



قناة الفلاح للرياضيات

2024 – 2025

الصف الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني

حلول

المراجعة النهائية



@MOHAMMAD.FALAH_MATH



@MOH82FALAH
/ محمد نوري الفلاح

$$\int \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} dx$$

(1) أوجد:

$$= \int \frac{(x-3)(x-1)}{x-1} dx$$

$$= \int (x-3) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

$$\int (x^2 + 2x - 3)^2 (x + 1) dx$$

(2) أوجد:

$$= \int u^2 \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int u^2 du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{6} (x^2 + 2x - 3)^3 + C$$

$$u = x^2 + 2x - 3$$

$$du = (2x + 2) dx$$

$$\frac{du}{2} (x+1) dx$$



$$\int (x+2) \sqrt[3]{x^2+4x-1} dx$$

(3) أوجد:

$$\begin{aligned} &= \int \sqrt[3]{u} \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{3}} du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C \\ &= \frac{3}{8} (x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x^2+4x-1 \\ du &= (2x+4)dx \\ \frac{du}{2} &= (x+2)dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{(\frac{1}{x}+3)^4}{x^2} dx$$

(4) أوجد:

$$\begin{aligned} &= -\int u^4 du \\ &= -\frac{u^5}{5} + C \\ &= -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{x}+3\right)^5 + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{x} + 3 \\ du &= \frac{-1}{x^2} dx \\ -du &= \frac{1}{x^2} dx \end{aligned}$$



$$\int \frac{1}{x^2 \left(\frac{1}{x} + 2\right)^5} dx$$

(5) أوجد:

$$= \int \frac{1}{u^5} (-du)$$

$$= - \int u^{-5} du$$

$$= - \frac{u^{-4}}{-4} + C$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x} + 2\right)^{-4}}{4} + C$$

$$= \frac{1}{4 \left(\frac{1}{x} + 2\right)^4} + C$$

$$u = \frac{1}{x} + 2$$

$$du = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$-du = \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int \sqrt{4x-5} dx$$

(6) أوجد:

$$= \int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{6} (4x-5)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$u = 4x - 5$$

$$du = 4dx$$

$$\frac{du}{4} = dx$$



$$\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3} dx$$

(7) أوجد:

$$u = \sqrt{x} + 2$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$2 du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int \frac{5}{u^3} (2 du)$$

$$= 10 \int u^{-3} du$$

$$= 10 \frac{u^{-2}}{-2} + C$$

$$= -5 (\sqrt{x} + 2)^{-2} + C$$

$$= \frac{-5}{(\sqrt{x} + 2)^2} + C$$

$$\int x(x+1)^5 dx$$

(8) أوجد:

$$u = x + 1 \Rightarrow x = u - 1$$

$$du = dx$$

$$= \int (u-1) u^5 du$$

$$= \int (u^6 - u^5) du$$

$$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + C$$



$$\int x (2x - 1)^3 dx$$

(9) أوجد:

$$= \int \frac{u+1}{2} u^3 \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \int (u^4 + u^3) du$$

$$= \frac{1}{4} \frac{u^5}{5} + \frac{1}{4} \frac{u^4}{4} + C$$

$$= \frac{(2x-1)^5}{20} + \frac{(2x-1)^4}{16} + C$$

$$u = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{u+1}{2}$$

$$du = 2 dx$$

$$\frac{du}{2} = dx$$

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - 2} dx$$

(10) أوجد:

$$= \int x^2 \sqrt{x^2 - 2} x dx$$

$$= \int (u+2) \sqrt{u} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int (u+2) u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \int (u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}}) du$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2 \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + \frac{1}{2} C_1$$

$$= \frac{1}{5} (x^2 - 2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x^2 - 2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$u = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 = u + 2$$

$$du = 2x dx$$

$$\frac{du}{2} = x dx$$



$$\int x^3 \cdot \cos(x^4 + 5) dx$$

(11) أوجد:

$$= \int \cos u \frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \int \cos u du$$

$$= \frac{1}{4} \sin u + C$$

$$= \frac{1}{4} \sin(x^4 + 5) + C$$

$$u = x^4 + 5$$

$$du = 4x^3 dx$$

$$\frac{du}{4} = x^3 dx$$

$$\int \sin^5(x+1) \cos(x+1) dx$$

(12) أوجد:

$$= \int u^5 du$$

$$= \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{\sin^6(x+1)}{6} + C$$

$$u = \sin(x+1)$$

$$du = \cos(x+1) dx$$



$$\int \cos^3(2x-3) \sin(2x-3) dx$$

(13) أوجد:

$$\begin{aligned} &= \int u^3 \frac{du}{-2} \\ &= -\frac{1}{2} \int u^3 du \\ &= -\frac{1}{2} \frac{u^4}{4} + C \\ &= -\frac{1}{8} \cos^4(2x-3) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \cos(2x-3) \\ du &= -2 \sin(2x-3) dx \end{aligned}$$

$$\frac{du}{-2} = \sin(2x-3) dx$$

$$\int \csc^5 x \cot x dx$$

(14) أوجد:

$$\begin{aligned} &= \int \csc^4 x \csc x \cot x dx \\ &= \int u^4 (-du) \\ &= - \int u^4 du \\ &= -\frac{u^5}{5} + C \\ &= -\frac{1}{5} \csc^5 x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \csc x \\ du &= -\csc x \cot x dx \\ -du &= \csc x \cot x dx \end{aligned}$$



