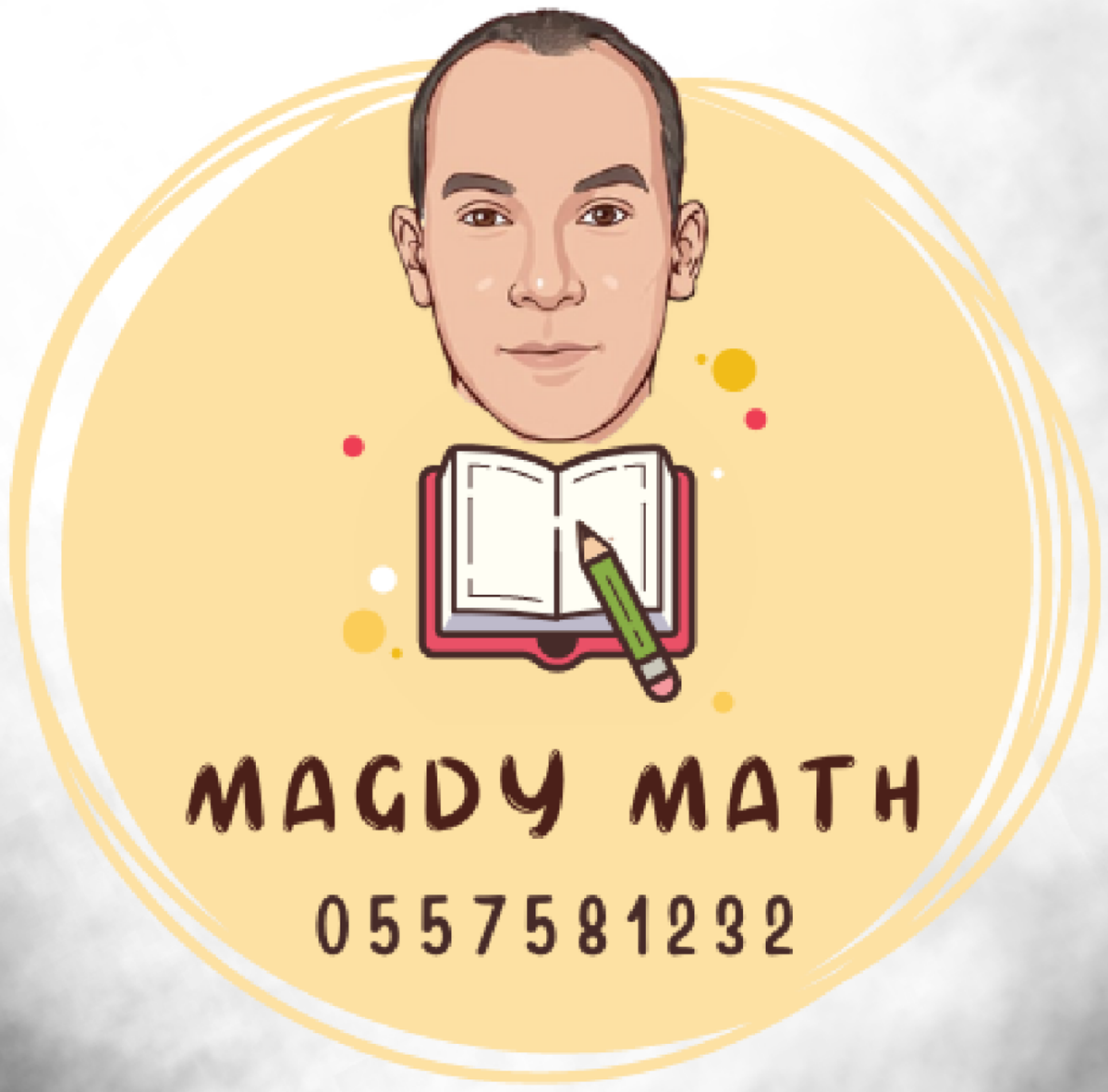
وحدة النهايات والاتصال

للصف الثاني عشر متقدم

WWW.MAGDYMATH.COM



0562721972

SUBSCRIBE







نماذج بعض الطلاب الحاصلين على 100





الشرح والاختبارات

اوراق عمل وحدة النهايات الفصل الدراسي الاول اعداد مجدي السيد
WWW.MAGDYMATH.COM TEL/ 0562721972

الدرس الأول (المماسات وطول المنحنى)

❑ قدرميل منحنى الدالة $y = x^2 + 1$ عند $x = 1$

$y = x^2 + 1$

$y = (1)^2 + 1 = 2$ ⟹ $(1, 2)$ وهى النقطة الثابتة

الحل

ولحساب تقدير الميل نحتاج لنقاط اخرى للتعويض بالقانون $m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ فنختار نقاط قريبة جداً وليكن

$\{1.1 , 1.01\}$ $x > 1$ و $\{0.9 , 0.99\}$ $x < 1$

نكمل الجدول كمايلي:

x	0.9	0.99	1	1.01	1.1
$f(x)$	1.81	1.9801	2	2.0201	2.21
point	(0.9 , 1.81)	(0.99, 1.9801)	(1, 2)	(1.01, 2.0201)	(1.1, 2.21)
m_{sec}	$\frac{1.81 - 2}{0.9 - 1} = 1.9$	$\frac{1.9801 - 2}{0.09 - 1} = 1.99$		$\frac{2.0201 - 2}{1.01 - 1} = 2.01$	$\frac{2.21 - 2}{1.1 - 1} = 2.1$

$\therefore m_{sec} \simeq 2$

تمرين

❑ قدرميل منحنى الدالة $y = x^3 + 2$ عند $x = 2$

الحل

❑ قدرميل منحنى الدالة $y = \sqrt{x + 1}$ عند $x = 3$

الحل

MAGDY MATH
0557581232

❑ قدرميل منحنى الدالة $y = cos\, x$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

الحل

❑ قدرميل منحنى الدالة $f(x) = ln\, x$ عند $x = 3$

الحل

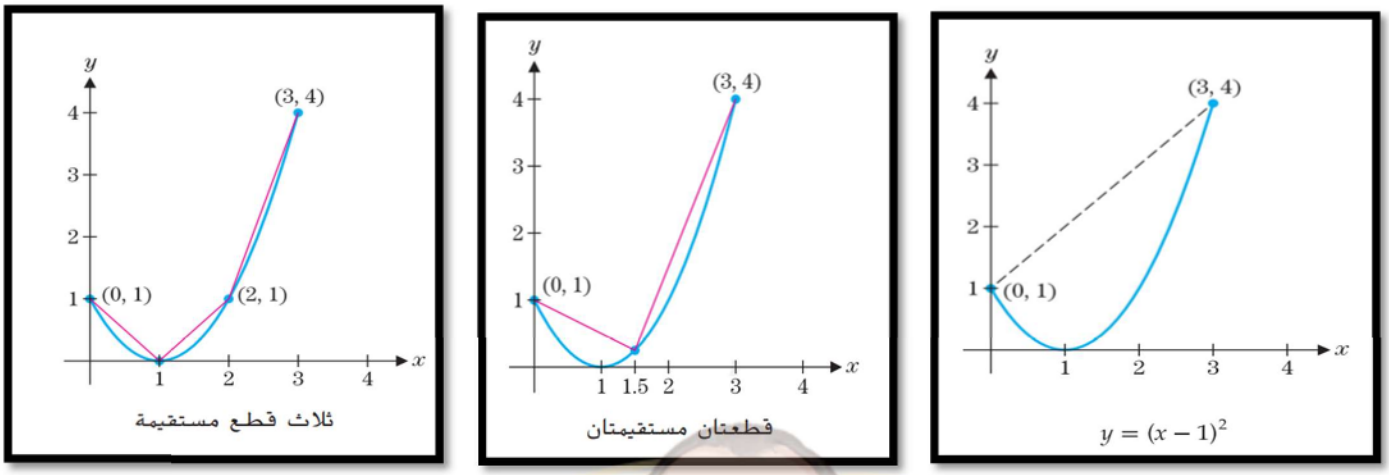
MAGDY MATH
0557581232

❑ قدرميل منحنى الدالة $f(x) = e^x$ عند $x = 0$

الحل

تقدير طول منحنى في فترة معينة

يمكن تقدير طول منحنى الدالة في فترة معينة من خلال حساب مجموع أطوال مجموعة من القطع المستقيمة والتي تصل بين مجموعة من النقاط الواقعة على المنحنى في تلك الفترة .



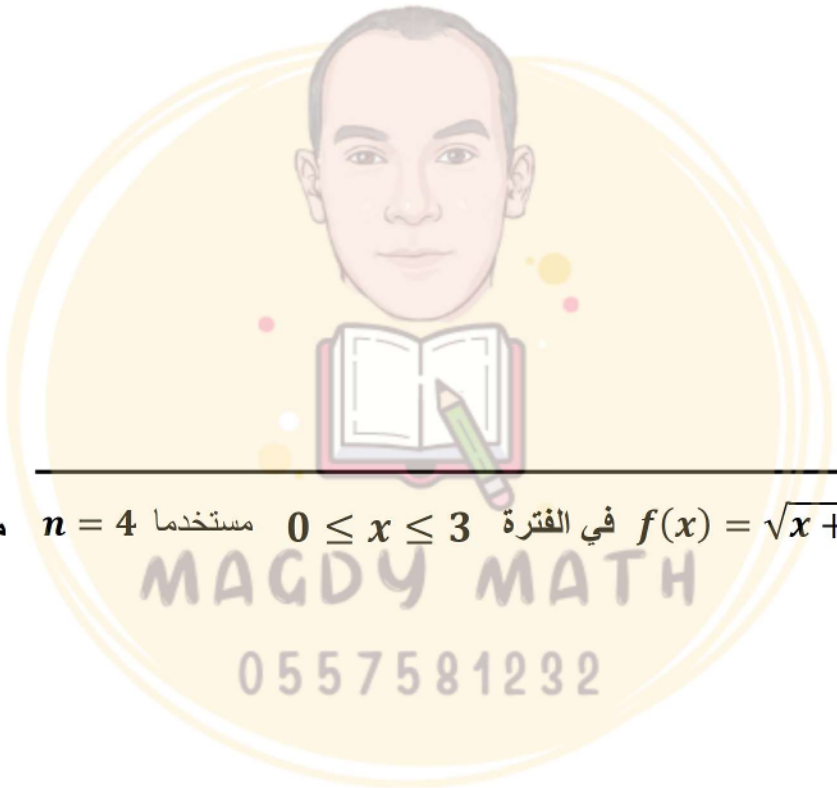
نلاحظ من خلال التمثيلات البيانية

كلما زاد عدد القطع المستقيمة كان التقدير أفضل لإيجاد طول المنحنى

❑ قدر طول المنحنى $f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $-2 \le x \le 2$ مستخدمًا n=2 حيث n عدد القطع المستقيمة

MAGDY MATH
0557581232

❑ قدر طول المنحنى $f(x) = sinx$ في الفترة $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ مستخدمًا $n = 4$ من القطع المستقيمة



❑ قدر طول القوس $f(x) = \sqrt{x+1}$ في الفترة $0 \leq x \leq 3$ مستخدما $n = 4$ من القطع المستقيمة

❑ قدر طول القوس $f(x) = x^3 + 1$ في الفترة $-2 \leq x \leq 2$ مستخدما $n = 4$ من القطع المستقيمة

❑ قدر طول القوس $f(x)=\sqrt{x+1}$ في الفترة $0 \le x \le 3$ مستخدما $n=4$ من القطع المستقيمة

❑ قدر طول المنحنى $f(x)=\frac{1}{x}$ في الفترة $1 \le x \le 2$ مستخدماً $n=2$ قطعة مستقيمة

MAGDY MATH
0557581232

❑ قدر طول قوس المنحنى $f(x)=x^3+2$ في الفترة $-1 \le x \le 1$ مستخدماً $n=4$ قطعة مستقيمة

❑ قدر طول المنحنى $f(x) = cos\, x$ في الفترة $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ مستخدماً $n = 4$ من القطع المستقيمة

تدريبات من الإختبارات السابقة

اختر الإجابة الصحيحة :

قدر طول قوس المنحنى $f(x) = x^3 + 1$ في الفترة $-1 \le x \le 1$ بإستخدام $n = 2$ قطعة مستقيمة

2023-2022

$a) \sqrt{2}$ $b) \sqrt{6}$ $c) 2\sqrt{2}$ $d) 2$

MAGDY MATH
0557581232

الدرس الثاني مفهوم النهاية

عند اجراء العمليات الحسابية على R نتعرض إلى واحدة من ثلاثة انواع من الكميات

الكمية المعينة هى الكمية التي لها ناتج محدد فمثلا $\frac{10}{2}$ لها ناتج محدد وهو 5 لذلك فهى كمية معينة ومنها ... $\pm 3 , \frac{1}{3} , 0.4$

الكمية الغير المعينة هى الكمية التي ليس لها جواب محدد فمثلا $\frac{0}{0}$ كمية غير معينة أي لها عدد لانهائي من الإجابات الصحيحة لإن حاصل ضرب أي عدد حقيقي R × 0 =0 كذلك يوجد صور اخرى من الكميات الغير معينة والتي سنتعرض لها في دراستنا لاحقًا مثل $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞

الكمية الغير معرفة هى الكمية التي ليس لها معنى فمثلا $\frac{5}{0}$ كمية غير معرفة أي ليس لها معنى لأنه لا يوجد عدد حقيقي إذا ضرب × صفر كان الناتج = 5 وبصفة عامة $\frac{a}{0}$ حيث $a \in R \setminus \{0\}$ كمية غير معرفة

MAGDY MATH
0557581232

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة

إذا أردنا إيجاد قيمة الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ عند $x = 1$ فإننا نجد كمية غير معينة $f(x) = \frac{(1)^2 - 1}{(1) - 1} = \frac{0}{0}$

أي أننا لم تستطيع تعيين قيمة للدالة عند $x = 1$ ولذلك نلجأ إلى دراسة اقتراب $f(x)$ من قيمة معينة كلما اقتربت X من العدد 1

وهو تعريف

مفهوم النهاية

النظرية

هي دراسة سلوك الدالة عندما تقترب من عدد معين

الدالة $f(x)$ لها نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط

إذا كانت النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند c موجودتين ومتساويتين

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to C} f(x) = L$$



إيجاد نهاية الدالة عند نقطة

- من الجدول
- الرسم البياني
- الحل الجبري

مثال أوجد $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ من خلال الجدول

-0.1 $+0.1$

x	0.9	0.99	0.99	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

2

❑ أوجد $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$ من خلال الجدول

MAGDY MATH
0557581232

❑ إذا كان $f(x)=\begin{cases}4x-1, & x\le -6\\ -x+2, & x>-6\end{cases}$ أوجد $\lim\limits_{x\to -6} f(x)$ من خلال الجدول

❑ إذا كان $h(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 2\\ 1, & x=2\end{cases}$ أوجد $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ من خلال الجدول

نهاية دالة عند نقطة بيانيًا

من خلال التمثيل البيانى اوجد كل مماىلى:

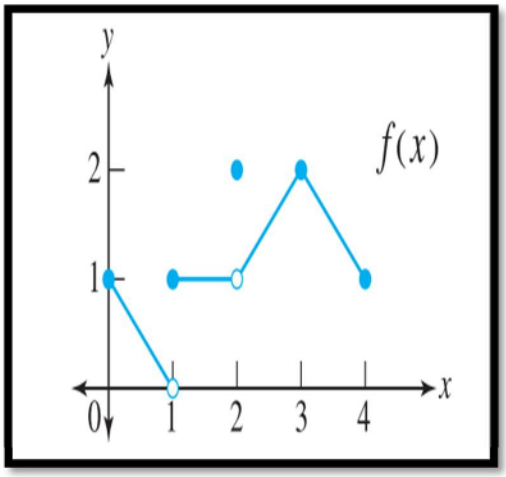
A. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

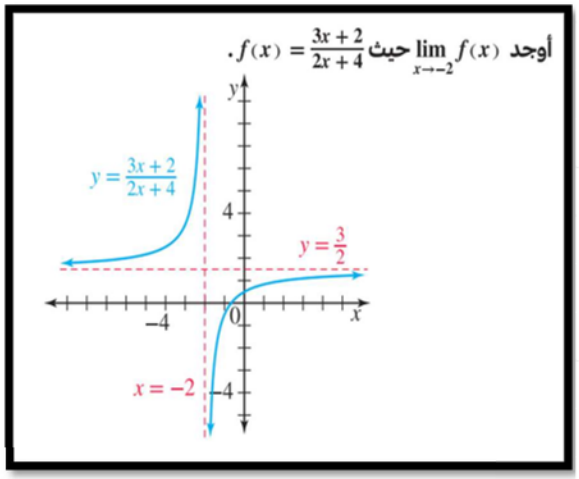
B. $\lim_{x\to 1} f(x)$

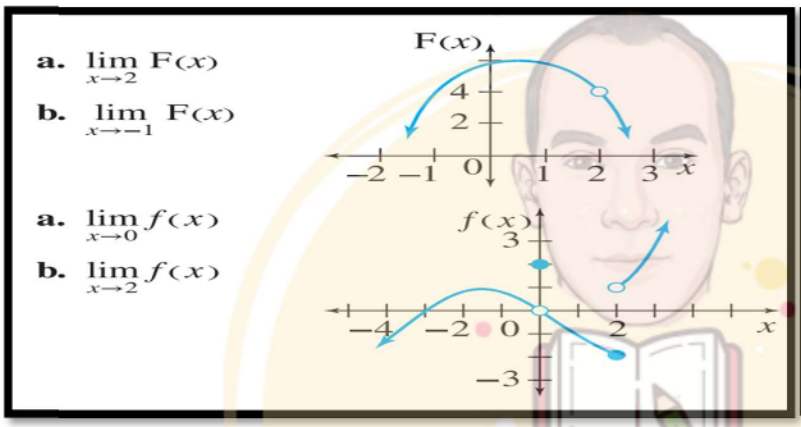
C. $\lim_{x\to 2} f(x)$

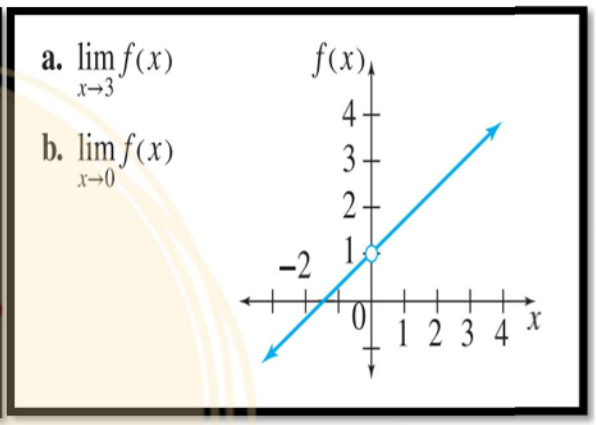
D. $\lim_{x\to 3} f(x)$

E. $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

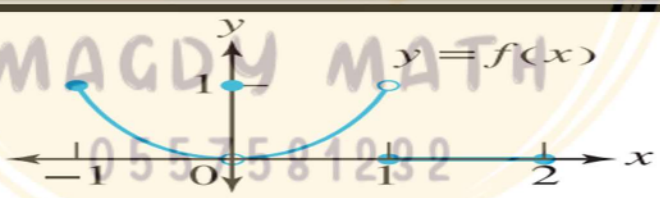








حدد إذا كانت العبارات التالية صحيحة ام لا بالنسبة للتمثيل البياني التالي:



a. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

b. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

c. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

d. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

e. $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة

f. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

g. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

h. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

i. $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

j. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

MAGDY MATH 0555758132

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

$\lim_{x\to -2^-} f(x)$

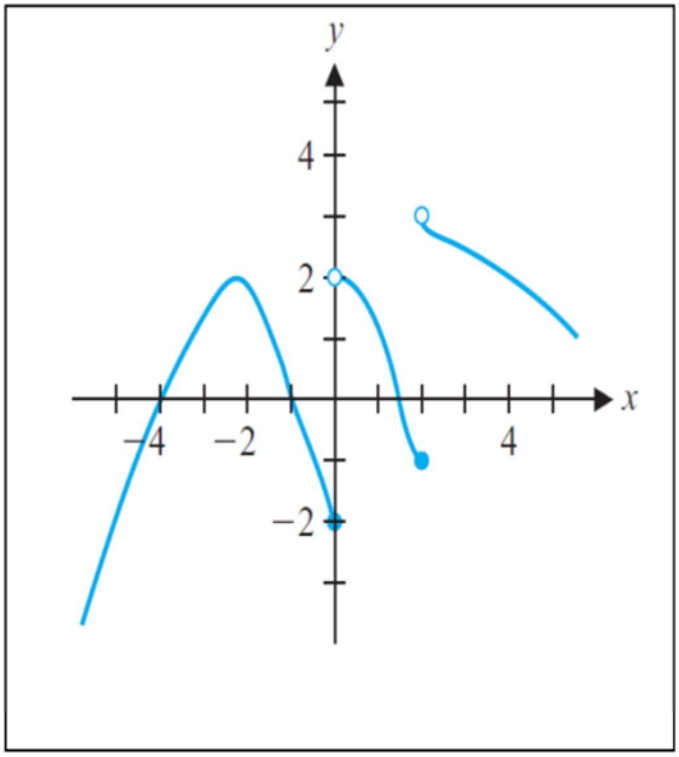
$\lim_{x\to -2^+} f(x)$

$\lim_{x\to -2} f(x)$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)$

$\lim_{x\to -1^+} f(x)$

$\lim_{x\to -1} f(x)$



$\lim_{x\to 1^-} f(x)$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)$

$\lim_{x\to 1} f(x)$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)$

$\lim_{x\to 2} f(x)$

$\lim_{x\to 3} f(x)$

$\lim_{x\to -3} f(x)$

ارسم التمثيل البياني للدلة $f(x)=\begin{cases} 2x & , \quad x<2 \\ x^2 & , \quad x\geq 2 \end{cases}$ ثم اوجد

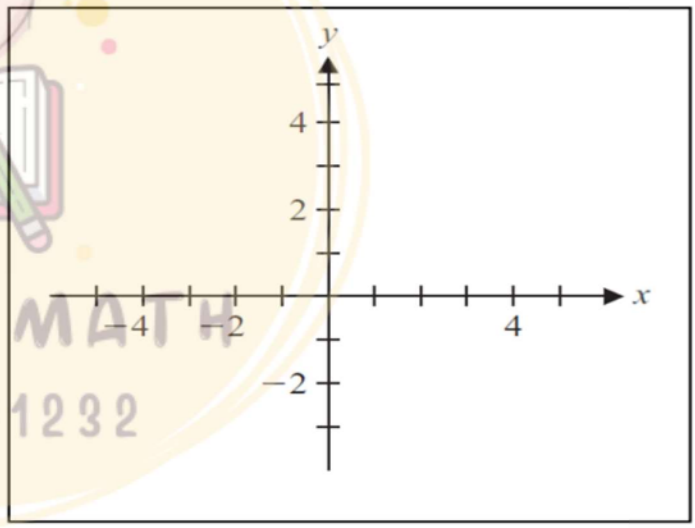
(a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

(b) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 1} f(x)$

(e) $\lim_{x\to 3} f(x)$



MAGDY MATH
0557581232

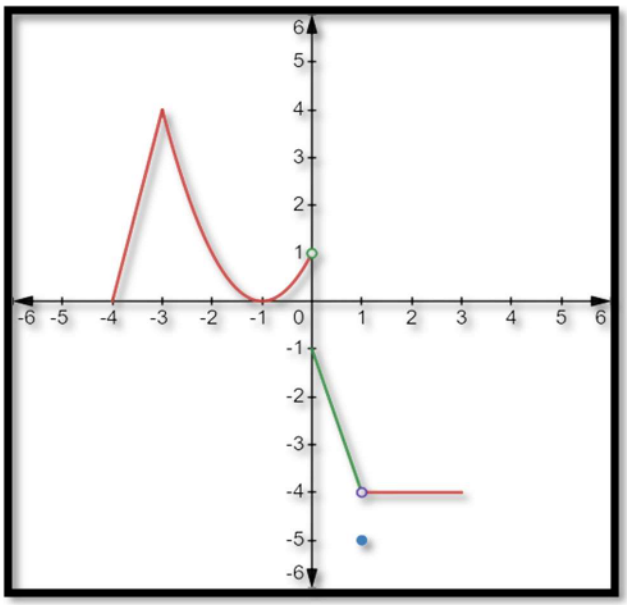
إذا كان $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = -1$ ولكن $f(2) = 1$، فإن $\lim_{x\to 2} f(x)$ هي

a. -1

b. غير موجودة

c. مالانهاية

d. 1



من خلال التمثيل البياني اوجد كل مما يلي:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)| =$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}|f(x)| =$

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{f(x)} =$

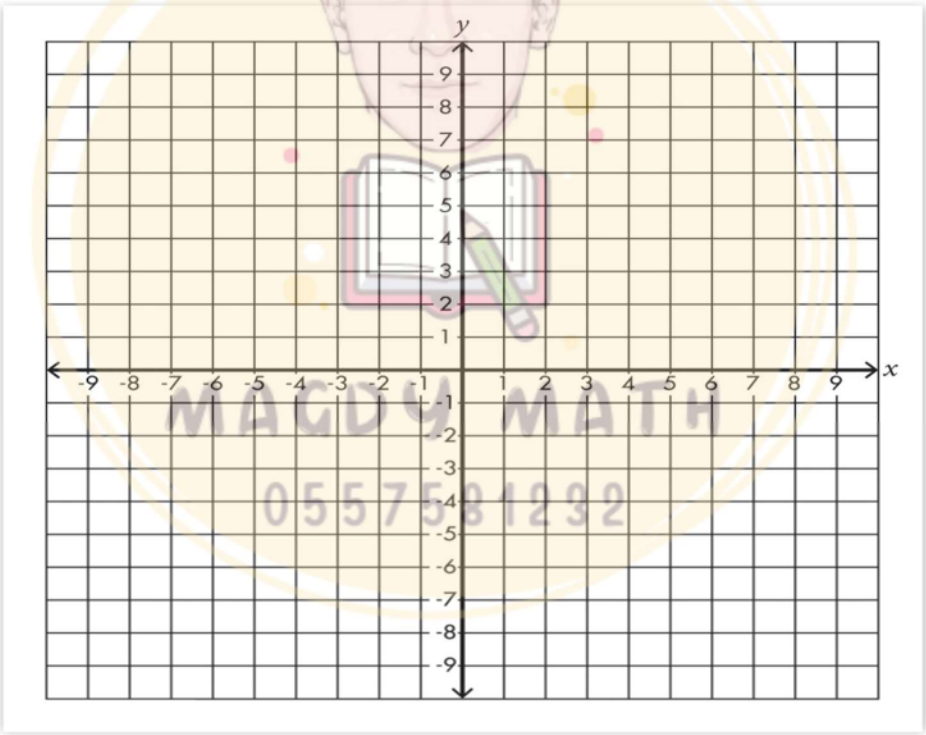
(4) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة $c \in \ldots\ldots$

(5) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ موجودة فقط $c \in \ldots\ldots$

(6) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ موجودة فقط $c \in \ldots\ldots$

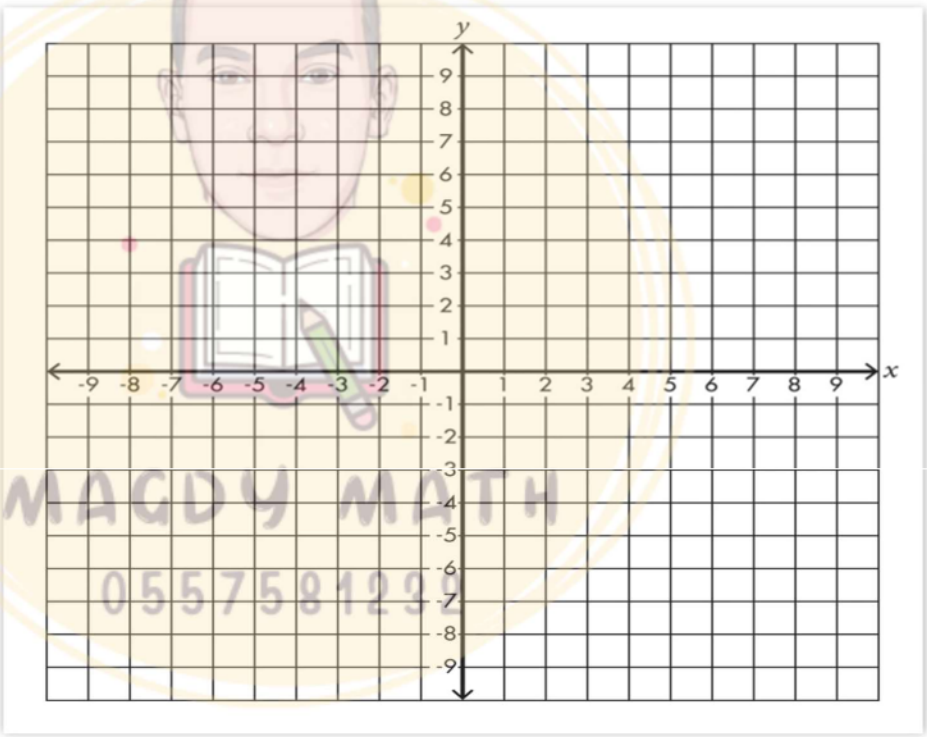
ارسم التمثيل البياني للدالة بالخواص المذكورة

$f(-1) = 2$, $f(0) = -1$, $f(1) = 3$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة



MAGDY MATH
0557581232

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$, $f(0) = 1$ و $f(2) = 3$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة



MAGDY MATH
0557581292

❑ اذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^3-1 & , \quad x<0 \\ 0 & , \quad x=0 \\ \sqrt{x+1}-2 & , \quad x>0 \end{cases}$$

(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

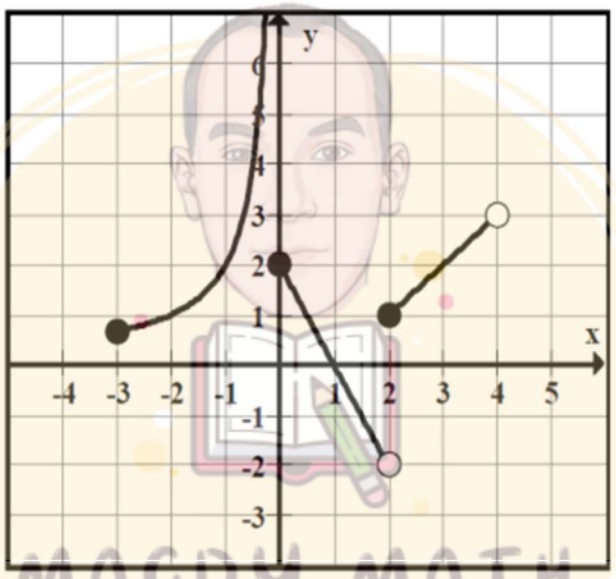
(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

من خلال التمثيل البياني اوجد كل مما يلي:

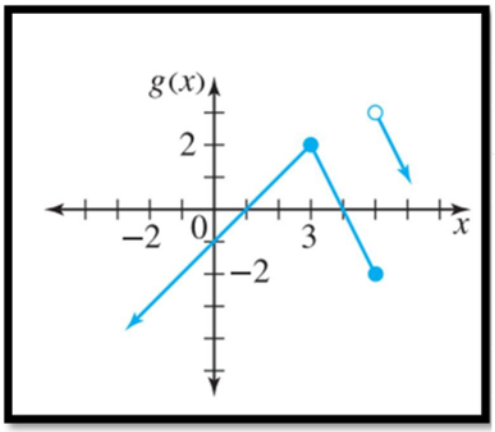
- $f(0)$
- $f(2)$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x)$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x)$
- $\lim_{x\to 0} f(x)$
- $\lim_{x\to 2} f(x)$



- $\lim_{x\to 4^-} f(x)$
- $\lim_{x\to -3} f(x)$
- $\lim_{x\to 1} f(x)$
- $\lim_{x\to 2} |f(x)|$
- $\lim_{x\to 1} \sqrt{f(x)}$
- $\lim_{x\to 0} f(|x|)$

MAGDY MATH
0562721972

من خلال التمثيل البياني اوجد كل مما يلي:



(1) $g(0) =$

(2) $\lim_{x\to 0} g(x) =$

(3) $\lim_{x\to -2} g|x| =$

(4) $\lim_{x\to 5} |g(x)| =$

(5) $\lim_{x\to 4} \sqrt{g(x)} =$

(6) $\lim_{x\to c} g(x)$ غير موجودة $c \in$ ... ..

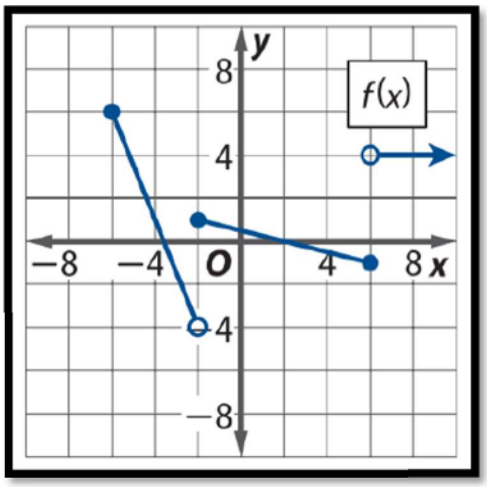
(7) $\lim_{x\to 3} \frac{g(x)-x}{x+1} =$

(8) $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ $c \in$ ... ..

دة

❑ استخدم التمثيل البياني لتحديد $\lim_{x\to -2} f(x)$ إن وجدت

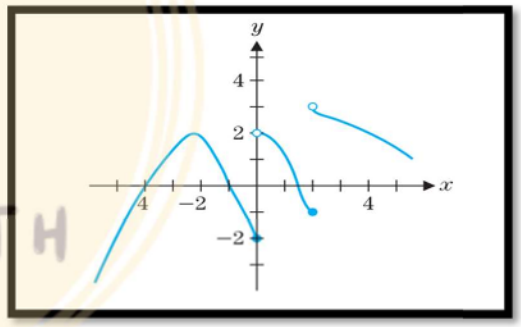
2023-2022



$a)$ غير موجودة $b)\ 0$ $c)\ -4$ $d)\ 1$

❑ استخدم التمثيل البياني لتحديد $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

2022-2021

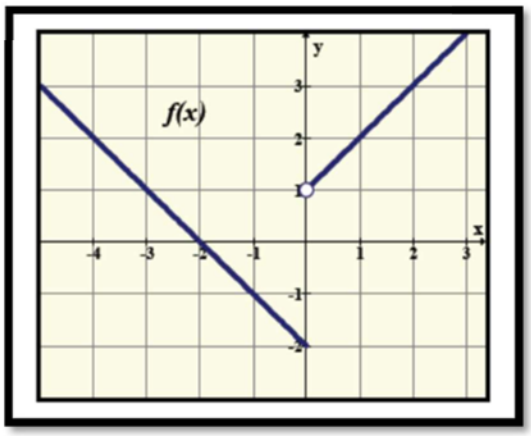


$a)\ -1$ $b)\ -2$

$c)\ 2$ $d)\ 3$

❑ استخدم التمثيل البياني لتحديد $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ إن وجدت

2021-2020



$a)\ -2$ $b)\ 0$

$c)\ 1$ $d)$ غير موجودة

MAGDY MATH
0559581232

الدرس الثاث حساب النهايات جبرياً

سنعرض الآن بعض النظريات والنتائج التي تساعد في إيجاد نهاية الدالة جبرياً

1) نهاية الدالة كثيرة الحدود

إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

فمثلاً: $\lim\limits_{x\to 2}(2x+5) = f(2) = 2(2)+5 = 9$

2) نهاية الدالة الثابتة

$f(x) = K$ حيث K عدد ثابت

فمثلاً: $\lim\limits_{x\to 3} 4 = 4$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} K = K$

3) نهاية جمع وطرح لدالتين

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجودتين (لهما قيمة)

فإن $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

فمثلاً: $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2 + \dfrac{x+3}{2x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 3} x^2 + \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right)$

أي أن نهاية المجموع الجبري لدالتين = المجموع الجبري لنهايتهما

4) نهاية الضرب في ثابت

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} c \times f(x) = c \times \lim\limits_{x\to a} f(x)$ حيث C عدد ثابت .

فمثلاً: $\lim\limits_{x\to 2} 5 \times x^2 = 5 \times \lim\limits_{x\to a} x^2$

أي أن نهاية حاصل ضرب ثابت × دالة = الثابت × نهاية هذه الدالة

5) نهاية ضرب دالتين

$\lim\limits_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$

فمثلاً: $\lim\limits_{x\to 3}(x+2)(x^2-4) = \lim\limits_{x\to 3}(x+2) \times \lim\limits_{x\to 3}(x^2-4)$

MAGDY MATH 0557581232

6) نهاية قسمة دالتين

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)} \quad \text{حيث} \quad \lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

فمثلاً:

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2+\frac{x+3}{2x-1}\right)=\lim_{x\to 3}x^2+\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)$$

أي أن نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتيهما بشرط ألا تكون نهاية المقسوم عليه تساوي صفر.

