

ملخص الباب الرابع: العلاقات والدوال العكسية والجذرية.

الدرس الأول: العمليات على الدوال

العملية	التعريف
الجمع (+)	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
الطرح (-)	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
الضرب (×)	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
القسمة (÷)	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0$

أوجد الناتج

$$f(x) = x^2 - 4 \quad g(x) = 2x + 1$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 4 + 2x + 1 = x^2 + 2x - 3$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4 - 2x - 1 = x^2 - 2x - 5$$

في الطرح الأشارات تتقلب ونوزعه أفضل البداية

★ الضرب والقسمة :-

$$f(x) = x^2 + 7x + 12 \quad g(x) = 3x - 4$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 7x + 12) \cdot (3x - 4)$$

$$= 3x^3 + 21x^2 + 36x - 4x^2 - 28x - 48 = 3x^3 + 17x^2 + 8x - 48$$

نختصر الحدود المتشابهة

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 7x + 12}{3x - 4}$$

أنتهت العملية لكن نضيف شرط أن المقام (x) لا يساوي صفر بشرط أن $x \neq \frac{4}{3}$

★ تركيب دالتين :-

هي إحدى الطرق لدمج دالتين وإيجاد قيمهم. يرمز لتركيب دالتين $f(x)$ و $g(x)$ بـ $[f \circ g](x)$

$$f[g(x)]$$

مثال إذا كانت أزواج مرتبة:

$$f = \{(1, 8), (0, 13), (14, 9), (15, 11)\}$$

$$g = \{(8, 15), (5, 1), (10, 14), (9, 0)\}$$

$$[f \circ g](x) \quad [g \circ f](x)$$

$$f[g(x)] \quad g[f(x)]$$

نحط قيم x الموجودة في g

$$(8, 11) \quad (1, 15) \quad (14, 0) \quad (15, -)$$

$$(5, 8) \quad (9, 13) \quad (0, -)$$

احداني لا نجيبه من قيم f إذا كانت x متطابقة مع قيم مدخلات الدالة f

ترتيب دالتين (معادلات)

$$f(x) = 2x - 5, \quad g(x) = 4x$$

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

نعوض عن x بمعادلة g

$$2(4x) - 5 = 8x - 5$$

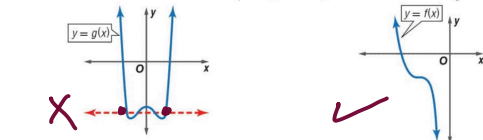
$$g[f(x)] = 4(2x - 5) = 8x - 20$$

الدرس الثاني: العلاقات والدوال العكسية

★ العلاقة العكسية :- هي مجموعة من الأزواج المرتبة الناتجة عن تبديل إحداثيات كل زوج مرتب.

الدالة العكسية :- نفس العلاقة العكسية ويرمز للدالة بـ $f^{-1}(x)$ أو $f(x)$ نبدل بين المجال والمعدى.

اختيار الخط الأفقي، إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة متبادلة. تذكر أنه يمكنك استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا. وبالمثل يمكنك استعمال اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا.



لا يمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة (الدالة متبادلة) لذا يمثل معكوس الدالة $f(x)$ دالة أيضًا. يمكنك إيجاد معكوس دالة بالتبديل بين x و y في قاعدة الدالة.

إيجاد معكوس الدالة

- ضع y بدلًا من $f(x)$
- بدل بين x و y
- حل المعادلة بالنسبة للمتغير y
- ضع $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y إذا كان المعكوس دالة.

مثال: $f(x) = 2x - 5$

$$y = 2x - 5$$

$$x = 2y - 5$$

$$x + 5 = 2y$$

$$\frac{x+5}{2} = y$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

التأكد من الدالة العكسية: يمكنك تحديد ما إذا كانت دالتان، كل منهما تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا، وذلك بإيجاد كل من تركيبهما.

المفهوم الأساسي: الدالة العكسية: تكون كل من الدالتين f و g دالة عكسية للأخرى. إذا وفقط إذا كان تركيب f و g يساوي الدالة المحايدة $f(x) = x$ و $g(x) = x$ ، وكل منهما تمثل دالة عكسية للأخرى. إذا وفقط إذا كان $g \circ f(x) = x$ و $f \circ g(x) = x$.

