



وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education

المملكة العربية السعودية

الرياضيات

لصف الثاني الثانوي

قسم العلوم الطبيعية

الفصل الدراسي الأول

دليل المعلم

العبيكان
Obekon

Mc
Graw
Hill Education

يوزع مجاناً ولا يباع

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الطبعة المعدلة
١٤٣٤ هـ - ٢٠١٣ م

Original Title:

Algebra2 © 2010

By:

John A. Carter, Ph. D
Gilbert J. Cuevas, Ph. D
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Berchie Holliday, Ed. D
Ruth M. Casey

Contributing Authors

Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content

Prof. Viken Hovsepian
Prof. Bob McCollum

Gifted and talented

Shelbik.cole

Graphing Calculator

Ruth M. Casey
Jerry Cummins

Mathematical Fluency

Robert m . capraro

Pre-AP

Dixie Ross

Reading and Writing

Releah cassett lent
Lynn T. Havens

الرياضيات الصف الثاني الثانوي

قسم العلوم الطبيعية

أعدت النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة

د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبد الله البصيص
صلاح بن عبد الله الزيد
عبد الحكيم عبد الله سليمان
عمر محمد أبو غليون
خلود عبد الحفيظ لوياني
حسان عبد الله الحوراني

التعريب والتحرير اللغوي

نخبة من المتخصصين

إعداد الصور

د. سعود بن عبدالعزيز الفراج

حول الغلاف

تدرس في الفصل الرابع من هذا الكتاب تمثيل دوال الجذور التربيعية وحلها. وتعدّ حركة البندول مثالاً على دالة جذرية.



www.macmillanmh.com

www.obeikaneducation.com



English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies. Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies. Inc. © 2008.



حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل © ٢٠١٠م.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقاً لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م / ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين والاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

أخي المعلم / أختي المعلمة

يسرنا أن نقدّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آمليين أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلاب، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولاً: مقدمة حول السلسلة:

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علمياً وتربوياً، وتُبرز النقاط المحورية التي يركز عليها المنهج في هذا الصف، وفلسفة السلسلة المتوازنة أفقياً والمترابطة رأسياً، وأساليب التدريس المتّبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

ثانياً: نظرة عامة على الفصل:

تمّ توزيع المقرّر إلى فصول، ويبدأ دليل المعلم في كل فصل بتقديم نظرةٍ عامةٍ عليه تتضمن مخططاً للدروس وأهدافها، ومصادر تدريسها، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس، ثمّ يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. كما يقترح الدليل آليةً لتعلم مهارات الفصل من خلال مهارة الدراسة، ثمّ يقدم دعماً للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، كما يبرز غرض المطويات ووظيفتها ووقت استعمالها، ثمّ يعرض مخططاً للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثاً: الدروس:

يقدم الدليل أنشطةً مقترحةً تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، وبأساليبٍ تدريسٍ متنوعةٍ، تساعد المعلم على تدريس كل درسٍ، وبعد ذلك يعرض الدليل الدرس في خطواتٍ محددةٍ هي:

التركيز: يبيّن ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثناءه وبعده.

التدريس: يقدم مقترحاتٍ للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حواريةً وأنشطةً مقترحةً، ويبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس. كما يقدم أمثلةً إضافيةً للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريباتٍ متنوعةً تحقق أهداف الدرس بحسب مستويات الطلاب.

التقويم: يقدم مقترحاتٍ لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحاً للمعلم للتأكد من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم وإتقانهم المهارات المقدمّة في الدرس، ويعرض الدليل آليةً لمتابعة المطويات. كما يقدم الدليل في كل درس إجاباتٍ مفصّلةً لبعض الأسئلة والتمارين.

رابعاً: أساليب التقويم:

تقدّم السلسلة أساليب متنوعةً لتقويم الطلاب (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآلياتٍ لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلاب.

ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلمين والمعلمات، لنأمل أن يحوز اهتمامهم، ويلبّي متطلباتهم لتدريس هذا المقرّر، ويساعدهم على أداء رسالتهم.

والله ولي التوفيق

الدوال والمتباينات

الفصل
1

8A	مخطط الفصل 1
8C	التقويم والمعالجة
8D	تنوع التعليم
8E	المحتوى الرياضي
9	التهيئة للفصل 1
10	خصائص الأعداد الحقيقية
16	العلاقات والدوال
22	توسع 1-2 معمل الجبر: الدوال المنفصلة والدوال المتصلة
23	دوال خاصة
29	اختبار منتصف الفصل
30	تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً
35	حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً
41	توسع 1-5 معمل الحاسبة البيانية: أنظمة المتباينات الخطية
42	البرمجة الخطية والحل الأمثل
48	دليل الدراسة والمراجعة
53	اختبار الفصل
54	الإعداد للاختبارات المعيارية
56	اختبار تراكمي
57A	ملحق الإجابات

المصفوفات

الفصل
2

58A	مخطط الفصل 2
58C	التقويم والمعالجة
58D	تنوع التعليم
58E	المحتوى الرياضي
59	التهيئة للفصل 2
60	مقدمة في المصفوفات
66	توسع 2-1 معمل الجداول الإلكترونية: تنظيم البيانات
67	العمليات على المصفوفات
73	ضرب المصفوفات
80	اختبار منتصف الفصل
81	المحددات وقاعدة كرامر
89	النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية
95	توسع 2-5 معمل الحاسبة البيانية: المصفوفات الموسعة
96	دليل الدراسة والمراجعة
99	اختبار الفصل
100	الإعداد للاختبارات المعيارية
102	اختبار تراكمي
103A	ملحق الإجابات

الفهرس



كثيرات الحدود ودوالها

الفصل
3

104A	مخطط الفصل 3	
104C	التقويم والمعالجة	
104D	تنويع التعليم	
104E	المحتوى الرياضي	
105	التهيئة للفصل 3	
106	الأعداد المركبة	3-1
113	القانون العام والمميز	3-2
121	معامل الجبر: مجموع الجذرين وحاصل ضربيهما	3-2
123	العمليات على كثيرات الحدود	3-3
129	قسمة كثيرات الحدود	3-4
135	دوال كثيرات الحدود	3-5
142	اختبار منتصف الفصل	
143	حل معادلات كثيرات الحدود	3-6
150	معامل الحاسبة البيانية: حل متباينات كثيرات الحدود	3-6
151	نظريتا الباقي والعوامل	3-7
157	الجذور والأصفار	3-8
164	نظرية الصفر النسبي	3-9
169	دليل الدراسة والمراجعة	
173	اختبار الفصل	
174	الإعداد للاختبارات المعيارية	
176	اختبار تراكمي	
177A	ملحق الإجابات	

العلاقات والدوال العكسية والجذرية

الفصل
4

178A	مخطط الفصل 4	
178C	التقويم والمعالجة	
178D	تنويع التعليم	
178E	المحتوى الرياضي	
179	التهيئة للفصل 4	
180	العمليات على الدوال	4-1
187	العلاقات والدوال العكسية	4-2
192	معامل الحاسبة البيانية: الدالة العكسية	4-2
193	دوال ومتباينات الجذر التربيعي	4-3
199	الجذر التوني	4-4
204	معامل الحاسبة البيانية: تمثيل دالة الجذر التوني بيانياً	4-4
205	اختبار منتصف الفصل	
206	العمليات على العبارات الجذرية	4-5
212	الأسس النسبية	4-6
218	حل المعادلات والمتباينات الجذرية	4-7
224	معامل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات الجذرية	4-7
226	دليل الدراسة والمراجعة	
231	اختبار الفصل	
232	الإعداد للاختبارات المعيارية	
234	اختبار تراكمي	
235A	ملحق الإجابات	

منهج الرياضيات المترابط رأسياً ابتداءً من الصف الأول الابتدائي وحتى الصف الثالث الثانوي

تقدم لك هذه السلسلة ثلاثة أبعاد للترابط الرأسى:

1 تصميم المحتوى

يعد الترابط الرأسى للمحتوى عمليةً مهمةً تساعد طلابك على التحقق من التسلسل الدقيق للمحتوى، وتتابعه من مستوى إلى آخر. وهذا يمنحك الثقة بأن المحتوى يتم تقديمه وتعزيزه وتقويمه في الأوقات المناسبة، كما يساعد على سدّ الثغرات وتجنب التكرار غير المبرّر، ممّا يمكّنك من توجيه تدريسيك وتكيفه ليتلاءم مع حاجات الطلاب.

2 تصميم التدريس

إن الترابط الرأسى القوي بين الأساليب التدريسية بدءاً من الصف الأول يُسهّل على الطلاب الانتقال من المرحلة الابتدائية إلى المتوسطة، فالثانوية. إذ تعمل المفردات، والتقنيات والوسائل الحسية وخطة الدرس والمعالجة على التقليل من عوامل الصعوبة والتشويش التي يواجهها بعض الطلاب عندما ينتقلون عبر الصفوف المختلفة.

3 التصميم البصري

تشتمل صفحات السلسلة على تصاميم بصرية متسقة من صفٍّ لآخر، تساعد الطلاب على الانتقال من مرحلة إلى أخرى بسلاسة، كما تزداد دافعيتهم للتعلم والنجاح عندما تكون طريقة التعامل مع هذه الصفحات مألوفةً لديهم.



المفاتيح الخمسة للنجاح

1 الخرائط المفاهيمية للخبرات السابقة

تراعي السلسلة الخرائط المفاهيمية وتطورها، اعتماداً على نتائج الطلاب في رياضيات المرحلة الثانوية.

2 المحتوى العميق المتوازن

تم تطوير السلسلة بحيث تركز على المهارات والموضوعات التي يواجه الطلاب صعوبات فيها؛ مثل حل المسألة في كل مستوى صفي.

الصفان 1 و 2	الصفوف 3-5
(1) حل المسألة	(1) حل المسألة
(2) النقود	(2) الكسور الاعتيادية
(3) الزمن	(3) القياس
(4) القياس	(4) الكسور العشرية
(5) الكسور الاعتيادية	(5) الزمن
(6) الحساب	(6) الجبر
الصفوف 6-8	الصفوف 9-12
(1) الكسور الاعتيادية	(1) حل المسألة
(2) حل المسألة	(2) الكسور الاعتيادية
(3) القياس	(3) الجبر
(4) الجبر	(4) الهندسة
(5) الحساب	(5) الحساب
	(6) الاحتمالات

3 التقويم المستمر

تتضمن هذه السلسلة تقويماتٍ تشخيصيةً وتكوينيةً وختاميةً، وخططاً علاجيةً وإثرائيةً.

4 الخطط العلاجية وتنوع التدريس

توفر السلسلة خطة علاجية ذات ثلاثة مستويات:

1 المعالجة اليومية: تحدد بدائل متنوعة في دليل المعلم لتدريس المفاهيم وفق أنماط التعلم المختلفة.

2 المعالجة الاستراتيجية: يستعمل المعلمون إرشادات علاجية ومواد مساندة.

3 المعالجة المكثفة: توفر إرشادات للتدريس، ومفردات داعمة، وخططاً علاجية لمساعدة الطلاب على النجاح.

5 التطوير المهني

توفر السلسلة فرصاً عديدة للمعلم ليطور أداءه مهنيًا، بطرق تعليم إضافية؛ مثل: الفيديو، الرياضيات المحوسبة، المواقع الإلكترونية المترابطة ترابطاً رأسياً متكاملًا من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثاني عشر.



المرحلة الثانوية



المرحلة المتوسطة

تساعد البحوث المستمرة مع الطلاب والمعلمين والأكاديميين والخبراء على بناء جميع برامج الرياضيات من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي على أسس قوية متينة.

2 البحوث التكوينية

- قاعدة البحوث الخاصة بطرائق التدريس.
- اختبارات صفية تجريبية.
- لجان المعلمين الاستشارية
- مراجعون ومستشارون أكاديميون.

1 بحوث تطوير البرامج

- تقييم المعايير الوطنية.
- بحوث نوعية لحاجات سوق العمل.
- بحوث خاصة بالمحتوى العلمي.

3 البحوث الختامية

- مؤشرات على تحسّن درجات الاختبارات.
- بحوث شبه تجريبية لفاعلية البرامج.
- دراسات طولية.
- تقويمات نوعية للبرامج.

إعداد الطلاب للدراسة الجامعية وسوق العمل



تعمل هذه السلسلة على الربط بين ما يتعلمه الطلاب في المدرسة الثانوية، وما يُتوقع منهم أن يعرفوه عند بدء دراستهم الجامعية.

كيف يمكن إعداد الطلاب للدراسة الجامعية بصورة أفضل؟

• **المحتوى العلمي:** إن كتب المرحلة الثانوية من هذه السلسلة متسقة مع معايير عالمية دقيقة تشمل معايير NCTM للرياضيات المدرسية وغيرها.

• **مهارات عامة** تشمل مهارات مثل، الاستيعاب القرائي، وإدارة الوقت، وتسجيل الملاحظات، ... إلخ. وتوفر هذه السلسلة فرصاً لتنمية هذه المهارات من خلال إرشادات قراءة الرياضيات وروابط المفردات، ودليل التوقع وغيرها.

ماذا عن الطلاب الذين لا يخططون للالتحاق بالجامعات؟

لم تعد الرياضيات في عالم التقنية المعاصر مقتصرَةً على الطلاب الذين يلتحقون بالجامعات، فقد أظهرت إحدى الدراسات أن البرامج التدريسية التي يخضع لها شخص يريد الحصول على عمل تتطلب أن يكون هذا الشخص على مستوى معين من التعليم في الجبر والهندسة وتحليل البيانات والإحصاء يماثل مستوى الطالب الذي يلتحق بالسنة الأولى في الجامعة؛ حتى ينجح في عمله.

إن المنهج القوي للمدارس الثانوية مؤشر جيد على الاستعداد للدراسة الجامعية (Adelman 2006). فالطلاب الذين يدرسون كتب الرياضيات المعدة للمرحلة الثانوية من هذه السلسلة يكونون أكثر استعدادًا للدراسة الجامعية من الذين لم يدرسوها (Abraham & Crrech 2002).

وفيما يأتي بعض مناحي الاستعداد للدراسة الجامعية التي طوّرها:
David Conley at the University of Oregon

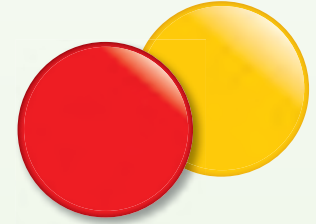
• **مهارات عقلية:** وهي مهارات ضرورية لتعلم المحتوى على المستوى الجامعي، وتشمل: التفكير الناقد، حل المسألة، التعبير، وتتاح في كل يوم للطلاب الذين يدرسون هذه السلسلة فرصاً لتنمية مهارات التفكير العليا، من خلال المسائل الخاصة بذلك.

تعليم متوازن، ترابط رأسي بين الصفوف من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي

يظهر الترابط الرأسي لهذه السلسلة من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي دمجاً متوازناً للتعليم. وتوفر هذه السلسلة للطلاب منحى متوازناً للرياضيات من خلال:

- استقصاء المفاهيم وبناء فهم إدراكي.
- تطوير مهارات إجرائية وحسابية وتعزيزها وإتقانها.
- تطبيق الرياضيات في حل مسائل من واقع الحياة.

ويوضح تسلسل صفحات كتاب الطالب، تطور الترابط الرأسي للفهم الإدراكي والمهارات الإجرائية والحسابية لموضوع مهم في الجبر.



نشاط للدرس (٧-٥)

تمثيل معادلات الجمع والطرح بنماذج

المعادلة جملة مثل $9=5+4$ تتضمن إشارة =، وتدل إشارة (=) على تساوي العبارتين على جانبيها. وتتضمن المعادلات أحياناً أعداداً مجهولة.

$4 + س = 9$ ، $9 = ١٠ - م$ ، $٦ = ك - ١$ ، $٧ = ١ - ل$

إن **حل المعادلة** يعني أن نجد قيمة العدد المجهول التي تجعل المعادلة صحيحة.

تفكيرك

حل المعادلتين $٥ = ٣ + ٢$ مستملاً الأكواب وقطع العد واللوحة الجبرية.

الخطوة ١، مثل العبارة التي بنموذج

لعمل نموذج للعبارة $٣ + ٢ = ٥$ ، استخدم كرتين لتمثيل ٣، وضع ثلاث قطع عد لتمثيل العدد ٣.

الخطوة ٢، مثل العبارة التي بنموذج

ضع ٥ قطع عد على الجهة اليمنى لتمثيل العدد ٥. إشارة = تدل أن الجانبين متساويان.

الخطوة ٣، أوجد قيمة ن

ضع قطع عد في الكوب بحيث يصبح عددها على جانبي إشارة المساواة متساويين.

قيمة ن التي تجعل المعادلة $٥ = ٣ + ن$ صحيحة هي ٢، لذا $٢ = ٥ - ٣$.

استكشاف ٧-٥، تمثيل معادلات الجمع والطرح بنماذج ١٣٩

الصف الخامس الابتدائي - الفصل الدراسي الأول

أما طلاب المرحلة الابتدائية العليا فيستفيدون من خبراتهم في التعامل مع الأكواب وقطع العد؛ لاستعمالها في تمثيل معادلات الجمع والطرح، وحلها.

يستعمل طلاب المرحلة الابتدائية الأولية قطع عد بلونين مختلفين لتمثيل جمل الجمع. ويُعد هذا النشاط أساساً للفهم والنجاح في حل معادلات جبرية.

٦ الجمع بتكوين العشرة

فكرة الدرس
أكون عشرة لأجد ناتج الجمع

لأجد ناتج $٤ + ٨$ ، أؤمّن أمتل العدة ٨ بالذواير الحمراء، ثم أمتل العدة ٤ بالذواير الصفراء.

فانياً، أمزك ذواير صفراوين، كما في الشكل، يتكوين العدد ١٠.

أخيراً، أجد ناتج الجمع

أمتل $٤ + ٨$ على شرة $٢ + ١٠$

اتقن

أستعمل ورقة التمثيل (٢)، ولأجد ناتج الجمع:

$٥ + ٨ = ١٣$ ، $٥ + ٧ = ١٢$ ، $٥ + ٩ = ١٤$

$٩ + ٢ = ١١$ ، $٩ + ٤ = ١٣$ ، $٥ + ٦ = ١١$

تفكيرك
كيف يُساعدني تكوين العدد عشرة على إيجاد ناتج الجمع؟

٤٤ الفصل ٢، طرائق الجمع

الصف الثاني الابتدائي - الفصل الدراسي الأول



توازن عملية التدريس

- مفاهيم
- مهارات
- حل مسائل

حل المسألة ذات العلاقة

تزوّد السلسلة الطلاب بخطّ ملائمة لحل المسألة، ومهارات وتطبيقات عليها خلال الصفوف؛ إذ يتوافر لهم فرص مستمرة لتطبيق مهارات الرياضيات، وحل المسائل باستعمال التفكير البصري، والاستدلال المنطقي، والحس العددي، والجبر.

استراتيجيات حل المسألة

تساعد استراتيجيات حل المسألة الطلاب على تعلم طرائق مختلفة لمواجهة المسائل الكلامية.

27) يمتلك فهد 800 ريال، فإذا قرر أن يضيف إلى هذا المبلغ 200 ريال شهرياً، فإن الدالة $p(t) = 800 + 200t$ تمثل مقدار ما معه من نقود t بعد t شهراً، فكم يكون معه بعد 8 أشهر؟ **2400 ريالاً**

مسائل مهارات التفكير العليا

28) اكتشف الخطأ، أوجد كل من أحد وإحدى قيمة $f(3d)$ حيث $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$ في كل حل أحدكما أو كليهما صحيح؟ وضع إجابتك.

خالد	أحمد
$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$ $= -12d^2 - 6d + 1$	$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$ $= -4(9d^2) - 6d + 1$ $= -36d^2 - 6d + 1$

29) مسألة مفتوحة، مثل كلٍّ من العلاقات الآتية بيانياً. انظر ملحق الإجابات

أ) سرعة سيارة متجهة نحو نقطة معينة وزمنها إذا علمت أنها توقفت عند إشارتين ضوئيتين.

ب) طول شخص وعمره في الفترة من 5 سنوات إلى 60 سنة.

ج) درجة الحرارة في أحد الأيام خلال الفترة من الساعة 6 صباحاً إلى الساعة 11 مساءً.

30) تحذّر إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين بحيث $f(1) = 31, f(2) = 33, f(3) = 33, f(4) = 19$ ، وكانت $a = 5, b = 8$ فأوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحقّقان المعطيات السابقة.

31) تبيّنوا: افكر حل العبارة الآتية: صحيحة دائماً، صحيحة أحياناً، لا يمكن أن تكون صحيحة؟ إذا قطع التمثيل البياني محور الصادات بأكثر من نقطة فإن العبارة تمثل حالة * .

32) اكتبه، وضح كيف يحدد اختيار الخطأ الراسي إذا كانت العلاقة دالة أم لا. انظر الهامش.

تدريب على اختيار

33) تحتوي بركة سياحة على 19500 جالون من الماء إذا تم تفريغها بمعدل 6 جالونات لكل دقيقة، فأي المعادلات الآتية تمثل عدد جالونات الماء y المتبقية في البركة بعد m دقيقة؟ **A**

A $g = 19500 - 6m$ **B** $g = 19500 + 6m$
C $g = \frac{6m}{19500}$ **D** $g = \frac{19500}{6m}$

34) إذا كان $x^2 = xy$ ، فأي عبارة مما يأتي تساوي $g(x + 1)$ ؟ **C**

A $x^2 + 1$ **B** $x^2 + 2x + 1$
C $x^2 - x$ **D** $x^2 - x$

مراجعة تراكمية

بسط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس 1-1)

35) $3(5x + 4b) + 3(5x - 2b) + 4(5x - 3y) + 2(y + 3x) - 7(2c - 4d) + 8(3c + d)$ **33a** $14x + 14y$

37) $10c + 36d$

حل كل معادلة فيما يأتي، ثم تحقق من صحة الحل: (الدرس 1-1)

38) $-99 = 5(3y + 1) + 4(2y - 3) - 4$ **39** -4 **40** $4(2y - 3) - 3 = 10y - 5$ **3**

الدرس 1-2 العلاقات والتدوير 21

تأكيد

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

1) مثال 1 (1) $0, R, \sqrt{11}$ (2) $2, N, W, Z, Q, R$ (3) $I, R, \sqrt{11}$ (4) $Z, Q, R, -12$

2) مثال 2 ما الخاصية الموضحة في كلٍّ مما يأتي؟

(5) التجميعية $(6 \cdot 8) \cdot 5 = 6 \cdot (8 \cdot 5)$ (6) التوزيع $7(9 - 5) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 5$ (7) التبادلية $84 + 16 = 16 + 84$ (8) $12 + 5 = 6$

3) مثال 3 أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

(9) $7, -\frac{1}{7}$ (10) $10, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}$ (11) $3.8, \frac{1}{3.8}$ (12) $\sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}$

4) مثال 4 مال: يعمل عادل خياطاً للأوتاب، ويربح 44 ريالاً عن كل ثوب يخطفه، ويخطط لجمع مبلغ 1300 ريال لشراء آلة خياطة جديدة، وبين الجدول المجاور عدد الثياب التي خاطها في كل يوم من أيام الأسبوع معين.

(a) اكتب عبارة تمثل إجمالي المبلغ الذي ربحه عادل في تلك الأسبوع.

(b) استعمل خاصية التوزيع لتجد هذا المبلغ. **824 ريالاً**

(c) متى كسب المبلغ الذي يخطط لجمعه؟ وضع إجابتك. انظر الهامش.

5) مثال 5 بسّط كل عبارة مما يأتي:

(13) $24a + 9b$ (14) $6(6a + 5b) - 3(4a + 7b)$ (15) $23x - 6y$ (16) $5(3x + 6y) + 4(2x - 9y)$ (17) $-16x + 22y$ (18) $-5(8x - 2y) - 4(-6x - 3y)$ (19) $-4(6c - 3d) - 5(-2c - 4d)$

تدريب وحل المسائل

1) مثال 1 حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

(10) $0, R, -\frac{3}{4}$ (11) $0, R, -8.13$ (12) $0, R, \sqrt{25}$ (13) $21, N, W, Z, Q, R$ (14) $0.67, I, R$ (15) $\sqrt{17}$ (16) $Z, Q, R, \frac{23}{27}$ (17) N, W, Z, Q, R (18) $\frac{23}{27}$

2) مثال 2 ما الخاصية الموضحة في كلٍّ مما يأتي؟

(19) التجميعية $(16 + 7) + 23 = 16 + (7 + 23)$ (20) التوزيع $8\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = (8 + 5)\sqrt{11}$ (21) التبادلية $(\frac{22}{22})(\frac{22}{22}) = 1$

3) مثال 3 أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

(22) $8, -\frac{1}{8}$ (23) $12.1, \frac{1}{12.1}$ (24) $12.1, \frac{1}{12.1}$ (25) $0.25, -4$ (26) $0.25, -4$ (27) $12.1, \frac{1}{12.1}$ (28) $12.1, \frac{1}{12.1}$ (29) $12.1, \frac{1}{12.1}$ (30) $12.1, \frac{1}{12.1}$ (31) $12.1, \frac{1}{12.1}$ (32) $12.1, \frac{1}{12.1}$ (33) $12.1, \frac{1}{12.1}$ (34) $12.1, \frac{1}{12.1}$ (35) $12.1, \frac{1}{12.1}$ (36) $12.1, \frac{1}{12.1}$

4) مثال 4 بين الجدول المجاور أسعار 1200 أصناف من الأدوات المكتبية. فإذا تخفّض سعر كل منها بنسبة 15% فجد قيمة هذا الانخفاض للأصناف الـ 1200 معاً. **22.5 ريالاً**

الدرس 1-1 خصائص الأعداد الحقيقية 13

الصف الثاني الثانوي - الفصل الدراسي الأول

مسائل مهارات التفكير العليا

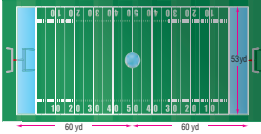
تتطلب هذه المسائل استعمال مهارات التفكير العليا (التحليل، والتركيب، ...، إلخ).

التمثيلات المتعددة

تساعد مسائل التمثيلات المتعددة الطلاب على تصوّر المفاهيم وتعميق الفهم، وتضمن: العبارات اللفظية والعديّة والجبرية والتمثيل البياني والجدول ... إلخ.

مثال 5 يبسط كل عبارة مما يأتي:

(37) $9c + 4b - 3c - 4b + 8c$ (38) $6d - 5a + 9d - 2a - 7a + 3d$ (39) $8(3x + 2y) + 8(4x - 9y) + 4(4x - 9y)$ (40) $8(2a + 4b) - 6(9a - 3b) - 5(10c + 8c) - 74x + 2z$ (41) $9(-2y + 4b) - 2(-5y + 6k) - 4(28g - 48k)$ (42) $6(4x - 7z) - 6(4x - 7z) - 5(10c + 8c) - 74x + 2z$ (43) **كرة قدم**، وضع خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثلان مساحة الملعب في الشكل أدناه، ثم أوجد مساحته.



(43) $53(60 + 60) = 53(60) + 53(60) = 6360 \text{ yd}^2$

(44) **تخفيضات**، بين الجدول المجاور أسعار بعض الأجهزة الكهربائية في محل. إذا انخفض سعر كل منها بنسبة 30%، وأراد أحمد أن يشتري من ذلك المحل جهاز تسجيل ومكينة و مروحة.

نوع السلعة	السعر (بالتريال)
جهاز تسجيل	170
مكينة	350
مروحة	110

(a) وضع خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثل كل منهما المبلغ الذي سيدفعه أحمد. **انظر الهامش**
(b) احسب المبلغ الذي سيدفعه أحمد بطريقتين مختلفتين مستعملًا خصائص العمليات على الأعداد. **441 ريالاً**

يبسط كل عبارة مما يأتي:

(45) $\frac{1}{4}(6x + 8y) + \frac{1}{2}(4c - 9d)$ (46) $\frac{3}{4}(4c - 9d) + \frac{2}{3}(6c - 8d) - \frac{199}{5}d - \frac{27}{5}c$ (47) $3(6a - 8c) - 3(5a + 10c)$ **انظر الهامش** (48) $3(5x + 10c) - 9(3x + 8y) - 9(3x + 8y)$ **انظر الهامش** (49) **ديكور**، يريد محمد شراء 5 ستائر لتولف منزله. تالفتان كبيرتان، و 3 تولفات صغيرة. فإذا كانت التالفة الكبيرة تحتاج إلى ستارة طولها $3\frac{3}{4}m$ من القماش، في حين تحتاج التالفة الصغيرة إلى ستارة طولها $2\frac{1}{2}m$. كم مترًا من القماش يحتاج إليه محمد؟ $14\frac{1}{2}m$

(a) استعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبين كيف يمكن لمحمد حساب كمية القماش التي يحتاج إليها ذهبيًا. **انظر الهامش**
(b) استعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبين كيف يمكن لمحمد حساب كمية القماش التي يحتاج إليها ذهبيًا. **انظر الهامش**

(50) **تمثيلات متعددة**، مستعملًا الأعداد: $-\sqrt{6}$, 3 , $-\frac{15}{3}$, 4.1 , π , 0 , $\frac{3}{8}$, $\sqrt{36}$

أجب عما يأتي:

(a) جدولياً، نظم هذه الأعداد في جدول وفقاً لمجموعة الأعداد التي تنتمي إليها. **انظر الهامش**
(b) جبرياً، اكتب كل عدد من الأعداد أعلاه على الصورة العشرية، ثم رتبها تصاعديًا.
(c) بيانياً، مثل هذه الأعداد على خط الأعداد. **انظر الهامش**
(d) اضبطياً، اكتب تخطيطاً حول ترتيب الأعداد الحقيقية باستعمال الصورة العشرية لها.

14 الفصل 3 الدوال والتمثيلات

الصف الثاني الثانوي - الفصل الدراسي الأول

معامل الآلة الحاسبة البيانية

توفر هذه المعامل للطلاب فرصة لفهم الرياضيات من خلال التمثيلات البيانية.

معمل الحاسبة البيانية
3-6 حل متباينات كثيرات الحدود

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل متباينات كثيرات الحدود.

نشاط
حل المتباينة $7 \leq 2x^3 + x^4$

الطريقة 1، تُمثل المعادلات المرتبطة بكل طرف بيانياً بشكل منفصل.

الخطوات

- اختر $Y_1 = 2x^3 + x^4$ ثم اختر $Y_2 = 7$ ، واكتب في الطرف الأيسر $2x^3 + x^4 = 7$ ، ثم اضغط مفتاح \square ليظهر التمثيل البياني.
- اضغط المفتاح \square لكتابة الطرف الأيمن 7 بجانب $f_2(x) =$ ، ثم اضغط مفتاح \square ليظهر التمثيل البياني. ملاحظة: تدرج الآلة المعاد على محور x بين (6.67, -6.67) وحتى يظهر التمثيل للمعادلة $7 = f_2(x)$ ثم بالضغط على مفتاح \square ومنها اختر \square ثم اختر منها \square لتعدد التدرج المناسب للمتغير x ليضمن العدد 7. فمثلاً يمكن اختيار قيمة 10 \square .
- حدد نقاط التقاطع من خلال الضغط على مفتاح \square ومنها اختر \square ثم اختر منها \square ليظهر نقاط التقاطع، وقم بالضغط على كلا التمثيلين \square فيكون الحل هو: $-2.47 \leq x \leq 1.29$ تقريباً.

الطريقة 2، تُمثل المعادلة المرتبطة بعد مساواتها بالصفر بيانياً.

$x^4 + 2x^3 - 7 = 0$

الخطوات

- من الشاشة الظاهرة اختر \square ثم اختر \square .
- اكتب المعادلة المرتبطة $7 = 2x^3 + x^4$ ، ثم اضغط مفتاح \square ليظهر التمثيل البياني. ملاحظة: اختر التدرج المناسب.
- حدد أصفار المعادلة من خلال الضغط على مفتاح \square ومنها اختر \square ثم اختر منها \square ، وتم بالضغط على التمثيل البياني والمحور x عند تقاطع التمثيلين مع المحور x ، فظهر إحداثياتهما، فيكون الحل هو: $-2.47 \leq x \leq 1.29$ تقريباً.

تمارين، (8) $0.495 < x < 1.75$ ، $-0.69 < x < 0.73$ (7) $1.35 < x < 1.35$ ، $-3.63 < x < -0.47$

حل كل متباينة مما يأتي، وقرب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة (4) $2.31 \leq x \leq 2.31$ (5) $4x^2 + 1 \geq x^3$ (6) $0.54 \leq x \leq -0.47$ (1) $5x \geq -9$ (2) $x^2 + 27x \leq 20$ (3) $1.09 \leq x \leq 1.09$ (4) $x^2 - 15 \leq 5x$ (5) $2 - \frac{1}{2}x^2 \geq \frac{1}{2}x^2 - 2$ (6) $-1.36 < x < 1.06$ (7) $x^4 - 15x^2 > -24$ (8) $x^2 - 6x^2 + 4x < -6$ (9) $x^4 - 15x^2 + x + 65 > 0$

جميع الأعداد الحقيقية

150 الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

الصف الثاني الثانوي - الفصل الدراسي الأول

معالجة الأخطاء

توفر السلسلة تقويمًا صريحًا ذا معنى لمدى تقدم الطلاب في بنية المنهج وفي المواد المساندة التي يستعين بها المعلم.



التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد: هناك بديان لتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

الجدول الأول: أجب عن الاختبار الآتي، وأرجع إلى "المراجعة السريعة" لمساعدتك على ذلك.

مراجعة سريعة	اختبار سريع
<p>مثال 1</p> <p>أعد كتابة العبارة $z = 2xy - 3$ على صورة جمع.</p> <p>الصورة الأصلية: $2xy - 3 = z$</p> <p>إعادة الكتابة باستعمال الجمع: $2xy + (-3) = z$</p>	<p>1-5) نظر الهامش</p> <p>أعد كتابة كل من العبارات الآتية على صورة جمع:</p> <p>(1) $5 - 13$ (2) $5 - 3y$ (3) $5m - 7np$</p> <p>(4) $3x^2y - 14xy^2$ (5) 20 حشرًا 20 شخصًا محاضرة، ثم غادروا القاعة في مجموعات ثنائية، فغادرت منهم مجموعة. اكتب عدد الأشخاص الباقين على صورة جمع.</p>
<p>مثال 2</p> <p>استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة الآتية دون أقواس:</p> <p>(1) $-3(a + b - c)$</p> <p>(2) $-3(a + b - c) = -3(a) + (-3)(b) + (-3)(-c)$</p> <p>الصيغة الأصلية: $-3a - 3b + 3c$</p> <p>خاصية التوزيع: $-3a - 3b + 3c$</p> <p>بالتبسيط: $-3a - 3b + 3c$</p>	<p>استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي دون أقواس:</p> <p>(1) $7 - 2b + 3d^2 - 9$ (2) $4a - 20 - 4(b + 5)$ (3) $7 - 4a - 20 - 4(b + 5)$ (4) $7 - 4a - 20 - 4(b + 5)$ (5) $7 - 4a - 20 - 4(b + 5)$ (6) $7 - 4a - 20 - 4(b + 5)$ (7) $7 - 4a - 20 - 4(b + 5)$ (8) $7 - 4a - 20 - 4(b + 5)$ (9) $7 - 4a - 20 - 4(b + 5)$ (10) $7 - 4a - 20 - 4(b + 5)$ (11) $7 - 4a - 20 - 4(b + 5)$ (12) $7 - 4a - 20 - 4(b + 5)$ (13) $7 - 4a - 20 - 4(b + 5)$ (14) $7 - 4a - 20 - 4(b + 5)$ (15) $7 - 4a - 20 - 4(b + 5)$</p>
<p>مثال 3</p> <p>حل المعادلة: $6x + 12 = 19 - 6x + x^2$.</p> <p>يمكن استعمال طريقة إكمال المربع.</p> <p>المعادلة الأصلية: $x^2 - 6x + 12 = 19 - 6x + x^2$</p> <p>بترس 12 من كلا الطرفين: $x^2 - 6x = 7$</p> <p>إضافة 9 لكلا الطرفين: $x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$</p> <p>تبسيط: $(x - 3)^2 = 16$</p> <p>إيجاد الجذر التربيعي لكلا الطرفين: $x - 3 = \pm 4$</p> <p>إضافة 3 لكلا الطرفين: $x = 3 \pm 4$</p> <p>الحلان هما: $x = 7$، $x = -1$</p>	<p>حل كل معادلة فيما يأتي:</p> <p>(1) $x^2 - 2x - 5 = 0$ (2) $x^2 + 2x - 5 = 0$ (3) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (4) $x^2 - x - 20 = 0$ (5) $x^2 - x = 0$ (6) $x^2 - x - 20 = 0$ (7) $x^2 - x - 20 = 0$ (8) $x^2 - x - 20 = 0$ (9) $x^2 - x - 20 = 0$ (10) $x^2 - x - 20 = 0$ (11) $x^2 - x - 20 = 0$ (12) $x^2 - x - 20 = 0$ (13) $x^2 - x - 20 = 0$ (14) $x^2 - x - 20 = 0$ (15) $x^2 - x - 20 = 0$</p>

الجدول الثاني: أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obelkaneducation.com

105 الفصل 3 التهيئة للفصل 3

1 التقويم التشخيصي

تقويم أولي: قوّم معرفة طلابك في بداية العام الدراسي، باستعمال اختبارات تشخيصية واختبارات تحديد المستوى، وسوف يساعدك هذا على تحديد مدى حاجة طلابك لمواد ومصادر تعلم إضافية؛ ليكونوا قادرين على الموازنة مع معايير مستوى الصف.

تقويم مستوى المدخلات الدراسية: قوّم المعارف السابقة لطلابك في بداية الفصل أو الدرس، من خلال المصادر الموجودة في كتاب الطالب أو دليل المعلم أو أي مصادر أخرى تراها مناسبة.



تلبية حاجات الطلاب:

توفر السلسلة دعمًا واسعًا يراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

حيث يحتوي كل فصل وكل درس على اقتراحات لتحديد احتياجات طلابك وتلبيتها.

كما أن تنوع التعليم يلي حاجات الفئتين الآتيتين:

دون الطلاب دون المتوسط.

فوق الطلاب فوق المتوسط.

الطلاب من المستوى المتقدم:

التسريع والإثراء: يمكن استعمال المصادر والواجبات المنزلية، والتي تم تصنيفها للطلاب فوق المتوسط، مع الطلاب ذوي المستوى التعليمي المتقدم.

تنوع التعليم

الفصل 1

البيئ 3 فوق المتوسط

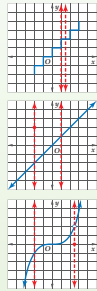
ضع قائمة بالصفات (أو الصفح للفضل، واكتب كلاً منها في بطاقة، ثم اطلب إلى الطلاب القيام بالتمه الأتيّة:
يقوم أحدهم بحسب بظاقتهم من بين البطاقات، ثم يشرح أمام زملائه محتويات البطاقة بينما أو جرحاً دون التقرُّ، يأتي كلمة.

جميع المستويات

بالتعاون مع طلاب الفصل، حدّد منطقة يتم فيها وضع قائمة بصفات وعرض كل معاداة منها. وبينما تقوم بإضافة المعدادات، اشرح الأتية عن الصفات المستعملة في كل منها، مثل السؤال: "هل تستعمل الرمز m للدلالة على الميل؟"

دون المتوسط

وُجِع على كل طالب عدداً من الرسوم البيانية، بحيث يكون بعضها أولاً والمعض الآخر لا يميل دوال، ثم اطلب إلى الطلاب رسم عددين من الخطوط العمودية على كل تحسّ، بحيث يحاكي كل منهم أن يجعل خطاً منها يقطع المنحنى في أكثر من نقطتين، ثم اطلب إلى كل طالب تحديد المنحنيات التي تمثل دوالاً.



مجموعات أسئلة متعددة المستويات:

تمّ تنوع الواجبات المنزلية لكل درس بحسب مستويات الطلاب:

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

مصادر متعددة المستويات:

توفر السلسلة مصادر لكل درس بحسب مستويات الطلاب:

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

2-3 ضرب المصفوفات

الهدف: ضرب المصفوفات

المتطلبات: ضرب المصفوفات

التمارين: 1-3

أسئلة التعميق: 1-3

2-3 ضرب المصفوفات

الهدف: ضرب المصفوفات

المتطلبات: ضرب المصفوفات

التمارين: 1-3

أسئلة التعميق: 1-3

2-3 مصادر الدرس

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	التمرين 1 (74)	التمرين 2 (74)	التمرين 3 (74)
كتاب التمارين	س 1 (12)	س 2 (12)	س 3 (12)
مصادر التعلم	مصدر 1 (18)	مصدر 2 (18)	مصدر 3 (18)
الأنشطة التطبيقية	النشاط 1 (18)	النشاط 2 (18)	النشاط 3 (18)

2-3 مصادر الدرس

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	التمرين 1 (74)	التمرين 2 (74)	التمرين 3 (74)
كتاب التمارين	س 1 (12)	س 2 (12)	س 3 (12)
مصادر التعلم	مصدر 1 (18)	مصدر 2 (18)	مصدر 3 (18)
الأنشطة التطبيقية	النشاط 1 (18)	النشاط 2 (18)	النشاط 3 (18)

2-3 ضرب المصفوفات

الهدف: ضرب المصفوفات

المتطلبات: ضرب المصفوفات

التمارين: 1-3

أسئلة التعميق: 1-3

2-3 ضرب المصفوفات

الهدف: ضرب المصفوفات

المتطلبات: ضرب المصفوفات

التمارين: 1-3

أسئلة التعميق: 1-3

2-3 مصادر الدرس

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	التمرين 1 (74)	التمرين 2 (74)	التمرين 3 (74)
كتاب التمارين	س 1 (12)	س 2 (12)	س 3 (12)
مصادر التعلم	مصدر 1 (18)	مصدر 2 (18)	مصدر 3 (18)
الأنشطة التطبيقية	النشاط 1 (18)	النشاط 2 (18)	النشاط 3 (18)

2-3 مصادر الدرس

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	التمرين 1 (74)	التمرين 2 (74)	التمرين 3 (74)
كتاب التمارين	س 1 (12)	س 2 (12)	س 3 (12)
مصادر التعلم	مصدر 1 (18)	مصدر 2 (18)	مصدر 3 (18)
الأنشطة التطبيقية	النشاط 1 (18)	النشاط 2 (18)	النشاط 3 (18)



معالجة متعددة المستويات

يُقدّم في كل فصل من فصول كتاب المعلم لمختلف الصفوف مدخل شامل للمعالجة.

التقويم والمعالجة

يتضمن كل فصل اقتراحات للتشخيص ومستويات المعالجة.

1 استعمال مجموعات أسئلة.

2 استعمال دليل الدراسة والمراجعة، وبدائل تنوع التعليم.

التقويم والمعالجة	
التقويم	التشخيص
<ul style="list-style-type: none"> بداية الفصل 1 التهيئة للفصل 1 من (9) بداية كل درس فيما سبق والآن لماذا؟ مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب خلال كل درس وبعد تحقق من فهمك لكل مثال تأكد مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تدريبات الخطوة 4: التقويم الاختبارات القصيرة، من (11, 12) www.obelkanducation.com 	<ul style="list-style-type: none"> محتصل المعالجة، من (8) مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب تدريبات المهارات: الفصل 1 تنوع التعليم تنوع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم: الفصل 1 www.obelkanducation.com
منتصف الفصل	
<ul style="list-style-type: none"> اختبار منتصف الفصل، من (29) اختبار منتصف الفصل، من (13) www.obelkanducation.com 	<ul style="list-style-type: none"> تدريبات المهارات: الفصل 1 تدريبات إعادة التعليم: الفصل 1 www.obelkanducation.com
نهاية الفصل	
<ul style="list-style-type: none"> دليل الدراسة والمراجعة، من (48-52) اختبار الفصل، من (53) اختبار تراكمي، من (56) www.obelkanducation.com 	<ul style="list-style-type: none"> تدريبات المهارات: الفصل 1 تدريبات إعادة التعليم: الفصل 1 www.obelkanducation.com
بعد انتهاء الفصل 1	
<ul style="list-style-type: none"> اختبار الفصل، النطاق 2A، 2B، من (15-20) اختبار الفصل، النطاق 3، من (21-22) اختبار المفردات، من (14) اختبار الفصل أو الإجابات المطلوبة، من (23) اختبار تراكمي، من (24-26) www.obelkanducation.com 	<ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم: الفصل 1 www.obelkanducation.com

في بداية كل فصل

يقدم مخطط المعالجة اقتراحات لطرائق التعامل مع الطلاب بناءً على نتائج اختبار "التهيئة" في بداية كل فصل، وتساعدك العبارات الشريطية التي يتضمنها المخطط على تحديد مستوى المعالجة الذي تستعمله.

التهيئة للفصل 4

استعمل نتائج الاختبار المبرمج ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب، وتساعدك العبارة "إذا... فقم..." في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

المستوى	مستوى
1	2

مخطط المعالجة

التهيئة للفصل 4

مستوى 1: $2\sqrt{7} \sqrt{5} = 2.5 \sqrt{35}$

مستوى 2: $3x + 2 = 2x + 5$

مستوى 3: $3x^2 + 2x - 5 = 0$

مستوى 4: $3x^2 + 2x - 5 = 0$

اختبار منتصف الفصل

بداية كل فصل

التهيئة للفصل 4

مستوى 1: $2\sqrt{7} \sqrt{5} = 2.5 \sqrt{35}$

مستوى 2: $3x + 2 = 2x + 5$

مستوى 3: $3x^2 + 2x - 5 = 0$

مستوى 4: $3x^2 + 2x - 5 = 0$

خلال كل درس

توفر السلسلة فرصًا متعددة للتقويم التكويني في كل فصل؛ ليحدد المعلم ما إذا كانت هناك ضرورة للمعالجة بناءً على نتائج الطلاب أم لا.

ما بعد الفصل

توفر السلسلة بدائل متعددة للطلاب الذين لا يزالون يعانون من صعوبات بعد إنهاء الفصل، تساعدكم على تحسين مستوياتهم.

سهولة الاستعمال :

تميّز السلسلة بأنها نموذج تعليم قوي يشتمل على بدائل تنويع التعليم، وإعادة التعليم والتعزيز، وبدائل للتوسع، وإرشادات للمعلم تساعد على تعرّف مستويات الطلاب، كما يشتمل على نشاطات قبلية متقدمة، وتقويم مصاحب للتعليم.

تخطيط ملائم للدرس في متناول اليد :

يساعدك مخطط الفصل على التخطيط للتعليم، من خلال توضيح الأهداف والخطة الزمنية المقترحة، والتغطية الشاملة للأفكار المحورية.

مخطط الفصل		الدوال والتمثيلات	
الصفحة	الموضوع	الصفحة	الموضوع
188	مقدمة	188	مقدمة
189	الأهداف	189	الأهداف
190	العمليات	190	العمليات
191	المحتوى	191	المحتوى
192	التقويم	192	التقويم
193	المصادر	193	المصادر
194	ملاحظات	194	ملاحظات
195	ملاحظات	195	ملاحظات
196	ملاحظات	196	ملاحظات
197	ملاحظات	197	ملاحظات
198	ملاحظات	198	ملاحظات
199	ملاحظات	199	ملاحظات
200	ملاحظات	200	ملاحظات
201	ملاحظات	201	ملاحظات
202	ملاحظات	202	ملاحظات
203	ملاحظات	203	ملاحظات
204	ملاحظات	204	ملاحظات
205	ملاحظات	205	ملاحظات
206	ملاحظات	206	ملاحظات
207	ملاحظات	207	ملاحظات
208	ملاحظات	208	ملاحظات
209	ملاحظات	209	ملاحظات
210	ملاحظات	210	ملاحظات
211	ملاحظات	211	ملاحظات
212	ملاحظات	212	ملاحظات
213	ملاحظات	213	ملاحظات
214	ملاحظات	214	ملاحظات
215	ملاحظات	215	ملاحظات
216	ملاحظات	216	ملاحظات
217	ملاحظات	217	ملاحظات
218	ملاحظات	218	ملاحظات
219	ملاحظات	219	ملاحظات
220	ملاحظات	220	ملاحظات
221	ملاحظات	221	ملاحظات
222	ملاحظات	222	ملاحظات
223	ملاحظات	223	ملاحظات
224	ملاحظات	224	ملاحظات
225	ملاحظات	225	ملاحظات
226	ملاحظات	226	ملاحظات
227	ملاحظات	227	ملاحظات
228	ملاحظات	228	ملاحظات
229	ملاحظات	229	ملاحظات
230	ملاحظات	230	ملاحظات
231	ملاحظات	231	ملاحظات
232	ملاحظات	232	ملاحظات
233	ملاحظات	233	ملاحظات
234	ملاحظات	234	ملاحظات
235	ملاحظات	235	ملاحظات
236	ملاحظات	236	ملاحظات
237	ملاحظات	237	ملاحظات
238	ملاحظات	238	ملاحظات
239	ملاحظات	239	ملاحظات
240	ملاحظات	240	ملاحظات
241	ملاحظات	241	ملاحظات
242	ملاحظات	242	ملاحظات
243	ملاحظات	243	ملاحظات
244	ملاحظات	244	ملاحظات
245	ملاحظات	245	ملاحظات
246	ملاحظات	246	ملاحظات
247	ملاحظات	247	ملاحظات
248	ملاحظات	248	ملاحظات
249	ملاحظات	249	ملاحظات
250	ملاحظات	250	ملاحظات
251	ملاحظات	251	ملاحظات
252	ملاحظات	252	ملاحظات
253	ملاحظات	253	ملاحظات
254	ملاحظات	254	ملاحظات
255	ملاحظات	255	ملاحظات
256	ملاحظات	256	ملاحظات
257	ملاحظات	257	ملاحظات
258	ملاحظات	258	ملاحظات
259	ملاحظات	259	ملاحظات
260	ملاحظات	260	ملاحظات
261	ملاحظات	261	ملاحظات
262	ملاحظات	262	ملاحظات
263	ملاحظات	263	ملاحظات
264	ملاحظات	264	ملاحظات
265	ملاحظات	265	ملاحظات
266	ملاحظات	266	ملاحظات
267	ملاحظات	267	ملاحظات
268	ملاحظات	268	ملاحظات
269	ملاحظات	269	ملاحظات
270	ملاحظات	270	ملاحظات
271	ملاحظات	271	ملاحظات
272	ملاحظات	272	ملاحظات
273	ملاحظات	273	ملاحظات
274	ملاحظات	274	ملاحظات
275	ملاحظات	275	ملاحظات
276	ملاحظات	276	ملاحظات
277	ملاحظات	277	ملاحظات
278	ملاحظات	278	ملاحظات
279	ملاحظات	279	ملاحظات
280	ملاحظات	280	ملاحظات
281	ملاحظات	281	ملاحظات
282	ملاحظات	282	ملاحظات
283	ملاحظات	283	ملاحظات
284	ملاحظات	284	ملاحظات
285	ملاحظات	285	ملاحظات
286	ملاحظات	286	ملاحظات
287	ملاحظات	287	ملاحظات
288	ملاحظات	288	ملاحظات
289	ملاحظات	289	ملاحظات
290	ملاحظات	290	ملاحظات
291	ملاحظات	291	ملاحظات
292	ملاحظات	292	ملاحظات
293	ملاحظات	293	ملاحظات
294	ملاحظات	294	ملاحظات
295	ملاحظات	295	ملاحظات
296	ملاحظات	296	ملاحظات
297	ملاحظات	297	ملاحظات
298	ملاحظات	298	ملاحظات
299	ملاحظات	299	ملاحظات
300	ملاحظات	300	ملاحظات

الترابط الرأسي (بين الفصول) :

بُنيت المواضيع الدراسية على المفاهيم والمهارات السابقة للصف المعني، وتؤسس لمواضيع مستقبلية.

المحتوى الرياضي	الترابط الرأسي
<p>مقدمة في الصفوف:</p> <p>أكثر الصفوف من التي في هذا الفصل هي الصفوف السابقة لهذا الفصل، حيث أن هذا الفصل هو جزء من سلسلة من الصفوف التي تتناول الموضوع نفسه.</p> <p>بعض الصفوف التي تتناول الموضوع نفسه هي:</p> <ul style="list-style-type: none"> الصفوف السابقة لهذا الفصل. الصفوف التي تتناول الموضوع نفسه في الصفوف السابقة لهذا الفصل. الصفوف التي تتناول الموضوع نفسه في الصفوف اللاحقة لهذا الفصل. 	<p>الترابط الرأسي:</p> <p>بُنيت المواضيع الدراسية على المفاهيم والمهارات السابقة للصف المعني، وتؤسس لمواضيع مستقبلية.</p> <p>بعض الصفوف التي تتناول الموضوع نفسه هي:</p> <ul style="list-style-type: none"> الصفوف السابقة لهذا الفصل. الصفوف التي تتناول الموضوع نفسه في الصفوف السابقة لهذا الفصل. الصفوف التي تتناول الموضوع نفسه في الصفوف اللاحقة لهذا الفصل.

التقويم التشخيصي
التهيئة ص (9)

العنوان	الدرس 1-1 حصتان	الدرس 1-2 حصتان	توسع 1-2 حصة واحدة	الدرس 1-3 (3) حصص
الأهداف	<ul style="list-style-type: none"> • تصنيف الأعداد الحقيقية. • استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لإيجاد قيم عبارات جبرية. 	<ul style="list-style-type: none"> • تحليل العلاقات والدوال. • استعمال معادلات العلاقات والدوال. 	<ul style="list-style-type: none"> • استعمال الدوال المنفصلة والدوال المتصلة لحل مسائل حياتية. 	<ul style="list-style-type: none"> • كتابة الدوال المتعددة التعريف وتمثيلها بيانياً. • كتابة الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة وتمثيلها بيانياً.
المفردات	<ul style="list-style-type: none"> الأعداد الحقيقية الأعداد النسبية الأعداد غير النسبية الأعداد الصحيحة الأعداد الكلية الأعداد الطبيعية 	<ul style="list-style-type: none"> الدالة المتباينة العلاقة المنفصلة العلاقة المتصلة اختبار الخط الرأسي المتغير المستقل المتغير التابع رمز الدالة 		<ul style="list-style-type: none"> الدالة المتعددة التعريف الدالة المتعددة التعريف الخطية الدالة الدرجية دالة أكبر عدد صحيح دالة القيمة المطلقة
تمثيلات متعددة	ص (14)	ص (20)		ص (28)
مصادر الدرس	<ul style="list-style-type: none"> مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق كتاب التمارين ص (4) دون ضمن فوق 	<ul style="list-style-type: none"> مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق كتاب التمارين ص (5) دون ضمن فوق 		<ul style="list-style-type: none"> مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق كتاب التمارين ص (6) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	الاسبورة التفاعلية، ص (11)	الاسبورة التفاعلية، ص (17)		مدونة، ص (25)
تنوع التعليم	ص (11,12,15)	ص (19,21)		ص (25,26)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (29)

المفاتيح: **دون** دون المتوسط **ضمن** ضمن المتوسط **فوق** فوق المتوسط

الخطة الزمنية		
المجموع	المراجعة والتقييم	التدريس
حصة (22)	حصة (4)	حصة (18)

العنوان	الدرس 1-4 (3) حصص	الدرس 1-5 (3) حصص	توسع 1-5 حصة واحدة	الدرس 1-6 (3) حصص	
الأهداف	<ul style="list-style-type: none"> تمثيل المتباينات الخطية بيانياً. تمثيل متباينات القيمة المطلقة بيانياً. 	<ul style="list-style-type: none"> حل نظام متباينات خطية بيانياً. تحديد إحداثيات النقاط التي تمثل رؤوس منطقة الحل. 	<ul style="list-style-type: none"> تمثيل نظام من المتباينات الخطية بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية. 	<ul style="list-style-type: none"> إيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معينة. استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية. 	
المضردات	المتباينة الخطية الحد	منطقة الحل نظام المتباينات الخطية		القيود البرمجة الخطية محدود غير محدود الحل الأمثل	
تمثيلات متعددة					
مصادر الدرس	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (7) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (8) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> ص (9) دون ضمن فوق 		
التقنيات لكل درس	تسجيل مرئي، ص (31)	نشرة إلكترونية، ص (39)		السيبورة التفاعلية، ص (43)	
تنوع التعليم	ص (34)	ص (37, 39, 40)		ص (44, 47)	

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة ص (48-52)
- اختبار الفصل ص (53)
- اختبار تراكمي ص (56-57)

المعالجة	التشخيص	التقويم
	بداية الفصل 1	التقويم التشخيصي
مخطط المعالجة، ص (9)	التهيئة للفصل 1 ، ص (9)	
	بداية كل درس	
مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب	فيما سبق، والآن، لماذا؟	التقويم التكويني
	خلال كل درس وبعده	
تدريبات المهارات، الفصل 1	تحقق من فهمك، لكل مثال	
تنوع التعليم	تأكد	
تنوع الواجبات المنزلية	مسائل مهارات التفكير العليا	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1	مراجعة تراكمية	
www.obeikaneducation.com	أمثلة إضافية	
	تنبيه!	
	الخطوة 4، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (11, 12)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
تدريبات المهارات، الفصل 1	اختبار منتصف الفصل، ص (29)	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1	اختبار منتصف الفصل، ص (13)	
www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com	
	نهاية الفصل	
تدريبات المهارات، الفصل 1	دليل الدراسة والمراجعة، ص (48-52)	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1	اختبار الفصل، ص (53)	
www.obeikaneducation.com	اختبار تراكمي، ص (56)	
	www.obeikaneducation.com	
	بعد انتهاء الفصل 1	التقويم الختامي
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1	اختبار الفصل، النماذج 1A, 2B ، ص (15-20)	
www.obeikaneducation.com	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (21-22)	
	اختبار المفردات ، ص (14)	
	اختبار الفصل ذو الإجابات المطولة ، ص (23)	
	اختبار تراكمي ، ص (24-26)	
	www.obeikaneducation.com	

البديل 1

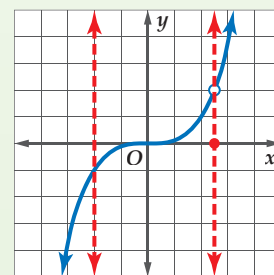
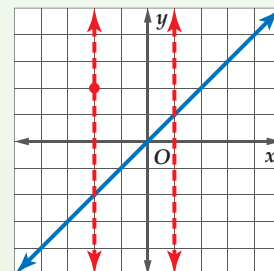
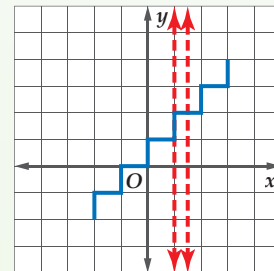
جميع المستويات دون ضمن فوق

بالتعاون مع طلاب الفصل، حدّد منطقة يتم فيها وضع قائمة بمعادلات وعرض كلّ معادلة منها. وبينما تقوم بإضافة المعادلات، اطرح أسئلة عن المتغيرات المستعملة في كلّ منها، مثل السؤال: "هل تستعمل الرمز m دائماً للدلالة على الميل؟"

البديل 2

دون المتوسط دون

وزّع على كل طالب عددًا من الرسوم البيانية، بحيث يكون بعضها دوالّ والبعض الآخر لا يمثل دوال، ثمّ اطلب إلى الطلاب رسم عددٍ من الخطوط العمودية على كل منحنى، بحيث يحاول كلّ منهم أن يجعل خطًّا منها يقطع المنحنى في أكثر من نقطة، ثم اطلب إلى كل طالب تحديد المنحنيات التي تمثل دوالّ.



البديل 3

فوق المتوسط فوق

ضع قائمةً بالمفردات و/ أو الصيغ للفصل، واكتب كلّ منها في بطاقة، ثم اطلب إلى الطلاب القيام باللعبة الآتية: يقوم أحدهم بسحب بطاقةٍ من بين البطاقات، ثم يمثل أمام زملائه محتويات البطاقة بيانياً أو حركياً دون التفتُّه بأي كلمة.

ملخص الدروس

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية

يرتبط كل عدد حقيقي بنقطة على خط الأعداد، كما ترتبط كل نقطة على خط الأعداد بعدد حقيقي، ويمكن تصنيف الأعداد الحقيقية إلى أعداد نسبية وأعداد غير نسبية.

• يمكن كتابة العدد النسبي على النحو: $\frac{m}{n}$ ؛ حيث m, n عددان صحيحان، $n \neq 0$.

• تسمى جميع الأعداد الحقيقية التي ليست نسبية أعدادًا غير نسبية.
• تستعمل خصائص الأعداد في تبرير خطوات حل المعادلات، وفي وصف العلاقات الرياضية.

وتتضمن خواص الأعداد الحقيقية الخواص الآتية:

- خاصية التبديل لكل من عملية الجمع والضرب.
- خاصية التجميع لكل من عملية الجمع والضرب.
- خاصية التوزيع.

وتتضمن مجموعة الأعداد الحقيقية عنصرًا محايدًا لكل من عملية الجمع وعملية الضرب، ونظرًا جمعياً ونظيرًا ضربياً لكل عدد حقيقي باستثناء العدد 0، حيث لا يوجد له نظير ضربى.

1-2 العلاقات والدوال

تذكر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة، وأن الدالة هي علاقة يرتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى، ويمكن للدالة أن توصف بأنها متباينة؛ بناءً على عملية ربط عناصر المجال بعناصر المدى.

تستعمل الوسائل العددية والبيانية في التمييز بين الدوال والعلاقات، كما تستعمل المقابلة في التعبير عن الكيفية التي يتم فيها ربط عناصر المدى بعناصر المجال، من خلال التعبير عن ذلك بمجموعة من الأزواج المرتبة، وبالتالي فإن عملية المقابلة تستعمل في تحديد العلاقات التي تعد دوالاً.

وعندما يكون مجال العلاقة أو الدالة مجموعة من النقاط، فإن المجال يكون منفصلاً، أما عندما لا يوجد فجوات في المجال وتمثل العلاقة أو الدالة بخط أو منحنى، فإن المجال يكون متصلًا.

الترايط الرأسي

ما قبل الفصل 1

- تحديد المجال والمدى في مواقف محددة.
- تحديد مقطعي الدوال الخطية لكل من المحورين.
- تحديد ميل الخط المستقيم.
- كتابة معادلة الخط المستقيم وتمثيله بيانياً.
- وضع متباينات خطية لحل مسائل.

الفصل 1

- تحديد كل من المجال والمدى لعلاقة، مع تحديد المجال والمدى ضمن قيود محددة لمواقف تتضمن قيمًا منفصلة أو متصلة.
- تحديد الدوال الرئيسة لكل من: الدوال الخطية: $(f(x) = x)$ ، ودوال القيمة المطلقة: $(f(x) = |x|)$.
- التمثيل البياني لكل من: المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة.
- حل نظام متباينات خطية بيانياً.
- إيجاد الحل الأمثل.

ما بعد الفصل 1

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- وصف الدوال الرئيسة بالرموز وبالتمثيل البياني بما في ذلك الدالة: $f(x) = |x|$.
- تحديد كل من المجال والمدى للدوال باستعمال: الرسوم البيانية والجداول والرموز.

دوال خاصة

1-3

يتضمن هذا الدرس عددًا من الدوال الخاصة، وتتضمن هذه الدوال الدوال الخطية الآتية:

- الدوال المتعددة التعريف حيث تكتب من خلال عبارتين أو عبارات جبرية.
- الدالة الدرجية (التي تشبه الدرج) والتي تُعدُّ حالةً خاصةً من الدوال المتعددة التعريف، وتتألف هذه الدالة من عددٍ من القطع المستقيمة المتوازية التي تشبه الدرج.
- دالة القيمة المطلقة وتشبه الحرف V ، وتتألف من رأس مشترك لجزأين من خطين مستقيمين.

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً

1-4

تعرّف مجموعة الحل للمتباينة الخطية على أنها مجموعة الأزواج المرتبة التي تجعل المتباينة صحيحةً، ويمكن تمثيل المتباينة بيانياً من خلال تظليل منطقة الحل، وهي إحدى المنطقتين في المستوى البياني اللتين يقسمهما الخط الممثل للحد.

ويمكن للخط الذي يمثل حدود منطقة الحل أن يكون ضمن مجموعة الحل، وعندما يمثل بخطٍّ غير متقطع، وذلك عندما تتضمن المتباينة أحد الرمزين \leq ، \geq . كما يمكنه ألا يكون ضمن منطقة الحل، وعندما يمثل بخطٍّ متقطع، وذلك عندما تتضمن المتباينة أحد الرمزين $<$ ، $>$.

ويشبه التمثيل البياني لمتباينات دوال القيمة المطلقة التمثيل البياني للمتباينات الخطية، حيث يتمُّ في البداية تمثيل الخطوط التي تتضمنها المتباينة على أساس استعمال المساواة في كل منها، ثم يتمُّ تحديد ما إذا كانت هذه الخطوط متصلةً أو متقطعةً، وبعدها يتمُّ تحديد منطقة الحل وتظليلها.

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

1-5

حلُّ نظام المتباينات بالرسم البياني يشبه حلُّ نظام المعادلات بالتمثيل البياني. وتبدأ عملية الحل بتمثيل بياني للمتباينات في النظام على المستوى الإحداثي نفسه، ثم يتمُّ تحديد منطقة الحل من خلال إيجاد الأزواج المرتبة التي تحقق المتباينات جميعها، وتمثل منطقة الحل لنظام من متباينتين في المنطقة المشتركة بينهما والتي يجب تحديدها. وعندما لا يكون هنالك منطقة مشتركة أو عندما لا تتقاطع المنطقتان تكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية، وعندما نستنتج عدم وجود حلِّ لنظام المتباينات.

وإذا حصر التمثيل البياني لنظام من ثلاثة متباينات أو أكثر منطقة مغلقة، فإن رؤوس هذه المنطقة يمكن تحديدها من خلال إيجاد إحداثيي كلٍّ منها بإيجاد نقط تقاطع المستقيمين اللذين يتقاطعان عندها.

البرمجية الخطية والحل الأمثل

1-6

يعتمد حل المسألة التي تتناول البرمجة الخطية على المهارات التي تعلمتها في الدرس 5-1. فبعد أن يتمُّ تمثيل المتباينات الخطية وتحديد إحداثيي كلٍّ من رؤوس منطقة الحل، يتمُّ إيجاد قيمة دالة معينة بتعويض إحداثيي الرؤوس في هذه الدالة، حيث تمثل النقطة التي يكون للدالة عندها قيمة عظمى أو قيمة صغرى حلاً للمسألة.

وفيما يلي توضيح لعناصر حل المسألة باستعمال البرمجية الخطية.

- تسمى المتباينات في النظام بالقيود.
- تسمى المنطقة التي تحقق النظام منطقة الحل.
- تسمى نقاط تقاطع حدود الخطوط برؤوس منطقة الحل.

الدوال والامتباينات

Functions and Inequalities

مشروع الفصل

زيادة ربح مصنع

- أسأل الطلاب، ما العوامل التي تؤخذ بعين الاعتبار لحساب ربح مصنع؟
- قسّم الطلاب مجموعاتٍ، بحيث تحوي كل مجموعة 5-6 طلاب.
- اطلب إلى كل مجموعة زيارة أحد المصانع، أو جمع بياناتٍ عن أحد المصانع من ناحية: نوعية المنتج، حجمه، سعر التكلفة للعبوة، سعر البيع...
- ثم اطلب إليهم تحديد منتجين للمصنع أو منتج واحد بعلبتين مختلفتين، ووضع دالة الربح لهما، وكذلك المتباينات التي تمثل قيودًا.
- اطلب إليهم تحديد عدد العلب من كل نوع، والتي يجب أن ينتجها المصنع ليحقق أعلى ربح.
- اطلب إلى الطلاب تحضير تقرير للنتائج، وعرض المشاريع ومناقشتها أمام زملائهم.

فيما سبق؟

درست حل المعادلات والامتباينات الخطية.

والآن؟

- أبسط العبارات الجبرية، وأجد قيمها.
- أستعمل معادلات العلاقات والدوال.
- أحل أنظمة المتباينات الخطية بيانيًا.
- أحل مسائل من واقع الحياة مستعملًا البرمجة الخطية.

لماذا؟

• **مصانع:** تسعى المصانع عادة لتحقيق أعلى ربح ممكن، ويتطلب ذلك من الإدارة إتقان مهارات رياضية معينة لتخفيض التكلفة، وفي هذا الفصل سنتعلم كيفية زيادة الربح أو تقليل التكلفة لتحقيق أكبر ربح ممكن من خلال استعمال البرمجة الخطية.

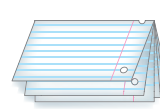


المطويات

منظم أفكار

الدوال والامتباينات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الدوال والامتباينات. مبتدأً بثلاث أوراق A4.

- 1 اطوكل ورقة من المنتصف كما هو مبين في الشكل.
- 2 قص الأوراق مع خط الطي كما هو مبين، ثم ثبت أنصاف الأوراق الست الناتجة لتحصل على كُتيبٍ صغير.
- 3 قص أطراف الأوراق كما هو مبين، بحيث تترك سطرين من طرف الورقة الأولى و4 أسطر من طرف الورقة الثانية وهكذا.
- 4 سمّ طرف كل ورقة برقم درس من دروس الفصل.



المفردات قدّم مفردات الفصل مستعملًا النمط الآتي:

التعريف: المعادلة الخطية هي معادلة تحتوي على متغير أو أكثر، وتستعمل فقط عمليات جمع وطرح وضرب المتغيرات فيها في أعداد ثابتة.

مثال: المعادلة $y = 5x - 3$ هي معادلة خطية.

سؤال: هل المعادلة $5x^2 + 9.5 = y$ معادلة خطية؟ فسر. لا؛ لأن المعادلة تحتوي على متغيرات مرفوعة لأس غير 1.

المطويات

منظم أفكار

وقت استعمالها شجع الطلاب أثناء دراستهم الفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم لاستعمالها في المراجعة استعدادًا لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

• نموذج بناء المفردات، ص (9).
يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

غرضها: يدوّن الطلاب ملاحظاتهم حول الدوال والامتباينات التي تمرّ معهم في هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح، ثمّ اطلب إليهم استعمال الجزء المناسب منها لكتابة المفردات الجديدة في ملاحظاتهم لكل درس، وشجعهم كذلك على توضيح المفردات عن طريق كتابة الأمثلة.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة، لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. والعبارة "إذا... فقم" في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى	ضمن المتوسط
1	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة، بمراجعة العمليات على الكسور الاعتيادية والكسور العشرية، وحساب قيم العبارات الجبرية، وتمثيل المتباينات في المستوى بيانياً.
2	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة، بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد: هناك بديان للتأكد من فهمك للمهارات السابقة الضرورية.

البديل 1

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة": لمساعدتك على ذلك.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد ناتج: $(\frac{3}{16})(-\frac{4}{5})$.

بضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

$$(\frac{3}{16})(-\frac{4}{5}) = -\frac{3(4)}{16(5)}$$

بالتبسيط.

$$= -\frac{12}{80}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على ق.م.أ (4)

$$= -\frac{12 \div 4}{80 \div 4}$$

بالتبسيط.

$$= -\frac{3}{20}$$

اختبار سريع

أوجد الناتج في كل مما يأتي:

(1) $15.7 + (-3.45)$ (2) $12.25 - 18.54 - (-32.05)$ (3) $6.75 - (-9.8)$ (4) $-66.15 - 4 \div (-0.5)$ (5) $3\frac{2}{3} + (-3\frac{4}{5})$ (6) $54 - \frac{26}{6}$ (7) $(\frac{6}{5})(-\frac{10}{9})$ (8) $-3 \div \frac{7}{8}$ (9) صناعات يدوية: تحتاج فاطمة إلى $\frac{7}{8}m$ من الخيوط لصنع رابطة شعر، فكم مترًا من الخيوط يلزمها لصنع رابطة؟ **10.5 m**

(10) $2b - 5c$ (11) $4a - 3$ (12) $b^2 - 3b + 6$ (13) $\frac{2a+4b}{c}$ (14) اتصالات: تستعمل إحدى شركات الاتصالات العبارة $20 + 0.25m$ لإيجاد التكلفة بالريال لـ m من دقائق الاتصال. أوجد تكلفة 80 دقيقة اتصال. **40 ريالاً**

(15) $y = 3$ (16) $x + y = 1$ (17) $3x - y = 6$ (18) $x + 2y = 5$ (19) $y = 4x - 1$ (20) $5x - 4y = 12$ (21-22) انظر ملحق الإجابات.

(21) مشتريات: اشترى صلاح ثلاثة بالقميص، على أن يدفع 900 ريال دفعة أولى، ويدفع 400 ريال كل شهر. اكتب معادلة للمبلغ الكلي الذي سيدفعه بعد x شهرًا، ثم مثلها بيانياً.

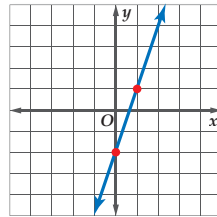
مثال 2

أوجد قيمة العبارة $3a^2 - 2ab + b^2$ إذا كانت $a = 4$ ، $b = -3$.

$$\begin{aligned} 3a^2 - 2ab + b^2 &= 3(4)^2 - 2(4)(-3) + (-3)^2 \\ &= 3(16) - 2(4)(-3) + 9 \\ &= 48 - (-24) + 9 \\ &= 48 + 24 + 9 \\ &= 81 \end{aligned}$$

مثال 3

مثل في المستوى المستقيم $y = 3x - 2$ بيانياً.



كُونْ جدولاً يتضمن قيمتين على الأقل للإحداثي x ، وأوجد الإحداثي y لكل منهما، ثم كُونْ أزواجاً مرتبة ومثلها بيانياً.

x	y	(x, y)
0	-2	(0, -2)
1	1	(1, 1)

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي إذا كانت:

$a = -3$, $b = 4$, $c = -2$

(10) $2b - 5c$ (11) $4a - 3$ (12) $b^2 - 3b + 6$ (13) $\frac{2a+4b}{c}$ (14) اتصالات: تستعمل إحدى شركات الاتصالات العبارة $20 + 0.25m$ لإيجاد التكلفة بالريال لـ m من دقائق الاتصال. أوجد تكلفة 80 دقيقة اتصال. **40 ريالاً**

(15) $y = 3$ (16) $x + y = 1$ (17) $3x - y = 6$ (18) $x + 2y = 5$ (19) $y = 4x - 1$ (20) $5x - 4y = 12$ (21-22) انظر ملحق الإجابات.

(21) مشتريات: اشترى صلاح ثلاثة بالقميص، على أن يدفع 900 ريال دفعة أولى، ويدفع 400 ريال كل شهر. اكتب معادلة للمبلغ الكلي الذي سيدفعه بعد x شهرًا، ثم مثلها بيانياً.

مثل في المستوى كل مستقيم مما يأتي بيانياً:

(15) $y = 3$ (16) $x + y = 1$ (17) $3x - y = 6$ (18) $x + 2y = 5$ (19) $y = 4x - 1$ (20) $5x - 4y = 12$ (21-22) انظر ملحق الإجابات.

(15) $y = 3$ (16) $x + y = 1$ (17) $3x - y = 6$ (18) $x + 2y = 5$ (19) $y = 4x - 1$ (20) $5x - 4y = 12$ (21-22) انظر ملحق الإجابات.

(19) $y = 4x - 1$ (20) $5x - 4y = 12$ (21-22) انظر ملحق الإجابات.

(21) مشتريات: اشترى صلاح ثلاثة بالقميص، على أن يدفع 900 ريال دفعة أولى، ويدفع 400 ريال كل شهر. اكتب معادلة للمبلغ الكلي الذي سيدفعه بعد x شهرًا، ثم مثلها بيانياً.

البديل الثاني

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

خصائص الأعداد الحقيقية Properties of Real Numbers

أدوات رياضية



لماذا؟

يبيع محل للأدوات الرياضية 3 أصناف بالسعر نفسه. إن شراء عدة أصناف لكل منها السعر نفسه يسهل عليك إيجاد المبلغ الإجمالي للشراء، وذلك باستعمال خاصية توزيع الضرب على الجمع.

فيما سبق:

درست الأعداد الحقيقية، والعمليات عليها.

والآن:

- أصنف الأعداد الحقيقية.
- أستعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط قيم العبارات الجبرية.

المفردات:

الأعداد الحقيقية

real numbers

الأعداد النسبية

rational numbers

الأعداد غير النسبية

irrational numbers

الأعداد الصحيحة

integers

الأعداد الكلية

whole numbers

الأعداد الطبيعية

natural numbers

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-1

الأعداد الحقيقية والعمليات عليها.

الدرس 1-1

تصنيف الأعداد الحقيقية.

استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لإيجاد قيم عبارات جبرية.

ما بعد الدرس 1-1

استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لحل معادلات ومتباينات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
وأسأل:

- كم سعر كل صنف؟ 30 ريالاً
- كم سعر الأصناف الثلاثة معاً؟ 90 ريالاً
- اكتب تعبيراً باستعمال خاصية التوزيع، يمكن استعماله لحساب سعر كرتي سلة وكرة قدم.

$$2(30) + 30 = 3(30)$$

أضف إلى

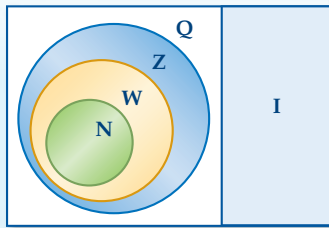
مطويتك

الأعداد الحقيقية (R)

مفهوم أساسي

أمثلة	المجموعة	الرمز
$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66\dots$	الأعداد النسبية	Q
$\pi = 3.14159\dots$ $\sqrt{3} = 1.73205\dots$	الأعداد غير النسبية	I
$-5, 17, -23, 8$	الأعداد الصحيحة	Z
$2, 96, 0, \sqrt{36}$	الأعداد الكلية	W
$3, 17, 6, 86$	الأعداد الطبيعية	N

الأعداد الحقيقية R



مثال 1

تصنيف الأعداد

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

(a) -23 مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، مجموعة الأعداد النسبية (Q)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

(b) $\sqrt{50}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

(c) $-\frac{4}{9}$ مجموعة الأعداد النسبية (Q)، مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

تحقق من فهمك

$$Q, R - \frac{Z}{8} \text{ (1D)} \quad I, R \sqrt{95} \text{ (1C)} \quad Z, Q, R - \sqrt{49} \text{ (1B)} \quad Z, Q, R - 185 \text{ (1A)}$$

10 الفصل 1 الدوال والمتباينات

مصادر الدرس 1-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (12)	• تنوع التعليم، ص (11, 12, 15)	• تنوع التعليم، ص (11, 15)
كتاب التمارين	• ص (4)	• ص (4)	• ص (4)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

تقدم خطة الخطوات الأربع للتعلم آليات التركيز والتدريس والتدريب والتقييم، وأسلوباً مقترحاً لختام الدرس.

الأعداد الحقيقية

يمكن أن ينتمي العدد إلى أكثر من مجموعة أعداد، فمثلاً يُعد أي عدد طبيعي عدداً كلياً وصحيحاً، ونسبياً، وحقيقياً.

أضف إلى مطويتك

ملخص المفهوم خصائص الأعداد الحقيقية

لأي أعداد حقيقية a, b, c فإن:

الضرب	الجمع	الخاصية
$a \cdot b = b \cdot a$	$a + b = b + a$	التبديلية
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(a + b) + c = a + (b + c)$	التجميعية
$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$	$a + 0 = a = 0 + a$	العنصر المحايد
$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a, a \neq 0$	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	النظير
$a \cdot b$ عدد حقيقي.	$a + b$ عدد حقيقي.	الانغلاق
$a(b + c) = ab + ac, (b + c)a = ba + ca$		التوزيع

الأعداد الحقيقية

مثال 1 يبين كيفية تصنيف الأعداد.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال 2

خصائص الأعداد الحقيقية

ما الخاصية الموضحة في: $5 \cdot (4 \cdot 13) = (5 \cdot 4) \cdot 13$ ؟
الخاصية التجميعية لعملية الضرب.

وتنص الخاصية التجميعية لعملية الضرب على أن ناتج الضرب لا يتأثر بالطريقة التي يتم بها تجميع العوامل.

تحقق من فهمك

(2) ما الخاصية الموضحة في: $2(x + 3) = 2x + 6$ ؟
خاصية التوزيع

يمكنك استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لتسهيل إيجاد قيم العبارات.

مثال إضافي

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عددٍ ممّا يأتي:

(a) $I, R, \sqrt{6}$

(b) $N, W, Z, Q, R, 5$

(c) $Q, R, -\frac{2}{3}$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية ارسم مخطط فن على السبورة التفاعلية مبيّناً كيفية تقسيم مجموعة الأعداد الحقيقية إلى أعداد نسبية وغير نسبية، وصحيحة، وكلية، ...، ثم احفظ في السبورة قائمة من 12 عدداً واختر طالباً ليسحب كل عدد إلى داخل مجموعة الأعداد المناسبة.

النظير الجمعي والنظير الضربي

إشارة النظير الجمعي تعدد هي عكس إشارة ذلك العدد، أما إشارة النظير الضربي تعدد فهي ذاتها إشارة ذلك العدد.

تحقق من فهمك

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:
1.25 (3A) -1.25; 0.8 $2\frac{1}{2}$ (3B) $-2\frac{1}{2}; \frac{2}{5}$

تتطلب الكثير من التطبيقات الحياتية التعامل مع الأعداد الحقيقية.

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية ذكّر الطلاب بأن $\sqrt{9}$ يعني الجذر الموجب فقط؛ أي $\sqrt{9} = 3$.
ولتحديد كلا الجذرين: الموجب والسالب نستخدم الكتابة:
 $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

تنوع التعليم

توسع ناقش الطلاب في سبب كون العدد π غير نسبي، واطلب إليهم البحث في تاريخ العدد π .

تساعد أنشطة التوسع على بناء المهارات التي سيحتاج إليها الطلاب للنجاح في الرياضيات المتقدمة.

مثال 4 من واقع الحياة

خاصية التوزيع

السعر (ريال)	الجهاز أو الملحق
1000	حاسوب
600	شاشة
500	آلة طباعة
150	كاميرا رقمية
300	برمجيات ملحقة

مبيعات: يبين الجدول المجاور أسعار جهاز حاسوب وملحقاته في أحد العروض. فإذا زاد السعر الأصلي للجهاز وملحقاته، بنسبة 6% فأوجد قيمة هذه الزيادة.

يمكن إيجاد قيمة هذه الزيادة بطريقتين هما:

الطريقة 1: اضرب ثم اجمع.

اضرب كل قيمة في 6%، أو 0.06، ثم اجمع.

$$T = 0.06(1000) + 0.06(600) + 0.06(500) + 0.06(150) + 0.06(300)$$

$$= 60 + 36 + 30 + 9 + 18$$

$$= 153$$

الطريقة 2: اجمع ثم اضرب.

أوجد السعر الكلي لجهاز الحاسوب وملحقاته قبل الزيادة، ثم اضربه في العدد 0.06

$$T = 0.06(1000 + 600 + 500 + 150 + 300)$$

$$= 0.06(2550)$$

$$= 153$$

فتكون قيمة الزيادة 153 ريالاً. لاحظ أن النتيجة متساوية في الطريقتين.

تحقق من فهمك

4 أعمال: يتقاضى كمال 20 ريالاً عن كل ساعة عمل في محل تجاري. فإذا كانت ساعات عمله في أحد الأسابيع هي 4، 3، 2.5، 3، 4، فما المبلغ الذي حصل عليه كمال في ذلك الأسبوع؟ **330 ريالاً**

تستعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط العبارات الجبرية.

مثال 5

تبسيط العبارات الجبرية

بسّط العبارة: $3(2q + r) + 5(4q - 7r)$

$$3(2q + r) + 5(4q - 7r)$$

$$= 3(2q) + 3(r) + 5(4q) - 5(7r)$$

$$= 6q + 3r + 20q - 35r$$

$$= 6q + 20q + 3r - 35r$$

$$= (6 + 20)q + (3 - 35)r$$

$$= 26q - 32r$$

تحقق من فهمك

5 بسّط العبارة: $3(4x - 2y) - 2(3x + y) - 6x - 8y$



الربط مع الحياة

زادت ملحقات أجهزة الحاسوب على نحو مطرد في السنوات الأخيرة، حتى أصبح الحاسوب يقوم مقام الكثير من الأجهزة الإلكترونية كآلات التصوير والتسجيل وغيرها.

خصائص الأعداد الحقيقية

مثال 2 يبين كيفية تحديد خصائص الأعداد الحقيقية.

مثال 3 يبين كيفية إيجاد النظير الجمعي والنظير الضربي للأعداد الحقيقية.

مثال 4 يبين كيفية استعمال خاصية التوزيع لحل مسائل حياتية.

مثال 5 يبين كيفية استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط عبارات جبرية.

أمثلة إضافية

ما الخاصية الموضحة في:

$$15 + 0 = 0 + 15 = 15$$

خاصية العنصر المحايد في الجمع

أوجد النظير الجمعي، والنظير

الضربي للعدد -7. **النظير الجمعي:**

7؛ النظير الضربي: $-\frac{1}{7}$

طوابع بريدي: اشترى خالد 7 طوابع

بريد من فئة 5 ريالاً، و 7 أخرى

من فئة 2 ريال. كم دفع خالد لشراء

الطوابع جميعها؟ **49 ريالاً**

بسّط العبارة:

$$4(3a - b) + 2(b + 3a)$$

$$18a - 2b$$

توضح الأمثلة جميع المفاهيم

التي تعلمتها في الدرس،

وأفكارها تحكس أفكار التمارين.

أما تحقق من فهمك فهي

تدريبات توفر للطلاب الفرصة؛

للتدرب على تمارين مشابهة

للأمثلة.