7) نهاية دالة مركبة

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^n$$

فمثلاً:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-2)^4=\left[\lim_{x\to 3}(x^2-2)\right]^4$$

8) نهاية دالة اسية

$$\lim_{x\to a}b^{f(x)}=b^{\lim\limits_{x\to a}f(x)}=b^A \quad \text{حيث} \quad b>0$$

فمثلاً:

$$\lim_{x\to 2}3^x=3^{\lim\limits_{x\to 2}x}=3^2$$

9) نهاية دالة لوغاريتمية

$$\lim_{x\to a}[\log_b f(x)]=\log_b\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]=\log_b A$$

حيث $A>0,\ b>0,\ b\neq 1$

فمثلاً:

$$\lim_{x\to 2}[\log_3 x]=\log_3\left[\lim_{x\to 2}x\right]=\log_2 3$$

10) تساوي دالتين

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x) \Longleftrightarrow f(x)=g(x) \quad \text{حيث}$$

فمثلاً:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-3)=\lim_{x\to 3}(x+a) \Longleftrightarrow (x^2-3)=(x+a)$$

MAGDY MATH 0557584999

استعمل قواعد النهايات لإيجاد كل مما يأتي:

إذا كانت $\lim_{x\to 2} g(x) = 4 \, , \lim_{x\to 2} f(x) = 3$

a) $\lim_{x\to 2}\big(f(x) + 5g(x)\big)$

b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\big(f(x)\big)^2}{\ln g(x)}$



استعمل قواعد النهايات لإيجاد كل مما يأتي:

إذا كان $\lim_{x\to 4} g(x) = 27 \, , \lim_{x\to 4} f(x) = 9$

a) $\lim_{x\to 4}[f(x) - g(x)]$

b) $\lim_{x\to 4}[f(x).\, g(x)]$

c) $\lim_{x\to 4}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$

d) $\lim_{x\to 4} \log_3 f(x)$

e) $\lim_{x\to 4} \sqrt{f(x)}$

f) $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{g(x)}$

l) $\lim_{x\to 4} 2$

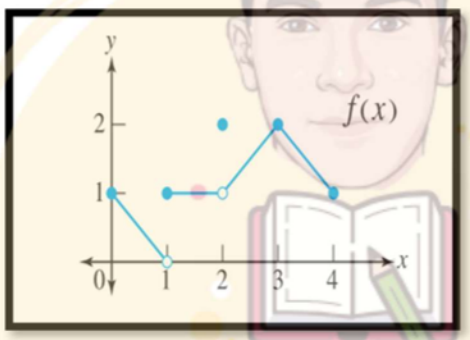
j) $\lim_{x\to 4}[1 + f(x)]^2$

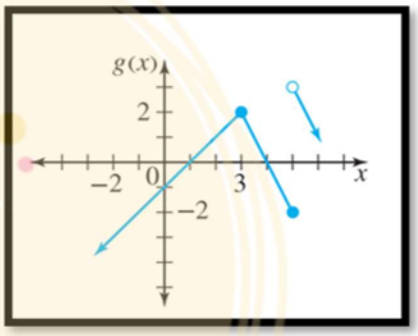
إذا كانت $p(x)=x^2-1$ فاوجد

$$(a)\ \lim_{x\to 0} p(p(p(p(x))))$$

$$(b)\ \lim_{x\to 0} p(3+2p(x-p(x)))$$

استخدم التمثيل البياني لإيجاد كل مما يلي:







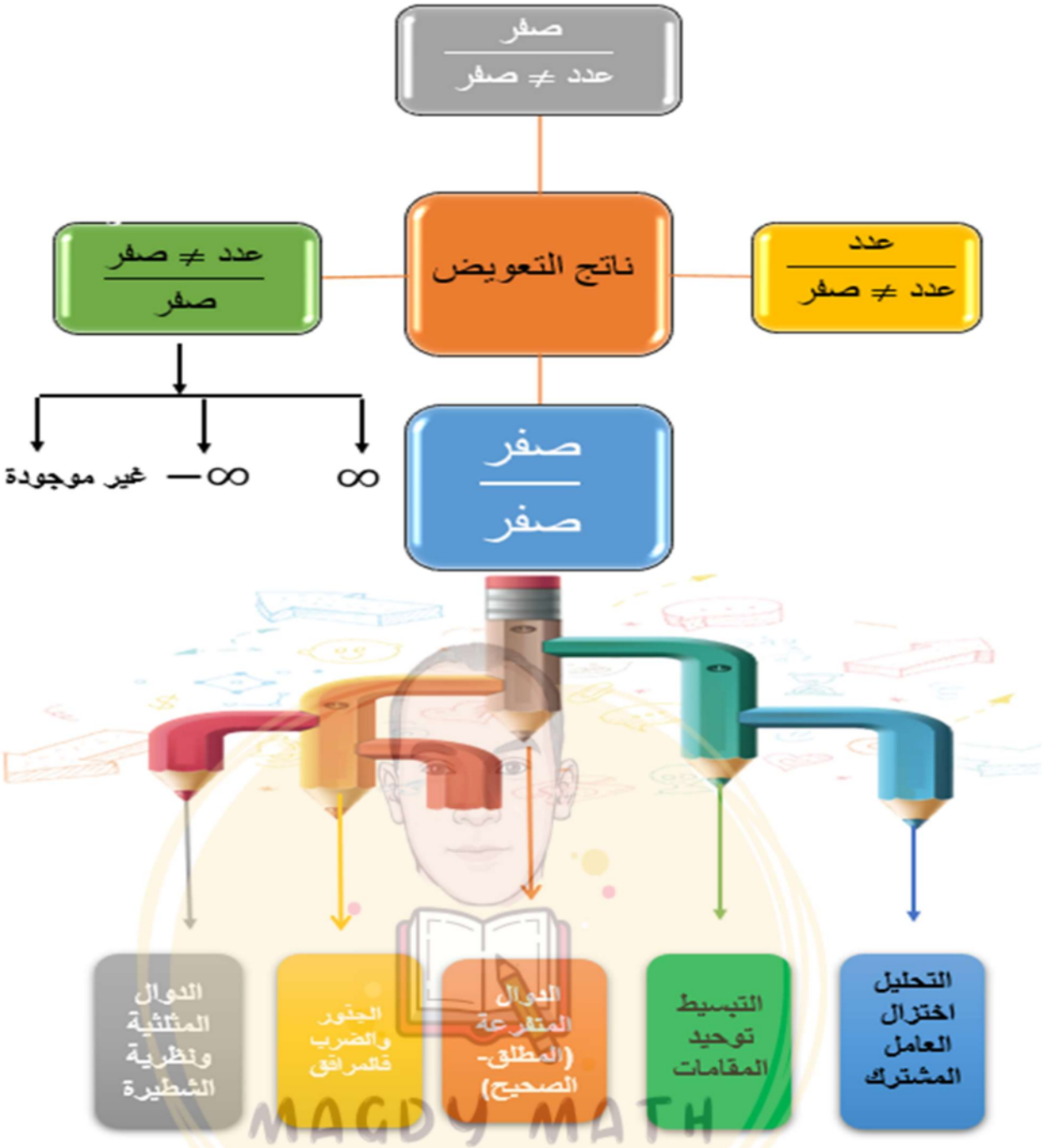
a) $\lim_{x\to 2} \frac{3f(x)+g(x)}{3} =$

MAGDY MATH
0557581232

b) $\lim_{x\to 3} \sqrt{f(x)+g(x)} =$

c) $\lim_{x\to 1} f(x)+g(x) =$

في كل مسائل النهايات تتم خطوة التعويض المباشر ومن خلال ناتج التعويض نحدد



MAGDY MATH
0557581232

1) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-16}{x+2}$

2) $\lim_{x\to -3}\sqrt{x^2-3x+7}$

3) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}$

4) $\lim_{x\to 2}(3a^2)$

5) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x-2}$

6) $\lim_{x\to 2}\log_2(3x+10)$

7) $\lim_{x\to 2}|5-4x|$

8) $\lim_{x\to 3}\sqrt{x-4}$

9) $\lim_{x\to -4}(x+3)^{2033}$

10) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-x^3+1}{x^2+9}$

11) $\lim_{x\to 0} x^2-3x+1$

12) $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{2x+1}$

13) $\lim_{x\to 0} cos^{-1}(x^2)$

14) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-5}{x^2+4}$

أوجد قيمة النهاية التالية:

❑ ناتج التعويض $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

وتكون الإجابة ∞ أو -∞

أو غير موجودة

ندرس إشارة المقام

لتحديد الحل أي منهما

a) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$

c) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x}{2x-6}$

d) $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$

d) $\lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4}$

MAGDY MATH
0557581232

التحليل إلى العوامل (اختزال العامل المشترك)



نذكر أننا نستخدم التحليل أو التبسيط أو المرافق او....عندما يكون $\frac{0}{0}$ ناتج التعويض

ولإيجاد $\lim_{x\to a} f(x)$

نختصر العامل $(x-a)$ وذلك عن طريق التحليل أو القسمة فنحصل على دالة جديدة وتستطيع أن نعوض لنحصل على قيمة النهاية

MAGDY MATH
0557581232

أوجد قيمة كل من النهايات التالية:

- $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$

- $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^3-4x}$

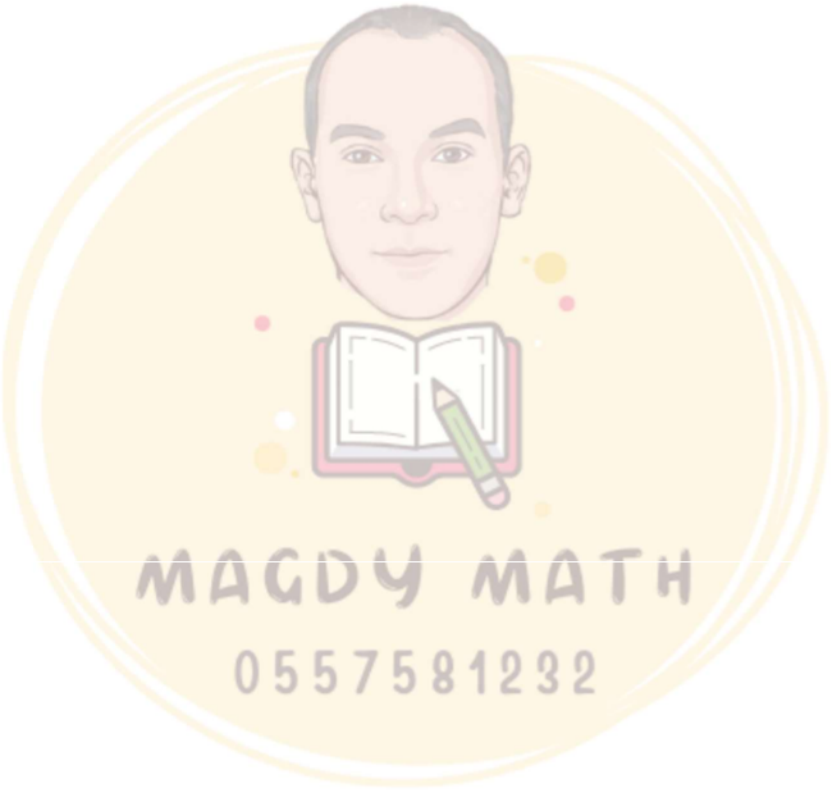
- 1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-5x+6}$

- $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$

- $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}$



- $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-2x+1}}{x^2+x}$

- $\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x-4}$

- $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}$

- $\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h}$

- $\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^2-4}{x^2+x}$

- $\lim_{x\to 9}\frac{x+\sqrt{x}-12}{x-9}$

- $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-2x^3-6x+12}{x^2+x-6}$

MAGDY MATH
0557581232

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2-4)^2}{x-2}$

- $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2-1)^{10}}{(x^2-2x+1)^5}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x^2-x}}$

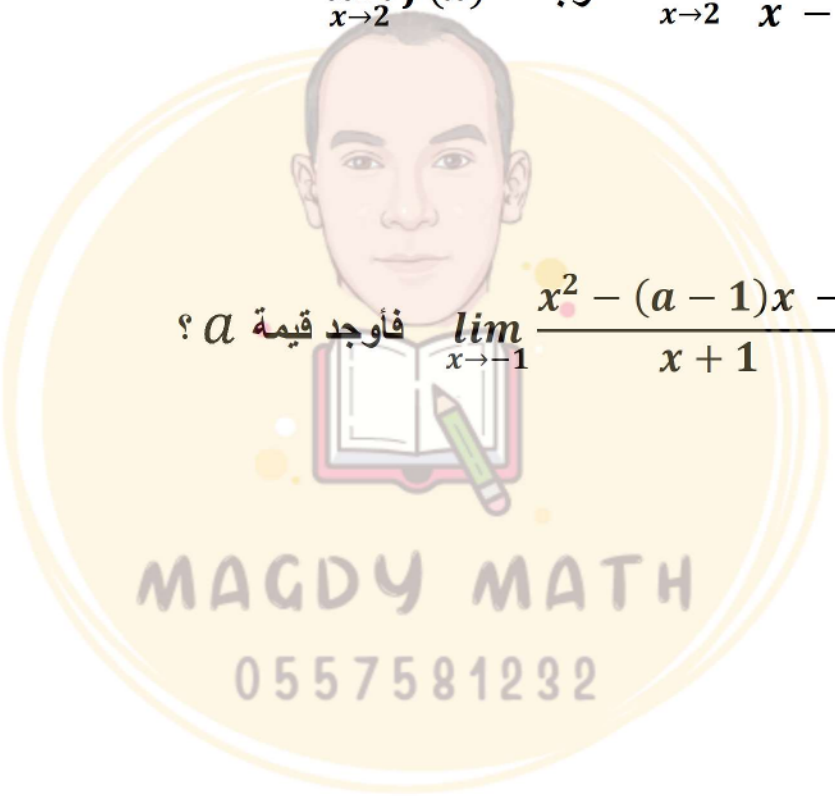
- $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

MAGDY MATH
0557581232

➢ إذا كانت نهاية الدالة موجودة فإن $a = ???$ حيث $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4a}{x-2}$

➢ إذا كانت $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 1$ فأوجد $\lim_{x\to 2} f(x)$

➢ إذا كانت $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - (a-1)x - a}{x+1} = 4$ فأوجد قيمة a ؟



➢ إذا كانت $\lim_{x\to a} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} = 5$ فأوجد قيمة كل من a, b ؟



تذكر أننا نفكر في حساب النهايات بالتبسيط عندما يكون ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$

اوجد قيمة النهايات التالية:

- $\lim\limits_{x\to 6} \frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{2}}{6-x}$

- $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

- $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$

MAGDY MATH
0557581232

- $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+12}{x^2-1}-\frac{x+2}{x-1}\right)$

- $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{4}}{x^2-4}$

- $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{(x+1)^2}-1\right)$

MAGDY MATH
0557581232

- $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{5+x}-\frac{1}{5-x}\right)$

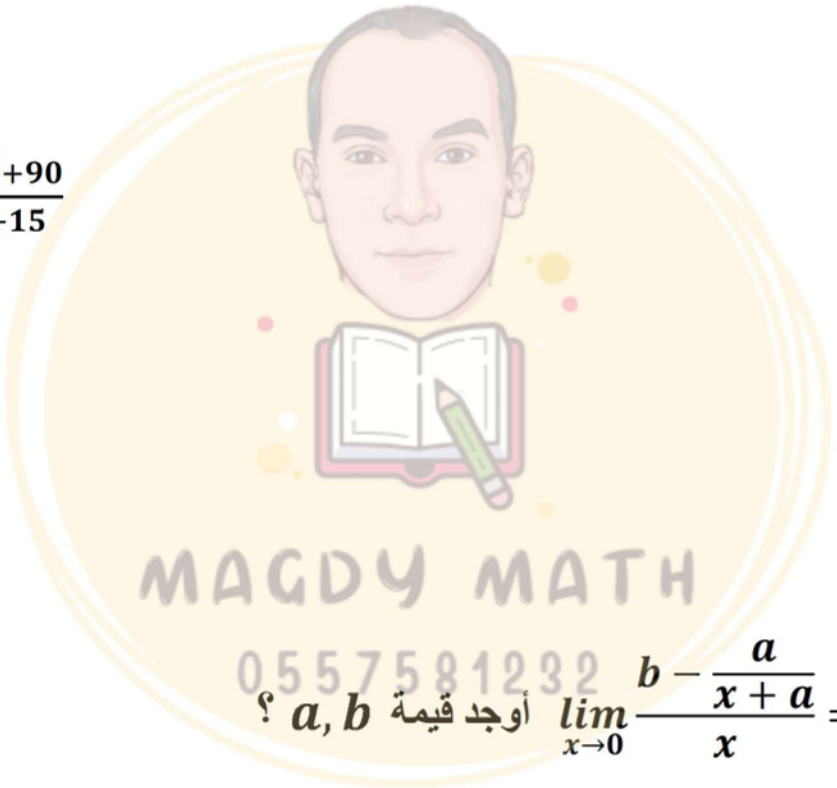
- $\lim_{x\to 1} \frac{x-\frac{1}{x}}{x-1}$

- $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$

MAGDY MATH
0557581232

- $\lim_{x\to 3} \left(\frac{x^2+27}{x^2-9} - \frac{x+3}{x-3}\right)$

- $\lim_{x\to 0} \frac{160x^{-0.04}+90}{4x^{-0.04}+15}$



➢ إذا كانت $\lim_{x\to 0} \frac{b-\frac{a}{x+a}}{x} = 1$ أوجد قيمة a, b ؟

اوجد قيمة النهايات التالية:



1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}$

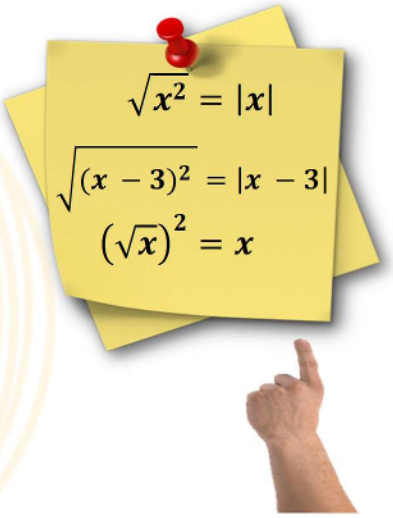
2) $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$



4) $\lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{x^2-9} =$

5) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$



6) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{3x-6}$

7) $\lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{12-4x}$

8) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}$

MAGDY MATH
0557581232

إذا كان

المقدار الجبري	المرافق	حاصل الضرب
$x-a$	$x+a$	x^2-a^2
$\sqrt{x}+a$	$\sqrt{x}-a$	$x-a^2$
$\sqrt{x-b}-a$	$\sqrt{x-b}+a$	$x-b-a^2$

