HOSSAMBAYOUMI199

الرياضيات

الصف الثاني عشر علمي

قوانين الفصل الدراسي الثاني

"لا تبحث عن الحل الأسرع ... بل عن الفهم الذي لا يُنسى"

اضغط هنا
للانضمام لجروب التيليجرام

إعداد: أ. حسام بيومي

تعريف : المشتقة العكسية

تسمى الدالة F مشتقة عكسية (دالة مقابلة) للدالة f المعرفة على مجالها I

إذا كان $F'(x) = f(x) \quad ,\forall x \in I$

نظرية (1)

إذا كانت F مشتقة عكسية للدالة f على الفترة I، G مشتقة عكسية أيضاً للدالة f على الفترة I فإن : $G(x) = F(x) + C \quad ,\forall x \in I$ حيث C ثابت

نظرية (2)

إذا كانت F مشتقة عكسية للدالة f على الفترة I، فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f على الفترة I هي : $F(x) + C$ حيث C ثابت اختياري

قواعد التكامل غير المحدد :

أمثلة	ملاحظات	التكامل	الرقم
$\int 5dx = 5x + C$	k عدد ثابت	$\int kdx = kx + C$	1
$\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C$	$n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$ (قاعدة القوى)	$\int x^ndx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	2

خواص التكامل غير المحدد :

ملاحظات	الخاصية	الرقم
الضرب بعدد ثابت $k \neq 0$	$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$	1
الجمع و الطرح	$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	2

ملاحظات	الرقم
$\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$	1
$\int [f(x) + k]dx = \int f(x)dx + \int kdx$	2

التكامل بالتعويض

قاعدة التكامل بالتعويض

إذا كانت F هي مشتقة عكسية للدالة f فإن :
$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

إذا كان $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ فإن :
$$\int f(u)du = F(u) + C$$

تعميم قاعدة القوى :

$$\int [g(x)]^n g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad , n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$$

في هذا التكامل

نتعامل مع متغير جديد .نستبدل المتغير x بالمتغير u بهدف استخدام القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد .

تكامل الدوال المثلثية

الجدول أدناه يبيّن قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية جنبًا إلى جنب مع مصادر المشتقة لكل منها

اشتقاق الدوال المثلثية:	تكامل الدوال المثلثية: $k \in \mathbb{R}^*$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$\int \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
$(\csc x)' = -\csc x \cot x$	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

تكامل الدوال الاسية واللوغاريتمية

قواعد اشتقاق الدالة الأسية			
الرقم	**الدالة**	**المشتقة**	**ملاحظات**
1	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
2	$f(x) = a^u$	$f'(x) = u'a^u \ln a$	uدالة في x قابلة للاشتقاق
3	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	
4	$f(x) = e^u$	$f'(x) = u'e^u$	$u' = \frac{du}{dx}$

قواعد اشتقاق دالة اللوغاريتم الطبيعي			
الرقم	**الدالة**	**المشتقة**	**ملاحظات**
1	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x > 0$
2	$f(x) = \ln\lvert x\rvert$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x \neq 0$
3	$f(x) = \ln(g(x))$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$g(x) > 0$

قوانين تكامل الدوال الاسية واللوغاريتمية			
الرقم	**التكامل غير المحدد**	**قاعدة المشتقة**	**ملاحظات**
1	$\int e^x dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx} e^x = e^x$	u دالة في x قابلة للاشتقاق $u' = \frac{du}{dx}$
2	$\int u'e^u dx = e^u + C$	$\frac{d}{dx} e^u = u'e^u$	
3	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{d}{dx} \ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	
4	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\lvert u\rvert + C$	$\frac{d}{dx} \ln\lvert u\rvert = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln\lvert g(x)\rvert + C$

إذا كانت u دالة في x قابلة للإشتقاق فإن $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

@HOSSAMBAYOUMI199

التكامل بالتجزئ

عند إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست احداهما مشتقة الأخرى

نلجأ الى نوع آخر من التكامل هو التكامل بالتجزيء عندما تكون u, v

دالتين في x قابلة للتفاضل

قاعدة التكامل بالتجزيء : $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

التكامل بالكسور الجزئية

الكسور الجزئية للدالة $f(x) = \dfrac{r(x)}{h(x)}$

الحالة الأولى : المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة :

لتكن $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة :

$$h(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \ldots\ldots (a_kx + b_k)$$

حيث لايوجد عوامل مكررة و لايوجد عامل ثابت مضروب بآخر .

في هذه الحالة تكون الدالة f على صورة كسور جزئية كالتالي :

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

الحالة الثانية : المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر:

لتكن $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر.