إرشادات للمعلم الجديد

القراءة ساعد الطلاب على تذكر خاصية

التوزيع بربطها بجملة تحوي كلمة ورّع مثل:

”ورّع ورقة على كل طالب في الفصل“.

وركّز على أنه يتم ضرب العامل خارج

الأقواس في كل حد داخلها.

تنوع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في تذكر اسم الخاصية،

إليهم الربط بين كلمة "التبديلية" والجملة: "تبدّل مكان الجلوس في الفصل"، وكذلك الربط بين كلمة

"التجميعية" والجملة: "تجمع طلابي في الفصل".

1 مثال حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

(1) 62 (2) N, W, Z, Q, R (3) $I, R, \sqrt{11}$ (4) $Z, Q, R, -12$

2 مثال ما الخاصية الموضحة في كل مما يأتي؟

(5) $6 \cdot (8 \cdot 5) = (6 \cdot 8) \cdot 5$ التجميعية (×)

(6) $7 \cdot 9 - 7 \cdot 5 = 7(9 - 5)$ التوزيع

(7) $84 + 16 = 16 + 84$ التبديلية (+)

3 مثال أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

(8) 3.8 (9) -7 (10) $\frac{4}{9}$ (11) 3.8 (12) $\sqrt{5}$

عدد الأثواب المخيطه	اليوم
2	السبت
4	الأحد
3	الاثنين
1	الثلاثاء
5	الأربعاء
6	الخميس
7	الجمعة

(13) **مال:** يعمل عادل خياطاً للأثواب، ويربح 44 ريالاً عن كل ثوب يخطه،

ويخطط لجمع مبلغ 1300 ريال لشراء آلة خياطة جديدة، ويبين الجدول

المجاور عدد الثياب التي خاطها في كل يوم من أيام أسبوع معين.

(a) اكتب عبارة تمثل إجمالي المبلغ الذي ربحه عادل في ذلك الأسبوع.

(b) استعمل خاصية التوزيع لتجد هذا المبلغ. **924 ريالاً**

(c) متى يكسب المبلغ الذي يخطط لجمعه؟ وضح إجابتك. **انظر الهامش .**

5 مثال بسّط كل عبارة مما يأتي:

(14) $5(3x + 6y) + 4(2x - 9y)$ (15) $6(6a + 5b) - 3(4a + 7b)$ (16) $23x - 6y$

(17) $-4(6c - 3d) - 5(-2c - 4d)$ (18) $-16x + 22y$ (19) $-4(6c - 3d) - 5(-2c - 4d)$ (20) $-14c + 32d$

تدرب وحل المسائل

1 مثال حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

(18) $Q, R, -\frac{4}{3}$ (19) $Q, R, -8.13$ (20) $\sqrt{25}$ (21) $0.6\bar{1}$ (22) N, W, Z, Q, R

(23) $N, W, Z, Q, R, \frac{9}{3}$ (24) $Z, Q, R, -\sqrt{144}$ (25) $I, R, \sqrt{17}$ (26) $N, W, Z, Q, R, \frac{21}{7}$

2 مثال ما الخاصية الموضحة في كل مما يأتي؟

(27) $8\sqrt{11} + 5\sqrt{11} = (8 + 5)\sqrt{11}$ التوزيع

(28) $-7y + 7y = 0$ النظير (+)

(29) $(\frac{22}{7})(\frac{7}{22}) = 1$ النظير (×)

أوجد النظير الجمعي والنظير الضربي لكل عدد مما يأتي:

(30) -8 (31) 12.1 (32) -0.25 (33) 8

(34) $-\frac{3}{8}$ (35) $\sqrt{15}$ (36) $-\frac{6}{13}$

المتصف	السعر (بالريال)
قلم حبر	50
آلة حاسبة	60
قاموس	40

(36) يبين الجدول المجاور أسعار ثلاثة أصناف من الأدوات المكتبية.

فإذا انخفض سعر كل منها بنسبة 15% فجد قيمة هذا الانخفاض

للأصناف الثلاثة معاً. **22.5 ريالاً**

الدرس 1-1 خصائص الأعداد الحقيقية 13

المحتوى الرياضي

الأعداد غير النسبية يسمى العدد العشري الذي لا تظهر أرقامه بنمط متكرر عدداً غير نسبي، كما في العدد $0.010010001\dots$ أو العدد $1.232233222333\dots$

النظير الجمعي والنظير الضربي

تحقق من استيعاب الطلاب حقيقة أن ناتج جمع العدد ونظيره الجمعي يساوي 0، وأن ناتج ضرب العدد ونظيره الضربي يساوي 1، وأن العدد 0 ليس له نظير ضربي.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-17؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابة:

(13c) إذا استمر في خياطة العدد نفسه من الأثواب، فإنه سيحصل على المبلغ الذي يريده في نهاية يوم الإثنين من الأسبوع التالي. وربما لا يتحقق ذلك؛ لأنه ليس من الضروري أن تتكرر أعداد الأثواب بالنمط ذاته.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	53-63 ، 51 ، 18-42
ضمن المتوسط	53-63 ، 48-51 ، 46 ، 43-44
فوق المتوسط	43-63

تنويع الواجبات المنزلية يقدم مقترحات للأسئلة المناسبة لجميع المستويات الثلاثة للطلاب. وأغلب أسئلة الواجبات المنزلية هي أزواج متكافئة من الأسئلة الفردية والزوجية. ويمكن للطلاب الإجابة عن الأسئلة الفردية في يوم، وعن الأسئلة الزوجية في اليوم التالي.

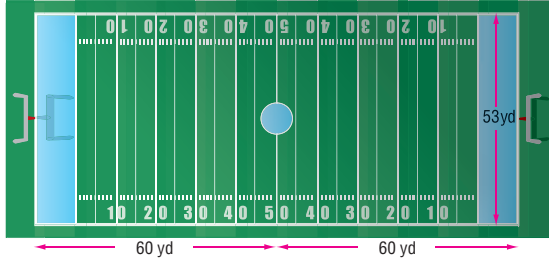
مثال 5 بسط كل عبارة مما يأتي:

$$-7a + 3d - 2a + 9d - 5a - 6d \quad (38) \quad 12b + 6c - 8b - 3c + 4b + 9c \quad (37)$$

$$38a - 50b - 6(9a - 3b) - 8(2a + 4b) \quad (40) \quad 40x - 20y - 4(4x - 9y) + 8(3x + 2y) \quad (39)$$

$$-74x + 2z - 5(10x + 8z) - 6(4x - 7z) \quad (42) \quad 28g - 48k - 2(-5g + 6k) - 9(-2g + 4k) \quad (41)$$

(43) كرة قدم : وضح خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثلان مساحة الملعب في الشكل أدناه. ثم أوجد مساحته.



$$53(60+60) \quad (43) \\ = 53(60) + 53(60) \\ = 6360 \text{ yd}^2$$

نوع السلعة	السعر (بالريال)
جهاز تسجيل	170
مكينة	350
مروحة	110

(44) تخفيضات: يبين الجدول المجاور أسعار بعض الأجهزة الكهربائية في محل. فإذا انخفض سعر كل منها بنسبة 30%، وأراد أحمد أن يشتري من ذلك المحل جهاز تسجيل ومكينة ومروحة.

(a) وضح خاصية التوزيع من خلال كتابة عبارتين تمثل كل منهما المبلغ الذي سيدفعه أحمد. انظر الهامش

(b) احسب المبلغ الذي سيدفعه أحمد بطريقتين مختلفتين مستعملًا خصائص العمليات على الأعداد. 441 ريالاً

بسط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{27}{5}c - \frac{199}{20}d - \frac{2}{5}(6c - 8d) + \frac{3}{4}(4c - 9d) \quad (46) \quad \frac{19}{6}x + \frac{13}{6}y - \frac{1}{3}(5x + 8y) + \frac{1}{4}(6x - 2y) \quad (45)$$

$$-9(3x + 8y) - 3(5x + 10z) \quad (48) \quad -6(3a + 5b) - 3(6a - 8c) \quad (47)$$

(49) ديكور: يريد محمد شراء 5 ستائر لنوافذ منزله: نافذتان كبيرتان، و 3 نوافذ صغيرة. فإذا كانت النافذة الكبيرة تحتاج إلى ستارة طولها $3\frac{3}{4}$ m من القماش، في حين تحتاج النافذة الصغيرة إلى ستارة طولها $2\frac{1}{3}$ m.

(a) كم مترًا من القماش يحتاج إليه محمد؟ $14\frac{1}{2}$ m

(b) استعمل خصائص الأعداد الحقيقية لتبين كيف يمكن لمحمد حساب كمية القماش التي يحتاج إليها ذهنيًا. انظر الهامش.

(50) تمثيلات متعددة: مستعملًا الأعداد: $-\sqrt{6}$, 3 , $\frac{-15}{3}$, 4.1 , π , 0 , $\frac{3}{8}$, $\sqrt{36}$.

أجب عما يأتي:

(a) جدولياً: نظم هذه الأعداد في جدول وفقاً لمجموعة الأعداد التي تنتمي إليها. انظر الهامش

(b) جبرياً: اكتب كل عدد من الأعداد أعلاه على الصورة العشرية، ثم رتبها تصاعديًا.

(c) بيانياً: مثل هذه الأعداد على خط الأعداد. انظر الهامش

(d) لفظياً: اكتب تخميناً حول ترتيب الأعداد الحقيقية باستعمال الصورة العشرية لها.

14 الفصل 1 الدوال والتمثيلات

تنبيه!

تجنب الأخطاء إذا واجه

بعض الطلاب صعوبة في تحديد الخصائص، فاقترح عليهم النظر إلى التغير الذي يحصل في العبارة أولاً، فإذا كان التغير تجميعاً، فإن الخاصية تجميعية، وإذا كان التغير في الموقع فقط، فإن الخاصية تبديلية.

تمثيلات متعددة في السؤال 50

يستعمل الطلاب معلومات منظمة في جدول، وخط الأعداد، والجبر؛ لمقارنة وترتيب أعداد حقيقية.

إجابات:

(44a)

$$630 - (170 + 350 + 110) (0.30);$$

$$630 - [170(0.30) + 350(0.30) + 110(0.30)]$$

$$-36a - 30b + 24c \quad (47)$$

$$-42x - 72y - 30z \quad (48)$$

$$-\sqrt{6} \approx -2.449, (50b)$$

$$3 = 3.0, \frac{-15}{3} = -5,$$

$$4.1 = 4.1, \pi \approx 3.14,$$

$$0 = 0, \frac{3}{8} = 0.375,$$

$$\sqrt{36} = 6; \frac{-15}{3}, -\sqrt{6},$$

$$0, \frac{3}{8}, \pi, 4.1, \sqrt{36}$$

(50d) إجابة ممكنة:

يمكن بسهولة مقارنة الأعداد الحقيقية وترتيبها عن طريق كتابتها على الصورة العشرية.

$$2\left(3\frac{3}{4}\right) + 3\left(2\frac{1}{3}\right) \quad (49b)$$

$$= 2\left(3 + \frac{3}{4}\right) + 3\left(2 + \frac{1}{3}\right)$$

تعريف العدد الكسري

$$= 2(3) + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 3(2) + 3\left(\frac{1}{3}\right)$$

خاصية التوزيع

$$= 6 + \frac{3}{2} + 6 + 1$$

بالضرب.

$$= 6 + 6 + 1 + \frac{3}{2}$$

الخاصية التبديلية للجمع

$$= 13 + \frac{3}{2}$$

بالجمع.

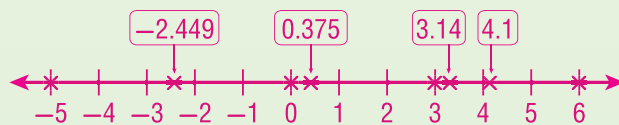
$$= 14\frac{1}{2}$$

بالجمع.

(50a)

الأعداد الطبيعية	الأعداد الكلية	الأعداد الصحيحة	الأعداد النسبية	الأعداد غير النسبية	الأعداد الحقيقية
3,	3, 0,	3, $\frac{-15}{3}$, 0,	3, $\frac{-15}{3}$, 4.1, 0,	$-\sqrt{6}$, π	$-\sqrt{6}$,
$\sqrt{36}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{36}$	$\frac{3}{8}$, $\sqrt{36}$		3, $\frac{-15}{3}$,
					4.1, π , 0,
					$\frac{3}{8}$, $\sqrt{36}$

(50c)



مسائل مهارات التفكير
العليا تتطلب الاستعمال
الطلاب مهارات التفكير
العليا في الحل .

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى كل طالب كتابة اسم خاصية من الخصائص الواردة في هذا الدرس ومثال عليها، وتسليمها لك قبل مغادرتك غرفة الصف.

إجابات :

(56) إجابة ممكنة: لا تنطبق الخاصية التبديلية على عمليتي الطرح والقسمة؛ وذلك لأن الترتيب في هاتين العمليتين مهم، بينما في عمليتي الجمع والضرب الترتيب غير مهم.
مثال: $2 + 4 = 4 + 2$, $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2$.
بينما في عملية الطرح: $2 - 4 \neq 4 - 2$,
وكذلك في عملية القسمة: $\frac{2}{4} \neq \frac{4}{2}$.

مسائل مهارات التفكير العليا

(51) ما العدد المختلف عن باقي الأعداد؟ وضح إجابتك.

$$\sqrt{8T}$$

$$\sqrt{6T}$$

$$\sqrt{35}$$

$$\sqrt{2T}$$

(52) **تحديد:** أوجد قيمة العبارة $48(30r + 36t)$ بدلالة w علمًا بأن $w = 12(5r + 6t)$. $24w$

(53) **اكتشف الخطأ:** بسّطت كل من نور وخديجة العبارة: $4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$. فهل أي منهما تبسيطها صحيح؟ وضح إجابتك.

خديجة

$$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$$

$$56a - 40b - 6a - 24b$$

$$50a - 64b$$

نور

$$4(14a - 10b) - 6(b + 4a)$$

$$56a - 40b - 6b + 24a$$

$$80a - 46b$$

(54) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك.

"العدد غير النسبي يتضمن رمز الجذر".

(55) **مسألة مفتوحة:** حدد إذا كانت خاصية الانغلاق للضرب تنطبق على الأعداد غير النسبية. وإذا لم تكن كذلك، فأعط مثالًا مضادًا.

(56) **اكتب:** اشرح وأعط أمثلة توضح أن عمليتي الطرح والقسمة لا تحققان الخاصية التبديلية. انظر الهامش.

تدريب على اختبار

(58) ما مجال الدالة: $(-3, 0)$, $(0, 4)$, $(-2, 5)$, $(6, 4)$ ؟ **B**

A $\{-3, 6\}$ **C** $\{0, 4, 5, 6\}$
B $\{-3, -2, 0, 6\}$ **D** $\{-3, -2, 0, 4, 5, 6\}$

(57) ما الحد العاشر في المتتابعة ... $2, 4, 7, 11, 16$ ؟ **B**

A 46 **C** 67
B 56 **D** 72

مراجعة تراكمية

(59) أوجد قيمة: $8(4 - 2)^3$. (مهارة سابقة) **64**

أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

$$(61) (b - 7)(b - 3) - 10b + b^2$$

$$(60) (x + 2)(x - 3) - x^2 - x - 6$$

أوجد قيمة كل مما يأتي؛ علمًا بأن $a = 3$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -1.7$. (مهارة سابقة)

$$(63) \frac{a \cdot b}{c} - 1.176$$

$$(62) \frac{10}{9} \frac{1}{6} b + 1$$

الدرس 1-1 خصائص الأعداد الحقيقية 15

تنوع التعليم

ضمن فوق

توسع تعتبر مجموعة الأعداد الكلية مجموعة مغلقة بالنسبة لعملية الضرب؛ وذلك لأن ناتج ضرب عددين كليين هو عدد كلي أيضًا، وهذا مثال على خاصية الانغلاق. بين ما إذا كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا توضيحيًا:

(a) مجموعة الأعداد الصحيحة مغلقة بالنسبة لعملية الضرب. **صحيحة**

(b) مجموعة الأعداد الكلية مغلقة بالنسبة لعملية الطرح. **خاطئة؛ $1 - 6 = -5$**

(c) مجموعة الأعداد الكلية مغلقة بالنسبة لعملية القسمة. **خاطئة؛ $1 \div 5 = 0.2$**



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 1

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) تدريبات إعادة التعليم - تنمة (7)

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-1 تدريبات إعادة التعليم

خصائص الأعداد الحقيقية

الخاصية	الرمز	الشرح
الجمعية	$a+b = b+a$	الجمع
التبديلية	$(a+b)+c = a+(b+c)$	الجمع
التجميعية	$a \cdot b = b \cdot a$	الضرب
المعصر المحايد	$a+0 = a = 0+a$	الجمع
النظر	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$	الضرب
الاتلاق	$a+(-a) = 0 = (-a)+a$	الجمع
التوزيع	$a(b+c) = ab+ac$	الضرب

مثال: $9x + 3y + 12y - 0.9x = 9x + (-0.9x) + 3y + 12y = (9 + (-0.9))x + (3 + 12)y = 8.1x + 15y$

تمارين:

1) $4(2k-3) + 5k$ 2) $8(3a-b) + 4(2b-a)$ 3) $40x + 18r - 5t + 11s$ 4) $12(\frac{a}{3} - \frac{b}{4}) + 5(3g-h)$

5) $10(6g+3h) + 4(3g-h)$ 6) $10.2r - 39.2s$ 7) $4(20-4p) - \frac{1}{2}(4-16p)$ 8) $4(20-4p) - \frac{1}{2}(4-16p)$

9) $5.3j + 8.9k - 4.7k - 10.9j$ 10) $9(7e-4f) - 0.6(e+5f)$ 11) $2.5(12m-8.5n)$ 12) $3p - \frac{1}{5}r - \frac{2}{3}r - \frac{1}{2}p$

13) $2(15d+45c) + \frac{5}{6}(12d+18c)$ 14) $4(10g+80h) - 20(10h-5g)$ 15) $\frac{2}{3}(18m-6n+12m+3n)$ 16) $(7y-2.1x)+2(3.5x-6y)$

17) $50(3a-b) - 20(b-2a)$ 18) $14(j-2k) - 3j(4-7)$ 19) $190a-70b$ 20) $20m-2n$ 21) $0.7x+9y$ 22) $140g+120h$ 23) $23j-28k$ 24) $62.4e-39f$ 25) $30m-21.25n$

الفصل 1 الدوال والتباينات

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-1 تدريبات إعادة التعليم

خصائص الأعداد الحقيقية

الأمثلة:

R الأعداد الحقيقية (جميع الأعداد النسبية وغير النسبية)

Q الأعداد النسبية (جميع الأعداد التي يكتبها على الصورة $\frac{m}{n}$ في حين أن m, n عددا صحيحان، $n \neq 0$)

I الأعداد غير النسبية (الكسور العشرية غير الدورية وغير المنتهية جميعها)

Z الأعداد الصحيحة {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

W الأعداد الكسرية {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...}

N الأعداد الطبيعية {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...}

مثال: حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل من الأعداد الآتية:

$-\frac{11}{3}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

$\sqrt{25}$ الطبيعية (N)، الكلية (Z)، الصحيحة (W)، النسبية (Q)، الحقيقية (R)

تمارين:

حدد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل من الأعداد الآتية:

1) $\frac{6}{7}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

2) $-\sqrt{81}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

3) 0 النسبية (Q)، الحقيقية (R)

4) 192.0005 النسبية (Q)، الحقيقية (R)

5) 73 النسبية (Q)، الحقيقية (R)

6) $34\frac{1}{2}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

7) $\sqrt{\frac{36}{5}}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

8) 26.1 النسبية (Q)، الحقيقية (R)

9) π النسبية (Q)، الحقيقية (R)

10) $\frac{15}{3}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

11) -4.17 النسبية (Q)، الحقيقية (R)

12) $\frac{\sqrt{25}}{2}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

13) -1 النسبية (Q)، الحقيقية (R)

14) $\sqrt{42}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

15) -11.2 النسبية (Q)، الحقيقية (R)

16) $-\frac{8}{13}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

17) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

18) $33.\bar{3}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

19) 894000 النسبية (Q)، الحقيقية (R)

20) -0.02 النسبية (Q)، الحقيقية (R)

الفصل 1 الدوال والتباينات

تدريبات المهارات (8) تدريبات حل المسألة (9)

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-1 تدريبات حل المسألة

خصائص الأعداد الحقيقية

1) حساب دعوى: يقوم ممدو الرياضيات في المرحلة الابتدائية عند تعليم طلابهم الضرب والقسمة الترتيبية للرقم، بعرض النموذج الآتي:

$54 \times 8 = (50+4) \times 8 = (50 \times 8) + (4 \times 8)$

ما الخاصية المستخدمة في ذلك؟

خاصية التوزيع

2) تخدعة، ما خاصية الأعداد الحقيقية الموضحة في الشكل أدناه؟

3) اشكال هن، مثل العلاقة بين الأعداد الطبيعية والصحيحة والنسبية وغير النسبية والحقيقية مستعملاً أشكال فن الأعداد الطبيعية

4) نظرية الأعداد: في القرنين الأتيين: (I) حاصل ضرب أي عددين نسبيين دائماً يساوي عدداً صحيحاً. (II) حاصل ضرب أي عددين غير نسبيين دائماً يساوي عدداً غير نسبي. حدد ما إذا كانت كل من الفقرتين صحيحة دائماً أو أحياناً أو ليست صحيحة أبداً، فسر ذلك.

(I) دائماً (II) أحياناً، $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

5) اتمتت القاضية الزاوية. أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية ترتبط بالعلاقة: $c^2 = a^2 + b^2$

لكل مجموعة قيم a, b فيما يأتي، أوجد طول الضلع c ، ثم حدد ما إذا كان c عدداً طبيعياً أم لا.

(a) $a=5, b=12$ (b) $a=7, b=14$ (c) $a=7, b=24$

(I) $c=13$ (II) $c=25$ (III) $c=25$

الفصل 1 الدوال والتباينات

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-1 تدريبات المهارات

اكثر مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل من الأعداد الآتية:

1) -525 النسبية (Q)، الحقيقية (R)

2) $\frac{12}{3}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

3) 0.875 النسبية (Q)، الحقيقية (R)

4) $\sqrt{30}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

5) -9 النسبية (Q)، الحقيقية (R)

6) $\sqrt{30}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

7) $3x = x + 3$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

8) $3a + 0 = 3a$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

9) $2(r+w) = 2r + 2w$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

10) $2r + (3r + 4r) = (2r + 3r) + 4r$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

11) $5y(\frac{1}{5}) = 1$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

12) $15x(1) = 15x$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

13) $0.6[25(0.5)] = [0.6(25)] \cdot 0.5$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

14) $(10b + 12b) + 7b = (12b + 10b) + 7b$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

15) $1.25, \frac{1}{15}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

16) $-1.25, 0.8$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

17) $-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

18) $3\frac{3}{4}, \frac{4}{15}$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

19) $3x + 5y + 2x - 3y = 5x + 2y$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

20) $x - y - z + y - x + z$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

21) $-(3g+3h) + 5g - 10h = -2g + 3a + 1$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

22) $a^2 - a + 4a - 3a^2 + 1 = -2a^2 + 3a + 1$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

23) $3(m-2) + 5(2m-2) = 13m - 8z$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

24) $2x - 3y - (5x - 3y - 2z) = -3x + 2z$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

25) $\frac{1}{3}(15d+3c) - \frac{1}{2}(8c-10d) = 10d - 3c$ النسبية (Q)، الحقيقية (R)

الفصل 1 الدوال والتباينات



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 1

مصادر الدرس 1 - 1		مصادر الدرس 1 - 1	
دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط	فوق المتوسط
<p>التدريبات الإثرائية (10)</p> <p>الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p>1-1 التدريبات الإثرائية</p> <p>خصائص الزمرة</p> <p>تشكل مجموعة من الأعداد زمرة بالنسبة لعملية رياضية معرّفة عليها، إذا حققت الخصائص الآتية:</p> <p>1) الانغلاق 2) التجميع 3) وجود عنصر محايد 4) وجود نظير لكل عنصر في المجموعة.</p> <p>مثال: هل تشكل المجموعة $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ زمرة مع عملية الجمع؟</p> <p>خاصية الانغلاق: لكل الأعداد في المجموعة، هل $a+b$ ينتمي للمجموعة؟</p> <p>$0+1=1$ و $1+0=1$ ينتمي للمجموعة، $2+0=2$ و $0+2=2$ ينتمي للمجموعة... وهكذا.</p> <p>إذن المجموعة تحقق خاصية الانغلاق مع الجمع.</p> <p>خاصية التجميع: لكل الأعداد في المجموعة، هل $(a+b)+c = a+(b+c)$؟</p> <p>$1+(2+3) = 1+(2+3) = 1+5 = 6$ و $(1+2)+3 = 3+3 = 6$ وهكذا.</p> <p>إذن المجموعة تحقق خاصية التجميع مع الجمع.</p> <p>خاصية العنصر المحايد: هل يوجد عدد "0" في المجموعة يحقق ما يأتي؟</p> <p>لكل a في المجموعة، هل $a+0 = a+0 = a$ و $0+a = 0+a = a$؟</p> <p>$0+1 = 1$ و $1+0 = 1$ و $0+2 = 2$ و $2+0 = 2$ وهكذا.</p> <p>إذن العنصر المحايد للجمع هو الصفر "0".</p> <p>خاصية العنصر النظير: هل يوجد نظير لكل عدد مثل a في المجموعة وينتمي إليها، حيث $a+a=0$؟</p> <p>النظر الجمعي للعدد 3 هو -3 لأن $3+(-3)=0$، والعنصر المحايد للجمع هو الصفر "0". لكن المجموعة لا تحتوي على العدد -3، لذا لا يوجد نظير جمعي للعدد 3.</p> <p>إذن المجموعة ليست زمرة بالنسبة للجمع لأنها لم تحقق الخصائص الأربع جميعها.</p> <p>2 مثال: هل المجموعة $\{-1, 1\}$ تشكل زمرة مع عملية الضرب؟</p> <p>خاصية الانغلاق: $1(1)=1$; $(1)(-1)=-1$; $(-1)(-1)=1$; $(-1)(1)=-1$. إذن المجموعة تحقق خاصية الانغلاق مع الضرب.</p> <p>خاصية التجميع: $-1(-1)(-1)=[(-1)(-1)](-1)=1(-1)=-1$ وهكذا.</p> <p>خاصية العنصر المحايد: $-1(1)=1$; $1(-1)=-1$. العنصر المحايد لعملية الضرب هو 1.</p> <p>خاصية العنصر النظير: هو النظر الضربي للعدد -1، في حين $1(-1)=-1$ و $(-1)(1)=-1$ هو المحايد لعملية الضرب. كما أن العدد 1 هو النظر الضربي للعدد 1، حيث $1(1)=1$ و $(1)(1)=1$ هو المحايد لعملية الضرب. وبمعنى هذا أن كل عدد له نظير ضربي في المجموعة.</p> <p>إذن المجموعة $\{-1, 1\}$ تشكل زمرة مع الضرب؛ لأنها حققت الخصائص الأربع جميعها.</p> <p>تمارين:</p> <p>بين ما إذا كانت المجموعة المعطاة تشكل زمرة مع العملية المعطاة في كل ما يأتي أم لا:</p> <p>1) الأعداد الصحيحة، الجمع 2) الأعداد الصحيحة، الضرب 3) $\{1, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \dots\}$ الجمع 4) مضاعفات العدد 5، الضرب 5) $\{x, x^2, x^3, \dots\}$ الجمع 6) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\}$ الضرب 7) الأعداد غير النسبية، الجمع 8) الأعداد النسبية، الجمع</p>		<p>كتاب التمارين (4)</p> <p>الفصل الأول: الدوال والمتباينات</p> <p>1-1 خصائص الأعداد الحقيقية</p> <p>حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:</p> <p>W, Z, Q, R 0 (أ) I, R 2π (ب) I, R $\sqrt{7}$ (ج) N, W, Z, Q, R 6425 (د)</p> <p>Q, R -31.8 (هـ) Z, Q, R -35 (و) Z, Q, R $\sqrt[3]{16}$ (ز) Q, R $\sqrt{\frac{25}{36}}$ (ح)</p> <p>اذكر الخاصية الموضحة في كل ما يأتي:</p> <p>10 $7x + (9x + 8) = (7x + 9x) + 8$ (أ) $5x \cdot (4y + 3z) = 5x \cdot (3z + 4y)$ (ب)</p> <p>التجميعية لعملية الجمع التبادلية لعملية الجمع</p> <p>11 $7n + 2n = (7 + 2)n$ (أ) $5(3x + y) = 5(3x + 1y)$ (ب)</p> <p>التوزيعية العنصر المحايد لعملية الضرب</p> <p>12 $3x \cdot 2y = 3 \cdot 2 \cdot x \cdot y$ (أ) $3(2x)y = (3 \cdot 2)(xy)$ (ب)</p> <p>التجميعية لعملية الضرب التبادلية لعملية الضرب</p> <p>13 $(6 + -6)y = 0y$ (أ) $\frac{1}{4} \cdot 4y = 1y$ (ب)</p> <p>النظر الجمعي التجميعية لعملية الضرب</p> <p>14 $4n + 0 = 4n$ (أ) $5(x + y) = 5x + 5y$ (ب)</p> <p>النظر الجمعي العنصر المحايد للجمع</p> <p>أوجد النظر الجمعي والنظر الضربي لكل عدد مما يأتي:</p> <p>15 $1.6, -0.625, -1.6$ (أ) $-0.4, 2.5, 0.4$ (ب)</p> <p>16 $-5\frac{5}{6}, \frac{6}{35}, \frac{5}{6}$ (أ) $\frac{11}{16}, \frac{16}{11}, -\frac{11}{16}$ (ب)</p> <p>بسط كل عبارة مما يأتي:</p> <p>17 $-4a - 16b$ 18 $-11a - 13b + 7a - 3b$ 19 $3x$ 20 $5x - 3y - 2x + 3y$ 21 $3x$</p> <p>22 $-4c$ 23 $4c - 2c - (4c + 2c)$ 24 $8x - y - 3$ 25 $8x - 7y - (3 - 6y)$ 26 $8x - y - 3$</p> <p>27 $4a + b$ 28 $\frac{1}{2}(10a - 15b) + \frac{1}{3}(8b + 4a)$ 29 $-5r - 58t$ 30 $3(r - 10t) - 4(7t + 2r)$ 31 $-5r - 58t$</p> <p>32 $13y$ 33 $\frac{5}{6}(\frac{2}{3}x + 12y) - \frac{1}{4}(2x - 12y)$ 34 $2(4z - 2x + y) - 4(5z + x - y)$ 35 $2(4z - 2x + y)$</p> <p>36 50 37 50 38 50 39 50 40 50</p> <p>39 50 40 50 41 50 42 50</p> <p>43 50 44 50 45 50 46 50</p> <p>47 50 48 50 49 50 50 50</p>	

العلاقات والدوال Relations and Functions

لماذا؟

يبين الجدول أدناه المعدل الشهري التقريبي لأعلى درجة حرارة وأدناها في مدينة الرياض، لاحظ أن معدل كل من درجتي الحرارة الدنيا والعليا لكل شهر يمكن تمثيله بزوج مرتب. فعلى سبيل المثال، يمكن تمثيل معدلي درجات الحرارة لشهر يناير بالزوج المرتب (9, 20).

معدل درجات الحرارة الشهرية (°C) في مدينة الرياض		الشهر	يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الدنيا	9	11	15	20	26	28	29	29	29	26	21	15	11	
العليا	20	23	27	33	39	42	43	43	43	40	35	27	22	

العلاقات والدوال: تذكر أن الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

مفهوم أساسي **الدالة المتباينة**

الدالة المتباينة: هي دالة يرتبط فيها كل عنصر من المجال بعنصر واحد من المدى، وهذا يعني أنه لا يمكن أن يرتبط عنصران من المجال بالعنصر نفسه من المدى.

أضف إلى **مطوبتك**

المجال	المدى
1	D
2	B
3	A

مثال 1 المجال والمدى

حدد كلاً من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، وبين أيهما تمثل دالة، وإذا كانت دالة فهل هي متباينة؟

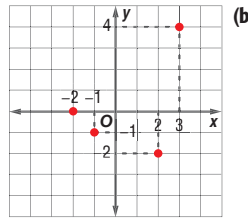
(a) $\{(-6, -1), (-5, -9), (-3, -7), (-1, 7), (-6, -9)\}$

المجال = $\{-6, -5, -3, -1\}$ المدى = $\{-9, -7, -1, 7\}$

هل هي دالة: لا، لأن العنصر -6 في المجال ارتبط بكل من العنصرين -9، -1 في المدى.

(b) المجال = $\{-2, -1, 2, 3\}$

المدى = $\{-2, -1, 0, 4\}$



هذه العلاقة دالة؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط من المدى. وهي متباينة؛ لأن كل عنصر من المدى ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال.

فيما سبق؟

درست تحديد كل من مجال ومدى علاقة معطاة.

والآن؟

- أحلل العلاقات والدوال.
- أستعمل معادلات العلاقات والدوال.

المفردات

الدالة المتباينة
one-to-one function

العلاقة المنفصلة
discrete relation

العلاقة المتصلة
continuous relation

اختبار الخط الرأسي
vertical line test

المتغير المستقل
independent variable

المتغير التابع
dependent variable

رمز الدالة
function notation

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

العلاقة: مجموعة من المدخلات والمخرجات تكتب عادة على شكل أزواج مرتبة (x, y) ، كما يمكن وصفها بعدة طرق، منها المخطط السهمي، والجدول،... إلخ.

المجال: مجموعة الأعداد الأولى في الأزواج المرتبة (قيم x).

المدى: مجموعة الأعداد الثانية في الأزواج المرتبة (قيم y).

1 التركيز

التربط الرأسي

ما قبل الدرس 1-2

تحديد مجال ومدى علاقة معطاة.

الدرس 1-2

تحليل العلاقات والدوال.

استعمال معادلات العلاقات والدوال.

ما بعد الدرس 1-2

تحديد وتمثيل الدوال الأساسية (الأم) بيانياً.

يتم عرض المفردات الجديدة في بداية كل درس، وتتم مراجعتها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

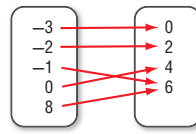
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

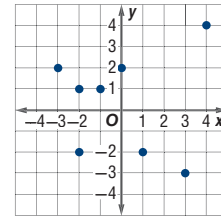
- ما معدل أدنى درجة حرارة في شهر مايو؟ 26°C
- كيف تعبر عن معدلي درجتي الحرارة الكبرى والصغرى لشهر نوفمبر في صورة زوج مرتب؟ $(15, 27)$
- لماذا تكون متأكداً من أن العدد الثاني في الزوج المرتب لهذه البيانات يكون دائماً أكبر من أو يساوي العدد الأول دائماً؟ **معدل درجات الحرارة العليا أكبر من أو يساوي معدل درجات الحرارة الدنيا دائماً.**

مصادر الدرس 1-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (19)	• تنويع التعليم، ص (19)	• تنويع التعليم، ص (21, 19)
كتاب التمارين	• ص (5)	• ص (5)	• ص (5)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)



(1B)



(1A)

(1A) المجال = $\{-3, -2, -1, 0, 1, 3, 4\}$
 المدى = $\{-3, -2, 1, 2, 4\}$ ؛
 ليست دالة

(1B) المجال = $\{-3, -2, -1, 0, 8\}$
 المدى = $\{0, 2, 4, 6\}$ ؛
 هذه العلاقة دالة وهي ليست متباينة.

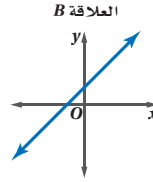
العلاقات والدوال

مثال 1 يبيّن كيفية تمييز مجال ومدى العلاقة المنفصلة، وكيفية تحديد ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا، ويبيّن أيضًا كيفية تحديد ما إذا كانت الدالة متباينة أم لا.

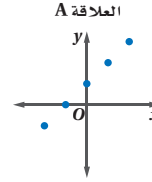
مثال 2 يبيّن كيفية استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة ما إذا كان المنحنى يمثل دالة أم لا، ويبيّن كيفية تحديد ما إذا كانت العلاقة منفصلة أو متصلة بالنظر إلى تمثيلها البياني.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.



علاقة متصلة



علاقة منفصلة

العلاقة التي يكون فيها المجال مجموعة من النقاط المنفردة، مثل العلاقة A أدناه تسمى **علاقة منفصلة**. لاحظ أن تمثيلها البياني يتكون من نقاط غير متصلة، وإذا احتوى مجال العلاقة عددًا لا نهائيًا من العناصر وأمكن تمثيلها بيانيًا بمستقيم أو بمنحنى متصل مثل العلاقة B أدناه، فإنها تكون **علاقة متصلة**.

إرشادات للدراسة

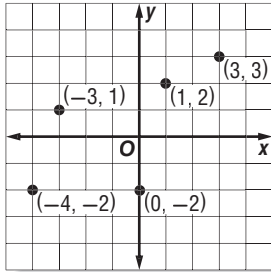
العلاقة المتصلة

يمكنك تمثيل العلاقة المتصلة بيانيًا دون رفع القلم عن الورقة.

تقدم إرشادات للدراسة مفيدة للطلاب عن موضوع الدرس

مثال إضافي

حدد كلاً من مجال ومدى العلاقة، ثم حدّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا؟



المجال = $\{-4, -3, 0, 1, 3\}$.
 المدى = $\{-2, 1, 2, 3\}$. كل عنصر في المجال مرتبط بعنصر واحد في المدى؛ لذا فإن هذه العلاقة تمثل دالةً وهي ليست متباينة.

مفهوم أساسي اختبار الخط الرأسي

أضف إلى مطبقك

التعبير اللفظي: إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.

النموذج:

إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في نقطتين أو أكثر فالعلاقة ليست دالة.

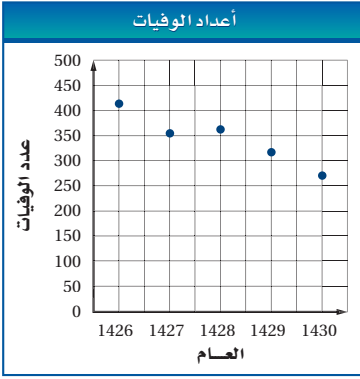
الدرس 1-2 العلاقات والدوال 17

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية قم بعرض بعض التمثيلات البيانية على السبورة، ثم تطبق اختبار الخط الرأسي، وارسم خطاً رأسياً ثم قم بتحريكه من اليسار إلى اليمين فوق التمثيل البياني، وبيّن للطلاب أنه إذا قطع ذلك الخط الرأسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإن العلاقة لا تمثل دالة.

إرشادات للمعلم الجديد

اختبار الخط الرأسي ناقش مع الطلاب لماذا يُعد اختبار الخط الرأسي طريقةً صحيحةً لمعرفة الدالة؟ لأن وجود أكثر من نقطة على الخط الرأسي، تعني أكثر من نقطة على التمثيل البياني لها الإحداثي x نفسه وبالتالي لن تكون دالة.



حوادث المرور: يبين التمثيل البياني المجاور أعداد الوفيات في مدينة الرياض نتيجة الحوادث المرورية من عام 1426 هـ إلى عام 1430 هـ، هل العلاقة التي يمثلها منفصلة أم متصلة؟ وهل تمثل دالة؟

بما أن التمثيل البياني مكون من نقاط منفردة ومنفصلة، فالعلاقة منفصلة. وباستعمال اختبار الخط الرأسي نلاحظ أنه لا يمكن رسم أي خط رأسي يمر بأكثر من نقطة من نقاط التمثيل، إذن فالعلاقة تمثل دالة.

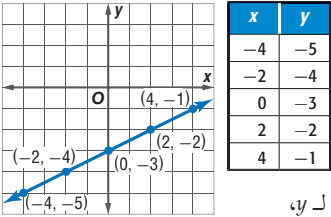
تحقق من فهمك

2) إذا كان عدد العاملين في إحدى المؤسسات في الأعوام من 1424 هـ إلى 1429 هـ على الترتيب هو: 29, 27, 31, 34, 28, 25. مثل هذه البيانات بيانيًا، وحدد هل العلاقة التي تمثلها هذه البيانات منفصلة أم متصلة. وهل تمثل دالة؟ **للتمثيل البياني انظر الهامش؛ علاقة منفصلة؛ تمثل دالة.**

معادلات العلاقات والدوال: يمكنك تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات، وقيم المتغيرين x, y في المعادلة هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي تحقق المعادلة. ومن السهل في أغلب الأحيان تحديد إذا كانت المعادلة تمثل دالة من خلال تمثيلها البياني.

مثال 3 تمثيل العلاقة بيانيًا

مثل المعادلة $y = \frac{1}{2}x - 3$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداهما، ثم حدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إذا كانت منفصلة أم متصلة. كَوِّن جدولًا لبعض القيم التي تحقق المعادلة، ثم مثل المعادلة بيانيًا.



أي عدد حقيقي يمكن أن يكون الإحداثي x لنقطة ما على المستقيم، كما أن أي عدد حقيقي أيضًا يمكن أن يكون الإحداثي y لنقطة ما على المستقيم. لذا فإن كلاً من مجال هذه العلاقة ومداهما هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

التمثيل البياني للعلاقة يحقق اختبار الخط الرأسي؛ لذا فإن المعادلة تمثل دالة؛ لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y ، وحيث إن كل قيمة لـ y مرتبطة بقيمة واحدة فقط لـ x ، لذا فالدالة متباينة. وبما أن التمثيل البياني عبارة عن مستقيم متصل دون انقطاع، فالدالة متصلة.

للتمثيل البياني انظر الهامش؛ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى $= \{y \mid y \geq -3\}$ ؛ **تحقق من فهمك** المعادلة تمثل دالة ليست متباينة، ولكنها متصلة. 3) مثل المعادلة $y = x^2 + 1$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداهما، ثم حدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إذا كانت منفصلة أم متصلة.



الربط مع الحياة

هل تعلم أن لكل 8 حوادث مرورية في المملكة العربية السعودية يحدث 6 إصابات، بينما النسبة العالمية إصابة واحدة لكل 8 حوادث؟! المصدر: www.rt.gov.sa

إرشادات للدراسة

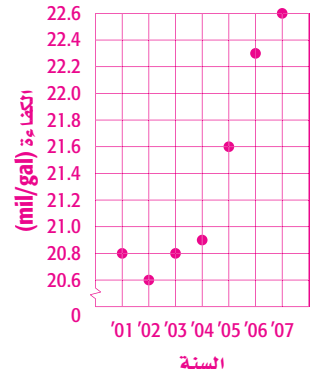
لتمثل دالة ما بيانيًا، أولاً يجب أن تحدد مجالها (جميع قيم x التي تكون عندها الدالة معرفة)، ثم تحدد مداها (جميع قيم y التي تقابل قيم x)، وهذا يمكنك من معرفة بعض الأزواج المرتبة التي تسهل عليك تمثيل الدالة بيانيًا. ومن الجدير بالذكر أن المجال والمدى لجميع الدوال الخطية والتريبيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال إضافي

مواصلات: يبين الجدول معدل كفاءة الوقود بالميل لكل جالون في عدة سنوات. مثل هذه المعلومات بيانيًا، وبيِّن ما إذا كانت تمثل دالة أم لا؟ وهل هي متصلة أم منفصلة؟

السنة	كفاءة الوقود (mil/gal)
2001	20.8
2002	20.6
2003	20.8
2004	20.9
2005	21.6
2006	22.3
2007	22.6

كفاءة الوقود



نعم، هذه العلاقة تمثل دالة، وهي منفصلة.

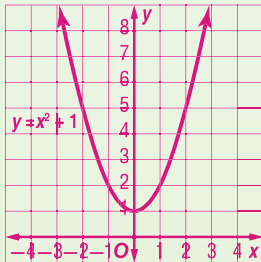
معادلات العلاقات والدوال

مثال 3 يبين كيفية تمثيل علاقة خطية بيانيًا.

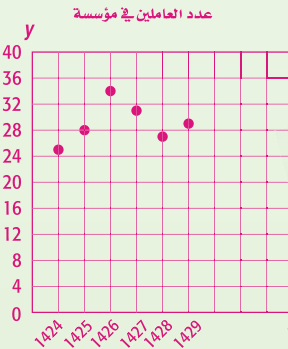
مثال 4 يبين كيفية إيجاد قيمة الدالة.

إجابات (تحقق من فهمك):

3) تحقق من فهمك



2) تحقق من فهمك



توفر فقرة المحتوى الرياضي معلومات أساسية لكل درس، وهي ضرورية لكل معلم، وبخاصة الجديد منهم في تدريس الرياضيات.

المحتوى الرياضي

العلاقات والدوال الدالة هي حالة خاصة من العلاقة تمامًا، كما أن المربع هو حالة خاصة من المستطيل؛ لذا فإن جميع الدوال هي علاقات والعكس غير صحيح.

إذا كانت المعادلة تمثل دالة، فإن المتغير من المجال (غالبًا ما يكون x)، يسمى **المتغير المستقل**. والمتغير الثاني (غالبًا ما يكون y)، يسمى **المتغير التابع** لأن قيمه تعتمد على قيم المتغير x .

المعادلات التي تمثل دوالًا تكتب عادة باستعمال **رمز الدالة**. فالمعادلة $y = 5x - 1$ يمكن كتابتها على الصورة $f(x) = 5x - 1$. وإذا أردنا إيجاد قيمة في المدى ترتبط بالعنصر -6 في مجال الدالة f ، فإن هذه القيمة هي $f(-6)$ ويمكن إيجادها بالتعويض عن كل x في المعادلة بالعدد -6 ؛ لذا فإن $f(-6) = 5(-6) - 1 = -31$

قراءة الرياضيات

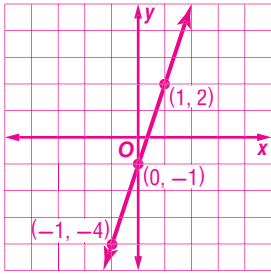
رمز الدالة

يستعمل الرمز $f(x)$ للدوال بدلا من y ، ويُقرأ f لـ x ؛ حيث f هو اسم الدالة وليس متغيرًا مضروبًا في x .

مثالان إضافيان

3

مثل المعادلة $y = 3x - 1$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداهما، ثم حدد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية.
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية.
والمعادلة تمثل دالة وهي متصلة.

4

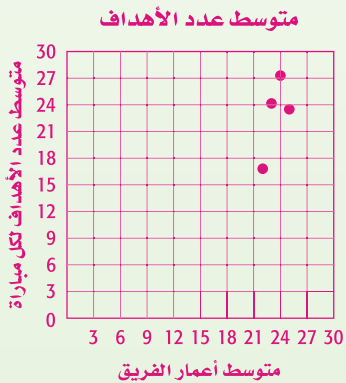
لكن $f(x) = x^3 - 3$ ، أو وجد قيمة كل مما يأتي:

(a) $f(-2) = -11$

(b) $f(2t) = 8t^3 - 3$

إجابة :

(4d) نعم



مثال 4 إيجاد قيمة الدالة

لكن $f(x) = 2x^2 - 8$ ، أو وجد قيمة كل مما يأتي:

الدالة الأصلية	$f(x) = 2x^2 - 8$	الدالة الأصلية	$f(x) = 2x^2 - 8$
بالتعويض	$f(2y) = 2(2y)^2 - 8$	بالتعويض	$f(6) = 2(6)^2 - 8$
	$(2y)^2 = 2^2y^2$		$6^2 = 36$
بالتبسيط	$= 2(4y^2) - 8$	بالتبسيط	$= 2(36) - 8$
	$= 8y^2 - 8$		$= 72 - 8 = 64$

تحقق من فهمك

لكن $g(x) = 0.5x^2 - 5x + 3.5$ ، أو وجد قيمة كل مما يأتي:

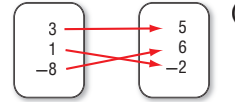
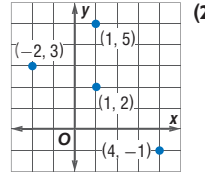
(4A) $g(2.8) = -6.58$ (4B) $g(4a) = 8a^2 - 20a + 3.5$

تأكد

حدد كلاً من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، ثم حدد إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟

(3)

x	y
-2	-4
1	-4
4	-2
8	6



الموسم	متوسط أعمار الفريق	متوسط عدد الأهداف
1423-1424	22	16.2
1424-1425	23	24.1
1425-1426	24	27.2
1426-1427	25	23.5

(4) **كرة قدم:** يبين الجدول المجاور متوسط عدد الأهداف التي أحرزها فريق كرة قدم في مبارياته خلال 4 مواسم ومتوسط أعمار الفريق في كل موسم.

(a) إذا كان متوسط الأعمار هو المجال، فحدد كلاً من المجال والمدى.

(b) اكتب علاقة على صورة أزواج مرتبة تمثل البيانات.

(c) هل هذه العلاقة منفصلة أم متصلة؟ **منفصلة**

(d) مثل هذه العلاقة بيانيًا، وهل هي دالة أم لا؟ **انظر الهامش**

(5-8) انظر ملحق الإجابات

مثل كل معادلة فيما يأتي بيانيًا، ثم حدد مجالها، ومداهما، وحدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإن كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إذا كانت منفصلة أم متصلة.

(5) $y = 5x + 4$ (6) $y = -4x - 2$ (7) $y = 3x^2$ (8) $x = 7$

أو وجد قيمة كل مما يأتي:

(9) $f(-3)$ إذا كانت $f(x) = -4x - 8$ (10) $g(5)$ إذا كانت $g(x) = -2x^2 - 4x + 1$ **-69**

الدرس 1-2 العلاقات والدوال 19

تنوع التعليم

المتعلمون الفرديون اطلب إلى كل طالب أن يرسم علاقة على المستوى الإحداثي، وأن يحدد كلاً من مجالها ومداهما، ثم يحدد ما إذا كانت دالة أم لا.

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 10-1؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

العلاقة بين المتغيرات أشر إلى أنه في العديد من المواقف الحياتية يوجد متغيران؛ يعتمد أحدهما على الآخر، ولكنه في بعض الأحيان لا تكون هناك علاقة واضحة.

- (11) مثال 1 المجال = $\{-0.3, 0.4, 1.2\}$
المدى = $\{-6, -3, -1\}$
دالة متباينة.
(12) المجال = $\{2, 4, -8\}$
المدى = $\{-6, -4, 14\}$
ليست دالة.

(12)

x	y
-0.3	-6
0.4	-3
1.2	-1

- حدد كلاً من مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، ثم حدد إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟
(13) $\{(3, -4), (-1, 0), (3, 0), (5, 3)\}$
ليست دالة
المجال = $\{-1, 3, 5\}$
المدى = $\{-4, 0, 3\}$

المنطقة الإدارية	عدد الذكور	عدد الإناث
المدينة المنورة	635046	627466
حائل	242305	244899
تبوك	339450	321703
الجوف	177379	171733

- (14) سكان: بين الجدول المجاور عدد الذكور وعدد الإناث في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة لعام 1431 هـ.
(a) مثل البيانات الواردة في الجدول بيانياً على أن يمثل المحور الأفقي عدد الذكور والمحور الرأسي عدد الإناث.
(b) حدد كلاً من المجال والمدى.
(c) هل العلاقة التي تمثل البيانات منفصلة أم متصلة؟
(d) هل تمثل العلاقة دالة أم لا؟ وضح إجابتك.
- (14b) المجال: $\{635046, 242305, 339450, 177379\}$
المدى: $\{627466, 244899, 321703, 171733\}$
(14c) منفصلة.
(14d) نعم؛ لأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط من المدى.

مثل كل معادلة فيما يأتي بيانياً، ثم حدد مجالها ومداهما، وحدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد إن كانت منفصلة أم متصلة.

(16) $y = 4x^2 - 8$

(15) $y = -5x^2$

- مثال 3
15-16 انظر ملحق الإجابات

أوجد قيمة كل مما يأتي:

- (17) $f(-8)$ إذا كانت $f(x) = 5x^3 + 1$ -2559 (18) $f(2.5)$ إذا كانت $f(x) = 16x^2$ 100

العمق (ft)	0	20	40	60	80	100
الضغط	1	1.6	2.2	2.8	3.4	4

- (19) غوص: بين الجدول المجاور مقدار الضغط الواقع على الغواص عند أعماق معينة تحت سطح الماء:
(a) مثل العلاقة بيانياً. (19 a - c) انظر ملحق الإجابات
(b) حدد كلاً من مجال العلاقة ومداهما، وهل هي منفصلة أم متصلة؟
(c) هل هذه العلاقة دالة أم لا؟ وضح إجابتك.



الربط مع الحياة

الضغط الواقع على الغواص عندما يكون على عمق 10 أمتار تحت الماء يعادل ضعف الضغط الجوي على السطح تقريباً.

- إذا كانت $g(x) = -2x^2 - 2x + 5$, $h(x) = -4x^2 - 2x + 5$, $f(x) = 3x + 2$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:
- (20) $g(-6)$ -72 (21) $h(3)$ -37 (22) $h(8)$ -267
(23) $f(\frac{2}{3})$ 4 (24) $g(\frac{3}{2})$ $-\frac{9}{2}$ (25) $h(\frac{1}{5})$ $\frac{111}{25}$

(26) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال الدوال المتباينة.

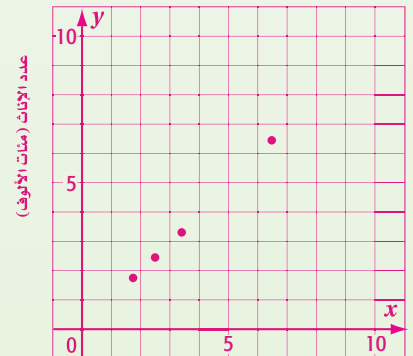
- (a) بيانياً: مثل كل دالة مما يأتي بيانياً:
 $f(x) = x^2$ $g(x) = 2^x$ $h(x) = -x^2$ $j(x) = x^2 + 2$
(b) جدولياً: استعمل التمثيلات البيانية في الفرع a لعمل جدول بين عدد المرات الممكن أن يقطع فيها أي خط أفقي، التمثيل البياني لكل دالة مما سبق.
(c) تحليلياً: حتى تكون الدالة متباينة يجب ألا يقطع أي خط أفقي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة واحدة. أي الدوال السابقة تحقق هذا الشرط وأيها لا تحققه؟
(d) جدولياً: كوّن جدولاً، وصنّف فيه الدوال السابقة إلى متباينة أو غير متباينة.

(26a-d) انظر ملحق الإجابات

تمثيلات متعددة في السؤال 26 يستعمل الطلاب الحاسبة البيانية، وجدول معلومات، وتحليلاً بصرياً؛ لمعرفة خصائص الدوال.

إجابة:

(14a)



عدد الذكور (مئات الألوف)

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	31-40 ، 28 ، 29 ، 11-25
ضمن المتوسط	32-40 ، 11-29 فردي ، 32-40
فوق المتوسط	27-40

(27) يملك فهد 800 ريال، فإذا قرر أن يضيف إلى هذا المبلغ 200 ريال شهرياً، فإن الدالة $p(t) = 800 + 200t$ تمثل مقدار ما معه من نقود $p(t)$ بعد t شهراً. فكم يكون معه بعد 8 أشهر؟ **2400 ريالاً**

مسائل مهارات التفكير العليا

(28) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من أحمد وخالد قيمة $f(3d)$ حيث $f(x) = -4x^2 - 2x + 1$. فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ وضع إجابتك.

خالد	أحمد
$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$ $= 12d^2 - 6d + 1$	$f(3d) = -4(3d)^2 - 2(3d) + 1$ $= -4(9d^2) - 6d + 1$ $= -36d^2 - 6d + 1$

(28) أحمد؛ فخالده لم يقم بتربيع العدد 3 قبل الضرب في -4.

(30) إجابة ممكنة:

$$f(x) = 4x - 1;$$

$$g(x) = 6x + 3$$

(31) لا يمكن أن تكون صحيحة؛

إذا قطع التمثيل البياني محور الصادات مرتين فذلك يعني أن هناك قيمتين مختلفتين للمتغير y عندما $x = 0$ وذلك يتنافى مع اختبار الخط الرأسي.

(29) **مسألة مفتوحة:** مثل كلاً من العلاقات الآتية بيانياً: **انظر ملحق الإجابات**

- (a) سرعة سيارة متجهة نحو نقطة معينة وزمنها إذا علمت أنها توقفت عند إشارتين ضوئيتين.
(b) طول شخص وعمره في الفترة من 5 سنوات إلى 60 سنة.
(c) درجة الحرارة في أحد الأيام خلال الفترة من الساعة 6 صباحاً إلى الساعة 11 مساءً.

(30) **تحذّر:** إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين بحيث $f(b) = 31, g(b) = 51, f(a) = 19, g(a) = 33$ وكانت $a = 5, b = 8$ فأوجد دالتين $f(x), g(x)$ تحققان المعطيات السابقة.

(31) **تبرير:** اذكر هل العبارة الآتية: صحيحة دائماً، صحيحة أحياناً، لا يمكن أن تكون صحيحة؟ "إذا قطع التمثيل البياني محور الصادات بأكثر من نقطة فإن العلاقة تمثل دالة".

(32) **اكتب:** وضح كيف يحدد اختبار الخط الرأسي إذا كانت العلاقة دالة أم لا. **انظر الهامش.**

تدريب على اختبار

- (33) تحتوي بركة سباحة على 19500 جالون من الماء إذا تم تفريغها بمعدل 6 جالونات لكل دقيقة. فأى المعادلات الآتية تمثل عدد جالونات الماء g المتبقية في البركة بعد m دقيقة؟ **A**
- A** $g = 19500 - 6m$ **C** $g = \frac{19500}{6m}$
- B** $g = 19500 + 6m$ **D** $g = \frac{6m}{19500}$
- (34) إذا كان $g(x) = x^2$ ، فأى عبارة مما يأتي تساوي $g(x+1)$ ؟ **C**
- A** 1 **B** $x^2 + 1$
C $x^2 + 2x + 1$ **D** $x^2 - x$

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس 1-1)

(35) $6(3a - 2b) + 3(5a + 4b)$ **33a** (36) $-4(5x - 3y) + 2(y + 3x)$ **-14x + 14y**

(37) $-7(2c - 4d) + 8(3c + d)$ **10c + 36d**

حل كل معادلة فيما يأتي، ثم تحقق من صحة الحل: (الدرس 1-1)

(38) $4(2y - 3) + 5(3y + 1) = -99$ **-4** (39) $8d - 4 + 3d = 2d - 100 - 7d$ **-6** (40) $10y - 5 - 3y = 4(2y + 3) - 20$ **3**

الدرس 1-2 العلاقات والدوال 21

تنبيه!

اكتشف الخطأ في التمرين 28، اقترح على الطلاب إعادة كتابة الدالة الأصلية باستبدال كل x بـ $3d$ قبل بدء تبسيطها.

4 التقويم

تعلم لاحق في الدرس 1-3 سيكون الطلاب قادرين على تعريف بعض الدوال الخاصة وتمثيلها. اطلب إليهم أن يكتبوا عن ارتباط درس اليوم (العلاقات والدوال) بالدرس التالي.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 1-1, 1-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (11)

إرشادات للمعلم الجديد

معالجة يحتوي هذا الدرس على العديد من المفردات التي قد تكون جديدة، وربما صعبة على بعض الطلاب؛ لذا تأكد من أن الطلاب يتعاملون مع اللغة الرياضية بسلاسة في هذا الدرس، قبل الانتقال إلى الدرس الآتي.

إجابة:

(32) إجابة ممكنة: العلاقة هي دالة إذا ارتبطت كل قيمة من قيم المتغير x بقيمة واحدة فقط من قيم المتغير y . إذا فشل اختبار الخط الرأسي، فإن هناك قيمة من قيم المتغير x ترتبط بأكثر من قيمة للمتغير y ، وعليه فإن العلاقة هنا ليست دالة.

تنوع التعليم

فوق

توسع بعض العلاقات (والدوال) ليست منفصلة ولا متصلة كلياً. اطلب إلى الطلاب أن يعتبروا المثلث الموجود في الأسفل علاقة بين متغيرين، ثم اطلب إليهم أن يحدّدوا ما إذا كانت كل علاقة تمثل دالة أم لا، وهل المجال y أو المدى منفصل أم لا؟

عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية مع الزمن (افترض أن التجربة بدأت بخلية بكتيرية واحدة، ثم انقسمت كل خلية إلى خليتين جديدتين بعد 30 دقيقة). عدد الخلايا البكتيرية يمثل دالة في الزمن، ومجال هذه الدالة متصل وذو قيم غير سالبة للزمن، والمتغير التابع (عدد الخلايا البكتيرية) ذو قيم منفصلة.

1 التركيز

الهدف

استعمال الدوال المنفصلة والدوال المتصلة
لحل مسائل حياتية.

إرشادات التدريس

ابدأ هذا النشاط بأن تطلب إلى الطلاب أن يفكروا في أمثلة مجالها الأعداد الكلية فقط. قد تكون الأمثلة:

- عدد عجلات سيارة.
- عدد الطلاب الذين تغيّبوا عن المدرسة.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

قسّم الطلاب مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، واطلب إلى كل مجموعة قراءة الفقرات الأربع الأولى.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 1-5.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال 5 لتقويم مدى فهم الطلاب للفرق بين الدالة المنفصلة والمتصلة.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب تلخيص ما تعلموه عن الدوال المتصلة والمنفصلة، ثم اطلب إليهم تقديم أمثلة على كلٍّ منها.

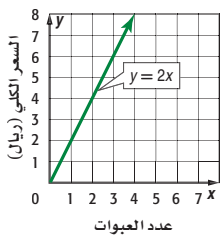
إجابات:

- (1) متصلة؛ لأنه يمكن أن تكون هناك كتل مساوية لأعداد غير صحيحة.
- (2) منفصلة؛ لأنه لا يمكن استلام جزء من رسالة بريد إلكترونية.

الهدف

أستعمل الدوال
المنفصلة والدوال
المتصلة لحل مسائل
حياتية.

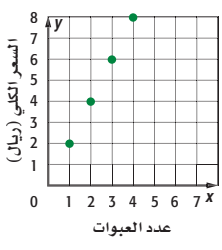
سعر عبوات العصير



تُباع عبوة العصير الواحدة من أحد الأنواع بسعر 2 ريال، ويمكن إيجاد سعر x عبوة عصير باستعمال الدالة المتصلة $y = 2x$ حيث y السعر الكلي بالريال. ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانياً كما هو موضح في التمثيل المجاور.

بالنظر إلى التمثيل البياني، يمكن أن ترى أن سعر عبوتي عصير يساوي 4 ريالات، وسعر 3 عبوات يساوي 6 ريالات وهكذا. يبين التمثيل البياني أن سعر 1.5 عبوة هو 2(1.5) ويساوي 3 ريالات. إلا أن عبوات العصير لا تُباع مملوءة جزئياً. فهذه الدالة تُمثل بدقة أكثر بدالة منفصلة.

سعر عبوات العصير



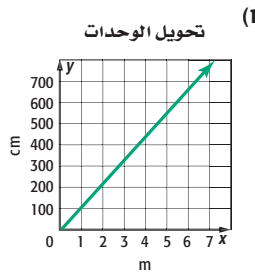
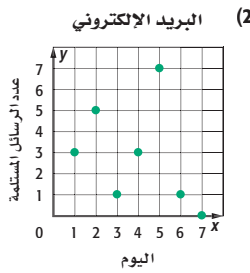
التمثيل البياني المجاور هو تمثيل الدالة المنفصلة التي تمثل سعر عبوات العصير. والمجال في هذا التمثيل البياني مقبول ومنطقي في هذا الموقف.

عند اختيار دالة منفصلة أو متصلة لتمثيل موقف من واقع الحياة يجب الأخذ بعين الاعتبار إذا كانت كل الأعداد الحقيقية تعد منطقية ومقبولة كعناصر في المجال.

(1, 2) انظر الهامش

تمارين

بيّن إذا كانت كل علاقة فيما يأتي متصلة أو منفصلة، وفسر إجابتك.



(3-5) انظر ملحق الإجابات.

- (3) y تمثل المسافة التي تقطعها سيارة في زمن مقداره x ساعة.
- (4) y تمثل العدد الكلي لراكبي لعبة العجلة الدوارة بعد x دورة من تشغيل اللعبة.
- (5) **اكتب:** مثلاً من واقع الحياة على دالة منفصلة وآخر على دالة متصلة، وفسر إجابتك.

التوسع في المفهوم

- اطلب إلى الطلاب تمثيل موقفٍ حياتيٍّ بيانيٍّ، حيث يمكن التعبير عن ذلك الموقف بدالة متصلة.
- اطلب إلى الطلاب تمثيل موقفٍ حياتيٍّ بيانيٍّ، حيث يمكن التعبير عن ذلك الموقف بدالة منفصلة.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 2

دون المتوسط **دون** ضمن ضمن المتوسط **فوق** فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (12) - دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-2 تدريبات إعادة التعليم العلاقات والدوال

معادلات العلاقات والدوال، المعادلات التي تمثل دوال غالباً ما تكتب برمز الدالة، فمثل سبيل المثال: $y = 10 - 8x$ يمكن كتابتها على الصورة: $f(x) = 10 - 8x$ وهذه الصيغة تؤكد حقيقة أن قيم y (التغير التابع) تعتمد على قيم x (التغير المستقل).

نعرّف القيمة المعطاة من المجال في المعادلة لإيجاد العنصر المرتبط بهذه القيمة في المدى، فيكون هو قيمة الدالة.

مثال: إذا أعطيت الدالة $f(x) = x^2 + 2x$ فأوجد قيمة كل ما يأتي:

إجابات تقريبي:

(1) المجال = {جميع الأعداد الحقيقية} المدى = {3}

(2) المجال = {جميع الأعداد الحقيقية} المدى = $\{y | y \geq -1\}$

(3) المجال = {جميع الأعداد الحقيقية} المدى = {جميع الأعداد الحقيقية}

تدريبات:

مثل كل علاقة أو معادلة، وحدّ المجال للمدى لكل منها. وحدّ فيها إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت دالة فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أو متصلة.

أوجد قيمة كل ما يأتي إذا كان: $f(x) = -2x + 4$

أوجد قيمة كل ما يأتي إذا كان: $g(x) = x^2 - x$

الفصل 1: الدوال والتباينات

تدريبات إعادة التعليم (11) - دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-2 تدريبات إعادة التعليم العلاقات والدوال

العلاقات والدوال، يمكنك تمييز العلاقة في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة أو في صورة معادلة، والعلاقة هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي تجعل المعادلة صحيحة، والدالة علاقة تربط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مداها.

كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى، ولا يرتبط أكثر من مجال بالعنصر نفسه في المدى.

مثال: حدد مجال العلاقة الآتية ومداها، وهل تمثل هذه العلاقة دالة؟

المجال والمدى كليهما كليهما أعداد حقيقية. كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى؛ لذا فهذه دالة.

المجال = $\{-5, -3, -1, 1, 3\}$

المدى = $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

تدريبات:

مثل كل علاقة أو معادلة بما يأتي وحدّ مجالها ومداها، ثم حدّد ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت دالة فهل هي متباينة أم لا؟

(1) (0, 4, 0), (3, 1, 1), (0, 4, 2), (0, 5, 3), (2, -7, 2), (3, -11), (4, -2), (-5, 2)

(2) المجال = $\{0, 4, 0, 5, 3, 1\}$ المدى = $\{-7, -5, 3, 4\}$

(3) المجال = $\{0, 1, 2, 3\}$ المدى = $\{0, 1, 2, 3\}$

(4) المجال = $\{-15, -14, -13, -12\}$ المدى = $\{10, 11, 12\}$

(5) المجال = $\{0, 5, -3\}$ المدى = $\{6, 8\}$

(6) المجال = $\{0, 1, 0, 5, 6\}$ المدى = $\{-3, 8, 12\}$

الفصل 1: الدوال والتباينات

تدريبات حل المسألة (14) - دون ضمن فوق

1-2 تدريبات حل المسألة العلاقات والدوال

1 كواكب: يبيّن الجدول الآتي متوسط المسافة بين الشمس والكواكب الثمانية الرئيسة في النظام الشمسي، ومدة دوران كل منها، فكر في متوسط المسافة على أنها المجال، ومدة الدوران على أنها المدى للعلاقة، حل هذه العلاقة دالة؟ فسر إجابتك.

الكوكب	متوسط المسافة من الشمس (مستويات)	مدة الدوران
عطارد	0.387	0.241
الزهرة	0.723	0.615
الأرض	1.0	1.0
المريخ	1.524	1.881
المشتري	5.204	11.75
زحل	9.582	29.5
أورانوس	19.201	84
نبتون	30.047	165

2 احتمالات: قامت ليل بإلقاء مكعب الإرقام مرات عدة، فكتبت التمثيل الآتي للبيانات، اكتب العلاقة التي تمثل هذه البيانات على شكل أزواج مرتبة.

تمثل البيانات بيانياً:

الفصل 1: الدوال والتباينات

تدريبات المهارات (13) - دون ضمن فوق

1-2 تدريبات المهارات العلاقات والدوال

حدد المجال والمدى لكل علاقة بما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانت دالة، وإذا كانت دالة، فهل هي متباينة؟

(1) المجال = $\{100, 200, 300\}$ المدى = $\{50, 100, 150\}$

(2) المجال = $\{3\}$ المدى = $\{1, 5\}$

(3) المجال = $\{1, 2, 3\}$ المدى = $\{2, 4, 6\}$

(4) المجال = $\{x | 0 \leq x \leq 10\}$ المدى = $\{y | -2 \leq y \leq 8\}$

(5) المجال = $\{2, -3\}$ المدى = $\{2, 4, -1\}$

(6) المجال = $\{2, 6\}$ المدى = $\{2, 6\}$

(7) المجال = $\{-3, -2, -1, 3\}$ المدى = $\{-3, -2, -1, 3\}$

(8) المجال = $\{-2\}$ المدى = $\{-3, -2, -1, 3\}$

إذ كان: $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = 2x - 1$ فأوجد قيمة كل ما يأتي:

(9) $f(0) = -1$

(10) $f(12) = 23$

(11) $g(4) = -14$

(12) $f(-2) = -5$

(13) $g(-1) = 1$

(14) $f(d) = 2d - 1$

الفصل 1: الدوال والتباينات



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 2

دون دون المتوسط	ضمن ضمن المتوسط																																
<p>التدريبات الإثرائية (15)</p> <p>الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p>1-2 التدريبات الإثرائية علاقات ودوال على الأعداد الحقيقية</p> <p>من المتع التفكير في الارتباط واحد لواحد بين مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية.</p> <p>مسألة 1: هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة؟ ضع المجموعتين في الصورة الآتية:</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>...</td> </tr> <tr> <td>0</td><td>1</td><td>-1</td><td>2</td><td>-2</td><td>3</td><td>-3</td><td>4</td><td>-4</td><td>5</td><td>...</td> </tr> </table> <p>رغم أن الأعداد الطبيعية مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة، إلا أنه يوجد عدد طبيعي وحيد لكل عدد صحيح، أي أنه يوجد ارتباط واحد لواحد بين المجموعتين.</p> <p>مسألة 2: هل هناك ارتباط واحد لواحد، بين الأعداد الطبيعية والأعداد الزوجية الموجبة؟</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>...</td> </tr> <tr> <td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>...</td> </tr> </table> <p>يوجد ارتباط واحد لواحد بين المجموعتين.</p> <p>تساويين:</p> <p>(1) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الكلية والأعداد الطبيعية؟ نعم</p> <p>(2) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الكلية والأعداد الصحيحة؟ نعم</p> <p>(3) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الصحيحة السالبة ومجموعة الأعداد الصحيحة؟ نعم</p> <p>(4) هل هناك ارتباط واحد لواحد بين الأعداد الطبيعية والأعداد النسبية؟ نعم</p>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	...	1	2	3	4	...	2	4	6	8	...	<p>كتاب التمارين (5)</p> <p>1-2 العلاقات والدوال</p> <p>حدد مجال كل علاقة فيما يأتي ومداهما، وبين ما إذا كانت دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟</p> <p>(1) المجال: {2, 8}، المدى: {21, 25, 30} ليست دالة</p> <p>(2) المجال: {5, 10, 15}، المدى: {105, 110} دالة، ليست متباينة</p> <p>(3) المجال: {-3, -1, 0, 2, 3}، المدى: {-2, -1, 0, 4} دالة، ليست متباينة</p> <p>(4) المجال: {-2, -1, 1, 2}، المدى: {-1, 0, 1} ليست دالة</p> <p>مثل كل معادلة مما يأتي بياناً، ثم حدد مجالها ومداهما، وحدد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدد ما إذا كانت متصلة أم منفصلة:</p> <p>(5) المجال: {-1}، المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية، ليست دالة</p> <p>(6) المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية، دالة، متباينة، متصلة</p> <p>إذا كان $f(x) = \frac{5}{x+2}$، $g(x) = -2x + 3$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:</p> <p>(7) $f(3) = 1$ (7) $f(-4) = -\frac{5}{6}$ (8) $g(\frac{1}{2}) = 2$ (9) $g(m-2) = \frac{5}{m}$ (10) $f(-2)$ غير معرفة (11) $g(-6) = 15$ (12) $f(m-2) = \frac{5}{m}$</p> <p>(13) تخفيضات: تمثل الأزواج المرتبة (5, 60)، (4, 52)، (3, 42)، (2, 30)، (1, 16) أسعار بيع أعداد مختلفة من منتج في أحد المحال التجارية، حدد مجال هذه العلاقة ومداهما، وهل هي متصلة أم منفصلة؟ وهل هي دالة؟ المجال: {1, 2, 3, 4, 5}، المدى: {16, 30, 42, 52, 60}، متصلة، دالة</p> <p>(14) عمليات حسابية: يستطلع حاسوب تنفيذ عملية حسابية واحدة خلال 0.0000000015 ثانية، ويعطى زمن تنفيذ لـ n عملية حسابية بالصيغة $T(n) = 0.0000000015n$، فما الزمن الذي يتطلبه ذلك الحاسوب لتنفيذ 5 بلايين عملية حسابية؟ 7.5 s</p>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...																							
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	...																							
1	2	3	4	...																													
2	4	6	8	...																													

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-3

حل معادلات تتضمن القيمة المطلقة.

الدرس 1-3

كتابة الدوال المتعددة التعريف وتمثيلها بيانياً.

كتابة الدوال الدرجية ودوال القيمة المطلقة وتمثيلها بيانياً.

ما بعد الدرس 1-3

تحديد وتمثيل الدوال الأساسية (الأم) بما فيها الدوال التربيعية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

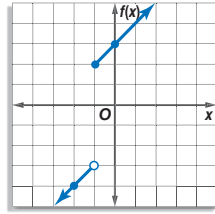
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
واسأل:

- ما نسبة المصابات بالسمنة في الفئة العمرية من 25 إلى 34 ؟ 38%
- أيُّ الفئات العمرية نسبة المصابات بالسمنة فيها 58%؟ من 45 إلى 54

توفر أسئلة التعزيز توجيهاً لموضوع الدرس، وتوضيحاً لهدفه، وتركيزاً لانتباه الطلاب وتوجيههم نحوه.

النسبة	إلى	من
19%	24	15
38%	34	25
53%	44	35
58%	54	45
49%	64	55

الدالة المتعددة التعريف: الدالة التي تربط بين العمر ونسبة المصابات بالسمنة ليست خطية؛ لأن كل فترة من مجال الدالة معرفة بعبارة مختلفة، والدالة التي تكتب باستعمال عبارتين أو أكثر تسمى **دالة متعددة التعريف**. وعند تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانياً توضع دائرة صغيرة مظلمة عند الطرف لتشير إلى أن النقطة تنتمي إلى التمثيل البياني، وتوضع دائرة غير مظلمة لتشير إلى أن النقطة لا تنتمي إلى التمثيل البياني.



مثال 1 الدالة متعددة التعريف

مثال الدالة $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < -1 \\ x + 3, & x \geq -1 \end{cases}$ بيانياً. وحدد كلاً من مجالها ومداه.

الخطوة 1: مثل $f(x) = x - 2$ بيانياً عندما $x < -1$.

احسب قيمة المقدار $x - 2$ عندما $x = -1$ ، وعند قيمة أخرى لـ x أقل من -1 ولتكن -2

$$f(x) = x - 2 \quad f(x) = x - 2$$

$$f(-2) = (-2) - 2 = -4 \quad f(-1) = (-1) - 2 = -3$$

حدد النقطتين $(-2, -4)$, $(-1, -3)$ ، وصل بينهما بنصف مستقيم.

وبما أن العدد -1 لا يحقق المتباينة لذا نبدأ بدائرة غير مظلمة عند النقطة $(-1, -3)$.

الخطوة 2: مثل $f(x) = x + 3$ بيانياً عندما $x \geq -1$.

احسب قيمة المقدار $x + 3$ عندما $x = -1$ ، وعند قيمة أخرى لـ x أكبر من أو تساوي -1 ولتكن 0

$$f(x) = x + 3 \quad f(x) = x + 3$$

$$f(0) = (0) + 3 = 3 \quad f(-1) = (-1) + 3 = 2$$

حدد النقطتين $(0, 3)$, $(-1, 2)$ ، وصل بينهما بنصف مستقيم.

وبما أن العدد -1 يحقق المتباينة، لذا نبدأ بدائرة مظلمة عند النقطة $(-1, 2)$.

وبما أن الدالة معرفة عند جميع قيم x ، لذا فالمجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

قيم $f(x)$ للأزواج المرتبة في التمثيل البياني للدالة هي جميع الأعداد الحقيقية الأقل من -3 وكل الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2 ، لذا فإن المدى هو $\{f(x) \mid f(x) < -3 \text{ أو } f(x) \geq 2\}$

تحقق من فهمك

1) مثل الدالة $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ بيانياً، ثم حدد كلاً من مجالها ومداه. انظر ملحق الإجابات

مصادر الدرس 1-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (25)	• تنويع التعليم، ص (25)	• تنويع التعليم، ص (25, 26)
كتاب التمارين	• ص (6)	• ص (6)	• ص (6)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

تمثل الدوال المتعددة التعريف غالباً بعدة دوال خطية. وتسمى حينئذٍ **الدالة المتعددة التعريف الخطية**.

مثال 2 كتابة الدالة المتعددة التعريف

اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني المجاور.

اكتب الدالة التي تمثل كل جزء في التمثيل البياني.

الجزء الأيسر يمر بالنقطتين $(-2, -1)$ ، $(0, 3)$ ، وميله 2 ($\frac{-1-3}{-2-0} = 2$)،

وباستعمال صيغة الميل ونقطة مثلاً، فإن هذا الجزء تمثله الدالة $f(x) = 2x + 3$ ، ولوجود دائرة غير مظللة عند النقطة $(1, 5)$ ، فإن هذا يعني أن الدالة معرفة على الفترة $\{x | x < 1\}$.

الجزء الأوسط تمثله الدالة $f(x) = -x + 2$.

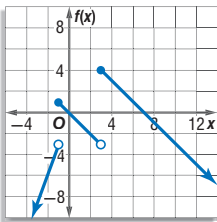
وتوجد دائرتان مظللتان عند النقطتين $(1, 1)$ و $(2, 0)$ ، وهذا يعني أن الدالة معرفة على الفترة $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$.

الجزء الأيمن تمثله الدالة $f(x) = 3$. وتوجد دائرة غير مظللة عند النقطة $(2, 3)$.

وهذا يعني أن الدالة معرفة على الفترة $\{x | x > 2\}$ ، ونكتب الدالة المتعددة التعريف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 1 \\ -x + 2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}$$

تحقق: يبين التمثيل البياني نصف مستقيم ميله موجب عندما تكون $x < 1$. ويبين أيضاً قطعة مستقيمة ميلها سالب عندما تكون $1 \leq x \leq 2$ ونصف مستقيم آخر ميله صفر عندما تكون $x > 2$. لذا يكون تعريف الدالة منطقياً للتمثيل البياني المعطى.



تحقق من فهمك

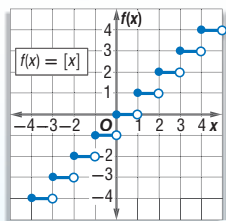
(2) اكتب الدالة المتعددة التعريف في

التمثيل البياني المجاور.

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x < -1 \\ -x, & -1 \leq x < 3 \\ -x + 7, & x \geq 3 \end{cases}$$

الدالة الدرجية: من الدوال المتعددة التعريف الخطية الشهيرة **الدالة الدرجية** التي تتكون من قطع مستقيمة أفقية، كما أن **دالة أكبر عدد صحيح** التي تكتب على الصورة $f(x) = [x]$ ، هي مثال على الدالة الدرجية؛ حيث يعني الرمز $[x]$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x . فعلى سبيل المثال: $[3.25] = 3$ وكذلك $[-4.6] = -5$.

أضف إلى مطوبتك



دالة أكبر عدد صحيح

$f(x) = [x]$ ، وتعرّف على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

قطع مستقيمة أفقية.

مجموعة الأعداد الحقيقية

مجموعة الأعداد الصحيحة

$f(x) = 0$ حيث $0 \leq x < 1$

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسية (الأم)

شكل التمثيل البياني

المجال

المدى

المقطعان

إرشادات للدراسة

تمثيل الدوال المتعددة

التعريف بيانياً

قد تكون الدوال المتعددة التعريف متصلة أو غير متصلة.

الدالة المتعددة التعريف

مثال 1 يبين كيفية تمثيل دالة متعددة التعريف بيانياً.

مثال 2 يبين كيفية كتابة دالة متعددة التعريف.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل

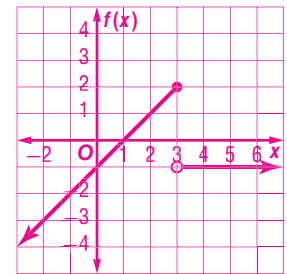
مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب

للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 مثل الدالة الآتية بيانياً، وحدد كلاً من مجالها ومداهما:

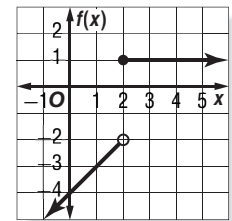
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 3 \\ -1, & x > 3 \end{cases}$$



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية،
والمدى: $\{f(x) | f(x) \leq 2\}$.

2 اكتب الدالة المتعددة التعريف التي

لها التمثيل البياني الآتي:



$$f(x) = \begin{cases} x - 4, & x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

المحتوى الرياضي

الدوال المتعددة التعريف تسمى الدوال

المتعددة التعريف أحياناً الدوال المتشعبة أو

الدوال المنقسمة المجال، فعلى سبيل المثال، دالة

القيمة المطلقة $y = |x|$ هي ذاتها الدالة:

$$y = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

عقار: يتقاضى مجمع للشقق المفروشة 300 ريال مقابل تأجير الشقة ليوم واحد أو جزء منه، و250 ريالاً مقابل تأجير الشقة ذاتها لأي يوم إضافي أو جزء منه. اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف ومثلها بيانياً.

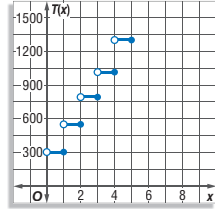
افهم: المعطيات: أجره الشقة لليوم الأول أو لجزء منه هي 300 ريال، وأجرة أي يوم إضافي أو جزء منه بعد اليوم الأول 250 ريالاً.

المطلوب: كتابة الدالة التي تمثل الموقف، وتمثيلها بيانياً.

خطط: كوّن جدولاً يمثل الموقف؛ لتكتشف النمط، وتكتب الدالة وتمثلها بيانياً.

حل: إذا كان زمن التأجير أكبر من 0 يوم وأقل من أو يساوي يوماً، فإن الأجرة هي 300 ريال. وإذا كان الزمن أكبر من يوم وأقل من أو يساوي يومين فإن الأجرة هي 550 ريالاً وهكذا، لذا استعمل نمط الزمن مع الأجرة لعمل الجدول التالي، حيث x هي عدد أيام تأجير الشقة. و $T(x)$ هي أجرة الشقة ثم مثله بيانياً.

x	$0 < x \leq 1$	$1 < x \leq 2$	$2 < x \leq 3$	$3 < x \leq 4$	$4 < x \leq 5$
$T(x)$	300 ريال	550 ريالاً	800 ريال	1050 ريالاً	1300 ريال



وعليه فإن الدالة المطلوبة وتمثيلها البياني يكونان كما يلي:

$$T(x) = \begin{cases} 300 & 0 < x \leq 1 \\ 550 & 1 < x \leq 2 \\ 800 & 2 < x \leq 3 \\ 1050 & 3 < x \leq 4 \\ 1300 & 4 < x \leq 5 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

تحقق: بما أن المجمع يحول أي كسر للعدد الصحيح التالي، فإن كل قطعة مستقيمة ستحتوي على دائرة غير مظلمة عن يسارها، وأخرى مظلمة عن يمينها كما في الشكل.

(3) انظر الهامش

تحقق من فهمك

(3) إعادة تدوير الورق: تدفع شركة لإعادة تدوير الورق 25 ريالاً عن كل صندوق من الورق يتم إحضاره للشركة ولا تدفع أي شيء مقابل أي صندوق غير ممتلئ بالكامل. مثل بيانياً المبلغ $P(x)$ الذي تدفعه الشركة لعدد الصناديق x التي تم إحضارها لتدويرها.

وهناك نوع آخر من الدوال المتعددة التعريف يسمى **دالة القيمة المطلقة** وهي الدالة التي تحتوي على عبارة جبرية يستعمل فيها رمز القيمة المطلقة.



الربط مع الحياة

تقدر المخلفات الورقية في السعودية بـ 1.5 مليون طن سنوياً، يستغل منها في عمليات التدوير 700 ألف طن فقط.