أوجد قيمة كل من النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$

MAGDY MATH
0557581232

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$

- $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

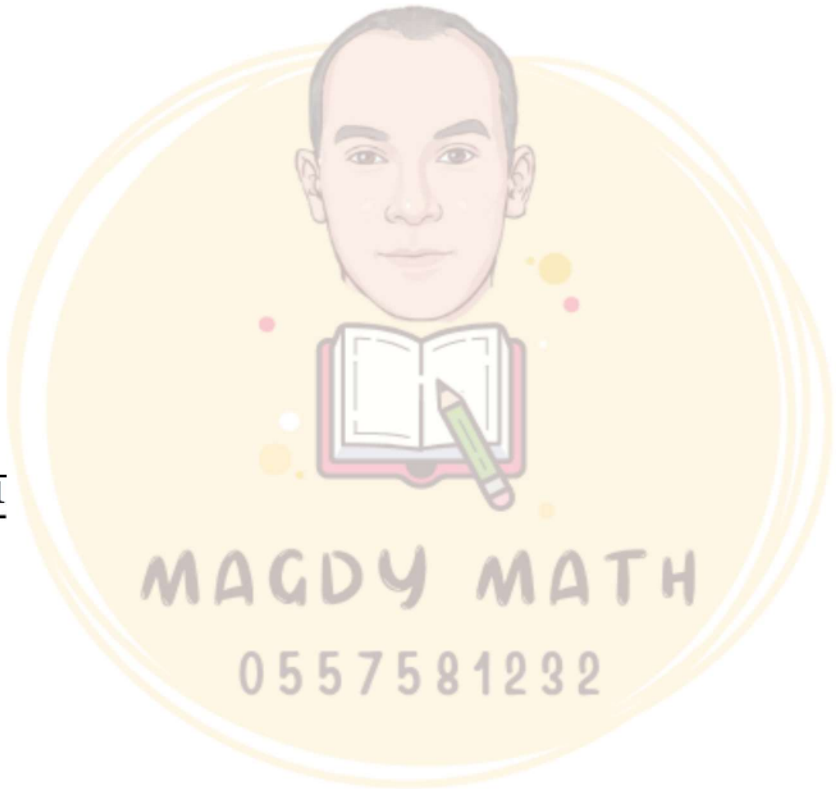
- $\boldsymbol{\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}}$

- $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x+\sqrt{2x^2-9}}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1}{x}$

$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x+3}-\sqrt{4x+1}}{x-2}$



- $\lim_{x\to 4} \frac{x\sqrt{x}-8}{x-4}$

- $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

تذكر:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

المقدار الجبري	المرافق التكعيبي	ناتج الضرب
$\sqrt[3]{x} - 2$	$(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4$	$x - 8$
$\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+6}$	$(\sqrt[3]{x-1})^2 + (\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+6})^2 + (\sqrt[3]{x+6})^2$	$x - 1 - (x+6)$

اوجد قيمة النهايات التالية:



MAGDY MATH
0557581232

$a)\ \lim_{x\to -2} \frac{x+\sqrt[3]{x+10}}{x+2}$

$b)\ \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x-7}$

➢ إذا كانت $f(x) = \sqrt{6 - 2x}$ أوجد قيمة a التي تجعل $\lim_{x\to a} f(x)$ غير موجودة

➢ إذا كانت $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x-a}-1}{\sqrt{x}-3}$ فأوجد قيمة a وقيمة النهاية؟

➢ إذا كانت $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a-2x}-\sqrt{a}}{x} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ فأوجد قيمة a ؟

➢ إذا كانت $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-3}{x}=2$ فأوجد قيمة $a\,,b$ ؟

➢ إذا كانت $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{1}{6}$ فأوجد قيمة a وقيمة النهاية؟

➢ إذا كانت $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x+a}{x-3}=4b$ فأوجد قيمة a ؟

➢ إذا كانت $\lim_{x\to 2}\frac{ax^2+bx+4}{x-2}=6$ فأوجد قيمة $a\,,b$ ؟

MAGDY MATH
0557581232

تكون النهاية موجودة إذا وفقط اذا كانت
النهاتيين أحاديتي الطرف موجودتين ومتساويتين

أي أن:

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ **للعدد** L **إذا وفقط** $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$

ملاحظات

1) **عند إيجاد** $\lim_{x\to a} f(x)$ **ليس من الضروري أن تكون الدالة معرفة عند** $x = a$ **فقط يجب أن تكون معرفة في فترة على يسار** a **وفترة أخرى على يمين** a

2) **عند إيجاد** $\lim_{x\to a} f(x)$ **يراعي بحث كل من النهاية اليمنى والنهاية اليسرى ثم المقارنة بين النهاتين (إن وجدتا)**

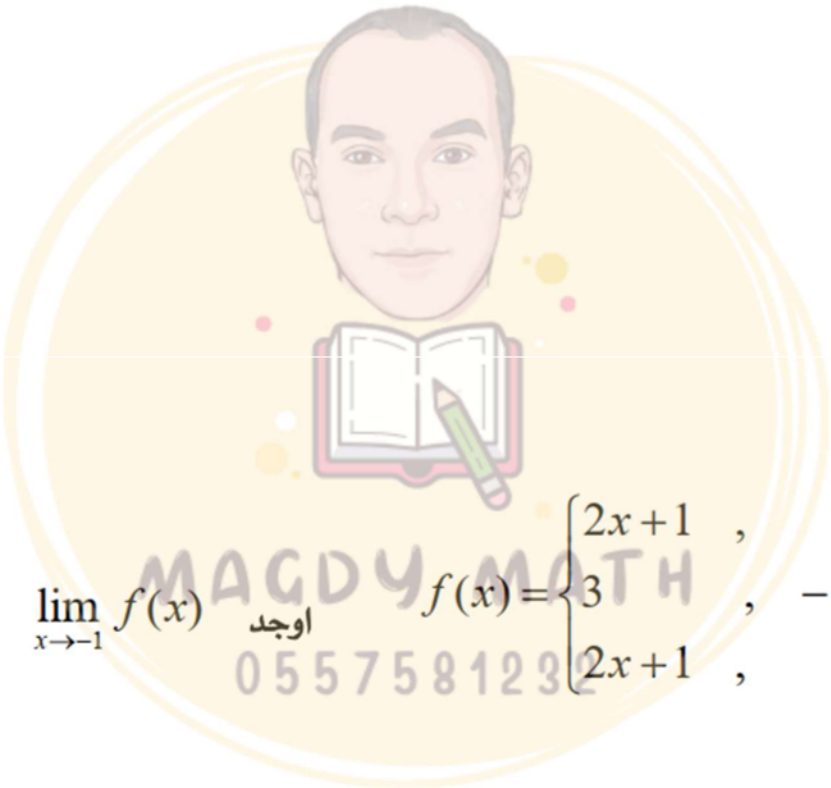
*إذا كان $f(a^+) = f(a^-) = L$ فإن $\lim_{x\to a} f(x) = L$

*إذا كان $f(a^+) \neq f(a^-)$ فإن غير موجودة $\lim_{x\to a} f(x)$

اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x < 2 \\ x^2 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$ **اوجد** $\lim_{x\to 2} f(x)$

MAGDY MATH
0557581232

اذا كانت $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \quad x<-1 \\ 3x+1 & , \quad x\geq -1 \end{cases}$ اوجد $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$



اذا كانت $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & , \quad x<-1 \\ 3 & , \quad -1<x<1 \\ 2x+1 & , \quad x>1 \end{cases}$ اوجد $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

MAGDY MATH
0557581232

اذا كانت $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & , \quad x<-1 \\ 3 & , \quad -1<x<1 \\ 2x+1 & , \quad x>1 \end{cases}$ اوجد $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

إذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x+2 & ,x<2\\ 5 & ,x=2\\ x+4 & ,x>2\end{cases}$

فأوجد

- $\lim_{x\to 0} f(x)$
- $\lim_{x\to 6} f(x)$
- $\lim_{x\to 2} f(x)$
- $f(2)$

إذا كانت $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+27}{x+3} & ,x\neq -3\\ 9 & ,x=3\end{cases}$ فأوجد $\lim_{x\to -3} f(x)$

MAGDY MATH
0557581232

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & x<a \\ h(x) & x>a \end{cases}$$ اذا كانت $h(x)\,,g(x)$ كثيرات حدود وكانت

اوجد

(i) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

(ii) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

إذا كانت $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} & ,x\neq 2 \\ 9 & ,x=2 \end{cases}$ أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

MAGDY MATH
0557581232

إذا كانت $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-7x+12}{x-3}, & x>3 \\ 2x-7 , & x<3 \end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{x-3}{x-\sqrt{x+6}}$

أوجد

- $\lim\limits_{x\to 3}\big(f(x)+g(x)\big)$

نهايات تحتوى مطلق

خواص القيمة المطلقة: لأي عددين حقيقيين a ، b يكون

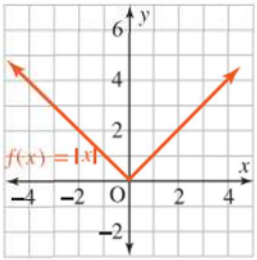
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|a + b| \neq |a| + |b|$ وعموماً $|a + b| \leq |a| + |b|$
- إذا كانت $|x| \leq a$ فإن $-a \leq x \leq a$
- إذا كانت $|x| \geq a$ فإن $x \geq a$ أو $x \leq -a$

- $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$
- $|a - x| = |x - a|$

إعادة تعريف دالة القيمة المطلقة

تُعتبر دوال القيمة المطلقة مثالًا جيدًا على الدوال المتعددة التعريف.

نعطي مثالًا على ذلك الدالة $f(x) = |x|$.



انظر إلى التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$.

يتألف التمثيل البياني من جزأين يلتقيان عند الرأس.

كل من الجزأين هو جزء من مستقيم.

نكتب قاعدة كل جزء من الدالة كما يلي:

عندما $x \geq 0$ ، فإن القاعدة تكون $f(x) = x$.

عندما $x < 0$ ، فإن القاعدة تكون $f(x) = -x$.

اوجد قيمة النهايات التالية :

- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$

- $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2-2x}{|x-2|}$

- $\lim\limits_{x \to 4} \frac{|x-3|-1}{x^2-16}$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$

$(\sqrt{x})^2 = x$

MAGDY MATH
0557581232

- $\lim\limits_{x\to 4}\frac{|x-3|-1}{x^2-16}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x-3|-|2x-3|}{x}$

- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x^2-1|+5}{x^2+3}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}-\frac{x}{|x|}$

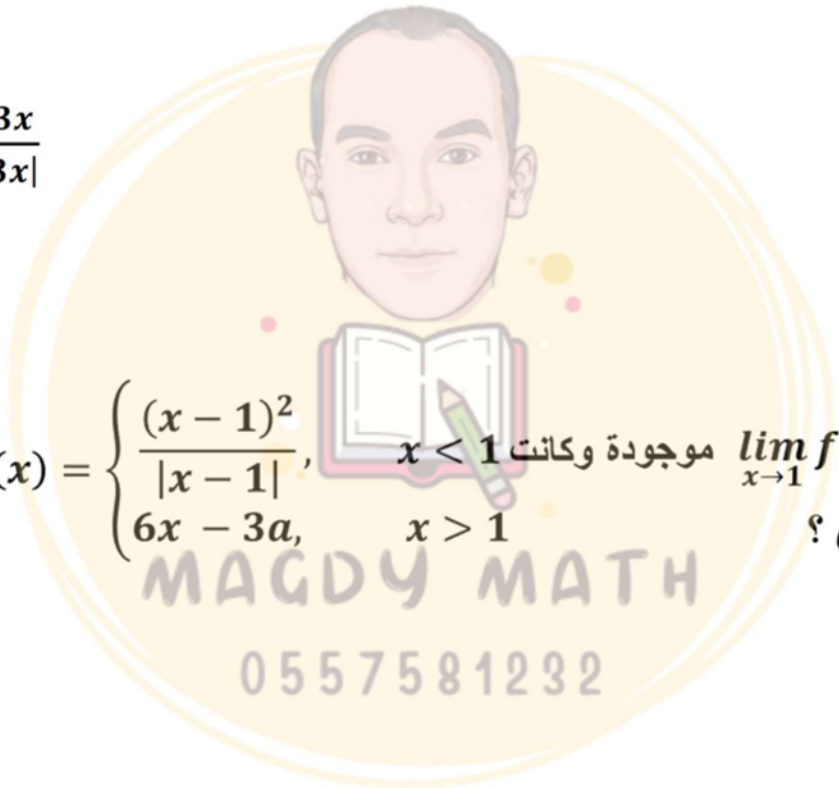
- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^3-8}$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2}}$

MAGDY MATH
0557581232

- $\lim\limits_{x\to 3} \frac{|x-3|}{|x^2-9|}$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|-3x}{2x-|3x|}$



➢ إذا كانت $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ موجودة وكانت $f(x)=\begin{cases}\frac{(x-1)^2}{|x-1|}, & x<1\\ 6x-3a, & x>1\end{cases}$

أوجد قيمة a ؟

➢ إذا كانت $f(x)=\begin{cases}x|x|+2, & x<0\\ \frac{|x|}{x}+1, & x>0\end{cases}$

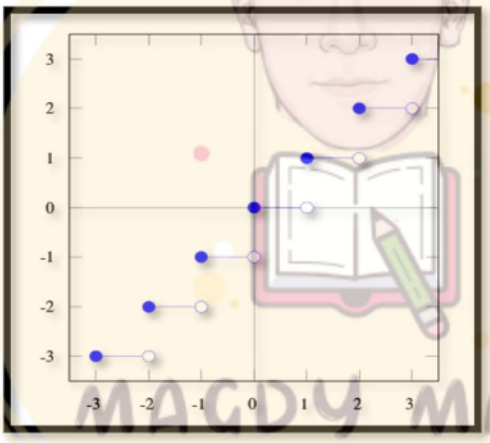
أوجد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

نهايات تحتوي على دالة الصحيح

دالة الصحيح: من الدوال المتعددة التعريف

وتشبه التمثيل البياني لهذه الدالة درجات السلم, ولذلك تسمة الدالة الدرجية

وهي تربط كل مدخلة في فترة بنفس قيمة المخرجة



$[3] = 3$

$[3.9] = 3$

$[-3.9] = -4$

من خواص دالة الصحيح:

$[x + n] = [x] + n$ حيث n عدد صحيح

$[x + 3] = [x] + 3$

$f(x) = [x]$ ليس لها نهاية عند أي عدد صحيح

MAGDY MATH 0557581232

أوجد كلا من النهايات التالية:

- $\lim_{x\to 2}[x+5\,] =$
- $\lim_{x\to 1.5}[x+57]$
- $\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}$
- $\lim_{x\to 3^+}\frac{[x]-x}{x^2-9}$
- $\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]-1}{1-x}$
- $\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]-2}{x^2-4}$
- $\lim_{x\to 5} x^2[\frac{x}{2}]$

عند التعويض داخل دالة الصحيح ونتج عدد صحيح النهاية غير موجودة ونتأكد بدراسة النهاية من اليمين واليسار

عند التعويض داخل دالة الصحيح نتج عدد غيرصحيح لذلك لم نبحث النهاية من الطرفين.

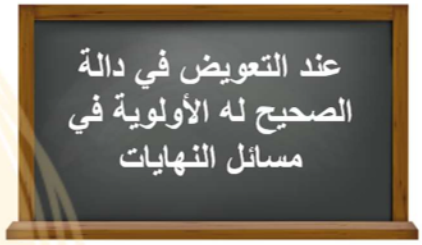
- $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[2x+1]$

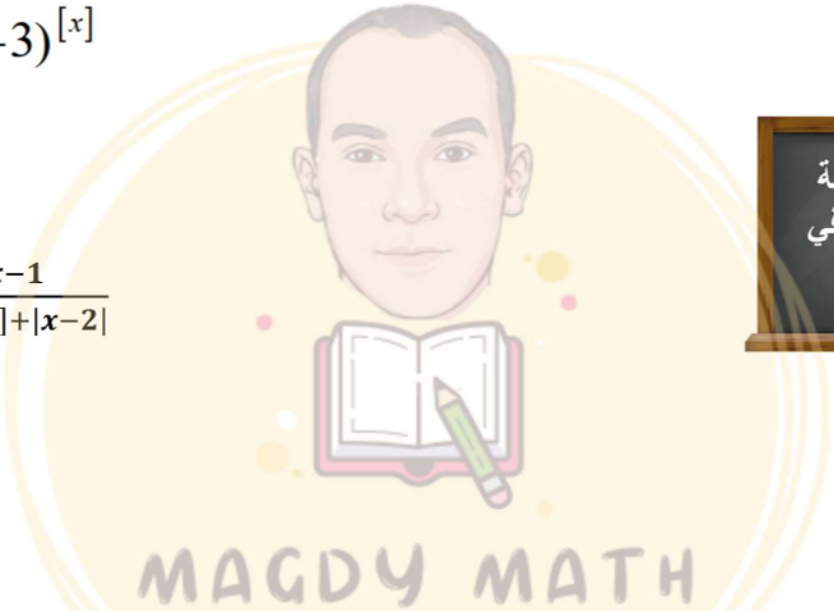
- $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\left[\frac{2}{3}x+4\right]+x}{|x|-2}$

$$\lim_{x\to2}(x+3)^{[x]}$$

$$\lim_{x\to0^-}([x]+3)^{[x]}$$

- $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x-1}{[x-2]+|x-2|}$





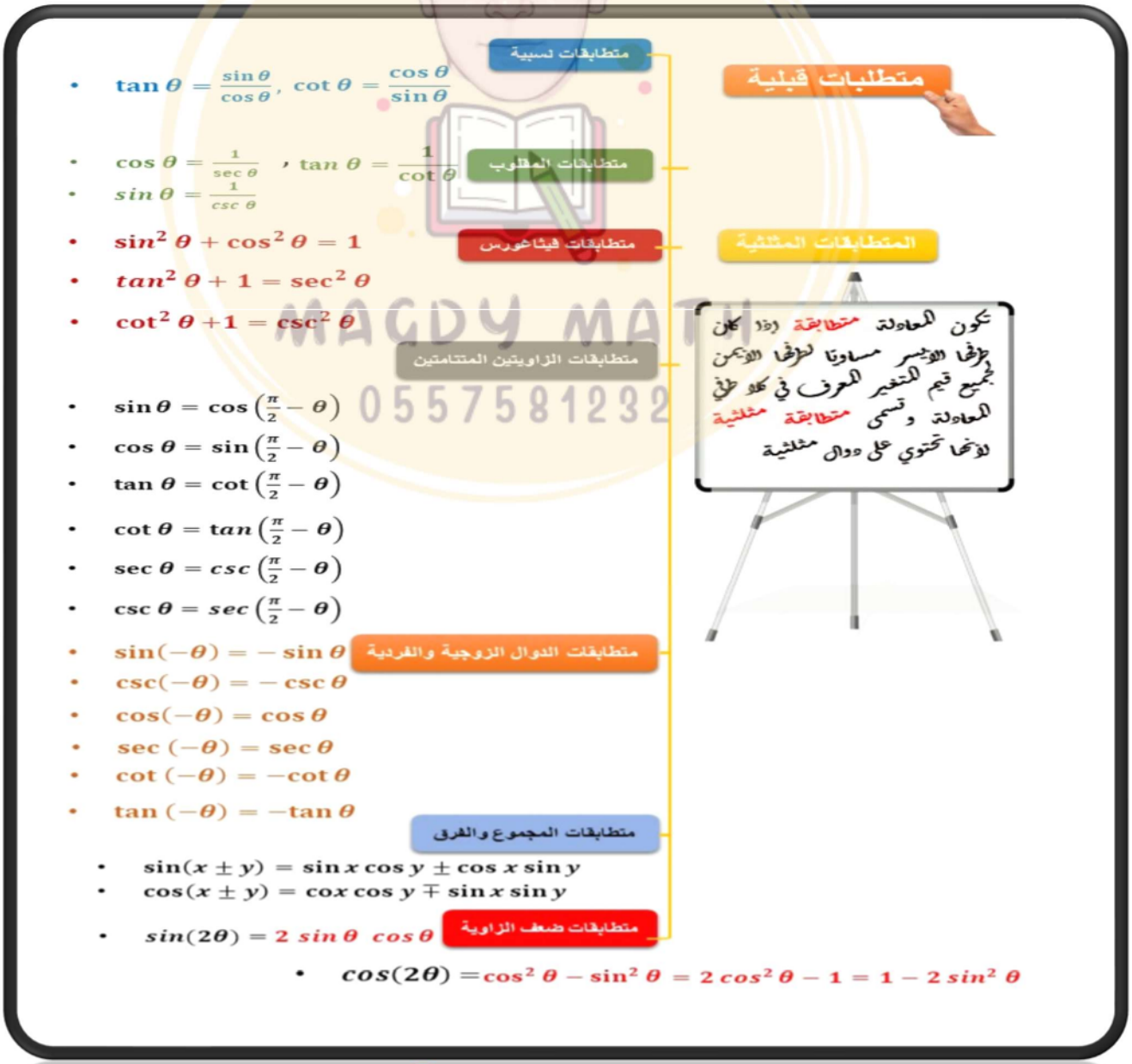
➢ إذا كانت $f(x)=\begin{cases}[6-x], & x\geq2\\ |x-2|, & x<2\end{cases}$ أوجد $\lim\limits_{x\to2}f(x)$