$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x) \sqrt{1 + \cot x}}$$

$$= \int \frac{\csc^2 x \, dx}{\sqrt{1 + \cot x}}$$

(15) أوجد:

$$u = 1 + \cot x$$

$$du = -\csc^2 x \, dx$$

$$-du = \csc^2 x \, dx$$

$$= \int \frac{-du}{\sqrt{u}}$$

$$= - \int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -2 (1 + \cot x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -2 \sqrt{1 + \cot x} + C$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 + \tan x}} dx$$

(16) أوجد:

$$u = 1 + \tan x$$

$$du = \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2 (1 + \tan x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2 \sqrt{1 + \tan x} + C$$



(17) أوجد

$$\int (2x - 1)e^{x^2 - x + 3} dx$$

$$= \int e^u du$$

$$= e^u + C$$

$$= e^{x^2 - x + 3} + C$$

$$u = x^2 - x + 3$$

$$du = (2x - 1) dx$$

(18) أوجد

$$\int (x^2 - 2)e^{x^3 - 6x} dx$$

$$= \int e^u \cdot \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \int e^u du$$

$$= \frac{1}{3} e^u + C$$

$$= \frac{1}{3} e^{x^3 - 6x} + C$$

$$u = x^3 - 6x$$

$$du = (3x^2 - 6) dx$$

$$\frac{du}{3} = (x^2 - 2) dx$$



(19) أوجد

$$\int \cot x \, dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

$$u = \sin x$$

$$du = \cos x \, dx$$

$$= \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln |u| + C$$

$$= \ln |\sin x| + C$$

(20) أوجد

$$\int x \sin x \, dx$$

$$u = x \quad dv = \sin x \, dx$$

$$du = dx \quad v = -\cos x$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$



$$\int x \cos 3x \, dx$$

(21) أوجد

$$u = x \quad dv = \cos 3x \, dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{\sin 3x}{3}$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\begin{aligned} \int x \cos 3x \, dx &= \frac{x \sin 3x}{3} - \frac{1}{3} \int \sin 3x \, dx \\ &= \frac{x \sin 3x}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\cos 3x}{3} + C \\ &= \frac{x \sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + C \end{aligned}$$

$$\int x e^x \, dx$$

(22) أوجد

$$u = x \quad dv = e^x \, dx$$

$$du = dx \quad v = e^x$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\begin{aligned} \int x e^x \, dx &= x e^x - \int e^x \, dx \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned}$$



$$\int 3x e^{2x+1} dx$$

(23) أوجد

$$u = 3x \quad dv = e^{2x+1} dx$$

$$du = 3 dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x+1}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int 3x e^{2x+1} dx &= \frac{3}{2} x e^{2x+1} - \frac{3}{2} \int e^{2x+1} dx \\ &= \frac{3}{2} x e^{2x+1} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} e^{2x+1} + C \\ &= \frac{3}{2} x e^{2x+1} - \frac{3}{4} e^{2x+1} + C \end{aligned}$$

$$\int x \ln x dx$$

(24) أوجد

$$u = \ln x \quad dv = x dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$



$$\int \ln x \, dx$$

(25) أوجد

$$u = \ln x \quad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = x$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

$$\int x^2 \ln x^2 \, dx$$

(26) أوجد

$$u = \ln x^2 \quad dv = x^2 \, dx$$

$$du = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x^2 \, dx &= \frac{x^3}{3} \ln x^2 - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{2}{x} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{3} \int x^2 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{9} x^3 + C \end{aligned}$$



(27) أوجد

$$\int (4x - 1) \ln x \, dx$$

$$u = \ln x$$

$$dv = (4x - 1) dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = 2x^2 - x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int (4x - 1) \ln x \, dx = (2x^2 - x) \ln x - \int x(2x - 1) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= (2x^2 - x) \ln x - \int (2x - 1) dx$$

$$= (2x^2 - x) \ln x - x^2 + x + C$$



(28) أوجد

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

$$u = x^2$$

$$dv = \cos x \, dx$$

$$du = 2x \, dx$$

$$v = \sin x$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \quad (1)$$

$$\int x \sin x \, dx$$

$$u = x$$

$$dv = \sin x \, dx$$

$$du = dx$$

$$v = -\cos x$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C_1 \quad (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$