الدالة الدرجية ودالة القيمة المطلقة

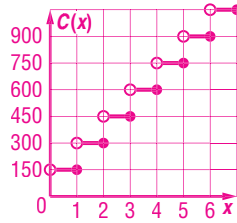
مثال 3 يبين كيفية تمثيل الدالة الدرجية بيانياً.

مثال 4 يبين كيفية تمثيل دالة القيمة المطلقة بيانياً، وتحديد كل من مجالها ومداه.

مثال إضافي

(a) علاج طبيعي: يتقاضى أحد

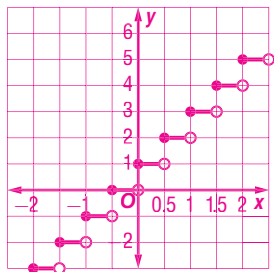
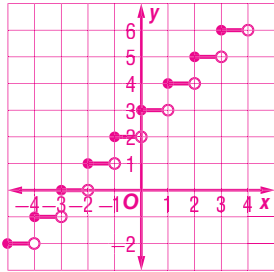
اختصاصيي العلاج الطبيعي 150 ريالاً عن كل ساعة عمل أو أي جزء منها. ارسم شكلاً يمثل هذا الموقف.



(b) مثل كلاً من الدوال الآتية بيانياً:

$$f(x) = [x] + 3$$

$$f(x) = [2x + 1]$$



أضف إلى مطويتك

دالة القيمة المطلقة

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسية (الأم) $f(x) = |x|$ ، وتُعرّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

على شكل حرف V

مجموعة الأعداد الحقيقية

مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

$$x = 0, f(x) = 0$$

$$f(x) < 0$$

شكل التمثيل البياني

المجال

المدى

المقطعان

ولا يمكن أن تكون

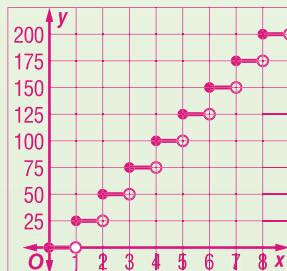
الدرس 1-3 دوال خاصة 25

تنوع التعليم

المتعلمون اللغويون / اللفظيون اطلب إلى بعض الطلاب بيان كيفية تمثيل إحدى الدوال المتعددة التعريف الواردة في هذا الدرس لفظياً أمام زملائهم.

إجابة (تحقق من فهمك):

(3)



التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اعرض على الطلاب عدة

صور لتمثيلات بيانية لدوال متعددة

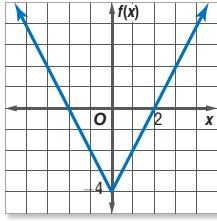
التعريف، ثم اطلب إليهم تدوين شرح

كيفية كتابة كل دالة في مطوياتهم

الخاصة.

مثّل الدالة $f(x) = |2x| - 4$ بيانيًا، ثم حدد كلاً من مجالها ومداهما.

- (3) مثّل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي.
(4) صل بين النقاط.



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو $\{f(x) | f(x) \geq -4\}$.

- (1) اجعل ما بداخل القيمة المطلقة يساوي الصفر، أي $x = 0$ أو $2x = 0$
(2) كوّن جدولاً للقيم، يحوي قيمًا لـ x أكبر من 0 وقيمًا أصغر من 0

x	$ 2x - 4$
-2	0
-1	-2
0	-4
1	-2
2	0

تحقق من فهمك (4A, 4B) انظر الهامش

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، ثم حدد كلاً من مجالها ومداهما:

$$f(x) = -|x| + 1 \quad (4B)$$

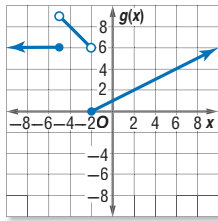
$$f(x) = |x - 2| \quad (4A)$$

تأكد

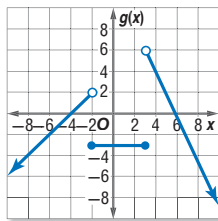
مثال 1 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، ثم حدد كلاً من مجالها ومداهما: 1, 2 انظر ملحق الإجابات

$$f(x) = \begin{cases} 8, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x < 4 \\ -4-x, & x \geq 4 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} -3, & x \leq -4 \\ x, & -4 < x < 2 \\ -x+6, & x \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

مثال 2 اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانيًا في كل مما يأتي: 3, 4 انظر ملحق الإجابات



(4)



(3)

- (5) محاضرات طبية: يريد أحد الأطباء إلقاء محاضرة حول العدوى في قاعة تتسع لـ 250 شخصًا فقط، وكان عدد راغبي حضور المحاضرة أكثر من ذلك بكثير. مثّل بيانيًا دالة متعددة التعريف تبين العلاقة بين عدد المحاضرات y التي يمكن أن يلقيها الطبيب، وعدد الحضور x . انظر ملحق الإجابات

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًا، ثم حدد كلاً من مجالها ومداهما: 6-11 انظر ملحق الإجابات

$$g(x) = |-3x| \quad (8) \quad h(x) = [x - 5] \quad (7) \quad g(x) = -2[x] \quad (6)$$

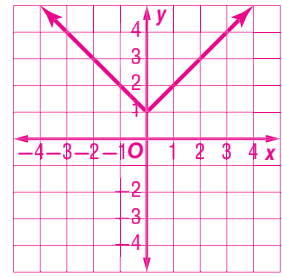
$$s(x) = |-2x| + 6 \quad (11) \quad h(x) = |x + 4| \quad (10) \quad f(x) = 2|x| \quad (9)$$

مثال إضافي

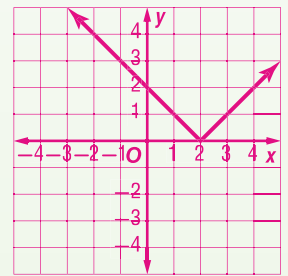
4

مثّل الدالة $y = |x| + 1$ بيانيًا، وحدد مجالها ومداهما.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
والمدى هو $\{y | y \geq 1\}$.

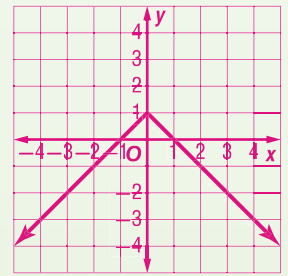


إجابات (تحقق من فهمك):



(4A)

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى $= \{f(x) | f(x) \geq 0\}$



(4B)

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى $= \{f(x) | f(x) \leq 1\}$

فوق

تنويع التعليم

توسع اطلب إلى الطلاب أن يرسموا مستوى إحداثيًا كبيرًا في ورقة رسم بياني، ثم اجعلهم يستخدموا أعواد الأسنان (أو أشياء مشابهة) لتمثيل الشكل العام للدوال الدرجية، والدوال المتعددة التعريف، ودوال القيمة المطلقة. يجب على الطلاب تحديد نوع كل شكل عند تمثيله.

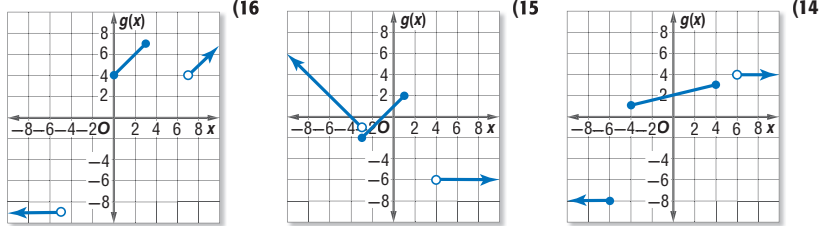
مثال 1

مثل كل دالة فيما يأتي بياناً، ثم حدّد مجالها ومداها: (12-13) انظر الهامش

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq -6 \\ 5, & -6 < x \leq 2 \\ -2x + 1, & x > 4 \end{cases} \quad (13) \quad f(x) = \begin{cases} -3x, & x \leq -4 \\ x, & 0 < x \leq 3 \\ 8, & x > 3 \end{cases} \quad (12)$$

مثال 2

اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني في كل مما يأتي: 14-16. انظر ملحق الإجابات



مثال 3

مثل كل دالة فيما يأتي بياناً، ثم حدّد كلاً من مجالها ومداها: 17, 18. انظر ملحق الإجابات

$$h(x) = 3[x] - 8 \quad (18) \quad f(x) = [x] - 6 \quad (17)$$

مثال 4

مثل كل دالة فيما يأتي بياناً، ثم حدّد كلاً من مجالها ومداها: 19-24. انظر ملحق الإجابات

$$h(x) = |2x| - 8 \quad (21) \quad g(x) = |x + 2| \quad (20) \quad f(x) = |x - 5| \quad (19)$$

$$h(x) = -3|0.5x + 1| - 2 \quad (24) \quad f(x) = 2|x - 4| + 6 \quad (23) \quad k(x) = |-3x| + 3 \quad (22)$$

(25) **جمعية خيرية:** تقوم جمعية خيرية بجمع الصدقات لإيصالها إلى مستحقيها، وتبرع الجمعية أيضاً بمبلغ مساوٍ لأي صدقة دون 100 ريال أو تساويها، كما تضيف الجمعية 100 ريال إلى أي صدقة تزيد على 100 ريال.

(a) حدّد نوع الدالة التي تمثّل هذا الموقف. **دالة متعددة التعريف.**(b) اكتب الدالة التي تصف هذا الموقف، ثم مثلها بياناً. **انظر ملحق الإجابات**

الربط مع الحياة

تهدف جمعيات البرّ بالمملكة إلى ترسيخ مبدأ التكافل الاجتماعي بين أفراد المجتمع وتحويله إلى واقع عملي من خلال رعاية المحتاجين وتخفيف معاناتهم بتوفير الغذاء والدواء واللباس والأثاث.

(26) **ترفيه:** يوضح الجدول المجاور: تكلفة استئجار دراجة هوائية.(a) حدد نوع الدالة التي تمثّل هذا الموقف. **دالة درجية**

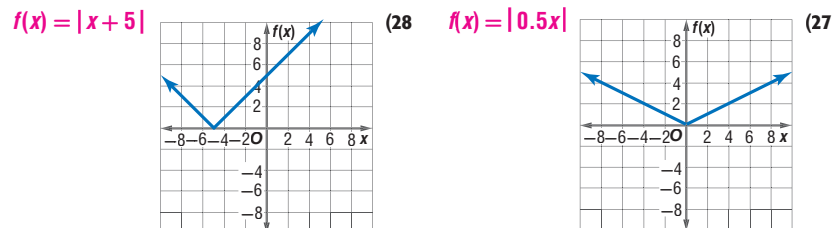
(b) اكتب الدالة التي تمثّل هذا الموقف، ثم مثلها بياناً.

انظر ملحق الإجابات

استئجار الدراجات الهوائية

السعر (ريال)	الزمن (ساعة)
6	$0 < t \leq \frac{1}{2}$
10	$\frac{1}{2} < t \leq 1$
16	$1 < t \leq 2$
24	$2 < t \leq 3$

اكتب دالة القيمة المطلقة التي لها التمثيل البياني في كل مما يأتي:



الدرس 1-3 دوال خاصة 27

التدريب 3

التقويم التكويني

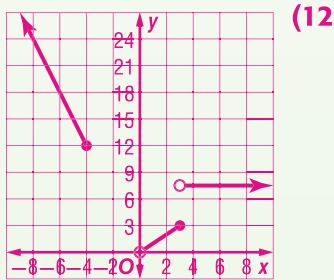
استعمل الأسئلة 1-11؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

المهارة اللفظية اطلب إلى الطلاب أن يبينوا لماذا سُميت كلٌّ من الدوال التالية بهذه الأسماء: الدالة الدرجية، دالة القيمة المطلقة، الدالة المتعددة التعريف.

إجابات:

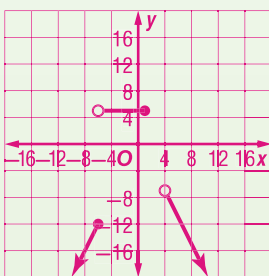


$$\text{المجال} = \{x \mid x \leq -4 \vee 0 < x\}$$

= المدى

$$\{f(x) \mid 0 < f(x) \leq 3 \vee f(x) = 8 \vee f(x) \geq 12\}$$

(13)



$$\text{المجال} = \{x \mid x \leq 2 \vee x > 4\}$$

= المدى

$$\{f(x) \mid f(x) < -7 \vee f(x) = 5\}$$

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	36-45 ، 12-25
ضمن المتوسط	36-45 ، 28-32 ، 13-27 فردي
فوق المتوسط	28-45

4 التقويم

تعلم لاحق في الدرس 1-4 سوف يتعلم الطلاب تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة. اطلب إليهم أن يدوّنوا توقعاتهم عن العلاقة بين الدرس الحالي والدرس القادم.

تدريب على اختبار
تدريبات تساعد على ترسيخ المعلومة لدى الطلاب باستعمال تدريبات على شكل اختبار من متعدد.

مثل كل دالة فيما يأتي بياناً، ثم حدّد كلاً من مجالها ومداهها: (29, 30) انظر ملحق الإجابات

$$h(x) = \begin{cases} -|x|, & x < -6 \\ |x|, & -6 \leq x \leq 2 \\ 1-x, & x > 2 \end{cases} \quad (30) \quad g(x) = \begin{cases} [x], & x < -4 \\ x+1, & -4 \leq x \leq 3 \\ -|x|, & x > 3 \end{cases} \quad (29)$$

(31) **تمثيلات متعددة**: لتكن $f(x) = |x| - 4$, $g(x) = |3x|$ انظر ملحق الإجابات

(a) **جدولياً**: كوّن جدولاً لقيم كل من $f(x)$ و $g(x)$ ما بين $x = -4$, $x = 4$.

(b) **بيانياً**: مثل كلاً من الدالتين بيانياً على مستوى إحداثي مختلف.

(c) **عددياً**: احسب الميل بين كل نقطتين متتاليتين في الجدول.

(d) **لفظياً**: صف العلاقة بين ميل كل من جزأي دالة القيمة المطلقة.

(31d) **ميل كل من الجزأين**
يساوي النظير الجمعي لميل الجزء الآخر، أما الميل في كل جزء فهو ثابت.

مسائل مهارات التفكير العليا

(32) **مسألة مفتوحة**: اكتب علاقة باستعمال القيمة المطلقة بحيث يكون المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية. **إجابة ممكنة: $|y| = x$**

(33) **تحديد**: مثل المعادلة $|y| = 2|x+3| - 5$ بيانياً. انظر الهامش.

(34) **تبرير**: أعط مثلاً مضاداً للجملة الآتية، وفسر إجابتك. **إجابة ممكنة: $8 = [8.6]$ لكن حين نقرب العدد 8.6 يكون ناتج التقريب 9**
"حتى تجد أكبر عدد صحيح لعدد غير صحيح x ، فإنك تقرب x إلى أقرب عدد صحيح"

(35) **مسألة مفتوحة**: اكتب دالة قيمة مطلقة $f(x)$ ، تحقق $f(5) = -3$. **إجابة ممكنة: $f(x) = -|x-2|$**

(36) **اكتب**: اشرح من خلال مثال كيف تستعمل الدوال المتعددة التعريف لتمثيل مسائل من واقع الحياة.

(36) **نموذج إجابة**: يمكن استعمال الدالة المتعددة التعريف لتمثيل الأجر الذي يدفعه شخص مقابل استخدامه موقف سيارات.

تدريب على اختبار

(38) أي دالة مما يأتي يكون فيها $-1 \neq f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ؟ **B**

A $f(x) = 2x$ **C** $f(x) = [x]$

B $f(x) = |-2x|$ **D** $f(x) = [2x]$

(37) **إجابة قصيرة**: ما العبارة التي تعطي الحد النوني للنمط في الجدول التالي؟ **$3n+1$**

2	4	6	8	n
7	13	19	25	?

مراجعة تراكمية

إذا كان $f(x) = -4x + 6$, $g(x) = -x^2$, $h(x) = -2x^2 - 6x + 9$ فأوجد كل قيمة مما يأتي: (الدرس 1-2)

(39) $f(2c) = -8c + 6$ (40) $g(a+1) = -a^2 - 2a - 1$ (41) $h(6) = -99$

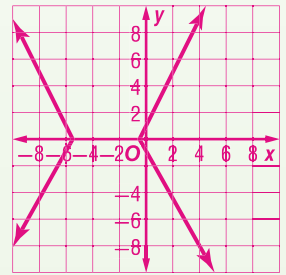
حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي: (الدرس 1-1)

(42) $\sqrt{36}$ **N, W, Z, Q, R** (43) -3 **Z, Q, R** (44) $\frac{2}{5}$ **Q, R** (45) $\sqrt{11}$ **I, R**

28 الفصل 1 الدوال والمتباينات

إجابة:

(33)



تمثيلات متعددة في السؤال 31 يستعمل الطلاب جدول قيم، ومن ثمّ يقومون بتمثيله بيانياً على المستوى الإحداثي؛ وذلك للمقارنة بين ميلي جزأي دالة القيمة المطلقة.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 1

دون فوق المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

دون دون المتوسط

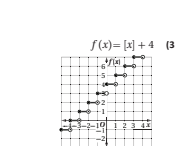
دون

تدريبات إعادة التعليم - تزمة (17)

1-3 تدريبات إعادة التعليم دوال خاصة

الاسم	تكتب على الصيغة	تمثل على الشكل التالي
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [x]$	
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = x $	

x	3 x - 4
0	-4
1	-1
2	2
-1	-1
-2	2



الحال = جميع الأعداد الحقيقية
الذي = جميع الأعداد الصحيحة

الفصل 1، الدوال والتقييمات

مثال: مثل الدالة $f(x) = 3|x| - 4$ بيانياً. أوجد عدداً من الأزواج المرتبة. ثم مثلها بيانياً وصل بينها. يمكن أن تتوقع أن يكون الشكل مشابهاً للدالة الرئيسية $f(x) = |x|$.

تعاريف: مثل الدالة بيانياً. ثم حدّد مجالها ومدنها في كل ما يأتي.

الحال = جميع الأعداد الحقيقية	الذي = جميع الأعداد الصحيحة
$f(x) = [x] + 4$	$f(x) = 2[x]$
$h(x) = 2x + 1 $	$f(x) = 2 x $

الفصل 1، الدوال والتقييمات

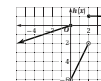
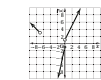
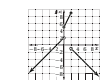
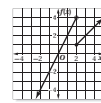
دون

تدريبات إعادة التعليم (16)

1-3 تدريبات إعادة التعليم دوال خاصة

الدالة متعددة التعريف، تكتب هذه الدالة باستعمال عبارتين جبريتين أو أكثر ويكون شكلها متقطعاً في العادة.

مثال: مثل الدالة $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 2 \\ x-1, & x \geq 2 \end{cases}$ بيانياً.



الفصل 1، الدوال والتقييمات

أولاً: مثل الدالة الخطية $f(x) = 2x$ عندما $x < 2$. بما أن العدد 2 لا يقع هذه المتباينة، فإن عند التمثيل نضع دائرة غير مظللة عند النقطة (2, 4). ثم نمثل الدالة الخطية $f(x) = x - 1$ عندما $x \geq 2$. وبما أن العدد 2 يقع هذه المتباينة، فإننا نضع دائرة مغلقة عند النقطة (2, 1).

تعاريف: مثل كل دالة ليها يأتي، ثم حدّد مجالها ومدنها:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ 2x+5, & 0 \leq x \leq 2 \\ -x+1, & x > 2 \end{cases}$$

الحال = جميع الأعداد الحقيقية
الذي = $f(x) < 2$ أو $5 \leq f(x) \leq 9$

$$f(x) = \begin{cases} -x-4, & x < -7 \\ 5x-1, & -7 \leq x \leq 0 \\ 2x+1, & x > 0 \end{cases}$$

الحال = جميع الأعداد الحقيقية
الذي = $f(x) > 1$ أو $-36 \leq f(x) \leq -1$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & x \leq 0 \\ 2x-6, & 0 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

الحال = جميع الأعداد الحقيقية
الذي = $h(x)h(x) = 1$ أو $h(x) \leq 0$

الفصل 1، الدوال والتقييمات

دون ضمن فوق

تدريبات حل المسألة (19)

1-3 تدريبات حل المسألة دوال خاصة

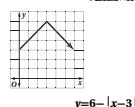
12 ألعاب، يلعب بعض الشباب لعبة إطلاق سهام صغيرة على لوح خشبي مقسّم إلى ستة أجزاء متطابقة. وهم يضعون في كل جزء رقماً يدل على الدرجة المستحقة للأعب إذا استقر السهم في ذلك الجزء. لتكن x تشير إلى الموقع الأفقي للسهم على اللوح الخشبي، على أن يكون مركز اللوح هو نقطة الأصل. والقيم السالبة عن يسار اللوح، والقيم الموجبة عن يمين اللوح. وتعتمد درجة اللاعب على المسافة التي يبعدها السهم عن نقطة الأصل.

1	2	3	3	2	1
---	---	---	---	---	---

10 تقريب، قام معلم العلوم بتوجيه طلابه لتقريب قياساتهم على النحو الآتي: إذا كان الكسر في العدد أقل من 0.5 من الممتز، فإنهم يقومون بتقريبه إلى العدد السابق (الأقل)، أما إذا كان الكسر في العدد أكبر من أو يساوي 0.5، فإنهم يقومون بتقريبه إلى العدد التالي (الأكثر). اكتب صيغة تعطي قيمة تقريبية لـ x بالملئرات.

$$I = [x + 0.5]$$

11 فن العمارة، القطع العرضي لسقف إحدى الأبنية مبين في الشكل الآتي. اكتب دالة قيمة مغلقة تمثل شكل هذا السقف؟



$$y = 6 - |x - 3|$$

الفصل 1، الدوال والتقييمات

19

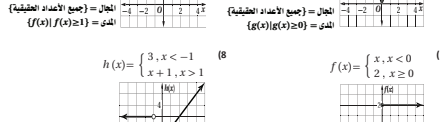
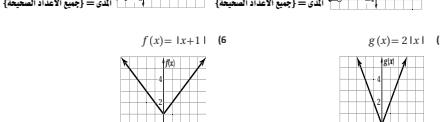
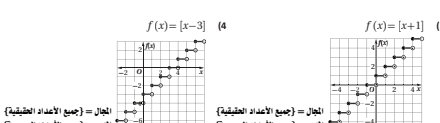
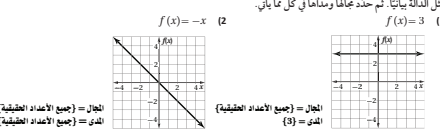
الفصل 1، الدوال والتقييمات

دون ضمن فوق

تدريبات المهارات (18)

1-3 تدريبات المهارات دوال خاصة

مثل الدالة بيانياً، ثم حدّد مجالها ومدنها في كل ما يأتي.



الحال = جميع الأعداد الحقيقية
الذي = $f(x) < 1$ أو $f(x) \geq 1$

الحال = جميع الأعداد الحقيقية
الذي = $f(x) < 0$ أو $f(x) = 2$

الفصل 1، الدوال والتقييمات

18



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 1

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

فوق
ضمن
دون

كتاب التمارين (6)

فوق
ضمن

التدريبات الإرشادية (20)

1-3 دوال خاصة

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً، ثم حدد مجالها ومدنها:

$$h(x) = \begin{cases} 4-x & x > 0 \\ -2x-2 & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

المجال: $\{x | x \neq 0\}$ ،
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

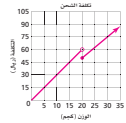
$$f(x) = [x] - 2 \quad (4)$$

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة

$$f(x) = |x+1| \quad (6)$$

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى: $\{y | y \geq 0\}$

(8) أعمال: تتقاضى شركة شحن 3 ريالات عن كل كيلو جرام من البضاعة المعبأة في صناديق تزن أقل من 20 kg، و 2.5 ريال عن كل كيلو جرام من البضاعة المعبأة في صناديق تزن 20 kg أو أكثر، مثل الدالة التي تعصف ذلك الموقف بيانياً.



$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -2 \\ 3x, & x > -2 \end{cases} \quad (1)$$

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

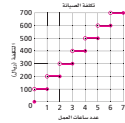
$$f(x) = [0.5x] \quad (5)$$

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة

$$g(x) = -2|x+1| \quad (5)$$

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى: $\{y | y \leq 0\}$

(7) أعمال: تتقاضى مؤسسة متخصصة في صيانة المصاعد 100 ريال عن كل ساعة عمل أو أي جزء منها تتطلبها الصيانة، مثل الدالة الدرجة التي تعصف ذلك الموقف بيانياً.



6

الاسم: _____ التاريخ: _____

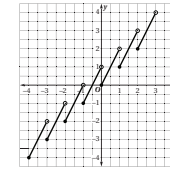
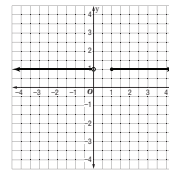
1-3 التدريبات الإرشادية

تمثيل دالة أكبر عدد صحيح بيانياً

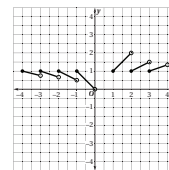
تنتج بعض المعادلات التي تحتوي على دالة أكبر عدد صحيح ثيولات متممة ومفيدة، وسيكون من المفيد تكوين جدول للقيم لكل دالة واستخدام أقلام تلوين للتشيل.

مثل كل دالة من الدوال الآتية بيانياً:
(1) $y = 2x - [x]$

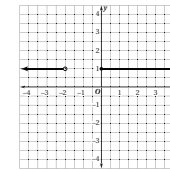
(2) $y = \frac{[x]}{[x]}$



(4) $y = \frac{x}{[x]}$



(3) $y = \frac{[0.5x+1]}{[0.5x+1]}$



الفصل 1، الدوال والتمثيلات

20

الفصل، الختامي الثاني

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الفصل.

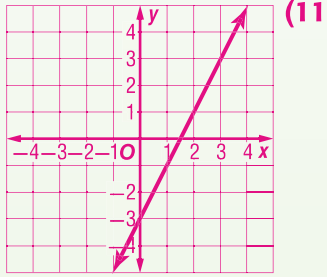
التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (13).

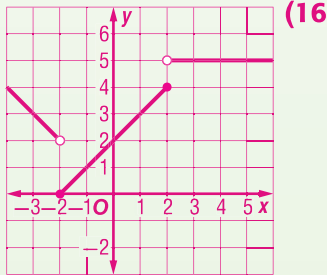
المطويات متابعة المطويات

قبل أن تطلب إلى الطلاب الإجابة عن اختبار منتصف الفصل، شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 1-1 إلى 1-3 من خلال مطوياتهم.

إجابات :



دالة متباينة متصلة.



إذا كان $f(x) = 3x^3 - 2x + 7$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي :

(12) $f(-2) = -13$

(13) $f(2y) = 24y^3 - 4y + 7$

(14) $f(1.4) = 12.432$

(15) اختيار من متعدد: يقدر الدخل بالريال لسيارة لسيارة بأجرة بالدالة $f(x) = 0.35x + 49$ ، حيث x عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة. قدر دخل السيارة إذا قطعت 250 km . C

A 84 ريالاً

B 112.50 ريالاً

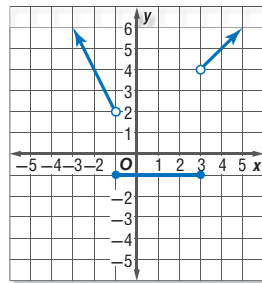
C 136.50 ريالاً

D 215 ريالاً

(16) مثل بيانياً الدالة: انظر الهامش

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x + 2, & -2 \leq x \leq 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

(17) اكتب الدالة المتعددة التعريف الممثلة بيانياً فيما يأتي:



$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ -1, & -1 \leq x \leq 3 \\ x+1, & x > 3 \end{cases}$$

(18) حدّد كلاً من المجال والمدى للدالة: $y = [x] + 2$.

المجال مجموعة الأعداد الحقيقية المدى مجموعة الأعداد الصحيحة

(19) مثل الدالة $f(x) = |2x|$ ، ثم حدّد كلاً من مجالها ومداها.

انظر ملحق الإجابات

الفصل 1 اختبار منتصف الفصل 29

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي:

(1) $\frac{25}{11}$ Q, R

(2) $-\frac{128}{32}$ Z, Q, R

(3) $\sqrt{50}$ I, R

(4) -32.4 Q, R

(5) اذكر الخاصية الموضحة في المعادلة الآتية:
 $4(7) + 15(7) = 7(4 + 15)$ ؟ التوزيع

(6) بسّط العبارة $-3(7a - 4b) + 2(-3a + b) - 27a + 14b$

(7) ملابس: يريد سعد شراء 3 قمصان و3 بناطيل. فإذا كان سعر القميص الواحد 35 ريالاً. وسعر البنطال الواحد 55 ريالاً. فأوجد المبلغ الذي يدفعه سعد بطريقتين مستعملاً خاصية التوزيع.
 $3(35 + 55)$, $3(35) + 3(55)$

(8) اختيار من متعدد: أي العبارات التالية تكافئ

A $\frac{2}{3}(4m - 5n) + \frac{1}{5}(2m + n)$ ؟

A $\frac{46}{15}m - \frac{47}{15}n$

B $46m - 47n$

C $-\frac{mn}{15}$

D $\frac{5}{4}m - \frac{9}{8}n$

(9) أوجد كلاً من النظير الجمعي والنظير الضربي للعدد $\frac{7}{6}$.

الجمعي: $-\frac{7}{6}$ ؛ الضربي: $\frac{6}{7}$

(10) حدد كلاً من مجال العلاقة الآتية ومداها، ثم بين هل تمثل دالة

أم لا: $\{(3, 2), (4, 1), (0, 3), (5, -2), (3, 7)\}$

المجال = $\{3, 4, 0, 5\}$ ؛ المدى = $\{2, 1, 3, -2, 7\}$ ؛ لا تمثل دالة

(11) مثل المعادلة $y = 2x - 3$ بيانياً، ثم بين إذا كانت تمثل دالة أم لا.

وهل هي متباينة أم لا؟ وهل هي منفصلة أم متصلة؟ انظر الهامش

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريباً من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتين:
	مراجعة الدروس 1-1 إلى 1-3 .		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16).
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18).		www.obeikaneducation.com

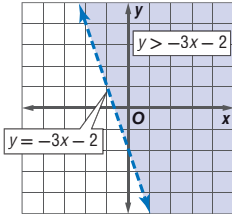
تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً
Graphing Linear and Absolute Value Inequalities



لماذا؟

دعا تركي زملاءه إلى وجبة من الفطائر والعصير، ورصد لتلك الدعوة مبلغ 150 ريالاً فقط. ويمكنه أن يستعمل المتباينة الخطية: $6p + 5d \leq 150$ حيث p عدد الفطائر و d عدد أكواب العصير الطبيعي؛ للتأكد من أن سعر عدد معين من الفطائر وأكواب العصير سيكون ضمن ميزانيته.

تمثيل المتباينات الخطية بيانياً: تشبه المتباينة الخطية المعادلة الخطية، فالفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلاً من رمز المساواة. فمثلاً، $y > -3x - 2$ هي متباينة خطية، و $y = -3x - 2$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.



التمثيل البياني للمتباينة $y > -3x - 2$ مبين في الشكل المجاور على شكل منطقة مظلمة، فكل نقطة في المنطقة المظلمة تحقق المتباينة، والتمثيل البياني للمستقيم $y = -3x - 2$ هو **الحد** المنطقة الممثلة للحل وقد رسم المستقيم بشكل متقطع ليدل على أنه لا يحقق المتباينة. أما إذا احتوت المتباينة على الرمز \leq أو \geq فإن النقاط الواقعة على الحد ستحقق المتباينة وعندئذ يكون تمثيل المستقيم خطاً متصلًا.

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية.

والآن

- أمثل المتباينات الخطية بيانياً.
- أمثل متباينات القيمة المطلقة بيانياً.

المفردات

المتباينة الخطية
linear inequality

الحد

boundary

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترباط الرأسي

ما قبل الدرس 1-4
تمثيل الدوال الخطية.

الدرس 1-4

تمثيل المتباينات الخطية بيانياً.
تمثيل متباينات القيمة المطلقة بيانياً.

ما بعد الدرس 1-4

حل أنظمة متباينات خطية.

2 التدريس

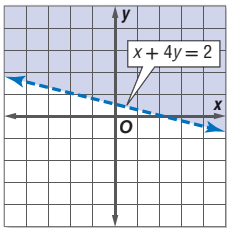
أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
واسأل:

- اشرح ما تعنيه المتباينة: $6p + 5d \leq 150$
عدد الفطائر مضروباً في 6 ريالات لكل واحدة، مضافاً إليه عدد أكواب العصير الطبيعي مضروباً في 5 ريالات لكل كوب أقل من أو يساوي 150.
- هل لدى تركي المبلغ الكافي لشراء 10 فطائر و 20 كوب عصير؟ لا
- إذا اشترى تركي 15 فطيرة، فما أكبر عدد من أكواب العصير يمكنه أن يشتري من دون أن ينفق أكثر من 150 ريالاً؟ 12 كوباً.

مثال 1 الحد المتقطع

مثل المتباينة $x + 4y > 2$ بيانياً.



الخطوة 1 مثل الحد وهو المستقيم $x + 4y = 2$. وبما أن رمز المتباينة هو $>$ فإن الحد سيكون متقطعاً.

الخطوة 2 اختبر النقطة (0, 0) والتي لا تقع على حد المتباينة.

المتباينة الأصلية	$x + 4y > 2$
$(x, y) = (0, 0)$	$0 + 4(0) \stackrel{?}{>} 2$
	$0 > 2$

ظلل المنطقة التي لا تحوي (0, 0).

تحقق بين التمثيل البياني أن النقطة (0, 3) تقع في منطقة الحل.

المتباينة الأصلية	$x + 4y > 2$
$(x, y) = (0, 3)$	$0 + 4(3) \stackrel{?}{>} 2$
	$12 > 2$

إذن، الحل صحيح.

تحقق من فهمك

(1A, 1B) انظر ملحق الإجابات.

(1A) مثل المتباينة $3x + \frac{1}{2}y < 2$ بيانياً. (1B) مثل المتباينة $-x + 2y > 4$ بيانياً.

مصادر الدرس 1-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (34)	• تنوع التعليم، ص (34)	• تنوع التعليم، ص (34)
كتاب التمارين	• ص (7)	• ص (7)	• ص (7)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

مثال 2 من واقع الحياة الحد المتصل

رسم: يقدم مركز تدريب نوعين من دروس تعلم اللغة الإنجليزية: الأول دروس مدتها 30 دقيقة للدرس الواحد، والثاني دروس مدتها 60 دقيقة للدرس الواحد. وقرر مدير المركز ألا يزيد زمن دروس تعلم اللغة الإنجليزية على 20 ساعة أسبوعياً.

(a) اكتب متباينة تمثل عدد دروس تعلم اللغة الإنجليزية التي يمكن تقديمها أسبوعياً، ثم مثلها بيانياً.

لتكن x عدد الدروس التي مدتها 30 دقيقة، و y عدد الدروس التي مدتها 60 دقيقة. وبما أن مجموع زمن الدروس لا يزيد على 20 ساعة أسبوعياً، فهذا يعني إمكانية أن يساوي 20 ساعة. ولهذا فإن المتباينة تحتوي على الرمز \leq ، ولذا يكون المستقيم الذي يمثل الحد متصلًا. إذن المتباينة هي $\frac{1}{2}x + y \leq 20$.

الخطوة 1 مثل الحد وهو المستقيم $\frac{1}{2}x + y = 20$ بيانياً.

الخطوة 2 اختبر النقطة $(0, 0)$ والتي لا تقع على الحد.

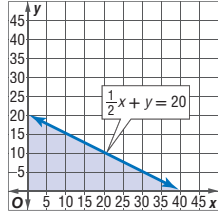
$$\text{المتباينة الأصلية} \quad \frac{1}{2}x + y \leq 20$$

$$(x, y) = (0, 0) \quad \frac{1}{2}(0) + (0) \leq 20$$

$$0 \leq 20$$

$$\checkmark$$

ظلل المنطقة في الربع الأول فقط التي تحوي $(0, 0)$ ؛ وذلك لأن كلا المتغيرين لا يمكن أن يكون سالبًا.



(b) هل يمكن أن يقدم المركز 25 درسًا من الدروس التي مدتها 30 دقيقة، و 15 درسًا من الدروس التي مدتها 60 دقيقة خلال أسبوع ما؟ فسر إجابتك.

النقطة $(25, 15)$ تقع خارج المنطقة المظللة؛ لذا فهي لا تحقق المتباينة، وعليه، فلا يمكن أن يقدم المركز ذلك العدد من الدروس خلال أسبوع ما.

تحقق من فهمك

(2) انظر ملحق الإجابات.

(2) مع صالح 60 ريالاً يستطيع إنفاقها في مدينة الألعاب. فإذا كان ثمن تذكرة الألعاب الإلكترونية 5 ريالات، وثمان تذكرة كل لعبة عادية 6 ريالات. فاكتب متباينة تصف هذا الموقف، ثم مثلها بيانياً.

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانياً: تمثيل متباينة القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية، أولاً مثل بيانياً معادلة القيمة المطلقة المرتبطة، وبعد ذلك حدد إذا كان حد المتباينة متقطعاً أو متصلًا، ثم حدد المنطقة التي يجب تظليلها باختبار نقطة ما.

مثال 3

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانياً

مثل المتباينة $y \geq |x| - 4$ بيانياً.

بما أن المتباينة تحتوي على إشارة \geq ، فإن الحد يكون متصلًا. مثل المعادلة المرتبطة $y = |x| - 4$ ، ثم اختبر النقطة $(0, 0)$.

$$\text{المتباينة الأصلية} \quad y \geq |x| - 4$$

$$(x, y) = (0, 0) \quad 0 \geq |0| - 4$$

$$0 \geq -4$$

$$\checkmark$$

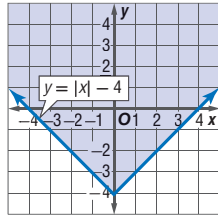
ظلل المنطقة التي تحوي على النقطة $(0, 0)$.

تحقق من فهمك

(3A, 3B) انظر ملحق الإجابات.

(3B) مثل المتباينة $y \geq 3|x + 1|$ بيانياً.

(3A) مثل المتباينة $y \leq 2|x| + 3$ بيانياً.



الدرس 1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً 31



الربط مع الحياة

تزود معامل اللغات المتخصصة بأحدث الأجهزة التقنية والتجهيزات الإلكترونية والصوتية المتطورة التي تنمي مهارتي المحادثة والاستماع لدى الدارسين، وتؤهلهم لاكتساب اللفظ الصحيح.

تمثيل المتباينات الخطية بيانياً

مثال 1 يبين كيفية تمثيل المتباينات الخطية بيانياً.

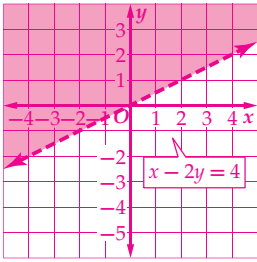
مثال 2 يبين كيفية استعمال المتباينة الخطية وتمثيلها البياني في تمثيل وتحليل مواقف من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 مثل المتباينة $x - 2y < 4$ بيانياً.



تعليم: قررت إدارة مدرسة إقامة دورة مكثفة في الرياضيات للطلاب الذين يقل مجموع درجاتهم في كل من أعمال السنة واختبار منتصف الفصل عن 30 درجة.

(a) اكتب متباينة تصف مجموع درجات الطالب الذي يتوقع إلحاقه بهذه الدورة المكثفة. بفرض أن x تمثل درجة أعمال السنة، و y تمثل درجة اختبار منتصف الفصل.

$$x + y \leq 30$$

(b) هل الطلاب الذين حصلوا على 10 درجات في أعمال السنة و 18 درجة في اختبار منتصف الفصل يقعون ضمن شروط الالتحاق بهذه الدورة؟ نعم

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي قم بإعداد عرض فيديو يبين كيفية تمثيل متباينات القيمة المطلقة، ثم قم بتحميله إلى جميع الطلاب ليشاركوا ويجدوا مصدرًا إضافيًا يستعملوه خارج الصف.

- مثال 1 مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً: (1, 2) انظر الهامش.
 (1) $y \leq 4$
 (2) $x \geq -6$
 (3) $x + 4y \leq 2$
 (4) $3x + y > -8$

- مثال 2 مع عامر 76 ريالاً، ويريد تزويد سيارته بالوقود، وشراء علب زيت للمحرك بالمبلغ المتبقي. فإذا كان سعر لتر الوقود 0.45 ريال، وسعر عبوة زيت المحرك 13 ريالاً.

- (5c) نعم؛ لأن النقطة (4, 20) تقع في المنطقة المظللة.
 (a) اكتب متباينة تمثل هذا الموقف، حيث q عدد لترات الوقود، g عدد عبوات زيت المحرك التي يمكنه شراؤها. $13g + 0.45q \leq 76$
 (b) مثل المتباينة بيانياً. انظر ملحق الإجابات.
 (c) هل يستطيع عامر تزويد سيارته بـ 20 لتراً من الوقود وشراء 4 عبوات زيت محرك؟ فسر إجابتك.

- مثال 3 مثل المتباينتين الآتيتين بيانياً. (6, 7) انظر ملحق الإجابات.
 (6) $y \geq |x + 3|$
 (7) $y - 6 < |x|$

تدرب وحل المسائل

- مثال 1 مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً: (8-13) انظر ملحق الإجابات.
 (8) $x + 2y > 6$
 (9) $y \geq -3x - 2$
 (10) $2y + 3 \leq 11$
 (11) $4x - 3y > 12$
 (12) $6x + 4y \leq -24$
 (13) $y \geq \frac{3}{4}x + 6$

- مثال 2 (14 درجات): تحتسب درجات الطلاب في مادة الرياضيات على أساس 60 درجة للاختبار النهائي، 40 درجة للاختبارات الشهرية. ويتعين على هند الحصول على الدرجة 90 على الأقل لتنال تقدير ممتاز في المادة.

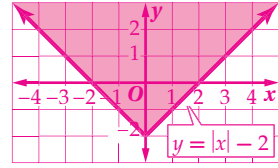
- (a) المتباينة $x + y \geq 90$ تمثل هذا الموقف، حيث x هي درجة هند في الاختبار النهائي، و y هي درجتها في الاختبارات الشهرية. مثل هذه المتباينة بيانياً. انظر ملحق الإجابات.
 (b) اعتماداً على التمثيل البياني، إذا كانت درجتها في الاختبار النهائي 50، وفي الاختبارات الشهرية 35، فهل ستحصل على التقدير ممتاز أم لا؟ لا

تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانياً

مثال 3 يبين التمثيل البياني لمتباينة القيمة المطلقة.

مثال إضافي

3 مثل المتباينة $y \geq |x| - 2$ بيانياً.



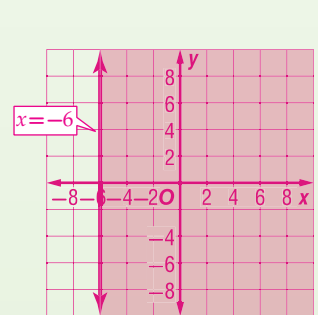
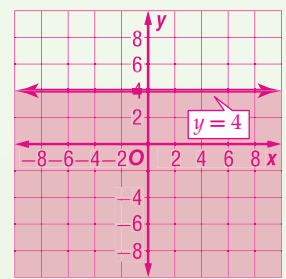
3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 7-1؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:



تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	35-42، 30، 8-21
ضمن المتوسط	33-42، 9-29 فردي،
فوق المتوسط	22-42

مثال 3

(21a) $20a + 15b \geq 1000$ حيث a عدد الساعات التي يعملها كباغ، b عدد الساعات التي يعملها كسائق

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً: 20-15. انظر ملحق الإجابات.

$$y > |3x| \quad (15) \quad y + 4 \leq |x - 2| \quad (16) \quad y - 6 < |-2x| \quad (17)$$

$$-y \leq |3x - 4| \quad (20) \quad 2y > |4x - 5| \quad (19) \quad y + 8 < 2\left|\frac{2}{3}x + 6\right| \quad (18)$$

(21) يؤدي سعيد عاملين ليحقق دخلاً أسبوعياً لا يقل عن 1000 ريال. فإذا كان الأجر الذي يتقاضاه عن كل ساعة موضحاً في الجدول المجاور،

العمل	الأجر في الساعة
بائع في محل تجاري	20 ريالاً
سائق أجرة	15 ريالاً

(a) اكتب متباينة تمثل هذا الموقف.

(b) مثل المتباينة بيانياً. انظر ملحق الإجابات.

(c) هل سيحصل سعيد على المبلغ المطلوب إذا عمل 30 ساعة أسبوعياً في كل عمل؟ نعم

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً: 24-22. انظر ملحق الإجابات.

$$y \geq |-2x - 6| \quad (22) \quad y \leq |x - 3| + 4 \quad (23) \quad y - 3 > -2|x + 4| \quad (24)$$

(25) **زينية:** تصنع ميساء عقوداً وأساور من الخرز، لتشارك بها في المعرض الفني للمدرسة، ولديها من الخرز ما يكفي لصنع 50 قطعة. لتكن x عدد الأساور، y عدد العقود.

(a) اكتب متباينة تبين عدد العقود والأساور التي يمكن أن تصنعها ميساء. $x + y \leq 50$

(b) مثل المتباينة بيانياً. انظر ملحق الإجابات.

(c) أعط ثلاثة حلول لعدد العقود والأساور التي يمكن لميساء صنعها.

(26) مع سعاد 200 ريال. وتريد أن تشتري عددًا من الأطباق d . وعددًا من الأكواب c لتجهز لمناسبة اجتماعية فإذا كان سعر الطبق 15 ريالاً وسعر الكأس 5 ريالات،

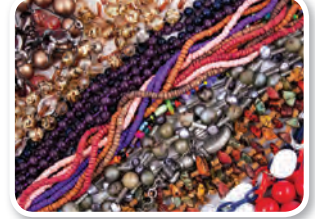
(a) اكتب متباينة تمثل العدد الممكن شراؤه من الأطباق والكؤوس. $15d + 5c \leq 200$

(b) مثل المتباينة بيانياً. انظر ملحق الإجابات.

(c) أعط ثلاثة حلول للمتباينة. إجابة ممكنة: 10 أطباق و 8 كؤوس أو 8 أطباق و 8 كؤوس أو 7 أطباق و 7 كؤوس

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً. 29-27. انظر ملحق الإجابات.

$$y \geq [x] \quad (27) \quad y < [x + 2] \quad (28) \quad y \geq |[x]| \quad (29)$$



الربط مع الحياة

يصنع الخرز من طين لين، حيث يجفف في فرن حرارته عالية، ويمكن تشكيله إلى أشكال عديدة.

(25c) إجابة ممكنة:

0 إسورة و 50 عقدًا.

25 سوارًا و 25 عقدًا،

أو 30 سوارًا و 20 عقدًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

(30) **مسألة مفتوحة:** استعمل القيمة المطلقة لتكوين متباينة على أن لا يقع حلها في الربعين الثاني أو الثالث. إجابة ممكنة: $|y| < x$

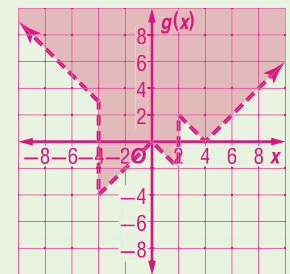
(31) **تحذ:** مثل المتباينة الآتية بيانياً: انظر الهامش.

$$g(x) > \begin{cases} |x + 1|, & x \leq -4 \\ -|x|, & -4 < x < 2 \\ |x - 4|, & x \geq 2 \end{cases}$$

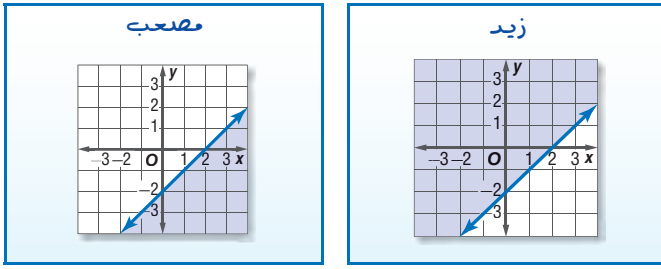
الدرس 1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً 33

إجابة:

(31)



(32) **اكتشف الخطأ:** مثل كل من زيد ومصعب المتباينة $x - y \geq 2$ بيانياً. فأيهما تمثيله صحيح؟ فسّر إجابتك.



(32) **مصعب،** $x - y \geq 2$ يمكن كتابتها على الصورة $y \leq x - 2$.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب كتابة الإجابة على السؤال: متى يكون حد المتباينة خطاً متقطعاً، ومتى يكون خطاً متصلًا.

(33) **تبرير:** متى يكون من الممكن تظليل منطقتين مختلفتين عند تمثيل متباينة القيمة المطلقة؟ فسّر إجابتك. **إجابة ممكنة:** عندما تكون x و y كلتاها داخل القيمة المطلقة، ومثال على ذلك $|x| \leq |y|$. وعند حدوث هذا يجب أن يقع حل هذه المتباينة في منطقتين مختلفتين.

(34) **اكتب:** اذكر حالة لمتباينة قيمة مطلقة ليس لها حل. فسّر إجابتك. **إجابة ممكنة:** $|y| < 0$. وحتى يكون لهذه المتباينة حل فإن القيمة المطلقة لـ y يجب أن تكون أقل من 0، وهذا مستحيل.

تدريب على اختبار

(36) أي الدوال الآتية مداها هو $\{f(x) | f(x) \leq 0\}$ ؟ **D**

$f(x) = |x|$ **C** $f(x) = -x$ **A**

$f(x) = -|x|$ **D** $f(x) = [x]$ **B**

(35) أي مجموعة مما يأتي غير منتهية؟ **C**

$\{2, 4, 6\}$ **A**

مجموعة الأعداد الصحيحة بين -50 و 50 **B**

مجموعة الأعداد الصحيحة **C**

$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$ **D**

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين 1-4، 1-3، بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (11)

مراجعة تراكمية

مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً: (الدرس 1-3) (37-39) انظر ملحق الإجابات.

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -2 \\ x + 1, & 0 < x \leq 6 \\ x - 5, & x > 6 \end{cases} \quad (39) \quad f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -2 \\ 2x, & -2 \leq x \leq 2 \\ -3x, & x > 2 \end{cases} \quad (38) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \\ -2x, & x > 3 \end{cases} \quad (37)$$

إذا كان: $h(x) = 4x^2 - 10x$
 $g(x) = -3x^2 + 2$
 $f(x) = -7x + 8$

فأوجد كل قيمة مما يأتي: (الدرس 1-2)

(40) $f(-9) = 71$

(41) $g(-4) = -46$

(42) $h(12) = 456$

34 الفصل 1 الدوال والمتباينات

تنوع التعليم

دون ضمن فوق

إذا اختلط الأمر بين المعادلات والمتباينات على بعض الطلاب،

فقم بحثهم على مناقشة أوجه الشبه والاختلاف بين حل المتباينات وحل المعادلات وتشابه عمليتي إيجاد الحل.

تنبيه

تجنب الأخطاء اطلب إلى الطلاب أن يشرحوا كيف يمكنهم من خلال النظر إلى المتباينة التي فيها $!$ موجودة على طرف وحدها، أن يحدّدوا ما إذا كان الحد خطاً متقطعاً أم متصلاً. **يكون الخط متقطعاً، إذا كان الرمز في المتباينة $<$ أو $>$ ، ومتصلاً إذا كان الرمز \leq أو \geq**



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

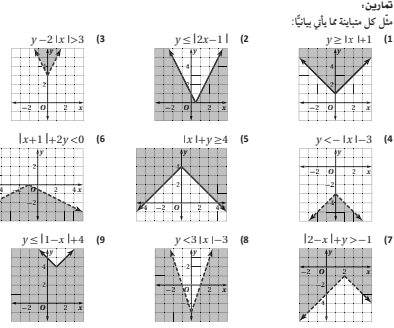
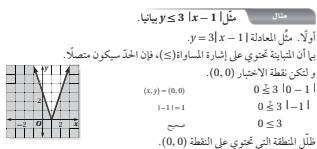
مصادر الدرس 4 - 1

دون المتوسط **دون** ضمن ضمن المتوسط **فوق** فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم - تزمة (22) **دون**

1-4 تدريبات إعادة التعليم

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً
تمثيل متباينات القيمة المطلقة بيانياً، تمثيل متباينات القيمة المطلقة مشابه لتمثيل المتباينات الخطية. فالتشكيل البياني لمعادلة القيمة المطلقة المرتبطة هو الحد (الفواصل) يكون الحد مرسومًا على نحو متصل، إذا كانت المتباينة تحتوي على إشارة \leq أو \geq ويرسم الحد منقطعًا إذا كانت تحتوي على $<$ أو $>$. اختر نقطة لا تقع على الحد لتحديد المنطقة التي تعين ظلها.



الفصل 1: الدوال والمتباينات 22 الصف: الثاني الثانوي

تدريبات إعادة التعليم (21) **دون**

1-4 تدريبات إعادة التعليم

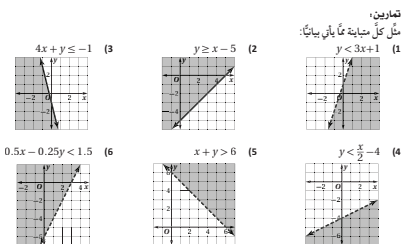
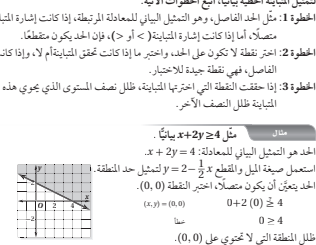
تمثيل المتباينة الخطية، المتباينة الخطية مثل $y \geq 2x - 1$ يمكنك تشبيهها بمعادلة خطية، ولكن تستعمل إشارة المتباينة بدلاً من إشارة المساواة، وتحتوي المعادلة الخطية المرتبطة بالمتباينة بقسم المستوى الإحداثي إلى نصفي مستوى، ويكون المستقيم حدًا لكلا النصفين.

تمثيل المتباينة الخطية بيانياً: اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: مثل الحد الفاصل، وهو التشكيل البياني للمعادلة المرتبطة، إذا كانت إشارة المتباينة (\leq أو \geq)، فإن الحد يكون متصلاً، أما إذا كانت إشارة المتباينة ($<$ أو $>$)، فإن الحد يكون منقطعاً.

الخطوة 2: اختر نقطة لا تكون على الحد، واختبر ما إذا كانت تحقق المتباينة أم لا، وإذا كانت النقطة $(0, 0)$ لا تقع على الحد الفاصل، فهي نقطة جيدة للاختبار.

الخطوة 3: إذا حققت النقطة التي اخترتها المتباينة، ظل نصف المستوى الذي يجري هذه النقطة، وإذا لم تحقق النقطة المتباينة ظلل النصف الآخر.



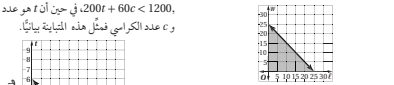
الفصل 1: الدوال والمتباينات 21 الصف: الثاني الثانوي

تدريبات حل المسألة (24) **دون** ضمن ضمن **فوق**

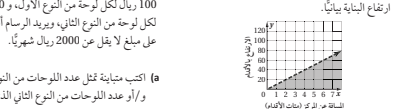
1-4 تدريبات حل المسألة

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً

(13) بطارات: إذا كانت أبعاد الإطار المستطيل الشكل الذي يمكنك عمله من قطعة خشب طوله 50 بوصة محددة بالمتباينة $l + w \leq 25$ ، فمثل هذه المتباينة بيانياً.



(14) تعليمات البناء: تمجد البلدية في إحدى المدن ارتفاع الأبنية حول أحد الشوارع الموجودة في وسط المدينة، على أن يكون ارتفاع الأبنية أقل من $0.1x$ في حين أن x هي المسافة بين الأبنية ومركز الشارع. افترض أن مركز الشارع يقع عند النقطة $(0, 0)$ ومثل المتباينة التي تمثل ارتفاع الأبنية بيانياً.



(15) مزروع: خلال فصل الشتاء، يحتاج الحصان إلى 36 لترًا من الماء يوميًا، في حين يحتاج الحرفوف إلى 3.6 لترًا يوميًا. إذا كان أحد المزارعين يستطيع أن يزرع أحسنه وخرافًا بمقدار 300 لتر من الماء يوميًا، فاقب متباينة تبين عدد الأحسن وعدد الحرفوف التي يمكن أن يشتريها هذا المزارع.

$36h + 3.6s \leq 300$



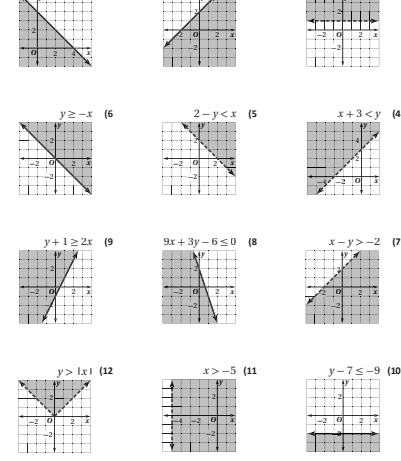
الفصل 1: الدوال والمتباينات 24 الصف: الثاني الثانوي

تدريبات المهارات (23) **دون** ضمن ضمن **فوق**

1-4 تدريبات المهارات

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً

مثل كل متباينة بما يأتي بيانياً:



الفصل 1: الدوال والمتباينات 23 الصف: الثاني الثانوي



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 1

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

فوق
ضمن
دون

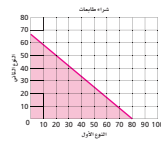
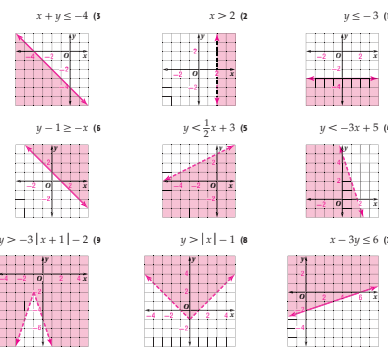
كتاب التمارين (7)

فوق
ضمن

التدريبات الإثرائية (25)

1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً:



- (10) طابعات: أرادت مؤسسة شراء نوعين من الطابعات. فإذا كان سعر الطابعة من النوع الأول 1000 ريال، وسعر النوع الثاني 1200 ريال، وكان المبلغ المخصص لشراء تلك الطابعات لا يزيد على 80000 ريال، فأجب عن الأسئلة a-c:
- (a) اكتب متباينة تمثل ذلك الموقف. $1000d + 1200e \leq 80000$
- (b) مثل المتباينة بيانياً.
- (c) إذا أرادت المؤسسة شراء 50 طابعة من النوع الأول، و25 طابعة من النوع الثاني، فهل يكفي المبلغ المخصص لشراءها؟ نعم

7

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-4 التدريبات الإثرائية

النهايات

النهاية مفهوم رئيس في كثير من فروع الرياضيات، وخاصة في حساب التفاضل والتكامل. إذا أخذنا المقدار $3x+2$ ، عندما تقرب x من العدد 1، فإن قيمة هذا المقدار تقرب من العدد 5، وبين الجدول أدناه طريقة اختيار قيم x القريبة من 1 للحصول على قيم للمقدار قريبة من 5، وهي إحدى طرق إيجاد نهاية المقدار.

x	$3x+2$
0.900	4.700
0.950	4.850
0.990	4.970
0.999	4.997
0.9999	4.9997

أوجد نهاية كل عبارة مما يأتي عند ما تقرب x من القيمة المعطاة:

- (1) $2x+2$ عندما تقرب x من 5
- (2) $x-5$ عندما تقرب x من 11
- (3) $\frac{3x+5}{x-6}$ عندما تقرب x من 1
- (4) $\frac{5x+2}{x-1}$ عندما تقرب x من -1
- (5) $\frac{3x+5}{x-6}$ عندما تقرب x من 100
- (6) $\frac{3x+5}{x-6}$ عندما تقرب x من 1000
- (7) $\frac{5x+2}{x-1}$ عندما تقرب x من 100
- (8) $\frac{5x+2}{x-1}$ عندما تقرب x من 1000

(9) ماذا تلاحظ في النهايات التي حصلت عليها في التمارين 8-5؟

في السؤالين 5 و 6 تقرب قيمة العبارة من العدد 3 كلما زادت قيمة x . وفي السؤالين 7 و 8 تقرب قيمة العبارة من العدد 5 كلما زادت قيمة x .

الفصل 1، الدوال والمتباينات

25

الصف: الثاني الثانوي

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-5

حل نظام معادلتين خطيتين بيانياً.

الدرس 1-5

حل نظام متباينات خطية بيانياً.

تحديد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

ما بعد الدرس 1-5

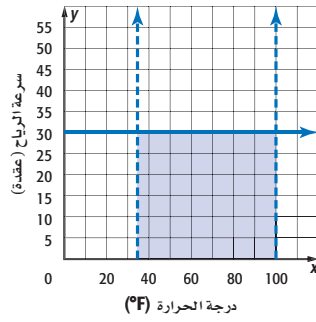
حل مسائل حياتية تتعلق بإيجاد الحل الأمثل باستعمال نظام متباينات خطية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
واسأل:

- ماذا يعني الرمز "°F"؟ يعني أن درجات الحرارة مقيسة بحسب المقياس الفهرنهايتي.
- لماذا لم يمثل المستقيم الأفقي بخط منقطع؟ لأن سرعة الرياح قد تصل إلى 30 عقدة.
- هل الشرط: "درجة الحرارة 65°F وسرعة الرياح 34 عقدة" يقع في المنطقة المظللة؟ وضح إجابتك. لا؛ لأن سرعة الرياح أكبر من 30 عقدة.



لماذا؟
تؤخذ الحالة الجوية بالاعتبار عند إطلاق المركبات الفضائية، فيجب أن تكون درجة الحرارة بين 35°F و 100°F، وأن لا تزيد سرعة الرياح على 30 عقدة. ويمكن تمثيل هذه الشروط بنظام من المتباينات الخطية كما في الشكل المجاور.

نظام المتباينات الخطية: حل نظام المتباينات الخطية يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام.

أضف إلى
طوبيك

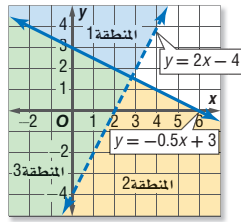
حل أنظمة المتباينات الخطية

مفهوم أساسي

الخطوة 1 مثل كل متباينة في النظام بيانياً.

الخطوة 2 حدّد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام.

1 مثال مناطق الحل المتقاطعة



حل كل نظام مما يأتي بيانياً:
 $y > 2x - 4$
 $y \leq -0.5x + 3$

حل المتباينة $y > 2x - 4$: المنطقتان: 1, 3

حل المتباينة $y \leq -0.5x + 3$: المنطقتان: 2, 3

المنطقة 3 هي منطقة مشتركة بين منطقتي حل المتباينتين، وعليه فتكون هي منطقة حل النظام.

تحقق:

لاحظ أن نقطة الأصل تنتمي إلى منطقة حل النظام، ويمكن استعمال نقطة الأصل نقطة اختبار. والتحقق من صحة الحل بتعويض (0, 0) بدلاً من x, y في كلتا المتباينتين.

$y \leq -0.5x + 3$	$y > 2x - 4$
$0 \leq -0.5(0) + 3$	$0 > 2(0) - 4$
$0 \leq 0 + 3$	$0 > 0 - 4$
✓ $0 \leq 3$	✓ $0 > -4$

تحقق من فهمك (1A, 1B) انظر ملحق الإجابات

$y \geq x $ (1B)	$y \leq -2x + 5$ (1A)
$y < \frac{4}{3}x + 5$	$y > -\frac{1}{4}x - 6$

الدرس 1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً 35

فيما سبق:

درست حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً.

والآن:

- أحل نظام متباينات خطية بيانياً.
- أحدد إحداثيات النقاط التي تمثل رؤوس منطقة الحل.

المفردات:

منطقة الحل

feasible region

نظام المتباينات الخطية

system of linear inequalities

www.obeikaneducation.com

مصادر الدرس 1-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (37)	• تنويع التعليم، ص (37, 39, 40)	
كتاب التمارين	• ص (8)	• ص (8)	
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

يمكن أن لا تتقاطع منطقتا حل متباينتين، وعليه فلا يوجد حل للنظام في هذه الحالة، وتكون مجموعة الحل هي المجموعة الخالية.

قراءة الرياضيات

المجموعة الخالية

هي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر، ويرمز إليها بأحد الرمزين \emptyset أو $\{ \}$.

نظام المتباينات الخطية

المثالان 1, 2 يبينان كيفية حل نظام متباينات خطية.

المثال 3 يبين كيفية استعمال أنظمة

المتباينات الخطية في حل مسائل من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال 2

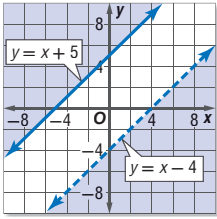
مناطق الحل غير المتقاطعة

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

$$y \geq x + 5$$

$$y < x - 4$$

بتمثيل المتباينتين بيانياً، نجد أن منطقتي الحل لا تتقاطعان، وبالتالي لا توجد نقاط مشتركة بينهما، ولذا فليس للنظام حل. ومجموعة الحل هي \emptyset .



تحقق من فهمك

(2A, 2B) انظر ملحق الإجابات

$$y \geq |x| \quad (2B)$$

$$y < x - 6$$

$$y \geq -4x + 8 \quad (2A)$$

$$y < -4x + 4$$

مثال 3 من واقع الحياة

إدارة الوقت: لدى فاطمة 25 ساعة على الأكثر للاستعداد لأداء 3 اختبارات في الرياضيات والفيزياء والتاريخ، فوضعت جدولاً زمنياً استعداداً لذلك، فخصصت ساعتين لدراسة التاريخ، وخصصت من 7 إلى 14 ساعة لدراسة الرياضيات، أما الفيزياء فخصصت لدراستها من 8 إلى 12 ساعة. اكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف ومثله بيانياً.

الرياضيات: بافتراض أن عدد ساعات دراسة الرياضيات x ، وأن هذا العدد لا يقل عن 7 ساعات ولا يزيد على 14 ساعة فإن:

$$7 \leq x \leq 14$$

الفيزياء: بافتراض أن عدد ساعات دراسة الفيزياء y ، وأن هذا العدد لا يقل عن 8 ساعات ولا يزيد على 12 ساعة فإن:

$$8 \leq y \leq 12$$

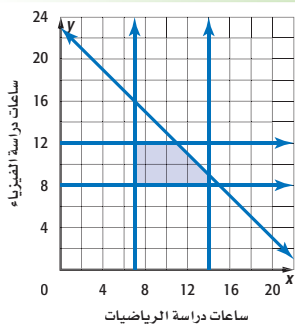
وبما أن إجمالي وقت الدراسة هو 25 ساعة، ساعتان منها لدراسة مادة التاريخ، ويتبقى ساعة على الأكثر لدراسة الرياضيات والفيزياء فإن:

$$x + y \leq 23$$

مثل المتباينات بيانياً. أي زوج مرتب في منطقة حل النظام يمثل حلاً للنظام؟ أحد الحلول الممكنة هو 10 ساعات لدراسة الفيزياء، و 12 ساعة لدراسة الرياضيات.

تحقق من فهمك

(3) سفر: خرج مشاري وبدر في رحلة لزيارة بعض محافظات المملكة براً فتنابوا قيادة السيارة. فإذا كانت فترات قيادة مشاري للسيارة على نحو متواصل في اليوم لا تقل عن 4 ساعات، ولا تزيد على 8 ساعات، وكانت فترات قيادة بدر للسيارة على نحو متواصل في اليوم لا تقل عن ساعتين ولا تزيد على 5 ساعات، وكان إجمالي زمن قيادة كليهما يومياً لا يزيد على 10 ساعات، فاكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف، ثم مثله بيانياً. انظر الهامش.

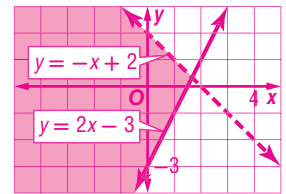


مثالان إضافيان

1 حل النظام الآتي بيانياً:

$$y \geq 2x - 3$$

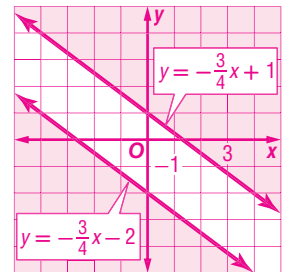
$$y < -x + 2$$



2 حل نظام النظام بيانياً:

$$y \geq -\frac{3}{4}x + 1$$

$$y \leq -\frac{3}{4}x - 2$$



مجموعة الحل \emptyset

إجابة (تحقق من فهمك):

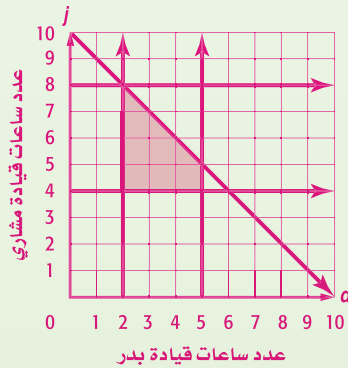
(3) افترض أن z عدد ساعات قيادة مشاري للسيارة،

وأن d عدد ساعات قيادة بدر للسيارة.

$$j + d \leq 10$$

$$4 \leq j \leq 8$$

$$2 \leq d \leq 5$$



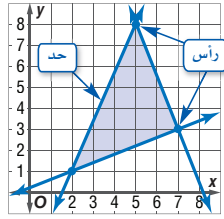
إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي تأكد من أن الطلاب قد أدركوا أن أي نقطة في منطقة حل نظام المتباينات، يجب أن يحقق إحداثياتها جميع متباينات النظام، ثم اطلب إليهم أن يختاروا نقاطاً من مناطق مختلفة لاختبارها ثم تحليل النتائج.

حد المتباينة

إذا احتوت المتباينة على رمز < أو >، فإن الحد لا يدخل ضمن منطقة الحل، ويمثل بخط متقطع.

إيجاد رؤوس منطقة الحل: ينتج أحياناً عن التمثيل البياني لنظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع، ويمكن إيجاد إحداثيات رؤوس تلك المنطقة بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحددة للمنطقة (الحدود).

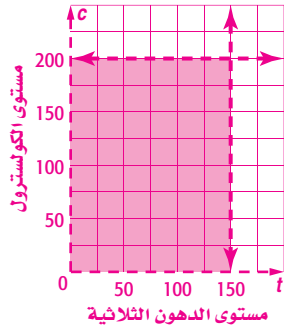


مثال إضافي

3

صحة: أوصى طبيب أحد المرضى بالمحافظة على مستوى الكوليسترول دون 200mg/dl، والدهون الثلاثية دون 150mg/dl، اكتب نظام متباينات ومثله بيانياً، مفترضاً أن مستوى الكوليسترول هو c ، ومستوى الدهون الثلاثية هو t .

$$0 < c < 200, 0 < t < 150$$



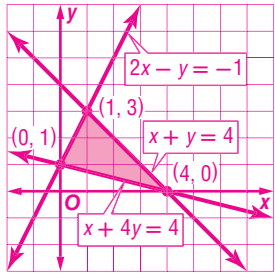
إيجاد رؤوس منطقة الحل

مثال 4 يبين كيفية إيجاد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

مثال إضافي

4

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام:
 $2x - y \geq -1, x + y \leq 4,$
 $x + 4y \geq 4$



إجابات (تحقق من فهمك):

$$(8, -4), (-3, 3), \left(\frac{4}{7}, -\frac{54}{7}\right) \quad (4A)$$

$$(-2, 1), (3, 3), (7, -1) \quad (4B)$$

مثال 4

إيجاد رؤوس منطقة الحل

جد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني للنظام الآتي:

$$y \geq 2x - 8, y \leq -\frac{1}{4}x + 6, 4y \geq -15x - 32$$

الخطوة 1 مثل كل متباينة بيانياً.

الخطوة 2 أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الواضحة، وذلك بالنظر إلى التمثيل البياني. لاحظ أنه يمكن إيجاد إحداثيات رأسين من رؤوس المثلث وهما الزوجان المرتبان $(-4, 7)$ ، $(0, -8)$.

الخطوة 3 أوجد إحداثيات الرأس الثالث بحل النظام المكون من المعادلتين الخطيتين:

$$y = 2x - 8, y = -\frac{1}{4}x + 6$$

عوض عن y بقيمتها في المعادلة الثانية.

$$2x - 8 = -\frac{1}{4}x + 6$$

$$\text{بجمع 8 تكلا الطرفين} \quad 2x = -\frac{1}{4}x + 14$$

$$\text{بجمع } \frac{1}{4}x \text{ تكلا الطرفين} \quad \frac{9}{4}x = 14$$

$$\text{بقسمة كلا الطرفين على العدد } \frac{9}{4} \quad x = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$$

جد قيمة y .

$$\text{بالتعويض عن } x \text{ بالعدد } 6\frac{2}{9} \quad y = 2\left(6\frac{2}{9}\right) - 8$$

$$\text{خاصية التوزيع} \quad = 12\frac{4}{9} - 8$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = 4\frac{4}{9}$$

إحداثيات رؤوس المثلث هي: $(-4, 7)$ ، $(0, -8)$ ، $(6\frac{2}{9}, 4\frac{4}{9})$.

تحقق: قارن بين الإحداثيين اللذين وجدتهما، وبين إحداثيات الرأس الثالث في التمثيل البياني، ولاحظ أن الإحداثي x للرأس الثالث محصور بين العددين 6، 7، لذا فإن القيمة $6\frac{2}{9}$ معقولة، وكذلك الإحداثي y محصور بين العددين 4، 5، ولذا فإن القيمة $4\frac{4}{9}$ معقولة أيضاً.

تحقق من فهمك ✓

أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي: **(4A, 4B) انظر الهامش.**

$$5y \leq 2x + 9 \quad (4B) \quad y \geq -3x - 6 \quad (4A)$$

$$y \leq -x + 6 \quad 2y \geq x - 16$$

$$9y \geq -2x + 5 \quad 11y + 7x \leq 12$$

الدرس 1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً 37

تنوع التعليم

ضمن فوق

أظهر بعض الطلاب فهماً كافياً لحل نظام من المتباينات الخطية بيانياً،

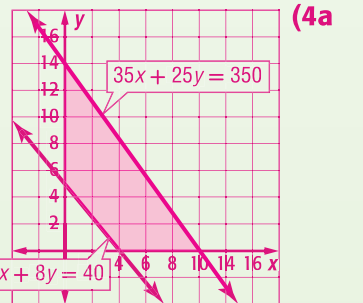
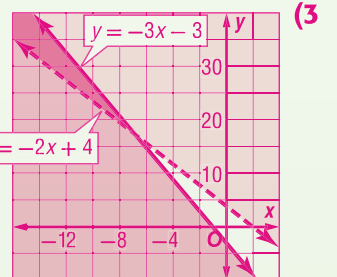
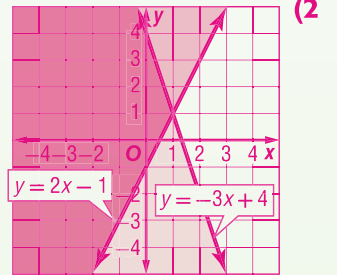
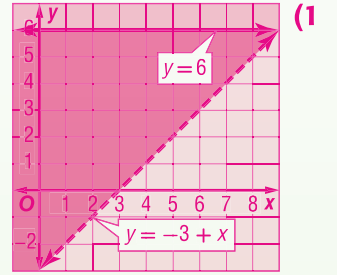
إلهم كتابة إرشادات لمساعدة غيرهم في تمثيل نظام متباينات بيانياً، وإيجاد إحداثيات رؤوس المنطقة الناتجة بدقة ويسر.

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-6؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات :



المثالان 1, 2 حل كل نظام فيما يأتي بيانيًا: (1-3) انظر الهامش

$$\begin{array}{lll} (1) & y \leq 6 & (2) & y \leq -3x + 4 \\ & y > -3 + x & (3) & y > -2x + 4 \\ & & & y \leq -3x - 3 \\ & & & y \geq 2x - 1 \end{array}$$

مثال 3 (4) **مشتريات:** خصصت ليلى مبلغًا لا يتجاوز 350 ريالًا لشراء نوعين من الأقلام، يباع الأول في رزم تضم الواحدة منها 10 أقلام وثمانها 35 ريالًا، ويباع الثاني في رزم تضم الواحدة منها 8 أقلام وثمانها 25 ريالًا. فإذا أرادت ليلى شراء 40 قلمًا على الأقل من كلا النوعين. (4a, 4b) انظر الهامش
(a) مثل بيانيًا نظام المتباينات الذي يبين عدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.
(b) أعط 3 خيارات ممكنة لعدد الرزم الذي يمكنها شراؤه من كلا النوعين.

مثال 4 أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:
(5, 6) للتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات
(2, -8), (3, 5), (-4, 4)
(3.5, 8), (-4, 8), (0.5, 2)

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 حل كل نظام مما يأتي بيانيًا: (7-15) انظر ملحق الإجابات

$$\begin{array}{lll} (7) & x < 3 & (8) & y > 3x - 5 \\ & y \geq -4 & & y \leq 4 \\ (10) & y \geq 0 & (11) & 6x - 2y \geq 12 \\ & y < x & & 3x + 4y > 12 \\ (13) & 5y < 2x + 10 & (14) & 3y - 2x \leq -24 \\ & y - 4x > 8 & & y \geq \frac{2}{3}x - 1 \\ (15) & y > -\frac{2}{5}x + 2 & & 5y \leq -2x - 15 \end{array}$$

مثال 3 (16) **عمل جزئي:** يعمل سعيد عاملين جزئيين ويتقاضى على كل منهما أجرًا؛ فيتقاضى 20 ريالًا عن كل ساعة في العمل الأول، و 24 ريالًا عن كل ساعة في العمل الثاني، فإذا علمت أنه يعمل مدة لا تزيد على 25 ساعة في كلا العملين أسبوعيًا، فمثل بيانيًا نظامًا من متباينتين يبين عدد الساعات التي يعملها في كل من العملين؛ ليجمع مبلغًا لا يقل عن 1850 ريالًا في 8 أسابيع. انظر ملحق الإجابات

مثال 4 أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي:

$$\begin{array}{lll} (17) & x \geq 0 & (18) & y \geq 3x - 7 \\ & y \geq 0 & & y \leq 8 \\ & x + 2y < 4 & & x + y > 1 \\ (19) & x \leq 4 & & y \geq -3x + 12 \\ & y \leq 9 & & \\ (20) & -3x + 4y \leq 15 & (21) & 8y - 19x < 74 \\ & 2y + 5x > -12 & & 38y + 26x \leq 119 \\ & 10y + 60 \geq 27x & & 54y - 12x \geq -198 \\ (22) & 6y - 24x \geq -168 & & 8y + 7x > 10 \\ & 20y - 2x \leq 64 & & 10y + 60 \geq 27x \end{array}$$

$$(8, 4), (6, -4), (-2, 3) \quad (-6, -5), (-2, 4.5), (7.5, -2) \quad (-3, 1.5), (5, 7.5), (0, -6)$$

تنويع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
42-53, 40, 7-23	دون المتوسط
42-53, 40, 34, 26-32, 7-23	ضمن المتوسط
24-53	فوق المتوسط

(4b) إجابة ممكنة: 4 رزم من النوع الأول، و 5 رزم من النوع الثاني، أو 5 رزم من النوع الأول، و 6 رزم من النوع الثاني. أو 6 رزم من النوع الأول، و 5 رزم من النوع الثاني.

(23) **اتصالات:** يجري فهد مكالمات هاتفية من هاتفه المحمول مدتها لا تزيد على 800 دقيقة، بشرط أن لا يقل عدد دقائق الاتصال نهارًا عن ضعف عددها ليلاً، ولا يقل عدد دقائق الاتصال ليلاً عن 200 دقيقة. اكتب نظام متباينات يمثل الموقف. **انظر الهامش**

(24a) **انظر الهامش**

(24) **أشجار:** تصنف الأشجار في المناطق الحرجية تبعاً للارتفاع ومحيط الساق إلى أربع مجموعات، ويبين الجدول الآتي ارتفاع ومحيط ساق أشجار كل مجموعة من هذه المجموعات في إحدى المناطق الحرجية:

المجموعة	الأشجار المسيطرة	الأشجار شبه المسيطرة	الأشجار المتوسطة المسيطرة	الأشجار غير المسيطرة
الارتفاع (ft)	أكثر من 72	56-72	40-55	أقل من 39
محيط الساق (in)	أكثر من 60	48-60	34-48	أقل من 33

(a) اكتب نظام متباينات خطية يمثل مدى كل من: الارتفاع h ومحيط الساق c للأشجار شبه المسيطرة ومثله بيانياً.
(b) ما المجموعة التي تنتمي إليها شجرة زيزفون ارتفاعها 48ft؟ وما المدى الذي يقع فيه محيط ساقها؟
الأشجار المتوسطة المسيطرة 34-48 in



الربط مع الحياة

تصنّف الأشجار في المناطق الحرجية وفقاً لوصول أوراقها إلى الضوء إلى أربعة أصناف: **المسيطرة:** أشجار تصل أوراقها لضوء الشمس من أعلى فقط. **شبه المسيطرة:** أشجار تصل أوراقها لضوء الشمس من أعلى ومن الجوانب. **المتوسطة المسيطرة:** أشجار ارتفاعها بسيط وتصل أوراقها لضوء الشمس من أعلى فقط. **غير المسيطرة:** أشجار تنمو أسفل مستوى الأشجار الأخرى، وتكون تحت ظل الأشجار الأخرى.

المحتوى الرياضي

حل أنظمة المتباينات: حل نظام من المتباينات الخطية هو مجموعة من الأزواج المرتبة كل منها يحقق جميع متباينات النظام، وتمثيله البياني هو منطقة تحتوي على الحلول جميعها.

التعليم باستعمال التقنيات

نشرة إلكترونية اطلب إلى الطلاب

العمل في مجموعات ثنائية لعمل نشرة إلكترونية توضح كيفية تمثيل نظام من المتباينات بيانياً مضمينها كلاً مما يأتي:

- متى يُستعمل مستقيم متصل أو مستقيم متقطع لتمثيل حد المتباينة.
- كيفية تحديد منطقة التظليل.
- كيفية تفسير التمثيل البياني للنظام لإيجاد حله.

إجابات:

(23) x عدد الدقائق نهاراً

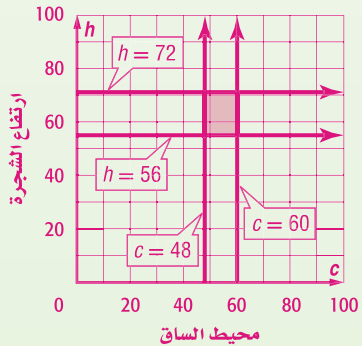
y عدد الدقائق ليلاً

$x \geq 0, y \geq 200$

$x + y \leq 800, x \geq 2y$

(24a) $56 \leq h \leq 72$

$48 \leq c \leq 60$



(34) $(0, 2), (5\frac{1}{3}, -1\frac{1}{3}), (4\frac{4}{17}, 3\frac{1}{17}), (2.8, -6.4)$

(35) $(-6, -2), (-3\frac{13}{17}, 6\frac{16}{17}), (9\frac{1}{7}, 3\frac{5}{7}), (0.8, -8.8)$

حل كل نظام مما يأتي بيانياً: (25-32) **انظر ملحق الإجابات**

(25) $y \geq |2x + 4| - 2$ (26) $y \geq |6 - x|$ (27) $|y| \geq x$
(28) $3y + x \leq 15$ (29) $|y| \leq 4$ (30) $y < 2x$

(28) $y > -3x + 1$ (29) $6y + 2x \leq 9$ (30) $|x| > y$
 $4y \leq x - 8$ (31) $2x + 3y \geq 6$ (32) $8x + 4y < 10$ (33) $y \geq -2$
 $3x - 5y < 20$ (34) $y \leq |x - 6|$ (35) $y > -4x - 9$ (36) $2y - x \geq -20$
(37) $2y \geq 3x - 6$ (38) $4y + x \leq 24$ (39) $y \geq -3x - 6$
(40) $4y - x \leq 8$ (41) $y \geq -3x + 2$ (42) $y \leq 2x + 14$

(31) $2x + 3y \geq 6$ (32) $8x + 4y < 10$ (33) $y \geq |x - 2| + 4$ (34) $2y - x \geq -20$
(35) $y \geq -x - 8$ (36) $2y - x \geq -20$ (37) $2y \geq 3x - 6$
(38) $4y + x \leq 24$ (39) $y \geq -3x - 6$ (40) $4y - x \leq 8$
(41) $y \geq -3x + 2$ (42) $y \leq 2x + 14$

جد إحداثيات رؤوس الشكل الناتج عن التمثيل البياني لكل نظام مما يأتي: (34-36) **انظر الهامش**

(37) يريد معلم التربية البدنية أن يختار من 10 إلى 15 لاعباً ليشكل فريقاً على أن يكون اللاعبون من طلاب الصفين الثاني والثالث، ويكون عدد اللاعبين من الصف الثالث أكثر من لاعبي الصف الثاني.

(a) اكتب نظام متباينات يمثل ذلك الموقف، ومثله بيانياً. **انظر ملحق الإجابات**

(b) اكتب جميع الاحتمالات الممكنة لعدد اللاعبين من كلا الصفين. **انظر الهامش**

(38) **إدارة الأموال:** يستثمر علي 10000 ريال في مشروعين تجاريين. فإذا كان المشروع الأول يدرّ ربحاً سنوياً نسبته 6%، والمشروع الثاني يدرّ ربحاً سنوياً نسبته 10%، فما أقل مبلغ يمكن لعلي استثماره في المشروع الثاني على أن لا يقل ربحه في المشروعين بعد سنة واحدة عن 740 ريالاً؟ **3500 ريال**

39 الدرس 1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

تنوع التعليم

فوق

المتعلمون الفرديون من خلال السؤال 16 بين للطلاب أن أنظمة المتباينات الخطية تُستعمل في حلّ مسائل حياتية، واطلب إليهم أن يبحثوا في الصحف والمجلات وفي الإنترنت عن معلومات حياتية، وأن يستعملوها في صياغة أسئلة يمكن حلها باستعمال أنظمة المتباينات الخطية، وبهذا تكون قد ساعدتهم على أن يستوعبوا مفهوم حل أنظمة المتباينات الخطية.