من خلال دراسة الدوال المثلثية وتمثيلاتها يمكننا تقدير ومعرفة نهايتها عند نقطة محددة كما هو الحال بالنسبة للدوال كثيرات الحدود فإن النهايات المثلثية الأساسية يمكن الحصول عليها جبريًا من خلال التعويض بقيمة النقطة التي تريد دراسة النهاية عندها

- $\lim_{x\to C} \sin x = \sin C$
- $\lim_{x\to C} \cos x = \cos C$
- $\lim_{x\to C} \tan x = \tan C$

أوجد قيمة النهايات التالية:

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \tan x}{\cos^2 x}$
- $\lim_{x\to 0} x \sec x$
- $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - 4\cos x}{5\sin x + \cos x}$



MAGDY MATH 0557581232

أوجد قيمة النهايات التالية:



- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan}{x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin 2x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 2x}{3x^2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{2x-3\sin x}{3x+\tan x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2 \cos x^2}{5x^2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\sin 3x}}{\sqrt[3]{x}}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\tan^2 3x}{4x^2-\sin 2x^2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin|x|}{x}$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

MAGDY MATH
0557581232

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} 2x}{\sin^{-1} 3x}$

- $\lim_{x\to 0} 3x \cot 3$

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x \cos x}{\sqrt{x+1}-1}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{3\cos x - x^3 \cot x}{x \cot x}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{3x}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{4+5x}{\cos 3x}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{x+\tan x}{2x+\sin x}$

MAGDY MATH
0557581232

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x|x|}{\tan^2 5x}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x\tan^2 8}}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}$

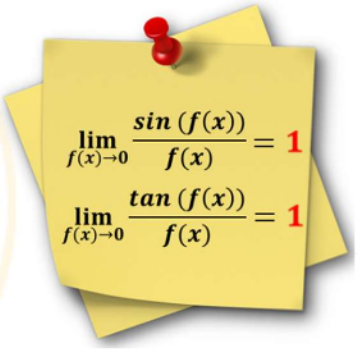
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)}{2x}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{\sqrt{x}-1}$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$$

- $\lim\limits_{x\to 0} 6x^2 \csc 2x \cot x$



MAGDY MATH
0557581232

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{sec^2 x-1}}{x}$

مسا ئل على ايجاد قيم الثوابت

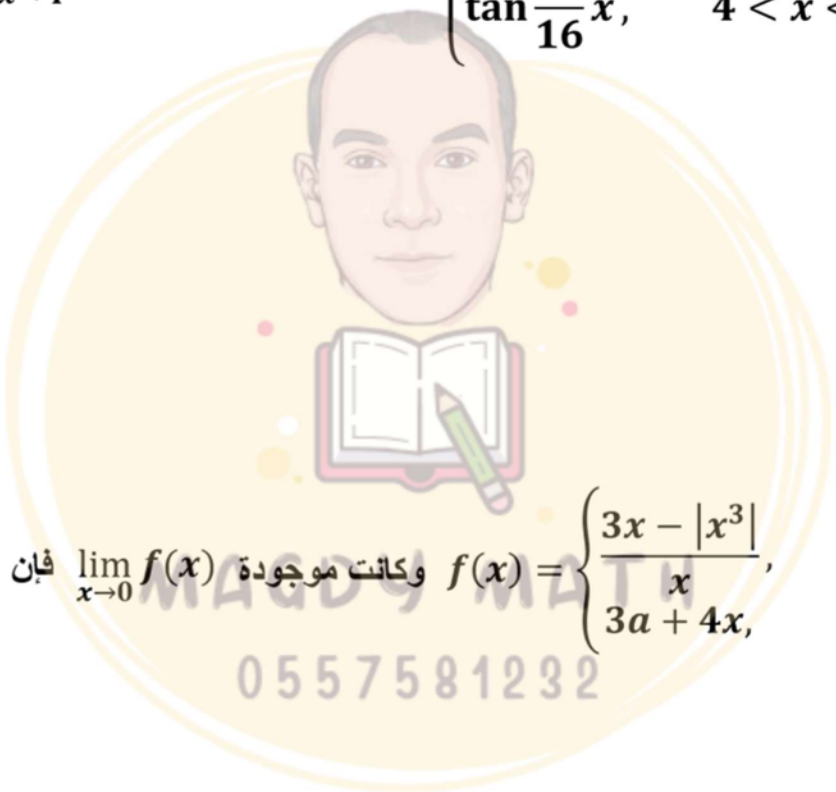
➢ إذا كانت $f(x)=\begin{cases}\tan 4x\cot 9x, & -\frac{\pi}{9}<x<0\\ \frac{1}{9}(a^2+2), & x>0\end{cases}$ لها نهاية عند $x=0$ أوجد قيمة a

➢ إذا كانت $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x+1|-2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin kx}$ فأوجد قيمة k؟

➢ إذا كانت $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$ حيث $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{2x}{x}, & x>0\\ a\cos 2x, & x>0\end{cases}$ فأوجد قيمة a؟

MAGDY MATH 0557581232

➢ إذا كانت $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-4)}{x-4}, & x<4\\ \tan\dfrac{\pi}{16}x, & 4<x<8\end{cases}$ فأوجد $\lim\limits_{x\to4} f(x)$

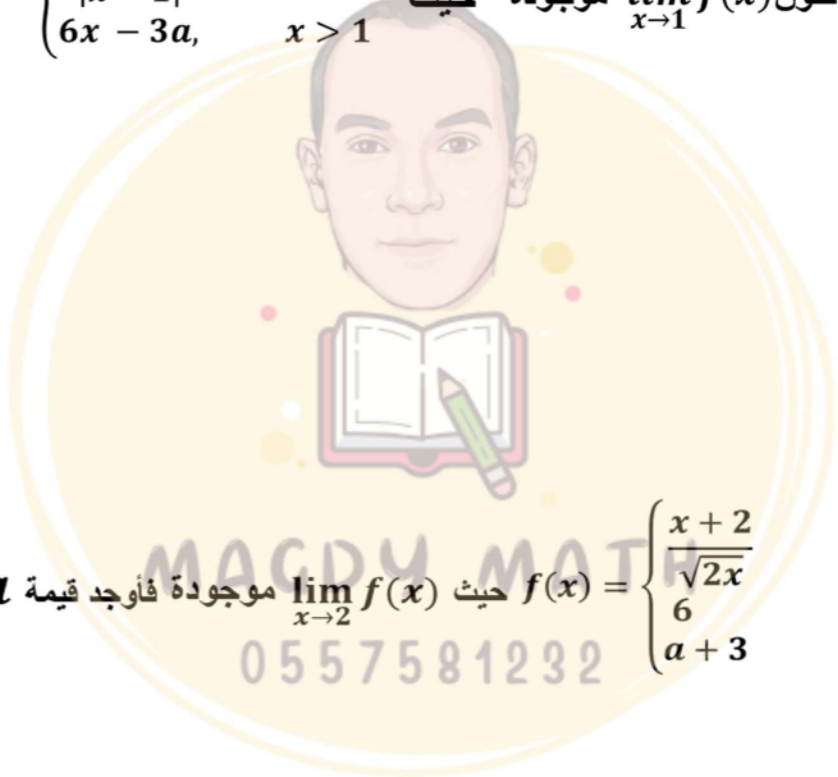


➢ إذا كانت $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-|x^3|}{x}, & x<0\\ 3a+4x, & x>0\end{cases}$ وكانت موجودة $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ فإن a؟

MAGDY MATH
0557581232

➢ إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}=\lim\limits_{x\to-2}(|x|+8)$ فإن $a=??$

➢ أوجد قيمة a حتى تكون $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة حيث $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}, & x<1\\ 6x-3a, & x>1\end{cases}$



➢ إذا كانت $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{\sqrt{2x}} & ,x<2\\ 6 & ,x=2\\ a+3 & ,x>2\end{cases}$ حيث $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجودة فأوجد قيمة a؟

MAGDY MATH
0557581232

➢ إذا كانت $\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{x}=\lim_{x\to a} 16^x$ فإن $a=??$

نظرية الإحاطة (الشطيرة)

اذا كانت الدوال $h(x), g(x), f(x)$ لها نهايات عندما تؤول إلى a وكان $f(x) \le g(x) \le h(x)$

فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x) \le \lim\limits_{x\to a} h(x)$

وإذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$

فإن $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

بإستخدام نظرية الشطيرة اوجد كل مما يلي :

تذكر ان:

$-1 \le \sin x \le 1$

$-1 \le \cos x \le 1$

$-\infty \le \tan x \le \infty$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x}$$

اذا كانت : $|f(x)| \le M$ حيث M عدد حقيقي موجب فبين ان : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$

MAGDY MATH
0557581232

هل يمكن استخدام نظرية الشطيرة لايجاد $\lim_{x\to 0} x^2 \sec\frac{1}{x}$

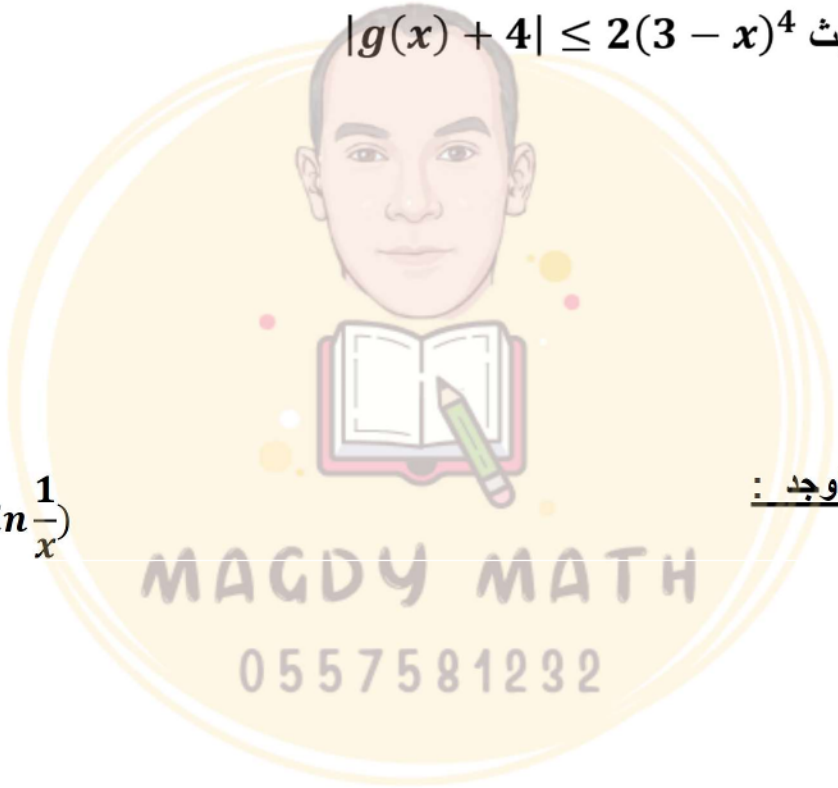


اثبت ان $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cos\frac{1}{x} = 0$ باستخدام نظرية الشطيرة

اوجد $\lim_{x\to 0} f(x)$ حيث $\frac{\sin x}{\tan 2x} \le f(x) \le \frac{x^2+x}{2x}$

اثبت ان $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2+1}=0$ باستخدام نظرية الشطيرة

أوجد $\lim_{x\to 3} g(x)$ حيث $|g(x)+4|\le 2(3-x)^4$



<u>بإستخدام نظرية الشطيرة اوجد :</u>

$\lim_{x\to 0}(4-x^2 sin\frac{1}{x})$

إذا كانت $\sin(x)+x\le f(x)\le (x^2+2x)$ حيث $x\neq 0$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ فأوجد $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

تدريبات من الإختبارات السابقة

2024-2023

اذا كانت : $|f(x)| \le M$ حيث M عدد حقيقي موجب فبين ان : $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$

2024-2023

اوجد قيمة $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-27}{x^2-9}$

$a)\ \frac{3}{4}$ $b)\ \frac{9}{2}$ $c)\ \frac{1}{4}$ $d)\ 3$

2023-2022

اوجد قيمة $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+2x-3}$

$a)\ \frac{3}{4}$ $b)\ \frac{1}{2}$ $c)\ \frac{1}{4}$ $d)\ 0$

2023-2022

اوجد قيمة $\lim_{x\to 0} sin\left(e^{\frac{-1}{x^2}}\right)$ إن وجدت

$a)\ -1$ $b)\ 1$ $c)$ غير موجودة $d)\ 0$

2023-2022

اوجد قيمة $\lim_{x\to 1} \frac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}$

$a)\ \frac{3}{2}$ $b)\ \frac{2}{3}$ $c)\ 2$ $d)\ 0$

2023-2022

اوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{sin\, x - x}{x^3}$

$a)\ \frac{-1}{6}$ $b)\ 6$ $c)\ \infty$ $d)\ 0$

2023-2022

إذا كانت النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{sin\, x}{x} = 1$ اوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{2x^2}$

$a)\ \frac{1}{2}$ $b)\ \frac{-1}{2}$ $c)\ 2$ $d)\ 1$

2023-2022

اوجد قيمة $\lim_{x\to 0} x^2 \csc^2 x$ إن وجدت

$a)\ 0$ $b)\ 1$ $c)$ غير موجودة $d)\ 2$

MAGDY MATH 0557581232

2022-2021

إذا كانت النهاية $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

فأوجد قيمة $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

$a)\ 2$ $b)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$ $c)\ \frac{1}{2}$ $d)\ \sqrt{2}$

2022-2021

أوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{1-e^{x}}$

$a)\ \frac{-1}{2}$ $b)\ -2$ $c)\ \frac{1}{2}$ $d)\ 2$

2022-2021

أوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$

$a)\ -6$ $b)\ \frac{-1}{6}$ $c)\ \frac{-1}{12}$ $d)\ -12$

2022-2021

أوجد قيمة $\lim_{x\to -1^+} \frac{|x+1|}{x^2-1}$

$a)\ \frac{-1}{2}$ $b)\ -1$ $c)\ \frac{1}{2}$ $d)\ 1$

2022-2021

أوجد قيمة $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} e^{\tan x}$

$a)\ 0$ $b)\ 1$ $c)\ \infty$ $d)\ -\infty$

2021-2020

اوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}$

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2}$ $c)\ 2$ $d)$ غير موجودة

2021-2020

اوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}}{x}\right)$ إن وجدت

$a)\ \frac{-1}{4}$ $b)\ \frac{1}{4}$ $c)\ 0$ $d)$ غير موجودة

2021-2020

اذا كانت $|g(x)-4| \le 2(2-x)$ صحيحة

لجميع قيم $\lim_{x\to 2} g(x)$

$a)\ -4$ $b)\ 0$ $c)\ 2$ $d)4$

2020-2019

اوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}$ إن وجدت

$a)\ 2$ $b)\ 1$ $c)\ 0$ $d)$ غير موجودة

MAGDY MATH 01557581222

2020-2019

اوجد قيمة $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$ إن وجدت

$a)\ \frac{1}{2}$ $b)\ \frac{1}{4}$ $c)\ 2$ $d)$ غير موجودة

2020-2019

اوجد قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{2x-|x|}{|3x|-2x}$ إن وجدت

2019-2018

اوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}$

2019-2018

اوجد قيمة النهاية $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}$ إن وجدت

$a)\ 8$ $b)\ 12$ $c)\ 4$ $d)$ غير موجودة

2019-2018

اوجد قيمة $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{|x-2|}$ إن وجدت

$a)\ 0$ $b)\ -1$ $c)\ -2$ $d)$ غير موجودة

2019-2018

اوجد قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{x}{3-\sqrt{x+9}}$ إن وجدت

$a)\ -6$ $b)\ 0$ $c)\ \frac{1}{3}$ $d)$ غير موجودة

2018-2017

اوجد $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos^2 x-1}$

$a)\ 1$ $b)\ 0$ $c)\ \infty$ $d)\ -1$

2018-2017

اوجد $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{10-x}-3}$

MAGDY MATH 0557581232

الاتصال ونتائجه

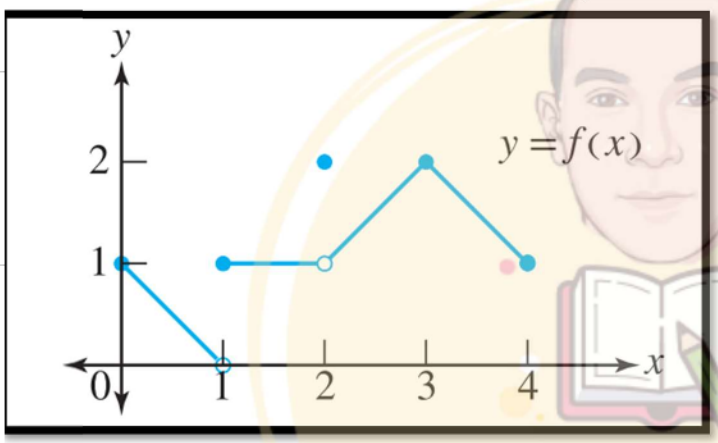
الدوال المتصلة هي "الدوال التي تتغير قيمها بتغير قيم من مدخلاتها، لكن هذا التغير لا يتم بالقفز من قيمة إلى أخرى ، بل عبر المرور بكل القيم الواقعة بين هاتين القيميتين"