مثال :- تأكد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا.

$$f(x) = 3x + 9, \quad g(x) = \frac{1}{3}x - 3$$

$$[f \circ g](x) \quad [g \circ f](x)$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}x - 3\right) + 9 = x - 9 + 9 = x$$

$$= x$$

$$= \frac{1}{3}(3x + 9) - 3 = x + 3 - 3 = x$$

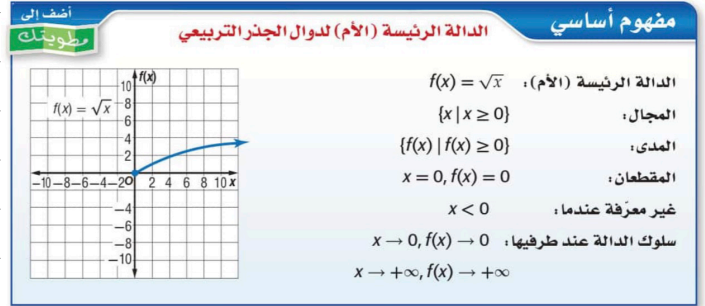
$$= x$$

الدرس الثالث: دوال ومتباينات الجذر التربيعي.

* إذا احتوت دالة على الجذر التربيعي

لمتغير تسمى: دالة الجذر التربيعي

مثال: $f(x) = \sqrt{x}$



مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرفة.

- عين كلا من المجال والمدى للدوال الآتية:-

$$f(x) = \sqrt{x+4}$$

المجال: $x \geq -4$

المدى: $x \geq 0$

- في المدى نشوف

العدد الي برا الجذر

$$f(x) = \sqrt{x+6} + 2$$

المجال: $x \geq -6$

المدى: $x \geq 2$

- في المجال نغير إشارة العدد

الموجود داخل الجذر.



متباينة الجذر التربيعي:-

لها هي متباينة تحتوي على جذر

مثال: $y > \sqrt{x}$

ملاحظات:-

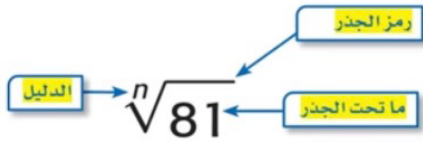
في الرسم والتمثيل

$<$, $<$ التظليل إلى أسفل

$>$, $>$ التظليل إلى أعلى

الدرس الرابع: الجذر النوني

يشير الرمز $\sqrt[n]{\quad}$ إلى الجذر النوني.



أمثلة:-

$$\sqrt{25} = 5 \quad \sqrt[3]{27} = 3 \quad \sqrt[4]{16} = 2$$

إيجاد الجذور وتبسيطها:-

$$\pm \sqrt{16y^4} \rightarrow \pm 4y^2$$

نقسم الأس على الدليل

$$-\sqrt{(x^2-6)^8} \rightarrow -(x^2-6)^4$$

* إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا والأس تحت الجذر زوجي وأصبح أس الناتج عدد فردي يجب أن تضيف رمز القيمة المطلقة.

الدرس الخامس: العمليات على العبارات الجذرية

1- خاصية ضرب الجذور

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

بشرط أن يكون الأساس متطابق /

2- خاصية قسمة الجذور

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

نفس شرط الضرب وأوزع الجذر على البسط والمقام.

لإزالة الجذر في المقام نستعمل عملية انطاق المقام

مثال	فاضرب البسط والمقام في	إذا كان المقام
$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$
$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$	$\sqrt[n]{b^x}$

$$\sqrt{\frac{x^6}{y^7}} = \frac{\sqrt{x^6}}{\sqrt{y^7}} = \frac{x^3}{y^3\sqrt{y}} = \frac{x^3\sqrt{y}}{y^3}$$

ملخص المفاهيم	تبسيط العبارات الجذرية
تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية:	
• إذا كان دليل الجذر n أصغر ما يمكن.	
• إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تكتب على صورة قوى نونية لعدد صحيح أو لكثرة حدود.	
• إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسورًا.	
• إذا لم توجد جذور في المقام.	

العمليات على العبارات الجذرية: يمكنك استعمال خاصيتي الضرب والقسمة لضرب بعض العبارات الجذرية وقسمتها.

يمكنك جمع العبارات الجذرية وطرحها بالأسلوب المستعمل عند جمع وحدات الحد أو طرحها، ولكن بشرط أن تكون الجذور متشابهة: أي أن يكون للجذور الدليل نفسه وما تحت الجذور المقادير نفسها.