(29) لتكن الدالة f : فأوجد: $f(x) = \frac{4x+1}{x^2+5x+4}$

$$\int f(x) dx \quad (2)$$

(1) الكسور الجزئية

$$x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$$

-1, -4

$$\frac{4x+1}{x^2+5x+4} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+4}$$

$$4x+1 = A_1(x+4) + A_2(x+1)$$

$$4(-1)+1 = A_1(-1+4)$$

نعوض x بـ -1

$$A_1 = -1$$

نعوض x بـ -4

$$4(-4)+1 = A_2(-4+1)$$

$$A_2 = 5$$

$$\frac{4x+1}{x^2+5x+4} = \frac{-1}{x+1} + \frac{5}{x+4}$$

$$\int \frac{4x+1}{x^2+5x+4} dx = \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{5}{x+4} dx$$

$$= - \int \frac{1}{x+1} dx + 5 \int \frac{1}{x+4} dx$$

$$= - \ln|x+1| + 5 \ln|x+4| + C$$



(30) لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{2}{(x-5)(x-3)}$ فأوجد:

(1) الكسور الجزئية $\int f(x)dx$ (2)

$$\frac{2}{(x-5)(x-3)} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{x-3}$$

$$2 = A_1(x-3) + A_2(x-5)$$

نعوض x بـ 5

$$2 = A_1(5-3)$$

$$A_1 = 1$$

نعوض x بـ 3

$$2 = A_2(3-5)$$

$$A_2 = -1$$

$$\frac{2}{(x-5)(x-3)} = \frac{1}{x-5} + \frac{-1}{x-3}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{2}{(x-5)(x-3)} dx &= \int \frac{1}{x-5} dx - \int \frac{1}{x-3} dx \\ &= \ln|x-5| - \ln|x-3| + C \end{aligned}$$



(31) أوجد

$$\int \frac{12}{x^2+2x-3} dx$$

$$x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$$

$$\frac{12}{x^2+2x-3} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{x-1}$$

$$12 = A_1(x-1) + A_2(x+3)$$

نعوض $x = -3$

$$12 = A_1(-3-1)$$

$$A_1 = -3$$

نعوض $x = 1$

$$12 = A_2(1+3)$$

$$A_2 = 3$$

$$\frac{12}{x^2+2x-3} = \frac{-3}{x+3} + \frac{3}{x-1}$$

$$\int \frac{12}{x^2+2x-3} dx = \int \frac{-3}{x+3} dx + \int \frac{3}{x-1} dx$$

$$= -3 \int \frac{1}{x+3} dx + 3 \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= -3 \ln|x+3| + 3 \ln|x-1| + C$$



$$\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} dx$$

(32) أوجد

$$2x^3-5x^2-3x = x(2x^2-5x-3) = x(x-3)(2x+1)$$

$$\frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{2x+1}$$

$$x^2-2 = A_1(x-3)(2x+1) + A_2x(2x+1) + A_3x(x-3)$$

نعوض $x \rightarrow 0$

$$(0)^2-2 = A_1(0-3)(2(0)+1) \Rightarrow A_1 = \frac{2}{3}$$

نعوض $x \rightarrow 3$

$$(3)^2-2 = A_2(3)(2(3)+1) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{3}$$

نعوض $x \rightarrow -\frac{1}{2}$

$$(-\frac{1}{2})^2-2 = A_3(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-3) \Rightarrow A_3 = -1$$

$$\frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} = \frac{\frac{2}{3}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3} + \frac{-1}{2x+1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} dx &= \int \frac{\frac{2}{3}}{x} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x-3} dx + \int \frac{-1}{2x+1} dx \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx \\ &= \frac{2}{3} \ln|x| + \frac{1}{3} \ln|x-3| - \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C \end{aligned}$$



$$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2} dx$$

(33) أوجد:

$$x^3+4x^2 = x^2(x+4)$$

$$\frac{x^2+1}{x^3+4x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x+4}$$

$$x^2+1 = A_1 x(x+4) + A_2(x+4) + A_3 x^2$$

$$(0)^2+1 = A_2(0+4) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{4}$$

نعوض $x \div 0$

$$(-4)^2+1 = A_3(-4)^2 \Rightarrow A_3 = \frac{17}{16}$$

نعوض $x \div -4$

$$(1)^2+1 = A_1(1)(1+4) + \frac{1}{4}(1+4) + \frac{17}{16}(1)$$

نختار $x \div 1$

$$2 = 5A_1 + \frac{37}{16} \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{16}$$

$$\frac{x^2+1}{x^3+4x^2} = \frac{-\frac{1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2} dx = -\frac{1}{16} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{4} \int x^{-2} dx + \frac{17}{16} \int \frac{1}{x+4} dx$$

$$= -\frac{1}{16} \ln|x| + \frac{1}{4} \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{17}{16} \ln|x+4| + C$$

$$= -\frac{1}{16} \ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{17}{16} \ln|x+4| + C$$



$$\int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4} dx$$

(34) أوجد:

$$\frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4} = 1 + \frac{x + 3}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2 - 4x + 4 \overline{) x^2 - 3x + 7} \\ \underline{x^2 - 4x + 4} \\ x + 3 \end{array}$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$\frac{x + 3}{x^2 - 4x + 4} = \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{(x - 2)^2}$$

$$x + 3 = A_1(x - 2) + A_2$$

نعوض $x = 2$

$$2 + 3 = A_2 \Rightarrow A_2 = 5$$

نختار $x = 1$ ونعوض

$$1 + 3 = A_1(1 - 2) + 5 \Rightarrow A_1 = 1$$

$$\frac{x + 3}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{x - 2} + \frac{5}{(x - 2)^2}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4} = 1 + \frac{1}{x - 2} + \frac{5}{(x - 2)^2}$$

$$\int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4} dx = \int dx + \int \frac{1}{x - 2} dx + 5 \int (x - 2)^{-2} dx$$