لكل عامل من عوامل $h(x)$ على الصورة $(mx + n)^k$،

يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k :

$$\frac{A_1}{mx + n} + \frac{A_2}{(mx + n)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(mx + n)^k}$$

عندما تكون درجة البسط في الحدودية النسبية $f(x) = \dfrac{r(x)}{h(x)}$ مساوية أو أكبر من درجة المقام . نوجد أولاً ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة : $f(x) = q(x) + \dfrac{p(x)}{h(x)}$ حيث $p(x)$ هو الباقي .

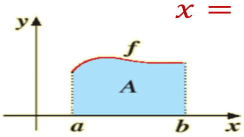
التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)\right]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

خواص التكامل المحدد		
الرقم	**الخاصية**	**ملاحظات**
1	$\int_a^a f(x)dx = 0$	الدالة f متصلة على الفترة I $a, b, c \in I \quad , k \in \mathbb{R}$
2	$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	
3	$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$	$k = 1 \Rightarrow \int_a^b dx = b - a$
4	$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	
5	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$	

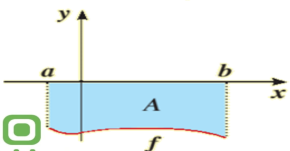
تابع : خواص التكامل المحدد		
الرقم	الخاصية	ملاحظات
6	إذا كانت : $f(x) \ge 0 \quad , \forall\, x \in [a,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$	الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$
7	إذا كانت : $f(x) \le 0 \quad , \forall\, x \in [a,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)\,dx \le 0$	
8	إذا كانت : $f(x) \le g(x) \quad , \forall\, x \in [a,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$	الدالتين f, g متصلتين على الفترة $[a,b]$

في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ ، A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات و المستقيمين $x = a \;,\; x = b$



1. إذا كانت : $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$

فإن : $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = A}$



2. إذا كانت : $f(x) \le 0 \quad \forall x \in [a,b]$

فإن : $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -A}$

المساحات في المستوى

أولًا: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$

إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a,b]$

فإن $A = \int_a^b f(x)dx$

إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a,b]$

فإن $A = -\int_a^b f(x)dx$

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ ، $c \in (a,b)$ حيث $f(c) = 0$

فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$ هي:

$$A = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a,b]$

مساحة منطقة محددة بين منحنيين

إذا كانت كل من f, g متّصلتين على الفترة $[a,b]$، حيث

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين f ، g والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ هي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

يمكن إيجاد المساحة A باستخدام القيمة المطلقة دون الحاجة لاستخدام القيمة الاختيارية كالتالي:

$$A = \left|\int_{-1}^2 (y_1 - y_2)dx\right| = \left|\int_{-1}^2 (y_2 - y_1)dx\right|$$

حجوم الأجسام الدورانية

إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنى دالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = b$ ، $x = a$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات

فإن حجم هذا المجسم يساوي: $V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$

المجسم الناتج من دوران منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (نصف دائرة) هو كُرة طول نصف قطرها $r = 2$. ويمكننا استخدام قاعدة إيجاد حجوم الأجسام الدورانية في إثبات قانون حجم الكرة

إذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحنيي الدالتين f , g والمستقيمين $x = a$, $x = b$ دورة كاملة حول محور السينات، بحيث f, g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a , b]$

، فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة: $\boxed{V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx}$

حيث: $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ أو $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 0$

طول قوس و معادلة منحنى دالة

أولًا: إيجاد طول قوس من منحنى

قاعدة طول القوس

إذا كانت الدالة f' متصلة على $[a, b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

ثانيا : إيجاد معادلة منحنى دالة باستخدام التكامل

ميل المنحنى $= f'(x)$

ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x) \neq 0$

المعادلات التفاضلية

تعريف (1)

المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.

نستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف (2)

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

تعريف (3)

درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

I المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى التي على الصورة $y' = f(x)$

حلها يكون على الصورة: $\boxed{y = \int f(x) dx}$

(II) بعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تحوي المتغيرين: y , x على الصورة: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$

يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات بالصورة التالية: $\boxed{\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx}$

ونكامل الطرفين وصولاً إلى حل المعادلة التفاضلية وهو إيجاد y.

(III) المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay$ حيث $a \neq 0$ حلولها هي $\boxed{y = k e^{ax}}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.

