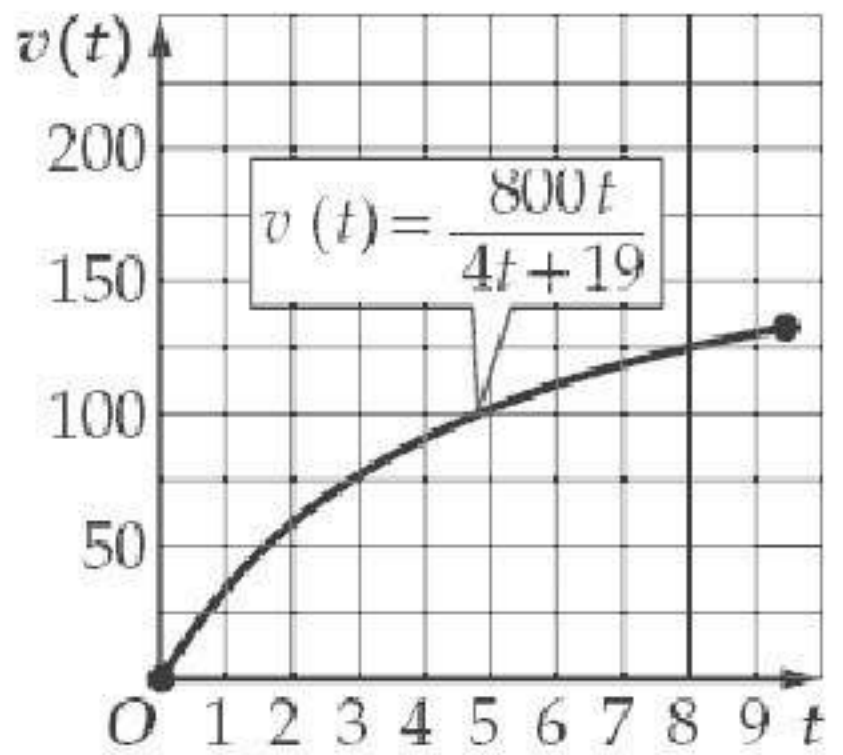
51) حيوانات:

a) 2966 حيواناً

b) 800

52) تحف فنية:

a)



b) 7674, 11114, 13524

c) 20000

d) لن تزيد قيمة التحفة عن 20000 ريال.

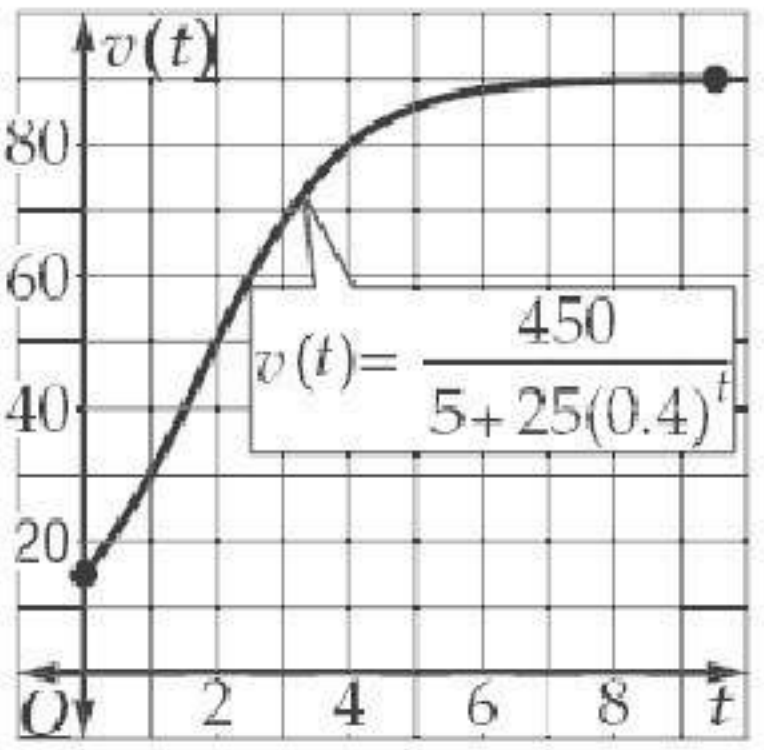
e) نعم؛ العرض أفضل من قيمة التحفة.

53) مبيعات:

(a

t	0	1	2	3
v	15	30	50	68.2

(b



c) 90

d) إجابة ممكنة: أقصى سعر يمكن أن تصله السلعة هو 90 ريالاً.

54) صواريخ:

a) $-32t+150$

b) 102 ft/s

c) ≈ 4.69 s

d) ≈ 359.8 ft

55) رماية:

a) $-32t+35$

b) 19 ft/s

c) ≈ 1.09 s

d) ≈ 20.64 ft

56) تصميم: $607.5\ in^2$

57) ضفادع:

a) $s(t) = -16t^2 + 26t$

b) $1.63\ s$

58) طيور:

a) $s(t) = -16t^2 + 20$

b) $1.12\ s$

اختبار الفصل

قدر كل نهاية مما يأتي:

1) 6 –

2) 8

3) غير موجودة

4) ∞

5) إلكترونيات:

a) 100

b) إجابة ممكنة: رغم تقلب متوسط تكلفة الجهاز الإلكتروني، إلا أن متوسط التكلفة سيقترب من 100 ريال لكل جهاز.

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلافاذكر السبب:

6) -25

7) 1353

8) ناد رياضي:

a) 4

b) 200

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

9) ∞

10) ∞

11) 0

12) 0

13)اختيار من متعدد:A

أوجد ميل مماس منحنى كل دالٍ ة مما يأتي عند النقاط المعطاة:

14) $2\ ,-8,-$

15) $-12,-\frac{3}{4}$

16) $-20,\ 4$

أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يعطى موقعه عند أي زمن بالدالة $h(t)$ في كل مما يأتي:

17) $h\ (t) = 9 + 6t$

18) $v\ (t) = 20t - 21t^2$

19) $v\ (t) = 9t^2 + 4$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

20) $f'\ (x) = -3$

$$b'(c) = \frac{2}{\sqrt{c}} - \frac{16}{3c^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{c^{\frac{1}{5}}}$$ (21

$$w'(y) = 4y^{\frac{1}{3}} + 3y^{-\frac{1}{2}}$$ (22

$$g'(x) = 6x^2 - 10x - 8$$ (23

$$h'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2}$$ (24

25) صناعة:

$C(x) = 15x - 0.0025x^2$ (a

b) 3125 ريالاً

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالةوالمحور x ، والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) 10.5وحدات مربعة تقريباً

27) 65050 وحدة مربعة تقريباً

28) 156 وحدة مربعة تقريباً

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي:

29) $D(a) = a^4 + 3a^3 - a^2 + 8a + C$

30) $W(z) = \frac{3}{20}z^5 + \frac{1}{18}z^3 - \frac{2}{5}z + C$

احسب كل تكامل مما يأتي:

31) $\frac{5}{4}x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + C$

32) 45

33) مساحات : C