من الناحية الهندسية نقول إن دالة **متصلة** في فترة ما إذا أمكن أن نرسم منحنى الدالة في هذه الفترة دون أن نرفع سن القلم من الورقة، أي يكون منحنى الدالة في هذه الحالة خاليًا من الثغرات أو القفزات، أما المنحنيات التي بها ثغرات أو قفزات تكون لدوال غير متصلة (**منفصلة**)

وسندرس في الاتصال:
- اتصال الدالة عند نقطة
- اتصال الدالة على فترة

أولًا: اتصال دالة عند نقطة

من أجل فهم دقيق لمفهوم الاتصال عند نقطة من خلال التمثيل البياني



نلاحظ: عند $x = 1$

- $\lim_{x \to 1} f(x)$
- $f(1)$

عند $x = 2$

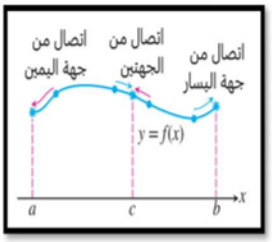
- $\lim_{x \to 2} f(x) =$
- $f(2)$

عند $x = 3$

- $\lim_{x \to 3} f(x) =$
- $f(3) =$

MAGDY MATH
0557581232

نقطة طرفية: تكون الدالة متصلة عند a لها نهاية من جهة اليمين أو نقطة طرفية b لها نهاية من جهة اليسار إذا كان



- $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
- $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

وعليه يمكن استنتاج تعريف اتصال دالة عند نقطة (داخلية) تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ إذا تحققت الشروط التالية

1) $f(c)$ معرفة
2) $\lim_{x\to C} f(x)$ موجودة
3) $\lim_{x\to C} f(x) = f(C)$

يكفي عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة للحكم على عدم اتصال الدالة عند $x = c$

- ابحث اتصال الدالة عند $x = 1$ حيث $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ 3-x, & x < 1 \end{cases}$

- ابحث اتصال الدالة عند $x = 3$ $f(x) = \begin{cases} 5x-6, & x \geq 3 \\ 3x+4, & x < 2 \end{cases}$

- ابحث اتصال الدالة عند $x = 2$ $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x > 2 \\ 5x-3, & x < 2 \end{cases}$

MAGDY MATH
0557581232

- ابحث اتصال الدالة عند $x = 1$ $f(x) = |x - 1| + 2$

- ابحث اتصال الدالة عند $x = 4$ حيث $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x - 4}{x - 4}$

MAGDY MATH
0557581232

- إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & x \leq 2 \\ |x - 3| & , \quad x > 2 \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة عند $x = 2$

- ابحث اتصال الدالة عند $x = 2$ حيث $f(x) = \sqrt{x + 2}$

بين ان كل دالة من الدوال التالية غير متصلة عند النقطة المشار اليها (اذكر السبب)

$$f(x)=\frac{x}{x-1} \quad , x=1$$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \quad , x=1$$

$$f(x)=\sin\frac{1}{x} \quad , x=0$$

$$f(x)=\frac{e^{x-1}}{e^x-1} \quad , x=0$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x<2 \\ 3 & , \quad x=2 \\ 3x-2 & , \quad x>2 \end{cases} \quad , x=2$$

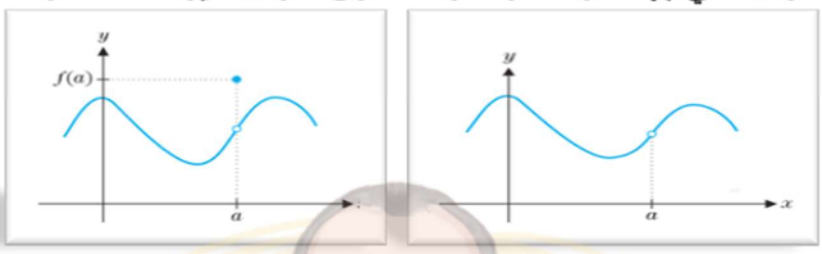
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x<2 \\ 3x-2 & , \quad x>2 \end{cases} \quad , x=2$$

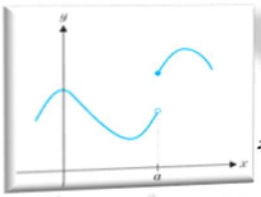
MAGDY MATH
0557581232

أنواع النقاط عدم الاتصال (نقاط الانفصال)

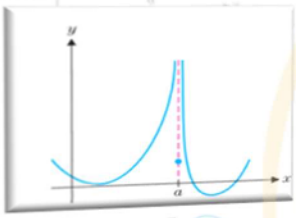
- سبق وذكر أن الدوال التي بها ثغرات أو قفزات تكون لدوال غير متصلة أو منفصلة

1) الفجوة (قابلة للإزالة)

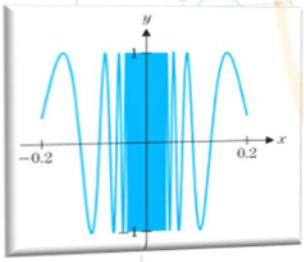




2) القفزة (غير قابلة للإزالة) وفيها تكون النهاية غير موجودة. عدد حقيقي $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)$



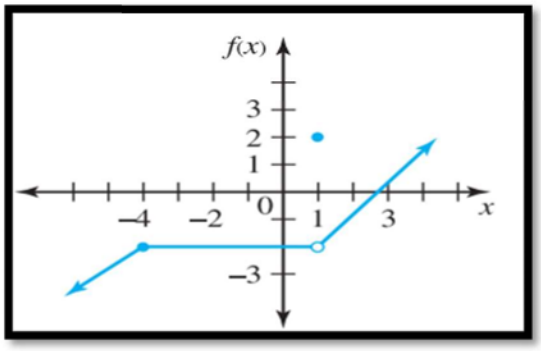
3) لا نهائي (غير قابلة للإزالة): النهاية غير موجودة أو $\pm\infty$ إحدى النهايتين تساوي $\pm\infty$ أو كلاهما.

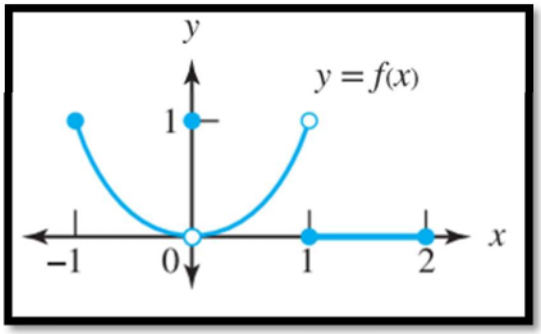


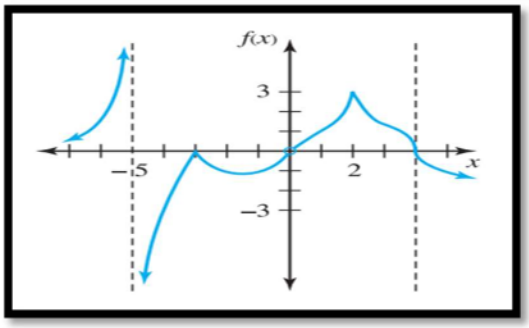
4) التذبذبي (غير قابلة للإزالة): النهاية غير موجودة والدالة تتذبذب عند نقطة الانفصال.

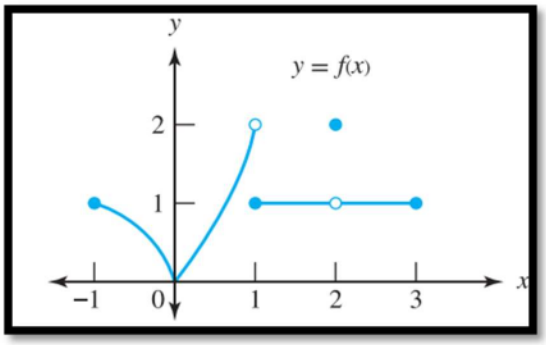
MAGDY MATH
0557581232

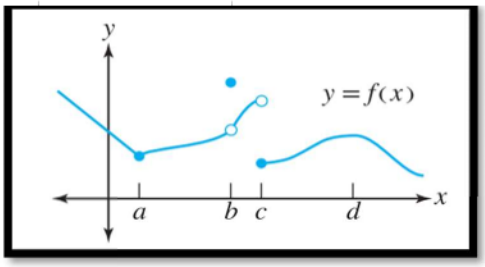
حدد نقاط الانفصال ونوعها في كل من التمثيلات البيانية التالية:

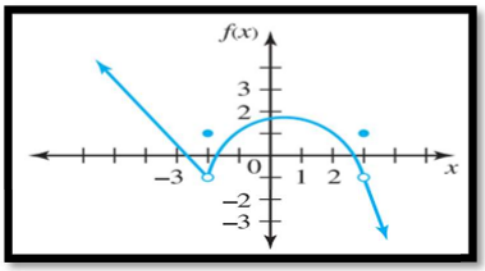


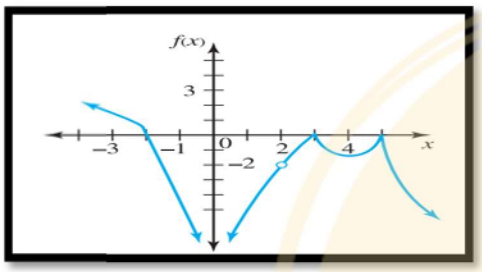


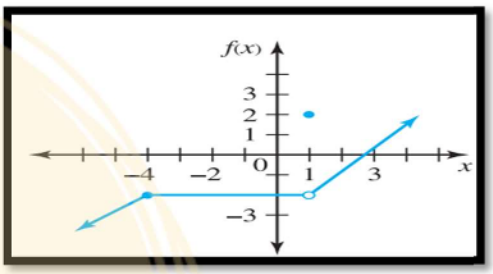












MAGDY MATH
0557581232

حدد نقاط عدم الاتصال ونوع عدم الاتصال إن وجدت

1) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

4) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

5) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

6) $f(x) = ln(x+1)$

7) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{x}$

8) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$

9) $f(x) = \dfrac{4x-3}{2x-7}$

10) $g(x) = e^{2x-3}$

11) $h(x) = \sqrt{5x+3}$

12) $f(x) = ln\, x^2$

MAGDY MATH
0557581232

أوجد قيم x حيث تكون الدالة متعددة التعريف f غير متصلة



$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ x^2-3x+4, & 1\le x\le 3 \\ 5-x, & x>3 \end{cases}$$

MAGDY MATH
0557581220

أوجد قيم x حيث تكون الدالة متعددة التعريف f غير متصلة

$$f(x)=\begin{cases} 5x-4, & x<0 \\ x^2, & 0\le x\le 3 \\ x+6, & x>3 \end{cases}$$ حيث

أوجد قيم x حيث تكون الدالة متعددة التعريف f غير متصلة $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x\neq -1 \\ 2, & x=-1 \end{cases}$

❑ إذا كانت موجودة $\lim_{x\to c} f(x)$ ولكن الدالة f غير متصلة عند $x = c$

بسبب أن $f(c)$ غير معرفة أو $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$

فإنه يمكن إعادة تعريف الدالة f لتصبح متصلة عند $x = c$

❑ أما إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة فإنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند $x = c$

▪ ابحث اتصال الدالة عند $x = 4$ $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x - 4}{x - 4}$

وإذا كانت f غير متصلة فهل يمكن إعادة تعريف الدالة f بحيث تكون الدالة متصلة عند $x = 4$



❑ أعد تعريف كل من الدوال لكي تصبح متصلة عند $x = 2$

MAGDY MATH
0557581232

الدالة	$f(2)$	$\lim_{x\to 2} f(x)$	سبب عدم الاتصال عند $x = 2$	إعادة تعريف لتصبح f متصلة عند $x = 2$
$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$				
$f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$				
$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 2 \\ \text{صفر}, & x = 2 \\ -1, & x = 2 \end{cases}$				

- ابحث اتصال كل من الدوال التالية إذا كانت f غير متصلة فهل يمكن إعادة تعريف الدالة f (ايجاد الدالة الموسعة) بحيث تكون الدالة متصلة عند نقاط الانفصال



1. $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$

2. $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

3. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

4. $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+x-2}$

5. $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$

MAGDY MATH
0557581232

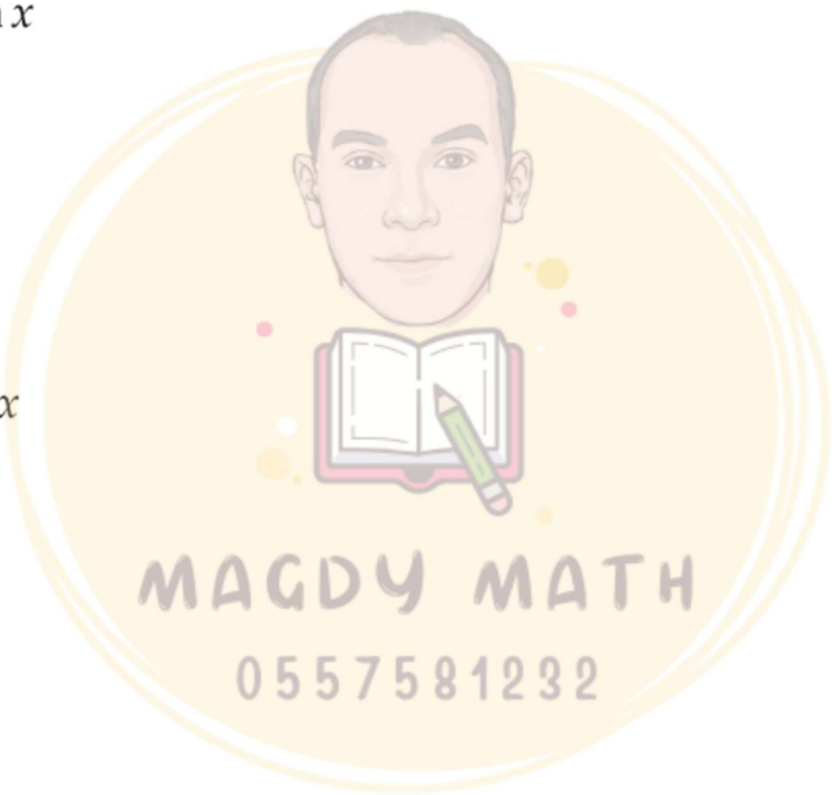
6. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 2x - 4}$

7. $f(x) = x^2 \tan x$

8. $f(x) = x \cot x$

9. $f(x) = \ln x^2$

10. $f(x) = 3 / \ln x^2$



11. $f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x < 1 \\ x^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & , \quad x \leq -1 \\ x^2 + 5x & , \quad -1 < x < 1 \\ 3x^3 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x \leq 0 \\ \sin x & , \quad 0 < x \leq \pi \\ x - \pi & , \quad x > \pi \end{cases}$

MAGDY MATH 0557581232

أعد تعريف كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند النقط المبينة بحيث تصبح متصلة عند هذه النقطة إن أمكن (إيجاد الدالة الممتدة او الموسعة)

❑ $f(x) = \frac{x-3}{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}$ عند $x = 3$

❑ $f(x) = \frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$ عند $x = 0$

❑ $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}$ عند $x = 0$

❑ $f(x) = \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin x}$ عند $x = 0$

MAGDY MATH
0557581232

ثانيًا: اتصال دالة على فترة

تكون الدالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ إذا كانت

1) متصلة على الفترة المفتوحة (a,b)

2) متصلة عند a من جهة اليمين $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

3) متصلة عند b من جهة اليسار $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

فمثلًا الدالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

متصلة على الفترة المغلقة [1, 1-] وبحسب التعريف لا معنى إلى النظر إلى الدالة على يسار 1- أو على اليمين 1

* الدالة **المتصلة** هي الدالة التي تكون متصلة عند كل نقاط مجالها وفيما يلي بعض الدوال وتحديد فترات اتصالها (**مجالها**)

الدوال المتصلة على مجالها (فترة اتصالها هي مجالها)

- ❑ دالة كثيرة الحدود مجالها R
- ❑ دالة الجذر التكعيبي مجالها R
- ❑ دالة المطلق مجالها R
- ❑ دالة $sinx, cos\ x$ مجالها R
- ❑ الدالة الاسية مجالها R
- ❑ الدالة النسبية{المقام اصفار} /R
- ❑ دالة $tanx$ مجالها $R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$
- ❑ دالة الجذر التربيعي مجالها تحت الجذر اكبر من اويساوي صفر $\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0$
- ❑ الدالة اللوغاريتمية امام اللوغاريتم اكبر من الصفر $x > 0$ $ln\ x \Rightarrow$

إذا كانت f, g دالتان متصلتان عند $x = a$ فإن:

1) $(f \pm g)$ متصلة عند $x = a$

2) $(f.g)$ متصلة عند $x = a$

3) $\frac{f}{g}$ متصلة عند $x = a$ إذا كانت $g(a) \neq 0$

❑ إذا كانت الدالتان g, f معرفتين على الفترة $h = (a,b)$

وكانت متصلتين على الفترة h فإن كلا من الدوال التالية متصلة على الفترة (a,b)

(1) $f + g$ (2) $f.g$ (3) $\frac{f}{g}$ بشرط $g \neq 0$

$$f(x)=\sqrt{x+3}$$

$$f(x)=\sqrt{x^2-4}$$

$$f(x)=(x-1)^{3/2}$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x+2}$$

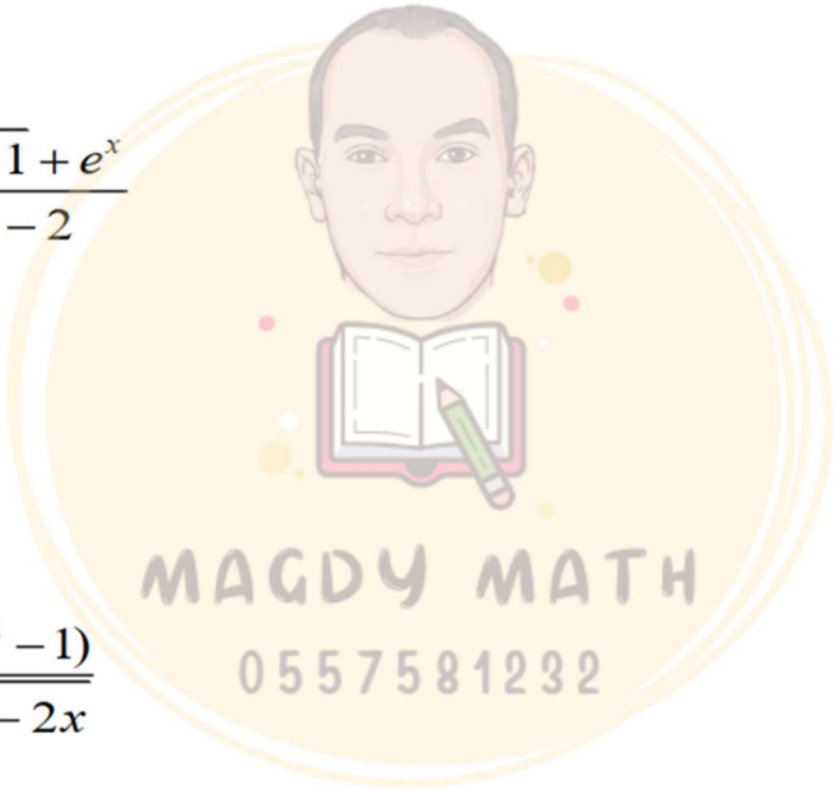
$$f(x)=sin^{-1}(x+2)$$

MAGDY MATH
0557581232

$$f(x) = ln(\sin x)$$

$$f(x) = |x - 2| + |5 + x|$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + e^x}{x^2 - 2}$$