(36) $(-4, 6), (-3, 8), (4.8, -7.6), (1\frac{1}{7}, -9\frac{3}{7})$

(37b) $(4, 6), (5, 6), (3, 7), (4, 7), (5, 7), (6, 7), (2, 8), (3, 8), (4, 8), (5, 8), (6, 8), (7, 8), (1, 9), (2, 9), (3, 9), (4, 9), (5, 9), (6, 9), (0, 10), (1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10), (5, 10), (0, 11), (1, 11), (2, 11), (3, 11), (4, 11), (0, 12), (1, 12), (2, 12), (3, 12), (0, 13), (1, 13), (2, 13), (0, 14), (1, 14), (0, 15)$

4 التقويم

تعلم لاحق دع الطلاب يستنتجون كيف يمكنهم ربط ما تعلموه في هذا الدرس مع ما يمكن أن يتعلموه في الدرس 1-6: البرمجة الخطية والحل الأمثل.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس 1-5 بإعطائهم:

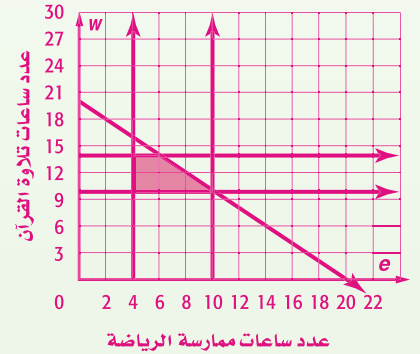
الاختبار القصير 3، ص (12)

إجابات:

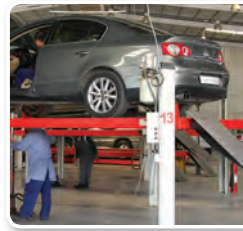
(39) افترض أن w هي عدد ساعات تلاوة القرآن و e هي عدد ساعات ممارسة الرياضة

$$w + e \leq 20$$

$$4 \leq e \leq 10$$

$$10 \leq w \leq 14$$


(43) إجابة ممكنة: ظلل منطقة حل كل متباينة في النظام، على أن يتم تظليل المنطقة فوق المستقيم، إذا كانت المتباينة $y >$ والمنطقة تحت المستقيم إذا كانت المتباينة $y <$. ثم أوجد تقاطع هذه المناطق.



الربط مع الحياة

حث الإسلام على استثمار الوقت والحرص عليه، فقال صلى الله عليه وسلم: "لا تزول قدما عبد حتى يُسأل عن أربع: عن عمره فيما أفناه، وعن شبابه فيما أبلاه، وعن ماله من أين اكتسبه؟ وفيم أنفقه؟ وعن علمه ماذا عمل به؟".

(41) إجابة ممكنة:
 $y \geq 2x - 6$
 $y \leq -0.5x + 4$
 $y \geq -3x - 6$

(39) إدارة الوقت: يستثمر رامي وقت فراغه في ممارسة الرياضة وتلاوة القرآن. فإذا كان مجمل وقت فراغه لا يتجاوز 20 ساعة أسبوعياً، ويقضي من 4 إلى 10 ساعات منها في ممارسة الرياضة، ولا يقل زمن تلاوته للقرآن عن 10 ساعات ولا يزيد على 14 ساعة. فاكتب نظام متباينات خطية يمثل ذلك الموقف، ومثله بيانياً. انظر الهامش

مسائل مهارات التفكير العليا

(40) مسألة مفتوحة: اكتب نظاماً من متباينتين على أن يكون الحل:

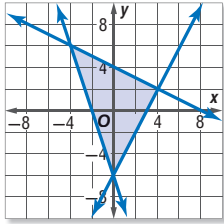
(a) في الربع الثالث فقط. إجابة ممكنة: $y < -2, x < -1$

(b) غير موجود. إجابة ممكنة: $y > 2, y < -2$

(c) واقعاً على مستقيم. إجابة ممكنة: $y \geq x, y \leq x$

(d) نقطة واحدة فقط. إجابة ممكنة: $|x|, y \leq -|x|$; الحل هو النقطة (0, 0).

(41) تحد: تمثل المنطقة المظللة في المستوى الإحداثي المجاور حلاً لنظام من المتباينات. اكتب هذا النظام.



(42) تبرير: هل الجملة الآتية صحيحة أم غير صحيحة، وإذا كانت غير صحيحة فأعط مثلاً مضاداً. صحيحة

"النظام المكون من متباينتين خطيتين إما أن يكون ليس له حل أو أن يكون له عدد لا نهائي من الحلول".

(43) اكتب: وضح بخطوات مكتوبة طريقة تحديد منطقة التظليل عند حل نظام متباينات خطية بيانياً. انظر الهامش

تدريب على اختبار

(45) إجابة قصيرة: إذا كانت $3x = 2y, 5y = 6z$ ، فما قيمة x بدلالة z ؟ $\frac{4}{5}z$

x	y
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20

(44) يبين الجدول المجاور العلاقة بين x و y . فأأي المعادلات الآتية تمثل هذه العلاقة؟ B

A $y = 3x - 2$

B $y = 3x + 2$

C $y = 4x + 1$

D $y = 4x - 1$

مراجعة تراكمية

مثل كل متباينة مما يأتي بيانياً: (الدرس 1-4) **(46-48)** انظر ملحق الإجابات

(48) $5x + 7y \geq -20$

(47) $4x - 3y < 10$

(46) $x + y \leq 6$

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد كلاً من مجالها ومدنها: (الدرس 1-3) **(49-50)** انظر ملحق الإجابات

(50) $h(x) = [x] - 5$

(49) $f(x) = |x - 3|$

إذا كان $f(x) = 2x + 5, g(x) = 3x - 4$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 1-2)

(53) $-6.25 g(-0.75)$

(52) $4.5 f(-0.25)$

(51) $-10 g(-2)$

40 الفصل 1 الدوال والمتباينات

فوق

تنوع التعليم

توسع مثل النقاط: $(-2, 0), (0, 2), (2, 0)$ على مستوى إحداثي، وصل بين كل نقطتين بقطعة مستقيمة لتكوّن منطقة مثلثة. اكتب نظاماً من المتباينات الخطية يعرف المنطقة المثلثة. $y \geq 0, y \leq -x + 2, y \leq x + 2$

1 التركيز

الهدف: تمثيل نظام من المتباينات الخطية بيانياً باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire.

المواد اللازمة

• الحاسبة البيانية TI-nspire.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات لحل نظام المتباينتين الخطيتين.

اطلب إلى كل مجموعة تتبع خطوات المثال، من خلال التطبيق العملي للخطوات.

وضح للطلاب أنه عند نقلهم الرسم من الحاسبة البيانية إلى ورقة، يجب عليهم أن يرسموا محوري الإحداثيات، وأن يوضحوا على الرسم نقاط التقاطع بين المستقيمتين، ونقاط تقاطع كل مستقيم مع المحورين.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 1-9.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال 6؛ لتقويم مدى قدرة الطلاب على استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل نظام متباينات خطية.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل الطلاب عن عدد نقاط منطقة الحل. عدد لا نهائي من النقاط.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل أنظمة متباينات خطية بيانياً.

الهدف
أستعمل الحاسبة
البيانية لحل أنظمة
متباينات خطية.

مثال

حل نظام من متباينتين خطيتين

استعمل الحاسبة البيانية لحل النظام المكون من المتباينتين الآتيتين:

$$y \geq -3x + 4$$

$$y \leq 2x - 1$$

الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على 2ND .
- من الشاشة الظاهرة اختر **1 New Document** (مستعملاً الأسهم).
- من الشاشة الظاهرة اختر **2 Add Graphs** (مستعملاً 2ND).
- اكتب المتباينة الأولى $y \geq -3x + 4$ ، وذلك بالضغط على مفتاح 2ND ، ثم اختر الإشارة \geq مستعملاً الأسهم فتظهر $y \geq$ ، ثم أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط enter .
- اكتب المتباينة الثانية $y \leq 2x - 1$ بالضغط على المفتاح 2ND ، ثم اختر الإشارة \leq مستعملاً الأسهم فتظهر $y \leq$ ، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط enter ، فتكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.

لاحظ نمط التظليل فوق المستقيم $y = -3x + 4$ ، وتحت المستقيم $y = 2x - 1$.

إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع نمطي التظليل، وهي المنطقة التي تحوي جميع النقاط التي تحقق النظام $y \geq -3x + 4$ ، $y \leq 2x - 1$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل نظام من متباينتين مما يأتي: (1-9) انظر ملحق الإجابات

$$y \geq 2 - x \quad (3) \quad y \geq -4x \quad (2) \quad y \geq 3 \quad (1)$$

$$y \leq x + 3 \quad y \leq -5 \quad y \leq -x + 1$$

$$y + 5x \geq 12 \quad (6) \quad 2y \geq 3x - 1 \quad (5) \quad y \geq 2x + 1 \quad (4)$$

$$y - 3 \leq 10 \quad 3y \leq -x + 7 \quad y \leq -x - 1$$

$$\frac{1}{6}y - x \geq -3 \quad (9) \quad 10y - 7x \geq -19 \quad (8) \quad 5y + 3x \geq 11 \quad (7)$$

$$\frac{1}{5}y + x \leq 7 \quad 7y - 5x \leq 11 \quad 3y - x \leq -8$$

توسع 1-5 معمل الحاسبة البيانية: أنظمة المتباينات الخطية 41

التوسع في المفهوم

اسأل:

- متى تنتمي نقطة تقاطع مستقيمين من الحدود إلى منطقة الحل؟

تنتمي نقطة التقاطع إلى منطقة الحل في حالة كون المستقيمين متصلين (غير متقطعين)؛ أي في حالة احتواء المتباينات على أحد الرمزين \geq أو \leq .



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 1

دون	فوق المتوسط	ضمن	فوق المتوسط	دون المتوسط
-----	-------------	-----	-------------	-------------

تدريبات إعادة التعليم (27) - تمة (27)

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-5 تدريبات إعادة التعليم

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

إيجاد رؤوس منطقة مغلقة تكون منطقة الحل الناتجة عن حل نظام من المتباينات الخطية منطقة مغلقة على شكل مضلع أحياناً، ويمكن إيجاد رؤوس هذا المضلع مستخدماً أسلوب سبقت دراستها مثل: التمثيل البياني، التعويض و/ أو الحذف.

مثال: أوجد رؤوس المثلث الناتج عن تمثيل نظام المتباينات:
 $5x + 4y < 20$, $y < 2x + 3$, $x - 3y < 4$

مثل كل متباينة بيانياً، رؤوس المثلث الناتج هي النقاط الناتجة عن تقاطع المستقيمات التي تحد المنطقة. الرأس (4, 0) يمكنك إيجاده من الرسم مباشرة، ولإيجاد الرأسين الآخرين حل نظامي المعادلات:

$$\begin{aligned} y &= 2x + 3 & \text{و} & & y &= 2x + 3 \\ x - 3y &= 4 & & & 5x + 4y &= 20 \end{aligned}$$

أعد كتابة المعادلة الأولى بالصورة القياسية على الصورة $2x - y = -3$ بالنسبة للنظام الأول، ثم احذفها في العدد 4، واجمع الناتج إلى المعادلة الثانية $2x - y = -3$ بالضرب في 4 $8x - 4y = -12$ $5x + 4y = 20$

$$\begin{aligned} x - 3(2x + 3) &= 4 \\ x - 6x - 9 &= 4 \\ -5x - 9 &= 4 \\ -5x &= 13 \\ x &= -\frac{13}{5} \end{aligned}$$

عوض $x = -\frac{13}{5}$ في المعادلة الأولى لإيجاد قيمة y

$$\begin{aligned} y &= 2\left(-\frac{13}{5}\right) + 3 \\ y &= -\frac{26}{5} + 3 \\ y &= -\frac{11}{5} \end{aligned}$$

إحداثيات الرأس الثالث $\left(-\frac{13}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

إذن إحداثيات الرؤوس الثلاثة للمنطقة الناتجة هي: $\left(\frac{8}{13}, \frac{3}{13}\right)$, $(4, 0)$ و $\left(-\frac{13}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

تمارين:
 أوجد إحداثيات رؤوس المثلث الناتج عن التمثيل البياني لكل من أنظمة المتباينات الآتية:

(1) $x - y \leq 2$ (2) $x > -3$ (3) $x < -\frac{1}{2}x + 3$ (4) $y < \frac{1}{2}x$
 (5) $x + 2y \geq 1$ (6) $y \geq \frac{3}{2} + 2$ (7) $x + y \geq 4$
 (8) $x + 4y \geq -4$ (9) $x - 2y > 6$ (10) $x > 2$
 (11) $3x - 2y \leq -1$ (12) $y < \frac{2}{3}x + 1$ (13) $x > 2$
 (14) $x + 4y \geq -12$ (15) $y < \frac{2}{3}x + 1$ (16) $y \geq -\frac{2}{3}x + 1$
 (17) $x + y \geq 4$ (18) $x + 3y < 3$ (19) $x - 2y > 6$
 (20) $x - y \geq 2$ (21) $x - 2y \geq 4$ (22) $x + 4y < -4$

الفصل 1، الدوال والمتباينات

تدريبات إعادة التعليم (26)

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-5 تدريبات إعادة التعليم

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

أنظمة المتباينات الخطية، حل نظام من المتباينات الخطية، مثل المتباينات بيانياً على المستوى البياني نفسه، ومنطقة حل النظام هي المنطقة المظللة المشتركة لكل المتباينات.

مثال: حل نظام المتباينات: $2x - 1 \leq y < \frac{3}{2} + 2$

المنطقان 1 و 2 تتلاقح حل المتباينة $2x - 1 \leq y$
 المنطقان 1 و 3 تتلاقح حل المتباينة $y < \frac{3}{2} + 2$
 المنطقة 1 مشتركة بين هذه المناطق، فهي تمثل حل نظام المتباينات.

تمارين:
 حل كل من أنظمة المتباينات الخطية بيانياً:

(1) $x - y \leq 2$ (2) $x > -3$ (3) $x < -\frac{1}{2}x + 3$ (4) $y < \frac{1}{2}x$
 (5) $x + 2y \geq 1$ (6) $y \geq \frac{3}{2} + 2$ (7) $x + y \geq 4$
 (8) $x + 4y \geq -4$ (9) $x - 2y > 6$ (10) $x > 2$
 (11) $3x - 2y \leq -1$ (12) $y < \frac{2}{3}x + 1$ (13) $x > 2$
 (14) $x + 4y \geq -12$ (15) $y < \frac{2}{3}x + 1$ (16) $y \geq -\frac{2}{3}x + 1$
 (17) $x + y \geq 4$ (18) $x + 3y < 3$ (19) $x - 2y > 6$
 (20) $x - y \geq 2$ (21) $x - 2y \geq 4$ (22) $x + 4y < -4$

الفصل 1، الدوال والمتباينات

تدريبات حل المسألة (29)

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-5 تدريبات حل المسألة

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

(1) **برج الحمام:** يريد أحد وضع برج للحمام في حديقة منزله عند نقطة (x, y) داخل المنطقة المظللة المثلثية في الشكل.

(2) **مربعات:** وجد علي بقعة من الحجر على دفتر الرياضيات، ورأى حيلة تقول: "المتباينات الآتية تتلاقح ثلاثاً مربعاً $8 \leq 1x + 1$ و....." اكتب متباينة لتصبح هذه الجملة صحيحة.

(3) **صهبة:** تلقى محمد مجموعة من الهدايا وطاقات التهنئة من زملائه خلال العطلة الصيفية. إذا كانت كل هدية معها بطاقة، ولم يرسل له أي من أصدقائه أكثر من بطاقة واحدة، وأقل من 10 من أصدقائه أرسلوا إليه بطاقة تهنئة بدون هدية. عر عن هذا الوضع مستخدماً نظاماً من المتباينات الخطية. إذا كان عدد الهدايا c و عدد البطاقات p $p \leq c - p < 10$

(4) **لوح بياني:** تعمل مجموعة من الطلاب مع معلمهم على صنع لوح بياني محدود بالمتباينات الآتية:
 $0.25x + y \geq -4.75$ و $5x + y \leq 5$
 و $17.5 \leq -4.5x + y$ مثل هذه المتباينات بيانياً لإيجاد إحداثيات أركان هذا الدوح.

(5) **تذكركم:** يتبع مسرح إلى 800 مقعد، وتعرض فيه مسرحية تاريخية، إذا عملت أن هناك نوعين من التذاكر: تذكرة من الدرجة الأولى بمبلغ 7 ريالات وتذكرة من الدرجة الثانية بمبلغ 4 ريالات، وكان هدف إدارة المسرح هو الحصول على 3400 ريال في الليلة الواحد.

(a) اكتب نظاماً من المتباينات الخطية يمثل عدد المقاعد والمبلغ الإجمالي: $800 \leq x + y$ و $3400 \leq 7x + 4y$

(b) مثل هذا النظام بيانياً في المستوى أدناه.

(c) هل تصل المبيعات إلى المبلغ المستهدف إذا بيع 200 تذكرة من الدرجة الأولى و 475 تذكرة من الدرجة الثانية؟ **لا، لأن هذا العدد من التذاكر يجمع 3300 ريال فقط**

الفصل 1، الدوال والمتباينات

تدريبات المهارات (28)

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-5 تدريبات المهارات

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

حل كل من أنظمة المتباينات الآتية بيانياً:

(1) $x < 1$ (2) $x \geq -3$ (3) $x \leq 2$
 (4) $y \geq -1$ (5) $y \geq -3$ (6) $x > 4$
 (7) $y \geq x$ (8) $y < -4x$ (9) $x - y \leq -1$
 (10) $y \geq -x$ (11) $y \geq 3x - 2$ (12) $3x - y \leq 4$
 (13) $y \geq x$ (14) $y < -x$ (15) $y < x$ (16) $y \geq x$
 (17) $y < 3$ (18) $y < -2x + 3$ (19) $x - y \leq 4$
 (20) $x + 2y < 12$ (21) $y \geq -x$ (22) $2x + y < 4$
 (23) $y \geq -x$ (24) $y \geq x$ (25) $y < -x$ (26) $y < x$
 (27) $y < x$ (28) $y < -x$ (29) $y < x$ (30) $y < -x$
 (31) $y < x$ (32) $y < -x$ (33) $y < x$ (34) $y < -x$
 (35) $y < x$ (36) $y < -x$ (37) $y < x$ (38) $y < -x$
 (39) $y < x$ (40) $y < -x$ (41) $y < x$ (42) $y < -x$
 (43) $y < x$ (44) $y < -x$ (45) $y < x$ (46) $y < -x$
 (47) $y < x$ (48) $y < -x$ (49) $y < x$ (50) $y < -x$
 (51) $y < x$ (52) $y < -x$ (53) $y < x$ (54) $y < -x$
 (55) $y < x$ (56) $y < -x$ (57) $y < x$ (58) $y < -x$
 (59) $y < x$ (60) $y < -x$ (61) $y < x$ (62) $y < -x$
 (63) $y < x$ (64) $y < -x$ (65) $y < x$ (66) $y < -x$
 (67) $y < x$ (68) $y < -x$ (69) $y < x$ (70) $y < -x$
 (71) $y < x$ (72) $y < -x$ (73) $y < x$ (74) $y < -x$
 (75) $y < x$ (76) $y < -x$ (77) $y < x$ (78) $y < -x$
 (79) $y < x$ (80) $y < -x$ (81) $y < x$ (82) $y < -x$
 (83) $y < x$ (84) $y < -x$ (85) $y < x$ (86) $y < -x$
 (87) $y < x$ (88) $y < -x$ (89) $y < x$ (90) $y < -x$
 (91) $y < x$ (92) $y < -x$ (93) $y < x$ (94) $y < -x$
 (95) $y < x$ (96) $y < -x$ (97) $y < x$ (98) $y < -x$
 (99) $y < x$ (100) $y < -x$

الفصل 1، الدوال والمتباينات



مصادر الدرس 5 - 1

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

فوق ضمن دون

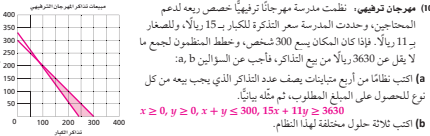
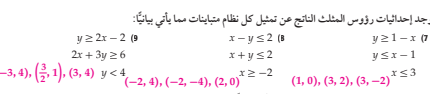
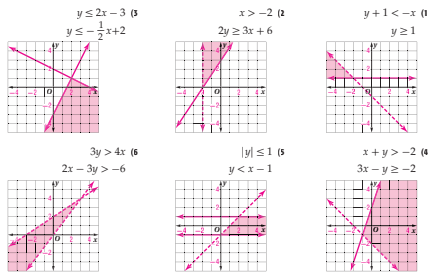
كتاب التمارين (8)

فوق ضمن

التدريبات الإثرائية (30)

1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

حل كل نظام متباينات مما يأتي بيانياً:



10 مهرجان ترفيهي، نظمت مدرسة مهرجاناً ترفيهياً خصص ريعه لدعم المحتاجين، وحددت المدرسة سعر التذكرة للرجال بـ 15 ريالاً، وللصغار بـ 11 ريالاً، فإذا كان المكان يبيع 300 تذكرة، وحطت المتطوعون لجمع ما لا يقل عن 3630 ريالاً من بيع التذاكر، فأجب عن السؤالين a, b:

a: اكتب نظاماً من أربع متباينات يعصف عدد التذاكر الذي يجب بيعه من كل نوع للحصول على المبلغ المطلوب، ثم مثله بيانياً.

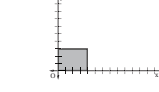
b: اكتب ثلاثة حلول مختلفة لهذا النظام.

إجابة مسكنا: 250 تذكرة للرجال، 50 تذكرة للصغار.
200 تذكرة للرجال، 100 تذكرة للصغار.
145 تذكرة للرجال، 148 تذكرة للصغار.

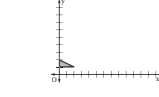
8

1-5 التدريبات الإثرائية (تصميم إبداعي)

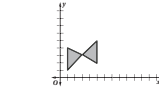
يمكنك استعمال أنظمة المتباينات الخطية لوصف مناطق مغلقة محدودة بأشكال هندسية مرسومة في المستوى الإحداثي. فمثلاً المستطيل الممثل في الشكل المجاور يمكنك رسمه مستخدماً نظام المتباينات الآتي:



$$\begin{aligned} x &\leq 4 \\ x &\geq 0 \\ y &\leq 3 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

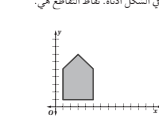


$$\begin{aligned} x+2y &\leq 4 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 1 \end{aligned}$$



1) أوجد نظام المتباينات الخطية التي تصف المنطقة المظلمة في الشكل المجاور. في حين أن نقاط التقاطع هي: (5, 5), (1, 1), (1, 4), (3, 3), (5, 2).

$$\begin{aligned} 3 \leq x \leq 5 & \quad 1 \leq x \leq 3 \\ y \leq x & \quad y \geq x \\ x+2y \geq 9 & \quad x+2y \leq 9 \end{aligned}$$



2) أوجد نظام المتباينات الخطية التي تصف المنطقة المظلمة المحدودة بشكل البيت في الشكل أدناه. نقاط التقاطع هي: (1, 5), (5, 1), (1, 1), (3, 7), (5, 5).

$$\begin{aligned} x &\geq 1 \\ x &\leq 5 \\ y &\leq x+4 \\ y &\leq -x+10 \\ y &\geq 1 \end{aligned}$$

الفصل 1 - المتباينات

30

الصف: الثاني الثانوي

البرمجة الخطية والحل الأمثل Optimization with Linear Programming

لماذا؟

يبين الجدول أدناه أكبر وأقل عدد للأثواب المنتجة من المقاسين الكبير والصغير، وتكلفة إنتاج كل ثوب منها في أحد المصانع الوطنية.

عدد الأثواب المنتجة في اليوم الواحد			
المقاس	أقل عدد	أكبر عدد	تكلفة إنتاج الثوب
صغير	600	1500	55 ريالاً
كبير	800	1700	95 ريالاً

إذا كان عدد الأثواب المطلوب إنتاجها من المقاسين في اليوم الواحد لا يقل عن 2000 ثوب، فكم ثوباً من كل مقاس يجب إنتاجه لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟

هناك قيود إضافية على إنتاج المشغل ناجمة عن الطلب، والشحن وكفاءة المشغل. وللتعبير عن هذه القيود يمكن استعمال أنظمة المتباينات الخطية.

القيمة العظمى والقيمة الصغرى: تواجه الشركات في كثير من الأحيان أوضاعاً ضمن قيود مختلفة وتسعى للوصول إلى أقل تكلفة أو إلى أعلى ربح. مثل هذه القضايا يمكن أن توجه عادة باستعمال البرمجة الخطية.

البرمجة الخطية: هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانياً، وتقع القيمة العظمى أو الصغرى - إن وجدت - للدالة ذات الصلة دائماً عند أحد رؤوس منطقة الحل.

فيما سيأتي؟

درست حل أنظمة متباينات خطية بيانياً.

والآن؟

- أجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة ضمن منطقة معينة.
- أستعمل البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية.

المفردات:

القيود

constraints

البرمجة الخطية

linear programming

محدودة

bounded

غير محدودة

unbounded

الحل الأمثل

optimize

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترباط الراسي

ما قبل الدرس 1-6

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً.

الدرس 1-6

إيجاد القيمة العظمى والصغرى لدالة ضمن منطقة معينة.

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل لمسائل حياتية.

ما بعد الدرس 1-6

تطوير أنظمة معادلات خطية في أكثر من مجهولين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"،
واسأل:

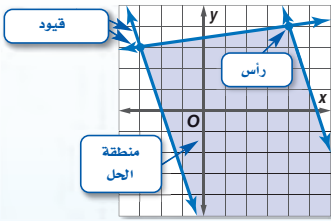
- ما تكلفة إنتاج 1000 ثوب من المقاس الصغير؟ **55000 ريال.**
- أيهما أقل تكلفة؟ إنتاج ثوب من المقاس الصغير أم ثوب من المقاس الكبير؟
إنتاج ثوب من المقاس الصغير.
- هل تستطيع الشركة إنتاج 2000 ثوب من المقاس الصغير في اليوم الواحد؟
وضّح إجابتك. **لا، لأن أكبر عدد من أثواب المقاس الصغير يمكن إنتاجه هو 1500 قطعة.**

أضف إلى

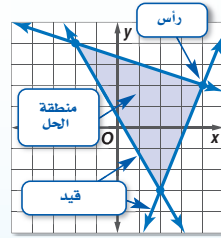
مطوبتك

منطقة الحل

مفهوم أساسي



إذا كانت منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك **غير محدودة** ويمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى.



إذا كانت منطقة الحل **محدودة** (مغلقة) أو محصورة بقيود كما في الشكل أعلاه، فإن القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة تظهر دائماً عند رؤوس منطقة الحل.

مصادر الدرس 1-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (44)	• تنويع التعليم، ص (47, 44)	• تنويع التعليم، ص (47)
كتاب التمارين	• ص (9)	• ص (9)	• ص (9)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

يستعمل الرمز $f(x, y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x, y ، وتقرأ f و x و y .

مثال 1

منطقة الحل المحدودة

مثل كل نظام مما يأتي بيانيًا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$3 \leq y \leq 6$$

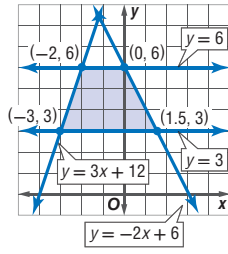
$$y \leq 3x + 12$$

$$y \leq -2x + 6$$

$$f(x, y) = 4x - 2y$$

الخطوة 1: مثل المتباينات بيانيًا، وحدّد إحداثيات الرؤوس.

الخطوة 2: جد قيمة الدالة عند كل رأس.



(x, y)	$4x - 2y$	$f(x, y)$
$(-3, 3)$	$4(-3) - 2(3)$	-18
$(1.5, 3)$	$4(1.5) - 2(3)$	0
$(0, 6)$	$4(0) - 2(6)$	-12
$(-2, 6)$	$4(-2) - 2(6)$	-20

← قيمة عظمى

← قيمة صغرى

القيمة العظمى للدالة تساوي 0 وتكون عند النقطة $(1.5, 3)$ ، والقيمة الصغرى للدالة تساوي -20 وتكون عند النقطة $(-2, 6)$.

تحقق من فهمك

(1A, 1B) انظر ملحق الإجابات

$$-6 \leq y \leq -2 \quad (1B)$$

$$y \leq -x + 2$$

$$y \leq 2x + 2$$

$$f(x, y) = 6x + 4y$$

$$-2 \leq x \leq 6 \quad (1A)$$

$$1 \leq y \leq 5$$

$$y \leq x + 3$$

$$f(x, y) = -5x + 2y$$

إذا نتج عن التمثيل البياني لنظام متبايناتٍ منطقةً غير مغلقة، فإنها تكون غير محدودة.

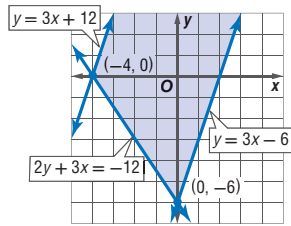
مثال 2

منطقة الحل غير المحدودة

مثل كل نظام مما يأتي بيانيًا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$2y + 3x \geq -12, y \leq 3x + 12, y \geq 3x - 6, f(x, y) = 9x - 6y$$

مثل المتباينات بيانيًا، وأوجد قيمة الدالة عند كل رأس؛ لأن القيمة العظمى أو الصغرى - إن وجدت - تكون عند الرؤوس.



(x, y)	$9x - 6y$	$f(x, y)$
$(-4, 0)$	$9(-4) - 6(0)$	-36
$(0, -6)$	$9(0) - 6(-6)$	36

القيمة العظمى للدالة تساوي 36 وتكون عند النقطة $(0, -6)$ ، ولا توجد قيمة صغرى للدالة؛ لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل وهي $(0, 8)$ وتُعطي القيمة -48 للدالة وهي أقل من -36.

تحقق من فهمك

(2A, 2B) انظر ملحق الإجابات

$$y \geq x - 9 \quad (2B)$$

$$y \leq -4x + 16$$

$$y \geq -4x - 4$$

$$f(x, y) = 10x + 7y$$

$$y \leq 8 \quad (2A)$$

$$y \geq -x + 4$$

$$y \leq -x + 10$$

$$f(x, y) = -6x + 8y$$

الدرس 1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل 43

القيمة العظمى والقيمة الصغرى

المثالان 1.2 يبينان كيفية إيجاد القيمة العظمى والصغرى للدالة في منطقة محدودة، وفي منطقة غير محدودة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

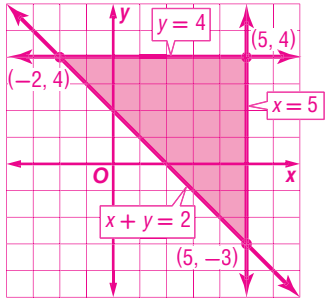
مثالان إضافيان

1

مثل نظام المتباينات الآتي بيانيًا، وحدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، ثم أوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة في منطقة الحل.

$$x + y \geq 2 \quad x \leq 5$$

$$f(x, y) = 3x - 2y \quad y \leq 4$$



للدالة قيمة عظمى عند النقطة $(5, -3)$ ، وهي 21 ولها قيمة صغرى عند النقطة $(-2, 4)$ ، وهي -14.

2

مثل نظام المتباينات الآتي بيانيًا، وحدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، ثم أوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة في منطقة الحل.

$$-x + 2y \leq 2$$

$$x - 2y \leq 4$$

$$x + y \geq -2$$

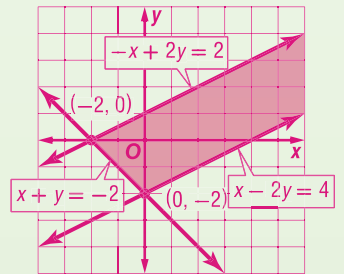
$$f(x, y) = 2x + 3y$$

$(-2, 0)$ ، $(0, -2)$ ؛ لا توجد قيمة عظمى، وتوجد قيمة صغرى عند النقطة $(0, -2)$ ، وهي -6.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية حلّ الأمثلة باستعمال السبورة التفاعلية، ثم قم بحفظ الحلول على شكل أوراق ملاحظات، وأرسلها إلى الطلاب إلكترونياً؛ ليستعملوها مرجعاً إضافياً خارج الصف.

إجابة المثال الإضافي 2 :



إيجاد الحل الأمثل: يُسمى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح **الحل الأمثل**، ويمكن الحصول على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية.

إيجاد الحل الأمثل

مثال 3 يبين كيفية استعمال البرمجة الخطية لحل مسائل حياتية.



الربط مع الحياة

جاوز عدد مصانع الألبسة الجاهزة بالملكة 300 مصنع، تغطي بإنتاجها المتميز نحو ثلث احتياجات السوق المحلية.

مثال إضافي

3

صناعة: ينتج مشغل نوعين من الحقائق، ويتطلب صنع الحقيبة الواحدة من النوع الأول $4y^2$ من القماش و $1y^2$ من الجلد، بينما يتطلب صنع الحقيبة الواحدة من النوع الثاني $3y^2$ من القماش، و $2y^2$ من الجلد. إذا توافر في المشغل $56y^2$ من القماش، و $104y^2$ من الجلد في أحد الأيام، فكم عليه أن يُنتج من كل نوع ليحصل على أكبر ربح إذا كان ربحه في الحقيبة من النوع الأول 20 ريالاً، و ربحه في الحقيبة من النوع الثاني 35 ريالاً؟ **0 حقيبة من النوع الأول، و 18 حقيبة من النوع الثاني.**

إرشادات للدراسة

منطقية الحل
اختر منطقية حلك بالتأمل في سياق المسألة.

المحتوى الرياضي

البرمجة الخطية هي طريقة لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة على منطقة محددة بمتباينات خطية، وهي طريقة مفيدة جداً في حل العديد من المسائل الحياتية.

تنبيه

تجنب الأخطاء من الضروري لجميع الطلاب اتباع الخطوات السبعة الواردة في صفحة 44 عند استعمال البرمجة الخطية لحل مسائل حياتية، لذا حثهم على توضيح خطوات حلهم وعنونتها.

مفهوم أساسي

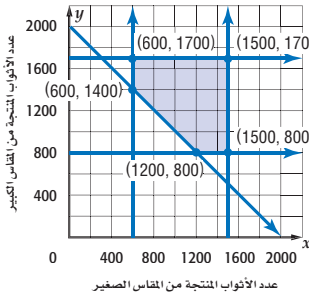
استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل

أضف إلى مطويتك

- 1 الخطوة حدد المتغيرات.
- 2 الخطوة اكتب نظام متباينات خطية يمثل المسألة.
- 3 الخطوة مثل نظام المتباينات بيانياً.
- 4 الخطوة جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.
- 5 الخطوة اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى.
- 6 الخطوة عوض إحداثيات الرؤوس في الدالة.
- 7 الخطوة اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقاً لما هو مطلوب في المسألة.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل



أعمال: عد إلى الموقف الوارد في بداية هذا الدرس، واستعمل البرمجة الخطية لإيجاد عدد القطع التي يتطلب إنتاجها من المقاسين، لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

الخطوة 1 افرض أن x هي عدد الأثاث المنتجة من المقاس الصغير، y هو عدد الأثاث المنتجة من المقاس الكبير.

الخطوة 2 $600 \leq x \leq 1500$
 $800 \leq y \leq 1700$
 $x + y \geq 2000$

الخطوتان 3 و 4 مثل نظام المتباينات بيانياً كما في الشكل المجاور، ثم حدّد رؤوس منطقة الحل.

الخطوة 5 الدالة التي تريد إيجاد قيمتها الصغرى هي: $f(x, y) = 55x + 95y$

(x, y)	$55x + 95y$	$f(x, y)$
(600, 1700)	$55(600) + 95(1700)$	194500
(600, 1400)	$55(600) + 95(1400)$	166000
(1500, 1700)	$55(1500) + 95(1700)$	244000
(1500, 800)	$55(1500) + 95(800)$	158500
(1200, 800)	$55(1200) + 95(800)$	142000

← قيمة عظمى

← قيمة صغرى

الخطوة 7 يجب إنتاج 1200 ثوب من المقاس الصغير، و 800 ثوب من المقاس الكبير لتكون التكلفة أقل ما يمكن.

تحقق من فهمك

(3 مجوهرات: يصوغ فهد من 10 إلى 25 عقداً، ومن 15 إلى 40 سواراً شهرياً. فإذا كانت أجرة صياغة العقد 50 ريالاً، وأجرة صياغة السوار 30 ريالاً، وصاغ في أحد الأشهر 30 قطعة من العقود والأساور على الأقل، فكم قطعة من كلا النوعين عليه صياغتها ليحصل على أكبر أجر؟ **25 عقداً و 40 سواراً**

تنوع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في تمييز منطقة الحل للنظام،

فإلهم استعمال ألوان مختلفة لتظليل منطقة حل كل متباينة بلون مختلف عن مناطق حل المتباينات الأخرى، ممّا يساعد على فهم العلاقة بين مناطق حل المتباينات المختلفة.

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة: (1-6) انظر الهامش

المثالان 1, 2

$$\begin{array}{lll} y \geq -3x + 2 & (3) & y \leq -3x + 6 & (2) & y \leq 5 & (1) \\ 9x + 3y \leq 24 & & -y \leq x & & x \leq 4 & \\ y \geq -4 & & y \leq 3 & & y \geq -x & \\ f(x, y) = 2x + 14y & & f(x, y) = 8x + 4y & & f(x, y) = 5x - 2y & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y \leq 2x + 6 & (6) & -3 \leq y \leq 7 & (5) & -2 \leq y \leq 6 & (4) \\ y \geq 2x - 8 & & 4y \geq 4x - 8 & & 3y \leq 4x + 26 & \\ y \geq -2x - 18 & & 6y + 3x \leq 24 & & y \leq -2x + 2 & \\ f(x, y) = 5x - 4y & & f(x, y) = -12x + 9y & & f(x, y) = -3x - 6y & \end{array}$$

(7) ثقافة مائية: يبلغ مجموع ساعات العمل اليومي لعمال قسم الإنتاج في مصنع للغسالات 200 ساعة على الأكثر، وعمال قسم ضبط الجودة 90 ساعة على الأكثر، ويبين الجدول الآتي عدد الساعات التي يتطلبها إنتاج وضبط جودة نوعين من الغسالات.

مثال 3

الزمن اللازم لتصنيع الغسالة

قسم ضبط الجودة	قسم الإنتاج	النوع الأول	النوع الثاني
ساعتان	5 ساعات		
ساعتان	4 ساعات		

$$\begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 0 \quad (7a) \\ 5x + 4y \leq 200 \\ 2x + 2y \leq 90 \end{array}$$

(a) اكتب نظام متباينات يمثّل هذا الموقف.

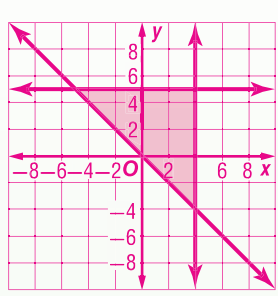
(b) مثّل نظام المتباينات بيانياً، وحدّد منطقة الحل. انظر ملحق الإجابات

(c) حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل. $(0, 0)$, $(40, 0)$, $(20, 25)$, $(0, 45)$

(d) إذا كان ربح الغسالة من النوع الأول 80 ريالاً، ومن النوع الثاني 50 ريالاً، فاكتب دالة تمثل الربح الكلي لكلا النوعين. $f(x, y) = 80x + 50y$

(e) ما عدد الغسالات التي يجب تصنيعها من كل نوع للحصول على أكبر ربح ممكن؟ وما هو هذا الربح؟ **40 من النوع الأول، صفر من النوع الثاني؛ 3200**

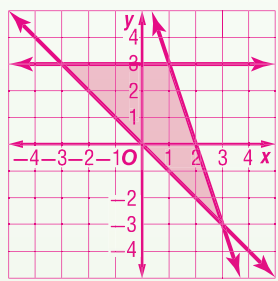
إجابات:



(1) $(4, 5)$, $(4, -4)$, $(-5, 5)$

القيمة العظمى هي 28

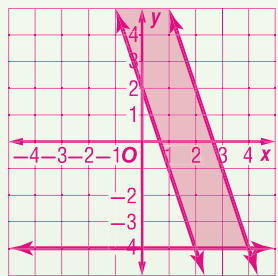
القيمة الصغرى هي -35



(2) $(1, 3)$, $(3, -3)$, $(-3, 3)$

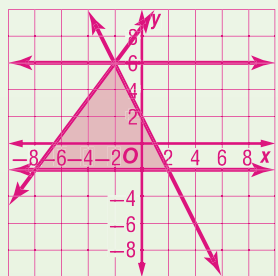
القيمة العظمى هي 20

القيمة الصغرى هي -12



(3) $(2, -4)$, $(4, -4)$ ؛ لا توجد قيمة

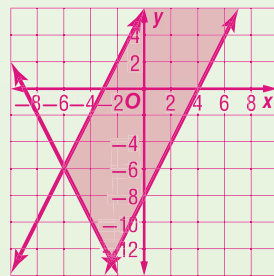
عظمى، والقيمة الصغرى هي -52



(4) $(2, -2)$, $(-8, -2)$, $(-2, 6)$

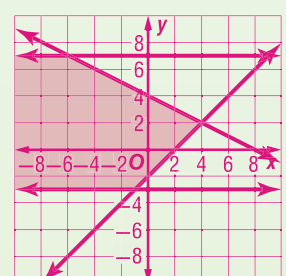
القيمة العظمى هي 36

القيمة الصغرى هي -30



(6) $(-6, -6)$, $(-2.5, -13)$

لا توجد قيمة صغرى، والقيمة العظمى هي 39.5



(5) $(4, 2)$, $(-1, -3)$, $(-6, 7)$

لا توجد قيمة عظمى، والقيمة الصغرى هي -30

تدرب وحل المسائل

مثّل كل نظام مما يأتي بيانياً، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة: (8-16) انظر ملحق الإجابات

المثالان 1, 2

$$\begin{array}{lll} x + 4y \geq 2 & (10) & 2 \geq x \geq -3 & (9) & -8 \leq y \leq -2 & (8) \\ 2x + 4y \leq 24 & & y \geq -2x - 6 & & y \leq x & \\ 2 \leq x \leq 6 & & 4y \leq 2x + 32 & & y \leq -3x + 10 & \\ f(x, y) = 6x + 7y & & f(x, y) = -4x - 9y & & f(x, y) = 5x + 14y & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y \geq |x - 2| & (13) & x \geq -8 & (12) & x \geq -6 & (11) \\ y \leq 8 & & 3x + 6y \leq 36 & & y + x \leq -1 & \\ 8y + 5x \leq 49 & & 2y + 12 \geq 3x & & 2x + 3y \geq -9 & \\ f(x, y) = -5x - 15y & & f(x, y) = 10x - 6y & & f(x, y) = -10x - 12y & \end{array}$$

الدرس 1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل 45

$$\begin{array}{lll} (14) & y \leq x + 4 & (15) & -4 \leq x \leq 8 \\ & y \geq x - 4 & & -8 \leq y \leq 6 \\ & y \leq -x + 10 & & y \geq x - 6 \\ & y \geq -x - 10 & & 4y + 7x \leq 31 \\ & f(x, y) = -10x + 9y & & f(x, y) = 12x + 8y \end{array}$$

مثال 3 (17) **صناعة:** ينتج مصنع نوعين من وحدات الإنارة؛ يباع النوع الأول بسعر 25 ريالاً، أما النوع الثاني فيباع بسعر 35 ريالاً. فإذا كانت الطاقة الإنتاجية للمصنع لا تزيد على 450 وحدة إنارة يومياً، وكان على المصنع أن ينتج ما لا يقل عن 100 وحدة إنارة من النوع الأول وما لا يزيد على 200 وحدة إنارة من النوع الثاني، فما عدد وحدات الإنارة اللازم لإنتاجها من كل نوع ليكون دخل المصنع اليومي أكبر ما يمكن؟ **انظر ملحق الإجابات**

(18) **أعمال:** يريد مدير مكتب سياحة وسفر طباعة كتيبات و نشرات دعائية. فإذا كان الكُتيب يتكون من 3 صفحات، والنشرة من صفحتين، وكانت تكلفة طباعة الكُتيب 8 ريالات، والنشرة 4 ريالات، وقرر مدير المكتب ألا يزيد عدد صفحات المطبوعات على 600 صفحة، وأن يطبع ما لا يقل عن 50 كتيباً، و 150 نشرة، فما عدد الكتيبات والنشرات المطبوعة لتكون التكلفة أقل ما يمكن؟ **انظر ملحق الإجابات**

(19) **طلاء:** إذا كان الوقت المتاح لمعاذ لطلاء ما يمكنه من 45 جداراً وسقفاً متساوون في المساحة لكلا النوعين في أحد المباني هو 20 يوماً، ويستطيع معاذ طلاء 2.5 جدار، أو سقفين في اليوم الواحد.

(a) اكتب نظام متباينات خطية يمثل هذا الموقف. $a \geq 0, b \geq 0, a + b \leq 45, 4a + 5b \leq 200$

(b) مثل نظام المتباينات بيانياً، وحدد منطقة الحل وإحداثيات رؤوسها. **انظر ملحق الإجابات**

(c) إذا كان معاذ يتقاضى 26 ريالاً عن طلاء الجدار، و 30 ريالاً عن طلاء السقف، فكتب دالة تمثل المبلغ الكلي الذي سيتقاضاه. $f(a, b) = 26a + 30b$

(d) ما عدد الجدران والأسقف التي عليه طلاؤها ليتقاضى أكبر مبلغ؟ وما هو هذا المبلغ؟ **25 جداراً، 20 سقفاً، 1250 ريالاً**

(20) **شحن:** يشحن مزارع منتجاته بالتعاون مع شركة شحن مختصة، وذلك في حاويات مبردة تبلغ حمولة الواحدة منها 4200 kg، وحجم الحيز الذي توضع فيه البضائع بداخلها 480 ft^3 ، وتوضع المنتجات في أثناء الشحن في صناديق بمقاسين؛ صغيرة حجمها 3 ft^3 وتزن 25 kg، وكبيرة حجمها 5 ft^3 وتزن 50 kg، وأجرة شركة الشحن هي 5 ريالات عن كل صندوق من المقاس الصغير، و 8 ريالات عن كل صندوق من المقاس الكبير. **انظر ملحق الإجابات**

(a) جد عدد الصناديق المشحونة من كلا النوعين لتكون الأجرة أكبر ما يمكن.

(b) ما أكبر أجرة ممكنة لحاوية الشحن؟

(21) **إعادة التدوير:** يقوم مصنع بإعادة تدوير ما لا يزيد على 1200 طن من البلاستيك شهرياً لصنع حاويات بمقاسين صغير وكبير، وعلى المصنع أن يستعمل ما لا يقل عن 300 طن في صنع الحاويات الصغيرة وما لا يقل عن 450 طناً في صنع الحاويات الكبيرة. إذا كان المصنع يحقق ربحاً قدره 175 ريالاً لكل طن بلاستيك تم استعماله لصنع الحاويات الصغيرة، و 200 ريال لكل طن تم استعماله لصنع الحاويات الكبيرة. فما أكبر ربح يمكن تحقيقه؟ وما عدد الأطنان المستعملة لكل نوع من الحاويات لتحقيق ذلك الربح؟ **انظر ملحق الإجابات**



إعادة تدوير البلاستيك

الربط مع الحياة

تدوير المواد يحمي الإنسان، ويقلل الاستهلاك، ويرشد الطاقة، ويقي البيئة من المخلفات والانبعاثات الضارة.

إرشادات للمعلم الجديد

إرشادات لحل المسألة ذكر الطلاب بأن القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لا تقعان دائماً عند النقاط التي تكون إحداثياتها أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن؛ لأن القيمتين تعتمدان على الدالة $f(x, y)$.

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
8-18 ، 24-33	دون المتوسط
9-17 فردي ، 19-22 ، 24-33	ضمن المتوسط
19-33	فوق المتوسط

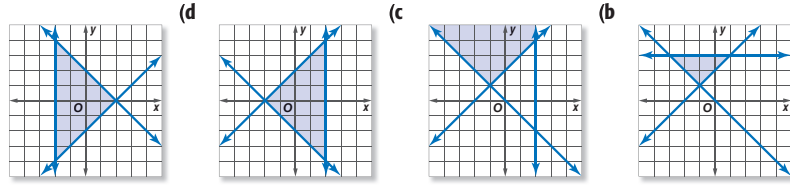
مسائل مهارات التفكير العليا

(22) **مسألة مفتوحة:** اكتب نظام متباينات خطية على أن تكون منطقة الحل محدودة وتقع في الربع الرابع فقط ومساحتها 20 وحدة مربعة. **إجابة ممكنة:** $4 \leq x \leq 9, -2 \geq y \geq -6$

(23) **تحدي:** جد مساحة المنطقة المحدودة بالمتباينات: $y \geq |x| - 3, y \leq -|x| + 3, x \geq |y|$.

4.5 وحدة مربعة

(24) حدد نظام المتباينات المختلف عن الأنظمة الثلاثة الأخرى فيما يأتي، وضح إجابتك.



(24) منطقة الحل في الشكل b غير مغلقة، أما في الأشكال الثلاثة الأخرى فهي مغلقة.

(25) **إجابة ممكنة:** صحيحة دائماً؛ إذا وجدت قيمة صغيرة في منطقة غير مغلقة فلا يمكن أن يوجد فيها قيمة عظمى؛ لأنه يمكن إيجاد قيمة أكبر من القيمة المقترحة.

(25) **تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أحياناً أو صحيحة دائماً أو غير صحيحة أبداً. وضح إجابتك.

"المنطقة غير المحدودة لا يكون لها قيمة عظمى وقيمة صغيرة في الوقت نفسه"

4 تقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدتهم الدرس السابق على فهم موضوع درس اليوم.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس 1-6 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (12)

تدريب على اختبار

(27) **هندسة:** أي مما يأتي يُعد وصفًا مناسبًا للتمثيل البياني

للمعادلتين $4y = 12x + 16, y = 3x - 5$ ؟ **D**

A مستقيمان لهما المقطع y نفسه.

B مستقيمان متعامدان.

C مستقيمان لهما المقطع x نفسه.

D مستقيمان متوازيان.

(26) حصل عامل على مبلغ 1950 ريالاً أجرة تلبيط مساحة من

الأرضيات والجدران في أحد البيوت، فإذا كانت أجرة تلبيط

المتري المربع من الأرضيات 12 ريالاً، وأجرة تلبيط المتري

المربع من الجدران 15 ريالاً وكان عدد أمتار بلاط الأرضيات

يقبل عن 3 أمثال عدد أمتار بلاط الجدران بـ $16m^2$ ، فأأي أنظمة

المعادلات الآتية تمثل هذا الموقف؟ **B**

$12x + 15y = 1950$ **B** $x + y = 1950$ **A**

$x + 16 = 3y$ $3x = y$

$x - y = 1950$ **D** $2x + 3y = 15$ **C**

$12x + 15y = 3$ $x + y = 12$

مراجعة تراكمية

حل كل نظام من متباينتين مما يأتي بياناً: (الدرس 1-5) (28-30) انظر ملحق الإجابات.

$$3y \leq 2x - 8 \quad (30)$$

$$y \geq \frac{2}{3}x - 1$$

$$I, R \sqrt{3} \quad (33)$$

$$4x - 3y < 7 \quad (29)$$

$$2y - x < -6$$

$$Q, R -\frac{1}{3} \quad (32)$$

$$3x + 2y \geq 6 \quad (28)$$

$$4x - y \geq 2$$

$$Z, Q, R -7 \quad (31)$$

حدّد مجموعة الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد فيما يأتي: (الدرس 1-1)

الدرس 1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل 47

ضمن شوق

تنويع التعليم

توسع تعتبر البرمجة الخطية وسيلة فعالة للتعرف على طرق إدارة العمل. اطلب إلى طلابك إنشاء مشاريع أعمال مثل التي وردت في الأمثلة والتمارين، بحيث يقومون بتحديد التكاليف والأرباح المتوقعة وتحليل المعلومات للوصول إلى أكبر ربح، ولزيادة حماسهم دعهم يختاروا نوع العمل الذي يفضلونه، وأن يستعملوا الإنترنت مصدرًا لمعلوماتهم.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 1

دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31) تدريبات إعادة التعليم - تمة (32) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-6 تدريبات إعادة التعليم
البرمجة الخطية والحل الأمثل

العمل الأمثل: عند حل أسئلة البرمجة الخطية استعمل الإجراءات الآتية:
 (1) حدّد المتغيرات.
 (2) اكتب نظامًا من المتباينات الخطية بمثل المسألة.
 (3) مثل هذا النظام بيانيًا.
 (4) أوجد إحداثيات رؤوس المضلع الناتج (منطقة الحل).
 (5) اكتب الدالة التي تريد إيجاد القيمة العظمى أو القليلة الصغرى لها.
 (6) عوّض إحداثيات الرؤوس في هذه الدالة.
 (7) اختر القيمة العظمى أو القليلة الصغرى لما هو مطلوب في المسألة.

مثال: لدى أحمد الصّافين 32 وحدة صيفة من اللون الأصفر، و54 وحدة صيفة من اللون الأخضر. ويريد هذا الصباغ أن يبيع أكبر عدد ممكن من العلب من اللونين A و B. إذا كانت كل علب من اللون A تحتاج 4 وحدات من الصبغة الصفراء ووحدة واحدة من الصبغة الخضراء، وكل علب من اللون B تحتاج وحدة واحدة من الصبغة الصفراء و6 وحدات من الصبغة الخضراء. فأوجد أكبر عدد يمكن من العلب التي يمكن إنتاجها.

الحل: 1- حدد المتغيرات:
 عدد العلب من اللون A، x ، و عدد العلب من اللون B، y .
 2- اكتب نظامًا من المتباينات الخطية: بما أن عدد العلب لا يمكن أن يكون سالبًا، فإن $x \geq 0$ و $y \geq 0$. وبما أن هناك 32 وحدة من اللون الأصفر والون A يحتاج إلى 4 وحدات، والون B يحتاج إلى وحدة واحدة، فإن:
 $4x + y \leq 32$
 وبما أن هناك 54 وحدة من الصبغة الخضراء، فإن:
 $x + 6y \leq 54$
 الخطتان 1، 2: مثل نظام المتباينات بيانيًا. وحدد رؤوس منطقة الحل.
 الرؤوس هي: $(0,0)$ و $(6,8)$ و $(8,0)$
 الخطتان 3، 4: مثل نظام المتباينات بيانيًا. وحدد رؤوس منطقة الحل.
 الخطتان 5-7: أوجد أكبر عدد يمكن من العلب $x+y$. أكبر عدد من العلب يمكنك صنعه 14 علب: 6 علب من اللون A و 8 علب من اللون B.

تارين: 1. مطعم: لدى أحد المطاعم 12 كيلوجرامًا من البهارات غير الحارة و 10 كيلوجرامات من البهارات الحارة. ويريد صاحب المطعم جعل نوعين جديدين من البهارات، على أن يحتوي الكيلوجرام من النوع الأول (A) على 3 كيلوجرام بهارات غير حارة و 1 كيلوجرام بهارات حارة، أما النوع الثاني (B) فيحتوي على 1 كيلوجرام من البهارات غير الحارة، و 1 كيلوجرام من البهارات الحارة. أوجد أكبر عدد يمكن من الكيلوجرامات يمكن إنتاجه من كل من النوعين A و B. 4 كيلوجرامات من النوع A و 18 كيلوجرامات من النوع B.

2. صناعة: يوجد في أحد المصانع جهازان لإنتاج الحلوى. يُنتج الجهاز الأول (A) 30 قلمة من الحلوى في الساعة بتكلفة 8 ريالاً، والجهاز الثاني (B) ينتج 40 قلمة في الساعة بتكلفة 12 ريالاً للساعة الواحدة. يمكن استعمال الجهاز A لوحده أو B لوحده أو كليهما معًا لإنتاج الحلوى. ما أقل عدد من الساعات يحتاجها المصنع لإنتاج 380 قلمة من الحلوى، على الأتريد التكلفة من 108 ريالاً؟
 6 ساعات؛ يعمل الجهاز A مدة 6 ساعات والجهاز B مدة 5 ساعات ضمن ساعات عمل الجهاز A.

الفصل 1: الدوال والمتباينات

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-6 تدريبات إعادة التعليم
البرمجة الخطية والحل الأمثل

القيم العظمى والقيم الصغرى: عندما يكون نظام من المتباينات الخطية منطقة مغلقة محدودة، فإن القيم العظمى أو الصغرى لدالة مرتبطة بها يمكن إيجادها عند رؤوس المضلع.

مثال: مثل نظام المتباينات الخطية الآتية بيانيًا، وحدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل. ثم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة: $f(x,y) = 3x + 2y$

حل:
 $y \leq 4$
 $y \leq -x + 6$
 $y \geq \frac{3}{2}$
 $y \geq \frac{3}{2}$
 $y \leq 4$

أولاً، مثل المتباينات بيانيًا، ثم أوجد رؤوس منطقة الحل. المضلع الناتج هو شكل رباعي رؤوسه هي:
 $(-1, -2)$ ، $(0, 4)$ ، $(2, 4)$ ، $(4, 5)$
 استعمل الجدول الآتي لإيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة: $f(x,y) = 3x + 2y$

(x,y)	3x+2y	f(x,y)
(0,4)	3(0)+2(4)	8
(2,4)	3(2)+2(4)	14
(5,1)	3(5)+2(1)	17
(-1,-2)	3(-1)+2(-2)	-7

القيمة العظمى هي 17 عند النقطة $(5, 1)$ ، والقيمة الصغرى هي -7 عند النقطة $(-1, -2)$.

تارين: مثل كل من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًا. وحدد رؤوس المضلع الذي يمثل منطقة الحل. ثم أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة.

1) $y \geq 2$
 $1 \leq x \leq 5$
 $y \leq x + 3$
 $f(x,y) = 3x - 2y$

2) $y \geq -2$
 $y \geq 2x - 4$
 $x - 2y = -1$
 $f(x,y) = 4x - y$

3) $x + y \geq 2$
 $4y \leq x + 8$
 $y \geq 2x - 5$
 $f(x,y) = 4x + 3y$

الفصل 1: الدوال والمتباينات

تدريبات المهارات (33) تدريبات حل المسألة (34) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-6 تدريبات حل المسألة
البرمجة الخطية والحل الأمثل

1. مناطق: تُحدّد منطقة على الخريطة عن طريق المتباينات $x > -3$ و $y < -3$ و $x - y > -3$.
 قبل هذه المنطقة محدودة أم لا؟ قسّر ذلك.
 المنطقة غير محدودة (متوجه). والنقطة (m,n) تقع في المنطقة لجميع قيم m الموجبة.

2. صناعة: يعمل ثابون عمالًا في جميع الطاولات والكراسي. ويتطلب العمل 5 عمال لتجميع الطاولة و3 عمال لتجميع الكرسي. ويصنع العمال عددًا من الطاولات يساوي عدد الكرسي على الأقل دائمًا. إذا كانت x تمثل عدد الطاولات، و y تمثل عدد الكرسي، ونظام المتباينات الذي يمثل ما يمكنهم تجميعه هو:
 $x > 0$ و $y > 0$ و $5x + 3y \leq 80$ و $y \leq 5x + 3$. ما أكبر عدد من الكرسي والطاولات يستطيع العمال صنعه؟
 10 كراسي و 10 طاولات.

3. أسماك: عرض أسماك حبيبة 7000 بوزنة مكعبة. ويريد عبدالله أن يربي في الأحواض نوعين من السمك، وهما السمكة الذهبية وسمكة السلور. ويصنع بتوفير 170 بوزنة مكعبة لكل سمكة ذهبية، و 700 بوزنة مكعبة لكل سمكة سلور. ويرغب عبدالله في تربية سمكة سلور واحدة على الأقل مقابل كل 4 سمكات ذهبية. اقترح أن x تمثل عدد الأسماك الذهبية و y تمثل عدد أسماك السلور. والمتباينات الآتية تكون منطقة الحل لهذا الوضع:
 $x > 0$ و $y > 0$ و $4x \geq 7000 + 170y$ و $170x + 700y \leq 7000$
 ما هو أكبر عدد من الأسماك يمكن أن يضعه عبدالله في الأحواض؟
 5 سمكات و 20 سمكة ذهبية

الفصل 1: الدوال والمتباينات

الاسم: _____ التاريخ: _____

1-6 تدريبات المهارات
البرمجة الخطية والحل الأمثل

مثل كل من أنظمة المتباينات الآتية بيانيًا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة.

1) $x \geq 2$
 $x \leq 5$
 $y \geq 1$
 $f(x,y) = x + y$

2) $x \geq 1$
 $y \leq 6$
 $y \geq x - 2$
 $f(x,y) = x - y$

3) $x \geq 0$
 $y \geq 0$
 $y \leq 7 - x$
 $f(x,y) = 3x + y$

4) $x \leq -1$
 $x + y \leq 6$
 $f(x,y) = x + 2y$

5) $y \leq 2x$
 $y \geq 6 - x$
 $y \leq 6$
 $f(x,y) = 4x + 3y$

6) $y \geq -x - 2$
 $y \geq 3x + 2$
 $y \leq x + 4$
 $f(x,y) = -3x + 5y$

7) صناعة: يبيع أحد المصانع إطارات داخلية وإطارات خارجية. اقترح أن x تمثل عدد الإطارات الداخلية المصنّعة في الساعة الواحدة، وأن y تمثل عدد الإطارات الخارجية المصنّعة في الساعة الواحدة. إن المتباينات:
 $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ ، $2x + y \leq 16$ ، $x + 3y \leq 18$ تمثل القيود على إنتاج القيد من الإطارات. استعمل دالة الربح $f(x,y) = 50x + 80y$ والقيد المحدد أعني ربحه أقصى ربح ممكن. **620 ريالاً**

الفصل 1: الدوال والمتباينات



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 1

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

فوق ضمن دون

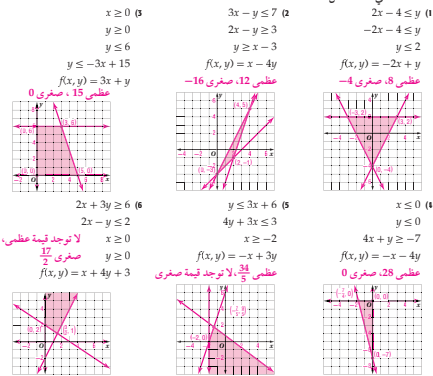
كتاب التمارين (9)

ضمن فوق

التدريبات الإثرائية (35)

1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل

مثل كل نظام متباينات مما يأتي بيانياً، ثم حدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة المستطاة في منطقة الحل:



7 زخرفة: تستطيع نجلاء زخرفة نوعين من الزهوريات الخفيفة، حيث يمكنها زخرفة 8 زهوريات من النوع الأول أو زهرتين من النوع الثاني في الساعة الواحدة، وقد طلب إليها زخرفة 40 زهرة على الأقل في زمن لا يزيد على 8 ساعات.

8 إذا كانت s تمثل عدد ساعات زخرفة زهوريات النوع الأول، و e تمثل عدد ساعات زخرفة زهوريات النوع الثاني، فاكتب نظام متباينات يمثل الموقف ويتضمن الزمن اللازم لزخرفة كل نوع من الزهوريات.

9 إذا كانت أجرة تجارة هي 30 ريالاً عن ساعة العمل في زخرفة النوع الأول، و 35 ريالاً عن ساعة العمل في زخرفة النوع الثاني، فاكتب دالة تين الأجرة الكلية التي تحصل عليها مقابل زخرفة الزهوريات جميعها. $f(x, e) = 30x + 35e$

10 أوجد عدد ساعات العمل في كل نوع لتحصل نجلاء على أكبر أجر ممكن، ثم أوجد مقدار هذا الأجر. 4 ساعات لكل نوع، 200 ريالاً

9

1-6 التدرجات الإثرائية

تحليل الحساسية (الدقة)

يحتوي نموذج البرمجة الخطية على معاملات هدف محدد. فمثل سبيل المثال، إذا وجدت قيم نموذج ما من خلال المعادلة $2x+3y=5$ فإن معاملات الهدف هي $\{2, 3\}$. ماذا لو كانت هذه المعاملات هي $\{2.1, 2.9\}$ أو $\{2.5, 3.1\}$ ؟ كيف ستؤثر هذه التغييرات في قيم الحل الأمثل للبرمجة الخطية؟ هذا النوع من التحقق يدعى **تحليل الحساسية (الدقة)**. عموماً، دوال الهدف في مسائل البرمجة الخطية يتغيرين بشكل كاتناها كما يلي: إيجاد القيم العظمى أو الصغرى لدالة الهدف: $Ax + By = C$ وتكون خاصية لعدد من معاملات المتغير في المعاملات A و B قد يتغير ميل الخط. وهذا النوع في الحل قد يؤدي إلى تغير في الحل الأمثل (تذكر أن الحل الأمثل يكون عند إحدى رؤوس منطقة الحل). هناك مدى لقيم الميل الناتجة عن هذا التغير، لذا فإن هناك مدى لتغيير قيم A و B التي تبقى على الحل الأمثل (انظر الرسم).

1 أوجد ميل $Ax + By = C$ ، ولاحظ كيف يمكن أن يُجدت التغيير في المعاملات A و B تغييراً في ميل المستقيم.

$$m = -\frac{A}{B}$$

ادرس مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$C = 2x + 3y$$

$$3x + y \leq 21$$

$$x + y \leq 9$$

$$y \leq x$$

$$y \leq 4$$

(x,y)	(0,0)	(4,4)	(5,4)	(6,3)	(7,0)
C	0	20	22	21	14

بعد إيجاد النقاطات وتقدير قيمة معاملة الهدف، نجد أن القيمة العظمى تقع عند $(5, 4)$. إذا عُزرت معاملات الهدف من 2 إلى 3 و A و B في $Ax + By = C$ ، ما دام الميل بين ميل $x + y \leq 9$ وميل $3x + y \leq 21$ ، وإذا لم يكن كذلك، فإن الحل الأمثل سيكون عند $(4, 4)$ أو $(6, 3)$.

2 عبر عن العلاقة: ميل دالة الهدف يقع بين ميل المستقيم $x+y=9$ وميل المستقيم $3x+y=21$ بطريقة جبرية.

$$-3 \leq m \leq -1$$

الفصل 1، الدوال والتباينات

35

الصف الثاني الثانوي

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 1-9، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعاً ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (14).

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلاب الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي وهي: الكلمات المتقاطعة، الحروف المبعثرة، البحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، البحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلاب من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

خصائص الأعداد الحقيقية (الدرس 1-1)

تقسم مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعتين، هما: مجموعة الأعداد النسبية (Q)، ومجموعة الأعداد غير النسبية (I). أما مجموعة الأعداد النسبية فتحتوي: مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)، ومجموعة الأعداد الكليية (W)، ومجموعة الأعداد الطبيعية (N).

العلاقات والدوال (الدرس 1-2)

الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

دوال خاصة (الدرس 1-3)

الدالة المتعددة التعريف: هي الدالة التي تكتب باستعمال أكثر من عبارة.

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً (الدرس 1-4)

يمكنك تمثيل المتباينة باتباع الخطوات الآتية:
الخطوة 1 حدد إذا كان حد المتباينة متقطعاً أو متصلًا.
الخطوة 2 اختر نقطة لا تقع على حد المتباينة واختبرها إن كانت تحقق المتباينة أم لا.
الخطوة 3 إذا كانت النقطة تحقق المتباينة، فظلّل المنطقة التي تحتوي على النقطة. وإلا فظلّل المنطقة الأخرى.

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً (الدرس 1-5)

يمكن إيجاد حل نظام متباينات خطية عن طريق تمثيل المتباينات بيانياً وإيجاد منطقة الحل.

البرمجة الخطية والحل الأمثل (الدرس 1-6)

إيجاد القيمة الصغرى أو العظمى لدالة في منطقة على المستوى الإحداثي يحددها نظام متباينات يمثل قيوداً على الدالة.
إيجاد الحل الأمثل يعني إيجاد السعر أو الكمية التي تجعل الربح أكبر ما يمكن، أو التكلفة أقل ما يمكن.

المطويات

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات

الأعداد الحقيقية (10)	الدالة المتعددة التعريف (24)
الأعداد النسبية (10)	الخطية (24)
الأعداد غير النسبية (10)	الدالة الدرجية (24)
الأعداد الصحيحة (10)	دالة أكبر عدد صحيح (24)
الأعداد الكليية (10)	دالة القيمة المطلقة (25)
الدالة المتباينة (16)	المتباينة الخطية (30)
العلاقة المنفصلة (17)	الحد (30)
العلاقة المتصلة (17)	نظام المتباينات الخطية (35)
اختبار الخط الرأسي (17)	منطقة الحل (35)
المتغير المستقل (19)	القيود (42)
المتغير التابع (19)	البرمجة الخطية (42)
رمز الدالة (19)	المحدودة (42)
الدالة المتعددة التعريف (23)	غير المحدودة (42)
	الحل الأمثل (44)

اختبار المفردات

حدد إذا كانت كل من العبارتين صحيحة أم خاطئة؟

(1) $\sqrt{12}$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية. خطأ؛ غير النسبية

(2) تحتوي مجموعة الأعداد النسبية على الكسور العشرية المنتهية والدورية. صائبة

اختر المصطلح المناسب لإكمال كل جملة فيما يأتي:

(3) تكون الدالة (منفصلة، متباينة) إذا كان كل عنصر في المجال مرتبطاً بعنصر واحد فقط في المدى، على أن لا يكون لأكثر من عنصر في المجال الصورة نفسها.

(4) (مجال، مدى) العلاقة هو مجموعة الإحداثيات السينية للأزواج المرتبة التي تكوّن العلاقة.

(5) الدالة (الثابتة، المحايدة) هي الدالة الخطية $f(x) = x$.

(6) تُسمى الدالة التي تكتب باستعمال تعبيرين أو أكثر دالة (خطية، متعددة التعريف).

أكمل كل جملة فيما يأتي بالمصطلح المناسب:

(7) هي طريقة لإيجاد القيمة الصغرى أو العظمى

لدالة تحت شروط معينة يُعبّر عنها بنظام من المتباينات. البرمجة الخطية

(8) إيجاد _____ يعني إيجاد السعر الأفضل أو التكلفة

الأنسب باستعمال البرمجة الخطية. الحل الأمثل

(9) تُسمى منطقة الحل المفتوحة _____ غير المحدودة

منظم أفكار

المطويات

وبين لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعداداً لاختبار الفصل.

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 1 ص (8)، وناقشهم حول تغيير إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عما كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

- 17** المجال = {1, 3, 5, 7}، المدى = {2, 4, 6, 8}؛ دالة متباينة.
- 18** المجال = {-3, 0, 2, 4, 5}، المدى = {0, 2, 4, 5}؛ دالة، غير متباينة.
- 19** المجال = {-4, -2, 1, 3}، المدى = {-4, 1, 3, 5}؛ ليست دالة.
- 20** المجال = {-1, 1, 3, 5, 7}، المدى = {-4, -2, 0, 2, 4}؛ دالة، متباينة.

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية (الصفحات: 10-15)

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها كل عدد مما يأتي :
Q, R $-\frac{3}{4}$ **(12)** $\sqrt{4}$ **(11)** **Q, R** 1.3 **(10)**
N, W, Z, Q, R
 بسّط كل عبارة مما يأتي :

13 $11x + 2y$ $4x - 3y + 7x + 5y$

14 $-2a + 8b + 6$ $2(a + 3) - 4a + 8b$

15 $5m + 41n$ $4(2m + 5n) - 3(m - 7n)$

16 **ما:** اشترى سعد 3 شطائر بسعر 3.5 ريالاً للشطيرة الواحدة، و 3 علب عصير بسعر 2.5 ريالاً للعلبة الواحدة.

a استعمل خاصية التوزيع لتكتب تعبيرين يمثل كل منهما المبلغ الذي دفعه سعد. $3(3.5) + 3(2.5)$ أو $3(3.5 + 2.5)$

b أوجد المبلغ الذي دفعه سعد باستعمال خاصية التوزيع. **18 ريالاً**

مثال 1

حدّد مجموعات الأعداد التي ينتمي إليها العدد $\sqrt{50}$.

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ مجموعة الأعداد غير النسبية (I)، ومجموعة الأعداد الحقيقية (R)

مثال 2

بسّط التعبير: $-4(a + 3b) + 5b$

العبارة الأصلية	$-4(a + 3b) + 5b$
خاصية التوزيع	$= -4(a) + -4(3b) + 5b$
بالضرب.	$= -4a - 12b + 5b$
بالتبسيط.	$= -4a - 7b$

1-2 العلاقات والدوال (الصفحات: 16-21)

مثال 3

حدد مجال العلاقة

{(2, 6), (3, -1), (-2, 4), (-1, 0), (-4, 3)} ومداهها. ثم حدد إن كانت تمثل دالة أم لا. وهل هي متباينة أم لا؟

المجال: {-4, -1, -2, 3, 2}

المدى: {3, 0, 4, -1, 6}

كل عنصر في المجال مرتبط بعنصر واحد فقط في المدى، مما يعني أن العلاقة تمثل دالة. العناصر المختلفة في المجال لها صور مختلفة في المدى، إذاً الدالة متباينة.

مثال 4

إذا كانت $f(x) = 4x - 3$ ، فأوجد $f(-2)$.

عوض عن x بـ -2.	$f(-2) = 4(-2) - 3$
بالضرب.	$= -8 - 3$
بالتبسيط.	$= -11$

حدد مجال ومدى كل علاقة فيما يأتي، ثم حدد إذا كانت تمثل دالة أم لا، وهل هي متباينة أم لا؟ **(17-20) انظر الهامش.**

17 $\{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$

18 $\{(-3, 0), (0, 2), (2, 4), (4, 5), (5, 2)\}$

19 $\{(-4, 1), (3, 3), (1, 1), (-2, 5), (3, -4)\}$

20 $\{(7, -4), (5, -2), (3, 0), (1, 2), (-1, 4)\}$

إذا كانت $f(x) = -3x + 2$ ، أوجد قيمة كل مما يأتي:

21 $f(4) = -10$

23 $f(0) = 2$

25 $f(-a) = 3a + 2$

22 $f(-3) = 11$

24 $f(y) = -3y + 2$

26 $f(2w) = -6w + 2$

27 **مناسبات:** تتقاضى مؤسسة لتجهيز المناسبات 25 ريالاً

عن توصيل اللوازم لمكان المناسبة، و 4 ريالاً أجره يومية

عن كل كرسي. ويمكن تمثيل ما تتقاضاه هذه المؤسسة عند

استئجار x كرسيًا بالمعادلة:

$y = 25 + 4x$ أوجد مجال هذه المعادلة ومداهها، ثم حدد إذا

كانت المعادلة دالة أم لا، وهل هي متصلة أم منفصلة؟

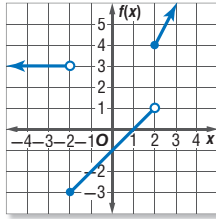
المجال = مجموعة الأعداد الطبيعية، المدى = {29, 33, 37, 41, ...} منفصلة

1-3

دوال خاصة (الصفحات: 23-28)

مثال 5

اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:



دالة الجزء الأيسر من التمثيل البياني هي $f(x) = 3$. الدائرة غير المظللة عند النقطة $(-2, 3)$ ، تعني أن الدالة الخطية معرّفة عندما $x < -2$.

دالة الجزء الأوسط من التمثيل البياني هي $f(x) = x - 1$. وتعني كل من الدائرة المظللة عند النقطة $(-2, 3)$ والدائرة غير المظللة عند النقطة $(2, 1)$ ، أن الدالة معرّفة عندما $-2 \leq x < 2$.

دالة الجزء الأيمن من التمثيل البياني هي $f(x) = 2x$. والدائرة المظللة عند النقطة $(2, 4)$ ، تعني أن الدالة معرّفة عندما $x \geq 2$.

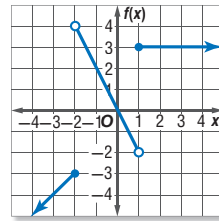
$$f(x) = \begin{cases} 3, & x < -2 \\ x - 1, & -2 \leq x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

مثل كل دالة فيما يأتي بيانيًا، ثم حدد مجالها ومداهما: (28-29) انظر الهامش.

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -1 \\ x + 1, & -1 < x < 3 \\ x, & x \geq 3 \end{cases} \quad (28)$$

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x < -1 \\ 4x - 3, & -1 \leq x \leq 3 \\ x, & x > 3 \end{cases} \quad (29)$$

(30) اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:

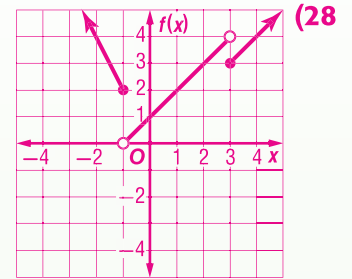


مثل كل دالة فيما يأتي بيانيًا، ثم حدد مجالها ومداهما:

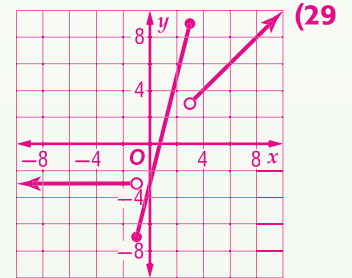
$$f(x) = \lfloor x \rfloor + 2 \quad (31)$$

$$f(x) = \lfloor x + 3 \rfloor \quad (32)$$

إجابات :

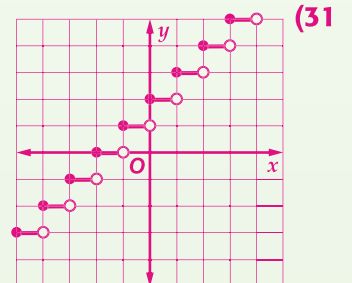


المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية،
المدى: $\{f(x) \mid f(x) > 0\}$

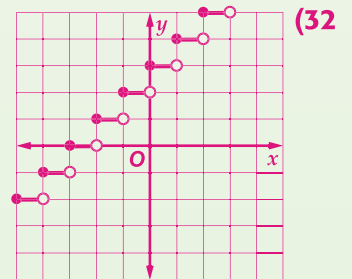


المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: $\{f(x) \mid f(x) \geq -7\}$

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq -2 \\ -2x, & -2 < x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases} \quad (30)$$

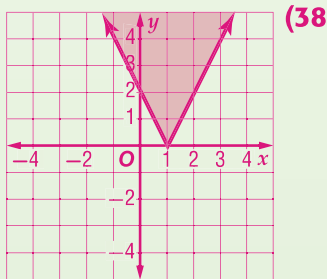
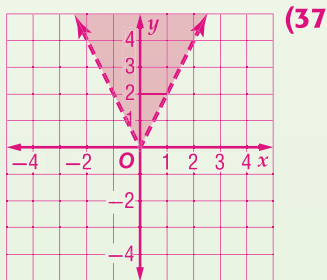
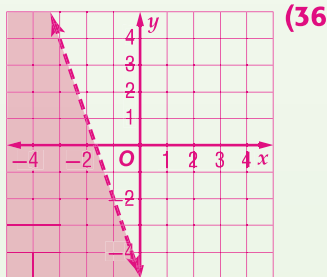
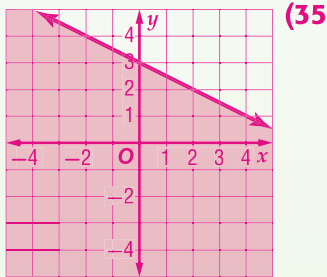
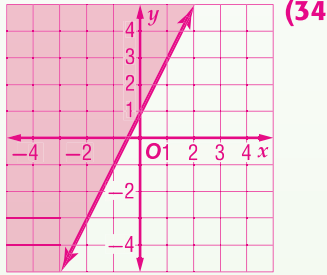
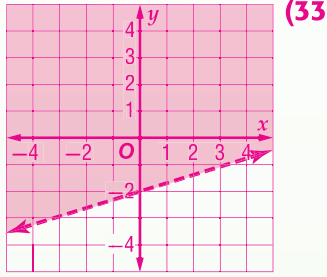


المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية.
المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة.



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية.
المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة.

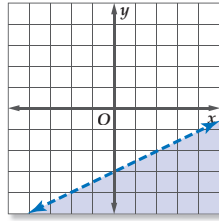
إجابات:



مثال 6

مثل المتباينة $x - 2y > 6$ بيانياً.

بما أن المتباينة تحتوي على إشارة $>$ ، فإن حد المتباينة يكون متقطعاً، مثل بيانياً المعادلة المرافقة $x - 2y = 6$.



اختبر النقطة

$$x - 2y > 6, (0, 0)$$

$$x - 2y > 6$$

$$0 - 2(0) > 6$$

$$x > 0 > 6$$

مثل كل متباينة فيما يأتي بيانياً: (33-40) انظر الهامش.

(34) $y \geq 2x + 1$ (33) $x - 3y < 6$

(36) $y > -3x - 5$ (35) $2x + 4y \leq 12$

(38) $y \geq |2x - 2|$ (37) $y > |2x|$

(40) $2y \leq |x - 3|$ (39) $y + 3 < |x + 1|$

(41) **شراء:** وفر بندر 46 ريالاً لشراء مجموعة من الدفاتر، والأقراص المدمجة، فإذا كان سعر الدفتر الواحد 4 ريالات، وسعر القرص المدمج 3 ريالات، اكتب متباينة تمثل عدد الدفاتر والأقراص المدمجة التي يمكن شراؤها، ثم مثلها بيانياً. $4x + 3y \leq 46$

حل كل نظام مما يأتي بيانياً:

(43) $|y| > 2$ (42) $y < 2x - 3$

$x > 3$ $y \geq 4$

(45) $y > x + 1$ (44) $y \geq x + 3$

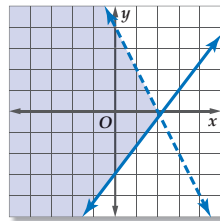
$x < -2$ $2y \leq x - 5$

حل نظام المتباينات الآتي بيانياً:

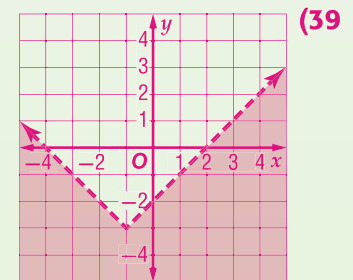
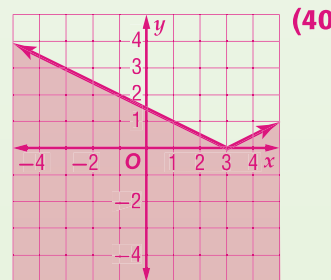
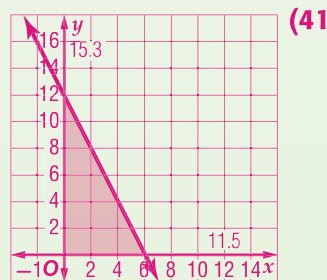
$$y \geq \frac{3}{2}x - 3$$

$$y < 4 - 2x$$

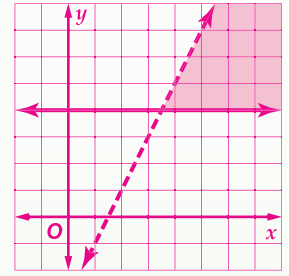
منطقة الحل هي المنطقة التي كل نقطة من نقاطها تحقق كلتا المتباينتين، وهي المنطقة المظللة في الشكل أدناه.



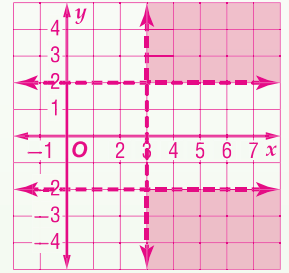
(46) **مجوهرات:** أمضى صانع مجوهرات ما لا يزيد على 3 ساعات في صياغة الخواتم. فإذا كان الزمن الذي يتطلبه تجهيز المعدات 15 دقيقة، والزمن الذي يتطلبه صياغة الخاتم الواحد 25 دقيقة، فاكتب نظام متباينات يصف الموقف، ومثله بيانياً. (42-46) انظر الهامش.