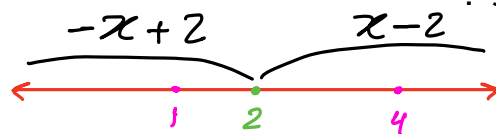
$$= x + \ln|x - 2| - 5(x - 2)^{-1} + C$$

$$= x + \ln|x - 2| - \frac{5}{x - 2} + C$$



$$\int_1^4 |x-2| dx$$

(35) أوجد:



$$\begin{aligned} \int_1^4 |x-2| dx &= \int_1^2 |x-2| dx + \int_2^4 |x-2| dx \\ &= \int_1^2 (-x+2) dx + \int_2^4 (x-2) dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^4 \\ &= \left[\left(-\frac{(2)^2}{2} + 2(2) \right) - \left(-\frac{(1)^2}{2} + 2(1) \right) \right] + \left[\left(\frac{(4)^2}{2} - 2(4) \right) - \left(\frac{(2)^2}{2} - 2(2) \right) \right] \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 2x - 3)^2 (x+1) dx$$

(36) أوجد:

$$\begin{aligned} &= \int_{-4}^0 u^2 \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-4}^0 u^2 du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-4}^0 = \frac{1}{6} \left[u^3 \right]_{-4}^0 \\ &= \frac{1}{6} [(0)^3 - (-4)^3] \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 2x - 3 \\ du &= (2x+2) dx \\ \frac{du}{2} &= (x+1) \\ x = -1 &\Rightarrow u = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4 \\ x = 1 &\Rightarrow u = (1)^2 + 2(1) - 3 = 0 \end{aligned}$$



(37) أوجد:

$$\int_2^5 x \sqrt{x-1} dx$$

$$u = x \quad dv = (x-1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_2^5 x \sqrt{x-1} dx = \left[\frac{2}{3} x (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_2^5 - \frac{2}{3} \int_2^5 (x-1)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_2^5 - \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \left[(x-1)^{\frac{5}{2}} \right]_2^5$$

$$= \left(\frac{2}{3} (5) (5-1)^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{2}{3} (2) (2-1)^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{4}{15} \left[(5-1)^{\frac{5}{2}} - (2-1)^{\frac{5}{2}} \right]$$

$$= \frac{256}{16}$$

(38) أوجد:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x dx$$

$$= \int_0^1 u du$$

$$= \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{(1)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$u = \tan x$$

$$du = \sec^2 x dx$$

$$x=0 \Rightarrow u = \tan 0 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$



(39) أوجد:

$$\int_{-2}^0 \frac{x}{e^x} dx$$

$$= \int_{-2}^0 x e^{-x} dx$$

$$u = x \quad dv = e^{-x} dx$$

$$du = dx \quad v = -e^{-x}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 x e^{-x} dx &= \left[-x e^{-x} \right]_{-2}^0 + \int_{-2}^0 e^{-x} dx \\ &= \left[-x e^{-x} \right]_{-2}^0 + \left[-e^{-x} \right]_{-2}^0 \\ &= \left[0e^0 + (-2)e^{(-2)} \right] + \left[-e^0 + e^{(-2)} \right] \\ &= -e^2 - 1 \end{aligned}$$



(40) أوجد:

$$\int_{-2}^0 \frac{5x-1}{x^2+2x-3} dx$$

$$x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+3}$$

$$5x-1 = A_1(x+3) + A_2(x-1)$$

نعوض $x=1$

$$5(1)-1 = A_1(1+3) \Rightarrow A_1 = 1$$

نعوض $x=-3$

$$5(-3)-1 = A_2(-3-1) \Rightarrow A_2 = 4$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x+3}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \frac{5x-1}{x^2+2x-3} dx &= \int_{-2}^0 \frac{1}{x-1} dx + \int_{-2}^0 \frac{4}{x+3} dx \\ &= \int_{-2}^0 \frac{1}{x-1} dx + 4 \int_{-2}^0 \frac{1}{x+3} dx \\ &= [\ln|x-1|]_{-2}^0 + 4[\ln|x+3|]_{-2}^0 \end{aligned}$$

$$= [\ln|0-1| - \ln|-2-1|] + 4[\ln|0+3| - \ln|-2+3|]$$

$$= -\ln 3 + 4\ln 3 = 3\ln 3 \approx 3.295$$



(41) دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_3^5 (x^2 + x) dx \geq 0$

بفرض $f(x) = x^2 + x$ وهي دالة متصلة على $[3, 5]$

نضع $x^2 + x = 0$

$$x(x+1) = 0$$

$$x = 0, x = -1$$



$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$$

$$[3, 5] \subseteq [0, \infty)$$

$$x^2 + x \geq 0 \quad \forall x \in [3, 5]$$

$$\int_3^5 (x^2 + x) dx \geq 0$$

(42) دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_0^2 (x^2 - 2x - 3) dx \leq 0$