متشابهان: $4\sqrt{3b}$ و $\sqrt{3b}$

غير متشابهين: $\sqrt{3b}$ و $\sqrt{2b}$

غير متشابهين: $\sqrt{3b}$ و $\sqrt{3b^2}$

الدرس الخامس: الأسس النسبية

* كتابة الصورة الأسسية على الصورة الجذرية والعكس:

من أسية إلى جذرية

$$5^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{5^1} \leftarrow \text{أس العدد}$$

من جذرية إلى أسية

$$\sqrt[n]{4^2} = 4^{\frac{2}{n}}$$

* دليل الجذر موجود دومًا في المقام وأُس العدد فوق في البسط.

* خاصية الأس السالب :- $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ نقلب الكسر ونغير الإشارة

- أوجد قيمة العبارات الآتية :-

a) $81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}} \rightarrow \frac{1}{3}$ (نخال)

b) $216^{\frac{2}{3}} = 36$

* التحليل إما يدوي باستخدام عقلك أو باستخدام الآلة (C)

* تبسيط عبارات بأسس نسبية :-

- إذا كان الأس كسر لازم نوجد المقامات

- ما ينبغي أن يوجد متغير أسه كسر في المقام لأنه بالأصل جذر

a) $a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{1}{7}} = a^{\frac{3}{7}}$ نجمع عادي لأن الوقام نفسه

b) $a^{-\frac{5}{6}} \rightarrow \frac{1}{a^{\frac{5}{6}}} \times \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a}$ ضرب بالكسر أي بكملة

* تبسيط العبارات الجذرية :-

- لازم نخلي دليل الجذر أقل ما يمكن ، استعمال الأس النسبية يسهل هذه العملية.

$$\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}} = \frac{27^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{(3^3)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$$

نطرح

ملخص المظاهر	عبارات تتضمن أسسًا نسبية
تكون العبارات التي تتضمن أسسًا نسبية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط الآتية:	
جميع الأسس غير سالبة.	
جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.	
لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسرًا.	
دليل الجذر أو الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.	

الدرس السادس: الأخير: حل المعادلات والمتباينات الجذرية

المعادلات الجذرية: يوجد فيها متغير تحت الجذر.

مفهوم أساسي	حل المعادلات الجذرية
الخطوة 1:	اجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة.
الخطوة 2:	ارفع طرفي المعادلة لقوة مساوية لدليل الجذر؛ وذلك للتخلص من الجذر. أيًا كان الدليل
الخطوة 3:	حل معادلة كثيرة الحدود الناتجة، ثم تحقق من صحة الحل.

عند حل بعض المعادلات الجذرية، قد لا يحقق الحل المعادلة الأصلية. ويُسمى مثل هذا الحل **حلًا دخيلًا**.

مثال :- $\sqrt{x+2} + 4 = 7$

$$\sqrt{x+2} = 7 - 4 = 3 \rightarrow x+2 = 3^2 = 9 \rightarrow x = 9 - 2 = 7$$

نعوض في المعادلة

$$\sqrt{7+2} + 4 = 7 \rightarrow \sqrt{9} + 4 = 7 \rightarrow 3 + 4 = 7 \checkmark$$

- إذا عوضنا وما طلع الناتج نقول حل دخيل

- تنطبق على أي جذرهما كان دليله 2، 4، 3، ...

المتباينة الجذرية :-

حل المتباينات الجذرية: المتباينة الجذرية هي متباينة تحوي عبارات جذرية، ويكون المتغير فيها تحت الجذر. ولحل متباينة جذرية، اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي	حل المتباينات الجذرية
الخطوة 1:	إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا، فعين قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالبًا.
الخطوة 2:	حل المتباينة جبريًا.
الخطوة 3:	حدد حل المتباينة من الخطوتين السابقتين، ثم اختبر القيم للتأكد من صحة الحل.

تحديد منطقة الحل

حل المتباينة: $3 + \sqrt{5x-10} \leq 8$

1) نوجد المجال $5x-10 \geq 0$

$$\frac{5x}{5} \geq \frac{10}{5} \rightarrow x \geq 2$$

2) نحل المعادلة جذريًا

$$3 + \sqrt{5x-10} \leq 8 \rightarrow \sqrt{5x-10} \leq 5$$

$$(\sqrt{5x-10})^2 \leq (5)^2 \rightarrow 5x-10 \leq 25$$

$$5x \leq 25 + 10 \rightarrow 5x \leq 35$$

$$\frac{5x}{5} \leq \frac{35}{5} \rightarrow x \leq 7$$

قيمة أكبر $2 \leq x \leq 7$ قيمة أصغر

النهاية