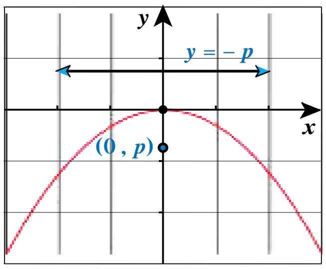
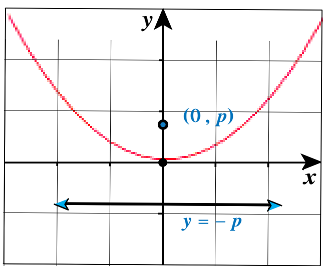
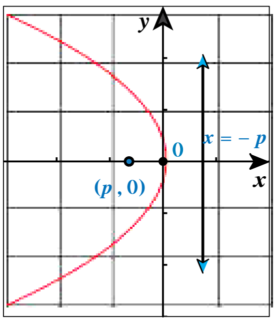
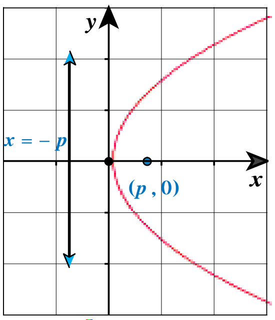
(IV) المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ تكون حلولها: $\boxed{y = k e^{ax} - \frac{b}{a}}$

(V) المعادلات التفاضلية على الصورة: $y'' = f(x)$

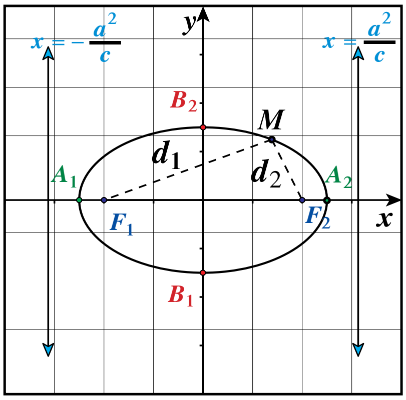
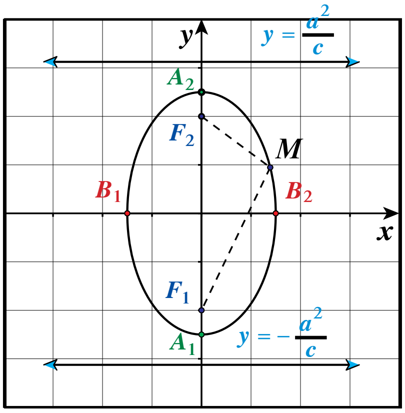
يتم حل هذه المعادلات بخطوتين: $\boxed{y' = \int f(x) dx = F(x) + C_1}$

ثم $\boxed{y = \int (F(x) + C_1) dx}$

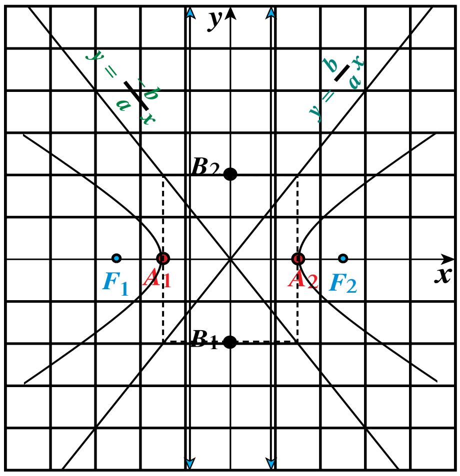
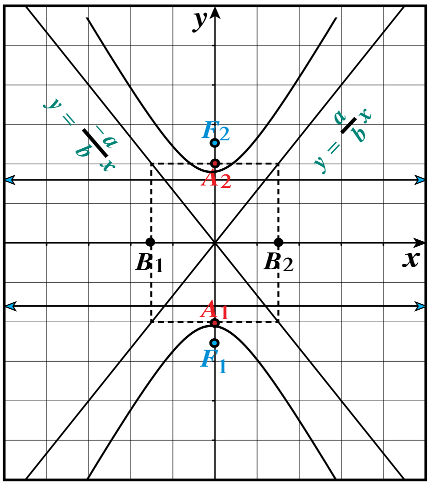
القطع المكافئ

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
البؤرة	$(0, p)$		$(p, 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y - axis)$		محور السينات $(x - axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\lvert p \rvert$			
المسافة من الرأس إلى الدليل	$\lvert p \rvert$			
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
الشكل				

القطوع المخروطية ـ القطع الناقص

	$a > b > 0$	$a > b > 0$
المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
بيان القطع		
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتا الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c}$, $x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c}$, $y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

القطوع المخروطية ــ القطع الزائد

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

القطوع المخروطية ــ الاختلاف المركزي

$e=\frac{c}{a}$ فيكون لدينا الحالات التالية:

(a) إذا $\boxed{e=1}$ يكون القطع المخروطي **قطعًا مكافئًا**

(b) إذا $\boxed{e<1}$ يكون القطع المخروطي **قطعًا ناقصًا**

(c) إذا $\boxed{e>1}$ يكون القطع المخروطي **قطعًا زائدًا**

@HOSSAMBAYOUMI199