بفرض $f(x) = x^2 - 2x - 3$ وهي دالة متصلة على $[0, 2]$

نضع $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3, x = -1$$



$$f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [-1, 3]$$

$$[0, 2] \subseteq [-1, 3]$$

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0 \quad \forall x \in [0, 2]$$

$$\int_0^2 (x^2 - 2x - 3) dx \leq 0$$



(43) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

نضع

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0, x = 3$$

$$A = \left| \int_0^3 f(x) dx \right| = \left| \int_0^3 (x^2 - 3x) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} \right]_0^3 \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{(3)^3}{3} - 3 \frac{(3)^2}{2} \right) - \left(\frac{(0)^3}{3} - 3 \frac{(0)^2}{2} \right) \right|$$

$$= \frac{9}{2}$$

(44) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = 4x - x^2$ ومنحنى الدالة $g(x) = 5 + x^2$ والمستقيمين: $x = 0$, $x = 2$ علماً بأن منحنىي الدالتين f , g غير متقاطعين.

المنحني غير متقاطعين

$$A = \left| \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx \right|$$

$$= \left| \int_0^2 ((4x - x^2) - (5 + x^2)) dx \right|$$

$$= \left| \int_0^2 (4x - x^2 - 5 - x^2) dx \right|$$

$$= \left| \int_0^2 (-2x^2 + 4x - 5) dx \right|$$

$$= \left| \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 5x \right]_0^2 \right|$$

$$= \left| \left(-\frac{2(2)^3}{3} + 2(2)^2 - 5(2) \right) - \left(-\frac{2(0)^3}{3} + 2(0)^2 - 5(0) \right) \right|$$

$$= \frac{22}{3}$$



(45) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = e^x$ ومنحنى الدالة $g(x) = -1 - x^2$ والمستقيمين: $x = 0$, $x = 3$ علماً بأن منحنىي الدالتين f , g غير متقاطعين.

المساحة غير متقاطعين

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx \right| \\
 &= \left| \int_0^3 (e^x + 1 + x^2) dx \right| \\
 &= \left| \left[e^x + x + \frac{x^3}{3} \right]_0^3 \right| \\
 &= \left| \left(e^3 + 3 + \frac{(3)^3}{3} \right) - \left(e^0 + 0 + \frac{(0)^3}{3} \right) \right| \\
 &= e^3 + 11
 \end{aligned}$$

(46) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: $y_1 = 3 - x^2$ والمستقيم: $y_2 = -2x$

$$y_1 = y_2$$

$$3 - x^2 = -2x$$

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x = 3, x = -1$$

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_{-1}^3 (y_1 - y_2) dx \right| \\
 &= \left| \int_{-1}^3 ((3 - x^2) - (-2x)) dx \right| \\
 &= \left| \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx \right| \\
 &= \left| \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \right| \\
 &= \left| \left(-\frac{(3)^3}{3} + (3)^2 + 3(3) \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1) \right) \right| \\
 &= \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$



(47) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -x^2 + 9$

$$f(x) = g(x) \quad \text{نضع}$$

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9$$

$$x^2 + 1 + x^2 - 9 = 0$$

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$x = 2 , x = -2$$

$$A = \left| \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^2 ((x^2 + 1) - (-x^2 + 9)) dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^2 (2x^2 - 8) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 8x \right]_{-2}^2 \right|$$

$$= \left| \left(\frac{2(2)^3}{3} - 8(2) \right) - \left(\frac{2(-2)^3}{3} - 8(-2) \right) \right|$$

$$= \frac{64}{3}$$



(48) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة

بمنحنى الدالة $f: \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1, 5]$.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \\
 &= \pi \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 dx = \pi \int_1^5 (x-1) dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^5 \\
 &= \pi \left[\left(\frac{5^2}{2} - 5 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) \right] \\
 &= 8\pi
 \end{aligned}$$

(49) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة

بمنحنى الدالة $f: x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \\
 &= \pi \int_{-1}^1 (x^2 + 2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (x^4 + 4x^2 + 4) dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^1 \\
 &= \pi \left[\left(\frac{1^5}{5} + \frac{4(1)^3}{3} + 4(1) \right) - \left(\frac{(-1)^5}{5} + \frac{4(-1)^3}{3} + 4(-1) \right) \right] \\
 &= \frac{166}{15} \pi
 \end{aligned}$$



(50) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة

بمنحنيي الدالتين: $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$.

$$f(x) = g(x) \quad \text{نضع}$$

$$x^2 = \sqrt{x} \quad , \quad x \geq 0$$

بتربيع الطرفين

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 , \quad x = 1$$

أخذ قيمة اختيارية في $(0, 1)$ ، لتكن $x = \frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad , \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$V = \pi \int_a^b [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx$$

$$= \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^5}{5} \right) - \left(\frac{(0)^2}{2} - \frac{(0)^5}{5} \right) \right]$$

$$= \frac{3}{10} \pi$$



(51) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة

بمنحنيي الدالتين: $y_1 = x + 3$, $y_2 = x^2 + 1$

نضع $y_1 = y_2$

$$x + 3 = x^2 + 1$$

$$x^2 + 1 - x - 3 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = 2 , x = -1$$