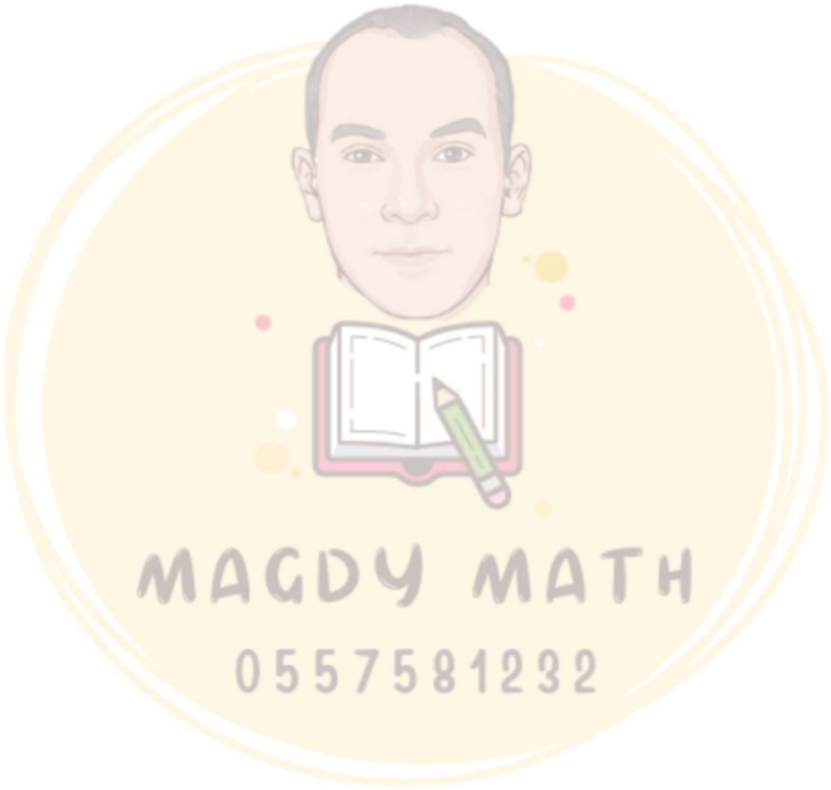
$$f(x) = \frac{ln(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$f(x) = \sqrt{5 - |x|}$$

$$f(x) = \tan^{-1}(x+1)$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \qquad , x \in [-2, 4]$$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}$$



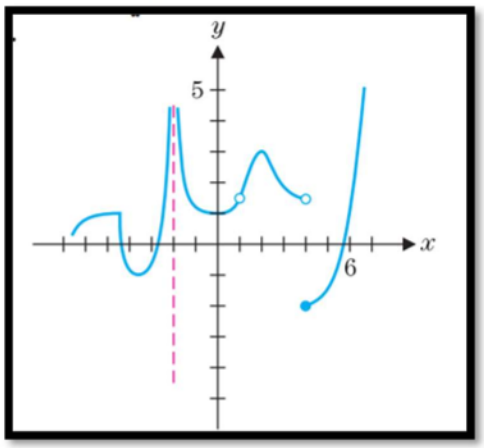
$$f(x) = \frac{3x+1}{|x|+1}$$

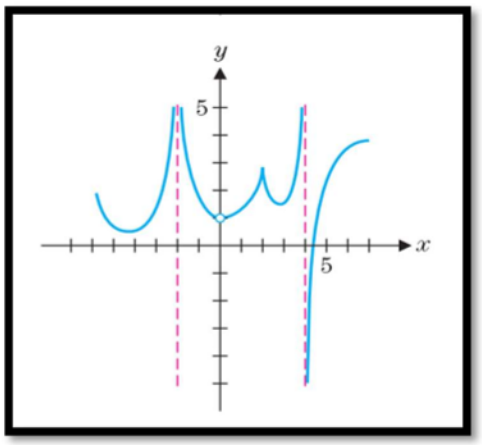
$$(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 3 \\ 5x - 4, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 3 \\ 2, & 3 < x < 4 \\ 6 - x^2, & x \leq 4 \end{cases}$$

استخدم التمثيل البياني المعطى لتعريف جميع الفترات التي تكون عندها الدالة متصلة.





نهايات تركيب دالتين

نظرية: إذا كانت $\lim_{x\to a} g(x) = L$ وكانت f دالة متصلة عند L فإن

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(l)$$

نتيجة: إذا كانت g متصلة عند a وكانت f متصلة عند $g(a)$ فإن التركيب $f\ o\ g$ متصلة عند a

❑ حدد فترة اتصال الدالة $h(x) = \cos(x^2 - x + 2)$

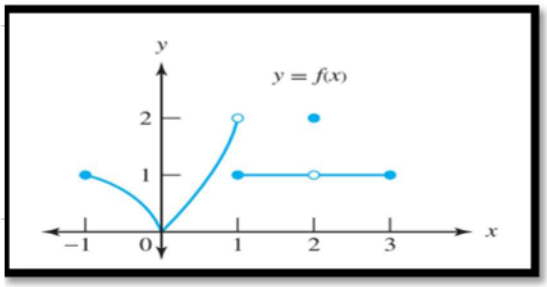
❑ إذا كانت $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 4 - 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

أوجد $\lim_{x\to 1} f(g(x))$, $\lim_{x\to -1} f(g(x))$

MAGDY MATH
0557581232

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}$ و $g(x) = 2x$ وضّح أنّ $\lim_{x\to 0} f(g(x)) \neq f\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right)$

* من خلال التمثيل البياني للدالة f



أوجد كلًا مما يلي:

1) $\lim_{x\to 5} f(5-x)$

2) $\lim_{x\to 4} f(5-x)$

لإيجاد قيم الثوابت من خلال تعريف الاتصال

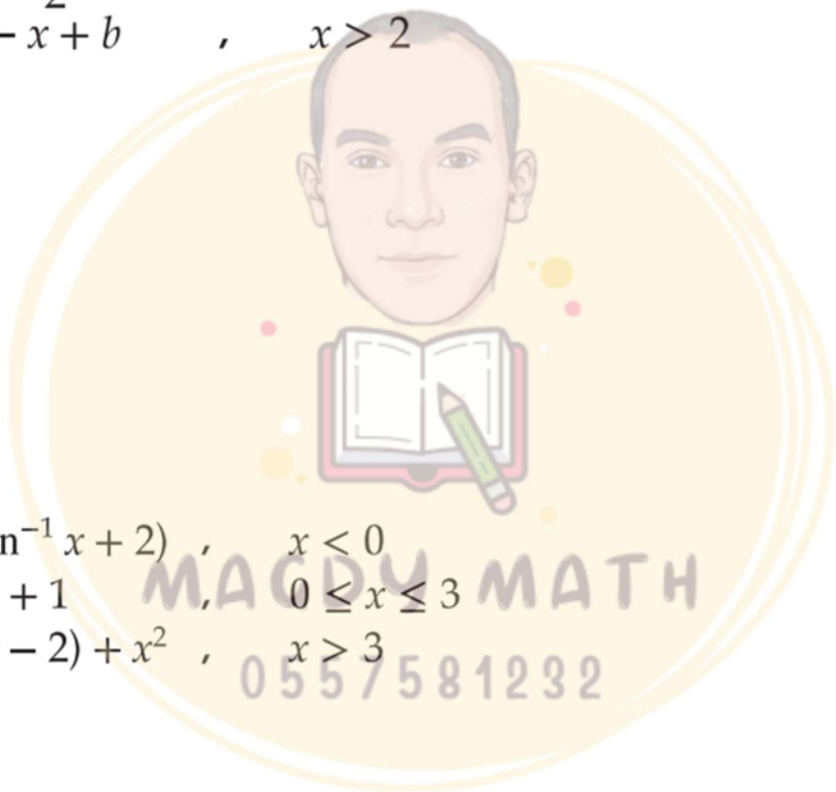
حدّد قيم a و b التي تجعل الدالة المعطاة متصلة.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin x}{x} & , \quad x<0\\ a & , \quad x=0\\ b\cos x & , \quad x>0\end{cases}$$

MAGDY MATH
0557581232

إذا كانت $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{x+3} & , \quad x\neq -3\\ x+a & , x=-3\end{cases}$ متصلة عند $x=-3$ أوجد قيمة a

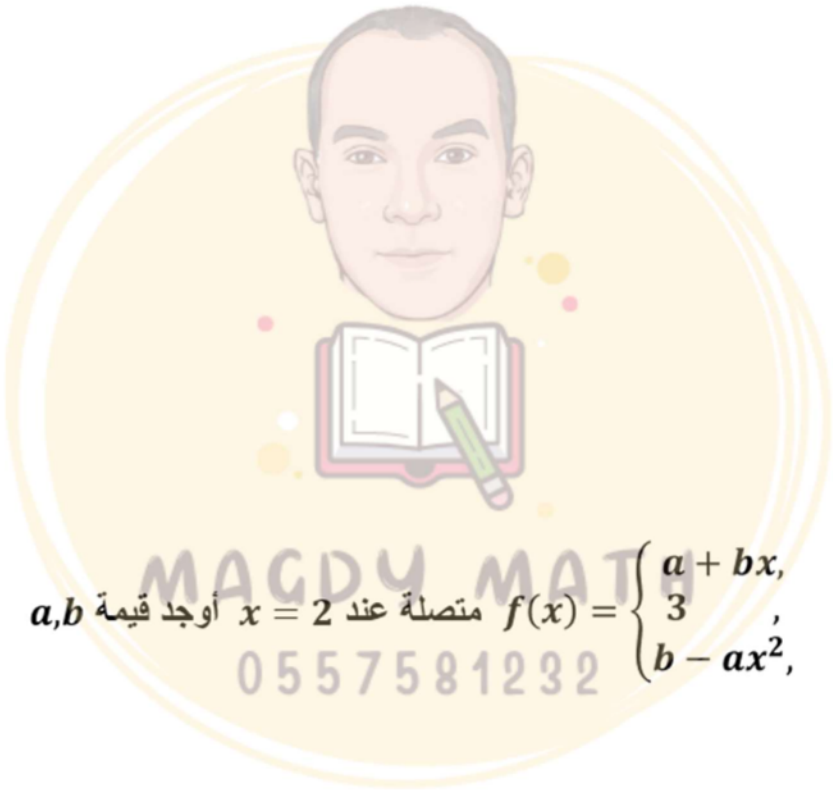
$$f(x)=\begin{cases} ae^{x}+1 & , \quad x<0 \\ \sin^{-1}\dfrac{x}{2} & , \quad 0\le x\le 2 \\ x^{2}-x+b & , \quad x>2 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} a(\tan^{-1}x+2) & , \quad x<0 \\ 2e^{bx}+1 & , \quad 0\le x\le 3 \\ \ln(x-2)+x^{2} & , \quad x>3 \end{cases}$$

إذا كانت الدالة $f(x)=\begin{cases} x^2+ax-2, & x>2 \\ 4, & x=2 \\ 5a+bx, & x<2 \end{cases}$ متصلة عند $x=2$ أوجد قيمة a, b؟

إذا كانت $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & , \quad x\le a\\ x & , x>a\end{cases}$ متصلة عند $x=a$ أوجد قيمة a



إذا كانت $f(x)=\begin{cases}a+bx, & x>2\\ 3 & , \quad x=2\\ b-ax^2, & x<2\end{cases}$ متصلة عند $x=2$ أوجد قيمة a,b

إذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x-2, & x\le -2\\ ax+b, & -2\le x\le 5\\ x^2-12, & x\ge 5\end{cases}$ متصلة عند $x=5,x=-2$ أوجد قيمة a,b

أوجد قيمة الثوابت $a,\ b$ حتى تصبح الدالة $f(x)$ متصلة على مجالها حيث

$$f(x)=\begin{cases}4x & ,x\le -1\\ ax+b & ,-1<x<3\\ -2x & ,x\ge 3\end{cases}$$

إذا كانت $f(x)=\begin{cases}ax^2-3, & x<2\\ 3x-b, & x>2\end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=6$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$ أوجد قيمة كلا من $a\ ,b$

إذا كان $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

أوجد

1) قيم x التي تكون عندها الدالة f غير متصلة

تكون غير موجودة عند أصفار المقام بعد الاختصار

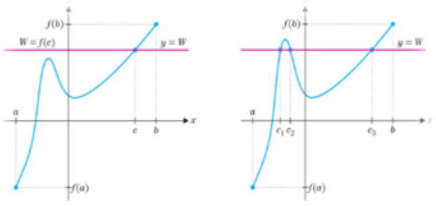
MAGDY MATH
0557581232

2) قيم x التي تكون عندها النهاية غير موجودة

حدد جميع قيم x التي تكون فيها الدالة متصلة.

$$g(x)=\begin{cases}x^2+3 & x \text{ غير نسبيّة}\\ 4x & x \text{ نسبيّة}\end{cases}$$

إذا كانت f متصلة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وكانت w هي عدد بين $f(a)$، $f(b)$



فإنه يوجد عدد مثل $c \in [a,b]$ حيث $f(c) = w$

نتيجة نظرية القيمة الوسطية (طريقة التنصيف)

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$

إذا كانت $f(a), f(b)$ لهما إشارتان مختلفتان فإنه يوجد عدد على الأقل مثل r

ينتمي إلى الفترة (a,b) بحيث $f(r) = 0$

❑ استخدام نظرية القيمة الوسطية للتحقيق من أن $f(x)$ لها صفر في الفترة $[2, 3]$ ثم

استخدم طريقة التنصيف لإيجاد فترة طولها $\frac{1}{4}$

- $f(x) = x^2 - 7$

MAGDY MATH
0557581232

- $f(x) = x^3 - 4x - 2$

❑ استخدام نظرية القيمة الوسطية للتحقيق من أن $f(x)$ لها صفر في الفترة المعطاة ثم استخدم طريقة التنصيف لإيجاد فترة طولها $\frac{1}{4}$ في الفترة $[-1, 0]$

- $f(x) = e^x + x$

- $f(x) = x^3 - 4x - 2$



MAGDY MATH
0557581232

❑ إذا كانت $f(x) = \cos x - x$ في الفترة $[0,1]$ مقربًا لأقرب منزلتين عشريتين

أثبت أنه إذا كانت f متصلة على الفترة $[a, b]$، $f(a) > a$ و $f(b) < b$.
فعندها يكون لـ f نقطة ثابتة [حل لـ $f(x) = x$] في الفترة (a, b).

- حدد الفترة (الفترات) التي تكون عندها $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+e^x}{x^2-2}$ متصلة

2024-2023

إذا كانت $f(x)=\dfrac{9-x^2}{mx+2}$ متصلة على $(-\infty,\infty)$

2023-2022

أوجد قيمة m , حيث m عدد ثابت

1) -1 2) 0 3) 9 4) 1

حدد الفترة (الفترات) التي تكون عندها $f(x)=\dfrac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{x}}$ متصلة

2023-2022

1) $(0,\infty)$ 2) $(0,1)$ 3) $(-1,1)$ 4) $(1,\infty$

2022-2021

حدد الفترة (الفترات) التي تكون عندها $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ متصلة

$a)\ (-3,3)$ $b)[-3,3]$

$c)\ (-\infty,-3]\cup[3,\infty)$ $d)\ (-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

2022-2021

حدد قيم n,m التي تجعل الدالة

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-xm+2}{x-1} & ,x\neq 1\\ n & ,x=1\end{cases}$$

$a)\ m=-3\ ,n=-1$ $c)\ m=3\ ,n=-1$

$b)\ m=-3\ ,n=1$ $d)\ m=3\ ,n=1$

2018-2017

حدد قيم b,a التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة

$$f(x)=\begin{cases}ae^x+1 & ,\ x<0\\ \sin^{-1}\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 2\\ x^2-x+b & ,x>2\end{cases}$$

MAGDY MATH 0557581992

حدد الفترة (الفترات) التي تكون عندها الدالة $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}+e^x}{x^2-2}$ متصلة

2020-2019

$a)\ (-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$ $b)[-1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$

$d)\ (\sqrt{2},\infty)$ $c)\ (-1,\infty)$

أوجد جميع نقاط عدم الاتصال،وحدد أي منها قابل للازالة

2020-2019

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x^2, & 0\le x\le 2\\ 4x-3 & ,x>2\end{cases}$$

حدد الفترة (الفترات) التي تكون عندها الدالة $f(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$ متصلة

2019-2018

$a)\ (-\infty,-1)\cup(2,\infty)$ $b)\ (-\infty,-1]\cup[2,\infty)$

$c)\ (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ $d)\ (-\infty,0)\cup(2,\infty)$

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}a(\tan^{-1}x+2), & x<0\\ bcos\,(x+\frac{1}{3})\pi, & 0\le x\le 3\\ \ln(x-2)+x^2+1 & ,x>3\end{cases}$$

2019-2018

أوجد قيم b,a التي تجعل الدالة f متصلة

2018-2017

حدد الفترة التي تكون عندها الدالة $f(x)=ln\,(3x-6)$ متصلة

$a)\ (-\infty,2)$ $b)[2,\infty)$

$c)\ (-2,\infty)$ $d)(2,\infty)$

النهايات التي تتضمن اللانهاية
(خطوط التقارب)

- الرمز (∞) ليس عددًا حقيقًا ولكنه يعبر عن كمية أكبر من أي عدد حقيقي موجب يمكن ادراكه.
- الرمز (-∞) ليس عددًا حقيقًا ولكنه يعبر عن كمية أصغر من أي عدد حقيقي سالب يمكن ادراكه.