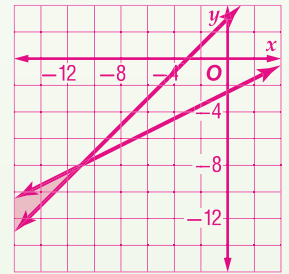
إجابات:



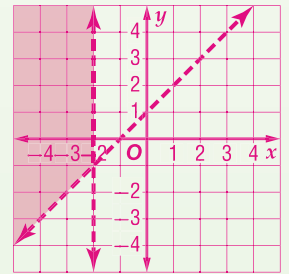
(42)



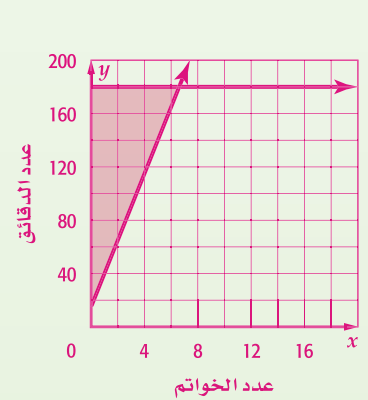
(43)



(44)



(45)



(46)

$$x \geq 0, y \leq 180$$

$$y \geq 25x + 15$$

1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل (الصفحات: 42-47)

مثال 8

يزرع فيصل ما لا يزيد على 300 شتلة من نوعين من الأشجار في مزرعته التي مساحتها 5184 m^2 ، حيث تحتاج الشجرة الواحدة من النوع (A) إلى مساحة 6 m^2 ، ومن النوع (B) إلى 24 m^2 ، وذلك لتوفير مسافة كافية بين الأشجار. إذا كان سعر الشتلة الواحدة من النوع (A) 8 ريالات، وسعر الشتلة الواحدة من النوع (B) 12 ريالاً. فما عدد الشتلات من كل نوع الذي يجعل التكلفة أكبر ما يمكن؟

افرض أن x هي عدد الشتلات من النوع (A)، و y هي عدد الشتلات من النوع (B).

$$x \geq 0, y \geq 0$$

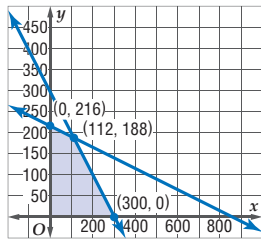
$$6x + 24y \leq 5184$$

$$x + y \leq 300$$

مثل المتباينات بيانياً، ولاحظ أن النقاط $(0, 0)$ ، $(300, 0)$ ، $(0, 216)$ ، $(112, 188)$ تمثل رؤوس منطقة الحل.

دالة التكلفة هي: $f(x, y) = 8x + 12y$.

القيمة 3152 ريالاً هي القيمة العظمى للتكلفة وتحصل عند النقطة $(112, 188)$. ولذلك إذا زرع فيصل 112 شتلة من النوع (A)، و 188 شتلة من النوع (B) فإن التكلفة تكون أكبر ما يمكن.



(47) تنسيق أزهار: يعمل جميل منسقاً للأزهار، ويقوم بتنسيق

نوعين من باقات الأزهار. يحتاج النوع الأول منها إلى 18 دقيقة، والنوع الثاني إلى 10 دقائق. ولا يزيد عدد الباقات التي ينتجها أسبوعياً من النوع الثاني عن ضعف عدد باقات النوع الأول. فإذا كان جميل يعمل مدة لا تزيد على 40 ساعة أسبوعياً وكان ربحه في تنسيق الباقة من النوع الأول 10 ريالات، ومن النوع الثاني 25 ريالاً. فحدد عدد الباقات التي يجب عليه تنسيقها من كل نوع أسبوعياً ليحصل على أكبر ربح.

63 من النوع الأول و 126 باقة من النوع الثاني

(48) صناعة: ينتج مصنع نوعين من الأحذية على مرحلتين،

ويحتاج الحذاء من النوع الأول إلى ساعتين في المرحلة الأولى وساعة واحدة في المرحلة الثانية، ويحقق ربحاً قدره 20 ريالاً. أما الحذاء من النوع الثاني فيحتاج إلى ساعة واحدة في المرحلة الأولى و 3 ساعات في المرحلة الثانية ويحقق ربحاً قدره 15 ريالاً. فإذا كان مجموع ساعات العمل اليومي لموظفي المرحلة الأولى لا يزيد على 40 ساعة ولا يزيد على 60 ساعة لموظفي المرحلة الثانية، فما أكبر ربح يمكن أن تحققه الشركة يومياً؟ وما عدد الأحذية من كل نوع الذي يحقق هذا الربح؟

480 ريالاً؛ 16، 12

1 إذا كان $x = 3, y = -1$ فأوجد قيمة $x + y^2(2+x)$. 8

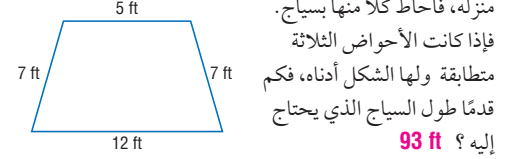
2 بسّط العبارة: $-4(3a + b) - 2(a - 5b) = -14a + 6b$.

3 اختيار من متعدد: إذا كان $3m + 5 = 23$ ، فما قيمة $2m - 3$ ؟

9 C 105 A

6 D $\frac{47}{3}$ B

4 بستنة: يريد عبد الله تصميم 3 أحواض للورود في حديقة منزله، فأحاط كلًّا منها بسياج.



فإذا كانت الأحواض الثلاثة متطابقة ولها الشكل أدناه، فكم قدمًا طول السياج الذي يحتاج إليه؟ 93 ft

5 إذا كان $x = \frac{2}{3}, y = -2$ فأوجد قيمة $\frac{3(x+y)}{4xy^2} - \frac{3}{8}$.

6 حدد مجال العلاقة المبيّنة في الجدول الآتي ومداها، ثم حدد إذا كانت تمثّل دالة أم لا، وهل هي متبينة أم لا؟

x	y
-2	3
4	-1
3	2
6	3

المجال = $\{-2, 4, 3, 6\}$

المدى = $\{3, -1, 2\}$

ليست متبينة

إذا كانت $f(x) = -2x + 3$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

7 $f(-4)$ 11 $f(3y) - 6y + 3$ 8

9 اختيار من متعدد: إذا كانت تكلفة إنتاج x فطيرة جبن في أحد المخابز يُعبّر عنها بالدالة $C(x) = 6 + 0.75x$ ، فأوجد تكلفة إنتاج 20 فطيرة. C

21.0 C 13.5 A

38.4 D 28.61 B

10 مثل الدالة $f(x)$ بيانيًا. $f(x) = \begin{cases} -x, & x < -2 \\ x + 2, & -2 \leq x \leq 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$ انظر الهامش.

مثل كل متبينة فيما يأتي بيانيًا: $2x + 6y < -12$ (12) $y \geq 4x - 1$ (11)

حلّ كل نظام مما يأتي بيانيًا: (13-16) انظر ملحق الإجابات

13 $x + y \leq 4$ $2x + 3y > 12$

$y \geq x$ $3x - y < 21$

15 $x - y > 0$ $2y - 5x \leq 6$

$4 + y \leq 2x$ $4x + y < -4$

17 اختيار من متعدد: استأجر خالد سيارة ليوم واحد من إحدى الشركات، فدفّع 100 ريال رسم تأجير وريالًا واحدًا عن كل كيلومتر تقطعه السيارة، أما سعيد فاستأجر سيارة من شركة أخرى، ليوم واحد أيضًا فدفّع 50 ريالًا رسم تأجير وريالين عن كل كيلومتر تقطعه السيارة. فما عدد الكيلومترات التي تجعل قيمة الاستئجار من الشركتين متساوية؟ B

104 C 92 A

75 D 50 B

18 نجارة: يصنع مشغل نجارة طاولات ومقاعد ثم يقوم بطلائها. وبيّن الجدول الآتي الزمن الذي تتطلبه صناعة وطلاء كل من الطاولة والمقعد:

المنتج	زمن الصناعة بالساعات	زمن الطلاء بالساعات
مقعد	3	0.5
طاولة	2	1

إذا كان مجموع ساعات عمل فنيي صناعة المنتجات 108 ساعات يوميًا، ومجموع ساعات عمل فنيي دهان المنتجات 20 ساعة يوميًا، وكان ربح المشغل من الطاولة الواحدة 35 ريالًا، ومن المقعد الواحد 25 ريالًا فكم طاولة ومقعدًا يجب صنعهما يوميًا ليكون الربح أكبر ما يمكن؟

(a) بفرض أن عدد الطاولات t ، وعدد الكراسي c ، اكتب نظام متباينات يمثل الموقف. (a-c) انظر الهامش.

(b) مثل منطقة الحل بيانيًا.

(c) جد عدد الطاولات وعدد المقاعد التي يجب صنعها ليكون الربح أكبر ما يمكن. وما أكبر ربح؟

مثل نظام المتباينات الآتي بيانيًا، وحدد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، ثم جد القيمة العظمى والصغرى للدالة المعطاة في منطقة الحل:

19 $-2x + y \leq 5$ ، $4x + y \leq 5$ ، $-3 \leq y \leq 5$

انظر الهامش.

$f(x, y) = 4x - 3y$

الفصل 1 اختبار الفصل 53

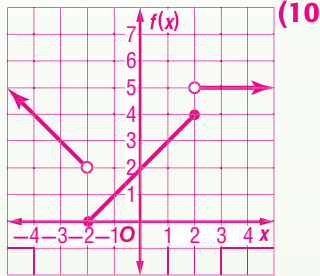
المعالجة: بناءً على نتائج اختبار الفصل،

استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة

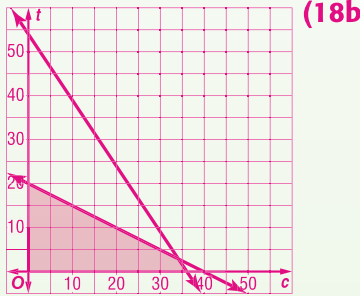
ص (15-22).

إجابات



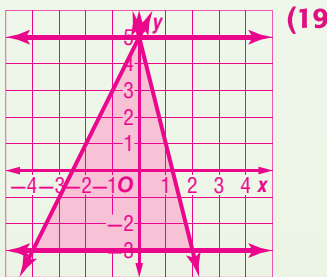
18a $c \geq 0, t \geq 0$

$3c + 2t \leq 108, 0.5c + t \leq 20$



18c 34 مقعدًا و 3 طاولات؛ قيمة أكبر

ربح 955 ريالًا.



الرؤوس $(-4, -3), (0, 5), (2, -3)$

القيمة العظمى $f(2, -3) = 17$

القيمة الصغرى $f(0, 5) = -15$

www.obeikaneducation.com

مخطط المعالجة

المستوى 1

ضمن المتوسط

أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،

إذا

فاختر

أحد المصادر الآتية:

مراجعة الدروس:

1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6

تدريبات المهارات،

ص (8, 13, 18, 23, 28, 33)

مشروع الفصل، ص (13)

www.obeikaneducation.com

المستوى 2

ضمن المتوسط

أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،

إذا

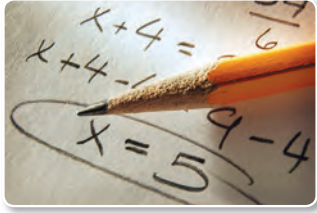
فاختر

أحد المصدرين الآتيين:

تدريبات إعادة التعليم،

ص (6, 11, 16, 21, 26, 31)

www.obeikaneducation.com



الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

تطلب منك الأسئلة ذات الإجابات القصيرة أن تقدم لها حلاً، متضمناً الطريقة والتبريرات والتفسيرات التي استعملتها. وفي العادة يتم تصحيح هذه الأسئلة وتُحدّد درجاتها باستعمال سلالم التقدير. وهذا مثال على تصحيح هذا النوع من الأسئلة.

سلالم التقدير		
الدرجة	المعايير	الدرجة
2	الإجابة صحيحة مدعمة بتفسيرات كاملة توضح كل خطوة.	درجة كاملة
1	• الإجابة صحيحة، لكن التفسيرات ليست كاملة. • الإجابة غير صحيحة، لكن التفسيرات صحيحة.	درجة جزئية
0	لم يُقدم أي إجابة، أو أن الإجابة ليس لها معنى.	لا يستحق درجة

استراتيجيات حل الأسئلة ذات الإجابة القصيرة

خطوة 1

- اقرأ السؤال جيداً؛ كي تفهم الشيء الذي تحاول حله.
- حدد الحقائق ذات العلاقة.
- ابحث عن الكلمات المفتاحية والمصطلحات الرياضية.

خطوة 2

- ضع خطة وحل المسألة.
- فسّر تبريرك أو اعرض الطريقة التي ستبناها لحل المسألة.
- اكتب الحل كاملاً مبيّناً الخطوات جميعها.
- تحقق من إجابتك إذا سمح الوقت بذلك.

مثال

اقرأ السؤال التالي، وحدد المطلوب. ثم استعمل المعلومات الواردة في حل السؤال، واكتب خطوات الحل.

قدّمت شركتنا اتصالات عروصاً للجمهور على النحو التالي: قيمة الاشتراك الشهري للشركة A هي 14.5 ريالاً مضافاً إليه 0.05 ريال عن كل دقيقة اتصال بدل خدمات، وقيمة الاشتراك الشهري للشركة B هو 20.00 ريالاً مضافاً إليه 0.04 ريال عن كل دقيقة اتصال. أوجد عدد الدقائق التي يمكن أن يستخدمها المشترك، بحيث يدفع المبلغ نفسه شهرياً لكلا الشركتين.

1 التركيز

الهدف فهم مكونات الأسئلة ذات الإجابات القصيرة وتطوير طرق حلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- ما الاختلاف بين حل الأسئلة ذات الإجابة القصيرة، وأسئلة الاختيار من متعدد، وما أوجه التشابه بينها؟

إجابة ممكنة: عند حل أسئلة الإجابة القصيرة، يجب عليك أن تقدم الحل مبرّراً خطواته، وبذلك قد تحصل على جزء من درجة السؤال مع إجابة صحيحة وتبرير خاطئ، أو إجابة خاطئة وتبرير صحيح. أما عن أوجه التشابه بين هذين النوعين، ففي كليهما تستعمل الطريقة نفسها في الحل، بعد أن تقرأها بدقة وتحدد المطلوب.

- ما أهمية كتابة التفسير والتبرير أثناء إجابتك عن الأسئلة ذات الإجابات القصيرة.

إجابة ممكنة: كتابة التبريرات في أثناء حل أسئلة الإجابة القصيرة طريقة جيدة لتحديد معقولية الإجابة.

- لماذا يجب التحقق من الإجابة.

إجابة ممكنة: يجب التحقق من الإجابة؛ لأن حدوث خطأ جبري واحد في إحدى الخطوات يعني خطأ الخطوات التالية.

مثال إضافي

افترض عليّ 35 ريالاً لشراء آلة حاسبة للرسوم البيانية، وكان يتقاضى مبلغ 9 ريالاتٍ عن كل ساعة يعلم فيها آخرين استخدام الآلة الحاسبة البيانية. إذا كان يعلم شخصاً واحداً فقط في اليوم في المكتبة العامة للمدينة، ويدفع مبلغ 2 ريال أجره لموقف السيارات عن كل ساعة، فكم ساعة يجب أن يعمل ليحقق ربحاً؟

الإجابة: كَوّن نظام المعادلات ثم حلّه.

افترض أن

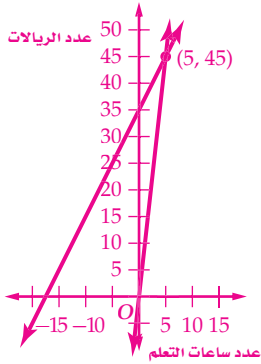
$x =$ عدد الساعات التي يدرسها عليّ للآخرين،

و $y =$ عدد الريالات

مجموع الدخل $y = 9x$ ،

مجموع التكاليف $y = 2x + 35$

حل النظام بيانياً.



حل النظام هو (5, 45)، وهو يمثل نقطة التقاطع. لذا يجب عليّ أن يدرّس أكثر من 5 ساعات ليحصل على الربح.

3 التقييم

استعمل التمارين 1-3؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب.

اقرأ السؤال بعناية؛ لديك معلومات عن شركتين مختلفتين للاتصالات، والعروض للاشتراكات الشهرية المقدمة من كلٍّ منها. حيث إن قيمة الفاتورة تعتمد على قيمة ثابتٍ للاشتراك الشهري، بالإضافة إلى مبلغ متغير يعتمد على عدد دقائق الاتصال، والمطلوب منك تحديد عدد الدقائق التي يمكن استخدامها من قبل المشترك لكلٍّ من الشركتين بحيث يدفع المبلغ نفسه، ويمكنك تكوين نظام معادلتين آتيتين وحله.

إجابة تستحق الدرجة الكاملة (2).

كوّن نظامًا من معادلتين، وحلّه.

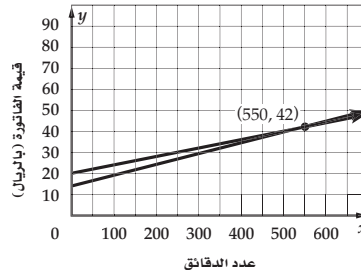
قيمة الفاتورة الشهرية = قيمة الاشتراك الشهري + تكلفة الدقيقة × عدد الدقائق.

افترض أن $y =$ قيمة الفاتورة الشهرية، و $x =$ عدد الدقائق المستعملة شهرياً.

(الشركة A) $y = 14.5 + 0.05x$

(الشركة B) $y = 20 + 0.04x$

حل النظام بيانياً.



حل النظام هو (550, 42)، أي أن المشترك سيدفع 42 ريالاً إذا اتصل 550 دقيقة شهرياً، سواءً أكان مشتركاً في الشركة A أو B.

خطوات الحل والحسابات والتبريرات واضحة، وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة، إذن تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال، واكتب خطوات الحل:

(2) مربع مُحاط بدائرة طول نصف قطرها r ، أوجد بشكل دقيق نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟ $\frac{\pi}{2}$

(3) يرغب خالد في شراء بعض الأدوات المدرسية بحيث لا يدفع أكثر من 50 ريالاً، فإذا كان ثمن المسطرة الواحدة 4.75 ريالات، وثمان القلم الواحد 6.5 ريالات، وأراد شراء قطعتين من كل نوع على الأقل، اكتب نظام المتباينات، ومثل منطقة الحل على المستوى الإحداثي. ثم أعط ثلاثة حلول مختلفة. انظر الهامش

(1) اقترض عليّ ومحمود مبلغ 1400 ريال لشراء آلة زراعية لبدء مشروعهم التجاري لقص الحشائش في الحدائق، فإذا كانوا يتقاضون مبلغ 45 ريالاً أجره من كل زبون لقص حشائش الحديقة الواحدة، ويدفعون 10.5 ريالات بدل صيانة وثماناً للمحروقات، فبعد كم حديقة سيبدؤون في تحقيق الربح. 41

إجابة:

(3) إجابة ممكنة: $4.75x + 6.5y \leq 50$

$x \geq 2, y \geq 2$

4 مساطر و 4 أقلام، أو 5 مساطر و 4 أقلام، أو 6 مساطر و 3 أقلام.

انظر إجابات الطلاب للتمثيل البياني.

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة في كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية مثل:

A (1) ربع العدد -3 على أنه -9

B صحيحة

C ضرب m في العدد 2 بدلاً من أن

يربّعها

D خمّن

A (2) صحيحة

B ضرب في العدد 3 بدلاً من $\frac{1}{3}$

C لم يربّع r

D ربع h بدلاً من r

A (3) اختار مجموعة ينتمي إليها

العدد -25

B اختار مجموعة ينتمي إليها

العدد -25

C اختار مجموعة ينتمي إليها

العدد -25

D صحيحة

A (4) اختار جميع القيم الموجبة الموجودة في الجدول.

B اختار القيم الموجودة في المدى

C صحيحة

D اختار القيم السالبة

A (5) صحيحة

B أوجد مقلوب الميل

C أوجد معكوس مقلوب الميل

D بسط بشكل غير صحيح

A (6) عكس إشارتي المتباينتين.

B عكس إشارة المتباينة الثانية

C صحيحة

D عكس إشارة المتباينة الأولى

A (7) حدد رأس

B صحيحة

C حدد رأس

D حدد رأس

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(1) إذا كانت $m = -3$, $n = 2$ ، فأوجد قيمة $\frac{m^2 + 2mn}{n^2 - 1}$.

A -7

B -1

C -6

D 4

إرشادات للاختبار

السؤال 1: عوض عن m بـ -3، وعن n بـ 2 في العبارة، ثم استعمل ترتيب العمليات.



(2) يمكن حساب حجم المخروط الدائري القائم

الذي ارتفاعه h وطول نصف قطر قاعدته r

بضرب ثلث π في الارتفاع في مربع نصف

قطر القاعدة. فأی المعادلات الآتية تمثل

حجم المخروط المجاور؟ A

A $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

B $V = 3\pi r^2 h$

C $V = \frac{1}{3}\pi r h$

D $V = \frac{1}{3}\pi r h^2$

(3) أي مجموعات الأعداد الآتية لا ينتمي إليها العدد -25؟ D

A الأعداد الصحيحة

B الأعداد النسبية

C الأعداد الحقيقية

D الأعداد الكلية

(4) مجال العلاقة الموضحة في الجدول الآتي هو: C

x	y
-3	4
1	-1
2	0
6	-3

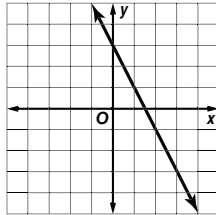
A {0, 1, 2, 4, 6}

B {-3, -1, 0, 4}

C {-3, 1, 2, 6}

D {-3, -1}

(5) ميل المستقيم الممثل بيانياً على المستوى الإحداثي الآتي هو: A



A -2

B $\frac{1}{2}$

C $-\frac{1}{2}$

D 2

إرشادات للاختبار

السؤال 5: بما أن التمثيل البياني ينحدر من اليسار إلى اليمين فإن الميل سالب، لذا استبعد البديلين B و D.

(6) على الشكل أدناه منطقة حل النظام: C

$$y \leq \frac{1}{2}x - 2$$

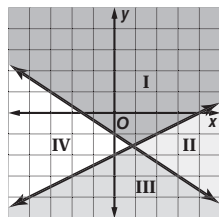
$$y \leq -\frac{2}{3}x - 1$$

A المنطقة I

B المنطقة II

C المنطقة III

D المنطقة IV



(7) النقطة التي لا تمثل رأساً لمنطقة حل النظام:

B هي: $x \geq 0, y \geq 0, y \leq -2x + 6$

A (0, 0)

B (0, 3)

C (0, 6)

D (3, 0)

أسئلة ذات إجابات قصيرة

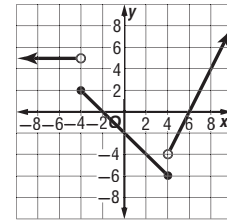
أجب عن كل مما يأتي:

(8) بسّط العبارة أدناه:

$$-4(3a - b) + 3(-2a + 5b)$$

$$-18a + 19b$$

(9) اكتب معادلة الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:



انظر الهامش.

(10) جد قيمة الدالة المتعددة التعريف في التمرين (9) عند $x = -3$.

أسئلة ذات إجابات طويلة

أجب عن كل مما يأتي موضّحًا خطوات الحلّ:

(11) قام خالد بحساب قيمة العبارة: $\frac{-5m - 3n}{-2p + r}$ عندما

$m = 1, n = -4, p = -3, r = -2$ فكانت خطوات حله على النحو الآتي:

$$\frac{-5m - 3n}{-2p + r} = \frac{-5(1) - 3(-4)}{-2(-3) + (-2)}$$

$$= \frac{-5 - 12}{6 - 2} = -\frac{17}{4} = -4\frac{1}{4}$$

(a) ما الخطأ الذي وقع فيه خالد؟

(b) ما الإجابة الصحيحة؟ $1\frac{3}{4}$

(11a) عندما ضرب العدد -3 بالعدد -4 كان ناتجه -12

(12) قدّر مدير مخبز الربيع في كل قطعة كعك يبيعهها بـ 0.45 ريال، ولكل فطيرة 0.5 ريال. $0.45x + 0.5y \geq 150$

(a) يأمل مدير المخبز أن يحصل على ربح قدره 150 ريالًا من بيع الكعك والفطائر يوميًا. افترض أن x عدد قطع الكعك المباعة، و y عدد الفطائر المباعة، اكتب متباينة تمثل هذا الموقف.

(b) مثل المتباينة بيانيًا. انظر الهامش.

(c) إذا باع المخبز 180 قطعة كعك و 160 فطيرة في يوم ما، فهل سيحصل على الربح المطلوب؟ فسر إجابتك. نعم، الربح الذي تحقق هو 161 ريالًا.

(13) تُعد فاطمة نوعين من أطباق الحلوى؛ فيحتاج النوع الأول إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوبين من السكر، أما النوع الثاني فيحتاج إلى 5 أكواب من الدقيق، وكوب واحد من السكر. فإذا كان لديها 40 كوبًا من الدقيق، و 15 كوبًا من السكر، وتكلفة إعداد طبق من النوع الأول 12 ريالًا، و طبق من النوع الثاني 8 ريالات.

(a) اكتب نظام متباينات خطية يمثل عدد الأطباق التي يمكن لفاطمة إعدادها باستعمال الكميات المتوفرة.

$$x \geq 0, y \geq 0, 5x + 5y \leq 40, 2x + y \leq 15$$

(b) مثل نظام المتباينات الخطية الذي حصلت عليه في (a) بيانيًا، واكتب إحداثيات نقاط رؤوس منطقة الحل.

(13b) انظر إجابات الطلاب: (0, 0), (0, 8), (7.5, 0), (7, 1)

(c) اكتب دالة تمثل التكلفة. $P = 12x + 8y$

(d) ما عدد الأطباق من كل نوع الذي يجعل التكلفة أكبر ما يمكن؟ وما التكلفة في هذه الحالة؟ 7 أطباق من النوع الأول، و طبق واحد من النوع الثاني.

التقويم التكويني

لتختبر مدى تقدم الطلاب في الفصل 1 يمكنك استعمال:

اختبار تراكمي: ص (56-57)

اختبار تراكمي، ص (24)

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 2: حدد الأسئلة

ص (59) واجبًا منزليًا لتقويم مهارات المتطلبات السابقة للفصل القادم.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

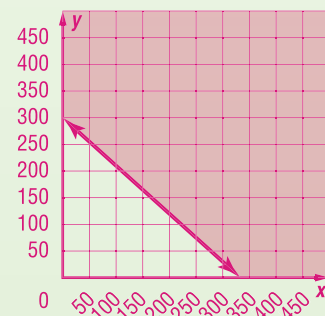
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	إذا لم تستطع حل سؤال ...
1-6	1-6	مهارة سابقة	1-3	1-3	1-1	1-6	1-5	مهارة سابقة	1-2	1-1	1-2	1-2	فعد إلى ...

57 الفصل 1 اختبار تراكمي

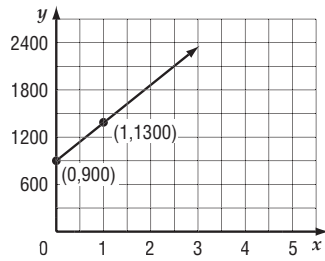
إجابات

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x < -4 \\ -x-2, & -4 \leq x \leq 4 \\ 2x-12, & x > 4 \end{cases} \quad (9)$$

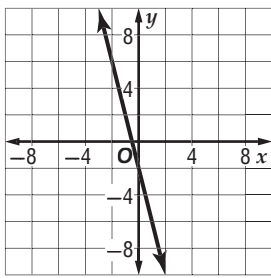
(12b)



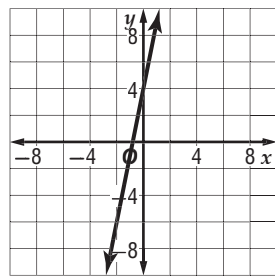
$y = 900 + 400x$ (21)



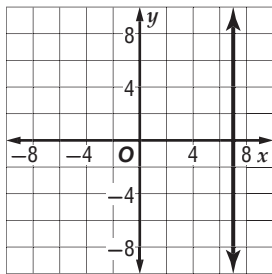
الدرس 1-2 ، ص (19, 21) :



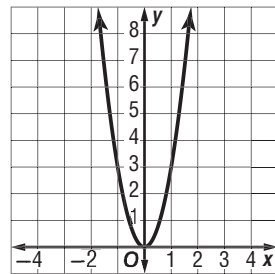
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
دالة؛ متباينة؛ متصلة.



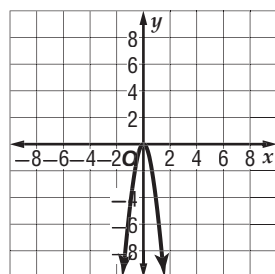
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
دالة؛ متباينة؛ متصلة.



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المجال: {7}؛
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى: $\{y | y \geq 0\}$ ؛
دالة؛ ليست متباينة؛ متصلة ليست دالة

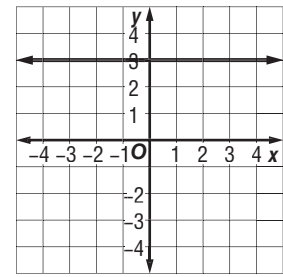


المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المجال: {7}؛
المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى: $\{y | y \geq 0\}$ ؛
دالة؛ ليست متباينة؛ متصلة ليست دالة

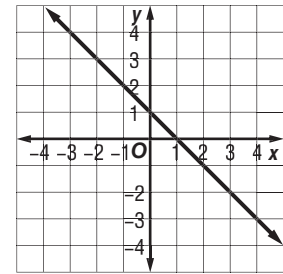


المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: $\{y | y \leq 0\}$ ؛
دالة؛ ليست متباينة؛ متصلة؛

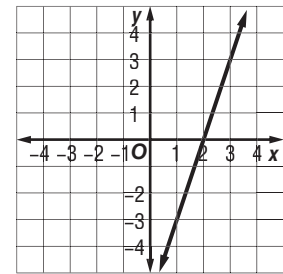
(15)



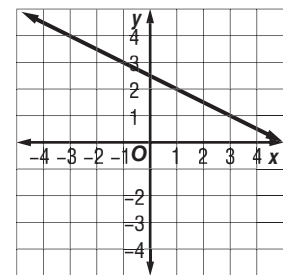
(16)



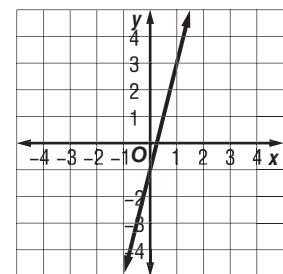
(17)



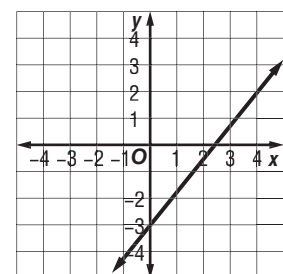
(18)



(19)



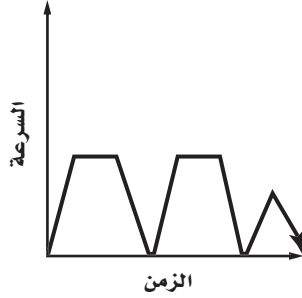
(20)



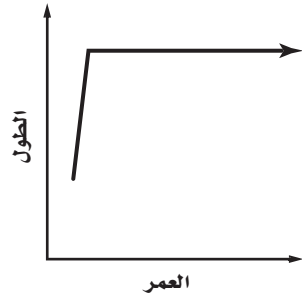
(26d)

متباينة	الدالة
لا	$f(x) = x^2$
نعم	$g(x) = 2^x$
لا	$h(x) = -x^2$
لا	$j(x) = x^2 + 2$

(29a) إجابة ممكنة:



(29b) إجابة ممكنة:



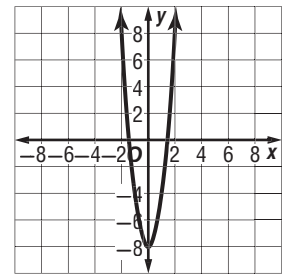
(29c) إجابة ممكنة:



توسع 1-2، ص (22):

- (3) متصلة؛ عدد الساعات هو مجموعة قيم أكبر من أو تساوي صفرًا؛ لذا فإن تمثيل الدالة البياني متصل.
- (4) منفصلة؛ عدد الركاب هو مجموعة من الأعداد الكلية؛ لذا فإن تمثيل الدالة البياني يتكون من نقاط متباعدة.
- (5) إجابة ممكنة: الدالة التي تصف المبلغ الذي تم جمعه لا من بيع x تذكرة هي دالة منفصلة؛ وذلك لأن قيم المجال هي أعداد كلية. والدالة التي تصف السعر لا لـ x كيلوجرام من التفاح هي دالة متصلة؛ وذلك لأن قيم مجال هذه الدالة هي مجموعة القيم الأكبر من الصفر.

(16)

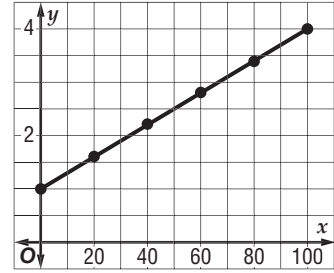


المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية.

المدى: $\{y \mid y \geq -8\}$ ؛

دالة؛ ليست متباينة؛ متصلة

(19a)

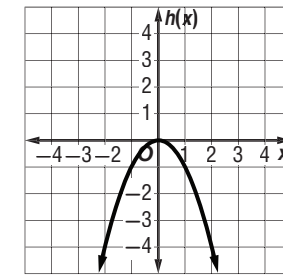
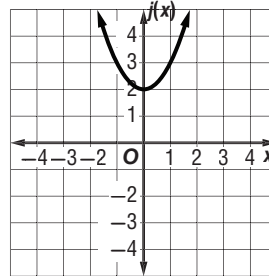
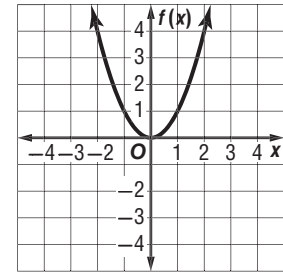
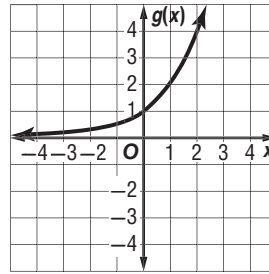


(19b) المجال $\{x \mid 0 \leq x \leq 100\}$

المدى $\{y \mid 4 \geq y \geq 1\}$ = العلاقة متصلة

(19c) نعم تمثل دالة؛ لأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى.

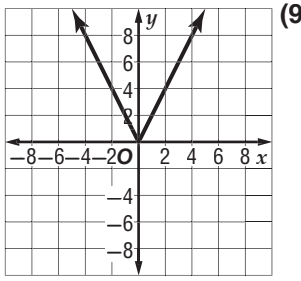
(26a)



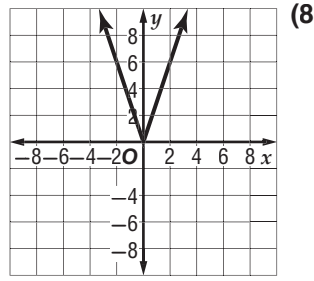
(26b)

عدد المرات الممكنة	الدالة
0, 1, 2	$f(x) = x^2$
0, 1	$g(x) = 2^x$
0, 1, 2	$h(x) = -x^2$
0, 1, 2	$j(x) = x^2 + 2$

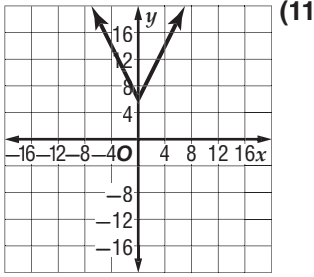
(26c) $g(x)$ متباينة، بينما الدوال $f(x)$, $h(x)$, $j(x)$ فليست متباينة.



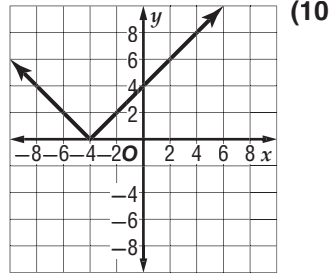
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: $\{g(x) | g(x) \geq 0\}$



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: $\{s(x) | s(x) \geq 6\}$

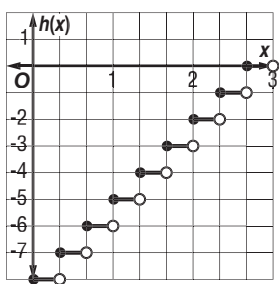


المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: $\{h(x) | h(x) \geq 0\}$

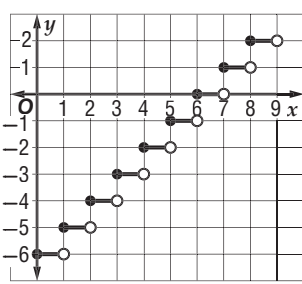
$$g(x) = \begin{cases} -8, & x \leq -6 \\ 0.25x + 2, & -4 \leq x \leq 4 \\ 4, & x > 6 \end{cases} \quad (14)$$

$$g(x) = \begin{cases} -x - 4, & x < -3 \\ x + 1, & -3 \leq x \leq 1 \\ -6, & x > 4 \end{cases} \quad (15)$$

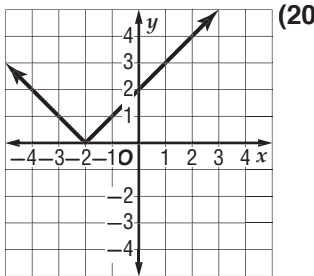
$$g(x) = \begin{cases} -9, & x < -5 \\ x + 4, & 0 \leq x \leq 3 \\ x - 3, & x > 7 \end{cases} \quad (16)$$



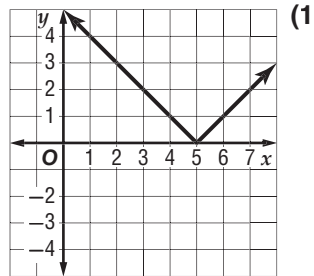
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة

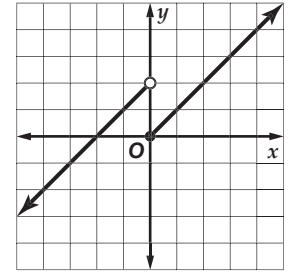


المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: $\{g(x) | g(x) \geq 0\}$

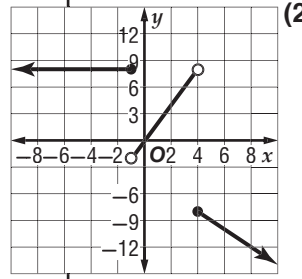


المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$

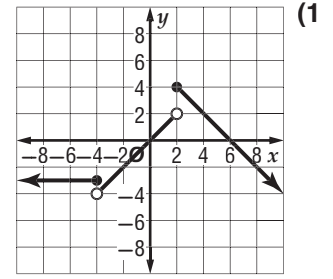
(1) تحقق من فهمك :



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية

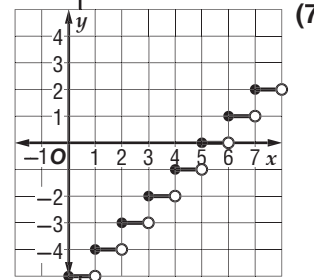
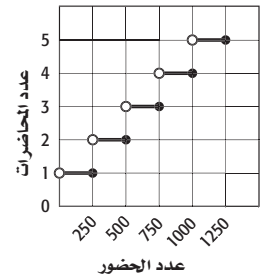


المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى: $\{y | y \leq -8 \vee 8 \geq y > -2\}$

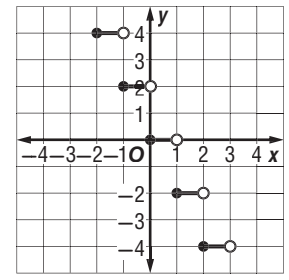


$$g(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -2 \\ -3, & -2 \leq x \leq 3 \\ -2x + 12, & x > 3 \end{cases} \quad (3)$$

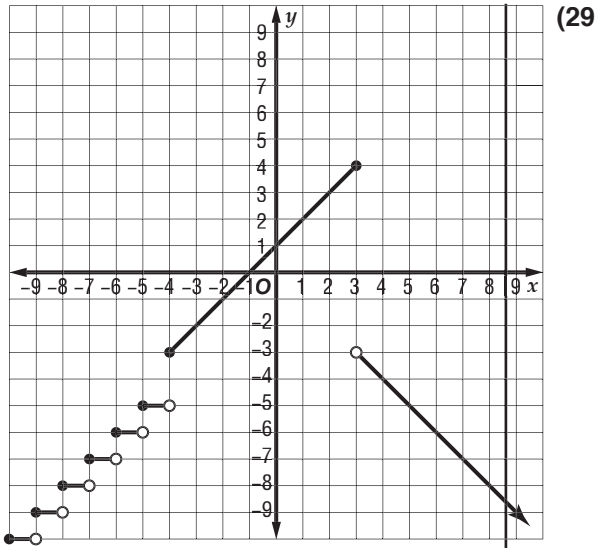
$$g(x) = \begin{cases} 6, & x \leq -5 \\ -x + 4, & -5 < x < -2 \\ \frac{1}{2}x + 1, & x \geq -2 \end{cases} \quad (4)$$



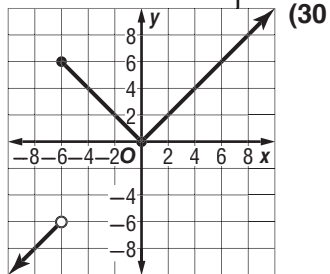
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى: مجموعة الأعداد الزوجية



المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية؛ المدى : $\{g(x) | g(x) \leq 4\}$

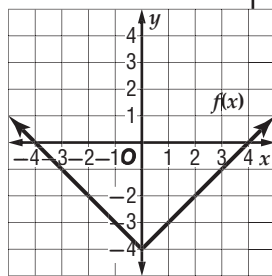
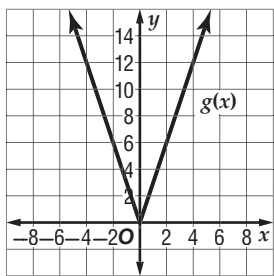


المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى : $\{h(x) | h(x) \leq -6 \vee 0 \leq h(x)\}$

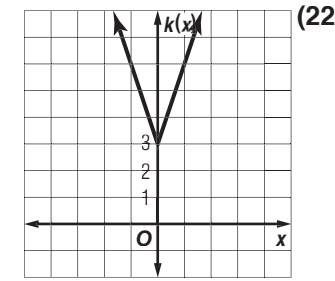
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1	0

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	12	9	6	3	0	3	6	9	12



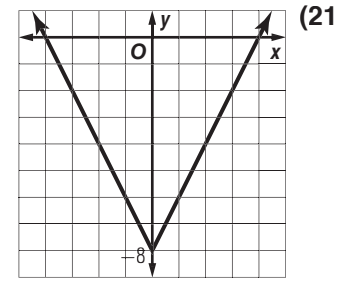
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1	0
الميل		-1	-1	-1	-1	1	1	1	1

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	12	9	6	3	0	3	6	9	12
الميل		-3	-3	-3	-3	3	3	3	3



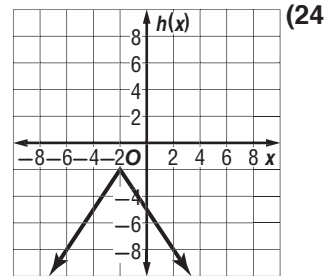
المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى : $\{k(x) | k(x) \geq 3\}$



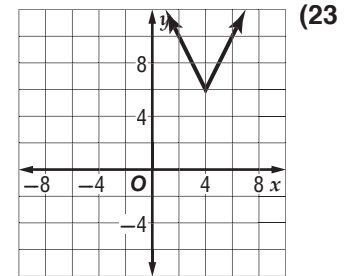
المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى : $\{h(x) | h(x) \geq -8\}$



المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية؛

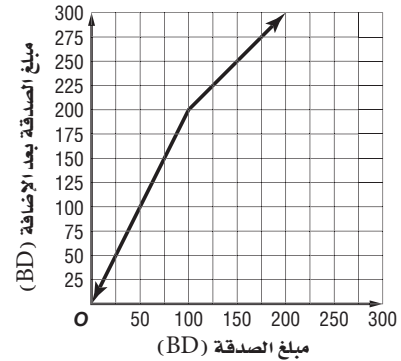
المدى : $\{h(x) | h(x) \leq -2\}$



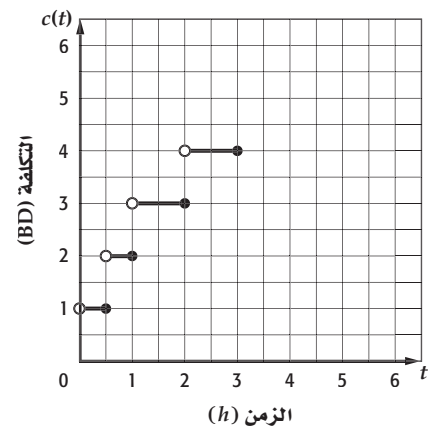
المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية؛

المدى : $\{f(x) | f(x) \geq 6\}$

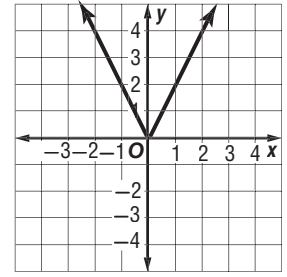
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 100 \\ x + 100, & x > 100 \end{cases} \quad (25b)$$



$$c(t) = \begin{cases} 6, & 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ 10, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ 16, & 1 < t \leq 2 \\ 24, & 2 < t \leq 3 \end{cases} \quad (26b)$$



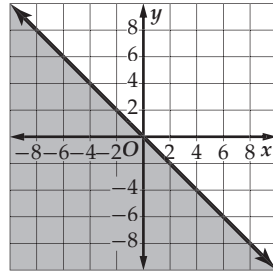
(19)



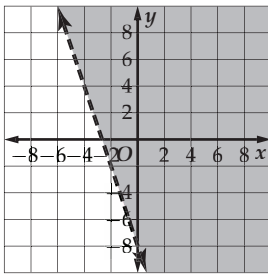
المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية؛
المدى : $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$

الدرس 1-4 ، أسئلة تحقق من فهمك، ص (30-31) :

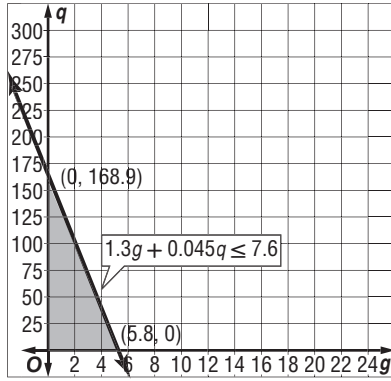
(3)



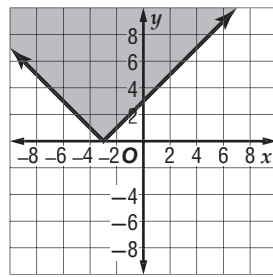
(4)



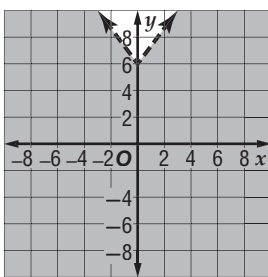
(5b)



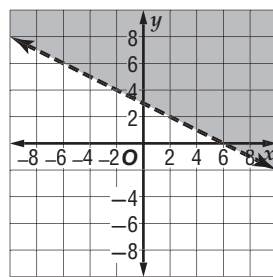
(6)



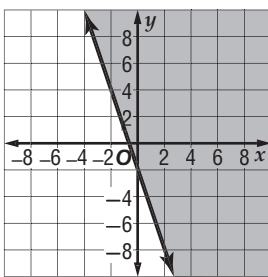
(7)



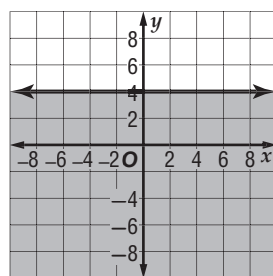
(8)



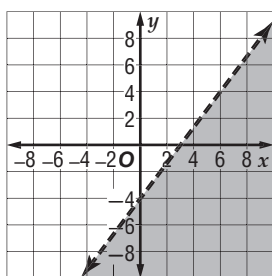
(9)



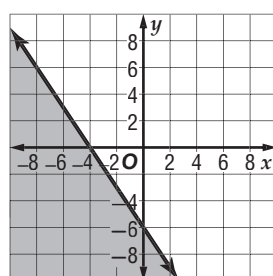
(10)



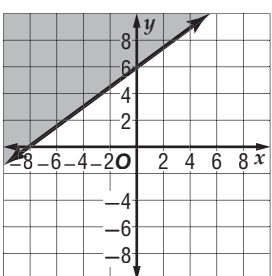
(11)



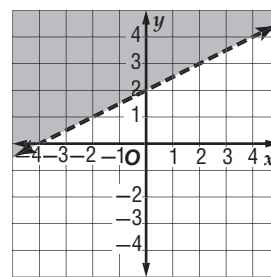
(12)



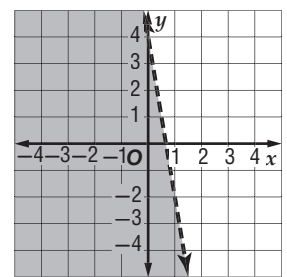
(13)



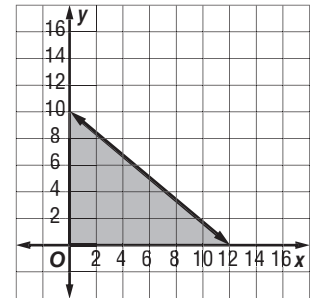
(1B)



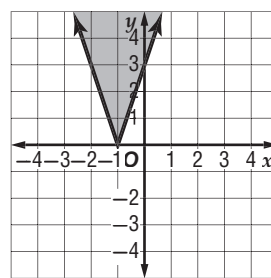
(1A)



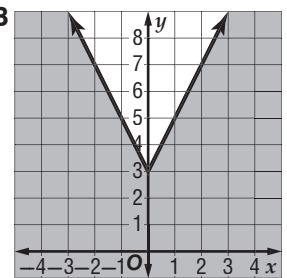
(2) $5x + 6y \leq 60$

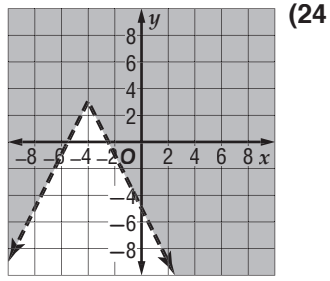


(3B)

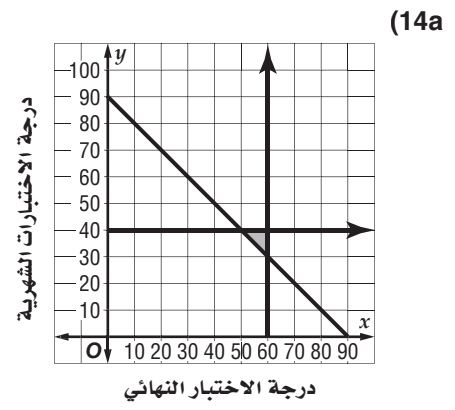


(3A)



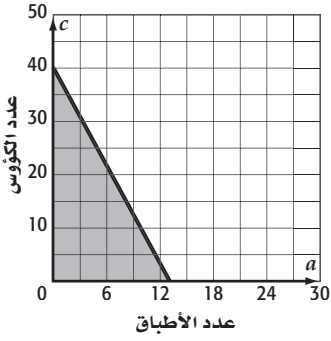


(24)

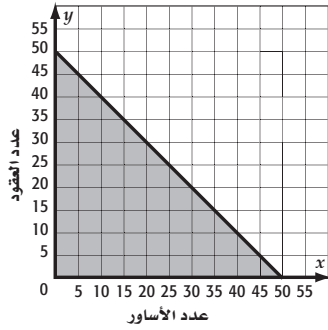


(14a)

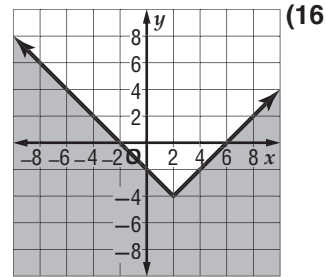
(26b)



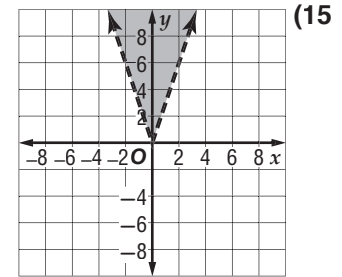
(25b)



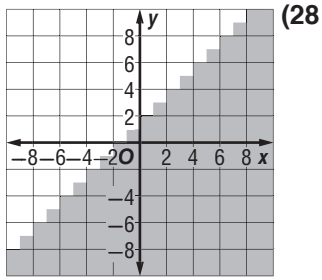
درجة الاختبار النهائي



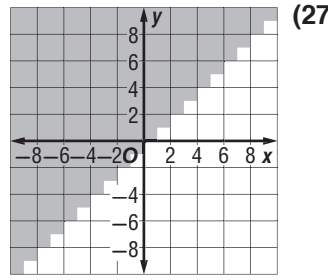
(16)



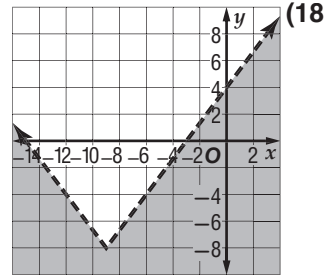
(15)



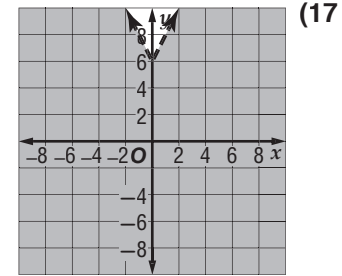
(28)



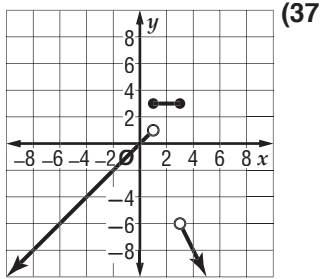
(27)



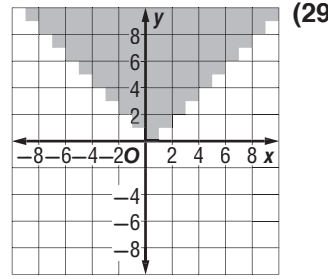
(18)



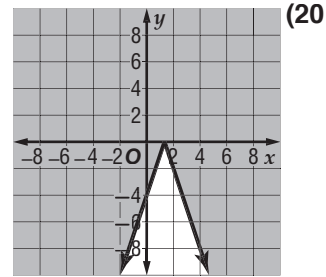
(17)



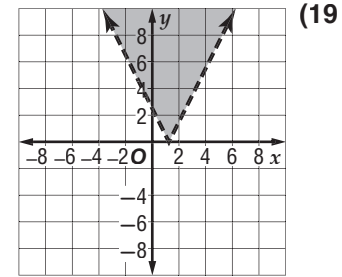
(37)



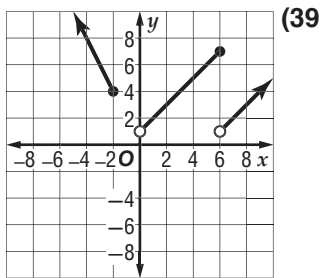
(29)



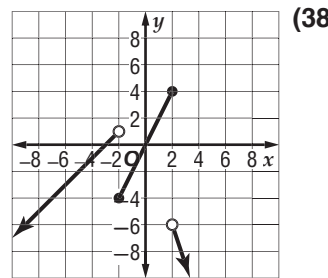
(20)



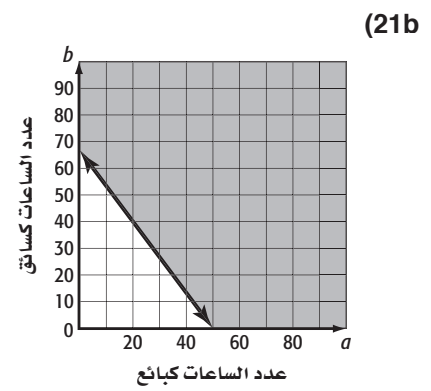
(19)



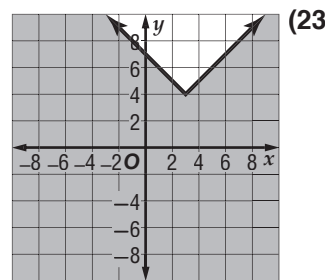
(39)



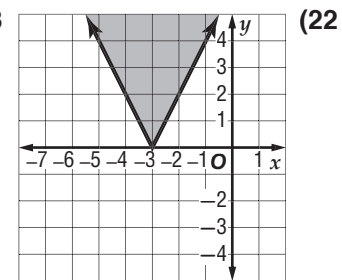
(38)



(21b)

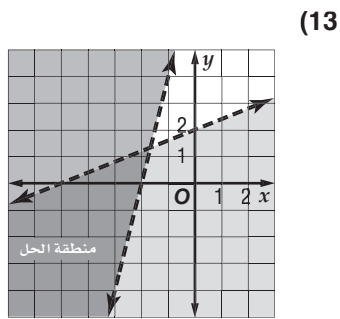
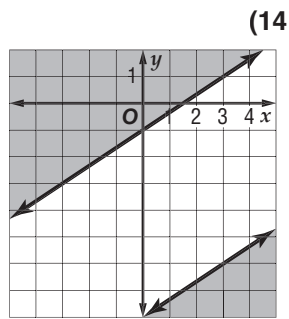
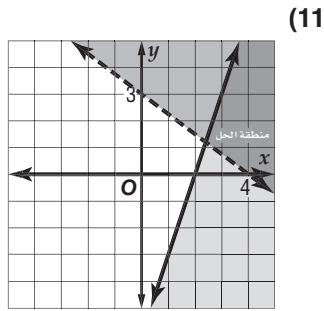
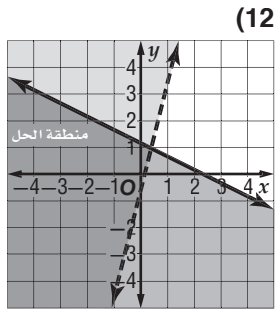
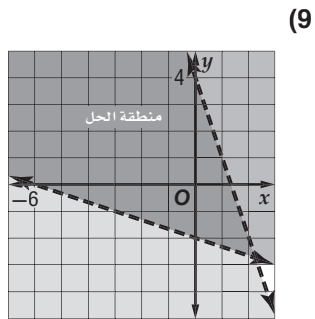
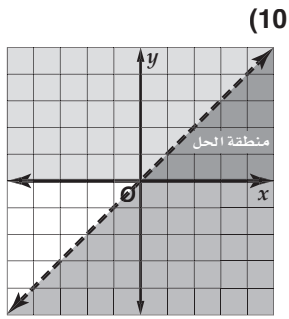


(23)

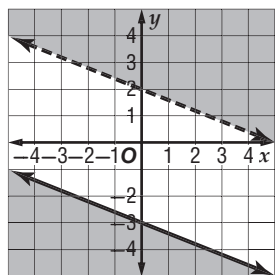


(22)

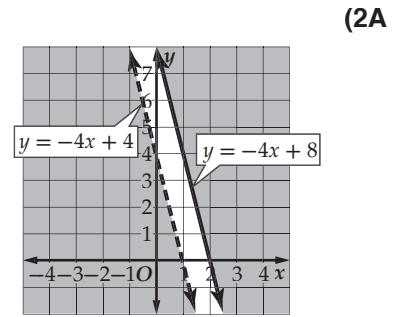
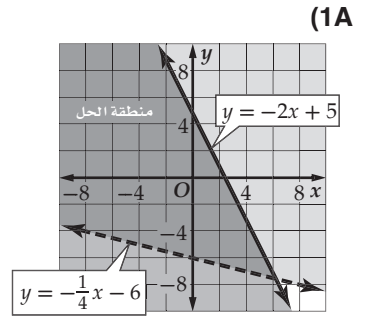
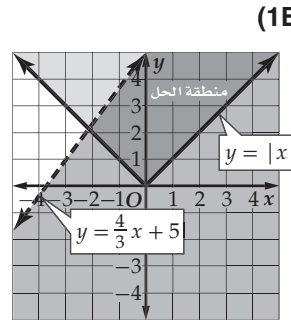
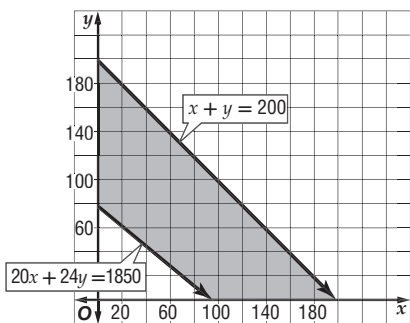
الدرس 1-5 ، أسئلة تحقق من فهمك، ص (35-36) :



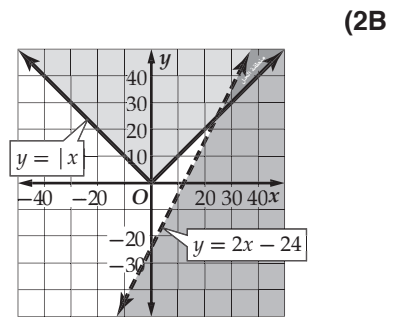
مجموعة الحل \emptyset .



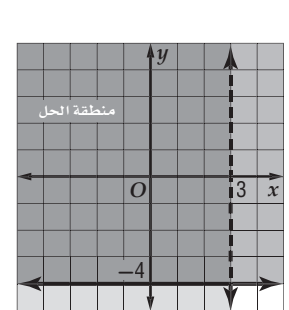
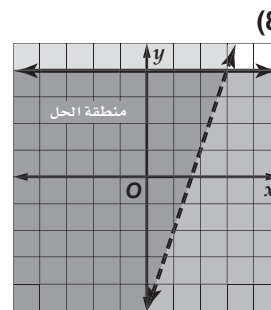
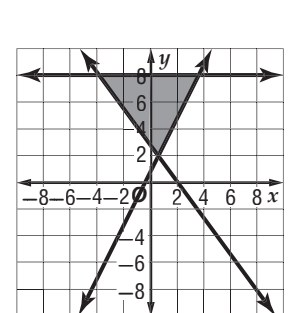
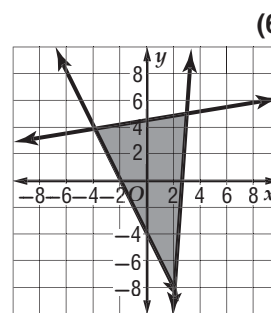
مجموعة الحل هي \emptyset .



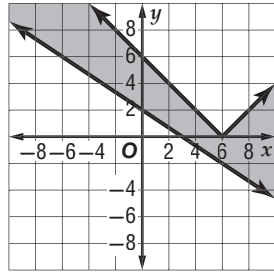
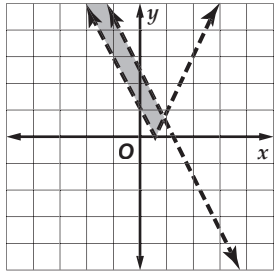
مجموعة الحل هي \emptyset .



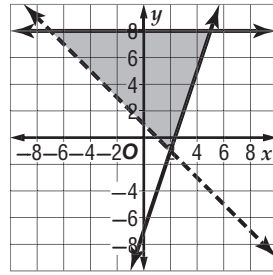
الدرس 1-5 ، ص (38-40) :



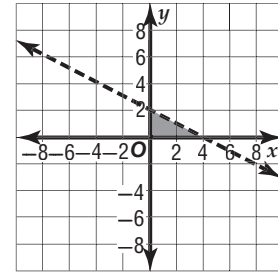
(32)



(31)

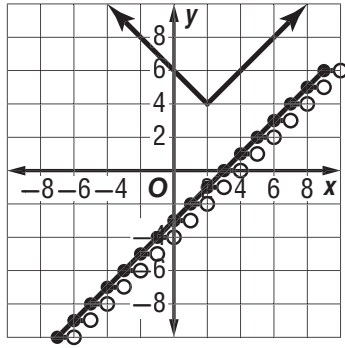


(18)

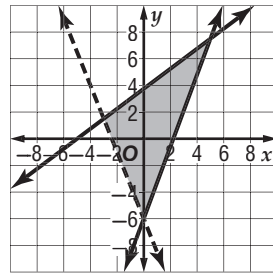


(17)

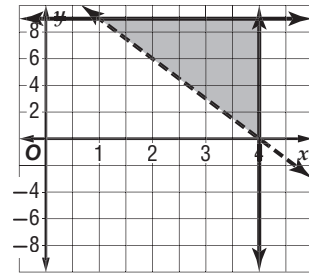
(33)



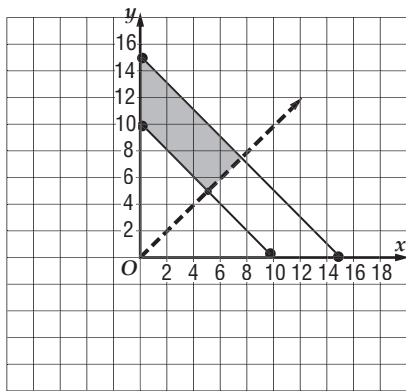
(20)



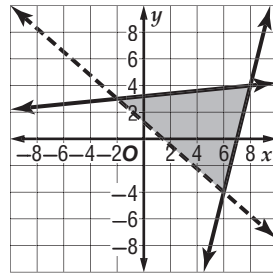
(19)



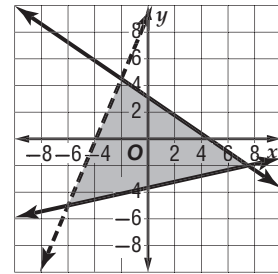
(37a) إذا كان عدد طلاب الصف الثاني x ، وعدد طلاب الصف الثالث y
 $y > x, x + y \geq 10$
 $x + y \leq 15$



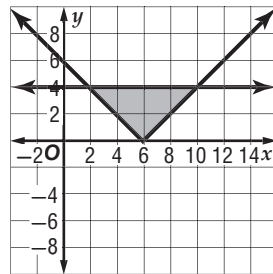
(22)



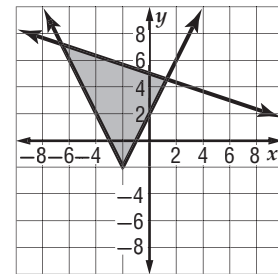
(21)



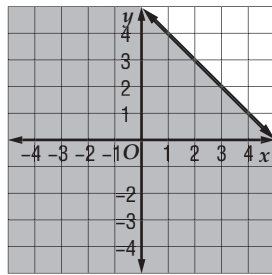
(26)



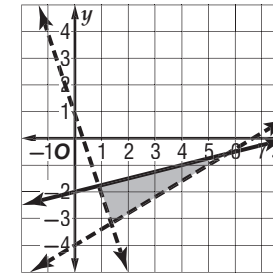
(25)



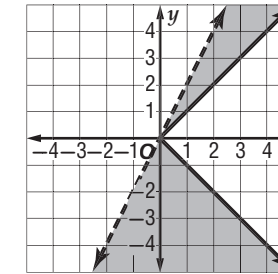
(46)



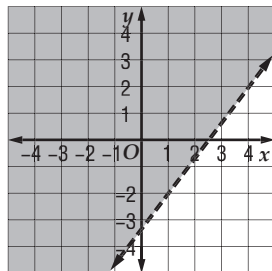
(28)



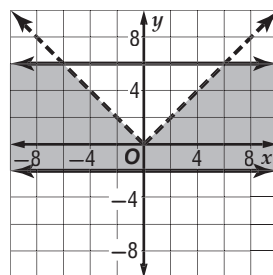
(27)



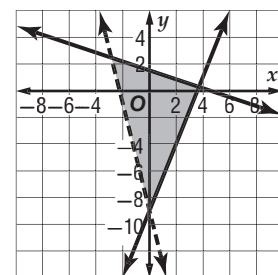
(47)

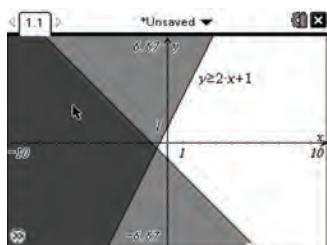


(30)

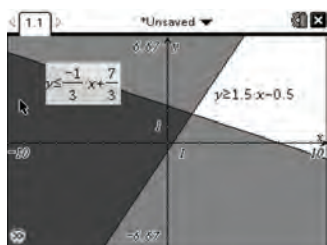


(29)

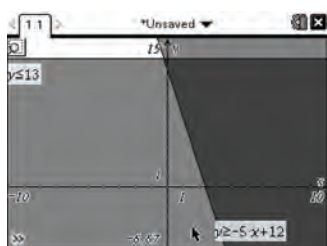




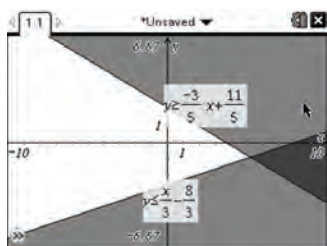
(5)



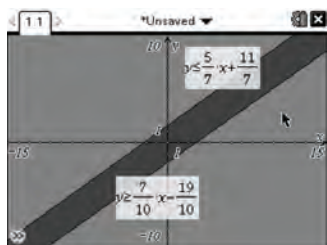
(6)



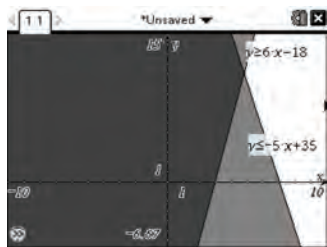
(7)



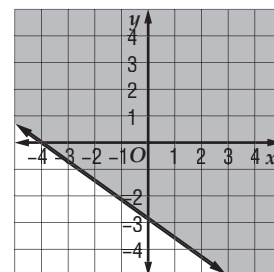
(8)



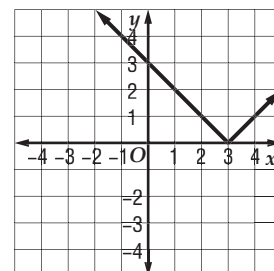
(9)



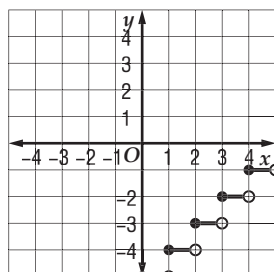
(48)



(49)

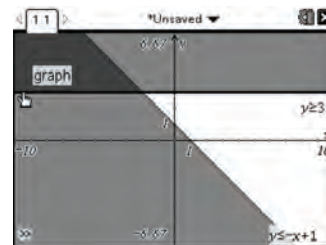


(50)

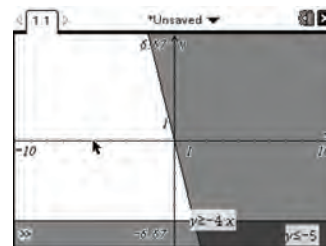


توسع الدرس 5-1، ص (41):

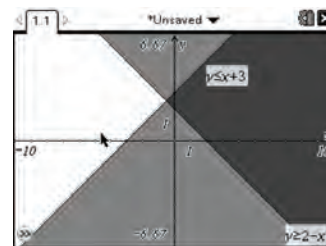
(1)



(2)

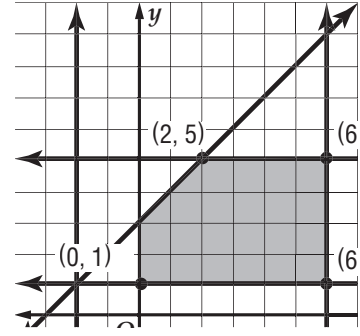


(3)



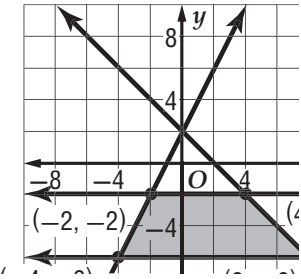
(4)

(1A)



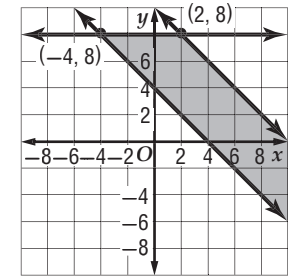
القيمة الصغرى -28 عند النقطة (6, 1)؛
القيمة العظمى 6 عند النقطة (0, 3)

(1B)



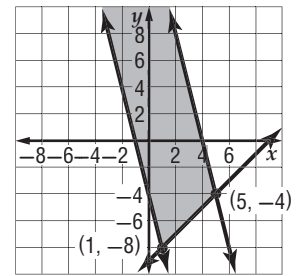
القيمة الصغرى -48 عند النقطة (-4, -6)؛
القيمة العظمى 24 عند النقطة (8, -6)

(2A)



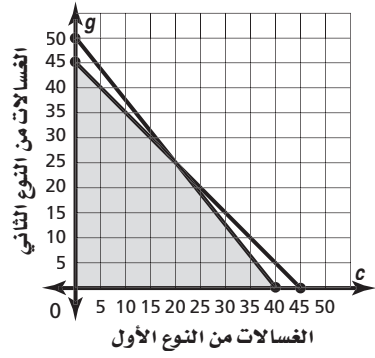
القيمة العظمى 88 عند النقطة (-4, 8)؛ لا توجد قيمة صغرى

(2B)

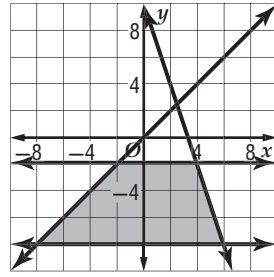


القيمة الصغرى -46 عند النقطة (1, -8)؛ لا توجد قيمة عظمى

(7b)



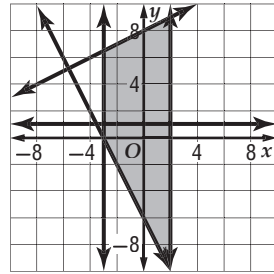
(8)



(6, -8), (4, -2),
(-2, -2), (-8, -8)

القيمة العظمى -8، القيمة الصغرى -152

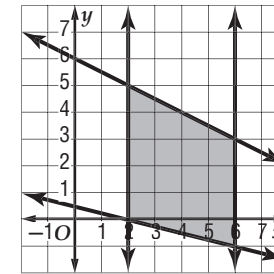
(9)



(2, -10), (-3, 0), (-3, 6.5), (2, 9)

القيمة العظمى 82، القيمة الصغرى -89

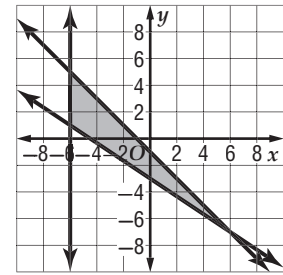
(10)



(2, 0), (6, -1), (6, 3), (2, 5)

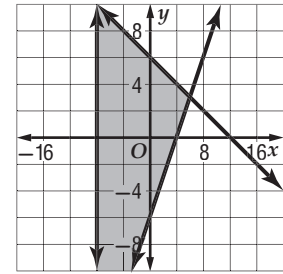
القيمة العظمى 57؛ القيمة الصغرى 12

(11)



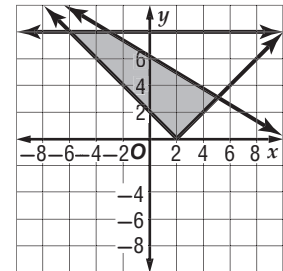
؛ $(-6, 1), (6, -7), (-6, 5)$
القيمة العظمى هي 48
القيمة الصغرى هي 0

(12)



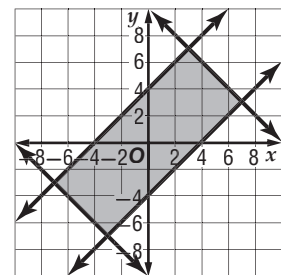
؛ $(6, 3), (-8, 10), (-8, -18)$
القيمة العظمى هي 42
القيمة الصغرى هي -140

(13)



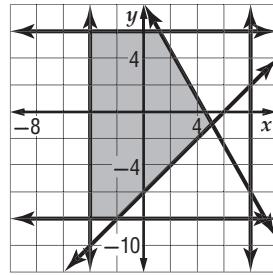
؛ $(2, 0), (5, 3), (-3, 8), (-6, 8)$
القيمة العظمى هي -10
القيمة الصغرى هي -105

(14)



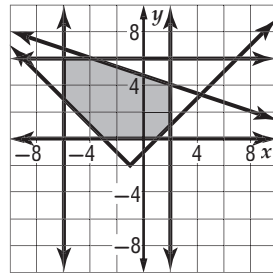
؛ $(3, 7), (7, 3), (-3, -7), (-7, -3)$
القيمة العظمى هي 43
القيمة الصغرى هي -43

(15)



$(5, -1), (1, 6), (-2, -8), (-4, -8), (-4, 6)$
القيمة العظمى هي 60
القيمة الصغرى هي -112

(16)



$(-4, 6), (2, 4), (2, 1), (1, 0),$
 $(-3, 0), (-6, 3), (-6, 6)$
القيمة العظمى هي 26
القيمة الصغرى هي -18

(17) افترض أن x تمثل عدد وحدات الإنارة من النوع الأول،
وأن y تمثل عدد وحدات الإنارة من النوع الثاني.
نظام المتباينات الذي يمثل الموقف في هذه المسألة هو:

$$x \geq 100$$

$$y > 0$$

$$y \geq 200$$

$$x + y \leq 450$$

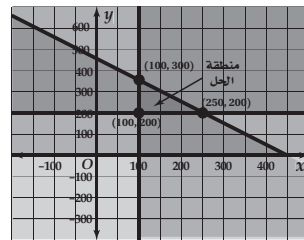
وأن دالة الدخل هي: $f(x, y) = 25x + 35y$

إحداثيات رؤوس منطقة الحل هي

$(100, 300), (100, 200), (250, 200)$

وتكون أكبر قيمة لهذه الدالة عند النقطة $(250, 200)$

لذا فإن على المصنع أن ينتج 250 قطعة من النوع الأول و 200 قطعة
من النوع الثاني.



(21) افترض أن x تمثل عدد الأطنان المستعملة لصنع الحاويات الصغيرة، وأن y تمثل عدد الأطنان المستعملة لصنع الحاويات الكبيرة. نظام المتباينات الذي يمثل الموقف في هذه المسألة هو:

$$x \geq 300$$

$$y \geq 450$$

$$x + y \leq 1200$$

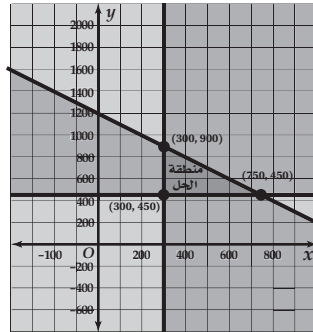
وأن دالة الربح هي: $f(x, y) = 175x + 200y$

إحداثيات رؤوس منطقة الحل هي

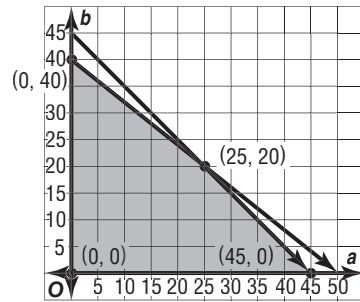
(750, 450), (300, 450), (300, 900)

أكبر ربح للمصنع هو 232500 ريال

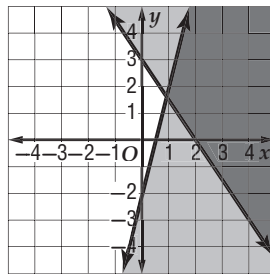
يحقق المصنع أكبر ربح عندما يستعمل 300 طن للحاويات الصغيرة و 900 طن للحاويات الكبيرة.



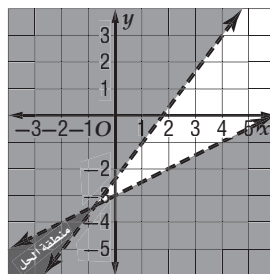
(25b)



(28)



(29)



(18) افترض أن x تمثل عدد الكتيبات، وأن y تمثل عدد النشرات الدعائية. نظام المتباينات الذي يمثل الموقف في هذه المسألة هو:

$$x \geq 50$$

$$y \geq 150$$

$$3x + 2y \leq 600$$

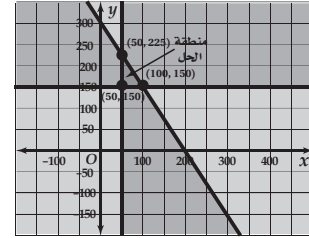
وأن دالة التكلفة هي: $f(x, y) = 8x + 4y$

إحداثيات رؤوس منطقة الحل هي

(50, 150), (100, 150), (50, 225)

وتكون أقل قيمة لهذه الدالة عند النقطة (50, 150)

لذا فإن على المكتب أن يطبع 50 كتيباً و 150 نشرة دعائية.



(20) افترض أن x تمثل عدد الصناديق الصغيرة، وأن y تمثل عدد الصناديق الكبيرة. نظام المتباينات الذي يمثل الموقف في هذه المسألة هو:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$3x + 5y \leq 480$$

$$25x + 50y \leq 4200$$

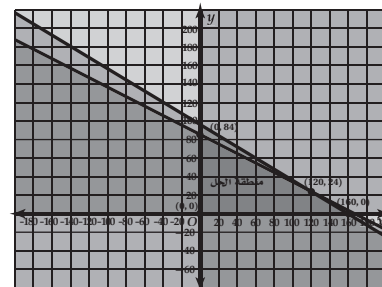
وأن دالة التكلفة هي: $f(x, y) = 5x + 8y$

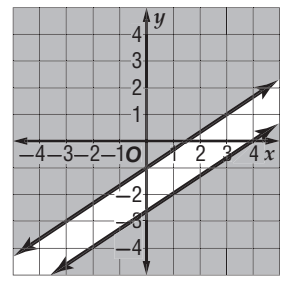
إحداثيات رؤوس منطقة الحل هي

(0, 0), (0, 84), (120, 24), (160, 0)

(أ) عدد الصناديق الصغيرة 160 صندوقاً، وعدد الصناديق الكبيرة 0 صندوق.

(ب) أكبر أجرة تساوي 800 ريال.

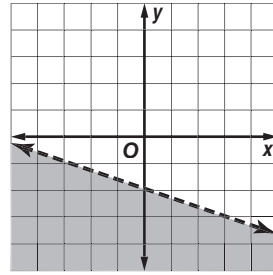




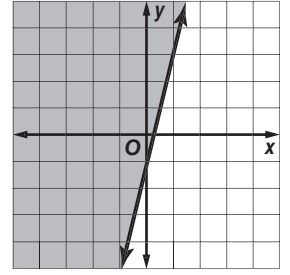
(30)

مجموعة الحل \emptyset

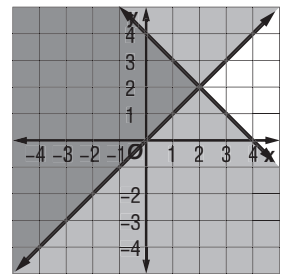
اختبار الفصل، ص (53):



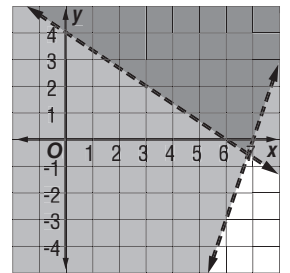
(12)



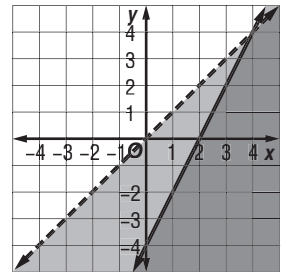
(11)



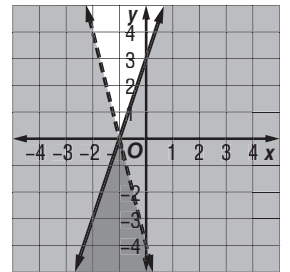
(13)



(14)



(15)



(16)

ملحوظات المعلم

التقويم التشخيصي

التهيئة ص (59)

العنوان	الدرس 2-1 حصتان	توسع 2-1 حصة واحدة	الدرس 2-2 حصتان	الدرس 2-3 حصتان
مقدمة في المصفوفات	تنظيم بيانات في مصفوفة. استعمال العمليات على المصفوفات لتحليل البيانات.	استعمال الجداول الإلكترونية لتنظيم البيانات وعرضها.	العمليات على المصفوفات	ضرب المصفوفات
الأهداف			جمع المصفوفات وطرحها. ضرب مصفوفة في عدد.	ضرب المصفوفات. استعمال خصائص ضرب المصفوفات.
المفردات	المصفوفة، العنصر، الرتبة، مصفوفة الصف، مصفوفة العمود، المصفوفة المربعة، المصفوفة الصفرية، المصفوفات المتساوية.		الضرب في عدد ثابت.	
التمثيلات المتعددة	ص (64)			
مصادر الدرس	مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق كتاب التمارين • ص (10) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق كتاب التمارين • ص (11) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق كتاب التمارين • ص (12) دون ضمن فوق	
التقنيات لكل درس	الإنترنت، ص (61)		عرض تقديمي، ص (72)	نظام استجابة، ص (75)
تنويع التعليم	ص (64, 65)		ص (69, 72)	ص (74, 75)

التقويم التكويني

اختبار منتصف الفصل ص (80)

المفاتيح: **دون** دون المتوسط **ضمن** ضمن المتوسط **فوق** فوق المتوسط

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقييم	المجموع
(12) حصة	(4) حصص	(16) حصة

الدرس 2-4	حصتان	الدرس 2-5	حصتان	توسع 2-5	حصة واحدة
المحددات وقاعدة كرامر		النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية		معمل الحاسبة البيانية : المصفوفات الموسعة	
<ul style="list-style-type: none"> حساب المحددات. حل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر. 		<ul style="list-style-type: none"> إيجاد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2×2. كتابة معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وحلها. 		<ul style="list-style-type: none"> استعمال الحاسبة البيانية والمصفوفة الموسعة لحل نظام من المعادلات الخطية. 	
المحدد، المحدد الدرجة الثانية، محدد الدرجة الثالثة، قاعدة الأقطار، مصفوفة المعاملات، قاعدة كرامر		مصفوفة الوحدة النظير الضربي للمصفوفة المعادلة المصفوفية مصفوفة المتغيرات مصفوفة الثوابت			
مصادر المعلم للأنشطة الصفية		مصادر المعلم للأنشطة الصفية			
<ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق 		<ul style="list-style-type: none"> تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق 			
كتاب التمارين		كتاب التمارين			
ص (13) دون ضمن فوق		ص (14) دون ضمن فوق			
السبورة التفاعلية، ص (82)		مدونة، ص (90)			
ص (82, 85, 88)		ص (91, 94)			

التقويم الختامي



- دليل الدراسة والمراجعة ص (96-98)
- اختبار الفصل ص (99)
- اختبار تراكمي ص (102, 103)

المعالجة	التشخيص	التقويم
		التقويم التشخيصي ✓
	بداية الفصل 2	
مخطط المعالجة، ص (59)	التهيئة للفصل 1 ، ص (59)	
	بداية كل درس	
مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب	فيما سبق، والآن، لماذا؟	
	خلال كل درس وبعده	التقويم التكويني ✓
تدريبات المهارات، الفصل 2	تحقق من فهمك، لكل مثال	
تنوع التعليم	تأكد	
تنوع الواجبات المنزلية	مسائل مهارات التفكير العليا	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 2	مراجعة تراكمية	
www.obeikaneducation.com	أمثلة إضافية	
	تنبيه!	
	الخطوة 4، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (30, 31)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
تدريبات المهارات، الفصل 2	اختبار منتصف الفصل، ص (80)	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 2	اختبار منتصف الفصل، ص (32)	
www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com	
	نهاية الفصل	
تدريبات المهارات، الفصل 2	دليل الدراسة والمراجعة، ص (96-98)	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 2	اختبار الفصل، ص (99)	
www.obeikaneducation.com	اختبار تراكمي، ص (102,103)	
	www.obeikaneducation.com	
	بعد انتهاء الفصل 1	التقويم الختامي ✓
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 2	اختبار الفصل، النماذج 1A, 2B ، ص (15-20)	
www.obeikaneducation.com	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (21-22)	
	اختبار المفردات ، ص (14)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطوّلة ، ص (23)	
	اختبار تراكمي ، ص (24-26)	
	www.obeikaneducation.com	

البديل 1

جميع المستويات

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون حدّد الطلاب الذين يعرفون كيف يؤدّون العمليات على المصفوفات باستعمال الحاسبة البيانية، واطلب إليهم إعداد قائمة بسلسلة المفاتيح التي يحتاجونها، ثم اطلب إليهم أن يوضّحوا لزملائهم الذين يجدون صعوبة في ذلك، كيف يستعملون الحاسبة البيانية لأداء العمليات على المصفوفات.