لأخذ قيمت اختيارية في $(-1, 2)$ ولكن $x = 0$

$$y_1(0) = 0 + 3 = 3 , y_2(0) = (0)^2 + 1 = 1$$

$$y_1 \geq y_2 \quad \forall x \in [-1, 2]$$

$$V = \pi \int_{-1}^2 (y_1)^2 - (y_2)^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^2 [(x+3)^2 - (x^2+1)^2] dx$$

$$= \pi \int_{-1}^2 (x^2 + 6x + 9) - (x^4 + 2x^2 + 1) dx$$

$$= \pi \int_{-1}^2 (-x^4 - x^2 + 6x + 8) dx$$

$$= \pi \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^2$$

$$= \pi \left[\left(-\frac{(2)^5}{5} - \frac{(2)^3}{3} + 3(2)^2 + 8(2) \right) - \left(-\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} + 3(-1)^2 + 8(-1) \right) \right]$$

$$= \frac{117}{5} \pi$$



(52) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة

بمنحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ والمستقيم $y = 2$ في الفترة $[-2, 2]$

نضع

$$\frac{1}{2}x^2 = 2$$

$$x^2 = 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = 2, x = -2$$

لأخذ قيمة اختيارية في $(-2, 2)$ مثلاً $x = 0$

$$f(0) = \frac{1}{2}(0)^2 = 0, y(0) = 2$$

$$y \geq f(x) \quad \forall x \in [-2, 2]$$

$$V = \pi \int_{-2}^2 [y^2 - (f(x))^2] dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 [(2)^2 - (\frac{1}{2}x^2)^2] dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 (4 - \frac{1}{4}x^4) dx$$

$$= \pi \left[4x - \frac{x^5}{20} \right]_{-2}^2$$

$$= \pi \left[(4(2) - \frac{(2)^5}{20}) - (4(-2) - \frac{(-2)^5}{20}) \right]$$

$$= \frac{64}{5} \pi$$



(53) أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3, 8]$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \\
 (f'(x))^2 &= (x^{\frac{1}{2}})^2 = x \\
 L &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_3^8 \sqrt{1+x} dx \\
 &= \int_3^8 (1+x)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_3^8 \\
 &= \left(\frac{2}{3} (1+8)^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{2}{3} (1+3)^{\frac{3}{2}} \right) \\
 &= \frac{38}{3}
 \end{aligned}$$

(54) أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x^3}$ في الفترة $[0, 4]$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \\
 f'(x) &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \\
 (f'(x))^2 &= \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \frac{9}{4} x \\
 L &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\
 &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \frac{9}{4} \left(1 + \frac{9}{4}x \right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{9} \left[\frac{(1 + \frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \\
 &= \frac{4}{9} \left[\frac{(1 + \frac{9}{4}(4))^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(1 + \frac{9}{4}(0))^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] \\
 &= 9.07
 \end{aligned}$$

$g(x) = 1 + \frac{9}{4}x \Rightarrow g'(x) = \frac{9}{4}$





(57) إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $2x + 5$

فأوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة $B(-2, 3)$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x+5}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{-1}{2x+5} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+5} dx$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \ln |2x+5| + C$$

نعوض بالنقطة $B(-2, 3)$

$$3 = -\frac{1}{2} \ln |2(-2)+5| + C$$

$$C = 3$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \ln |2x+5| + 3$$

(58) إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $\sqrt{5-4x}$

فأوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة $A(-5, 3)$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{5-4x}} = -(5-4x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx =$$

$$= \int -(5-4x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \int -4(5-4x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(5-4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} (5-4x)^{\frac{1}{2}} + C$$

نعوض $A(-5, 3)$

$$3 = \frac{1}{2} (5-4(-5))^{\frac{1}{2}} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (5-4x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$$



(59) حل المعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\ln|y| = x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^2 + C} = e^C e^{x^2}$$

$$y = \pm e^C e^{x^2}$$

$$y = k e^{x^2}$$

(60) حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + C$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + C$$

$$|y| = e^{\ln x^2 + C} = e^C e^{\ln x^2}$$

$$y = \pm e^C x^2$$

$$y = k x^2$$





(63) حدد نوع القطع المخروطي ثم أوجد معادلته إذا علمت أن اختلافه المركزي ($e = 1$) وبؤرته: $F(\frac{1}{2}, 0)$ ورأسه

نقطة الأصل.