عند إجراء العمليات الحسابية يخضع للخواص التالية

بفرض أن $a \in R$

1) $\infty \pm a = \infty$

2) $-\infty \pm a = -\infty$

3) $\infty \times a = \begin{cases} \infty \ if & a > 0 \\ -\infty \ if & a < 0 \\ \text{كمية غير معينة} \ if & a = 0 \end{cases}$

4) $-\infty \times a = \begin{cases} -\infty \ if & a > 0 \\ \infty \ if & a < 0 \\ \text{كمية غير معينة} \ if & a = 0 \end{cases}$

فمثلا:

$\infty \pm 7 = \infty$ ، $-\infty \pm 2 = -\infty$ ، $\infty \times 5 = \infty$

$\infty \times \infty = \infty$ ، $-\infty \times -2 = \infty$

وسبق وشرحنا الكمية الغير معينة: وهي الكمية التي ليس لها جواب محدد

ومن صورها $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\infty-\infty}{0}, 0 \times \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$

كميات معينة مثل $\frac{0}{0} = \pm\infty$ ، $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ $\infty^\infty = \infty$

$a^\infty = \begin{cases} \infty & if\ a > 1 \\ 0 & if\ a < 1 \end{cases}$ حيث $a \neq 0$ حيث $a > 0$

فمثلا

- $3^\infty = \infty$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^\infty = 0$
- $3^{-\infty} = 0$

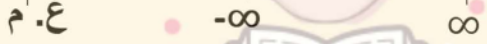
MAGDY MATH 0557581232

قاعدة

- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ لكل عدد صحيح $n > 0$
- $\lim_{x\to\infty} a = a$ $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ حيث $n > 0$

سبق ودرسنا عندما نبحث نهاية الدالة ويكون الناتج التعويض $\frac{\text{عدد}}{0}$

وذكرنا نبحث إشارة المقام قبل حساب النهاية



1) $\lim_{x\to3} \frac{x}{x-3}$

2) $\lim_{x\to1} \frac{1-2x}{x^2-1}$

3) $\lim_{x\to-1} \frac{1-2x}{x^2-1}$

4) $\lim_{x\to-2} \frac{x^2+2x-1}{x^2-4}$

5) $\lim_{x\to2} \frac{x-4}{x^2-4x+4}$

6) $\lim_{x\to-1} \frac{1-x}{(x+1)^2}$

7) $\lim_{x\to-1^-} (x^2-2x-3)^{\frac{-2}{3}}$

8) $\lim_{x\to0} \cot x$

9) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\sec^2 x$

MAGDY MATH
0557581232

10) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$

11) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}}$

12) $\lim_{x\to 0} \sin\left(e^{\frac{-1}{x^2}}\right)$

13) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x$

14) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} e^{-\tan x}$

15) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)$

16) $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(\ln x)$

17) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x \sin x)$

18) $\lim_{x\to 0^-} \cot^{-1}(\sin x)$

MAGDY MATH
0557581232

إيجاد نهاية دالة نسبية عندما ما لا نهاية:

- نقسم كلًا من البسط والمقام على أعلى درجة لـ x
- حيث m هي أعلى درجة في البسط.
- حيث n هي أعلى درجة في المقام .

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^m}{bx^n}$$

$m < n$	$m = n$	$m > n$
0	$\frac{a}{b}$	$\pm\infty$

MAGDY MATH
0557581232

أوجد كلًا مما يلي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-2}{3x^2+4x-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{4x^2-3x-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{4x^3-5x-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-2x^2}{x^4+3x^3+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+6}{2x-7x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+2)^2(x^2-1)^2}{x^5(x+1)^7}$$

إيجاد نهايات لدوال كثيرة حدود عند $\pm\infty$

❑ فقط نعوض بالحد الذي يحتوي على أعلى درجة ونهمل باقي الحدود

$$\lim_{x\to\infty}(5x^4-x^2-3)$$

MAGDY MATH
0557581232

$$\lim_{x\to\infty}(4x^2-5x^3+12)$$

إيجاد نهايات لدوال غير نسبية عند $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty}(0.3)^x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-3x^3}{\sqrt{x^6+9}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{2x}$$

$$\lim_{x\to\infty} x-\frac{2}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+7x^2+1}{x^3-x\sin x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(12)^{\frac{1}{x}}}{x+7}$$

$$\lim_{\to-\infty}(x-3)^{\frac{-2}{5}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x}}{2+\frac{3}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5+x^{-2}}{3x^{-2}+1}$$

MAGDY MATH
0557581232

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x-2}\ -\sqrt{12x+7}}{\sqrt{27x-5}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+7}{2x^2+x\cos x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x+5}{e^{x/2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{2x}+3x$$

$$\lim_{x\to\infty} (e^{x/3}-x^4)$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-(x+1)/(x^2+2)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \cot^{-1} x$$

$$\lim_{x\to-\infty} \cot^{-1} x$$

$$\lim_{x\to\infty} \sec^{-1} \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sin(\tan^{-1} x)$$

MAGDY MATH
0557581232

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x^2+3x+3)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x-3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} ln\left(\frac{x^2+2}{x^2-3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2+e^{2x})}{\ln(1+e^{x})}$$

$$\lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{\cos x+10x}{3+x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} ln(3+ex)-ln(x+2)$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x+3}{x^2+2}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x^2+3}{x+2}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\left(cos\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} 4\tan^{-1}x-1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{120}{3(0.4)^x+2}$$

MAGDY MATH
0557581232

تعريف العدد e كنهاية

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=e^{a}$$

- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}$
- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$
- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x}$
- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x+5}$
- $\lim_{x\to 0^{+}}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$



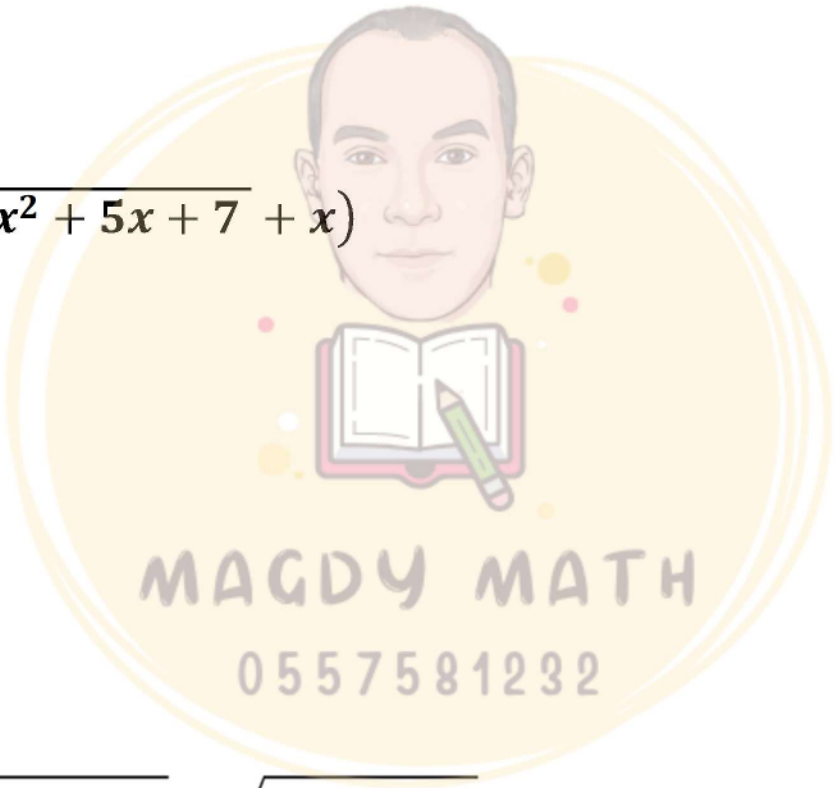
النهايات في الدوال المثلثية العكسية

- $\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\infty}\cot^{-1}x=0$
- $\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x=\frac{-\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty}\cot^{-1}x=\pi$
- $\lim_{x\to\pm\infty}\sec^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to\pm\infty}\csc^{-1}x=0$

إيجاد نهايات تتطلب الضرب فالمرافق عند ∞

- $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x+1}-2x\right)$

- $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+7}+x\right)$



$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x^2+4x+7}-\sqrt{5x^2+x+3}\right)$$

خطوط التقارب للدوال النسبية

خط التقارب الرأسي: هو خط وهمي معادلته $x = a$ حيث (a) هي أصفار المقام بعد الاختصار إن وجد ويحدث عندما $y \to \infty$ وإن وجد اختصار أحد العوامل فإن للدالة فجوة عندها وليس خط تقارب رأسي.

خط التقارب الأفقي: هو خط وهمي معادلته $y = b$ ويحدث عندما $x \to \infty$ ويكون للدالة خط تقارب أفقي إذا كانت درجة البسط أصغر من أو تساوي درجة المقام

* يكون للدالة النسبية **خط تقارب مائل** إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام بـ 1 وتكون معادلته $y = ax + b$ وتستخدم القسمة المطولة أو التركيبة أو تساوي الدالة بالمعادلة $ax + b$ وإيجاد a,b

حدد لكل دالة من الدوال التالية خطوط التقارب الافقية والرأسية

ثم حدد اذا كانت $f(x) \to \infty$ ام $f(x) \to -\infty$

$$f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$$

MAGDY MATH
0557581232

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2-2x-3}$$

$$f(x)=\frac{1-x}{x^2+x-2}$$

$$f(x)=4\tan^{-1}x-1$$

MAGDY MATH
0557581232

حدد كل خطوط التقارب الراسية والمائلة لكل من الدوال التالية

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4}$$



$$y=\frac{x^3}{4-x^2}$$

$$y=\frac{x^2+1}{x-2}$$

$$y=\frac{x^3}{x^2+x-4}$$

$$y = \frac{x^4}{x^3 + 2}$$

$$f(x) = \frac{3}{x-4} + 2$$

$$f(x) = \frac{3}{x-4} + x$$

$$f(x) = \frac{3x}{|x|-4}$$

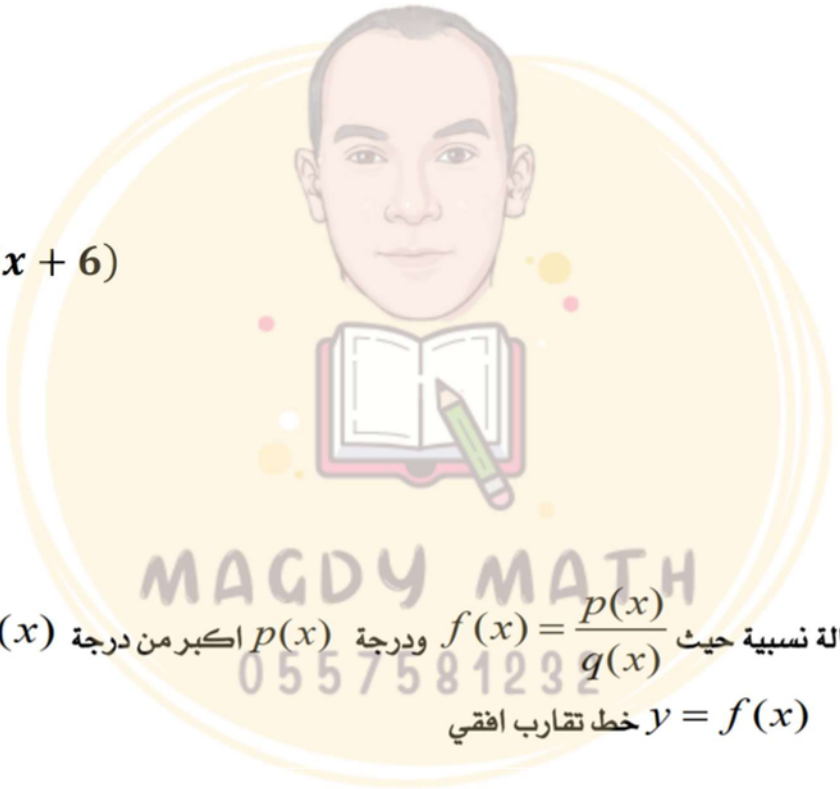
$$f(x) = \frac{5}{e^x - 2}$$

MAGDY MATH
0557581232

$$f(x) = 3ln(x-2)$$

$$f(x) = \ln(1-\cos x)$$

$$f(x) = ln(x^2 - 5x + 6)$$



لتكن $f(x)$ دالة نسبية حيث $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ودرجة $p(x)$ اكبر من درجة $q(x)$ حدد

ما اذا كان للدالة $y = f(x)$ خط تقارب افقي

لتكن $f(x)$ دالة نسبية حيث $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ودرجة $p(x)$ اقل من درجة $q(x)$ حدد

ما اذا كان للدالة $y = f(x)$ خط تقارب افقي

لتكن $f(x)$ دالة نسبية حيث $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ وكان للدالة $y = f(x)$ خط تقارب مائل

معادلتة $y = x + 2$ فكيف يمكن مقارنة درجة $p(x)$ بدرجة $q(x)$

لتكن $f(x)$ دالة نسبية حيث $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ وكان للدالة $y=f(x)$ خط تقارب افقي معادلته $y=2$ فكيف يمكن مقارنة درجة $p(x)$ بدرجة $q(x)$

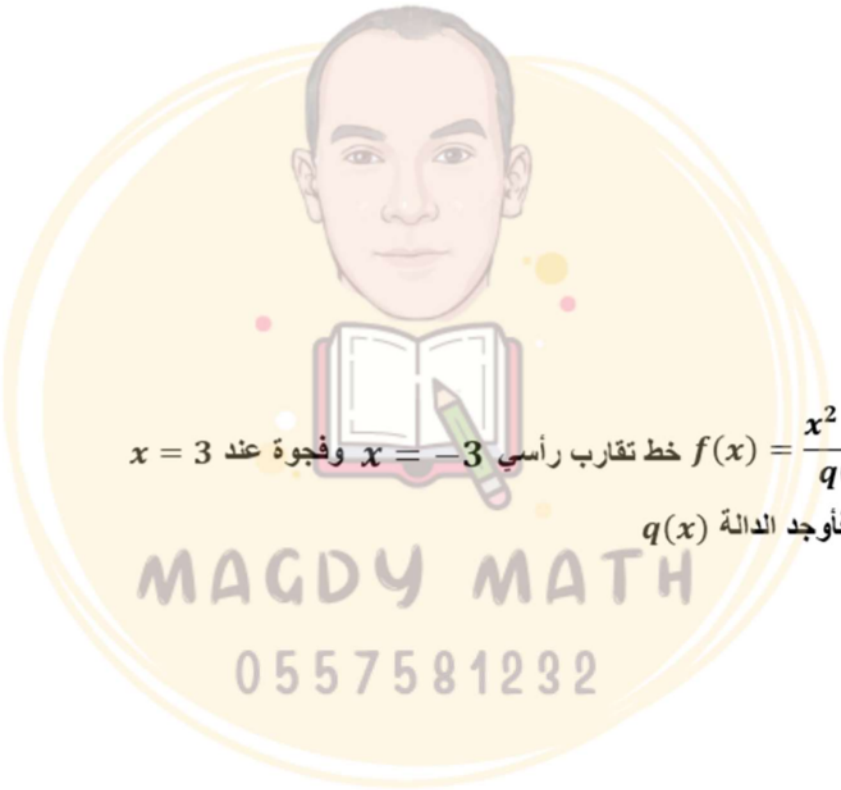
اوجد دالة تربيعية $q(x)$ بحيث يكون للدالة $f(x)=\frac{x^2-4}{q(x)}$ خط تقارب افقي واحد معادلته $y=-\frac{1}{2}$ وخط تقارب رأسي واحد معادلته $x=3$



اوجد دالة تربيعية $q(x)$ بحيث يكون للدالة $f(x)=\frac{x^2-4}{q(x)}$ خط تقارب افقي واحد معادلته $y=2$ واثنان من خطوط التقارب الرأسية $x=\pm 3$

أوجد دالة $g(x)$ بحيث يكون $f(x)=\frac{x^3-3}{g(x)}$ ليس له خط تقارب رأسي وله خط تقارب مائل $y=x$.

أوجد دالة $g(x)$ بحيث يكون $f(x) = \frac{x-4}{g(x)}$ له اثنان من خطوط التقارب الأفقية $y = \pm 1$ وليس له خطوط تقارب رأسية.



إذا كانت للدالة النسبية $f(x) = \frac{x^2-9}{q(x)}$ **خط تقارب رأسي** $x = -3$ **وفجوة عند** $x = 3$ **وخط تقارب أفقي** $y = \frac{1}{2}$ **فأوجد الدالة** $q(x)$

لنفترض أن طول حيوان صغير بعد t أيام من الولادة هو $h(t) = \frac{300}{1+9(0.8)^t}$ mm . فما طول الحيوان عند الولادة؟ ما الطول النهائي للحيوان (أي، الطول عندما $t \to \infty$)؟

لنفترض أن قطر بؤبؤ العينين لأحد الحيوانات موضّح في $f(x)$ mm ، حيثما يكون x هو كثافة الضوء على بؤبؤ العينين. إذا كانت $f(x) = \frac{160x^{0.4} + 90}{4x^{-0.4} + 15}$ ، فأوجد قطر بؤبؤ العينين مع (a) الحد الأدنى من الضوء و (b) الحد الأقصى من الضوء.

إذا كانت $f(x) = \frac{20x^{-0.4} + 15}{g(x)}$ فأوجد الدالة $g(x)$ بحيث

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 5$

أوجد قيمتي a,b إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$ $\lim_{x\to -2} f(x) = 2$ حيث $f(x) = \frac{2-ax^2}{3-bx+x^2}$

MAGDY MATH
0557581232

تدريبات من الإختبارات السابقة

2024-2023

اوجد $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x+1}-2x\right)$

2024-2023

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والمائلة ل $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x-6}$

2023-2022

أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

1) ∞ 2) 0 3) 1 4) $\dfrac{1}{2}$

2023-2022

حدد كل خطوط التقارب الأفقية ل $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}$

1) $y=-1$ 2) $y=0$ 3) $y=1$ 4) $y=-1, y=1$

2022-2021

حدد كل خطوط التقارب الرأسية والمائلة ل $f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2}$

a) $x=4\,,y=-x$ b) $x=-2\,,x=2\,,y=4x$

c) $x=-2\,,x=2\,,y=x$ d) $x=-2\,,x=2\,,y=-x$

2021-2020

إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+mx^4-2x^3-1}{2x^4+2x^3-x}=4$

أوجد قيمة الثابت m

1) -2 2) 4 3) 5 4) $\dfrac{1}{2}$

MAGDY MATH 0557581232

2020-2019

أوجد $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$

$a)\ \infty$ $b)\ 0$ $c)\pi$ $d)\ \frac{\pi}{2}$

2019-2018

أوجد $\lim_{x\to\infty} cot^{-1} x$

$a)\ \infty$ $b)\ 0$ $c)1$ $d)\ \frac{-\pi}{2}$

2018-2017

أوجد $\lim_{x\to\infty} sin(tan^{-1} x)$

$a)\ \infty$ $b)\ 0$ $c)1$ $d)\ -\infty$

2018-2017

أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2-6}{3x^3+2x+1}$

$a)\ \infty$ $b)\ 0$ $c)2$ $d)3$

2018-2017

حدد خطوط التقارب المائلة للدالة $y=\frac{x^2+1}{x-2}$

$a)\ y=-2$ $b)\ y=2$

$c)\ y=x+2$ $b)\ y=x-2$

MAGDY MATH 0557581232