البديل 2

دون المتوسط دون

ارسم على السبورة قائمة من البيانات، على أن تتكوّن من ثلاثة أعمدة وصفين على الأقل. وعندما تخبر الطلاب أن البيانات في القائمة يمكن أن تُمثّل في مصفوفة، امسح عناوين الصف والعمود، وارسم قوس مصفوفة حول البيانات، واستعمل هذه المصفوفة لتقديم المفردات المتعلقة بالمصفوفات مثل: الرتبة، الصف، العمود، إلخ.

البديل 3

فوق المتوسط فوق

حفّز الطلاب لكي يستعملوا نظامًا من المعادلات لاشتقاق قاعدة كرامر، وفيما يلي إحدى الطرق لعمل ذلك:

$$\text{استعمل النظام الآتي } \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \text{ حلّ كلتا المعادلتين في } x$$

$$.x = \frac{c - by}{a}, x = \frac{f - ey}{d}$$

ساو بين هاتين القيمتين، وحل المعادلة في المتغير y .

$$y = \frac{dc - af}{db - ae} \text{ أي } \frac{c - by}{a} = \frac{f - ey}{d}$$

وبطريقة مماثلة، حلّ كلتا المعادلتين في المتغير y .

$$y = \frac{c - ax}{b}, y = \frac{f - dx}{e}$$

$$\frac{c - ax}{b} = \frac{f - dx}{e} \text{ ساو بين هاتين القيمتين}$$

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}, \text{ حل المعادلة في المتغير } x$$

ثم اطلب إلى الطلاب مقارنة قيم x ، y بالقيم الناتجة عند استعمال قاعدة كرامر.

ملخص الدروس

2-1 مقدمة في المصفوفات

- تقدّم المصفوفات على أنها طريقة لتنظيم البيانات وتحليلها، وتحدد رتبة المصفوفة بدلالة بُعديها؛ فمثلاً المصفوفة التي تتكون من m صفًا و n عمودًا تكون مصفوفة من الرتبة $m \times n$.
- مصفوفة الصف هي مصفوفة تتكون من صف واحد.
- مصفوفة العمود هي مصفوفة تتكون من عمود واحد.
- المصفوفة المربعة، مصفوفة لها العدد نفسه من الصفوف والأعمدة.
- المصفوفة الصفريّة، مصفوفة جميع عناصرها أصفار.
- المصفوفتان المتساويتان هما مصفوفتان لهما الرتبة نفسها، وكل عنصر في إحدهما يساوي العنصر المناظر له في الأخرى.

2-2 العمليات على المصفوفات

- يتعين عند جمع مصفوفتين أو طرحهما أن تتحقق أولاً من أن لهما الرتبة نفسها، ثم يُحسب مجموع العناصر المتناظرة أو الفرق بينها، ويكون لمصفوفة ناتج الجمع أو الطرح الرتبة نفسها للمصفوفتين الأصليتين.
 - ونجد ناتج ضرب مصفوفة في ثابت، بضرب كل عنصر في المصفوفة في هذا الثابت، ويكون للمصفوفة الناتجة رتبة المصفوفة الأصلية نفسها، فمثلاً
- $$2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-2) & 2(1) & 2(0) \\ 2(4) & 2(-1) & 2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 8 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$
- وللتحقق من خصائص العمليات على المصفوفات، ينظر الطالب إلى الأمثلة التي توضح خصائص الإبدال والتجميع على عملية جمع المصفوفات وخاصية التوزيع.

2-3 ضرب المصفوفات

- عند ضرب مصفوفتين، فإنه من المهم أولاً تحديد ما إذا كان ناتج الضرب مُعرّفًا أم لا، فيمكن ضرب مصفوفتين فقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية، فمثلاً يكون ناتج ضرب:
- $$A_{m \times n} \cdot B_{n \times t}$$
- مصفوفة رتبته $m \times t$
- ويربط ضرب المصفوفات جميع عناصر أحد الصفوف في المصفوفة الأولى بجميع عناصر أحد الأعمدة في الثانية، وتكون نتيجة ذلك عنصرًا واحدًا فقط، فمثلاً:
- $$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2) + -2(5) & 3(4) + -2(1) \\ 1(2) + 4(5) & 1(4) + 4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 22 & 8 \end{bmatrix}$$
- ويحقق ضرب المصفوفات خاصيتي التجميع والتوزيع، أما خاصية الإبدال فلا تتحقق على ضرب المصفوفات.

الترباط الرأسي

ما قبل الفصل 2

- استعمال العمليات المناسبة لحل مسائل تتضمن أعدادًا نسبية.
- تمثيل التمدد والانعكاس والانسحاب في المستوى البياني.
- تمثيل العلاقات باستعمال الجداول.
- تحويل المعادلات إلى صور أخرى وحلّها.

الفصل 2

- تنظيم البيانات
- تحليل مواقف لأنظمة من المعادلات في متغيرين أو أكثر، وكتابة صيغ لها لحل مسائل.
- استعمال المصفوفات لحل أنظمة من المعادلات.

ما بعد الفصل 2

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- تعريف الدوال ووصف خواصها، والتحويل بين الصيغ اللفظية والعددية والبيانية والرمزية.
- استعمال الدوال وخواصها؛ لنمذجة مسائل من واقع الحياة وحلّها.

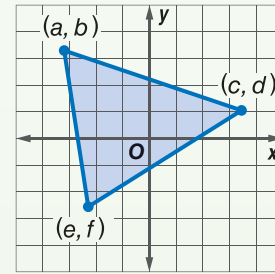
2-4

المحددات وقاعدة كرامر

لكل مصفوفة مربعة محدّدة، ويمكن إيجاد محدّدة المصفوفة 2×2 بحساب الفرق (حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس - حاصل ضرب عنصري القطر الآخر)، أما محدّدة المصفوفة 3×3 ، فيمكن إيجادها باستعمال قاعدة الأقطار.

إذا علّمت إحداثيات رؤوس مثلث، فإنه يمكن استعمال محدّدة لإيجاد مساحته فمثلاً: مساحة المثلث الذي رؤوسه (a, b) , (c, d) , (e, f) هي $|A|$ ، حيث

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$



ويمكن استعمال قاعدة كرامر لحل أنظمة المعادلات باتباع الخطوات الآتية:

- اكتب كل معادلة في الصورة القياسية.
- ثم اجعل كل متغير يساوي كسراً، كلٌّ من بسطه ومقامه محدّدة، على أن تتكون محدّدة المقام من معاملات المتغيرات، أما محدّدة البسط فتختلف من متغير إلى آخر، ولا يكون للنظام حل إذا كانت قيمة محدّدة المقام تساوي صفراً.

2-5

النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي 1، وباقي العناصر أصفار، وعند ضرب مصفوفة في مصفوفة الوحدة، فإن الناتج هو المصفوفة الأصلية، وتكون المصفوفتان المربعتان إحداهما نظير ضربي للأخرى، إذا كان حاصل ضربهما هو مصفوفة الوحدة. ويكتب النظير الضربي للمصفوفة 2×2 في صورة حاصل ضرب عاملين هما:

- العامل الأول: كسر بسطه 1، ومقامه هو محدّدة المصفوفة المعطاة.
- العامل الآخر: هو المصفوفة المعدلة للمصفوفة الأصلية، بحيث يبدل العنصران على القطر الرئيس أحدهما مكان الآخر، وتغير إشارات عناصر القطر الآخر.

وتُستعمل معادلة مصفوفية واحدة للتعبير عن نظام المعادلات، يتكون أحد طرفيها من مصفوفة المعاملات مضروبة في مصفوفة عمود المتغيرات. أما الطرف الآخر للمعادلة، فيتكون من مصفوفة عمود الثوابت. وإذا أردت حلّ النظام، فاضرب كل طرف في المعادلة في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

مشروع الفصل

تنظيم النشاط الرياضي:

يتوزع الطلاب المشاركون في النشاط الرياضي بالمصفوف الثلاثة لإحدى المدارس الثانوية على رياضات أربع هي: كرة القدم، كرة السلة، الكرة الطائرة، تنس الطاولة.

- دوّن أسماء الصفوف الثلاثة بالمدرسة، وأنواع الرياضات الأربع الممثلة للنشاط الرياضي بالمدرسة، كما في الشكل أدناه:

كرة القدم	كرة السلة	كرة تنس الطاولة
1 الصف	2 الصف	3 الصف

- سجّل أعداد المشاركين في كل رياضة من كل صف؛ لتشكّل مصفوفة أعداد يدل كل رقم فيها على عدد المشاركين في رياضة ما من الصف المعني؛ وضع صفراً إذا لم يكن هناك مشاركون في إحدى الرياضات من أحد الصفوف.
- هل ترى أن ذلك يساعد على سهولة البحث عن عدد المشاركين في نشاط رياضي معيّن في المدرسة؟

فيما سبق:

درست حل نظام من المعادلات .

والآن:

- أنظم البيانات في مصفوفة.
- أجري العمليات على المصفوفات.
- أحسب المحددات.
- أجد النظير الضربي لمصفوفة.
- أستعمل المصفوفات لحل نظام من المعادلات.

لماذا؟

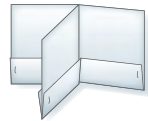
تنظيم البيانات: غالباً ما تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات، فمثلاً إذا نظم الطلاب المشاركون في الألعاب الرياضية المختلفة من مدرستين ثانويتين في مصفوفات مختلفة، فإن أعداد جميع الطلاب المشاركين في هذه الألعاب يمكن الحصول عليها بجمع المصفوفات.

منظم أفكار

المطويات

المصفوفات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك في الفصل 2، مبتدئاً بورقة من دفتر الملاحظات.

- 1 اثن حافة الورقة بعرض 2cm بموازة الضلعين القصيرين.
- 2 اطو الورقة الناتجة إلى أرباع، ثم قص كما في الشكل.
- 3 أعد الطي، ثم ثبت الجيوب مستعملاً الدباسة.
- 4 اكتب على كل جيب عنواناً لدرس من دروس الفصل.



منظم أفكار

المطويات

وقت استعمالها شجع الطلاب أثناء دراستهم الفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم؛ لاستعمالها في المراجعة استعداداً لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (28).
يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

غرضها يدوّن الطلاب ملاحظاتهم حول المصفوفات بإعطاء أمثلة وكتابة ملاحظات في بطاقات ووضعها في جيوب المطوية.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنوانتها كما هو موضح، واستعمال الجزء المناسب في أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل، وشجعهم كذلك على تطبيق ما تعلموه، عن طريق كتابة المفردة في أحد وجهي البطاقة وكتابة تعريفها في الوجه الآخر، وبين لهم أنه يمكنهم استعمالها بوصفها بطاقات خاطفة لمراجعة المفردات في أثناء الدرس.

المفردات قدّم مفردات الفصل مستعملاً النمط الآتي:

التعريف: عملية ضرب المصفوفة في ثابت تعني ضرب كل عنصر من عناصرها في هذا الثابت.

مثال: إذا كان $T = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ ، فإن:

$$3T = \begin{bmatrix} (3)(5) & (3)(11) \\ (3)(-3) & (3)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 33 \\ -9 & 21 \end{bmatrix}$$

سؤال: ماذا تعني عملية ضرب المصفوفات في ثابت؟ هو عدد يضرب في كل عنصر من عناصر المصفوفة.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب، والعبارة "إذا... فقم" في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى	ضمن المتوسط
1	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،
إذا	بمراجعة النظرير الجمعي والضريري، وتبسيط العبارات الجبرية، وحل نظام من معادلتين خطيتين جبرياً.
فقم	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com
2	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،
إذا	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
فقم	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

اختبار سريع

أوجد كلاً من النظرير الجمعي والضريري لكل عدد مما يأتي:

- (1) $4 - \frac{1}{4}$ (2) $-15 - \frac{1}{15}$
 (3) $0.2 - 0.25$ (4) $-1.35 - \frac{20}{27}$
 (5) $-\frac{3}{4} - \frac{4}{3}$ (6) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} - 2\frac{1}{3}$

مثال 1

أوجد كلاً من النظرير الجمعي والضريري للعدد -5.
 النظرير الجمعي للعدد -5 هو العدد x ، بحيث إن $-5+x=0$ ؛ لذا فإن $x=5$.
 النظرير الضريبي للعدد -5 هو العدد x ، حيث إن $-5x=1$ ؛ لذا فإن $x=-\frac{1}{5}$.

مثال 2

بسط العبارة: $\frac{3}{4}(8x-4)+3x$
 $\frac{3}{4}(8x-4)+3x$
 خاصية التوزيع $=\frac{3}{4}(8x)-\frac{3}{4}(4)+3x$
 بالتبسيط $=6x-3+3x$
 بجمع الحدود المتشابهة $=9x-3$

مثال 3

حل نظام المعادلتين الآتي جبرياً:
 $3y = x - 9$
 $4x + 5y = 2$
 بما أن معامل x في المعادلة الأولى هو 1، فاستعمل طريقة التعويض. أولاً: حل المعادلة بالنسبة للمتغير x .
 $3y = x - 9 \rightarrow x = 3y + 9$
 بتعويض $3y + 9$ بدلاً من x
 $4(3y + 9) + 5y = 2$
 خاصية التوزيع $12y + 36 + 5y = 2$
 بجمع الحدود المتشابهة $17y = -34$
 بقسمة الطرفين على 17 $y = -2$
 ولإيجاد قيمة x ، استعمل المساواة $-2 = y$ في المعادلة الأولى.
 بالتعويض عن y بـ -2 $3(-2) = x - 9$
 بالضرب $-6 = x - 9$
 بجمع 9 للطرفين $3 = x$
 فيكون الحل $(3, -2)$.

بسط كل عبارة مما يأتي:

- (7) $6x + 12y$ (8) $6(x + 2y)$
 (9) $4x + 17$ (10) $4(x + 5) - 3$
 (11) $-19x + 6$ (12) $-4(3x) - (7x - 6)$
 (13) $\frac{26}{3}x - \frac{76}{3}$ (14) $5(2x - 5) - \frac{1}{3}(4x + 1)$
 (15) $17x - 3y - 9$ (16) $6(2x - 1) - 3(y - x) + 0.5(4x - 6)$

حل نظام المعادلتين في كل مما يأتي جبرياً:

- (1) $2x - 5y = -18$ (2) $2x - y = -1$
 $3x + 4y = 19$ $y = x + 3$
 (3) $4x + 2y = 4$ (4) $4y + 6x = -6$
 $x = y - 8$ (5) $5y - x = 35$

16 هدايا: توزع مدرسة هدايا (حقائب وأقلام) كل عام على المتفوقين، بلغ إجمالي ثمنها هذا العام 534 ريالاً، وكان سعر الحقيبة 30 ريالاً، وسعر القلم 9 ريالاً، أما في العام السابق فبلغ إجمالي ثمن الهدايا 448 ريالاً، وكان سعر الحقيبة 25 ريالاً، وسعر القلم 8 ريالاً. اكتب نظاماً من معادلتين، ثم حله لتجد عدد الحقائب والأقلام المشتراة في كل عام، علماً بأن الحقائب والأقلام لها العدد نفسه في العامين.
 انظر الهامش.

إجابة:

$30x + 9y = 534$ (16)

$25x + 8y = 448$

عدد الحقائب = 16

عدد الأقلام = 6

مقدمة في المصفوفات Introduction to Matrices

لماذا؟

هاتف محمول: حصل صالح على عدة عروض لشراء هاتف محمول حسب النوع، وسعة الذاكرة، والسعر. وحتى يكون قادرًا على المقارنة بين العروض بسهولة، نظم البيانات في مصفوفة كما يلي:

النوع	السعر	سعة الذاكرة
العروض الأول	420	512
العروض الثاني	399	512
العروض الثالث	315	256
العروض الرابع	289	128

تنظيم البيانات: المصفوفة هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين. وتُنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى. وتُسمى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا**. ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال الحروف الكبيرة.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ثلاثة صفوف
العنصر -1 موجود في الصف 2، والعمود 1، ويرمز إليه بالرمز a_{21} .

العنصر 8 موجود في الصف 3، والعمود 2، ويرمز إليه بالرمز a_{32} .

4 أعمدة

يمكن تحديد نوع المصفوفة **بترتيبها**: فالمصفوفة المكونة من m صفًا و n عمودًا يقال عنها مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أو من النوع $m \times n$ (تقرأ " m في n "). فالمصفوفة A في الأعلى هي مصفوفة من النوع 3×4 أو من الرتبة 3×4 ؛ لأنها تحتوي على 3 صفوف، و 4 أعمدة. ويدل الرمز a_{12} على عنصر في المصفوفة A ، على حين يدل الرمز b_{12} على عنصر في المصفوفة B .

مثال 1 رتبة المصفوفة وعناصرها

استعمل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$ للإجابة عن كلِّ ممَّا يأتي:

(a) حدد رتبة المصفوفة A .

$$\begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix}$$

صف 2
عمود 1

بما أن العنصر a_{21} موجود في الصف 2، والعمود 1، فإن قيمته هي 9.

$$\left\{ \begin{bmatrix} -18 & 6 & 38 \\ 9 & -9 & 22 \end{bmatrix} \right\}$$

صفان
3 أعمدة

بما أن A فيها صفان و 3 أعمدة، فإن رتيبها 2×3 .

تحقق من فهمك

استعمل المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 19 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ للإجابة عن كلِّ ممَّا يأتي:

(1A) ما رتبة B ؟ 3×2

(1B) ما قيمة b_{32} ؟ -1

فيما سبق:

درستُ حل مسائل باستعمال تنظيم البيانات في جداول.

والآن:

- أنظم بيانات في مصفوفة.
- أستعمل العمليات على عناصر صفوف أو أعمدة مصفوفة لتحليل البيانات.

المفردات:

المصفوفة matrix

العنصر element

الرتبة order

مصفوفة الصف row matrix

مصفوفة العمود column matrix

المصفوفة المربعة square matrix

المصفوفة الصفرية zero matrix

المصفوفات المتساوية equal matrices

www.obeikaneducation.com

قراءة الرياضيات

يدل الرمز a_{ij} على العنصر الواقع في الصف i والعمود j من المصفوفة A .

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 2-1

حل مسائل باستعمال تنظيم البيانات في جداول.

الدرس 2-1

تنظيم بيانات في مصفوفة.

استعمال العمليات على المصفوفات لتحليل البيانات.

ما بعد الدرس 2-1

استعمال المصفوفات لحل أنظمة من المعادلات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" وأسأل:

- ما عدد الصفوف في مصفوفة الهاتف المحمول؟ 4
- ما عدد الأعمدة في مصفوفة الهاتف المحمول؟ 3
- ما العدد الظاهر في الصف 3، والعمود 2؟ 256

تنظيم البيانات

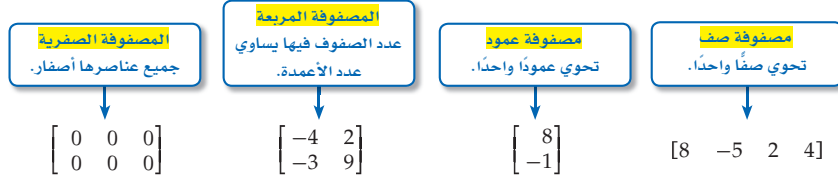
مثال 1 يبيِّن كيفية تحديد رتبة المصفوفة وتحديد عناصرها.

مثال 2 يبيِّن كيفية تنظيم بيانات من واقع الحياة في مصفوفة.

مصادر الدرس 2-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (64)	• تنوع التعليم، ص (64، 65)	• تنوع التعليم، ص (65)
كتاب التمارين	• ص (10)	• ص (10)	• ص (10)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.



تكون **المصفوفتان متساويتين** إذا كانتا من الرتبة نفسها، وتساوت عناصرهما المتناظرة.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان متساويتان.

ليست جميع العناصر المتناظرة متساوية.

المصفوفتان لهما رتبتان مختلفتان.

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

يدل التناظر على العناصر التي تقع بالضبط في الموقع نفسه من كل مصفوفة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 (a) حدّد رتبة المصفوفة

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

2 × 4

(b) أوجد قيمة a_{12} .

2 الجامعة يريد حمد الالتحاق

بإحدى الجامعات الثلاث A, B, C.

وقد جمع معلومات تتعلق برسوم التسجيل (X)، والسكن والطعام (Y)، وعدد الطلاب (Z) في

الجامعات الثلاث: A B C

$$x = 6160, \quad y = 5958, \quad z = 26160$$

$$x = 6293, \quad y = 7250, \quad z = 30409$$

$$x = 5352, \quad y = 6280, \quad z = 12609$$

(a) نظم البيانات في مصفوفة، على

أن تُرتب الأعمدة على النحو

التالي:

رسوم التسجيل، والسكن

والطعام، وعدد الطلاب.

X Y Z

$$A \begin{bmatrix} 6160 & 5958 & 26160 \end{bmatrix}$$

$$B \begin{bmatrix} 6293 & 7250 & 30409 \end{bmatrix}$$

$$C \begin{bmatrix} 5352 & 6280 & 12609 \end{bmatrix}$$

(b) ما رتبة المصفوفة؟ 3×3

وما قيمة العنصر الموجود في

الصف الثالث والعمود

الثاني؟ 6280

تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات وتحليلها.

مثال 2 من واقع الحياة

تنظيم البيانات في مصفوفة

كرة قدم: رصد مدرب فريق المدرسة لكرة القدم إنجازات ثلاثة لاعبين في مباريات العام الدراسي فكانت على النحو الآتي:

ياسر: 20 مباراة، 31 تسديدة، 20 تمريرة، 30 قطع تمريرات، 4 أهداف.	ماجد: 18 مباراة، 43 تسديدة، 170 تمريرة، 40 قطع تمريرات، 11 هدفاً.	معاذ: 12 مباراة، 24 تسديدة، 113 تمريرة، 15 قطع تمريرات، 4 أهداف.
---	---	--

(a) نظم البيانات في مصفوفة A، على أن تُرتب أسماء اللاعبين تنازلياً حسب عدد التسديدات.

(b) حدد رتبة المصفوفة. وما قيمة a_{23} ؟

(a) الأهداف قطع التمريرات التمريرات التسديدات المباريات

ماجد	18	43	170	40	11
ياسر	20	31	20	30	4
معاذ	12	24	113	15	4

(b) هناك 3 صفوف، و 5 أعمدة؛ لذا فإن رتبة المصفوفة 3×5 وقيمة العنصر a_{23} الموجودة في الصف 2، والعمود 3، هي 20.

تحقق من فهمك

(2) يبين الجدول المجاور الأسعار بالريال لأربعة أنواع من الفطائر بثلاثة أحجام في أحد المطاعم.

(A) نظم هذه البيانات في مصفوفة A، على أن تكون الأسعار مرتبة تصاعدياً. انظر الهامش

(B) حدد رتبة المصفوفة. 4×3

(C) ما قيمة العنصر a_{21} ؟ 2.5 ريال

	كبيرة	وسط	صغيرة
الجبن	5	3.5	2.5
الزعت	4	3	2
البيض	5.5	4	3
اللحم	6	5	4

الدرس 1-2 مقدمة في المصفوفات 61

التعليم باستخدام التقنيات

الإنترنت اطلب إلى الطلاب البحث على شبكة الإنترنت عن بيانات تشير اهتمامهم مثل: عدد الحجاج لثلاث دول خلال ثلاث سنوات. ثم بيّن لهم كيف يستعملون المصفوفة لتنظيم هذه البيانات.

إجابة (تحقق من فهمك):

(2A)	كبيرة	وسط	صغيرة
	4	3	2
	5	3.5	2.5
	5.5	4	3
	6	5	4

إرشادات للمعلم الجديد

استيعاب الرموز أكد للطلاب أن

رتبة المصفوفة تُعطي دائماً في الصورة

(عدد الصفوف في عدد الأعمدة).

تحليل البيانات: عند تنظيم البيانات في مصفوفة، يسهل تحليلها وتفسيرها. وتعطي مجاميع عناصر الصفوف أو الأعمدة أحيانًا معلومات ذات معنى. وفي أحيان أخرى لا تعطي أي معلومات ذات معنى.

مثال 3 تحليل البيانات باستعمال المصفوفات

كرة قدم: إذا أراد مدرب فريق كرة القدم، الأهداف قطع التمريرات التمريرات التسديدات المباريات
(في مثال 2) استعمال المصفوفة للحصول على تحليلات إضافية لإحصائيات لاعبيه الثلاثة:

(a) اجمع عناصر كل من العمودين 2 و 3، وفسر النتائج.

مجموع عناصر عمود 2 يساوي 98، وهو يمثل العدد الكلي لتسديدات اللاعبين خلال جميع المباريات. مجموع عناصر عمود 3 يساوي 303، وهو يمثل العدد الكلي لتمريرات اللاعبين خلال جميع المباريات.

(b) أراد المدرب تحديد معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة، فقرر أن يجمع عناصر العمود 2 ويقسم المجموع على 3، فما الناتج؟
الناتج هو 33 تقريبًا.

(c) هل كانت طريقة المدرب في حساب معدل تسديد اللاعب في المباراة الواحدة صحيحة؟ فسر إجابتك. لا؛ لأن مجموع التسديدات في العمود 2 ليس لثلاث مباريات، ويتعين على المدرب بدلًا من ذلك قسمة مجموع عناصر العمود 2 على مجموع عناصر العمود 1 حيث سيكون المعدل الدقيق $1.96 \div 50 = 1.96$.

(d) هل جمع عناصر الصفوف يزيد المدرب بيانات ذات معنى؟ فسر إجابتك. لا؛ لأن عناصر الصف عبارة عن خمسة أنواع مختلفة من البيانات.

تحقق من فهمك

(3) **صناعة:** يبين الجدول المجاور عدد المصانع الوطنية العاملة في قطاعي صناعة المنسوجات، وصناعة الورق ومنتجاته في 4 مناطق إدارية مختلفة في المملكة.

المنطقة	صناعة المنسوجات	صناعة الورق ومنتجاته
مكة المكرمة	28	45
الرياض	29	49
الشرقية	14	37
الباحة	1	1

(A) نظم البيانات في مصفوفة. **انظر الهامش.**
(B) اجمع عناصر كل عمود، وفسر النتائج.
(C) اجمع عناصر كل صف، وفسر النتائج.
(D) هل إيجاد معدل عناصر كل صف أو عناصر كل عمود يعطي بيانات ذات معنى؟ كل عمود ليس له معنى.

إرشادات للدراسة

عرض البيانات

يكون من الممكن أحيانًا تبديل عناصر الصفوف وعناصر الأعمدة في المصفوفات التي تمثل معلومات من واقع الحياة.

تحليل البيانات

مثال 3 يبين كيفية استعمال المصفوفات لتحليل البيانات، باستعمال العمليات على سطور وأعمدة المصفوفة.

مثال إضافي

استعمل المصفوفة الموجودة في المثال 2 من الأمثلة الإضافية.

	X	Y	Z
A	6160	5958	26160
B	6293	7250	30409
C	5352	6280	12609

(a) أوجد المتوسط الحسابي

للعناصر الواقعة في العمود 1، وفسر معنى القيمة الناتجة. تدل على أن متوسط رسوم التسجيل في الجامعات الثلاث هو 5935 ريالاً.

(b) أيُّ الجامعات الثلاث تكلفتها الإجمالية هي الأقل؟ الجامعة C

(c) هل يزودنا جمع عناصر الصفوف ببيانات لها معنى؟ فسر ذلك. لا؛ لأن أول عددين في أي صف بالريالات، على حين أن العنصر الثالث يمثل عدد الطلاب.

(d) هل يزودنا جمع عناصر

العمود الثالث ببيانات ذات معنى؟ نعم، جمع عناصر العمود الثالث يعطي عدد الطلاب المسجلين في الجامعات الثلاث.

تأكد

مثال 1

حدّد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$\begin{matrix} 3 \times 2 & \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 17 & 21 \end{bmatrix} & (3) & 4 \times 1 & \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} & (2) & \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & -8 \end{bmatrix} & (1) & 2 \times 4 \end{matrix}$$

62 الفصل 2 المصفوفات

إجابة (تحقق من فهمك):

$$(3A) \begin{bmatrix} 28 & 45 \\ 29 & 49 \\ 14 & 37 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} مكة المكرمة \\ الرياض \\ الشرقية \\ الباحة \end{matrix}$$

المحتوى الرياضي

المصفوفات توفر المصفوفة طريقة لتنظيم البيانات، كما أن لكل عنصر فيها غرضًا خاصًا، ولكي تكون المصفوفتان متساويتين، يجب أن يكون لهما الرتبة نفسها، وكل عنصر في المصفوفة الأولى يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة الثانية.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & x & -4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 5 & -8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$9 a_{24} \quad (7) \quad 2 a_{33} \quad (6) \quad 1 a_{11} \quad (5) \quad -8 a_{32} \quad (4)$$

(8) **زراعة:** يبين الجدول المجاور عدد صناديق الخضراوات المنتجة في مزرعتين مختلفتين في أحد المواسم:

المزرعة	خيار	كوسة	بادنجان	طماطم
1	540	570	488	500
2	850	1015	800	820

(a) نَظِّم البيانات في مصفوفة.

(b) ما النوع الأقل إنتاجًا؟ **البادنجان**

(c) اجمع عناصر كل صف، وهل لهذه المجاميع معنى؟ فسر إجابتك.

(d) اجمع عناصر كل عمود، وفسر إجابتك. **إجابة ممكنة: المجاميع هي: 1320, 1288, 1585, 1390**
تمثل إجمالي عدد الصناديق التي تنتجها المزرعتان معًا من الخيار والكوسة والبادنجان والطماطم على الترتيب.

المثالان 2, 3

(8c) الصف 1: 2098

ويمثل إجمالي عدد صناديق الخضراوات المذكورة التي

تنتجها المزرعة 1

الصف 2: 3485

ويمثل إجمالي عدد صناديق الخضراوات المذكورة التي

تنتجها المزرعة 2.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 8-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات

(20a) المخزن الأول

المخزن الأول	المخزن الثاني	المخزن الثالث
2000	3000	2750
1200	1175	1500
500	2250	1300

(20c) مجموع عناصر الصف الأول: 7750

مجموع عناصر الصف الثاني: 3875

مجموع عناصر الصف الثالث: 4050

وتمثل إجمالي الكيلوجرامات الموجودة في المخازن الثلاثة من كل نوع.

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$(9) \quad 1 \times 2 \quad [-9 \quad 6] \quad (10) \quad 2 \times 2 \quad \begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix} \quad (11) \quad 2 \times 4 \quad \begin{bmatrix} 6 & 11 & -4 & -2 \\ -8 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(12) \quad 3 \times 3 \quad \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ x & 3y & 0 \\ 8 & 12 & 11 \end{bmatrix} \quad (13) \quad 3 \times 1 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix} \quad (14) \quad 1 \times 1 \quad [115]$$

$$\text{إذا كانت } A = \begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-9 a_{21} \quad (15) \quad 19 b_{22} \quad (16) \quad 2x b_{13} \quad (17) \quad y a_{12} \quad (18)$$

مثال 2 نَظِّم البيانات الآتية في مصفوفة:

الاسم	الجولة 1	الجولة 2	الجولة 3	المجموع
سعود	221	201	185	607
علي	168	233	159	560
مروان	187	189	211	587

(20) **تخزين:** ثلاثة مخازن لتوريد التمور؛ الأول فيه 2000kg خلاص و 1200kg برحي و 500kg سكري، والثاني فيه 3000kg خلاص و 1175kg برحي و 2250kg سكري، والثالث فيه 2750kg خلاص و 1500kg برحي و 1700kg سكري. **(a, c) انظر الهامش.**

(a) نَظِّم البيانات في مصفوفة، على أن تكون محتويات المخازن أعمدة المصفوفة.

(b) أوجد مجموع عناصر كل عمود، وماذا يمثل هذا المجموع؟

(c) أوجد مجموع عناصر كل صف، وماذا يمثل هذا المجموع؟

مثال 3

(20b) مخزن 1: 3700

مخزن 2: 6425، مخزن

3: 5550؛ وتمثل عدد

الكيلوجرامات من التمر

التي يحويها كل مخزن.

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	35-42 ، 32-33 ، 9-20
ضمن المتوسط	30-33 ، 35-42 ، 9-23 ، 28 ، 25-26
فوق المتوسط	21-42

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ x & -5 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 7 \\ 4x & 18 & -6 \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

(21) $a_{32} = 15$ (22) $b_{21} = 4x$ (23) $b_{12} = -3$ (24) $a_{21} = x$

أسعار حديد التسليح بالريال		
المقاس	الرياض	جدة
8mm	2410	2455
14mm	2210	2255
16mm	2200	2245

(25) **حديد التسليح:** يبين الجدول المجاور أسعار حديد التسليح حسب تقرير وزارة التجارة في منطقتي الرياض وجدة يوم الثلاثاء 16 مارس 2010 م.

(a) اكتب مصفوفة تمثل البيانات المعطاة. **انظر الهامش.**

(b) ما رتبة المصفوفة الناتجة في الفرع 3×2 ؟

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} x^2 + 4 & y + 6 \\ x - y & 2 - y \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & x & -2y \\ 5x & 3y & -4x \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

(26) $a_{11} = x^2 + 4$ (27) $a_{22} = 2 - y$ (28) $b_{31} = -y$ (29) $b_{23} = -4x$

الكوكب	البُعد عن الشمس (مليون ميل)	البُعد عن الأرض (مليون ميل)
عطارد	36.00	57
الزهرة	67.24	26
المريخ	141.71	35
المشتري	483.88	370
زحل	887.14	744
أورانوس	1783.98	1607
نبتون	2796.46	2680

(30) **فلك:** استعمل الجدول المجاور الذي

يبين بُعد بعض الكواكب عن الأرض والشمس.

(a) نَظِّم المسافات في مصفوفة A . **انظر الهامش.**

(b) ما رتبة المصفوفة الناتجة؟ 7×2

(c) ما قيمة العنصر a_{42} . **370**



الربط مع الحياة

بعد إعادة تعريف كلمة "كوكب" عام 2006، تبين أن بلوتو لم يعد يعتبر كوكبًا. وهو أحد 40 كويكبًا.

إجابات

(25a) $\begin{bmatrix} 2410 & 2455 \\ 2210 & 2255 \\ 200 & 2245 \end{bmatrix}$

(30a)

$A = \begin{bmatrix} \text{عطارد} & 36.00 & 57 \\ \text{الزهرة} & 67.24 & 26 \\ \text{المريخ} & 141.71 & 35 \\ \text{المشتري} & 483.88 & 370 \\ \text{زحل} & 887.14 & 744 \\ \text{أورانوس} & 1783.98 & 1607 \\ \text{نبتون} & 2796.46 & 2680 \end{bmatrix}$

(31a)

أهداف تمارين

$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 5 \\ 1 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(31c)

عبدالله صالح معاذ محمود

$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

(31b) أهداف: 18،

تمارين حاسمة: 19

(32) نموذج إجابة:

خطأ، المصفوفة المربعة التي فيها 4 أعمدة فيها 4 صفوف، لذلك لن يكون فيها عنصر في الصف الخامس.

(31) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذا السؤال تأثير قلب

الصفوف والأعمدة في المصفوفة.

(a) **جدوليًا:** نَظِّم البيانات في مصفوفة على أن يمثل عدد

الأهداف وعدد التمارين عمودًا. **انظر الهامش.**

(b) **جبريًّا:** أوجد مجاميع عناصر كل عمود.

(c) **جدوليًّا:** بَدِّل البيانات في المصفوفة على أن تصبح عناصر

الأعمدة هي عناصر الصفوف. **انظر الهامش.**

(d) **جبريًّا:** أوجد مجاميع عناصر كل صف. **أهداف: 18، تمارين حاسمة: 19**

(e) **تحليليًّا:** هل هناك أي تأثير في البيانات عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة؟ **إجابة ممكنة: عند تبديل عناصر الصفوف والأعمدة فإن البيانات لا تتأثر.**

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أم خاطئة. وفسر إجابتك:

(32) المصفوفة C مربعة ولها أربعة أعمدة، وتحوي العنصر c_{53} .

تنوع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الاجتماعيون اطلب إلى الطلاب مناقشة أمثلة لأشياء شاهدوها، ومثلت بياناتها في صفوف وأعمدة.

(33) اكتشاف الخطأ: حددت كل من ياسمين وسارة العنصر b_{32} في المصفوفة $B = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 0 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ ، فهل توصلت إحداهما للحل الصحيح؟ فسر إجابتك.

سارة

العنصر b_{32} غير موجود في المصفوفة B ، لأن B مصفوفة من النوع 2×3 .

ياسمين

قيمة العنصر b_{32} هي 5.

لا، العنصر b_{32} هو العنصر الثاني في الصف الثالث وهو 2.

تنبيه

اكتشف الخطأ في التمرين 33، ذكّر الطلاب بأنه عند تحديد عنصر ما في مصفوفة، فإن رقم الصف يوضع دائماً قبل رقم العمود.

(34) تحدّد: جد قيمة كل من المتغيرات x, y, z التي تحقق المعادلة: $(-8, -12, -5)$

$$\begin{bmatrix} 2x - y & 3x + 4z \\ 7x - 8z & 5y + 12z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9z - 5x + 1 & 5y - 2x \\ 3y - 4z & 12x + 2y \end{bmatrix}$$

(35) مسألة مفتوحة: أنشئ مصفوفة باستعمال بيانات من واقع الحياة تكون مجاميع عناصر أعمدها ذات معنى، ومجاميع عناصر صفوفها ليست ذات معنى. **انظر الهامش.**

(36) اكتب: اشرح كيف يمكن أن تساعدك المصفوفات عندما تقرر اختيار الجامعة التي ترغب في الالتحاق بها.

(36) يمكن ترتيب البيانات المتعلقة بالتخصصات المختلفة والجامعات في مصفوفة لتسهيل مقارنة البيانات بعضها ببعض.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلاب ذكر خصائص أخرى للمصفوفات، يتوقعون دراستها.

إجابة

(35) إجابة ممكنة:

	الطول	الوزن	العمر
أحمد	12	53	140
محمد	15	60	150
حسن	12	45	130

تدريب على اختبار

(37) نُظمت نتائج استطلاع للرأي في المصفوفة المجاورة:

بالاعتماد على هذه النتائج، أي استنتاج مما يأتي ليس صحيحاً؟ **D**

A هناك 771 صوتاً ضد المرشح الأول.

B عدد الأصوات المعارضة للمرشح الأول أكبر من تلك المؤيدة للمرشح الثاني.

C فرصة المرشح الثاني للفوز ضئيلة.

D عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الأول أكبر من عدد الأصوات المؤيدة للمرشح الثالث.

	مؤيد	ضد
المرشح الأول	1553	771
المرشح الثاني	689	1633
المرشح الثالث	2088	229

مراجعة تراكمية

(38) مجلس الإدارة: ترشح مسفر لمنصب رئيس مجلس الإدارة في إحدى الشركات الكبرى، وكان المُقترح يكتب ثلاثة أسماء بالترتيب على ورقة الاقتراع، فيحصل المتنافس على 3 نقاط لكل مركز أول، ونقطتين لكل مركز ثان، ونقطة واحدة لكل مركز ثالث. وقد ورد اسم مسفر في 490 ورقة اقتراع للمراكز الثلاثة، وكان مجموع نقاطه 878 نقطة. فإذا علمت أن عدد الأصوات التي حصل عليها من المركز الثاني أكثر بأربع أصوات من ضعف عدد الأصوات التي حصل عليها من المركز الثالث، فكم عدد الأصوات التي حصل عليها من كل مركز؟ **(مهارة سابقة)**

أول: 45، ثاني: 298، ثالث: 147

(39) ثقافة مالية: يبيع مخبز كعكة الشوكولاتة وكعكة الفواكه معاً في صناديق تحوي

من 6 إلى 12 كعكة من كلا النوعين، بحيث يحوي كل صندوق ثلاث كعكات على الأقل من كل نوع. فكم عدد كعكات كل صندوق من كلا النوعين ليكون الربح أكبر ما يمكن؟ **(الدرس 1-5)**

3 كعكات شوكولاتة، 9 كعكات فواكه

النوع	كعكة الفواكه	كعكة الشوكولاتة
التكلفة	13 ريالاً	19 ريالاً
سعر البيع	39 ريالاً	44 ريالاً

احسب قيمة كل عبارة مما يأتي إذا كان $w = 3, x = -2, y = 4, z = 0.5$ **(مهارة سابقة)**

$$4x - 6y + 2z \quad (40) \quad -31 \quad (41) \quad 185w + 2(x - z) + 2y \quad (42) \quad 4[3(2z + y) - 2(w + x)] \quad (43) \quad 52$$

الدرس 1-2 مقدمة في المصفوفات 65

تنوع التعليم

ضمن فوق

توسيع اطلب إلى الطلاب كتابة مصفوفة M ، على أن تكون رتبها 2×3 ، وعناصر الصف الأول فيها مختلفة، وكل عنصر في الصف الثاني يساوي مثلاً العنصر m_{12} .

إجابة ممكنة: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

1 التركيز

الهدف استعمال الجداول الإلكترونية لتنظيم البيانات وعرضها.

المواد اللازمة

- حاسوب يتضمن برنامج الجداول الإلكترونية.

إرشادات التدريس

اطلب إلى الطلاب، صقل مهاراتهم في استعمال الجداول الإلكترونية، عن طريق إدخال البيانات الموجودة في المثال. واقتراح عليهم كتابة عناوين وصفية داخل الخلايا في أعلى الأعمدة، ممّا يسهّل فهم النتائج وتفسيرها.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، على أن يشترك الطالب الذي يمتلك معلومات جيدة عن برنامج الجداول الإلكترونية، مع طالب آخر لديه خبرة أقل في هذا المجال.

التدريب اطلب إلى الطلاب حل السوالين 1 و 2.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال 3 لتقويم مدى مهارة الطلاب في إدخال البيانات في برنامج الجداول الإلكترونية.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل الطلاب عن بنية برنامج الجداول الإلكترونية المستعمل، واسألهم على سبيل المثال: أيّ الخلايا يحتوي على البيانات، وأيها يحتوي على العناوين التي تحدد نوع البيانات؟ ثم اطلب إليهم مقارنة بنية برنامج الجداول الإلكترونية ببنية المصفوفة.

الهدف

استعمل الجداول الإلكترونية لتنظيم البيانات وعرضها وتحليلها.

مثال

جمع محل لبيع التمور بيانات عن مبيعاتها في أربعة أسابيع متتالية، ونظمها في الجدول المجاور. أدخل البيانات في برنامج الجداول الإلكترونية.

مبيعات محل تمور خلال 4 أسابيع متتالية بالكيلوجرامات				
نوع التمر	1	2	3	4
خلاص	17	22	11	23
مكتومي	31	34	22	29
خضري	55	61	44	71
سلج	41	36	60	77
عجوة	23	29	19	44
سكري	8	18	19	31
منيفي	22	18	30	32
صقعي	26	16	31	39

استعمل العمود A للنوع، والعمود B لمبيعات الأسبوع الأول، والعمود C لمبيعات الأسبوع الثاني، والعمود D لمبيعات الأسبوع الثالث، والعمود E لمبيعات الأسبوع الرابع.

	A	B	C	D	E
1	خلاص	17	22	11	23
2	مكتومي	31	34	22	29
3	خضري	55	61	44	71
4	سلج	41	36	60	77
5	عجوة	23	29	19	44
6	سكري	8	18	19	31
7	منيفي	22	18	30	32
8	صقعي	26	16	31	39

يحتوي كل صف مبيعات النوع نفسه من التمور، ويمثل الصف 2 مبيعات التمر المكتومي.

تحتوي كل خلية في الجدول جزءاً واحداً من البيانات. حيث تحتوي الخلية D7 على القيمة 30، والتي تمثل عدد الكيلوجرامات المباعة في الأسبوع الثالث من تمور منيفي.

تمارين:

- 1 أدخل البيانات الواردة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس في برنامج الجداول الإلكترونية. **انظر أعمال الطلبة.**
- 2 قارن بين تنظيم البيانات في الجداول الإلكترونية وتنظيمها في المصفوفة. **انظر الهامش**
- 3 يمكنك إيجاد مجاميع مدخلات الصفوف والأعمدة في الجداول الإلكترونية باستعمال الأمر (SUM). **انظر الهامش**
 - a يمكنك إيجاد مجموع مدخلات العمود B باستعمال الصيغة =SUM(B1:B8). أدخل صيغاً مشابهة في الخلايا E9, D9, C9, B9 لتجد مجاميع مدخلات الأعمدة الأخرى. ماذا تمثل مجاميع مدخلات هذه الأعمدة؟
 - b أدخل صيغاً مشابهة في الخلايا F1 حتى F8 لإيجاد مجاميع مدخلات الصفوف 1 إلى 8. ماذا تمثل هذه المجاميع في هذه الحالة؟
 - c أوجد مجموع مدخلات الصف 9، ومجموع مدخلات العمود F. ماذا تلاحظ؟ فسر إجابتك.

إجابات

- 2 كلاهما يستعمل الصفوف والأعمدة، لكن في برنامج الجداول الإلكترونية: تُميّز الصفوف باستعمال الأعداد، على حين تُميّز الأعمدة باستعمال الحروف. أما في المصفوفة: فتميّز كلٌّ من الصفوف والأعمدة باستعمال الأعداد.
- 3a مجاميع عناصر الأعمدة: 223, 234, 236, 346، وهي تمثل إجمالي ما بيع من التمور في كل أسبوع من الأسابيع الأربعة.
- 3b خلاص 73، مكتومي 116، خضري 231، سلج 214، عجوة 115، سكري 76، منيفي 102، صقعي 112؛ تمثل مجاميع الصفوف إجمالي ما بيع بالكيلوجرامات من كل نوع من أنواع التمور في كل أسبوع من الأسابيع الأربعة.
- 3c المجموع في كلتا المجموعتين هو 1039، ومجموع حاصل جمع الصفوف يساوي مجموع حاصل جمع الأعمدة؛ لأن كلا منهما تمثل مجموع ما بيع من كل أنواع التمور كلّها في الأسابيع جميعها.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 2

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) دون تدريبات إعادة التعليم - تنمة (7) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-1 تدريبات إعادة التعليم
مقدمة في الصفوفات

عناصر الصفوفة، الصفوفة عبارة عن تنظيم على شكل مستطيل لثغرات أو ثوابت في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، تُسمى عناصر، ويُحدد العنصر وفق موقعه في الصفوفة، ويُحدد موقع العنصر برقم الصف برقم العمود الذي يقع فيها. فمثلاً: a_{23} يشير إلى العنصر في الصف الأول، والعمود الثاني من الصفوفة.

وفي الصفوفتين أدناه، قيمة العنصر a_{23} في الصفوفة A هي 11، وقيمة b_{23} في الصفوفة B هي 7.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 8 & 7 & 6 \\ 11 & 13 & 1 \\ 4 & 2 & 14 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 10 & 1 \\ 9 & 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

مثال 1: أوجد قيمة a_{23}

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 11 & 4 & 1 & 20 \\ 7 & 8 & 9 & 12 & 13 \\ 17 & 6 & 15 & 18 & 2 \\ 22 & 16 & 21 & 24 & 19 \\ 5 & 23 & 3 & 14 & 10 \end{bmatrix}$$

مثال 2: أوجد قيمة b_{23}

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

a_{23} هو العنصر الموجود في الصف الثاني والعمود الثالث، وقيمته 14.

b_{23} هو العنصر الموجود في الصف الثاني والعمود الثالث، وقيمته 1.

تساويين:

حدد قيمة كل عنصر في الصفوفات الآتية:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 11 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 10 \\ 8 & 2 & 6 & 1 \\ & & & 7 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 13 & 12 \\ 2 & 15 & 20 & 11 \\ 3 & 16 & 19 & 10 \\ 4 & 17 & 18 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 5 \\ 9 & 2 & 11 \\ 6 & 14 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال 3: أوجد قيمة f_{23}

$$F = \begin{bmatrix} 18 & 1 & 11 & 3 \\ 25 & 6 & 8 & 4 \\ 12 & 4 & 12 & 9 \\ 8 & 14 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 4: أوجد قيمة h_{23}

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 13 & 12 \\ 2 & 15 & 20 & 11 \\ 3 & 16 & 19 & 10 \\ 4 & 17 & 18 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

الفصل 2 : الصفوفات

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-1 تدريبات إعادة التعليم
مقدمة في الصفوفات

تنظيم البيانات وتحليلها

الصفوفة

توصف الصفوفة برتبها عادة، فالصفوفة التي تتكون من m من الصفوف و n من الأعمدة، تكون صفوفة من الرتبة $m \times n$.

مثال 1:

تحتضن البومة بيضها مدة 30 يوماً، وتحتاج الصغار إلى 30 يوماً كي ينمو ريشها وتبقى على الطيران. ويحتضن الطائر السريع بيضه مدة 20 يوماً، وتحتاج الصغار 44 يوماً كي ينمو ريشها وتبقى على الطيران. ويحتضن الحمام بيضه مدة 15 يوماً وتحتاج الصغار إلى 17 يوماً كي ينمو ريشها وتبقى على الطيران. اكتب صفوفة 2×3 لتنظيم المعلومات السابقة.

الحمام السريع البومة

الحضان البيض	30	20	15
نمو الريش	30	44	17

مثال 2:

ما رتبة الصفوفة A إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 13 & 10 & -5 & 45 \\ 2 & 8 & 15 & 80 \end{bmatrix}$

بما أن الصفوفة A تتكون من صفين وأربعة أعمدة، فهي من الرتبة 2×4 .

تساويين:

حدد رتبة كل صفوفة فيما يأتي:

$$A = \begin{bmatrix} 71 & 44 \\ 39 & 27 \\ 45 & 16 \\ 92 & 53 \\ 78 & 65 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 5 \\ 9 & 2 & 11 \\ 6 & 14 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 15 & 5 & 27 & -4 \\ 23 & 6 & 0 & 5 \\ 14 & 70 & 24 & -3 \\ 63 & 3 & 42 & 90 \end{bmatrix}$$

مثال 3:

تعد شركة سياحية برنامجاً سياحياً لأربعة من مدن المملكة وهي: جدة، الرياض، المدينة، الدمام في الأيام 19, 20, 21, 22 على النحو الآتي: جدة: 25°, 26°, 28°, 29° الرياض: 35°, 34°, 34°, 35° المدينة: 34°, 34°, 31°, 32° الدمام: 32°, 30°, 30°, 31°

نظم هذه البيانات في صفوفة من الرتبة 4×4 .

اليوم	الدمام	المدينة	الرياض	جدة
جداى الأخرى	32	34	25	35
جداى الأخرى	30	34	26	34
جداى الأخرى	30	31	28	34
جداى الأخرى	31	32	29	35

الفصل 2 : الصفوفات

تدريبات حل المسألة (9) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-1 تدريبات حل المسألة
مقدمة في الصفوفات

1) سكان، ويوضح الجدول أدناه تعداد السكان والمساحة في بعض المدن والبلدات في إحدى الدول. ما رتبة الصفوفة التي تمثل البيانات؟

البلدة/ المدينة	عدد السكان	المساحة
أ	120000	917 كم ²
ب	91380	150 كم ²
ج	836200	400 كم ²
د	50900	70 كم ²
هـ	2500	40 كم ²

2) مصيفة، بحث عادل عن أماكن فيها آلات لغسل الملابس وتجفيفها، ووجد عدة أماكن منها: المسئلة العملاقة وتحتوي على 20 غسالة صغيرة، و10 غسالات كبيرة، على 20 آلة تجفيف، والمسئلة السريعة وتحتوي على 40 غسالة صغيرة، و5 غسالات كبيرة، و50 آلة تجفيف، والمسئلة العجيبة وتحتوي على 15 غسالة صغيرة، و40 كبيرة، و100 آلة تجفيف.

اكتب صفوفة تنظم هذه البيانات.

3) مسافات بين المدن، أكمل صفوفة المسافات بين المدن المذكورة.

المدينة ج	المدينة ب	المدينة أ
المدينة ج	0	640
المدينة ب	640	0
المدينة أ	848	432
المدينة ج	848	432
المدينة ب	432	0
المدينة أ	0	848

الفصل 2 : الصفوفات

تدريبات المهارات (8) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-1 تدريبات المهارات
مقدمة في الصفوفات

حدد رتبة كل صفوفة فيما يأتي:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

حدد قيمة العنصر المذكور في الصفوفات الآتية:

$$G = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \\ 3 & 12 & 10 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 12 & -1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 0 \\ 10 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

مثال 1:

b_{22}	8
c_{22}	12

مثال 2:

b_{21}	12
c_{21}	3

مثال 3:

c_{33}	11
b_{33}	4
c_{33}	5

الفصل 2 : الصفوفات



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 2

دون دون المتوسط

ضمن ضمن المتوسط

فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10)

ضمن فوق

كتاب التمارين (10)

دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

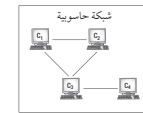
2-1- التدريبات الإثرائية

المصفوفات وشبكة المعلومات

تُعد نظرية الرسم فرعاً من فروع الرياضيات التي تتكشف أحياناً قُتُل في صورة نقاط تُسمى رؤوساً، وتُطلقاً مستطبة تصل بينها تُسمى أحياناً. فمثلاً يمكن أن تُستعمل لشبكة حاسوبية أو رحلات طيران بين المدن الرئيسية. وتُستعمل مصفوفة الوضع أو الحالة لتمثيل رؤوس الشكل، وحوافه والعلاقة بين رؤوس الشكل، وتشغل أسماء الرؤوس كل صفٍّ وعمود. فمثلاً مصفوفة الوضع للشبكة الحاسوبية موضحة بالشكل أدناه، في حين تمثل الأعداد عدد الأحراف التي تربط الرؤوس.

يشير إلى أن عدد الأحراف التي تربط C_1 بـ C_2 وهو 1

	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	0	1	1	0
C_2	1	0	1	0
C_3	1	1	0	1
C_4	0	0	1	0

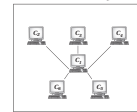


يشير إلى عدد الأحراف التي تربط C_1 بـ C_3

أكمل مصفوفة الوضع لكل شبكة حاسوب

1 حفظ المواصلات لشركة طيران

2 شبكة حاسوب في إحدى الشركات



	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
C_1	0	1	1	1	1	1
C_2	1	0	0	0	0	0
C_3	1	0	0	0	0	0
C_4	1	0	0	0	0	0
C_5	1	0	0	0	0	0
C_6	1	0	0	0	0	0



	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
C_1	0	1	0	1	0	1
C_2	1	0	1	0	0	0
C_3	0	1	0	1	1	1
C_4	1	0	1	0	1	0
C_5	0	0	1	1	0	1
C_6	0	0	1	1	1	0

الفصل الثاني، المصفوفات

2-1 مقدمة في المصفوفات

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$3 \times 4 \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & 16 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ب} \quad 2 \times 3 \begin{bmatrix} 5 & 8 & -1 \\ -2 & -3 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{د} \quad 1 \times 3 \begin{bmatrix} -3 & -3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{هـ}$$

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 9 & 8 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ ، فحدد كل عنصر مما يأتي:

$$\begin{array}{ll} 2 \text{ ب}_{11} \text{ هـ} & 2 \text{ هـ}_{22} \text{ د} \\ -4 \text{ هـ}_{23} \text{ هـ} & 0 \text{ ب}_{14} \text{ هـ} \end{array}$$

المصدر: كتاب التمارين

مصدر الطاقة	الحرارة	البرودة	الغاز
مصدر أ	90966	5545	178
مصدر ب	241909	3754	0

10 إحصاءات، بين الجدول المجاور عدد الأسر في مدينتي أ، ب ومصدر الطاقة المستعمل في الطول لدى كل منها. نظم البيانات في مصفوفة من النوع 2×3 .

90966	5545	178
241909	3754	0

الفرق	الفرق	الفرق	
هز	2	4	3
تمثل	3	1	0
خسارة	2	3	3

11 كرة قدم، بين الجدول المجاور عدد مرات الفوز والخسارة والتعادل لفريق كرة قدم في 3 بطولات مختلفة.

أ نظم نتائج مباريات الفريق في مصفوفة.

$$\text{ب} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3$$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-2

تنظيم البيانات في مصفوفات.

الدرس 2-2

جمع المصفوفات و طرحها.

ضرب مصفوفة في عدد.

ما بعد الدرس 2-2

استعمال المصفوفات لحل أنظمة من المعادلات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما معدل النفقات اليومي للمعرض 2 في المنطقة الشرقية؟

1800 ريال

- ما موقع معدل النفقات اليومية للمعرض الأول في كل مصفوفة؟

الصف 1، العمود 1

- كيف يمكن أن تجد إجمالي المبيعات الأسبوعية للمعارض الثانية في الشركة لجميع المناطق؟

اجمع العناصر الموجودة في الصف 2، والعمود 2 في المصفوفات الثلاث.

لماذا؟

لدى وكيل سيارات فروع في كل من: الرياض، والشرقية، وجدة، يتبع كلاً منها ثلاثة معارض. وتبين المصفوفات الآتية معدل النفقات والمبيعات الأسبوعية في معارض المناطق الثلاث:

	الرياض	الشرقية	جدة
المبيعات النفقات	المبيعات النفقات	المبيعات النفقات	المبيعات النفقات
(1) المعرض	$\begin{bmatrix} 1900 & 145000 \\ 2400 & 225000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1700 & 122000 \\ 1800 & 145500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1050 & 109500 \\ 1800 & 135000 \end{bmatrix}$
(2) المعرض			
(3) المعرض			

جمع المصفوفات و طرحها: يمكن جمع مصفوفتين أو طرحهما إذا فقط إذا كان لهما الرتبة نفسها، حيث تجمع العناصر المتناظرة في حالة الجمع، وتطرح في حالة الطرح.

مفهوم أساسي جمع المصفوفات و طرحها

التعبير اللفظي: إذا كانت A, B مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ فإن $A + B$ هي مصفوفة أيضاً من الرتبة $m \times n$ ويكون كل عنصر فيها هو مجموع العنصرين المتناظرين في A و B وكذلك $A - B$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أيضاً، وتحصل عليها بطرح العناصر المتناظرة.

الرموز: نتكن: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

فإن: $A + B = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$

مثال: $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -5+0 \\ 1+(-9) & 7+10 \end{bmatrix}$

مثال 1

جمع المصفوفات و طرحها

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

(a) $A + B = \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$

بجمع العناصر المتناظرة. $= \begin{bmatrix} 16+(-4) & 2+(-1) \\ -9+(-3) & 8+(-7) \end{bmatrix}$

بالتبسيط. $= \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $B - C = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

بما أن المصفوفتين B, C لهما رتبتي مختلفتين، فلا يمكن إجراء عملية الطرح $B - C$.

تحقق من فهمك

(1A) $\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -17 & 2 \end{bmatrix}$ (1B) $\begin{bmatrix} -13 & 5 & 9 \\ -11 & -1 & 11 \end{bmatrix}$

فيما سبق؟

درست تنظيم البيانات في مصفوفات.

والآن؟

- أجمع المصفوفات وأطرحها.
- أضرب مصفوفة في عدد.

المضردات؟

جمع مصفوفتين

adding matrices

طرح مصفوفتين

subtracting matrices

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

scalar multiplication

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

إذا كان $A + B = C$

فإن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

مصادر الدرس 2-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (69)	• تنويع التعليم، ص (69)	• تنويع التعليم، ص (69, 72)
كتاب التمارين	• ص (11)	• ص (11)	• ص (11)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

الضرب في عدد ثابت: يمكن ضرب أي مصفوفة في عدد ثابت، وهذا يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت. وتُسمى هذه العملية **ضرب المصفوفة في عدد ثابت**.

مفهوم أساسي أضف إلى مطويتك

الضرب في عدد ثابت

التعبير اللفظي: حاصل ضرب مصفوفة A من الرتبة $m \times n$ في عدد ثابت k هي مصفوفة kA من الرتبة $m \times n$ وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة A مضروباً في العدد الثابت k

الرموز: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و k عدد ثابت فإن:

$$k \cdot A = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

مثال: $-3 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(4) & -3(1) \\ -3(7) & -3(-2) \end{bmatrix}$

جمع المصفوفات وطرحها
مثال 1 يبين كيفية جمع مصفوفتين وطرحهما.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

إرشادات للدراسة

إذا كان $kA = B$
فإن: $ka_{ij} = b_{ij}$

مثال 2 ضرب مصفوفة في عدد ثابت

إذا كانت $R = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$ ، فجد $5R$.

بالتعويض

$$5R = 5 \begin{bmatrix} -12 & 8 & 6 \\ -16 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$

بضرب كل عنصر في المصفوفة في العدد 5.

$$= \begin{bmatrix} 5(-12) & 5(8) & 5(6) \\ 5(-16) & 5(4) & 5(19) \end{bmatrix}$$

بالتبسيط.

$$= \begin{bmatrix} -60 & 40 & 30 \\ -80 & 20 & 95 \end{bmatrix}$$

تحقق من فهمك

$$\begin{bmatrix} -32 & 0 & -12 & 8 \\ 4 & 16 & 8 & -36 \end{bmatrix}$$

(2) إذا كانت $T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $-4T$

تنطبق كثير من خصائص العمليات التي تُجرى على الأعداد الحقيقية على المصفوفات. وفيما يأتي ملخص لهذه الخصائص:

مفهوم أساسي أضف إلى مطويتك

خصائص جمع المصفوفات

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A, B, C لها الرتبة نفسها ولأي عدد ثابت k :

الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات $A + B = B + A$

الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات $(A + B) + C = A + (B + C)$

خاصية التوزيع للضرب في عدد $k(A + B) = kA + kB$

يمكن إجراء عمليات متعددة الخطوات على المصفوفات. وترتيب تلك العمليات شبيه بترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية.

الضرب في عدد ثابت

مثال 2 يبين كيفية ضرب مصفوفة في عدد ثابت.

مثال إضافي

2 إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ، فأوجد $2A$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

إرشادات للمعلم الجديد

البناء على معرفة سابقة

يُن للطلبة أن ضرب مصفوفة في ثابت شبيه باستعمال خاصية التوزيع للعبارة $3(x + y)$.

المحتوى الرياضي

جمع المصفوفات وطرحها يتطلب جمع مصفوفتين أو طرحهما، أن يكون لهما الرتبة نفسها. ويتم جمع مصفوفتين أو طرحهما، بجمع العناصر المتناظرة أو طرحها في المصفوفتين. وتنطبق خاصيتا الإبدال والتجميع على جمع المصفوفات.

تنبيه

معالجة أخطاء مفاهيمية لمساعدة طلابك على معرفة السبب في أن يكون للمصفوفتين الرتبة نفسها عند جمعها أو طرحها؛ اقترح عليهم محاولة جمع مصفوفة من الرتبة 3×2 إلى مصفوفة من الرتبة 2×3 .

مثال 3

العمليات على المصفوفات

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ فأوجد $-4B - 3A$.

$$\text{بالتعويض} \quad -4B - 3A = -4 \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{بإيجاد ناتج ضرب المصفوفات في الثوابت} \quad = \begin{bmatrix} -4(-4) & -4(-8) \\ -4(2) & -4(-3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3(-9) & 3(12) \\ 3(2) & 3(-6) \end{bmatrix}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -27 & 36 \\ 6 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب طرح العناصر المتناظرة} \quad = \begin{bmatrix} 16 - (-27) & 32 - 36 \\ -8 - 6 & 12 - (-18) \end{bmatrix}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = \begin{bmatrix} 43 & -4 \\ -14 & 30 \end{bmatrix}$$

تحقق من فهمك

$$\text{3} \quad \text{إذا كانت } A = \begin{bmatrix} -107 & -9 \\ 12 & -32 \\ -10 & 105 \end{bmatrix} \text{، فأوجد } -6B + 7A \text{، } B = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

يمكن استعمال المصفوفات في الكثير من الأعمال التجارية.



الربط مع الحياة

المخطط المالي

يستعمل المخطط المالي المصفوفات لتنظيم البيانات التي يستعملها، ووصفها.

مثال 4

استعمال العمليات على المصفوفات

أعمال: ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية الدرس، وعبر عن معدل المبيعات والنفقات لجميع المعارض في خمسة أسابيع.

حتى يتم حساب المبيعات في خمسة أسابيع، يجب ضرب كل مصفوفة في العدد 5 وجمع المصفوفات الناتجة معاً.

$$\text{ضرب كل مصفوفة في 5 ثم الجمع} \quad 5 \begin{bmatrix} 1900 & 145000 \\ 2400 & 225000 \\ 2700 & 290000 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1700 & 122000 \\ 1800 & 145500 \\ 1800 & 160000 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1050 & 109500 \\ 1800 & 135000 \\ 1800 & 150500 \end{bmatrix}$$

$$\text{تطبيق قاعدة الضرب في ثابت} \quad = \begin{bmatrix} 9500 & 725000 \\ 12000 & 1125000 \\ 13500 & 1450000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8500 & 610000 \\ 9000 & 727500 \\ 9000 & 800000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5250 & 547500 \\ 9000 & 675000 \\ 9000 & 752500 \end{bmatrix}$$

$$\text{المبيعات} \quad \begin{bmatrix} 23250 & 1882500 \\ 30000 & 2527500 \\ 31500 & 3002500 \end{bmatrix}$$

تدل المصفوفة النهائية على معدل المبيعات والنفقات في خمسة أسابيع.

تحقق من فهمك

4) استعمل البيانات أعلاه لحساب معدل المبيعات والنفقات السنوي لجميع المعارض على فرض أن السنة 52 أسبوعاً تقريباً. **انظر الهامش.**

إرشادات للدراسة

العناصر المتناظرة

عند تمثيل البيانات بمصفوفات متعددة، تأكد أن العناصر المتناظرة تمثل البيانات المتناظرة.

العمليات على المصفوفات

المثالان 3 و 4 يبينان كيفية إجراء عدة عمليات على المصفوفات.

مثالان إضافيان

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

فأوجد $4A - 3B$

$$\begin{bmatrix} 14 & 9 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

4 **تجارة** تتطلب صناعة كل قطعة في مصنع أثاث مكتبي كميات مختلفة من الأدوات المعدنية كما هو مبين في المصفوفتين الآتيتين:

$$\text{الكرسي:} \quad \begin{matrix} \text{طويل} & \text{قصير} \\ \text{مسامير} & \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \\ \text{براغي} & \end{matrix}$$

$$\text{الخزانة:} \quad \begin{matrix} \text{طويل} & \text{قصير} \\ \text{مسامير} & \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \text{براغي} & \end{matrix}$$

عبر بمصفوفة عن إجمالي احتياجات المصنع من الأدوات المعدنية السابقة لتصنيع 3 كراسٍ و 4 طاولات.

$$\begin{bmatrix} 46 & 50 \\ 36 & 28 \end{bmatrix}$$

إرشادات للمعلم الجديد

التبرير يمكن أن يكون جمع مصفوفتين وطرحهما تحدياً لعددٍ من الطلاب؛ لذا شجّعهم على تطوير استراتيجياتٍ تساعدهم على معرفة موقعهم في المصفوفة. فقد يجدون أن وضع دائرة على الأعداد التي يجمعونها أو يطرحونها طريقة مفيدة، أو استعمال لونٍ معينٍ أو الإشارة بأصابعهم إلى العددين اللذين يُجرون عليهما الحسابات.

الدرس 2-2 العمليات على المصفوفات 69

تنوع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون اللغويون / اللغويون قد يجد بعض الطلاب أن التكلم مع أنفسهم بهدوء أو على نحو صامت أثناء عملهم على المصفوفات أمر مفيد. فعلى سبيل المثال: يمكنهم ترديد الكلمات (صف في عمود) ليذكروا أنفسهم كيف تكتب رتبة المصفوفة، وقد يجدون أيضاً أنه من المفيد لهم عند الضرب في عدد، القول على سبيل المثال: "5 في 1 يساوي 5، و 5 في 3 يساوي 15"؛ ممّا يمكنهم من استعمال أكثر من حاسة من حواسهم بهذه الطريقة للتحقق من حساباتهم.

إجابة (تحقق من فهمك):

$$\text{(4)} \quad \begin{matrix} \text{المبيعات} & \text{النفقات} \\ \text{المعرض (1)} & \begin{bmatrix} 19578000 & 241800 \\ 26286000 & 312000 \\ 31226000 & 327600 \end{bmatrix} \\ \text{المعرض (2)} & \\ \text{المعرض (3)} & \end{matrix}$$

مثال 1 أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا:

$$(2) [9 \ -8 \ 4] + [12 \ 2]$$

$$(1) [-8 \ 2 \ 6] + [11 \ -7 \ 1]$$

$$(4) \begin{bmatrix} 5 & 13 & -6 \\ 3 & -17 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -18 & 8 \\ 2 & -11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 15 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

مثال 2 أوجد الناتج في كل مما يأتي:

$$(6) -6 \begin{bmatrix} 15 & -9 & 2 & 3 \\ 6 & -11 & 14 & -2 \\ 4 & -8 & -10 & 27 \end{bmatrix}$$

$$(5) 3 \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -8 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

مثال 3 استعمل المصفوفات A, B, C لإيجاد ناتج كل مما يأتي:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$$

$$-8C + 3A \quad (8)$$

$$4B - 2A \quad (7)$$

مثال 4 تبين المصفوفة L المعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى (بالفهرنهايت) في مدينة ما. وتبين المصفوفة H المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى في تلك المدينة.

$$H = \begin{bmatrix} 39.9 & 45.2 & 55.3 \\ 65.1 & 74.0 & 82.3 \\ 85.9 & 84.6 & 78.1 \\ 66.9 & 54.5 & 44.3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 24.1 & 27.7 & 35.9 \\ 44.1 & 53.6 & 62.2 \\ 66.4 & 64.9 & 57.9 \\ 46.4 & 37.3 & 28.4 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة التي تمثل الفرق بين المعدل الشهري لدرجات الحرارة العظمى والمعدل الشهري لدرجات الحرارة الصغرى في تلك المدينة؟ **انظر ملحق الإجابات**

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا.

$$(11) \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 12 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{غير ممكن}$$

$$(10) \begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(10) \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -15 & -1 \end{bmatrix}$$

المشروب	صغير	وسط	كبير
غازي	3	4	5
شاي	2	3	4
قهوة	2	3	4
عصير	4	5	6

(12) **أعمال:** يبين الجدول المجاور قائمة أسعار المشروبات في مطعم وجبات سريعة، إذا رفع المطعم أسعار جميع المشروبات بنسبة 10%. **(a-d) انظر الهامش.**

(a) اكتب المصفوفة C التي تمثل الأسعار الحالية.

(b) ما العدد الذي يمكن أن تضرب المصفوفة C فيه لإيجاد المصفوفة N التي تمثل الأسعار الجديدة؟

(c) جد المصفوفة N .

(d) جد المصفوفة $C - N$. ماذا تمثل هذه المصفوفة في هذه الحالة؟

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-9؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات

$$(1) [3 \ -5 \ 7]$$

(2) غير ممكن

$$(3) \begin{bmatrix} -2 & -18 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 7 & 31 & -14 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} 18 & 12 & 0 \\ -6 & 42 & -24 \\ -12 & -18 & 21 \end{bmatrix}$$

$$(6) \begin{bmatrix} -90 & 54 & -12 & -18 \\ -36 & 66 & -84 & 12 \\ -24 & 48 & 60 & -162 \end{bmatrix}$$

$$(7) \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ -14 & 38 \end{bmatrix}$$

$$(8) \begin{bmatrix} 50 & 36 \\ -87 & 41 \end{bmatrix}$$

$$(12a) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(12b) 1.1$$

$$(12c) \begin{bmatrix} 3.3 & 4.4 & 5.5 \\ 2.2 & 3.3 & 4.4 \\ 2.2 & 3.3 & 4.4 \\ 4.4 & 5.5 & 6.6 \end{bmatrix}$$

$$(12d) \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

إجابة ممكنة: تمثل هذه المصفوفة الزيادة في سعر كل صنف.

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط دون	29-41 ، 26-27 ، 9-18
ضمن المتوسط ضمن	29-41 ، 26-27 فردي ، 9-25
فوق المتوسط فوق	19-41

أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -8 & 12 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -8 & 12 \\ -11 & -5 & 3 \\ -1 & 22 & -9 \\ -6 & 31 & 9 \end{bmatrix} \quad (14) \quad \begin{bmatrix} 19 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 11 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -9 & -3 \\ 5 & 14 & 0 \end{bmatrix} \quad (16) \quad \begin{bmatrix} 62 \\ -37 \\ -4 \end{bmatrix} + [34 \quad 76 \quad -13] \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \quad (18) \quad \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} \quad (17)$$

(19) **كتب:** تحتوي المكتبة A على 10000 كتاب علمي، و5000 كتاب تاريخي و5000 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة B على 15000 كتاب علمي، و10000 كتاب تاريخي و2500 كتاب أدبي. وتحتوي المكتبة C على 4000 كتاب علمي، و700 كتاب تاريخي، و800 كتاب أدبي. **(a-d) انظر الهامش.**

- (a) رتب أعداد الكتب في كل مكتبة في مصفوفات، وارمز إليها بالرموز \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} .
 (b) أوجد العدد الكلي للكتب من كل نوع في المكتبات الثلاث، وعبر عن ذلك بمصفوفة.
 (c) كم يزيد عدد الكتب من كل نوع في المكتبة A على التي في المكتبة C؟
 (d) أوجد المصفوفة $\underline{A} + \underline{B}$. هل لهذه المصفوفة معنى في هذه الحالة؟ فسر إجابتك.

أوجد الناتج في كل مما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

$$-4 \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -8 \\ 3x \\ -9 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 4 \\ x-6 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (21) \quad -3 \begin{bmatrix} 18 & -6 & -8 \\ -5 & -3 & 12 \\ 0 & 3x & -y \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$-6 \left(\begin{bmatrix} 6 & 3y \\ 4x+1 & -2 \\ -9 & xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 8 & -7 \\ x+2 & 2x \end{bmatrix} \right) \quad (23) \quad -5 \left(\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \right) \quad (22)$$

أجر العمليات على المصفوفات الآتية إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكتب "لا يمكن" مع ذكر السبب:

$$-\frac{3}{4} \begin{bmatrix} 12 & -16 \\ 15 & 8 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 21 & 18 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \quad (25) \quad -2 \begin{bmatrix} -9.2 & -8.4 \\ 5.6 & -4.3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 4.1 & -2.9 \\ 7.2 & -8.2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

مسائل مهارات التفكير العليا

(26) **برهان:** برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع 2×2 تبديلية. **انظر ملحق الإجابات.**

(27) **برهان:** برهن على أن عملية جمع المصفوفات من النوع 2×2 تجميعية. **انظر ملحق الإجابات.**

(28) **تحذ:** إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \underline{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, 3\underline{A} - 4\underline{B} + 6\underline{C} = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

فأوجد عناصر المصفوفة \underline{C} .

الدرس 2-2 العمليات على المصفوفات 71

إجابات:

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 3 & 17 & -2 \\ 1 & -23 & 14 \\ 13 & -40 & -5 \end{bmatrix} \quad (14) \quad \begin{bmatrix} 24 \\ -10 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (13)$$

(15) غير ممكن

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -32 \end{bmatrix} \quad (17) \quad \begin{bmatrix} -6 & 13 & 14 \\ -11 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

(18) غير ممكن

$$\begin{bmatrix} 10000 \\ 5000 \\ 5000 \end{bmatrix} \quad (19a) \quad \text{مكتبة A}$$

$$\begin{bmatrix} 15000 \\ 10000 \\ 2500 \end{bmatrix} \quad \text{مكتبة B}$$

$$\begin{bmatrix} 4000 \\ 700 \\ 800 \end{bmatrix} \quad \text{مكتبة C}$$

$$\begin{bmatrix} 6000 \\ 4300 \\ 4200 \end{bmatrix} \quad (19c) \quad \begin{bmatrix} 29000 \\ 15700 \\ 8300 \end{bmatrix} \quad (19b)$$

(19d) $\begin{bmatrix} 25000 \\ 15000 \\ 7500 \end{bmatrix}$ يمثل ناتج الجمع عدد الكتب من الأنواع الثلاثة في المكتبتين.

$$\begin{bmatrix} -54 & 18 & 24 \\ 15 & 9 & -36 \\ 0 & -9x & 3y \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} -40 & 50 \\ -25 & 75 \end{bmatrix} \quad (22) \quad \begin{bmatrix} -16 \\ 4x+14 \\ -75 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -18y+36 \\ -24x-54 & 54 \\ -6x+42 & -6xy-12x \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 28.4 \\ -40 & 41.4 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 24 \\ -\frac{167}{12} & -10 \end{bmatrix} \quad (25)$$

(13-18) انظر الهامش.



الربط مع الحياة

تعد مكتبة جامعة الملك سعود من أقدم المكتبات العامة في المملكة حيث نشأت عام 1377هـ. وتخدم الطلاب وأعضاء هيئة التدريس بالجامعة ونحو 5000 مستفيد وذاكر يومياً وذلك في مختلف المجالات المعرفية، كما تضم أكثر من 10000 مخطوطة نادرة معظمها أصلي.

29) تبرير: حدد إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أحياناً، أو صحيحة دائماً، أو غير صحيحة أبداً للمصفوفتين A, B ، ثم فسر إجابتك. **(29a-29e) انظر الهامش**

- (a) إذا كانت $A + B$ معرفة، فإن $A - B$ معرفة.
 (b) إذا كان k عدداً حقيقياً، فإن kA و kB معرفتان.
 (c) إذا كانت $A - B$ غير معرفة، فإن $B - A$ غير معرفة.
 (d) إذا كانت A و B لهما عدد العناصر نفسه، فإن $A + B$ معرفة.
 (e) إذا كانت kA و kB معرفتين، فإن $kA + kB$ معرفة.

30) مسألة مفتوحة: أعط مثلاً على مصفوفتين A و B ، على أن تكون $\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 4B - 3A$. انظر الهامش.

31) اكتب: اشرح كيف تجد $4D - 3C$ لأي مصفوفتين D, C لهما الرتبة نفسها. انظر ملحق الإجابات.

تدريب على اختبار

32) رتبة المصفوفة: إذا كانت A, B مصفوفتين من الرتبة

5×3 ، فإن رتبة المصفوفة $A - B$ هي: **B**

C 3×2

D 3×3

A 3×5

B 5×3

32) حل النظام الآتي: C

$$0.06p + 4q = 0.88$$

$$p - q = -2.25$$

A $(-0.912, -1.338)$ **C** $(-2, 0.25)$

B $(0.912, -3.162)$ **D** $(-2, -4.25)$

مراجعة تراكمية

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -5 & x \\ 8 & 4y \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 16 & 4 & x \\ -2 & 9 & y \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ فحدد كل عنصر مما يأتي: (الدرس 2-1)

36) b_{32} غير موجودة

35) c_{13} 3

34) a_{32} $4y$

حل بيانياً النظام أدناه: (الدرس 1-5) **37) انظر ملحق الإجابات**

$$4x + 2y > 8 \quad (37)$$

$$4y - 3x \leq 12$$

38) سكان: إذا كان عدد سكان مدينة توك 474059 نسمة، بما يزيد على عدد سكان مدينة الخبر بـ 115393 نسمة، فكتب معادلة لإيجاد عدد سكان مدينة الخبر، ثم حلها. (الدرس 1-1) **321130 ; 152929 - x = 474059**

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1-1)

$$4(2x - 3y) + 2(5x - 6y) \quad (39) \quad 18x - 24y$$

$$-3(2a - 5b) - 4(4b + a) \quad (40) \quad -10a - b$$

$$-7(x - y) + 5(y - x) \quad (41) \quad -12x + 12y$$

72 الفصل 2 المصفوفات

تنوع التعليم

فوق

توسع تبين المصفوفة التالية المبالغ التي يملكها 4 أشخاص بالريال. $A = \begin{bmatrix} 200000 & 21350 \\ 420000 & 360000 \end{bmatrix}$

ما العدد الذي يجب أن يُضرب في المصفوفة ليعطي مصفوفةً جديدةً تمثل المبالغ بعد دفع الزكاة التي تبلغ نسبتها 2.5%؟ **0.975**

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي وزّع طلاب الصف

مجموعات، ثم اطلب إلى كل مجموعة

إعداد عرض يظهر طريقة إجراء

كل عملية على المصفوفات: الجمع،

الطرح، أو الضرب في عدد ثابت.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى كل طالب أن يكتب

كيف ساعدته المفاهيم السابقة على جمع

المصفوفتين وطرحهما في هذا الدرس.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم

الواردة في الدرسين 2-1 و 2-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (30)

إجابات

29a) دائماً؛ إذا كانت $A + B$ معرفة، فإن

A و B لهما الرتبة نفسها. وإذا كانت

$A - B$ معرفة، فإن A و B لهما الرتبة نفسها، فإن $A - B$

معرفة.

29b) دائماً.

29c) دائماً؛ إذا كانت $A - B$ غير معرفة،

فإن A و B لهما رتب مختلفة. وعليه

تكون $A - B$ غير معرفة.

29d) أحياناً؛ يجب أن يكون للمصفوفتين

الرتبة نفسها، حتى يمكن إجراء

عملية الجمع عليهما.

29e) أحياناً؛ يجب أن يكون للمصفوفتين

الرتبة نفسها، حتى يمكن إجراء عملية

الجمع عليهما.

30) إجابة ممكنة:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 2

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (12) - دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-2 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على المصفوفات

ضرب المصفوفة في عدد: يمكن ضرب مصفوفة من الرتبة $m \times n$ في عدد ثابت k .

القرب في عدد k : $k \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{bmatrix}$

مثال: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ فأوجد $3B - 2A$

بالتعويض بدل A و B

$$3B - 2A = 3 \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

بالتضرب

$$= \begin{bmatrix} 3(-1) & 3(5) \\ 3(7) & 3(8) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2(4) & 2(0) \\ 2(-6) & 2(3) \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

$$= \begin{bmatrix} -3 & 15 \\ 21 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$$

بالطرح

$$= \begin{bmatrix} -3-8 & 15-0 \\ 21-(-12) & 24-6 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

$$= \begin{bmatrix} -11 & 15 \\ 33 & 18 \end{bmatrix}$$

تدريبات:

أوجد الناتج في كل ما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكب "لا يمكن".

(1) $\begin{bmatrix} 25 & -10 & -45 \\ 5 & 55 & -30 \\ 60 & 35 & -95 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 15 & 9 \\ 51 & -33 & 24 \\ -18 & 3 & 45 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 6 & 0 & 7 & -1 \\ -4 & 6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -30 & 18 \\ 0 & 42 & -6 \\ -24 & 36 & 54 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -9 \\ 1 & 11 & -6 \\ 12 & 7 & -19 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -5 & -3 \\ -17 & 11 & -8 \\ 6 & -1 & -15 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -14 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} -10 & 11 \\ 12 & -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} -4 & -14 & 28 \\ -16 & 26 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ (7) $\begin{bmatrix} 22 & -15 \\ 10 & 31 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(8) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (9) $\begin{bmatrix} 28 & 8 \\ 18 & 1 \\ -7 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

الفصل 2، المصفوفات 12 الصف: الثاني الثانوي

تدريبات إعادة التعليم (11) - دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-2 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على المصفوفات

جمع المصفوفات وطرحها: المصفوفات التي لها الرتبة نفسها يمكن جمعها وطرح إحداها من الأخرى.

جمع المصفوفات

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{bmatrix}$$

طرح المصفوفات

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-j & b-k & c-l \\ d-m & e-n & f-o \\ g-p & h-q & i-r \end{bmatrix}$$

مثال 1: أوجد $A+B$ ، إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$

أوجد $A+B = \begin{bmatrix} 6-7 & -7+2 \\ 2-12 & -12-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -10 & -18 \end{bmatrix}$

مثال 2: أوجد $A-B$ ، إذا كان: $A = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

أوجد $A-B = \begin{bmatrix} -2-4 & 8-(-3) \\ 3-(-2) & -4-1 \\ 10-(-6) & 7-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 11 \\ 5 & -5 \\ 16 & -1 \end{bmatrix}$

تدريبات:

أوجد الناتج في كل ما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكب "لا يمكن".