$a = 1$ مع قطع مكافئ ، رأسه نقطة الأصل

البؤرة $F(\frac{1}{2}, 0)$

محور التماثل محور السينات ، $p = \frac{1}{2}$

$$y^2 = 4px$$

معادلة القطع :

$$y^2 = 4(\frac{1}{2})x$$

$$y^2 = 2x$$

(64) أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$

$$\frac{25x^2}{400} + \frac{16y^2}{400} = \frac{400}{400}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{المحور الأكبر منطبق على محور الصادات}$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3$$

$$F_1(0, -c), F_2(0, c)$$

البؤرتان

$$F_1(0, -3), F_2(0, 3)$$

$$A_1(0, -a), A_2(0, a)$$

الرأسان

$$A_1(0, -5), A_2(0, 5)$$

$$2a = 2 \times 5 = 10$$

طول المحور الأكبر :



(65) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$

ونقطتا طرفي المحور الأصغر $B_1(0,-3)$, $B_2(0,3)$.

البؤرة $F_2(2,0)$ ، المحور الأكبر ينطبق على محور السينات

$$c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$$

$$B_2(0,3) \text{ و } b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 4 = 13$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(66) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ وطول محوره الأصغر 4

البؤرة $F_2(2,0)$ ، المحور الأكبر ينطبق على محور السينات

$$c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$$

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 4 + 4 = 8$$

معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$



(67) أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $(0, 0)$ إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور الصادي وطوله 16 cm والمسافة بين البؤرتين 10 cm .

طول المحور الأكبر 16

$$2a = 16 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$$

المسافة بين البؤرتين 10

$$2c = 10 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow c^2 = 25$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 25 = 39$$

المحور الأكبر ينطبق على المحور الصادي

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{64} = 1$$





(68) للقطع الزائد الذي معادلته: $9x^2 - 16y^2 = 144$ أوجد كلا من:

- (1) رأسي القطع الزائد (2) البؤرتين (3) معادلتَي دليلي القطع (4) الاختلاف المركزي

1) $9x^2 - 16y^2 = 144$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

معادلة قطع زائد محوره الأساسي ينطبق على محور السينات $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5$$

$$A_1 (-a, 0) \text{ و } A_2 (a, 0)$$

$$A_1 (-4, 0) \text{ و } A_2 (4, 0)$$

الرؤسيتين:

2) $F_1 (-c, 0) \text{ و } F_2 (c, 0)$ البؤرتين

$$F_1 (-5, 0) \text{ و } F_2 (5, 0)$$

3)

معادلتَي دليلي القطع

$$x = \pm \frac{a^2}{c}$$

$$x = \pm \frac{16}{5}$$

4)

الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{5}{4}$$



69) أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$

ورأساه $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$ ، ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين.

البؤرة $F_2(4, 0)$ المحور الأساسي ينطبق على محور السينات

$$c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$$

الرأس $A_2(2, 0)$

$$a = 2 \Rightarrow a^2 = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$$

$$b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

معادلة القطع الزائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

معادلة خطيه المقاربين :

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

$$y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{2} x$$

$$y = \pm \sqrt{3} x$$



(70) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0, 0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0, -\sqrt{5})$

ومعادلة أحد خطيه المقاربين هي: $y = 2x$ ثم أوجد اختلافه المركزي.

البؤرة $F(0, -\sqrt{5})$ ، المحور الأساسي ينطبق على محور الصادات

$$c = \sqrt{5} \Rightarrow c^2 = 5$$

معادلة أحد خطيه المقاربين: $y = 2x$

$$y = \frac{a}{b}x$$

$$\frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$5 = (2b)^2 + b^2$$

$$5 = 4b^2 + b^2$$

$$5 = 5b^2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$a = 2b = 2(1) = 2 \Rightarrow a^2 = 4$$

معادلة القطع الزائد:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1$$

الاختلاف المركزي:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



(71) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0, 0)$ وأحد رأسيه $(-4, 0)$ ويمر بالنقطة $(5, -2)$

أحد رأسي القطع الزائد $(-4, 0)$

المحور الأساسي ينطبق على محور السينات

$$a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{معادلة القطع :}$$

$$\frac{(5)^2}{16} - \frac{(-2)^2}{b^2} = 1 \quad \text{نعوض بالنقطة } (5, -2)$$

$$\frac{25}{16} - \frac{4}{b^2} = 1$$

$$\frac{4}{b^2} = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$$

$$b^2 = \frac{4 \times 16}{9} = \frac{64}{9}$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{64}{9}} = 1 \quad \text{معادلة القطع :}$$



(72) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الذي معادلته: $x^2 - 25y^2 = 1$

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{25} = 1$$

معادلة قطع زائد محوره الأساسي يتطوّر على محور السينات $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + \frac{1}{25} = \frac{26}{25}$$

$$c = \sqrt{\frac{26}{25}} = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1} = \frac{\sqrt{26}}{5}$$





(75) يبين الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

فأوجد:

(1) التوقع (μ) (2) التباين (σ^2) (3) الانحراف المعياري (σ)

(1) التوقع :

$$\begin{aligned}\mu &= \sum x_i f(x_i) \\ &= 1 \times 0.2 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.3 = 3.2\end{aligned}$$

(2) التباين :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2 \\ &= (1)^2 \times 0.2 + (2)^2 \times 0.1 + (3)^2 \times 0.3 + (4)^2 \times 0.1 + (5)^2 \times 0.3 - (3.2)^2 \\ &= 2.16\end{aligned}$$

(3) الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.16} = 1.469$$

(76) الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X

x	3	4	5
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X .