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 11 \\ 3 & 13 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -5 & 9 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & -4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -12 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -10 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -12 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 1 \\ 11 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ (4) غير ممكن $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ 2 & -5 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 15 \\ -7 & 11 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -1 & -13 \\ 1 & 9 & -14 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & -6 \\ 4 & 5 & -11 \\ -7 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 7 \\ -3 & -4 & 3 \\ 8 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

الفصل 2، المصفوفات 11 الصف: الثاني الثانوي

تدريبات حل المسألة (14) - ضمن

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-2 تدريبات حل المسألة

العمليات على المصفوفات

(1) تتابع العيون، تشير المصفوفة أدناه إلى أسعار تذكر دخول حديقة الحيوان ومدينة ألعاب للشخص الواحد (بالريال).

كبار أطفال حديقة الحيوان مدينة الألعاب $\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$

ما الذي يمكنك فعله بهذه المصفوفة لتحصل على مصفوفة جديدة تبين الأسعار لحزمة أشخاص؟

أضرب المصفوفة في العدد 5.

(2) إشارات عناصر المصفوفات، يريد مهندسان أن يتجزأ إشارات عناصر مصفوفة، قام الأول بقرص المصفوفة في العدد -1، في حين قام الآخر بطرح مثل المصفوفة من المصفوفة نفسها، فأي منهما سيحصل على إجابة صحيحة؟ كلاهما يحصل على إجابة صحيحة.

لأن $M = M - 2M = -M$

(3) تذكر سعر، نُصِّمَت أسعار تذكر السفر بين 3 مدن في المصفوفة الأولى، وتُنصِّمَت الزيادة على التذكر بعد رفع أسعارها بين هذه المدن في المصفوفة الثانية أدناه.

التيبة جـ

التيبة جـ	التيبة ب	التيبة أ
0	440	700
460	0	660
850	700	0

مصفوفة الزيادة في أسعار التذاكر:

التيبة جـ	التيبة ب	التيبة أ
0	40	70
46	0	60
85	70	0

التيبة جـ المصفوفة ثل الأسعار الجديدة للتذاكر:

المدينة أ	0	480	770
المدينة ب	506	0	720
المدينة جـ	935	770	0

الفصل 2، المصفوفات 14 الصف: الثاني الثانوي

تدريبات المهارات (13) - دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-2 تدريبات المهارات

العمليات على المصفوفات

أوجد الناتج في كل ما يأتي إن أمكن، وإذا تعذر ذلك فاكب "لا يمكن".

(1) $\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 14 & 8 & 4 \\ 5 & 14 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 8 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ (4) غير ممكن $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} -10 & -31 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27 & 12 & -9 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 16 \\ -8 \\ -49 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ (7) $\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -9 & -17 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(8) $\begin{bmatrix} -8 & 40 \\ 44 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 5 & 10 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (9) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(10) $A+B$ (11) $A+B$ (12) $B-C$ (13) $B-A$ (14) $A+B+C$ (15) $3B$ (16) $-5C$ (17) $A-4C$

استعمل المصفوفات A ، B ، C لإيجاد كل ما يأتي:

الفصل 2، المصفوفات 13 الصف: الثاني الثانوي



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 2

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

فوق
ضمن
دون

كتاب التمارين (11)

فوق
ضمن

التدريبات الإثرائية (15)

2-2 العمليات على المصفوفات

أوجد الناتج فيما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & -1 \\ 10 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 14 & -9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 7 & -11 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 7 & -11 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & -1 \\ 10 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 14 & -9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 16 & -15 & 62 \\ 14 & 45 & 75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 7 & 2 & -6 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 24 & 3 \\ 24 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -16 & 20 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 27 & -9 \\ 54 & -18 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} -12 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

إذا كان $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 6 \\ -6 & -4 & 20 \end{bmatrix}$ فأوجد ناتج كل مما يأتي:

$$\begin{aligned} & A - B \quad (7) \quad \begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 \\ -4 & 6 & -7 \end{bmatrix} \\ & A - C \quad (8) \quad \begin{bmatrix} -6 & 7 & -6 \\ 3 & 10 & -18 \end{bmatrix} \\ & 4B - A \quad (10) \quad \begin{bmatrix} -12 & 17 & 20 \\ 7 & -6 & 34 \end{bmatrix} \\ & A + 0.5C \quad (12) \quad \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 \\ -6 & 4 & 12 \end{bmatrix} \\ & -2B - 3C \quad (11) \quad \begin{bmatrix} -26 & 16 & -28 \\ 16 & 12 & -78 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

13) مجسمات جمالية، بين الجدول المجاور

البلد	المدينة أ		المدينة ب	
	عدد المجسمات	الجماليات	عدد المجسمات	الجماليات
1427	27	567000	35	864000
1428	41	902000	32	672000
1429	35	777000	28	562000

أ) اكتب مصفوفتين تملآن عدد المجسمات وإجماليات التكلفة في كل من المدينتين.

$$\begin{bmatrix} 27 & 567000 & 35 & 864000 \\ 41 & 902000 & 32 & 672000 \\ 35 & 777000 & 28 & 562000 \end{bmatrix}$$

ب) أوجد مجموع المجسمات في كلتا المدينتين في كل من الأعوام الثلاثة، وأوجد إجمالي التكلفة في كل عام.

$$\begin{bmatrix} 63 & 1431000 \\ 73 & 1574000 \\ 63 & 1339000 \end{bmatrix}$$

14) تفتيش: مستعملاً الجدول المجاور الذي بين نسب بعض المواد الغذائية في نوعين من أعلاف الماشية، أوجد الفروق بين نسب المواد الغذائية الثلاثة في نوعي الأعلاف، وكتبه على شكل مصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

11

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-2 التدريبات الإثرائية

أهبت خصائص الأعداد الأولية كثيراً من علماء الرياضيات، وفي عام 1934 قام طالب من شرق الهند بوضع ستادام بناء المصفوفة الآتية:

4	7	10	13	16	19	22	25	...
7	12	17	22	27	32	37	42	...
10	17	24	31	38	45	52	59	...
13	22	31	40	49	58	67	76	...
16	27	38	49	60	71	82	93	...
...

ومن خصائص هذه المصفوفة المذهلة أنه يمكنك استعمالها للحكم على بعض الأعداد هل هي أولية أو غير أولية.

أكمل المسائل الآتية لتكتشف هذه الخاصية.

1) كبروك الصف الأول والعمود الأول من نمط حسابي، فما هو الفرق الثابت في هذا النمط؟

2) أوجد الحدود الأربعة التالية في الصف الأول.

28, 31, 34, 37

3) ما الفرق الثابت المستعمل في تكوين النمط في كل من الصفوف: 2, 3, 4, 5.

5, 7, 9, 11

4) اكتب الصفين التاليين للمصفوفة، وضمن كل صف 8 أعداد.

الصف 6: 19, 32, 45, 58, 71, 84, 97, 110

الصف 7: 22, 37, 52, 67, 82, 97, 112, 127, 142

5) اختر أي 5 أعداد من المصفوفة ولكل عدد اختره مثل m ، أوجد $2m + 1$.

تنوع الإجابات

6) حلل الأعداد التي توصلت إليها في السؤال (5) إلى عواملها الأولية.

تنوع الإجابات، جميع الأعداد غير أولية

7) استعمل تانتاك في السؤالين 5, 6 في إثبات العبارة الآتية: إذا كان العدد m في المصفوفة، فإن $2m + 1$ غير أولي.

8) اختر 5 أعداد ليست ضمن المصفوفة، وأوجد لكل عدد اخترته m المقادير $2m + 1$ ، ويؤيد أن الأعداد التي توصلت إليها أعداد أولية.

تنوع الإجابات، ولكن كل الأعداد أولية.

9) أكمل العبارة إذا لم يقع العدد m في المصفوفة، فإن $2m + 1$ عدد _____ أولي.

المصفوفات 2

15

الصف: الثاني التاريخ

1 المحور

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-3

ضرب مصفوفة في عدد.

الدرس 2-3

ضرب المصفوفات.

استعمال خصائص ضرب المصفوفات.

ما بعد الدرس 2-3

استعمال المصفوفات لحل نظام

معادلات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- يبين الجدول أن المكتبة باعت 249 قلم رصاص في شهر ربيع 2، فما عدد أقلام الحبر الجاف التي باعتها المكتبة في شهر صفر؟ 146

- ما سعر بيع الأقلام في شهر المحرم؟ 389 ريالاً

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

لماذا؟

يبين الجدول المجاور أنواع الأقلام وعددها التي باعتها مكتبة في 4 أشهر متتالية.

نوع القلم	الشهر وعدد الأقلام			
	المحرم	صفر	ربيع 1	ربيع 2
رصاص	153	217	197	249
حبر سائل	12	6	7	8
حبر جاف	82	146	102	158

إذا علمت أن سعر بيع قلم الرصاص ريال واحد، وقلم الحبر السائل 6 ريالات، وقلم الحبر الجاف ريالان، فإنه يمكنك تلخيص الجدول بمصفوفة عدد الأقلام B ، كما يمكنك التعبير عن مصفوفة سعر كل نوع من الأقلام بالمصفوفة P .

مصفوفة الأسعار P

$$\begin{bmatrix} \text{الحبر الجاف} & \text{الحبر السائل} & \text{قلم الرصاص} \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

مصفوفة عدد الأقلام B

$$\begin{bmatrix} 153 & 217 & 197 & 249 \\ 12 & 6 & 7 & 8 \\ 82 & 146 & 102 & 158 \end{bmatrix}$$

وباستعمال ضرب المصفوفات، تجد سعر بيع الأقلام في كل شهر.

ضرب المصفوفات: يمكنك ضرب مصفوفتين إذا فقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة A ذات الرتبة $m \times r$ في المصفوفة B ذات الرتبة $r \times t$ ، فإن الناتج هو المصفوفة AB ذات الرتبة $m \times t$.

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & AB \\ m \times r & & r \times t & & m \times t \end{matrix}$$

متساويان
رتبة AB

مثال 1 رتبة مصفوفة ناتج الضرب

هل يمكن إيجاد $A \cdot B$ في كل مما يأتي، وإن كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

(a) $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإن مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ معرفة، ورتبتها 3×2 .

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & AB \\ 3 \times 4 & & 4 \times 2 & & 3 \times 2 \end{matrix}$$

(b) $A_{5 \times 3} \cdot B_{5 \times 4}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإن مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ غير معرفة.

$$\begin{matrix} A & \cdot & B \\ 5 \times 3 & & 5 \times 4 \end{matrix}$$

تحقق من فهمك

(1B) $A_{3 \times 2}, B_{3 \times 2}$ غير معرفة

(1A) $A_{4 \times 6}, B_{6 \times 2}$ 4×2

فيما سبق:

درست ضرب المصفوفات في عدد.

والآن:

- أضرب المصفوفات.
- أستعمل خصائص ضرب المصفوفات.

www.obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

أحياناً تكتب $A_{m \times n}$ لتعبر عن مصفوفة A رتبته $m \times n$.

مصادر الدرس 2-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (74)	• تنويع التعليم، ص (74)	• تنويع التعليم، ص (74, 75)
كتاب التمارين	• ص (12)	• ص (12)	• ص (12)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16)	• تدريبات المهارات، ص (18)	• تدريبات المهارات، ص (18)
	• تدريبات المهارات، ص (18)	• تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات حل المسألة، ص (19)
	• تدريبات حل المسألة، ص (19)	• التدريبات الإثرائية، ص (20)	• التدريبات الإثرائية، ص (20)

يمكن إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين بضرب عناصر صفوف الأولى في عناصر أعمدة الثانية بالترتيب ثم جمع النواتج.

مفهوم أساسي ضرب المصفوفات

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة AB هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة A ، بعناصر العمود r من المصفوفة B بالترتيب.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

الرموز:

ضرب المصفوفات

مثال 1 يبين كيفية تحديد رتبة مصفوفة ناتج الضرب.

مثال 2 يبين كيفية ضرب مصفوفتين مربعيتين.

مثال 3 يبين كيفية حل مسائل من واقع الحياة، عن طريق ضرب مصفوفتين لهما رُتب مختلفة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال 2 ضرب المصفوفات المربعة

أوجد XY إذا كانت $X = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$ ، $Y = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$$XY = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الخطوة 1: اضرب عناصر الصف الأول في المصفوفة X في عناصر العمود الأول في المصفوفة Y بالترتيب، ثم اجمع نواتج الضرب، وضع النتيجة في الصف الأول، العمود الأول من المصفوفة XY .

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & -10(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الأول والعمود الثاني، واكتب النتيجة في الصف الأول والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & -10(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: اتبع الخطوات نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الأول، واكتب النتيجة في الصف الثاني، العمود الأول.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & -10(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix}$$

الخطوة 4: اتبع الخطوات السابقة نفسها مع عناصر الصف الثاني والعمود الثاني.

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & -10(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix}$$

الخطوة 5: بسّط المصفوفة الناتجة.

$$\begin{bmatrix} 6(-5) + (-3)(3) & 6(-4) + (-3)(3) \\ -10(-5) + (-2)(3) & -10(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39 & -33 \\ 44 & 34 \end{bmatrix}$$

تحقق من فهمك

(2) إذا كانت $U = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ ، $V = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ ، فأوجد UV .

يمكن استعمال ضرب المصفوفات في عدة مواقف حياتية.

مثالان إضافيان

حدد ما إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ معرفة أم لا، وإذا كانت كذلك فاذكر رتبة المصفوفة الناتجة.

a. $A_{3 \times 4}$ ، $B_{4 \times 2}$ مصفوفة حاصل الضرب معرفة ورتبتها هي 3×2 .

b. $A_{3 \times 2}$ ، $B_{4 \times 3}$ مصفوفة حاصل الضرب $A \cdot B$ ليست معرفة.

أوجد RS إذا كان:

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

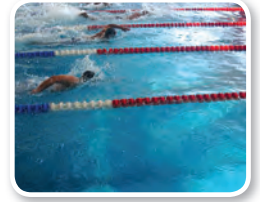
تنوع التعليم

كان بعض الطلاب في حاجة لتدريب أكثر على المصفوفات،

إليهم ترتيب مقاعد الفصل لتشكيل مصفوفات، على أن يرمز كل مقعد إلى عنصر في المصفوفة، ثم اطلب إليهم إعداد 24 بطاقة كبيرة تظهر قيم عناصر مصفوفتين في صورة $A_{4 \times 3}$ ، $B_{3 \times 4}$ بواسطة مقاعد الطلاب، وأعط كل طالب يجلس في هاتين المصفوفتين بطاقة لتبين العنصر الذي يمثله ذلك الموقع. ثم اطلب إليهم نمذجة ضرب المصفوفة $A \cdot B = C$ ، مبتدئين برسم المصفوفة 4×4 على السبورة ووضع خط لكل عنصر من عناصر C ، ثم دع الطلاب يُجروا عملية الضرب، ويجمعوا النتائج، ثم يكتبوها في الموقع الصحيح من المصفوفة على السبورة.

تنبيه!

معالجة الأخطاء شجع الطلاب على أن يعرضوا عملهم كاملاً في أثناء ضرب مصفوفتين، ممّا يسمح لهم بملاحظة الأخطاء الحسابية إن وجدت.



الربط مع الحياة

تشير البحوث الطبية إلى أن ممارسة السباحة مدة ساعة يحرق ما بين 250، و 500 سعر حراري، لذا تُعد السباحة من أفضل الرياضات لتخفيف الوزن.

سباحة: في مسابقة للسباحة بين أربع فرق سجلت 7 نقاط لكل من يحل في المركز الأول، و 4 نقاط لمن يحل في المركز الثاني، ونقطتان لمن يحل في المركز الثالث. استعمل الجدول المجاور الذي يبين نتائج مسابقة السباحة لكل فريق لتحديد الفريق الفائز في المسابقة.

المركز	المركز الثاني	المركز الأول	الفريق
3	7	4	A
1	9	8	B
3	5	10	C
6	3	3	D

افهم: المعطيات،

- جدول يبين عدد مرات حصول 4 فرق على المراكز الثلاثة الأولى في مسابقة للسباحة.
- عدد النقاط التي تحتسب للفريق في كل مركز.

المطلوب:

- تحديد الفريق الفائز.

خطط: يمكن إيجاد النقاط النهائية التي أحرزها كل فريق بضرب مصفوفة النتائج للفريق في مصفوفة عدد النقاط التي تحتسب لكل من المراكز (الأول والثاني والثالث).

حل: اكتب كلاً من النتائج والنقاط التي تم الحصول عليها في مصفوفتين، ورتب المصفوفتين على أن يكون عدد الصفوف في مصفوفة النقاط يساوي عدد الأعمدة في مصفوفة النتائج.

$$\begin{matrix} \text{النقاط} & \text{النتائج} \\ P = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} & R = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

اضرب المصفوفتين RP .

$$RP = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(7) + 7(4) + 3(2) \\ 8(7) + 9(4) + 1(2) \\ 10(7) + 5(4) + 3(2) \\ 3(7) + 3(4) + 6(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 94 \\ 96 \\ 45 \end{bmatrix}$$

تبين مصفوفة حاصل الضرب عدد النقاط التي أحرزها كل من الفرق A, B, C, D على الترتيب؛ لذا فالفريق C هو الفائز في المسابقة؛ لأنه حصل على أكبر مجموع من النقاط وهو 96 نقطة.

تحقق: المصفوفة R من الرتبة 4×3 ، والمصفوفة P من الرتبة 3×1 ؛ لذا فإن حاصل الضرب سيكون مصفوفة من الرتبة 4×1 .

تحقق من فهمك

680 نقطة: 1430

3 كرة السلة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل ضرب المصفوفات لتحديد الموسم الذي أحرز فيه فريق كرة السلة أكثر عددٍ من النقاط، وعدد النقاط التي أحرزها في ذلك الموسم.

خصائص ضرب المصفوفات: تذكر أن خصائص جمع الأعداد الحقيقية تبقى صحيحة أيضاً عند جمع المصفوفات، إلا أن بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية لا تكون صحيحة دائماً عند ضرب المصفوفات.

مثال 4 اختبار الخاصية الإبدالية

إذا كانت $G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ، $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، فأوجد ناتج كل مما يأتي:

GH (a)

$$GH = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 6 - 5 & 3 - 24 - 35 \\ 8 + 4 + 0 & 12 + 16 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -56 \\ 12 & 28 \end{bmatrix}$$

مثال إضافي

3

مسابقة علمية تتنافس ثلاث فرق في الجولة النهائية لمسابقة علمية، بحيث يمنح الفريق 3 نقاط لكل فوز، ونقطة واحدة لكل تعادل. فأَي فريق سيربح المسابقة؟

التعادل	الفوز	الفريق
4	5	الأول
3	6	الثاني
5	4	الثالث

الفريق الثاني سيربح المسابقة بمجموع نهائي 21 نقطة.

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابة

اعرض على الطلاب شرائح لمسائل مختلفة على ضرب المصفوفات، واسألهم إن كانت مصفوفة حاصل الضرب لكل مسألة منها ممكنة أم لا. واطلب إليهم الإجابة بـ A إن كان حاصل الضرب ممكناً، و B إن لم يكن كذلك. واختر طالباً لكل مثال، لتوضيح ذلك.

تنوع التعليم

فوق

توسع اكتب المسألتين الآتيتين على السبورة: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ ؛ اطلب إلى الطلاب إيجاد كلٍّ منهما، ثم توقع ناتج ضرب $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ؛ ثم اطلب إليهم إجراء عملية الضرب للتحقق من صحة التوقع. $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ ؛ $C = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

HG (b)

$$\underline{HG} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12 & 6-6 & -10+0 \\ -2-32 & -6+16 & 10+0 \\ 1+28 & 3-14 & -5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 \\ -34 & 10 & 10 \\ 29 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $\underline{GH} \neq \underline{HG}$.

تحقق من فهمك

(4) إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ، فهل $\underline{AB} = \underline{BA}$ ؟

$$\underline{AB} = \begin{bmatrix} -8 & 19 \\ -7 & 20 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{BA} = \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{AB} \neq \underline{BA}.$$

اتضح في المثال 4 أن الخاصية الإبدال لا تتحقق في ضرب المصفوفات. لذا فإن الترتيب يُعدّ في غاية الأهمية عند ضرب المصفوفات.

اختبار خاصية التوزيع

مثال 5

إذا كان $\underline{J} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{K} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\underline{L} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، فجد ناتج كل مما يأتي:

(a) $\underline{J}(\underline{K} + \underline{L})$

بالتعويض $\underline{J}(\underline{K} + \underline{L}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right)$

بجمع المصفوفتين $= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

بضرب المصفوفتين $= \begin{bmatrix} -2+8 & 2+12 \\ 5-4 & -5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$

(b) $\underline{JK} + \underline{JL}$

$$\underline{JK} + \underline{JL} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3) + 4(-1) & 2(2) + 4(3) \\ -5(3) + (-2)(-1) & -5(2) + (-2)(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(-4) + 4(3) & 2(-1) + 4(0) \\ -5(-4) + (-2)(3) & -5(-1) + (-2)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ -13 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 14 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $\underline{J}(\underline{K} + \underline{L}) = \underline{JK} + \underline{JL}$.

تحقق من فهمك

(5) استعمل المصفوفات $\underline{R} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\underline{S} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\underline{T} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$ لتحديد إذا كان

$$\underline{(S+T)R} = \underline{SR} + \underline{TR}$$

في المثال السابق كانت خاصية توزيع الضرب على الجمع صحيحة، ويمكن إثبات أن هذه الخاصية صحيحة دائماً إذا كانت عمليتا الضرب والجمع معرفتين.

إرشادات للدراسة

البرهان والأمثلة المضادة

لإثبات صحة خاصية في جميع الحالات، يجب إثبات صحتها في الحالة العامة. وليبين أن خاصية ما ليست صحيحة يكفي إعطاء مثال مضاد لها.

مثالان إضافيان

4

إذا كان:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \underline{L} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

فأوجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي:

$$\underline{KL} \quad (a) \quad \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -9 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{LK} \quad (b) \quad \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -15 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

إذا كان:

5

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

فأوجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي:

$$\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) \quad (a) \quad \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\underline{B} + \underline{A}\underline{C} \quad (b) \quad \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

إرشادات للمعلم الجديد

البناء على معرفة سابقة اطلب إلى الطلاب مقارنة العمليات في المثال 5 بالعمليات التي استعملوها سابقاً عند تطبيق خاصية التوزيع على الأعداد الحقيقية والعبارات الجبرية.

تُعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات A, B, C ، ولأي عدد k ، على أن تكون عمليتا ضرب أو جمع أيٍّ منها معرفتين:

$$(AB)C = A(BC)$$

خاصية التجميع لضرب المصفوفات

$$k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد

$$C(A + B) = CA + CB$$

خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات

$$(A + B)C = AC + BC$$

خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات

المحتوى الرياضي

ضرب المصفوفات يتعين قبل إجراء عملية ضرب مصفوفتين، أن تحدد ما إذا كانت مصفوفة حاصل الضرب معرفة أم لا.

ويمكن ضرب مصفوفتين إذا كان عدد الأعمدة في الأولى يساوي عدد الصفوف في الثانية.

تأكد

مثال 1

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يأتي أم لا، وإن كانت معرفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

$$8 \times 10 \quad E_{8 \times 6} \cdot E_{6 \times 10} \quad (3) \quad \text{غير معرفة} \quad C_{5 \times 4} \cdot D_{5 \times 4} \quad (2) \quad 2 \times 3 \quad A_{2 \times 4} \cdot B_{4 \times 3} \quad (1)$$

مثال 2

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

$$\begin{bmatrix} 0 & 44 \\ 8 & -34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad (5) \quad \begin{bmatrix} -14 & 2 \\ -32 & 41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -10 & 11 \end{bmatrix} \quad (7) \quad \begin{bmatrix} -30 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} -44 \\ 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix} \quad (9) \quad \text{غير معرفة} \quad \begin{bmatrix} -8 & 7 & 4 \\ -5 & -3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 8 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11) \quad \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 90 & -9 \\ -6 & -60 & 6 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 26 & 14 & -31 \\ -22 & -9 & -9 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} -16 & -1 \\ -6 & 10 \end{bmatrix} \quad (11)$$

مثال 3

12) لياقة بدنية: يبين الجدول المجاور عدد المشتركين في دورات اللياقة في المستويين الأول والثاني.

إذا كانت رسوم الاشتراك الأسبوعي 110 ريالاً، ورسوم الاشتراك الشهري 165 ريالاً، ورسوم الاشتراك السنوي 439 ريالاً.

عدد المشتركين في دورات اللياقة البدنية		
الاشترار	المستوى الأول	المستوى الثاني
الأسبوعي	35	28
الشهري	32	17
السنوي	18	12

(a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الأشخاص المسجلين في المستويات كلها، ومصفوفة تمثل رسوم الاشتراك فيها.
(b) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي الذي يحصل عليه المركز من اشتراكات المستويين الأول والثاني. **28185 ريالاً.**

المثالان 4, 5

استعمل المصفوفات $X = \begin{bmatrix} -10 & -3 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ لتحديد إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة: **13, 14** انظر الهامش.

$$X(YZ) = (XY)Z \quad (14)$$

$$XY = YX \quad (13)$$

إجابات

$$\begin{bmatrix} 35 & 28 \\ 32 & 17 \\ 18 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 110 & 165 & 439 \end{bmatrix} \quad (12a)$$

$$\begin{bmatrix} 53 & -87 \\ -2 & -60 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 62 & -33 \\ 28 & -69 \end{bmatrix} \quad (13) \text{ لا؛}$$

$$X(YZ) = \begin{bmatrix} 431 & 295 \\ 490 & 242 \end{bmatrix}, \quad (14) \text{ نعم؛}$$

$$(XY)Z = \begin{bmatrix} 431 & 295 \\ 490 & 242 \end{bmatrix}$$

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
47-52 ، 43-45 ، 15-33	دون المتوسط دون
47-52 ، 43-45 ، 35-41 ، 15-33 فردي ، 35-41 فردي	ضمن المتوسط ضمن
34-52	فوق المتوسط فوق

مثال 1 حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل مما يأتي أم لا، وإن كانت معرفة فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة:

- (15) 2×4 $P_{2 \times 3} \cdot Q_{3 \times 4}$ (16) 5×5 $A_{5 \times 5} \cdot B_{5 \times 5}$ (17) $M_{3 \times 1} \cdot N_{2 \times 3}$ غير معرفة
(18) 2×3 $X_{2 \times 6} \cdot Y_{6 \times 3}$ (19) $L_{2 \times 1} \cdot K_{2 \times 1}$ غير معرفة (20) 5×4 $S_{5 \times 2} \cdot T_{2 \times 4}$

مثال 2 أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

- (21) $\begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 1 & 26 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -7 \end{bmatrix}$ (22) $\begin{bmatrix} 12 & -42 \\ -6 & 21 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -7 \end{bmatrix}$
(23) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -75 & 9 \\ -17 & -5 \end{bmatrix}$ (24) $\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 44 & -19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$
(25) $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -4 & -10 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ (26) غير معرفة $\begin{bmatrix} -70 \\ 58 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 4 & -9 \\ 2 & 8 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$
(27) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -40 & 64 \\ 22 & 1 \end{bmatrix}$ (28) $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -24 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -1 \end{bmatrix}$

تقسيمات الأبنية السكنية			
المبنى	غرفة بسريير واحد	غرفة بسرييرين	غرفة بثلاث أسرة
1	3	2	2
2	2	3	1
3	4	3	0

مثال 3 عقرات: لدى مؤسسة عقارية 3 مبانٍ للإيجار، وبيّن الجدول المجاور تقسيمات هذه الأبنية. فإذا كانت الأجرة اليومية للغرفة التي تحوي سريرًا واحدًا 220 ريالاً، وللغرفة التي تحوي سريرين 250 ريالاً، وللغرفة التي تحوي ثلاثة أسرة 360 ريالاً.

- (a) اكتب مصفوفة تمثل تقسيمات الأبنية، ثم اكتب مصفوفة أسعار الغرف. انظر الهامش. **1880 ريالاً**
(b) اكتب مصفوفة تمثل الدخل اليومي للمؤسسة، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها. **1550 ريالاً**
(c) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد مقدار الدخل اليومي الكلي، على فرض أن جميع الغرف تم تأجيرها. **5060 ريالاً**

استعمل $k = 2$ ، $R = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ ، $Q = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ ، $P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ لتحديد إن كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة: (30-33) انظر الهامش.

(30) $k(PQ) = P(kQ)$ (31) $PQR = RQP$
(32) $PR + QR = (P + Q)R$ (33) $R(P + Q) = PR + QR$

الزهور	سعر البيع	سعر الشراء
جوري	3.00 ريالات	0.50 ريال
نرجس	6 ريالات	1.5 ريال
زنبق	7 ريالات	2 ريال

مثال 4, 5 تنسيق زهور: اشترى محل تنسيق زهور 200 زهرة جوري، و 150 زهرة نرجس، و 100 زهرة زنبق، وسعر شراء الزهرة من كل نوع مبين في الجدول المجاور، وكذلك سعر بيع الزهرة بعد تغليفها وتنسيقها في طاقة.

- (a) استعمل ضرب المصفوفات؛ لإيجاد المبلغ الكلي لشراء الزهور. **525 ريالاً**
(b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي حصل عليه صاحب المحل من بيع الزهور. **2200 ريال**
(c) استعمل العمليات على المصفوفات لإيجاد ربح المحل من بيع الزهور. **1675 ريالاً**



الربط مع الحياة

تنمو أزهار الزنبق من بصيالات محرشفة، وتأخذ الأزهار شكل أبواق، في كل منها 6 بتلات.

تنبيه!

معالجة الأخطاء في أثناء التطبيقات التي تتضمن ضرب المصفوفات، إذا كان عكس المصفوفتين ممكناً، فإن الضرب سيكون ذا معنى في اتجاه واحدٍ منها فقط.

إجابات

(29a) $I = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 220 \\ 250 \\ 360 \end{bmatrix}$

(30) نعم؛

$k(PQ) = \begin{bmatrix} 52 & 42 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$,
 $P(kQ) = \begin{bmatrix} 52 & 42 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$

(31) لا؛

$PQR = \begin{bmatrix} -22 & 240 \\ 44 & -12 \end{bmatrix}$,
 $RQP = \begin{bmatrix} 34 & -40 \\ -220 & -44 \end{bmatrix}$

(32) نعم؛

$PR + QR = \begin{bmatrix} 22 & 72 \\ 14 & -18 \end{bmatrix}$,
 $(P + Q)R = \begin{bmatrix} 22 & 72 \\ 14 & -18 \end{bmatrix}$

(33) لا؛

$R(P + Q) = \begin{bmatrix} 34 & -6 \\ -64 & -30 \end{bmatrix}$
 $PR + QR = \begin{bmatrix} 22 & 72 \\ 14 & -18 \end{bmatrix}$

استعمل المصفوفات $Z = \begin{bmatrix} -3 \\ x+y \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} -5 & -1.5 \\ x+2 & y \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3y & -4.5 \end{bmatrix}$ لإيجاد ناتج الضرب في كل مما يأتي إذا كان ممكناً:

- (35) \underline{XY} غير معرفة (36) \underline{YX} (37) \underline{ZY} غير معرفة (38) \underline{YZ} (39) $\underline{(YX)Z}$ (40) $\underline{(XZ)X}$ غير معرفة (41) $\underline{X(ZZ)}$ غير معرفة (42) $\underline{(XX)Z}$

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا في أجزاء من الورق ما إذا كان ضرب المصفوفة 4×3 في المصفوفة 3×2 ممكناً أو غير ممكن وتفسير إجاباتهم.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس 2-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (30)

إجابات

(36)

$$\begin{bmatrix} -10 - 4.5y & 36.75 \\ 2x + 4 + 3y^2 & -6x - 4.5y - 12 \\ 3.6y + 26 & -83.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1.5x - 1.5y + 15 \\ y^2 + xy - 3x - 6 \\ 1.2x + 1.2y - 39 \end{bmatrix} \quad (38)$$

(39)

$$\begin{bmatrix} 36.75x + 50.25y + 30 \\ -6x^2 - 18x - 10.5xy - 13.5y^2 - 12y - 12 \\ -83.4x - 94.2y - 78 \end{bmatrix}$$

(42)

$$\begin{bmatrix} 15x + 69y - 12 \\ -18y^2 + 42.75y - 18xy + 20.25x \end{bmatrix}$$

(47) تسجل الإحصائيات الرياضية على الأغلب في مصفوفات، فلو افترضنا أن الأعداد الواردة في الجدول تمثل عدد الأهداف التي سجّلها فريق كرة سلة في 4 مواسم، وكان الصف الأول يمثل الأهداف التي سُجّلت من داخل منطقة الثلاثة، والصف الثاني: الأهداف التي سُجّلت من خارج منطقة الثلاثة، والثالث: الرميات الحرة، فإنك تستطيع إيجاد العدد الكلي من النقاط المسجلة عن طريق ضرب مصفوفة قيم النقاط، والتي لا تتغير، في مصفوفة الأهداف، والتي تتغير بعد كل موسم. وتستخدم كرة السلة والمصارعة قيم نقاط مختلفة في الأهداف.

مسائل مهارات التفكير العليا

(43) **تبرير:** إذا كانت رتبة المصفوفة AB هي 5×8 ، ورتبة المصفوفة A هي 5×6 ، فما رتبة المصفوفة B ؟ 6×8

(44) **برهان:** بين أن الخصائص الآتية صحيحة للمصفوفات من النوع 2×2 .
 (a) خاصية التوزيع للضرب في عدد.
 (b) خاصية التوزيع للضرب على الجمع.
 (c) خاصية التجميع للضرب.
 (d) خاصية التجميع للضرب في عدد.

(45) **مسألة مفتوحة:** اكتب مصفوفتين A و B على أن تكون $AB = BA$. $a = 2, b = 1,$

(46) **تحذّر:** جد قيم a, b, c, d التي تجعل العبارة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 20 & 29 \end{bmatrix}$ صحيحة. $c = 3, d = 4$

(47) **اكتب:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، واستعمل البيانات المعطاة لشرح كيفية استعمال المصفوفات في إحصاءات الألعاب الرياضية. انظر الهامش.

(45) إجابة ممكنة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

تدريب على اختبار

(49) ما رتبة المصفوفة الناتجة عن عملية الضرب الآتية؟ C

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

1×4 A

3×3 B

4×1 C

4×3 D

(48) في مشغل ثلاث آلات حياكة، فإذا كان إنتاج كل آلة في 3 أشهر كما في الجدول أدناه، وسعر بيع القطعة الواحدة من إنتاج كل آلة معطى أيضاً، فما المبلغ الذي سيحصل عليه المشغل من مبيعات الأشهر الثلاثة؟ A

	الشهر 1	الشهر 2	الشهر 3	سعر بيع القطعة
الآلة 1	26	19	36	28
الآلة 2	48	27	16	19
الآلة 3	36	11	18	31

A 6012 ريالاً B 5400 ريال

C 1221 ريالاً D 2320 ريالاً

مراجعة تراكمية

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً: (الدرس 2-2) (50-52) انظر الهامش.

$$-4 \left(\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \right) \quad (52) \quad 5 \left(2 \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \right) \quad (51) \quad 4 \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad (50)$$

الدرس 2-3 ضرب المصفوفات 79

$$\begin{bmatrix} 42 & -24 \\ -42 & -31 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -20 \\ -100 & -30 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} -80 & -44 \\ 68 & 4 \end{bmatrix} \quad (52)$$



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 2

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16) دون

الاسم: التاريخ: **2-3** تدريبات إعادة التعليم ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات، يمكنك ضرب مصفوفتين إذا فقط إذا كان عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ إذا كان

بالتعويض $AB = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4(5) + 3(-1) & -4(-2) + 3(3) \\ 2(5) + (-2)(-1) & 2(-2) + (-2)(3) \\ 1(5) + 7(-1) & 1(-2) + 7(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & 17 \\ 12 & -10 \\ -2 & 19 \end{bmatrix}$

بالتبسيط

تمارين، أوجد الناتج في كل ما يأتي إذا كان ذلك ممكناً، وإذا لم تكن تلك فاطلب لا يمكن.

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 34 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 14 & -17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 4 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 14 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ (9) $\begin{bmatrix} 10 & -16 \\ 18 & -6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -21 \\ 13 & -15 \end{bmatrix}$

غير ممكن

الفصل 2، الصفوف 16

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (17) دون

الاسم: التاريخ: **2-3** تدريبات إعادة التعليم ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات، لا تطبق خاصية التبديل على ضرب المصفوفات.

خصائص ضرب المصفوفات:

- الخاصية التجميعية في ضرب المصفوفات: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- الخاصية التجميعية في ضرب عدد في مصفوفة: $k(A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$
- خاصية التوزيع من اليسار: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$
- خاصية التوزيع من اليمين: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

مثال: استعمل $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

(a) $(A + B) \cdot C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(1) + (-3)(6) & 6(-2) + (-3)(3) \\ 7(1) + (-2)(6) & 7(-2) + (-2)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -21 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$

(b) $A \cdot (B + C) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 11 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(3) + (-3)(11) & 4(-3) + (-3)(0) \\ 2(3) + 1(11) & 2(-3) + 1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -9 \\ 17 & -6 \end{bmatrix}$

تمارين، استعمل $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

صححة المصفوفات المطا:

(1) $k(A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B$ نعم
(2) $A \cdot B = B \cdot A$ لا
(3) $B \cdot C = C \cdot B$ لا
(4) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ نعم
(5) $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ نعم
(6) $k(A + B) = k \cdot A + k \cdot B$ نعم

الفصل 2، الصفوف 17

تدريبات المهارات (18) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ: **2-3** تدريبات المهارات ضرب المصفوفات

حدد إذا كانت عملية الضرب معرفة في كل ما يأتي أم لا، وإذا كانت معرفة، فأوجد الرتبة المصفوفة الناتجة.

(1) 1×2 $\Delta_{1 \times 3} \cdot \Delta_{3 \times 2}$ (2) 2×1 $\Delta_{2 \times 5} \cdot \Delta_{5 \times 2}$

(3) ضرب معرفة $\Delta_{3 \times 2} \cdot \Delta_{2 \times 2}$ (4) 4×1 $\Delta_{4 \times 4} \cdot \Delta_{4 \times 1}$

(5) 6×5 $\Delta_{6 \times 4} \cdot \Delta_{4 \times 5}$ (6) 3×4 $\Delta_{3 \times 3} \cdot \Delta_{3 \times 4}$

أوجد الناتج في كل ما يأتي إذا كان ذلك ممكناً.

(7) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(9) $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (10) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ غير معرفة

(11) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$ (12) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & -6 \end{bmatrix}$

(13) $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ غير معرفة (14) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

(15) $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -6 & 8 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -12 & 20 \\ -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (16) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

استعمل $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $k = 3$

صححة المصفوفات المطا:

(17) $k(A \cdot C) = A \cdot (k \cdot C)$ نعم
(18) $A \cdot B = B \cdot A$ لا
(19) $B \cdot (A + C) = B \cdot A + B \cdot C$ لا
(20) $k(A - B) = k \cdot A - k \cdot B$ نعم

الفصل 2، الصفوف 18

تدريبات حل المسألة (19) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ: **2-3** تدريبات حل المسألة ضرب المصفوفات

اكتشف الخطأ، إذا كان كل من المصفوفتين A و B من الرتبة 2×2 ، وقد أجرى سامي عليها الاشتقاقات الآتية، فهل هي صحيحة؟

وفي حالة عدم صحتها، فإعط الخطأ الذي ارتكبه؟

(a) $(A + B)^2 = (A + B)(A + B)$
(b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
(c) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$
(d) $(A + B)^2 = A^2 + AB + AB + B^2$
(e) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$
(f) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

في الخطوة من e إلى e خطئ سامي التبديل على BA ، ولكن هذا ليس صحيحاً تماماً في المصفوفات.

تسجيل الإجابات، سجل مازن درجات طلاب صفه في مصفوفة من الرتبة 20×3 ، في حين سجل في كل صف درجات أحد الطلاب، وقد سُجِّلَت درجات الاختبار الأول لجميع الطلاب في العمود الأول، والاختبار الثاني في العمود الثاني، والاختبار الثالث في العمود الثالث، وأراد مازن أن يكون مصفوفة من الرتبة 20×1 لتسجيل درجات الطلاب الموزونة، فإذا كان لكل من الاختبارين الأول والثاني 25% من الدرجة النهائية، والاختبار الثالث 50%، ففي أي مصفوفة يفرض مصفوفته الأصلية (20×3) من اليمين؟

(0.25)
(0.25)
(0.50)

مصفوفات خاصة، كتبت سارة مصفوفة M من الرتبة 3×3 ، ووجدت أنه لاية مصفوفة X من الرتبة 3×3 يكون $M \cdot X = X \cdot M$ ، فإذا تبين أن تكون المصفوفة M ؟

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

أوجد $M \cdot P$

(a) $\begin{bmatrix} 36.55 & 35.2 \\ 31 & 31.75 \end{bmatrix}$

(b) ماذا تعني مدخلات $M \cdot P$ ؟

ويشل الصف الأول الكفالة لطلاب عيبر من التجزين الأول والثاني على الترتيب.

ويشل الصف الثاني الكفالة لطلاب عائشة من التجزين الأول والثاني على الترتيب أيضاً.

الفصل 2، الصفوف 19



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 2

<p>دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط</p>	<p>دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط</p>
<p>دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط</p>	<p>دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط</p>
<p>دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط</p>	<p>دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط</p>
<p>دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط</p>	<p>دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط</p>

التدريبات الإثرائية (20)

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-3 التدريبات الإثرائية

خصائص المصفوفات

إن إجراء الحسابات على المصفوفات يختلف عن إجرائها على الأعداد الحقيقية، وفيما يأتي بعض العبارات التي تنطبق على الأعداد الحقيقية، فهل هي صحيحة في المصفوفات؟ استقصي الإجابة عن هذا السؤال في التمارين الآتية:

لجميع الأعداد الحقيقية a, b يكون $a \cdot b = 0$ إذا ونقط إذا كان $a = 0$ أو $b = 0$.

تتحقق خاصية التبديل في ضرب الأعداد الحقيقية. لأي عددين حقيقيين a, b يكون $ab = ba$.

تتحقق خاصية التجميع في ضرب الأعداد الحقيقية. لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c يكون $(ab)c = a(bc)$.

استعمل المصفوفات A و B و C في التمارين الآتية، واكتب ما إذا كانت العبارات صحيحة أم لا. افترض أن المصفوفة من الرتبة 2×2 تكون مصفوفة صفرية، إذا كان كل عنصر فيها يساوي صفراً.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) $BA = 0$ (2) $AC = 0$ (3) $AB = 0$

(4) $AB = BA$ (5) $AC = CA$ (6) $BC = CB$

(7) $A(BC) = (AB)C$ (8) $B(AC) = (BA)C$ (9) $B(AC) = (BC)A$

(10) اكتب جملة أو جملتين تلخص النتائج التي توصلت إليها حول خصائص ضرب المصفوفات.

الصف: _____ التاريخ: _____

كتاب التمارين (12)

2-3 ضرب المصفوفات

حدد ما إذا كانت عملية الضرب معرّفة في كل مما يأتي أم لا، وإن كانت كذلك، فحدد رتبة المصفوفة الناتجة:

(1) $2 \times 6 M_{2 \times 6} \cdot A_{6 \times 6}$ (2) $3 \times 8 A_{3 \times 8} \cdot M_{8 \times 8}$ (3) $7 \times 3 A_{7 \times 3} \cdot B_{3 \times 7}$

(4) $9 \times 9 P_{9 \times 9} \cdot Q_{9 \times 9}$ (5) $1 \times 1 P_{1 \times 1} \cdot Q_{1 \times 1}$ (6) $M_{1 \times 2} \cdot A_{2 \times 2}$ غير معرّفة

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

(7) $\begin{bmatrix} 2 & 20 \\ -23 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & -4 & -6 \\ 3 & -6 & 26 \end{bmatrix}$ (9) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 & 7 \\ 6 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

(10) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ (11) $\begin{bmatrix} -6 & -12 \\ 39 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$

(12) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ (13) $\begin{bmatrix} -30 & 10 \\ 15 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$

(14) $\begin{bmatrix} -297 & -75 \\ -15 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 23 & -10 \end{bmatrix}$ (15) إذا كانت $k = 3$ ، $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، فحدد ما إذا كانت المعادلات الآتية صحيحة للمصفوفات المعطاة أم لا:

(16) $AB + C = BA + CA$ (17) $AC = CA$ (18) $A(C+B) = B(A+C)$ (19) $A(AB) = R(AB)$ (20) $A(BA) = (BA)A$

عقارات، لدى مؤسسة 3 مجمعات سكنية، وبين الجدول المجاور تقسيمات غرف تلك المجمعات وفقاً لعدد الأريزة فيها، وكانت الأجرة الأسبوعية لغرف المجمعات الثلاثة على النحو الآتي: غرفة بسريرين 1796 ريالاً، غرفة بثلاثة أريزة 2165 ريالاً، غرفة بأريزة أريزة 2538 ريالاً.

مجموع	غرفة باثلاثة أسرة	غرفة بثلاثة أسرة	غرفة بسريرين
1	24	22	36
2	32	42	29
3	22	18	18

(a) اكتب مصفوفة تبين عدد غرف كل نوع في كل مجمع، ومصفوفة أخرى تبين الأجرة الأسبوعية لكل نوع من الغرف.

(b) إذا تم تأجير جميع غرف المجمعات الثلاثة لمدة أسبوع بحسب السعر أعلاه، فغير عن دخل كل مجمع في مصفوفة.

(c) ما مجموع الدخل الأسبوعي للمجمعات الثلاثة في ذلك الموسم؟ 526054 ريالاً

الصف: _____ التاريخ: _____

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الفصل.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (32).

المطويات متابعة المطويات

قبل أن تطلب إلى الطلاب الإجابة عن اختبار منتصف الفصل، شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 2-1 إلى 2-3 من خلال مطوياتهم.

إجابات

(5a) الأسبوع الأول: $\begin{bmatrix} 25 & 14 & 18 & 5 \\ 44 & 10 & 13 & 8 \end{bmatrix}$

الأسبوع الثاني: $\begin{bmatrix} 32 & 26 & 15 & 4 \\ 18 & 38 & 17 & 2 \end{bmatrix}$

(5b) $\begin{bmatrix} 57 & 40 & 33 & 9 \\ 62 & 48 & 30 & 10 \end{bmatrix}$

(14a) $\begin{bmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 25 & 35 & 45 \end{bmatrix}$

(14b)

$2 \begin{bmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 25 & 35 & 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 30 \\ 50 & 70 & 90 \end{bmatrix}$

(14c) $\begin{bmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 25 & 35 & 45 \end{bmatrix}$

عدد القمصان والبناطيل الإضافية التي يحتاج إلى تخزينها.

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

(10) $\begin{bmatrix} -6 & 17 & -26 \\ 3 & 29 & -32 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

(11) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ غير معرفة

(12) $\begin{bmatrix} -39 \\ 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & -7 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

(13) اختيار من متعدد: إذا كانت المصفوفة XY من النوع 3×2 ، والمصفوفة X من النوع 3×4 ، فما رتبة المصفوفة Y ؟ D

3×4 C 2×3 A

4×2 D 3×2 B

(14) مبيعات: بين الجدول الآتي موجودات محل ألبسة رياضية من القمصان والبناطيل بالدسته، وقد قرر صاحب المحل مضاعفة عدد القمصان قبيل فصل الصيف.

النوع	صغير	وسط	كبير
قميص	10	10	15
بنطال	25	35	45

(a) اكتب مصفوفة A تمثل عدد القمصان والبناطيل في المحل قبل مضاعفة العدد. (a-c) انظر الهامش

(b) ما العدد الذي يمكن أن نضرب فيه المصفوفة A لإيجاد المصفوفة M التي تمثل عدد القمصان والبناطيل بعد مضاعفته؟ جد M .

(c) ماذا تمثل المصفوفة $A - M$ في هذه الحالة؟

(15) اختيار من متعدد: ناتج الضرب:

A $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ يساوي:

$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ C $[8 \ -12]$ A

D عملية الضرب غير معرفة $\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}$ B

حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي: (2) 3×4

(1) $\begin{bmatrix} 10 & -6 & 18 & 0 \\ -7 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 11 & 9 & 7 \end{bmatrix} (2 \ 1 \times 5 \ [3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7])$

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix}$ فحدد:

(3) $a_{21} = -5$ (4) $b_{22} = 10$

(5) بين الجدول الآتي مبيعات محلّي ألبسة أطفال في أسبوعين مختلفين:

المحل	الأسبوع	الملابس المباعة			
		قميص	بلوزة	قبعة	بنطال
A	1	25	14	18	5
	2	32	26	15	4
B	1	44	10	13	8
	2	18	38	17	2

(a) اكتب مصفوفة مبيعات كل أسبوع.

(b) جد مجموع مبيعات الأسبوعين باستعمال جمع المصفوفات. (a, b) انظر الهامش.

أوجد الناتج في كل مما يأتي إذا كان ذلك ممكناً:

(6) $\begin{bmatrix} -8 & 15 \\ -3 & -15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ -6 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} -9 & -15 & -36 \\ 0 & 3 & -9 \\ -27 & -18 & 15 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 & 5 & 12 \\ 0 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

(8) $\begin{bmatrix} -15x + 4 \\ 9 \\ 4x - 15 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -3x \\ 2 \\ x \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} x - 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(9) اختيار من متعدد: أوجد ناتج:

A $2 \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ A $\begin{bmatrix} 42 & 6 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 27 & -5 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$ B $\begin{bmatrix} 21 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

مخطط المعالجة

دون المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط	المستوى 1
أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا
أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصادر الآتية:	فاختر
تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26).		مراجعة الدروس من 2-1 إلى 2-3.	
www.obeikaneducation.com		تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28).	
		www.obeikaneducation.com	

1 التركيز

التربط الرأسي

ما قبل الدرس 2-4
حل أنظمة من المعادلات جبرياً.

الدرس 2-4

حساب المحددات.

حل أنظمة معادلات خطية باستعمال
قاعدة كرامر.

ما بعد الدرس 2-4

استعمال المصفوفات لحل أنظمة
معادلات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما الطريقة التي تعرفها سابقاً لإيجاد مساحة مثلث؟

$$A = \frac{1}{2}bh$$

- لماذا يصعب استعمال الصيغة السابقة في هذه الحالة؟ لأنه قد يكون من الصعب تحديد ارتفاع المثلث.



المحددات: كل مصفوفة مربعة لها **محددة**، وتسمى محددة المصفوفة من النوع 2×2 محددة الدرجة الثانية.

لماذا؟

لتحديد الإقليم الذي يعيش فيه أحد النمور، يقوم عالم حيوانات بتتبعه بواسطة جهاز GPS، وبعد عدة أيام، حدد العالم أن الإقليم مثلث الشكل. ويمكنه بعد تحديد إحداثيات رؤوس المنطقة استعمال المصفوفات والمحددات لمعرفة مساحتها.

فيما سبق:

درست حل أنظمة من المعادلات جبرياً.

والآن:

- أحسب المحددات.
- أحل أنظمة معادلات خطية باستعمال قاعدة كرامر.

المفردات:

المحددة
determinant

محددة الدرجة الثانية
second-order determinant

محددة الدرجة الثالثة
third-order determinant

قاعدة الأقطار
diagonal rule

مصفوفة المعاملات
coefficient matrix

قاعدة كرامر
Cramer's Rule

www.obeikaneducation.com

اقرأ

المحددات:

يرمز لمحددة المصفوفة
A بالرمز $|A|$

أضف إلى
مطوبتك

محددة الدرجة الثانية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: يرمز لمحددة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحاً منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$$

مثال 1 محددة الدرجة الثانية

أوجد قيمة كل محددة فيما يأتي:

$$(a) \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{تعريف محددة الدرجة الثانية} \quad \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} &= 5(9) - 8(-4) \\ \text{بالتبسيط} &= 45 + 32 \\ &= 77 \end{aligned}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{تعريف محددة الدرجة الثانية} \quad \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} &= 0(-11) - 4(6) \\ \text{بالتبسيط} &= 0 - 24 \\ &= -24 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$(1A) \begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} \quad (1B) \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} \quad -73$$

مصادر الدرس 2-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (82)	• تنويع التعليم ص (82, 85)	• تنويع التعليم ص (85, 88)
كتاب التمارين	• ص (13)	• ص (13)	• ص (13)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

تُسمى محددات المصفوفات من الرتبة 3×3 **محددات الدرجة الثالثة**. ويمكنك حساب هذه المحددات باستعمال **قاعدة الأقطار** أو باستعمال محددة المصفوفة 2×2 .

إرشادات للدراسة

قاعدة الأقطار

يمكن استعمال قاعدة الأقطار فقط للمصفوفات من الرتبة 3×3 .

المحددات

مثال 1 يبيّن كيفية إيجاد قيمة محدّدة من الرتبة الثانية.

مثال 2 يبيّن كيفية استعمال قاعدة الأقطار لحساب محددات من الرتبة الثالثة.

مثال 3 يبيّن كيفية استعمال المحددات لحساب مساحة مثلث في موقف من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد $4 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

2 أوجد $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

باستعمال قاعدة الأقطار -8

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

حلّ بعض الأمثلة مع الطلاب، واحتفظ بهذه الحلول في صفحة ملاحظات، ثم أرسلها في نهاية الدرس بالبريد الإلكتروني إلى طلابك، أو عرضها على موقع المدرسة الإلكتروني (إن وجد)؛ فقد يساعد ذلك الطلاب على التركيز خلال الدرس بدلاً من محاولة كتابة الحسابات المدوّنة على السبورة.

مفهوم أساسي

حساب محددة المصفوفة 3×3

الطريقة الأولى: قاعدة الأقطار

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \\ g & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحددة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبيّنة ثم اجمع.

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبيّنة ثم اجمع.

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحددة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2.

الطريقة الثانية: باستعمال محددة المصفوفة 2×2 .

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

حساب محددة المصفوفة 3×3

مثال 2

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار، ثم باستعمال محددة المصفوفة 2×2 .

(1) قاعدة الأقطار:

الخطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحددة.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$$

الخطوة 2: جد حاصل ضرب عناصر الأقطار وموازياتها.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$4(2)(9) = 72$$

$$-4(2)(3) = -24$$

$$-8(6)(-4) = 192$$

$$5(6)(4) = 120$$

$$3(-3)(5) = -45$$

$$9(-3)(-8) = 216$$

الخطوة 3: اجمع نواتج الضرب في كل مجموعة.

$$72 + 192 + (-45) = 219$$

$$-24 + 120 + 216 = 312$$

الخطوة 4: اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

$$219 - 312 = -93$$

فتكون قيمة المحددة هي -93

تنوع التعليم

دون ضمن

استعمل الطلاب الحساب عن طريق الأقطار أول مرة،

إذا

بتشجيعهم على كتابة كل خطوة في الإجراءات، واطلب إليهم مقارنة عملهم بأعمال زملائهم؛ لإيجاد أي خطأ في حساباتهم أو في الطريقة التي استعملوها.

فقم

(2) باستعمال محددة المصفوفة 2×2 :

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - (-8) \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times -12 + 8 \times -3 + 3 \times -7 = -93$$

تحقق من فهمك

جد قيمة كل محددة فيما يأتي:

$$(2A) \begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} \quad (2B) \begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -60$$

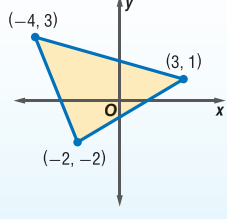
تستعمل المحددات أيضًا لإيجاد مساحة المثلث. فإذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث معلومة، فيمكن استعمال الصيغة أدناه لإيجاد مساحة المثلث.

مفهوم أساسي مساحة المثلث

التعبير اللفظي: مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه (a, b) , (c, d) , (e, f) هي القيمة المطلقة للمقدار A ، حيث:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

مثال:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$


إرشادات للدراسة

صيغة المساحة

لاحظ أنه يجب أن تستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى تضمن أن المساحة غير سالبة.



الربط مع الحياة

يعيش النمر في أقاليم تصل مساحتها إلى 150 km^2 ، ويحرس النمر إقليمه الذي يعيش فيه ويعرفه بتتبع أثره وأماكن روته.

مثال 3 من واقع الحياة حساب مساحة المثلث باستعمال المحددات

عالم الحيوان: عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. إذا كانت إحداثيات رؤوس الإقليم الذي يعيش فيه النمر موضحة في الشكل المجاور بالكيلومترات، فاستعمل المحددات لإيجاد مساحة الإقليم.

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$(a, b) = (0, 0)$
 $(c, d) = (4, 12)$
 $(e, f) = (-2, 8)$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

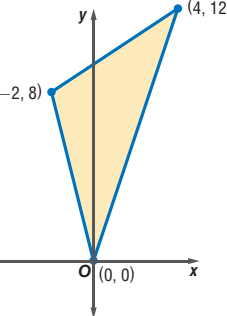
قاعدة الأقطار

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 4 & 12 \\ -2 & 8 & 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 4 & 12 \\ -2 & 8 & 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

جمع نواتج ضرب عناصر الأقطار

$$0 + 0 + 32 = 32 \quad -24 + 0 + 0 = -24$$

قيمة A

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$


مثال إضافي

3

المساحة عيّن فريق مساحة ثلاث نقاط على خريطة، بحيث شكّلت رؤوس منطقة مثلثية. واستعمل شبكة إحداثيات لتمثل كل وحدة منها 10 mi، وقد وجد أن هذه الرؤوس تقع في النقاط: $(0, -1)$, $(-2, -6)$, $(3, -2)$.
 استعمل المحددات لإيجاد مساحة المثلث. 850 mi^2

المحتوى الرياضي

المحددات ترتبط كل مصفوفة مربعة بعدد حقيقي يُسمى محددة المصفوفة. وتُسمى محددة المصفوفة 2×2 محددة الرتبة الثانية، وهي تساوي الفرق بين حاصل ضرب العناصر في كلا القطرين. وتسمى محددة المصفوفة 3×3 محددة الرتبة الثالثة، ويمكن حسابها باستعمال طريقة تُسمى قاعدة الأقطار.

تنبيه

تجنب الأخطاء اطلب إلى الطلاب عمل لوحة تبيّن خطوات إيجاد محددة المصفوفة 3×3 ، باستعمال أفلام تخطيط ملونة لتحديد الأقطار بصورة واضحة.

بالتبسيط

$$= \left(\frac{1}{2}\right) [32 - (-24)] = 28$$

فتكون مساحة الإقليم الذي يعيش فيه النمر هي 28 km^2 .

تحقق من فهمك

3 يقف خالد وسعد ورضوان عند ثلاث نقاط مختلفة على خريطة المدينة التي يسكنونها، فإذا كانت إحداثيات هذه النقاط هي: $(11, 9)$, $(6, 4)$, $(3, 15)$ ، بحيث تمثل كل وحدة على الخريطة 0.5 km . فما مساحة المنطقة المثلثة التي يقفون عند رؤوسها؟ **8.75 كيلومترات مربعة**

تسمى المصفوفة التي عناصرها معاملات المتغيرات في نظام معادلات بعدة متغيرات بعد ترتيب النظام **مصفوفة المعاملات**.

قاعدة كرامر: يمكنك استعمال المحددات لحل أنظمة معادلات، فإذا كانت قيمة المحددة لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفرًا، فإن للنظام حلًا وحيدًا. وإذا كانت قيمة المحددة صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول أو لا حل له، وهناك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تُسمى **قاعدة كرامر**.

أضف إلى مطوبتك

قاعدة كرامر

مفهوم أساسي

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} \text{ حيث } \begin{cases} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{cases} \text{ إذا كانت } C \text{ مصفوفة المعاملات للنظام}$$

$$\text{فإن حل هذا النظام هو } x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|} \text{ و } y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|} \text{، وذلك إذا كانت } |\underline{C}| \neq 0.$$

حل نظام من معادلتين

مثال 4

$$\begin{cases} 5x - 6y = 15 \\ 3x + 4y = -29 \end{cases} \text{ حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر: } 5x - 6y = 15$$

حساب محددة مصفوفة المعاملات

$$|\underline{C}| = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - (3)(-6) = 38$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$$

قاعدة كرامر

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{38}$$

بالتعويض

$$= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{38}$$

$$= \frac{15(4) - (-29)(-6)}{38}$$

بحساب المحددات

$$= \frac{5(-29) - 3(15)}{38}$$

$$= \frac{60 - 174}{38}$$

بالضرب

$$= \frac{-145 - 45}{38}$$

$$= -\frac{114}{38}$$

بالجمع والطرح

$$= -\frac{190}{38}$$

$$= -3$$

بالتبسيط

$$= -5$$

إرشادات للدراسة

لا تختلف قيمة مساحة المثلث باختلاف ترتيب الرؤوس في المحددة، أو بتبديل الأعمدة فيها.

قاعدة كرامر

مثال 4 يبيّن كيفية استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من معادلتين خطيتين.

مثال 5 يبيّن كيفية استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات خطية.

اقرأ

المحددات:

تستعمل المحددات لتحديد إذا كان نظام من المعادلات الخطية حل وحيد أم لا.

مثال إضافي

4 حل النظام الآتي باستعمال قاعدة

كرامر:

$$5x + 4y = 28$$

$$3x - 2y = 8$$

(4, 2)

إرشادات للدراسة

قاعدة كرامر

عندما تكون قيمة محددة مصفوفة المعاملات \underline{C} صفرًا، فإنه لا يكون للنظام حل وحيد.

حل النظام هو: $(-3, -5)$

تحقق:

$$x = -3, y = -5 \quad 5(-3) - 6(-5) \stackrel{?}{=} 15$$

بالتبسيط.

$$-15 + 30 \stackrel{?}{=} 15$$

$$\checkmark \quad 15 = 15$$

$$x = -3, y = -5 \quad 3(-3) + 4(-5) \stackrel{?}{=} -29$$

بالتبسيط.

$$-9 - 20 \stackrel{?}{=} -29$$

$$\checkmark \quad -29 = -29$$

تحقق من فهمك

حل كل نظام فيما يأتي باستعمال قاعدة كرامر:

(4, 3) $7x + 3y = 37$ **(4A)** $-5x - 7y = -41$

(5, -6) $8x - 5y = 70$ **(4B)** $9x + 7y = 3$

يمكنك استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات أيضًا.

مفهوم أساسي

أضف إلى
طوبيتك

استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} ax + by + cz = m \\ fx + gy + hz = n \\ jx + ky + \ell z = p \end{array}$$

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام ، حيث

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

فإن حل هذا النظام هو

وذلك إذا كانت $|C| \neq 0$.

مثال 5

حل نظام من ثلاث معادلات

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$4x + 5y - 6z = -14$$

$$3x - 2y + 7z = 47$$

$$7x - 6y - 8z = 15$$

بحساب محددة مصفوفة المعاملات

$$|C| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix} = 621$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -14 & 5 & -6 \\ 47 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & -8 \end{vmatrix}}{621}, \quad = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -14 & -6 \\ 3 & 47 & 7 \\ 7 & 15 & -8 \end{vmatrix}}{621}, \quad = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 3 & -2 & 47 \\ 7 & -6 & 15 \end{vmatrix}}{621}$$

$$= \frac{3105}{621} = 5, \quad = -\frac{1242}{621} = -2, \quad = \frac{2484}{621} = 4$$

85 الدرس 2-4 المحددات وقاعدة كرامر

مثال إضافي

5 حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$2x + y - z = -2$$

$$-x + 2y + z = -0.5$$

$$x + y + 2z = 3.5$$

(0.5, -1, 2)

تنبيه!

معالجة الأخطاء من المهم عند

حل نظام من ثلاث معادلات وثلاثة متغيرات، التنبيه على أن البسط بالنسبة للمتغير x وُجد عن طريق استبدال معاملات المتغير x بالحدود الثابتة للنظام، وكذلك نجد البسط لكل من المتغيرين y و z عن طريق استبدال المعاملات للمتغير y ، والمتغير z ، على الترتيب بالحدود الثابتة للنظام.

المحتوى الرياضي

قاعدة كرامر إحدى فوائد استعمال

قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات خطية هي أنه إذا كان النظام له حل وحيد، فإنه يمكن لقاعدة كرامر أن تعطي قيمة أي متغير من المتغيرات الثلاثة دون الحاجة إلى إيجاد قيم المتغيرات الأخرى. أما إذا كانت المحددة تساوي صفرًا، فإن قاعدة كرامر لا تعطي حلًا، ولكنها تشير إلى أن النظام إما أن يكون غير مستقل (له عدد لا نهائي من الحلول)، أو غير متسق (ليس له حل).

تنويع التعليم

إذا رغب بعض الطلاب في مراجعة ما تعلموه عن المصفوفات،

فاطلب إليهم كتابة فقرة مختصرة تعبر عن رأيهم بشأن الطرق المتعددة التي تعلموها في التعامل مع المصفوفات. واطلب إليهم التعليق على المواضيع التي وجدوها فعالة ومفيدة، والمواضيع التي وجدوها صعبة ومربكة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-15؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي ذكّر الطلاب بأن قاعدة كرامر لا تطبق عندما تساوي محددة مصفوفة المعاملات صفرًا؛ لأن الحل سوف يحوي كسرًا مقامه صفر؛ مما يجعله غير معرّف.

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

للتحقق من الحل، عوض القيم في المعادلات الأصلية.

وعليه يكون حل النظام هو (5, -2, 4)

$$\begin{aligned} 3(5) - 2(-2) + 7(4) &\stackrel{?}{=} 47 \\ 15 + 4 + 28 &\stackrel{?}{=} 47 \\ \checkmark \quad 47 &= 47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{تحقق: } 4(5) + 5(-2) - 6(4) &\stackrel{?}{=} -14 \\ 20 - 10 - 24 &\stackrel{?}{=} -14 \\ \checkmark \quad -14 &= -14 \\ 7(5) - 6(-2) - 8(4) &\stackrel{?}{=} 15 \\ 35 + 12 - 32 &\stackrel{?}{=} 15 \\ \checkmark \quad 15 &= 15 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

حل كل نظام معادلات مما يأتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$\begin{aligned} \text{(5A)} \quad 3x + 5y + 2z &= -7 \\ -4x + 3y - 5z &= -19 \\ 5x + 4y - 7z &= -15 \\ \text{(5B)} \quad 6x + 5y + 2z &= -1 \\ -x + 3y + 7z &= 12 \\ 5x - 7y - 3z &= -52 \end{aligned}$$

تأكد

أوجد قيمة كل محددة مما يأتي:

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad & \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{26} \\ \text{(2)} \quad & \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} \quad -12 \\ \text{(3)} \quad & \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} \quad -128 \\ \text{(4)} \quad & \begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} \quad 0 \end{aligned}$$

مثال 1



مثال 2

$$\begin{aligned} \text{(5)} \quad & \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad -19 \\ \text{(6)} \quad & \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix} \quad -80 \\ \text{(7)} \quad & \begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} \quad -284 \\ \text{(8)} \quad & \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad 302 \\ \text{(9)} \quad & \begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad 72 \\ \text{(10)} \quad & \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -3 \end{vmatrix} \quad 139 \end{aligned}$$

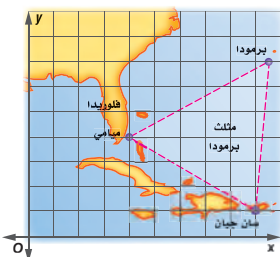
الربط مع الحياة

مثلث برمودا منطقة جغرافية على شكل مثلث متطابق الأضلاع تقريبًا، طول ضلعه 1500km، وقد انتشرت حوله الأساطير عن حوادث اختفاء الطائرات والسفن المارة به في ظروف غامضة لم يفسرها العلم حتى الآن.

مثال 3

جغرافيا: استعمل الخريطة الإحداثية المجاورة، التي تظهر منطقة مثلث برمودا، للإجابة عما يأتي:

- (a) احسب مساحة منطقة مثلث برمودا على الخريطة. **وحدة مربعة 15.75**
- (b) إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175 ميلًا في الواقع، فأوجد مساحة منطقة مثلث برمودا الحقيقية. **482343.75 ميلًا مربعًا**



مثال 4

$$\begin{aligned} \text{(11)} \quad & \text{استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:} \\ \text{(12)} \quad & \begin{cases} 4x - 5y = 39 \\ 3x + 8y = -6 \end{cases} \quad (6, -3) \\ \text{(13)} \quad & \begin{cases} 10c - 7d = -59 \\ 6c + 5d = -63 \end{cases} \quad (-8, -3) \end{aligned}$$

86 الفصل 2 المصفوفات

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
16-31 ، 34-41	دون المتوسط دون
19-31 فردي ، 34-41	ضمن المتوسط ضمن
28-41	فوق المتوسط فوق

مثال 5 استعمال قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

$$\begin{aligned} (14) \quad & \begin{cases} 4x - 2y + 7z = 26 \\ 5x + 3y - 5z = -50 \\ -7x - 8y - 3z = 49 \end{cases} \quad (-3, -5, 4) \\ (15) \quad & \begin{cases} 6x - 5y + 2z = -49 \\ -5x - 3y - 8z = -22 \\ -3x + 8y - 5z = 55 \end{cases} \quad (-3, 7, 2) \end{aligned}$$

تدريب وحل المسائل

المثالان 1, 2 أوجد قيمة كل محددة مما يأتي:

$$\begin{aligned} (16) \quad & \begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad (-102) \quad (17) \quad \begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} \quad 3 \quad (18) \quad \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} \quad 83 \\ (19) \quad & \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix} \quad (-135, 20) \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix} \quad (124, 21) \quad \begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix} \quad -459 \end{aligned}$$

مثال 3 (22) **رحلة مدرسية:** نظمت مدرسة ثانوية رحلة إلى المدينة المنورة التي تبعد 375 mi عن المدرسة. فإذا كان معدل سرعة الحافلة على الطريق السريع 65 mi/h، ومعدل سرعتها داخل المدن 25 mi/h، وكان زمن سير الحافلة 7 ساعات. فاستعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد ساعات سيرها على الطريق السريع، وعدد ساعات سيرها داخل المدن. **5 ساعات على الطريق السريع، ساعتان داخل المدن**

المثالان 4, 5 استعمال قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

$$\begin{aligned} (23) \quad & \begin{cases} 6x - 5y = 73 \\ -7x + 3y = -71 \end{cases} \quad (8, -5) \quad (24) \quad \begin{cases} 10a - 3b = -34 \\ 3a + 8b = -28 \end{cases} \quad (-4, -2) \\ (25) \quad & \begin{cases} 5x - 4y + 6z = 58 \\ -4x + 6y + 3z = -13 \\ 6x + 3y + 7z = 53 \end{cases} \quad (4, -2, 5) \quad (26) \quad \begin{cases} 8x - 4y + 7z = 34 \\ 5x + 6y + 3z = -21 \\ 3x + 7y - 8z = -85 \end{cases} \quad (-3, -4, 6) \end{aligned}$$

(27) **علم الآثار:** وجد عالم آثار عظام حوت عند الإحداثيات (0, 3), (4, 7), (5, 9) على الخريطة. فإذا كانت الإحداثيات بالأمتار. فجد مساحة المثلث الذي رؤوسه تلك النقاط. **2 m²**

$$\begin{aligned} (29) \quad & \begin{pmatrix} -6187 \\ 701 \\ -2904 \\ 701 \\ -4212 \\ 701 \end{pmatrix} \quad (29) \quad \begin{cases} 7x + 8y + 9z = -149 \\ -6x + 7y - 5z = 54 \\ 4x + 5y - 2z = -44 \end{cases} \quad (4, 8, -5) \quad (30) \quad \begin{cases} 3a - 5b - 9c = 17 \\ 4a - 3c = 31 \\ -5a - 4b - 2c = -42 \end{cases} \end{aligned}$$

(30) **صناعة:** ينتج مصنع 3 أحجام من علب الطلاء الفارغة، حجم صغير بتكلفة 1.15 ريال للعلبة، وحجم متوسط بتكلفة 1.75 ريال للعلبة، وحجم كبير بتكلفة 2.25 ريال للعلبة، وفي أحد الأيام أنتج من علب الحجم الصغير ضعف ما أنتجه من علب الحجم المتوسط، وكان مجموع ما أنتجه في ذلك اليوم 1385 علبة من جميع الأحجام، بتكلفة إجمالية قدرها 2238.75 ريالاً. **(a) صغير 650؛ وسط: 325؛ كبير: 410**

(a) استعمال قاعدة كرامر لإيجاد عدد العلب التي أنتجها المصنع من كل حجم في ذلك اليوم.

(b) إذا زادت تكلفة إنتاج علب الحجم الصغير فقط في اليوم التالي لتصبح 1.25 ريال بعد زيادة قليلة في الحجم، فأوجد تكلفة الإنتاج في اليوم التالي إذا كان إنتاج المصنع مقارنة باليوم السابق أقل بـ 140 علبة من الحجم الصغير، وأكثر بـ 125 علبة من الحجم المتوسط، وأكثر بـ 35 علبة من الحجم الكبير.

2426.25 ريالاً

الدرس 2-4 المحددات وقاعدة كرامر 87



الربط مع الحياة

يستعمل علماء الآثار شبكات وخرائط في مواقع التنقيب عن الآثار لتسجيل المواقع التي وجدوا فيها هذه الآثار.

31 يستنتج: أراد حمد إنشاء حديقة مثلثة الشكل في فناء منزله، فرسم لها مخططاً على المستوى الإحداثي، فكانت إحداثيات رؤوس الحديقة على المستوى $(-1, 7)$, $(2, 6)$, $(4, -3)$. جد المساحة الحقيقية للحديقة إذا كانت كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل متراً على الأرض. $12.5 m^2$

مسائل مهارات التفكير العليا

32 تحد: أوجد قيمة محددة مصفوفة من النوع 3×3 ، على أن تكون عناصرها على النحو الآتي:

$$a_{mm} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } m + n \text{ زوجياً} \\ m + n & \text{إذا كان } m + n \text{ فردياً} \end{cases}$$

33 مسألة مفتوحة: أعط مثالاً لمصفوفة من الرتبة 2×2 تحقق الشرط المذكور في كل مما يأتي:

- (a) المحددة تساوي صفراً. (a-c) انظر الهامش.
 (b) المحددة تساوي 25
 (c) جميع العناصر أعداد سالبة والمحددة تساوي -32

34 اكتب: صف التمثيلات البيانية الممكنة لنظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين إذا كانت محددة مصفوفة المعاملات تساوي صفراً.

34 إجابة ممكنة: إذا

كانت المحددة لمصفوفة المعاملات لنظام معطي 2×2 تساوي 0، فلا يوجد حل وحيد للنظام. يمكن ألا يكون للنظام حل، ويكون المستقيمان في هذه الحالة متوازيين، أو يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول حيث يكون المستقيمان منطبقين.

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكر الطلاب بطرح ناتج ضرب القطرين عند حساب قيمة المحددة.

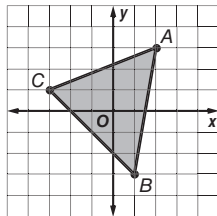
إرشادات للمعلم الجديد

المفردات نبّه الطلاب على أن المساحة الجانبية لمجسم تشير إلى مجموع مساحات جميع أوجه المجسم ما عدا القاعدة أو القاعدتين.

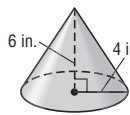
4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى كل طالب أن يخبر زميله بالإرشادات والطرق التي تساعده على تذكر ترتيب الحسابات في العمليات التي تحتاج إلى عدة خطوات في هذا الدرس.

تدريب على اختبار



- 36** أوجد مساحة المثلث المبين في الشكل المجاور.
- A 10 وحدات مربعة
 B 14 وحدة مربعة
 C 12 وحدة مربعة
 D 16 وحدة مربعة



- 35** إجابة قصيرة: مخروط قائم نصف قطر قاعدته 4in وارتفاعه 6in. ما مساحته الجانبية؟
 (المساحة الجانبية للمخروط تساوي $\pi r l$ ، حيث l الراسم للمخروط) $8\sqrt{13}\pi \text{ in}^2$

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت مصفوفة الضرب معرفة في كل مما يأتي أم لا، وإذا كانت كذلك، فأوجد رتبة المصفوفة الناتجة: (الدرس 2-3)

- 37** معرفة، 4×6 $A_{4 \times 2} \cdot B_{2 \times 6}$ **38** غير معرفة $C_{5 \times 4} \cdot D_{5 \times 3}$ **39** معرفة، 2×1 $E_{2 \times 7} \cdot F_{7 \times 1}$

حل كل نظام مما يأتي: (مهارة سابقة)

$$\begin{aligned} 4y + 6x &= 10 & (41) & \left(\frac{79}{25}, -\frac{56}{25} \right) \\ 2x - 7y &= 22 \\ 2x - 5y &= -26 & (40) & (-8, 2) \\ 5x + 3y &= -34 \end{aligned}$$

إجابات

33a إجابة ممكنة: $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

33b إجابة ممكنة: $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

33c إجابة ممكنة: $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$

تنوع التعليم

فوق

$$2x + 4y = 10$$

$$-x - 2y = 3$$

توسع اكتب النظام الآتي على السبورة: واطلب إلى الطلاب استعمال قاعدة كرامر لحل النظام، وأن يشرحوا سبب استعمال أو عدم استعمال قاعدة كرامر لحل النظام. لا تستعمل قاعدة كرامر؛ لأن المحددة تساوي صفراً. ثم اطلب إليهم تمثيل كل معادلة بيانياً، وشرح سبب عدم وجود حل للنظام. المستقيمان الممثلان للمعادلتين متوازيان.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 2

دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21) دون تدريبات إعادة التعليم - تنمة (22) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-4 تدريبات إعادة التعليم

المحددات وقاعدة كرامر

قاعدة كرامر، توفر المحددات طريقة لحل أنظمة المعادلات.

لتكون C مصفوفة معادلات نظام المعادلات

$$\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

قاعدة كرامر لأنظمة

فان معبرين

حل النظام هو $x = \frac{|a \ m|}{|C|}$, $y = \frac{|f \ n|}{|C|}$, $|C| \neq 0$

مثال: استعمال قاعدة كرامر لحل نظام المعادلات

$$\begin{cases} 5x - 10y = 8 \\ 10x + 25y = -2 \end{cases}$$

قاعدة كرامر

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -10 \\ -2 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}} = \frac{8(25) - (-2)(-10)}{5(25) - (-10)(10)} = \frac{180}{225} = \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|C|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 10 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 10 & 25 \end{vmatrix}} = \frac{5(-2) - 8(10)}{5(25) - (-10)(10)} = \frac{-90}{225} = -\frac{2}{5}$$

تعمير:

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات كما يأتي:

1) $\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 4y = 17 \\ 3x - y = 29 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + 7y = 38 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x - 3y = -3 \\ 2x + y = 21 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 5x - 4y = 24 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x + 2y = -29 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 2 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = -8 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 3x - 4y = 9 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2x + 7y = 16 \\ x - 2y = 30 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 8x + 2y = \frac{3}{4} \\ 5x - 4y = -\frac{27}{7} \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 3x - 12y = -14 \\ 9x + 6y = -7 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 6x - 9y = -1 \\ 3x + 18y = 12 \end{cases}$

الفصل 2، الصفحات

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-4 تدريبات إعادة التعليم

المحددات وقاعدة كرامر

المحددات، المصفوفة من الرتبة 2×2 محددة من الرتبة الثانية، والمصفوفة 3×3 محددة من الرتبة الثالثة.

عدد المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $|a \ b|$ إن $|a \ b| = ad - bc$

عدد المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار

عدد من الرتبة الثالثة

أر استعمل عدد المصفوفة 2×2 بالشكل:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه (a, b) , (c, d) , (e, f) تساوي $|A|$ ، حيث

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

مثال: أوجد قيمة كل محددة كما يأتي:

1) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(3(6) + 5(0)(2) + (-2)(-3)(2)) - [(-2)(-3)(2) + 4(0)(-3) + 5(1)(6)] = [72 + 0 + 6] - [-12 + 0 + 30] = 78 - 18 = 60$

تعمير:

أوجد قيمة كل محددة كما يأتي:

1) $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 6(5) - 3(-8) = 54$

2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 3(2) - 2(9) = 6 - 18 = -12$

3) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 3(4(-3) - 1(-12)) - (-2)(-12 - 4) + (-2)(-12 - 4) = 3(-12 + 12) - (-2)(-16) + (-2)(-16) = 0 + 32 + 32 = 64$

4) 44.5 ، $(2, -3)$ ، $(7, 4)$ ، $(-5, 5)$

الفصل 2، الصفحات

تدريبات المهارات (23) دون تدريبات حل المسألة (24) ضمن

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-4 تدريبات حل المسألة

المحددات وقاعدة كرامر

1) اكتشف الخطأ، وحدد هيام إشارات خطأ في حساب المحددة.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(5)(9) - 2(6)(7) + 3(4)(8) = 45 - 84 + 96 = 57$$

2) حوّل الإشارات التي يتعين تعديلها.

3) بركة سياحة، أنشأ مهندس معماري بركة في فناء بناء كى في الشكل. اعتمد على الشكل، واكتب محددة تجد منها مساحة البركة.

4) المساحة، إذا كانت إحداثيات رؤوس مثلث هي $(-4, 5)$ ، $(3, 25, 4, 8)$ ، $(-1, 4, -0, 8)$ وكانت كل وحدة مربعة على المستوى الإحداثي تمثل 400 كيلومتر مربع.

5) اسمهم، يصنع صالح مثلثاً إحداثيات رؤوسه $(0, x)$ ، $(0, -x)$ ، $(-6, 0)$ في حين $x > 0$ وقد حوّل العمل المثلث من مادة معدنية تكلف الوحدة المربعة منها ريالين.

6) أوجد مساحة المثلث بالكيلومتر المربع، وقرب إجابتك إلى أقرب عدد كلى.

7) 8306 كيلو مترات مربعة.

8) أوجد قيمة المحددة في الفرع ه، واحسب قيمة x لتكون تكلفة المعدن المستعمل 60 ريالاً.

9) $6x; 2(6x) = 60; x = 5$

10) مثلث ABC ، حيث $A(0, 0)$ و $B(1, 0)$ و $C(1, 1)$

الفصل 2، الصفحات

الاسم: _____ التاريخ: _____

2-4 تدريبات المهارات

المحددات وقاعدة كرامر

أوجد قيمة كل محددة كما يأتي:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -6 \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$ 10) $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$

11) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ 12) $\begin{vmatrix} -12 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ 13) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -11 \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ 15) $\begin{vmatrix} -1 & -14 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ 16) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

17) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ 18) $\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ 19) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

20) $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ 21) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ 22) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

23) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 24) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

الفصل 2، الصفحات



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 2

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

فوق ضمن دون

كتاب التمارين (13)

فوق ضمن

التدريبات الإثرائية (25)

2-4 المحددات وقاعدة كرامر

أوجد قيمة كل محدد فيما يأتي:

$$\begin{array}{lll} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} & \text{(1)} & \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \text{(2)} & \begin{vmatrix} -5 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} & \text{(3)} \\ \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -11 \end{vmatrix} & \text{(4)} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -12 & 4 \end{vmatrix} & \text{(5)} & \begin{vmatrix} -14 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \text{(6)} & \begin{vmatrix} 0.5 & -0.7 \\ 0.4 & -0.3 \end{vmatrix} & \text{(7)} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -9.5 \end{vmatrix} & \text{(8)} & \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3.75 & 5 \end{vmatrix} & \text{(9)} & \end{array}$$

أوجد قيمة كل محدد فيما يأتي:

$$\begin{array}{lll} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} & \text{(10)} & \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 9 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix} & \text{(11)} & \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} & \text{(12)} \\ \begin{vmatrix} -12 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & -6 \end{vmatrix} & \text{(13)} & \begin{vmatrix} 2 & 7 & -6 \\ 8 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} & \text{(14)} & \begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} & \text{(15)} \end{array}$$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام من معادلتين فيما يأتي:

$$\begin{array}{lll} \begin{cases} -2x - 3y = -14 \\ 4x - y = 0 \end{cases} & \text{(1)} & \begin{cases} 5x + 4y = 10 \\ -3x - 2y = -8 \end{cases} & \text{(2)} & \begin{cases} 4x - 2y = -6 \\ 3x + y = 18 \end{cases} & \text{(3)} \\ \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 2 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = -6 \end{cases} & \text{(4)} & \begin{cases} 5x - 6 = 3y \\ 5y = 54 + 3x \end{cases} & \text{(5)} & \begin{cases} 6x + 6y = 9 \\ 4x - 4y = -42 \end{cases} & \text{(6)} \end{array}$$

(12) هندسة: أوجد مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه $(-4, 10)$, $(6, -5)$, $(3, 5)$.