فأوجد: $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(4.5)$, $F(5)$, $F(7)$

$$F(2) = P(X \leq 2) = 0 \quad , \quad F(3) = P(X \leq 3) = f(3) = 0.5$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = f(3) + f(4) = 0.5 + 0.3 = 0.8$$

$$F(4.5) = P(X \leq 4.5) = f(3) + f(4) = 0.5 + 0.3 = 0.8$$

$$\begin{aligned}F(5) &= P(X \leq 5) = f(3) + f(4) + f(5) \\ &= 0.5 + 0.3 + 0.2 = 1\end{aligned}$$

$$F(7) = P(X \leq 7) = 1$$



(77) يبين الجدول التالي بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X

x	1	2	3	4
$F(x)$	0.15	0.2	0.6	1

أوجد:

1) $p(1 < X \leq 3)$ 2) $p(2 < X \leq 5)$ 3) $p(X > 2)$

1) $p(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1) = 0.6 - 0.15 = 0.45$

2) $p(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = 1 - 0.2 = 0.8$

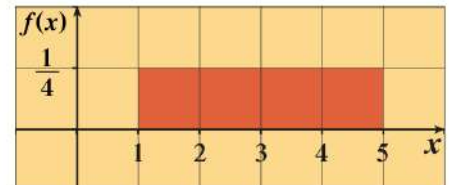
3) $p(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - 0.2 = 0.8$

(78) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي:

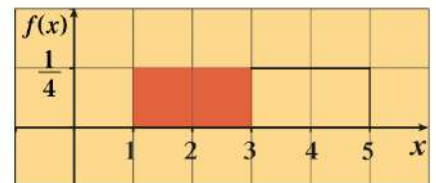
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & : 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

1) $p(1 < X \leq 5)$ 2) $p(X < 3)$ 3) $p(X = 2)$

1) $p(1 < X \leq 5) = \text{مساحة المنطقة المستطيلة المظللة}$
 $= 4 \times \frac{1}{4} = 1$



2) $p(X < 3) = \text{مساحة المنطقة المستطيلة المظللة}$
 $= 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$



3) $p(X = 2) = 0$



(79) إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & : 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

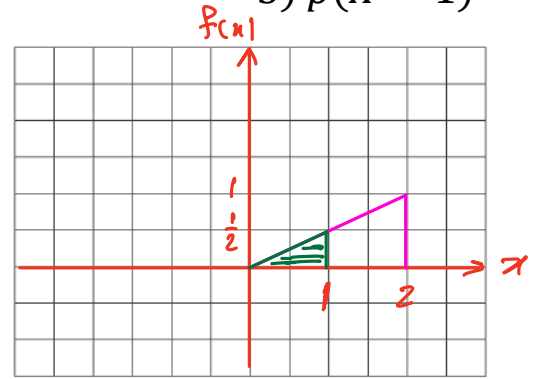
1) $p(X < 1)$

2) $p(X \geq 1)$

3) $p(X = 1)$

1) $p(X < 1) =$ ساحة المنطقة المظللة

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



2) $p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1)$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

3) $p(X = 1) = 0$



(80) لتكن الدالة f دالة كثافة الاحتمال:

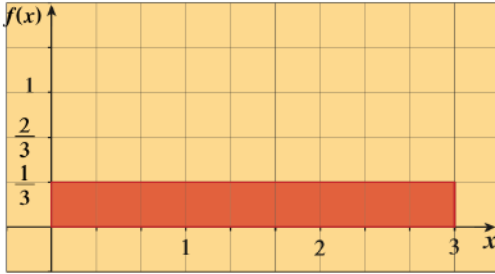
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

(2) أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم

(1) أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال

(4) أوجد التوقع والتباين للدالة f

(3) أوجد: $p(2 < X \leq 3)$



(1) المساحة تحت المنحنى من الشكل هي
مساحة المنطقة المستطيلة = الطول $\times$ العرض
 $= 3 \times \frac{1}{3} = 1$

الدالة f هي دالة كثافة احتمال

(2) لا بد أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم. يجب أن تكون الدالة على الصورة:

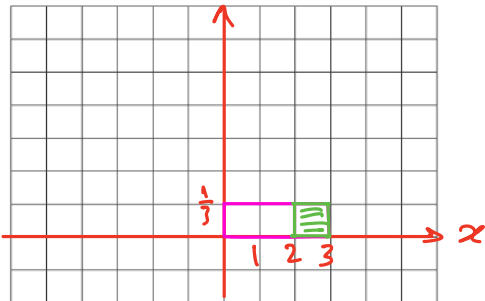
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \leq x \leq b \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$a = 0, b = 3 \Rightarrow b - a = 3 - 0 = 3$$

$$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

الدالة f هي دالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم

(3) مساحة المنطقة المستطيلة المظللة = $p(2 < X \leq 3)$
 $= 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$



$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2} \quad (4) \text{ التوقع}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-0)^2}{12} = \frac{3}{4} \quad \text{التباين}$$