(13) بيئة: يستعمل عالم مخلوقات بحرية جهاز رصد وتحليل البيانات الجغرافية (GIS) لتحديد الإقليم البحري الذي يعيش فيه نوع من الأسماك النادرة، فأظهرت بيانات الجهاز أن إحداثيات رؤوس ذلك الإقليم على مستوى إحداثي تمثل وحدة الطول فيه كيلومترًا هي: $(-8, 10)$, $(6, 17)$, $(2, -4)$. حكم مساحة ذلك الإقليم؟ 133km^2

13

الاسم:

التاريخ:

2-4 التدريبات الإثرائية

مقول الصفوف والحدود

تعلمت سابقًا كيف تبين المعلومات على هيئة مصفوفة. فالمصفوفة تحتوي على عناصر في الصورة a_{ij} ، في حين i رقم الصف، و j رقم العمود اللذين يقع فيها العنصر.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ففي هذه المصفوفة: $a_{11}=2$, $a_{12}=-1$, $a_{21}=3$, $a_{22}=4$ ويمكنك الحصول على مقول الصفوف بقلب المصفوفة لتصبح الأعمدة صفوفًا والصفوف أعمدة، بمعنى آخر العنصر a_{ij} يصبح a_{ji} ، ويوزن لنقول المصفوفة Δ^T بالرمز Δ^T .

$$\Delta^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

احسب محدد Δ^T ومحدد Δ .

$$|\Delta| = 2(4) - 3(-1) = 11$$

$$|\Delta^T| = 2(4) - (-1)(3) = 11$$

1) أوجد مقول كل مصفوفة مما يأتي:

$$\begin{array}{ll} \Delta = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} & \text{(a)} \\ \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} & \text{(b)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Delta = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} & \text{(c)} \\ \Delta = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} & \text{(d)} \\ \Delta = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \text{(e)} \end{array}$$

2) أوجد محددات المصفوفات في التمرين 1 ومحددات مقولاتها.

محدد B تساوي -16 ؛ محدد B' تساوي -16

محدد C تساوي 4 ؛ محدد C' تساوي 4

محدد D تساوي -18 ؛ محدد D' تساوي -18

3) ماذا تلاحظ حول المحددات؟ ضع تخمينًا حول محددات المصفوفات ومحددات مقولاتها.

محدد المصفوفة تساوي محدد مقولها.

الفصل 2 المصفوفات

25

الصف: الثاني التاريخ:

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 2-5

حل أنظمة المعادلات الخطية جبرياً.

الدرس 2-5

إيجاد النظير الضربي لمصفوفة من

النوع 2×2 .

كتابة معادلات مصفوفية لنظام من

معادلتين وحلها.

ما بعد الدرس 2-5

استعمال المصفوفات الموسّعة لحل

أنظمة من المعادلات.



لماذا؟

يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغذاء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المساواة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.5 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، و s تمثل سعر علبة المقبلات، و d تمثل سعر علبة العصير.

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي: تذكر أن عددين من الأعداد الحقيقية يكون كل منهما نظيراً ضربياً للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **مصفوفة الوحدة** هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي واحداً، والباقي أصفار، وإذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

مصفوفة وحدة من النوع 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما الذي تم التعبير عنه بالعدد 3 في المصفوفة الأولى؟ يوجد ثلاث علب مقبّلات في الوجبة العائلية.
- ما رتبة مصفوفة ناتج ضرب المصفوفة 3×3 في المصفوفة 1×3 ؟
- أوجد ناتج ضرب المصفوفتين

$$[w + 2s] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ w \\ s \\ d \end{bmatrix}$$

أضف إلى مطوبتك

المصفوفة المحايدة لعملية الضرب

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها I هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة A لها رتبة مصفوفة الوحدة I نفسها، فإن $A \cdot I = I \cdot A = A$

الرموز: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، و $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان A, B مربعيتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $AB = BA = I$ فإن المصفوفة B تُسمى نظيراً ضربياً للمصفوفة A ، وكذلك تُسمى المصفوفة A نظيراً ضربياً للمصفوفة B . وإذا كان للمصفوفة A نظير ضربي فإنه يرمز إليه بالرمز A^{-1} ، حيث $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

فيما سبق؟

درست حل نظام معادلات خطية جبرياً.

والآن؟

- أجد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2×2 .
- أكتب معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وأحلها.

المفردات:

- مصفوفة الوحدة identity matrix
- النظير الضربي للمصفوفة inverse matrix
- المعادلة المصفوفية matrix equation
- مصفوفة المتغيرات variable matrix
- مصفوفة الثوابت constant matrix
- مصفوفة المعاملات coefficient matrix

مصادر الدرس 2-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (91)	• تنويع التعليم، ص (94)	
كتاب التمارين	• ص (14)	• ص (14)	
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26)	• تدريبات المهارات، ص (28)	• تدريبات المهارات، ص (28)
	• تدريبات المهارات، ص (28)	• تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات حل المسألة، ص (29)
	• تدريبات حل المسألة، ص (29)	• التدريبات الإثرائية، ص (30)	• التدريبات الإثرائية، ص (30)

التحقق من النظرية
الضربية

بما أن عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية، فمن الضروري التأكد من الضرب في الاتجاهين.

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربية

مثال 1 يبين كيفية تحديد ما إذا كان زوج من المصفوفات يمثل مصفوفةً ونظيرها الضربية أم لا.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

حدد ما إذا كان زوج من المصفوفات الآتية يمثل مصفوفةً ونظيرها الضربية أم لا.

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

نعم، كلٌّ منهما نظير ضربية للأخرى.

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

لا، لا تمثل أيٌّ منهما نظيرًا ضربياً للأخرى.

مثال 1

التحقق من النظرية الضربية

حدد إذا كان كل زوج من المصفوفات الآتية يمثل مصفوفةً ونظيرها الضربية أم لا:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

كل من المصفوفتين $\underline{A}, \underline{B}$ تمثل نظيرًا ضربياً للأخرى إذا فقط إذا كان $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = \underline{I}$.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

بكتابة المعادلة

$$= \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفتين

بما أن $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{I}$ ، فإن أيًّا منهما لا تمثل نظيرًا ضربياً للأخرى.

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \underline{G} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \quad (b)$$

كلٌّ من المصفوفتين $\underline{F}, \underline{G}$ تمثل نظيرًا ضربياً للأخرى إذا فقط إذا كان $\underline{F} \cdot \underline{G} = \underline{G} \cdot \underline{F} = \underline{I}$.

$$\underline{F} \cdot \underline{G} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

بكتابة المعادلة

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{15}{8}-\frac{15}{8} \\ -\frac{6}{4}+\frac{6}{4} & -\frac{10}{8}+\frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفتين

$$\underline{G} \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

بكتابة المعادلة

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}-\frac{10}{8} & -\frac{15}{4}+\frac{30}{8} \\ \frac{3}{4}-\frac{6}{8} & -\frac{5}{4}+\frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفتين

بما أن $\underline{F} \cdot \underline{G} = \underline{G} \cdot \underline{F} = \underline{I}$ ، فإن كلًّا من المصفوفتين $\underline{F}, \underline{G}$ نظير ضربية للأخرى.

تحقق من فهمك

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (1)$$

كلًّا من $\underline{X}, \underline{Y}$ نظير ضربية للأخرى

يمكنك استعمال المحددات؛ لإيجاد النظرية الضربية لمصفوفة ما.

أضف إلى
مطوبتكمفهوم أساسي
النظير الضربية للمصفوفة من النوع 2×2

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ هو } \underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ وذلك إذا كانت } |\underline{A}| \neq 0$$

لاحظ أنه إذا كانت قيمة محددة مصفوفة ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربية.

لاحظ تبديل موقعي
عنصري القطر
الرئيس، وتغيير إشارتي
عنصري القطر الآخر
عند حساب \underline{A}^{-1} .

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة اطلب إلى الطلاب توضيح ما الذي يعنيه عدم وجود نظير ضربية لمصفوفة المعاملات في نظام من المعادلات، وتحقق من تضمينهم أمثلة في توضيحاتهم. وتلخيصها في ملف.

المحتوى الرياضي

مصفوفات الوحدة يُطلق على العناصر في الصف i ، والعمود i في المصفوفة المربعة $n \times n$ عناصر القطر الرئيس. في مصفوفة الوحدة التي هي مصفوفة مربعة يكون كل عنصر من عناصر قطرها الرئيس 1، وتكون بقية العناصر أصفارًا.

خطوات إيجاد النظير الضربي للمصفوفة A
من الرتبة 2×2 .
1) أوجد قيمة $|A|$ ، فإذا كان $|A| = 0$ ، فإنه ليس للمصفوفة A نظير ضربي، وإذا كان $|A| \neq 0$ ، فإن للمصفوفة A نظيراً ضريبياً نجده كما في الخطوات 4-2:
2) بادل بين موضعي العنصرين الواقعين على القطر الرئيس.
3) غير إشارة كل من العنصرين الواقعين على القطر الآخر.
4) اضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء الخطوات 3، 2 في العدد $\frac{1}{|A|}$ ، فتحصل على A^{-1} .

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{7}{19} \\ \frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \end{bmatrix} \quad (2A)$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (2B)$$

المعادلات المصفوفية
يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان للمصفوفة المعاملات نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

$$P = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$\text{بحساب المحددة.} \quad \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 - (-10) = 3$$

بما أن قيمة المحددة لا تساوي صفراً، فإن P^{-1} موجودة.

$$\text{تعريف النظير الضربي للمصفوفة من النوع } 2 \times 2 \quad P^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$a = 7, b = -5, c = 2, d = -1 \quad = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{بالتبسيط.} \quad = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

تأكد: أوجد ناتج ضرب المصفوفتين. وإذا كان كل من ناتج ضرب يساوي I ، فإن كلتا المصفوفتين نظير ضربي للأخرى.

$$\checkmark \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} + \frac{10}{3} & \frac{35}{3} - \frac{35}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} & \frac{10}{3} - \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$\text{بحساب المحددة.} \quad \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = -72 - (-72) = 0$$

بما أن قيمة المحددة تساوي صفراً، فإن Q^{-1} ليس موجوداً.

تحقق من فهمك

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad (2B) \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad (2A)$$

المعادلات المصفوفية: يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلاً، يمكنك كتابة معادلة مصفوفية لحل نظام المعادلتين الآتيتين:

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x - 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة على الشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات

مصفوفة المتغيرات

المتغيرات في النظام فقط

مصفوفة الثوابت

الثوابت في النظام فقط

مثال إضافي

أوجد النظير الضربي لكل من المصفوفتين الآتيتين إن وُجد:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$I = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (b)$$

لا يوجد نظير ضربي.

المعادلات المصفوفية

مثال 3 يبين كيفية كتابة نظام من المعادلات لنموذج من واقع الحياة، ثم استعمال المعادلة المصفوفية لهذا النظام.

تنوع التعليم

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلاب كتابة مقارنة بين النظير الضربي للمصفوفة والنظيرين (الجمعي والضربي) للعدد.

ضمن

ثم حل المعادلة المصفوفية بالطريقة نفسها التي تحل بها أي معادلة أخرى من الشكل $ax = b$.

$$\begin{aligned} \underline{A}X &= \underline{B} && \text{المعادلة} && ax = b \\ \underline{A}^{-1}\underline{A}X &= \underline{A}^{-1}\underline{B} && \text{بضرب كل طرف في النظير الضربي} && \left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)b \\ &&& \text{لمصفوفة المعاملات إن وجد.} && \\ \underline{I}X &= \underline{A}^{-1}\underline{B} && \underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{I}, \left(\frac{1}{a}\right)a = 1 && 1x = \frac{b}{a} \\ \underline{X} &= \underline{A}^{-1}\underline{B} && \underline{I}X = \underline{X}, 1x = x && x = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

لاحظ أن حل المعادلة المصفوفية من الشكل $\underline{A}X = \underline{B}$ هو حاصل ضرب النظير الضربي لمصفوفة المعاملات في مصفوفة الثوابت.

مثال إضافي

3

تأجير الآلات: تخطط إدارة مدرسة لإقامة يوم مفتوح لطلاب المرحلة الابتدائية. إذا كانت أجرة آلة صنع الفشار 60 ريالاً، وأجرة براد الماء 70 ريالاً، ودفعت الإدارة 660 ريالاً لاستئجار 10 أجهزة من النوعين المذكورين، فكم جهازاً استأجرت من كل نوع؟ **4 آلات لصنع الفشار، و6 برادات ماء.**



الربط مع الحياة

تتساوى أسعار توريد الوقود إلى جميع محطات الوقود في المملكة على اختلاف مواقعها، مع إضافة بدل نقل الوقود فقط.

حل نظام من معادلتين باستعمال المعادلة المصفوفية

سفر: زوّد سلمان سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الرياض قادمًا من جدة. فإذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى 0.50 ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر 0.45 ريال لكل لتر، وكان مجموع ما زود به سيارته من البنزين 104 لترات، بسعر إجمالي 49 ريالاً. فكم لتر بنزين زوّد به سيارته من كل محطة؟

يكتب نظام المعادلتين الذي يمثل هذه الحالة على النحو الآتي:

$$x + y = 104$$

$$0.50x + 0.45y = 49$$

الخطوة 1: اكتب المعادلة المصفوفية بافتراض أن x عدد لترات البنزين من المحطة الأولى، y عدد لترات البنزين من المحطة الثانية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.50 & 0.45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 \\ 49 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{0.45 - 0.50} \begin{bmatrix} 0.45 & -1 \\ -0.50 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.05} \begin{bmatrix} 0.45 & -1 \\ -0.50 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 20 \\ 10 & -20 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: حل المعادلة المصفوفية باستعمال $\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 20 \\ 10 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 104 \\ 49 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 60 \end{bmatrix}$$

إذن الحل هو (44, 60).

تحقق: تستطيع التأكد من حلك باستعمال الحاسبة البيانية كالآتي:

$$\text{أدخل } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.50 & 0.45 \end{bmatrix} \text{ على صورة مصفوفة } \underline{A}$$

$$\text{أدخل } \begin{bmatrix} 104 \\ 49 \end{bmatrix} \text{ على صورة مصفوفة } \underline{B}.$$

اضرب النظير الضربي للمصفوفة \underline{A} في المصفوفة \underline{B} .

*Unsaved		*Unsaved	
1	1	1	1
0.5	0.45	0.5	0.45
104		104	
49		49	
1	1	104	
0.5	0.45	49	

تحقق من فهمك

3 كتب: أنفقت عائشة في معرض للكتب 112.5 ريالاً لشراء 3 كتب علمية و4 كتب ثقافية. على حين أنفقت فاطمة 157.5 ريالاً لشراء 3 كتب علمية و10 كتب ثقافية. فإذا كانت الكتب العلمية تُباع بالسعر نفسه x . والكتب الثقافية تُباع بالسعر نفسه y . فما سعر الكتاب العلمي؟ **27.5 ريالاً**

مثال 1 حدد إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربياً للأخرى فيما يأتي:

$$(1) \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{لا} \quad (2) \underline{F} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \underline{G} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{نعم}$$

مثال 2 أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد: (3.4) انظر الهامش.

$$(3) \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال 3 (5) نقود: مع أحمد 25 قطعة نقدية من فئة أرباع وأنصاف الريالات، بحيث تبلغ قيمة ما معه 8.5 ريالاً. فما عدد الأرباع والأنصاف التي معه؟ **16 ربعمًا، 9 أنصاف**

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

$$(6) \begin{cases} -2x + y = 9 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad (7) \begin{cases} 4x - 2y = 22 \\ 6x + 9y = -3 \end{cases} \quad (8) \begin{cases} -2x + y = -4 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \quad (1, -2)$$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدد إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربياً للأخرى فيما يأتي: (9-11) لا

$$(9) \underline{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \underline{S} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \underline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \underline{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10) \underline{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \underline{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال 2 أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد: (12-15) انظر الهامش.

$$(12) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (13) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (14) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \quad (15) \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال 3 (16) سكان: بين الشكل الآتي نسبة الهجرة السنوية بين إحدى المدن وضواحيها.



اكتب مصفوفة تمثل هجرة سكان المدينة وسكان الضواحي. انظر الهامش.

(17) مشتريات: دفع سعد 225 ريالاً لشراء 5 أقلام حبر جافة و 6 أقلام حبر سائلة، بينما دفع ماجد 120 ريالاً لشراء 3 أقلام جافة و 3 أقلام سائلة من النوع نفسه. فإذا كانت الأقلام الجافة تُباع بالسعر نفسه x والأقلام السائلة تُباع بالسعر نفسه y ، فاستعمل معادلة مصفوفية؛ لإيجاد سعر القلم الجاف. انظر ملحق الإجابات.

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

$$(18) \begin{cases} -x + y = 4 \\ -x + y = -4 \end{cases} \quad (19) \begin{cases} -x + y = 3 \\ -2x + y = 6 \end{cases} \quad (20) \begin{cases} x + y = 4 \\ -4x + y = 9 \end{cases} \quad (-1, 5)$$

$$(21) \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 5x + 3y = 6 \end{cases} \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \quad (22) \begin{cases} y - x = 5 \\ 2y - 2x = 8 \end{cases} \quad \text{لا يوجد حل} \quad (23) \begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases} \quad (1.5, 0)$$

$$(24) \begin{cases} 1.6y - 0.2x = 1 \\ 0.4y - 0.1x = 0.5 \end{cases} \quad (-5, 0) \quad (25) \begin{cases} 4y - x = -2 \\ 3y - x = 6 \end{cases} \quad (-30, -8) \quad (26) \begin{cases} 2y - 4x = 3 \\ 4x - 3y = -6 \end{cases} \quad \left(\frac{3}{4}, 3\right)$$

الدرس 2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية 93

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 8-1؛ للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(12) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(13) \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$(14) \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$(15) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

(16)

	نسبة المهاجرين	نسبة الباقين
المدينة	0.05	0.95
الضواحي	0.03	0.97



الربط مع الحياة

تسعى حكومتنا الرشيدة إلى إقامة العديد من المشاريع في الضواحي بهدف وضع بنية تحتية فاعلة، مما يشجع على الهجرة العكسية أو هجرة السكان من المدن إلى الضواحي.

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون	دون المتوسط 9-26 ، 30-39
ضمن	ضمن المتوسط 9-25 فردي ، 26 ، 30-39
فوق	فوق المتوسط 23-39

مسائل مهارات التفكير العليا

(27) **اكتشف الخطأ:** أنشأت كل من هاجر وفاطمة معادلة مصفوفية لنظام المعادلتين $5x + 7y = 19$, $3y + 4x = 10$. فهل حل أحدهما أو كليهما صحيح؟ فسر إجابتك.

فاطمة

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

هاجر

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(28) **تحذير:** صِف المعادلة المصفوفية لنظام معادلتين خطيتين بمتغيرين ذات العدد اللانهائي من الحلول.

(29) **تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً، وفسر إجابتك. "المصفوفة المربعة لها نظير ضربي".

(30) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة مصفوفية ليس لها حل.

(31) **اكتب:** اشرح كيف يمكن استعمال معادلات مصفوفية لحل أنظمة معادلات. **انظر الهامش.**

(27) هاجر؛ لقد وضعت فاطمة 3 للمتغير x بدلاً من 4.

(28) النظام يجب أن يحتوي على معادلتين إحداهما هي حاصل ضرب عدد في المعادلة الأخرى.

(29) أحياناً، إجابة ممكنة: يكون لمصفوفة مربعة نظير ضربي إذا كان محددها لا يساوي 0.

(30) إجابة ممكنة:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

تنبيه!

اكتشف الخطأ وجّه الطلاب في السؤال 27، إلى أن جميع المعادلات في النظام يجب أن تكتب مع متغيراتها بالترتيب نفسه قبل استعمال الصيغة المصفوفية.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب وصف كيف يمكن استعمال معادلات مصفوفية لحل نظام من معادلتين وبمتغيرين.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس 2-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (31)

إجابة:

(31) إجابة ممكنة: أولاً؛ رتب كل

المعاملات للنظام في مصفوفة معاملات، ثانياً؛ رتب المتغيرات في مصفوفة متغيرات. ثالثاً؛ رتب الثوابت في مصفوفة ثوابت. رابعاً؛ أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات. خامساً؛ اضرب طرفي المعادلة المصفوفية في النظير الضربي لمصفوفة المعاملات. سادساً؛ تحقق من الحل بالتعويض في المعادلة الأصلية. ويُعد استعمال معادلة مصفوفية أكثر فاعلية عندما يكون لديك نظام ليس من السهل إجراء العمليات الحسابية على معاملاته مثل أن تكون كسوراً اعتيادية، أو كسوراً عشرية، أو أعداداً كبيرة أو أن هناك أكثر من ثلاثة متغيرات، لكن يُعد استعمال طريقة التعويض أو الحذف أكثر فاعلية، عندما تكون الأعداد صغيرة، وأن يكون هناك متغيران أو ثلاثة متغيرات فقط، أو أحد المتغيرات يمكن تعريفه بدلالة متغير آخر.

تدريب على اختبار

(32) تباع مكتبة 3 أحجام من الدفاتر: حجم صغير بسعر 1 ريال، وحجم متوسط بسعر 1.5 ريال، وحجم كبير بسعر 2 ريال، فإذا باعت المكتبة 52 دفترًا في أحد الأشهر، وكان عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط يزيد على عدد الدفاتر المبيعة من الحجم الصغير بـ 7 دفاتر، وكان إجمالي المبيعات 75 ريالاً. فما عدد الدفاتر المبيعة من الحجم المتوسط؟ **C**

36 D 24 C 17 B 11 A

مراجعة تراكمية

جد قيمة كل محددة فيما يأتي: (الدرس 2-4)

551 $\begin{vmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix}$ (35)

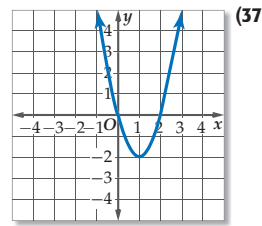
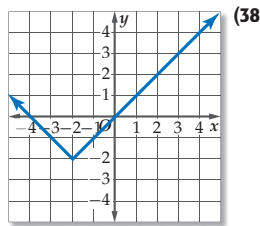
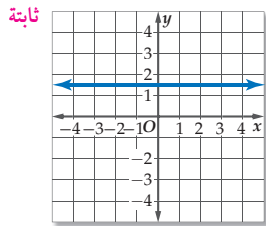
(34) $\begin{vmatrix} 9 & -7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} - 62$

(33) $\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} - 54$

(36) **حليب:** تنتج مزرعة أبقار 200 جالون على الأكثر من الحليب الطازج والحليب المبستر يوميًا. فإذا كان كل زبون من زبائن المزرعة يحتاج إلى 15 جالونًا على الأقل من الحليب المبستر، و 21 جالونًا على الأقل من الحليب الطازج يوميًا، وكان ربح المزرعة في الجالون الواحد من الحليب المبستر 8.2 ريالاً، ومن الحليب الطازج 7.5 ريالاً. فكم عدد الجالونات التي يجب إنتاجها من كلا النوعين ليكون الربح أكبر ما يمكن؟ (الدرس 1-6)

179 جالونًا من الحليب المبستر و 21 جالونًا من الحليب الطازج.

حدد نوع الدالة الممثلة بيانيًا في كل مما يأتي: (الدرس 1-3)



94 الفصل 2 المصفوفات

تنوع التعليم

فوق

توسع اكتب النظام الآتي على السبورة:

$$-3x + y = 5$$

$$-4x - 2y = 20$$

ثم اطلب إلى الطلاب حل هذا النظام بأربعة طرق مختلفة (بالتمثيل البياني، جبرياً، استعمال قاعدة كرامر، استعمال النظير الضربي للمصفوفة)، ثم اطلب إليهم أن يقارنوا ويوضحوا نقاط الاختلاف بين هذه الطرق باستعمال معايير مثل سهولة الاستعمال وسرعته. **حل هذا النظام هو (-3, -4).**

الهدف

استعمل الحاسبة
البيانية TI-nspire
لحل نظام معادلات
خطية.

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire والمصفوفة الموسعة لحل نظام من المعادلات الخطية.

المواد اللازمة

• الحاسبة البيانية TI-nspire.

إرشادات التدريس

وجّه الطلاب إلى أن الحاسبة البيانية TI-nspire تسمح لهم بأداء عمليات صفية على المصفوفات، ويسمح الاستعمال المتتالي للعمليات الصفية بتحويل المصفوفة إلى الصيغة المختزلة. والصيغة Reduced Row-Echelon Form: 5: تنجز كل الخطوات مرة واحدة؛ أي أنها تختصر كثيرًا من الوقت.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزّع الطلاب مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات. ثم اطلب إليهم استعمال حاسباتهم البيانية لتنفيذ الخطوتين 1 و 2 من المثال ومن التمرين 1.

• وجّههم إلى أنه إذا فقد أحد المتغيرات في معادلة من نظام من المعادلات، فإن معاملها يجب أن يكون صفرًا.

التدريب اطلب إلى الطلاب حل

التمارين 3 - 1.

يمكنك حل نظام معادلات خطية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire. إذ تحتوي **المصفوفة الموسعة** على مصفوفة المعاملات مع عمود إضافي إلى اليمين يحوي الثوابت. وباختزال المصفوفة الموسعة يصبح من السهل تحديد حل نظام من المعادلات.

مثال

اكتب مصفوفة موسعة لنظام المعادلات الآتي، ثم حل هذا النظام باستعمال الحاسبة البيانية:

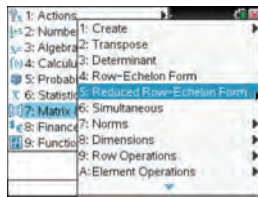
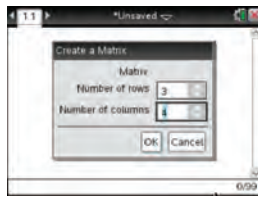
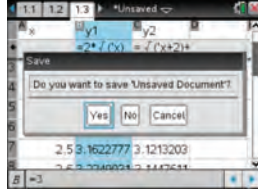
$$2x + y + z = 1$$

$$3x + 2y + 3z = 12$$

$$4x + y + 2z = -1$$

الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على **enter**.
- من الشاشة الظاهرة اختر **New Document**.
- ملاحظة: إذا ظهرت شاشة **Save** فاختر **Yes** إذا أردت حفظ الملفات السابقة، أو **No** إذا أردت حذفها.
- اختر **1: Add Calculator**.
- اضغط على مفتاح **matrix** ثم اختر **7: Matrix & Vector** ومنها اختر **1: Create** ومنها **1: Matrix** تظهر شاشة نحدد من خلالها عدد الصفوف وعدد الأعمدة.
- أدخل عدد الصفوف ثم اضغط **enter** وأدخل عدد الأعمدة ثم اضغط **enter**.
- أدخل معاملات المتغيرات والثوابت مستعملًا **tab** للتنقل، ثم اضغط **enter**.
- اضغط **matrix**، ثم اختر **7: Matrix & Vector** ومنها اختر **5: Reduced Row-Echelon Form**.
- استعمال السهم لأعلى لتظلل المصفوفة الموسعة التي كتبتها ثم اضغط **enter** ثم **enter** مرة أخرى فيظهر الحل.



ادرس الشكل المختزل للمصفوفة، ولاحظ أن الأعمدة الثلاثة الأولى تشكل مصفوفة محايدة من الرتبة 3×3 ، وتستنتج من الصف الأول أن $x = -4$ ، ومن الصف الثاني أن $y = 3$ ، ومن الصف الثالث أن $z = 6$ وعليه، يكون الحل $(-4, 3, 6)$.

تمارين:

اكتب مصفوفة موسعة لكل نظام معادلات فيما يأتي، ثم حله باستعمال الحاسبة البيانية:

$$6x - 4y + 2z = -4 \quad (3)$$

$$4x + 6y = 0 \quad (2)$$

$$3x + 2y = -4 \quad (1)$$

$$2x - 2y + 6z = 10$$

$$8x - 2y = 7$$

$$4x + 7y = 13$$

$$2x + 2y + 2z = -2$$

توسيع 2-5 معمل الحاسبة البيانية: المصفوفات الموسعة 95

من المحسوس إلى المجرد

اسأل الطلاب عن الطريقة التي يفضلونها لحل نظام من معادلتين في متغيرين من بين طريقة الحاسبة البيانية TI-nspire، أو الطريقة المعروضة في الدرس 2-5. ثم اطلب إليهم أيضًا اختيار طرقهم المفضلة لحل نظام من المعادلات، وأن يفسروا خياراتهم.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 3، لتقويم مدى إتقان الطلاب طريقة حل نظام من المعادلات الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 2

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) دون

الاسم: التاريخ:

2-5 تدريبات إعادة التعليم
التظهير الضريبي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

المصفوفة الحادية، والتظهير الضريبي للمصفوفة، المصفوفة الحادية لعرب المصفوفات هي مصفوفة مربعة، جميع عناصرها الرئيسية تساوي العدد 1، وبقيتها عناصرها تساوي العدد صفر.

المصفوفة الحادية I_n إذا كانت I_n مصفوفة من الرتبة $n \times n$ وكانت I_n المصفوفة الحادية للقرب، فإن ضرب المصفوفات $A \cdot I_n = A$ ، $I_n \cdot A = A$.

إذا كان للمصفوفة A من الرتبة $n \times n$ نظير ضريبي A^{-1} ، فإن $A \cdot A^{-1} = I_n$ و $A^{-1} \cdot A = I_n$.

مثال: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ ، حدد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين $X = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$ ، $Y = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ تمثل نظيرًا ضريبيًا للآخرى.

أوجد $A \cdot X$ ، $A \cdot Y$.

أوجد $X \cdot A$ ، $Y \cdot A$.

وبناءً على ذلك، فإن $X \cdot A = Y \cdot A = I_n$ ، فإن كلًّا من X ، Y نظير ضريبي للآخرى.

تمارين:

حدد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضريبيًا للآخرى أم لا:

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ نعم (2) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ نعم (3) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ نعم (4) $A = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ نعم (5) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ نعم (6) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 11 & -2 \end{bmatrix}$ نعم (7) $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ نعم (8) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$ نعم (9) $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ نعم (10) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 17 & 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -17 & 7 \end{bmatrix}$ نعم (11) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ نعم (12) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$ نعم

الاسم: التاريخ:

2-5 تدريبات إعادة التعليم
التظهير الضريبي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

المعادلات المصفوفية، المعادلة المصفوفية لنظام معادلات تكون من حاصل ضرب مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت في الجانب الأيسر من إشارة المساواة، وضرب مصفوفة الثوابت في الجانب الأيمن.

مثال: استعمل المعادلة المصفوفية لحل نظام المعادلات $3x - 7y = 12$ و $x + 5y = -8$.

حدد مصفوفات المعاملات والثوابت $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$.

أوجد التظهير الضريبي للمصفوفة المعاملات $A^{-1} = \frac{1}{3(5) - (-7)} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

أعد كتابة المعادلة لتكون في الصورة: $X = A^{-1} \cdot B$.

$X = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{22} \cdot 12 + \frac{7}{22} \cdot (-8) \\ -\frac{1}{22} \cdot 12 + \frac{3}{22} \cdot (-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{60}{22} - \frac{56}{22} \\ -\frac{12}{22} - \frac{24}{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{22} \\ -\frac{36}{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} \\ -\frac{18}{11} \end{bmatrix}$.

حل: $\begin{cases} x = \frac{2}{11} \\ y = -\frac{18}{11} \end{cases}$.

تمارين:

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام ما يأتي:

(1) $\begin{cases} 4x - 3y = 18 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 5x - 3y = -12 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 4x - 6y = 20 \\ 3x + y + 8 = 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 7x - 2y = 15 \\ 3x + y = -10 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} 3x - y = 24 \\ 3y = 80 - 2x \end{cases}$ (6) $\begin{cases} 5x + 2y = 18 \\ x = -4y + 25 \end{cases}$

الفصل 2، المصفوفات 27

تدريبات المهارات (28) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

2-5 تدريبات المهارات
التظهير الضريبي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

حدد ما إذا كانت كلٌّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضريبيًا للآخرى أم لا.

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ نعم (2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ نعم (3) $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ نعم (4) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ نعم (5) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ نعم (6) $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ نعم (7) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -11 & 4 \end{bmatrix}$ نعم (8) $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -0.125 & -0.125 \\ -0.125 & -0.125 \end{bmatrix}$ نعم (9) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ نعم (10) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ نعم (11) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ غير موجود (12) $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$ غير موجود (13) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ غير موجود (14) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ غير موجود (15) $A = \begin{bmatrix} -x & -3y = 2 \\ -4x - 5y = -6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} p - 3q = 6 \\ 2p + 3q = -6 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (16) $A = \begin{bmatrix} -3a + b = -9 \\ 5a - 2b = 14 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2m + 2n = -8 \\ 6m + 4n = -18 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix}$

الفصل 2، المصفوفات 28

الاسم: التاريخ:

2-5 تدريبات حل المسألة
التظهير الضريبي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

(1) تدريس: تشرح سلمي المصفوفات للطلاب، وقد كتبت نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

وبعد عرضت عرشت سلمي المصفوفات الخاصة بنظام المعادلات أمام الدعا، فما هي المصفوفات؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(2) نقل، كتب بغير معادلة مصفوفية توضح تكاليف رحلتين بالقطار من المدينة A إلى المدينة B، واستعمل الرمز x ليدل على تكلفة الرحلة ذهابًا وإيابًا، واستعمل الرمز y لتكلفة الرحلة في اتجاه واحد.

$$\begin{cases} 3x + 1y = 61 \\ 2x + 2y = 54 \end{cases}$$

ثم أوجد التظهير الضريبي الآتي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 61 \\ 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ثم كتبت إجابته:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61 \\ 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 10 \end{bmatrix}$$

وعندما تمخّنت من إجابته، وجد أن القيم التي حصل عليها لا تحقق المعادلة الأصلية، فأين أخطأ؟

في ضرب المصفوفات في الخطوة الأخيرة:

$$\frac{1}{2}(61) + (-\frac{1}{4})(54) = 17$$

وليس 34

الفصل 2، المصفوفات 29



مصادر الدرس 5 - 2

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

فوق ضمن دون

كتاب التمارين (14)

فوق ضمن

التدريبات الإثرائية (30)

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

حدد ما إذا كان زوج من المصفوفات الآتية يمثل مصفوفة ونظيرها الضربي أم لا:

$$2 \quad X = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{لا}$$

$$3 \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \quad \text{نعم} \quad P = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \quad \text{نعم}$$

حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة:
"لكل مصفوفة مربعة نظير ضربي".
خاطئة

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

$$7 \quad \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$8 \quad \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$9 \quad \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$10 \quad -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$11 \quad \text{ليس لها نظير ضربي} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$12 \quad \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

استعمل معادلة مصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

$$13 \quad \begin{cases} -x - 3y = 2 \\ -4x - 5y = 1 \end{cases} \quad (1, -1)$$

$$14 \quad \begin{cases} p + 3q = 6 \\ 2p - 3q = -6 \end{cases} \quad (0, 2)$$

$$15 \quad \begin{cases} -3a + b = -9 \\ 5a - 2b = 14 \end{cases} \quad (4, 3)$$

$$16 \quad \begin{cases} 2m + 2n = -8 \\ 6m + 4n = -18 \end{cases} \quad (-1, -3)$$

14

2-5 التدريبات الإثرائية مصفوفات التباديل

مصفوفة التباديل هي مصفوفة مربعة تظهر العدد 1 مرة واحدة في كل صف وفي كل عمود، وبقيتها عناصر المصفوفة أصفار.
أوجد النظير الضربي لمصفوفة التباديل، من خلال تبديل الصف الأول بالعمود الأول، والصف الثاني بالعمود الثاني... وهكذا، أي إيجاد متقول المصفوفة.
 E مصفوفة تباديل من الرتبة 4×4 ، و E^{-1} نظير ضربي لـ E .

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حل كل من المسائل الآتية:

1) يوجد مصفوفة تباديل واحدة من الرتبة 2×2 ، وهي E . أوجد النظير الضربي للمصفوفة التي أوجدتها في السؤال 1. ماذا تلاحظ؟
ليست المصفوفة المحايدة لعملية الضرب، فما هي؟

$$\text{المصفوفتان متساويتان} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3) بين أن كل من المصفوفتين في السؤالين 1، 2 نظير ضربي للأخرى.

$$\begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4 \quad \text{اكتب النظير الضربي للمصفوفة} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5) استعمل المصفوفة E^{-1} من السؤال 4، وتحقق من أن كل من E, E^{-1} نظير ضربي للأخرى.

$$\begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الفصل 2 المصفوفات

30

الصف: الثاني الثاني

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرة. فإذا واجه بعض الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 1-9، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعاً ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (33).

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلاب الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلاب من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المصفوفات (الدرس 2-1)

- المصفوفة: هي ترتيب مستطيلي لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين.
- المصفوفات المتساوية لها الرتبة نفسها، وعناصرها المتناظرة متساوية.

العمليات على المصفوفات (الدرسان 2-2 و 2-3)

- يمكن جمع المصفوفات أو طرحها إذا كان لها الرتبة نفسها. وذلك بجمع العناصر المتناظرة أو طرحها.
- لضرب مصفوفة في عدد k ، اضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد.
- يمكن ضرب مصفوفتين إذا كان عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية.

المحددات وقاعدة كرامر (الدرس 2-4)

- قيمة محددة المصفوفة المربعة من الرتبة 2×2 تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحاً منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.
- تستعمل المحددات في حل أنظمة المعادلات الخطية، وفي إيجاد مساحة مثلث عُلمت إحداثيات رؤوسه.

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي (الدرس 2-5)

- مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1 وباقي العناصر أصفار.
- تكون كل من المصفوفتين نظيراً ضريباً للأخرى إذا كان حاصل ضربهما يعطي مصفوفة الوحدة.
- لحل معادلة مصفوفية من الشكل $AX = B$ ، أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم اضرب طرفي المعادلة فيه.

المطويات

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات

المصفوفة (60)	محددة الدرجة الثانية (81)
العنصر (60)	محددة الدرجة الثالثة (82)
الرتبة (60)	قاعدة الأقطار (82)
مصفوفة الصف (61)	مصفوفة المعاملات (84)
مصفوفة العمود (61)	قاعدة كرامر (84)
المصفوفة المربعة (61)	مصفوفة الوحدة (89)
المصفوفة الصفرية (61)	النظير الضربي للمصفوفة (89)
المصفوفات المتساوية (61)	المعادلة المصفوفية (91)
جمع مصفوفتين (67)	مصفوفة الثوابت (91)
طرح مصفوفتين (67)	مصفوفة المتغيرات (91)
الضرب في عدد ثابت (68)	مصفوفة المعاملات (91)
المحددة (81)	

اختبر مفرداتك

اختر الكلمة المناسبة من المفردات أعلاه لتكمل كل جملة فيما يأتي:

- الترتيب المستطيلي لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية تكتب بين قوسين يسمى **المصفوفة**.
- عملية ضرب جميع عناصر المصفوفة في عدد تسمى **الضرب في عدد ثابت**.
- تسمى المصفوفة التي تحوي الثوابت في نظام المعادلات **مصفوفة الثوابت**.
- كل قيمة في المصفوفة تسمى **عنصراً**.
- يُسمى عدد الصفوف \times عدد الأعمدة في المصفوفة **رتبة** المصفوفة.
- المصفوفة المربعة التي عناصر القطر الرئيس فيها العدد 1 وباقي العناصر أصفار هي **مصفوفة الوحدة**.
- المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار هي **المصفوفة الصفرية**.
- قيمة $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ تساوي **محددة** -1.
- إذا كان حاصل ضرب مصفوفتين هو مصفوفة الوحدة، فإن كلتا المصفوفتين تكون **نظيراً ضربياً** للأخرى.

المطويات

منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس. واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 2 ص (27)، وناقشهم حول تغيير إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عما كانت عليه عند بدايته.

$$A = \begin{bmatrix} 64 & 108 & 31 \\ 42 & 9 & 68 \end{bmatrix} \quad (10a)$$

2-1 مقدمة في المصفوفات (الصفحات: 60-65)

(10) ناد رياضي: يبين الجدول الآتي عدد المشتركين شهريًا وسنويًا في ناد رياضي في 3 رياضات مختلفة:

الرياضة البدنية	السباحة	تخفيض الوزن
اشترك شهري	108	64
اشترك سنوي	9	42

(a) نظم بيانات الجدول في المصفوفة A .

(b) ما رتبة المصفوفة؟ 2×3

(c) ما قيمة العنصر a_{23} ؟ 68

(d) ما قيمة العنصر a_{11} ؟ 64

انظر الهامش

(e) اجمع عناصر كل من الصفين الأول والثاني، وفسر النتائج.

مثال 1
يبين الجدول الآتي عدد زوار متحف في الفترة الصباحية والفترة المسائية خلال 3 أيام:

اليوم الثالث	اليوم الثاني	اليوم الأول
26	19	37
75	58	69

(a) اكتب مصفوفة تمثل عدد الزوار. $\begin{bmatrix} 37 & 19 & 26 \\ 69 & 58 & 75 \end{bmatrix}$

(b) ما رتبة المصفوفة؟ 2×3

(c) اجمع عناصر كل من الصفين 1 و 2، وفسر النتائج.

مجموع عناصر الصف 1 هو 82، ويمثل عدد الزوار في الفترة الصباحية للأيام الثلاثة. ومجموع عناصر الصف 2 هو 202، ويمثل عدد الزوار في الفترة المسائية للأيام الثلاثة.

2-2 العمليات على المصفوفات (الصفحات: 67-72)

جد الناتج في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

$$(11) \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(12) \begin{bmatrix} -3 & 27 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} 3 \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \right)$$

مثال 2

جد ناتج $2B + 3A$ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, 2B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$2B + 3A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 11 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$$

2-3 ضرب المصفوفات (الصفحات: 73-79)

جد ناتج كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكنًا:

$$(13) \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$(14) \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 0 & 8 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$$

(15) اشترى راشد 4 علب حليب، و 2 تفاحًا، و 3 بطاطس، و كيسًا واحدًا من الأرز، وتبين المصفوفة أدناه سعر علبة الحليب، والكيلو جرام الواحد من التفاح، والكيلو جرام الواحد من البطاطس، وكذلك سعر كيس الأرز.

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 & 3 & 25 \end{bmatrix}$$

استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد إجمالي المبلغ الذي دفعه راشد. 114 ريالًا

مثال 3

جد XY إذا كانت $X = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$XY = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{بضرب الصفوف في الأعمدة} = \begin{bmatrix} 0(8) + (-6)(-1) \\ 3(8) + 5(-1) \end{bmatrix}$$

$$\text{بالتبسيط} = \begin{bmatrix} 6 \\ 19 \end{bmatrix}$$

إجابة:

$$(10e) \begin{bmatrix} 203 \\ 119 \end{bmatrix}$$

وتمثل إجمالي المشتركين في جميع الرياضات شهريًا وسنويًا.

2-4 المحددات وقاعدة كرامر (الصفحات: 81-88)

مثال 4

أوجد قيمة: $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

تعريف المحددة $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4(5) - 2(-6)$
بالتبسيط $= 20 + 12 = 32$

مثال 5

استعمل قاعدة كرامر لحل النظام:
 $2a + 6b = -1$, $a + 8b = 2$

قاعدة كرامر $a = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$
بالتبسيط $= \frac{-8 - 12}{16 - 6} = \frac{-20}{10} = -2$
الحل هو $(-2, \frac{1}{2})$

$b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}$
بالتبسيط $= \frac{4 + 1}{16 - 6} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

أوجد قيمة كل محددة فيما يأتي:

(16) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ (17) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$ (18) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام فيما يأتي:

(18) $3x - y = 0$
 $5x + 2y = 22$

(19) $5x + 2y = 4$

$3x + 4y + 2z = 6$

(20) $7x + 3y + 4z = 29$

(20) اشترت شيما 3 أساور، وعقدتين بمبلغ 85 ريالاً، واشترت ليلي سوارين و 4 عقود بمبلغ 110 ريالاً. فإذا كان للعقود التي اشترتها كلٌّ منهما السعر نفسه، وكذلك الأساور. فجد سعر كلٍّ من العقد، والسوار.
العقد: 20 ريالاً، السوار: 15 ريالاً

2-5 التظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية (الصفحات: 89-94)

مثال 6

حل المعادلة المصفوفية: $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$

الخطوة 1: جد التظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$A^{-1} = \frac{1}{-12 - (-15)} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

الخطوة 2: حل المعادلة المصفوفية باستعمال $X = A^{-1}B$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 90 \\ 27 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$

إذن الحل هو (30, 9).

(21) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$

(22) $\begin{bmatrix} 13 & 5 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

أوجد التظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إذا كان ذلك ممكناً:

(21) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (22) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$

(23) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ لا يوجد تظير ضربي

حل المعادلة المصفوفية في كل مما يأتي:

(24) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ (8, -12)

(25) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ (2, 1)

(26) اشترى سعود 2 kg مكسرات و 2 kg قهوة بمبلغ 140 ريالاً. واشترى ناصر 3 kg مكسرات و كيلوجراماً قهوة بمبلغ 170 ريالاً. فما سعر الكيلوجرام الواحد من كلا النوعين؟
مكسرات: 50 ريالاً ، قهوة: 20 ريالاً

حدد العناصر الآتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

1 a_{22}

2 a_{31}

أوجد الناتج في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكناً: (3-6) انظر الهامش.

$$-3 \begin{bmatrix} 4a \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

(7) ثقافة مائية: تبيع مكتبة 3 مجموعات من الكتب التعليمية للأطفال. ويبين الجدول الآتي تكلفة كل مجموعة وسعر بيعها. فإذا باعت المكتبة 20 مجموعة من الكتب التربوية، و32 مجموعة من الكتب العلمية، و14 مجموعة من القصص.

سعر البيع (ريال)	التكلفة	
120	100	تربوية
110	90	علمية
150	130	قصص

(a) نظم البيانات في مصفوفات، ثم استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد تكلفة الكتب الكلية. (a, b) انظر الهامش.

(b) استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الكلي الذي تحصل عليه المكتبة من بيع ذلك العدد من مجموعات الكتب.

1320 ريالاً

(c) استعمل العمليات على المصفوفات لمعرفة ربح المكتبة.

$$(8) \text{ إذا كان } A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ فأوجد ناتج } AB - AC \quad \begin{bmatrix} 15 & -38 \\ -3 & 22 \end{bmatrix}$$

(9) استعمل المحددات لإيجاد مساحة Δxyz الذي رؤوسه $x(1, 2), y(3, 6), z(-1, 4)$. 6 وحدات مربعة

(10) اختيار من متعدد: جد قيمة محددة المصفوفة:

$$A \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{44} \quad C \quad -44 \quad A$$

$$-\frac{1}{44} \quad D \quad 44 \quad B$$

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (12) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (14) \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

لا يوجد. لا يوجد.

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام فيما يأتي:

$$(-2, 5) \quad 2x - y = -9 \quad (15)$$

$$x + 2y = 8$$

$$(4, 2, -1) \quad x - y + 2z = 0 \quad (16)$$

$$3x + z = 11$$

$$-x + 2y = 0$$

$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \quad 6x + 2y + 4z = 2 \quad (17)$$

$$3x + 4y - 8z = -3$$

$$-3x - 6y + 12z = 5$$

المعالجة: بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تشكّل تحديًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (34-41)

إجابات

$$\begin{bmatrix} -12a - 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -28 & 4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -19 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (5)$$

(6) غير ممكن

$$[20 \ 32 \ 14] \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 130 \end{bmatrix} = [6700] \quad (7a) \quad 6700$$

$$[20 \ 32 \ 14] \cdot \begin{bmatrix} 120 \\ 110 \\ 150 \end{bmatrix} = [8020] \quad (7b) \quad 8020$$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،
فاختبر	أحد المصادر الآتية: مراجعة الدروس: 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5 تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28) مشروع الفصل، ص (58)	فاختبر	أحد المصدرين الآتيين: تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26)
	www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الهدف حل مسائل الاختبار المعيارية ذات الإجابات الشبكية.

أسئلة الإجابات الشبكية

من المحتمل أن تواجه في الاختبارات المعيارية بالإضافة إلى أسئلة الاختبار من متعدد، وأسئلة الإجابات القصيرة، وأسئلة الإجابات المطولة، أسئلة الإجابات الشبكية. ويتطلب هذا النوع من الأسئلة كتابة الإجابة في نموذج خاص، وذلك بتظليل الدوائر التي تمثل الإجابات الصحيحة.

استراتيجيات حل أسئلة الإجابات الشبكية

			3
○	○	○	○
○	○	○	○
①	①	①	①
②	②	②	②
③	③	③	●
④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨

3			
○	○	○	○
○	○	○	○
①	①	①	①
②	②	②	②
●	③	③	③
④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨

1	/	4	
○	○	○	○
○	○	○	○
①	①	①	①
②	②	②	②
③	③	③	③
④	④	○	④
⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨

3	.	5	
○	○	○	○
○	○	○	○
①	①	①	①
②	②	②	②
③	③	③	③
④	④	④	④
⑤	○	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨

الخطوة 1

اقرأ المسألة بتمعن، ثم حلها.

- تأكد من أن إجابتك لها معنى.
- إذا كان الوقت كافيًا، فتتحقق من إجابتك.

الخطوة 2

اكتب إجابتك في مربع الإجابة.

- اكتب عددًا واحدًا فقط أو رمزًا في كل مربع إجابة على نموذج الإجابة الشبكية.
- لا تكتب أي أرقام أو رموز خارج مربعات الإجابة.
- يمكن أن تكون إجابات هذه الأسئلة أعدادًا كلية، أو كسورًا عشرية، أو كسورًا اعتيادية.

الخطوة 3

دوّن الإجابة في نموذج الإجابة الشبكية.

- ظلل دائرة واحدة فقط لكل مربع إجابة، وتأكد من أنك ظللت قيمة مناظرة لتلك في المربع.
- ظلل بصورة واضحة وكاملة.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدّد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلها.

زوّد محمد سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الدمام قادمًا من مكة المكرمة. فإذا كان سعر البنزين في المحطة الأولى 0.50 ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر 0.45 ريال لكل لتر، وكان مجموع ما زوّد به سيارته من البنزين 100 لتر بسعر إجمالي 47.25 ريالًا. فكم لتر بنزين زوّد به سيارته من كل محطة؟

○	○	○	○
○	○	○	○
①	①	①	①
②	②	②	②
③	③	③	③
④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨

2 التدريس

أسئلة التعزيز

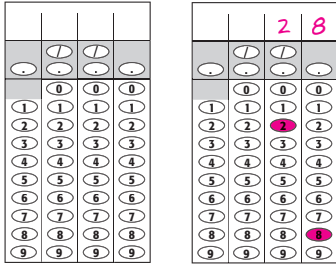
اسأل:

- هل سبق أن تقدمت لاختبار تتطلب الإجابة عنه تظليل الإجابات في نموذج خاص؟ **تنوّع الإجابات.**
- ما أنواع الأخطاء التي يمكن الوقوع فيها عند استعمال مثل هذه النماذج للإجابة؟ **إجابة ممكنة: تظليل دائرة أخرى غير الصحيحة عن طريق الخطأ، تظليل أكثر من دائرة للسؤال الواحد، شطب أو مسح بعض الإجابات.**

مثال إضافي

إجابة شبكية:

اشترى فؤاد عددًا من قطع الشوكولاتة، سعر الوحدة منها 0.75 ريال، وعددًا من قطع البسكويت سعر الوحدة منها 0.5 ريال. إذا علمت أن مجموع عدد قطع الشوكولاتة والحلوى التي اشتراها هو 47 قطعة، وأن ثمنها 28.25 ريالاً، فكم قطعة بسكويت اشترى فؤاد؟ C



3 التقويم

استعمل التمارين 1-4؛ لتقويم مدى فهم الطلاب.

اقرأ المسألة جيداً، إذ يمكن حلُّها باستعمال نظامٍ من معادلتين.

لتكن x تمثل عدد اللترات من المحطة الأولى، و y تمثل عدد اللترات من المحطة الثانية، لذا يكتب نظام المعادلتين الذي يمثل هذه الحالة على النحو الآتي:

$$x + y = 100$$

$$0.50x + 0.45y = 47.25$$

من الممكن حل هذا النظام جبرياً، ولكن يمكن حلُّه بشكل أسرع وبطريقة أسهل باستعمال المصفوفات والحاسبة البيانية.

حل المسألة

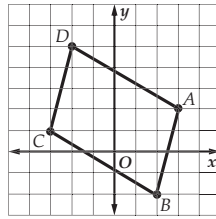
أدخل كلاً من مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت إلى الحاسبة البيانية، ثم أوجد الحل باستعمال النظير الضربي.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.50 & 0.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 47.25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 55 \end{bmatrix}$$

إذن اشترى محمد 45 لترًا من المحطة الأولى، واشترى 55 لترًا من المحطة الثانية.

تمارين ومسائل

(4) تم تدوير المضلع $DABC$ بزاوية مقدارها 90° عكس اتجاه عقارب الساعة، ثم أُجري له انعكاس حول المحور $x = y$. ما الإحداثي x للصورة النهائية للنقطة A ؟ 3



اقرأ كل مسألة، وحدد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلِّها. انسخ نموذج الإجابة، واستعمله في الإجابة.

(1) أوجد محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 20 \end{bmatrix}$. -12

(2) عرضت سُهَا 6 قمصان مختلفة في صفٍّ واحد في معرضها. بكم طريقة يمكنها عرض القمصان الستة؟ 720

(3) أوجد محدد المصفوفة:

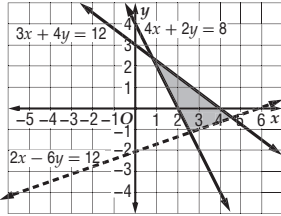
$$H = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & -7 & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix} \quad 234$$

اختيار من متعدد

(4) النقاط $D(-6, 2), E(3, 5), F(8, -7)$ هي رؤوس $\triangle DEF$. احسب مساحة هذا المثلث: **D**

- A 54.5 وحدة مربعة. C 60 وحدة مربعة.
B 58 وحدة مربعة. D 61.5 وحدة مربعة.

(5) ما النظام الذي تمثل حله المنطقة المظللة في الشكل أدناه؟ **A**



- A $4x + 2y \geq 8, 3x + 4y \leq 12, 2x - 6y < 12$
B $4x + 2y \geq 8, 3x + 4y \geq 12, 2x - 6y < 12$
C $4x + 2y \leq 8, 3x + 4y \leq 12, 2x - 6y < 12$
D $4x + 2y \leq 8, 3x + 4y \geq 12, 2x - 6y < 12$

(6) ما رتبة المصفوفة: $D = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ **A**

- A 4×2 C 4×8
B 2×4 D 8×4

(7) أي من الدوال الآتية يكون مداها: $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$ ؟ **B**

- A $f(x) = [x]$
B $f(x) = |-x + 1|$
C $f(x) = -|x|$
D $f(x) = -[x] + 1$

اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(1) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

فما قيمة $2A + 3B$ ؟ **D**

A $\begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ C $\begin{bmatrix} -5 & 15 & 30 \\ 15 & 25 & 15 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ D $\begin{bmatrix} -1 & 8 & 15 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}$

(2) جد ناتج: $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$. إذا كان ذلك ممكناً. **B**

A $[-3]$ C $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

B $[11]$ D الضرب غير معرف

(3) في أي من الدوال الآتية يكون $f\left(\frac{-1}{3}\right) \neq 0$ ؟ **C**

A $f(x) = -|3x| + 1$

B $f(x) = [3x + 1]$

C $f(x) = |3x| + 1$

D $f(x) = [3x] + 1$

تشخيص أخطاء الطلاب

ارصد أخطاء الطلاب عن كل سؤال؛ فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية مثل:

(1) أخطأ في الحساب.

B أوجد $2A$

C أخطأ في الحساب.

D صحيحة

(2) تخمين الإجابة.

B صحيحة.

C تخمين الإجابة.

D لم يدرك متى يكون ضرب

المصفوفات معرّفًا.

(3) أخطأ في الحساب.

B لم يدرك مفهوم دالة أكبر عددٍ

صحيح.

C صحيحة.

D لم يدرك مفهوم دالة أكبر عدد

صحيح.

(4) A أوجد مجموع حاصل ضرب الأقطار

بصورة غير صحيحة.

B أوجد مجموع حاصل ضرب الأقطار

بصورة غير صحيحة.

C أوجد مجموع حاصل ضرب الأقطار

بصورة غير صحيحة.

D صحيحة

A (5) صحيحة

B أخطأ في تحديد المنطقة 2

C أخطأ في تحديد المنطقة 1

D أخطأ في تحديد المنطقتين 1 و 2.

A (6) صحيحة.

B عكس الصفوف والأعمدة.

C حسب عدد العناصر بدلاً من عدد

الأعمدة.

D تخمين الإجابة

A (7) خلط بين رمز القيمة المطلقة ورمز

أكبر عدد صحيح.

B صحيحة

C لم ينتبه لإشارة “-”

D تخمين الإجابة

إجابة قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

(8) هل يوجد للمصفوفة B نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

إجابة ممكنة: لا؛ لأن محددة المصفوفة تساوي 0.

(9) احسب قيمة محددة المصفوفة:

$$1 \quad W = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

إجابة مطولة

أجب عن كل مما يأتي موضِّحاً خطوات الحل:

(10) يستعمل حمد شبكة إحداثيات ليصمم أرضية جديدة في فناء منزله. فإذا كانت الأرضية تمثل حل نظام المتباينات $x \geq 0, y \leq -x + 32$ و $x \leq 16, y \leq 20$ ، وكانت كل وحدة على شبكة الإحداثيات تمثل قدمًا واحدة على الأرض، فما مساحة الأرضية بالقدم المربعة؟ **312**

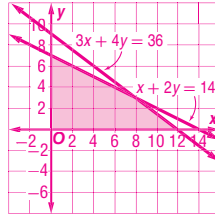
(11) مع عمر 14 قطعة نقدية من فئة الريال، ونصف الريال. فإذا كانت القيمة الكلية لهذه القطع النقدية هي 10.5 ريال، فاستعمل هذه المعلومات للإجابة عن كل سؤال مما يأتي:

(a) افرض أن d تمثل عدد الريالات التي يملكها عمر، و q عدد أنصاف الريالات التي يملكها. اكتب نظام معادلات يمثّل هذه الحالة. **$d + q = 14; d + 0.5q = 10.5$**

(b) اكتب معادلة مصفوفية يمكن أن تستعمل لإيجاد قيم كل من d و q . **انظر الهامش.**

(c) حل المعادلة المصفوفية في الفرع b باستعمال النظر الضربي. ما عدد الريالات وأنصاف الريالات التي يملكها عمر؟ **7 ريالات، 7 أنصاف**

(12) مثل بيانيًا نظام المتباينات الآتي، ثم حدد رؤوس منطقة الحل وجد القيمة العظمى للدالة المعطاة في منطقة الحل:



$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$x + 2y \leq 14$$

$$3x + 4y \leq 36$$

$$f(x, y) = 8x + 12y$$

الرؤوس **(0,0), (0,7), (12,0), (8,3)**
القيمة العظمى **= 100**

(13) صف بالكلمات متى يمكن ضرب مصفوفتين، ومتى لا يمكن ضربهما، وأعط مثالاً على ذلك. **انظر الهامش.**

التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين لتختبر مدى تقدم الطلاب في الفصل 2 من خلال:

اختبار تراكمي: ص (103-102)

اختبار تراكمي، ص (43)

بدل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 3: حدّد الأسئلة ص (101) واجباً منزلياً؛ لتقويم مهارات المتطلبات السابقة للفصل القادم.

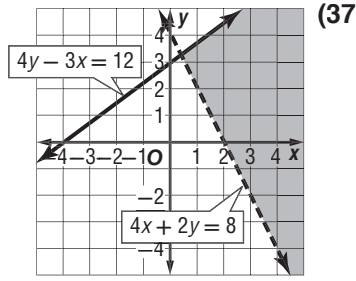
هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

13	12	11	10	9	8	2	6	5	4	3	2	1	إذا لم تستطع حل سؤال...
2-3	1-6	2-5	1-5	2-4	2-5	1-4	2-1	1-5	2-4	1-3	2-3	2-2	فعد إلى...

إجابات

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10.5 \end{bmatrix} \quad (11b)$$

(13) إجابة ممكنة: إذا كانت رتبة المصفوفة A هي $m \times n$ ، ورتبة المصفوفة B هي $c \times d$ ، فإن AB موجودة إذا وفقط إذا كان $n = c$. تحقق من أمثلة الطلاب.



صفحة 74، الدرس 2-3

(44a) بالتعويض $c(\underline{A} + \underline{B}) = c\left(\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}\right)$

تعريف جمع المصفوفات $= c\begin{bmatrix} a+w & b+x \\ d+y & e+z \end{bmatrix}$

تعريف ضرب المصفوفات في ثابت $= \begin{bmatrix} ca+cw & cb+cx \\ cd+cy & ce+cz \end{bmatrix}$

تعريف جمع المصفوفات $= \begin{bmatrix} ca & cb \\ cd & ce \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cw & cx \\ cy & cz \end{bmatrix}$
 بالتعويض $= c\underline{A} + c\underline{B}$

(44b)

بالتعويض $\underline{C}(\underline{A} + \underline{B}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix} \right)$

تعريف جمع المصفوفات $= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e+j & f+k \\ g+m & h+n \end{bmatrix}$

تعريف ضرب المصفوفات $= \begin{bmatrix} a(e+j) + b(g+m) & a(f+k) + b(h+n) \\ c(e+j) + d(g+m) & c(f+k) + d(h+n) \end{bmatrix}$

خاصية التوزيع والتبديل للضرب $= \begin{bmatrix} ea + ja + gb + mb & fa + ka + hb + nb \\ ec + jc + gd + md & fc + kc + hd + nd \end{bmatrix}$

الخاصية التبديلية على الجمع $= \begin{bmatrix} ea + gb + ja + mb & fa + hb + ka + nb \\ ec + gd + jc + md & fc + hd + kc + nd \end{bmatrix}$

تعريف جمع المصفوفات $= \begin{bmatrix} ea + gb & fa + hb \\ ec + gd & fc + hd \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ja + mb & ka + nb \\ jc + md & kc + nd \end{bmatrix}$

تعريف جمع المصفوفات $= \underline{C}\underline{A} + \underline{C}\underline{B}$

وبالمثل يمكن إثبات أن: $(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{A}\underline{C} + \underline{B}\underline{C}$

الصفحات 71-72، الدرس 2-2

(9) $\underline{H} - \underline{I} = \begin{bmatrix} 15.8 & 17.5 & 19.4 \\ 21 & 20.4 & 20.1 \\ 19.5 & 19.7 & 20.2 \\ 20.5 & 17.2 & 15.9 \end{bmatrix}$

(26) افترض أن: $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. لتوضيح أن خاصية التبديل على جمع المصفوفات صحيحة للمصفوفة من النوع 2×2 ، بيّن أن: $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$

بالتعويض $\underline{A} + \underline{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

تعريف الجمع على المصفوفات $= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$

الخاصية التبديلية على جمع الأعداد الحقيقية $= \begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix}$

تعريف الجمع على المصفوفات $= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

بالتعويض $= \underline{B} + \underline{A}$

(27) افترض أن $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \underline{C} = \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix}$

لإثبات أن خاصية التجميع صحيحة على جمع المصفوفات من النوع 2×2 ، بيّن أن: $(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$

بالتعويض $(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix}$

تعريف الجمع على المصفوفات $= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix}$

تعريف الجمع على المصفوفات $= \begin{bmatrix} (a+e) + j & (b+f) + k \\ (c+g) + m & (d+h) + n \end{bmatrix}$

خاصية التجميع على الجمع على الأعداد الحقيقية $= \begin{bmatrix} a + (e+j) & b + (f+k) \\ c + (g+m) & d + (h+n) \end{bmatrix}$

تعريف الجمع على المصفوفات $= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e+j & f+k \\ g+m & h+n \end{bmatrix}$

تعريف الجمع على المصفوفات $= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ m & n \end{bmatrix} \right)$

بالتعويض $= \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$

(31) إجابة ممكنة: أولاً أضرب كل عنصر من عناصر \underline{D} في العدد 4، ثم أضرب كل عنصر من عناصر \underline{C} في العدد 3. وأخيراً أطرح العناصر في المصفوفة $3\underline{C}$ من العناصر المناظرة في المصفوفة $4\underline{D}$ ، فتكون النتيجة هي المصفوفة $4\underline{D} - 3\underline{C}$.

$$\begin{aligned}
\text{بالتعويض } (\underline{AB})\underline{C} &= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\
\text{تعريف ضرب المصفوفات} &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\
\text{تعريف ضرب المصفوفات} &= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{22} \end{bmatrix} \\
\text{خاصية التوزيع} &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\
\text{الخاصية التبديلية على الجمع} &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\
\text{تعريف خاصية التوزيع} &= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \end{bmatrix} \\
\text{تعريف ضرب المصفوفات} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\
\text{تعريف ضرب المصفوفات} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right) \\
\text{بالتعويض} &= \underline{A}(\underline{BC})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{بالتعويض } c(\underline{AB}) &= c \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) \\
\text{تعريف ضرب المصفوفات} &= c \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\
\text{تعريف الضرب في عدد ثابت} &= \begin{bmatrix} c(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & c(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ c(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & c(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix} \\
\text{خاصية التوزيع} &= \begin{bmatrix} ca_{11}b_{11} + ca_{12}b_{21} & ca_{11}b_{12} + ca_{12}b_{22} \\ ca_{21}b_{11} + ca_{22}b_{21} & ca_{21}b_{12} + ca_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\
\text{تعريف ضرب المصفوفات} &= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\
\text{تعريف الضرب في عدد ثابت} &= c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\
\text{بالتعويض} &= (c\underline{A})\underline{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{بالتعويض} \quad c(\underline{A}\underline{B}) = c \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) \\
& \text{تعريف ضرب المصفوفات} \quad = c \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\
& \text{تعريف ضرب المصفوفات في عددٍ ثابتٍ} \quad = \begin{bmatrix} c(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & c(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ c(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & c(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix} \\
& \text{خاصية التوزيع} \quad = \begin{bmatrix} ca_{11}b_{11} + ca_{12}b_{21} & ca_{11}b_{12} + ca_{12}b_{22} \\ ca_{21}b_{11} + ca_{22}b_{21} & ca_{21}b_{12} + ca_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\
& \text{خاصية الإبدال} \quad = \begin{bmatrix} a_{11}cb_{11} + a_{12}cb_{21} & a_{11}cb_{12} + a_{12}cb_{22} \\ a_{21}cb_{11} + a_{22}cb_{21} & a_{21}cb_{12} + a_{22}cb_{22} \end{bmatrix} \\
& \text{تعريف ضرب المصفوفات} \quad = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cb_{11} & cb_{12} \\ cb_{21} & cb_{22} \end{bmatrix} \\
& \text{بالتعويض} \quad = \underline{A}(c\underline{B})
\end{aligned}$$

الصفحة 93، الدرس 2-5

$$15 \text{ ريالاً} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225 \\ 120 \end{bmatrix} \quad (17)$$

الصفحة 95، توسع الدرس 2-5

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 7 & 13 \end{array} \right]; \left(-\frac{54}{13}, \frac{55}{13} \right) \quad (1)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 0 \\ 8 & -2 & 7 \end{array} \right]; \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 6 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right]; (-2, -1, 2) \quad (3)$$

ملحوظات المعلم

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (105)

العنوان	الأهداف	المفردات	تمثيلات متعددة	مصادر الدرس	التقنيات لكل درس	تنوع التعليم
القانون العام والمميز	الأعداد المركبة	القانون العام المميز	ص (111)	مصادر المعلم للأنشطة الصفية تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق كتاب التمارين ص (15) دون ضمن فوق	نظام استجابة، ص (117)	ص (114, 117)
معمل الجبر: مجموع الجذرين وحاصل ضربهما	إجراء العمليات على الأعداد التخيلية البحثة. إجراء العمليات على الأعداد المركبة.	الوحدة التخيلية العدد التخيلي البحث العدد المركب المتراقتان المركبان	ص (128)	مصادر المعلم للأنشطة الصفية تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق كتاب التمارين ص (16) دون ضمن فوق	السبورة التفاعلية، ص (125)	ص (124, 128)
العمليات على كثيرات الحدود	قسمة كثيرات الحدود	القسمة التركيبية	ص (134)	مصادر المعلم للأنشطة الصفية تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق كتاب التمارين ص (18) دون ضمن فوق	عرض تقديمي، ص (131)	ص (132, 134)
دوال كثيرات الحدود	إيجاد قيم دوال كثيرات الحدود. تعرف الأشكال العامة للممثل البياني لدوال كثيرات الحدود.	كثيرة حدود بمتغير واحد المعامل الرئيس دالة كثيرة الحدود دالة القوة دالة من الدرجة الرابعة دالة من الدرجة الخامسة سلوك طرفي التمثيل البياني	ص (141)	مصادر المعلم للأنشطة الصفية تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق كتاب التمارين ص (19) دون ضمن فوق	عرض تقديمي، ص (136)	ص (137, 141)

التقويم التكويني

اختبار منتصف الفصل ص (142)

المفاتيح: دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

كثيرات الحدود ودوالها

الخطة الزمنية

المجموع	المراجعة و التقييم	التدريس
(31) حصة	(4) حصص	(27) حصة

الدرس 3-9 (3) حصص	الدرس 3-8 (3) حصص	الدرس 3-7 (3) حصص	توسع 3-6 حصة واحدة	درس 3-6 (3) حصص
نظرية الصفر النسبي	الجزور والأصفار	نظريتا الباقي والعوامل	معمل الحاسبة البيانية : حل متباينات كثيرات الحدود	حل معادلات كثيرات الحدود
<ul style="list-style-type: none"> • تعرّف نظرية الصفر النسبي وتطبيقها. • إيجاد جميع الأصفار النسبية لدالة كثيرة حدود. 	<ul style="list-style-type: none"> • تحديد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها. • إيجاد أصفار دالة كثيرة حدود. 	<ul style="list-style-type: none"> • إيجاد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي. • تحديد ما إذا كانت ثنائية حد عاملاً من عوامل كثيرة حدود باستعمال التعويض التركيبي أم لا. 	<ul style="list-style-type: none"> • استعمال الحاسبة البيانية لإيجاد حلول تقريبية لمتباينة كثيرة حدود. 	<ul style="list-style-type: none"> • تحليل كثيرات الحدود. • حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل إلى العوامل.
نظرية الصفر النسبي	النظرية الأساسية في الجبر	نظرية الباقي التعويض التركيبي نظرية العوامل		كثيرة حدود أولية الصورة التربيعية
		ص (155)		
<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> • تدريبات إعادة التعليم، ص (46) دون • تدريبات المهارات، ص (48) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (49) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (50) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> • ص (23) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> • تدريبات إعادة التعليم، ص (41) دون • تدريبات المهارات، ص (43) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (44) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (45) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> • ص (22) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> • تدريبات إعادة التعليم، ص (36) دون • تدريبات المهارات، ص (38) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (39) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (40) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> • ص (21) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> • ص (20) دون ضمن فوق 	
عرض تقديمي، ص (165)	السبورة التفاعلية، ص (159)	مدونة، ص (152)		عرض تقديمي، ص (146)
ص (166, 168)	ص (160, 163)	ص (153, 156)		ص (145, 149)

التقويم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة ص (169-172)
- اختبار الفصل ص (173)
- اختبار تراكمي ص (176, 177)

المعالجة	التشخيص	التقويم
	بداية الفصل 3	التقويم التشخيصي
مخطط المعالجة، ص (105)	التهيئة للفصل 1 ، ص (105)	
	بداية كل درس	
مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب	فيما سبق، والآن، لماذا؟	
	خلال كل درس وبعده	التقويم التكويني
تدريبات المهارات، الفصل 3	تحقق من فهمك، لكل مثال	
تنوع التعليم	تأكد	
تنوع الواجبات المنزلية	مسائل مهارات التفكير العليا	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 3	مراجعة تراكمية	
www.obeikaneducation.com	أمثلة إضافية	
	تنبيه!	
	الخطوة 4، التقويم	
	الاختبارات القصيرة ، ص (50, 49)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
تدريبات المهارات، الفصل 3	اختبار منتصف الفصل، ص (142)	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 3	اختبار منتصف الفصل، ص (51)	
www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com	
	نهاية الفصل	
تدريبات المهارات، الفصل 3	دليل الدراسة والمراجعة، ص (169-176)	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 3	اختبار الفصل، ص (173)	
www.obeikaneducation.com	اختبار تراكمي، ص (176,177)	
	www.obeikaneducation.com	
	بعد انتهاء الفصل 1	التقويم الختامي
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 3	اختبار الفصل، النماذج 1A, 2B ، ص (53-58)	
www.obeikaneducation.com	اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (59)	
	اختبار المفردات ، ص (52)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (61)	
	اختبار تراكمي ، ص (62- 64)	
	www.obeikaneducation.com	

البديل 1

جميع المستويات (دون، ضمن، فوق)

المتعلمون المنطقيون ذكّر الطلاب بخطوات القسمة الطويلة من خلال مثال على السبورة، مثل: $25 \div 2930$. ثم وضح خطواتها لإيجاد ناتج القسمة. المثاليين.

$$\begin{array}{r} 117 \\ 25 \overline{)2930} \\ \underline{25} \\ 43 \\ \underline{25} \\ 180 \\ \underline{175} \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + 6 \\ x - 4 \overline{)x^2 + 2x - 29} \\ \underline{-(x^2 + 4x)} \\ 6x + 29 \\ \underline{-(6x + 24)} \\ -5 \end{array}$$

المتعلمون الفرديون وزّع الطلاب إلى مجموعات من 3 أو 4 طلاب، واطلب إلى كل منهم أن يكتب دالة كثيرة حدود، ثم اطلب إلى المجموعات أن يحددوا درجات الدوال هل هي فردية أم زوجية؟ اطلب إليهم كذلك أن يتوقعوا سلوك أطراف التمثيلات، وعدد أصفار كل دالة. وأخيراً اطلب إليهم اختبار توقعاتهم من خلال تمثيلها على الحاسبة البيانية.

البديل 2

دون المتوسط (دون)

وزّع الطلاب إلى مجموعات من 3 أو 4 طلاب. واطلب إليهم تبادل الأدوار في توضيح كيفية إنشاء جدول قيم لدالة كثيرة حدود، وكيفية البدء ببعض النقاط لتمثيل الدالة بيانياً، وكيفية تحديد أصفارها.

البديل 3

فوق المتوسط (فوق)

اطلب إلى الطلاب أن يعدوا بأنفسهم مسائل "اكتشف الخطأ" مستعملين مفاهيم هذا الفصل. اطلب إليهم أن يكتبوا مسألة وخطوات غير صحيحة لحلها على أحد وجهي بطاقة، ويكتب الحل الصحيح على الوجه الآخر المغطى. واطلب إليهم تبادل بطاقتهم مع إعطاء تعليمات لاكتشاف الخطأ كوضع دائرة حمراء على الخطأ ثم تصويبه.

ملخص الدروس

3-1 الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية i ، التي سيتم تقديمها في هذا الدرس ليست مجرد رمز رياضي، وإنما هي أساس لتوسيع مجموعة الأعداد الحقيقية لنحصل على مجموعة الأعداد المركبة. وتسمى الأعداد التي على الصورة $a + bi$ ، حيث a, b عدنان حقيقيان، $i = \sqrt{-1}$ ، أعداداً مركبة، تلاحظ أن مربع العدد i يساوي -1 . ويسمى العدد المركب الذي يكتب على الصورة: bi عددًا تخيليًا بحتًا.

ويمكن النظر إلى العدد المركب $a + bi$ على أنه ثنائية. حيث يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب عليها تمامًا كما في ثنائيات الحد وبنفس خصائص العمليات. مع استثناء وحيد هو وضع العدد -1 مكان الرمز i^2 في العبارة.

3-2 القانون العام والمميز

يمكن استعمال القانون العام لحل أي معادلة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$ ؛ لتحديد جذور المعادلة، حيث يتم تعويض المعاملات a, b ، والثابت c في القانون

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

تحت رمز الجذر في القانون العام بالمميز. ويمكن استعماله لتحديد عدد جذور المعادلة ونوعها. كما يلي:

- إذا كان $b^2 - 4ac > 0$ ، فإن للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين.
 - إذا كان $b^2 - 4ac = 0$ ، فإن للمعادلة جذر حقيقي واحد.
 - إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ ، فإن للمعادلة جذرين تخيليين.
- ومن الملاحظ أن المميز يقدم تحققًا سريعًا عند حل المعادلات التربيعية.

3-3 العمليات على كثيرات الحدود

تبسيط عبارة تحتوي على قوى، يعني كتابتها بعد أن يتم التخلص من الأقواس أو الأسس السالبة. والقاعدة الخاصة بكتابة عبارات مكافئة، تتضمن تعريف الأسس السالبة، والتعرف إلى خواصها.

- تتضمن خواص الأسس إيجاد ضرب القوى وقسمتها، وقوة كل من: القوة وحاصل الضرب، وناتج القسمة والصفر.
- عند جمع كثيرات الحدود (أو طرحها) أعد كتابة المجموع (أو الفرق) كمجموع حدود، ثم اجمع الحدود المتشابهة معًا.
- عند ضرب أحادية حد في كثيرة حدود استعمال خاصية التوزيع؛ وعند ضرب ثنائي حدود، استعمال خاصية التوزيع بالترتيب وجمع الحدود المتشابهة.

الترباط الرأسي

ما قبل الفصل 3

- تبسيط عبارات عديدة تتضمن أسسًا.
- استعمال خاصية التوزيع في تبسيط عبارات جبرية.
- إيجاد قيم دالة محددة.
- حل معادلات تربيعية بيانيًا.

الفصل 3

- استعمال معلومات سابقة بما في ذلك التحليل وخصائص الأسس في تبسيط العبارات، وتحويل المعادلات وحلها.
- تحديد مجال الدالة ومداهها.
- تحديد القيم المعقولة للمجال والمدى في مواقف محددة.

ما بعد الفصل 3

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- التعرف إلى قيم ذات دلالة وأهمية في الدالة، مع ربط هذه القيم بتمثيلها البياني.
- استكشاف خصائص دوال كثيرات الحدود.
- استعمال دوال مثل دوال كثيرات الحدود لتمثيل بيانات من واقع الحياة.

كثيرات الحدود ودوالها

3-4 قسمة كثيرات الحدود

- لقسمة كثيرة حدود على أحادية حد، اقسّم كل حد من حدود كثيرة الحدود على أحادية الحد. وعند قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد أو على أية كثيرة حدود استعمل عملية مماثلة للقسمة الطويلة في الأعداد.
- تسمى الصورة المختصرة لخوارزمية القسمة: القسمة التركيبية، ويمكن استعمالها عندما يكون المقسوم عليه كثيرة حدود من الدرجة الأولى. فإن لم يكن المقسوم عليه من الدرجة الأولى فأعد كتابة المقسوم والمقسوم عليه ليكون على تلك الصورة إن أمكن.

3-7 نظريتنا الباقي والعوامل

تنص نظرية الباقي على أنه عند قسمة كثيرة حدود على $x - a$ ، فإن الباقي k سيكون مساوياً قيمة كثيرة الحدود عند a ؛ أي أن $f(a) = k$ ، وهذا يعني استعمال القسمة التركيبية لإيجاد قيمة الدالة عند a . وتنص نظرية العوامل على أن $x - a$ يكون عاملاً لكثيرة الحدود إذا وفقط إذا كانت $f(a) = 0$. وتساعد هذه النظرية على معرفة عوامل كثيرة الحدود.

3-8 الجذور والأصفار

وفقاً للنظرية الأساسية في الجبر لكل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر جذر واحد على الأقل في مجموعة الأعداد المركبة، ولذلك فإن عدد الجذور المركبة لمعادلة كثيرة الحدود يساوي درجتها. وينص قانون ديكرارت على أن هناك علاقة بين إشارات عوامل دالة كثيرة الحدود وعدد الأصفار السالبة والموجبة الحقيقية. أما نظرية مرافق العدد المركب فتتنبص على أنه إذا كان لدالة كثيرة الحدود صفر مركب فإن مرافقه يكون صفرًا للدالة أيضًا.

3-9 نظرية الصفر النسبي

إذا كان الكسر البسيط $\frac{p}{q}$ صفرًا في دالة كثيرة حدود معاملاتنا أعداد صحيحة، فإن بسط ذلك الكسر يكون عاملاً من عوامل الحد الثابت في كثيرة الحدود، ويكون مقام الكسر عاملاً من عوامل المعامل الرئيس في كثيرة الحدود.

ولاستعمال هذه الخاصية في إيجاد جميع الأصفار النسبية لدالة كثيرة الحدود، قم بما يلي:

- أولاً: أوجد جميع عوامل الحد الثابت وجميع عوامل المعامل الرئيس، واكتب جميع الكسور الممكنة منها $\frac{p}{q}$.
- ثانياً: اختبر أيّ من تلك الكسور يشكل صفرًا للدالة. وفي حالة معرفة أحدها، استعمل كثيرة الحدود الناتجة من القسمة للتعرف على بقية الأصفار.

3-5 دوال كثيرات الحدود

العبرة التي تتكون من عدة أحاديات حد وتحتوي المتغير نفسه تسمى كثيرة حدود بمتغير واحد. وتكون درجة كثيرة الحدود بمتغير واحد: أكبر أس للمتغير في العبارة المبسطة. ويمكن وصف معادلة كثيرة حدود بمتغير واحد، بأنها معادلة أحد طرفيها كثيرة حدود بمتغير، والطرف الآخر ثابت.

إذا علمت عنصراً في مجال الدالة كثيرة الحدود (x) ، فيمكن أن تجد القيمة المقابلة في المدى، وبذا تحصل على مجموعة أزواج مرتبة تستعمل في رسم الدالة. أكبر عدد للأصفار الحقيقية لكثيرة الحدود $f(x)$ ، يساوي درجة كثيرة الحدود. كما أن معامل الحد الرئيس يساهم في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة.

3-6 حل معادلات كثيرات الحدود

- سبق وأن درست بعض أساليب التحليل، وهناك أساليب أخرى ستدرسها في هذا الدرس، مثل:
- إعادة كتابة ثنائية الحد التي على صورة فرق بين مربعين أو فرق بين مكعبين أو مجموع مكعبين في صورة حاصل ضرب عاملين.
 - إعادة كتابة ثلاثية الحد التي تشكل مربعاً كاملاً في صورة ثنائية حد مربع.
 - تحليل بعض ثلاثيات الحدود كحاصل ضرب ثنائيي حد.
 - إعادة كتابة بعض كثيرات الحدود التي تتكون من أربعة حدود أو أكثر في صورة حاصل ضرب كثيرات حدود من خلال تحليلها بالتجميع.
 - تحويل بعض كثيرات الحدود ذات الدرجات الكبرى إلى الصورة التربيعية ومن ثم تحليلها، وحلها باستخدام خاصية الضرب الصفري، أو القانون العام.

كثيرات الحدود ودوالها

Polynomials and Polynomial Functions

مشروع الفصل

الحركة في وسائل النقل

يستعمل الطلاب ما تعلموه عن كثيرات الحدود لاستكشاف أنماط المواصلات.

- كون من الطلاب مجموعات ثنائية، وأسألهم عن المسافة التي تحتاج إليها سيارة تسير بسرعة متزايدة لتقف.
- اطلب إلى كل مجموعة أن يكون جدولاً من عمودين. ويعنون الأول سرعة السيارة بالأميال. ويعنون الآخر المسافة التي تحتاج إليها السيارة لتقف بالأقدام، واطلب إليهم أن يملؤا العمود الأول بالسرعات 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 ميلاً/ساعة. وأن يضعوا مسافات مقترحة في العمود الثاني.

- اطلب إلى الطلاب إضافة عمود ثالث للجدول ووضع العنوان التالي لهذا العمود: المسافة الحقيقية للتوقف بالقدم.
 - اطلب إلى الطلاب اقتراح نموذج رياضي للمسافة التي يتم قطعها للتوقف بحيث تمثل السرعة المتغير في هذا النموذج، ثم استخدم النموذج الذي وضعته في تعبئة العمود الثالث. فمثلاً يمكنك استخدام النموذج التالي:
- $$d = 0.089v^2 - 1.96v + 49$$
- اطلب إلى الطلاب مقارنة التخمين الذي وضعوه للمسافة والمسافة التي يتم تقديرها من خلال النموذج الذي وضعه من حيث التقدير معقول أو غير معقول. ماذا يخبرهم النموذج عن نمط قيادتهم لسياراتهم.

فيما سبق:

درست تمثيل الدوال التربيعية بيانياً، وحل المعادلات التربيعية.

والآن:

- أتعرف الأعداد المركبة، وأجري العمليات عليها.
- أحل معادلات تربيعية.
- أجمع كثيرات الحدود وأطرحها وأضربها وأقسمها.
- أحل دوال كثيرات الحدود.
- أصف التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود.
- أجد قيم دوال كثيرات الحدود، وأحل معادلات كثيرات الحدود.
- أجد عوامل دوال كثيرات الحدود وأصفاها.
- أحدد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.

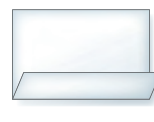
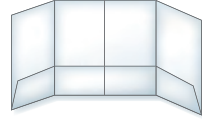
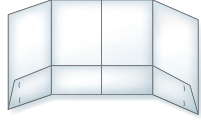
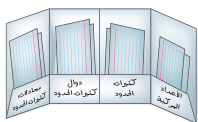
لماذا:

مواصلات: يمكن استعمال دوال كثيرات الحدود لتحديد جداول انطلاق الحافلات، وقدرة الطرق السريعة الاستيعابية، والأنماط المرورية، ومتوسط تكاليف الوقود. وأسعار كل من السيارات الجديدة والمستعملة.

كثيرات الحدود ودوالها: اعمل المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول كثيرات الحدود ودوالها، ابدأ بورقة A4.

المطويات

- 1 اثن الورقة بعرض 5cm بصورة موازية للضلع الأطول.
- 2 اثن الورقة بصورة موازية للضلع الأقصر إلى أربعة أقسام متساوية العرض.
- 3 ثبت الحافتين الطرفيتين للشبه كما يظهر في الشكل أدناه.
- 4 عتق الأقسام الأربعة بالعناوين: الأعداد المركبة، كثيرات الحدود، دوال كثيرات الحدود، معادلات كثيرات الحدود.



المطويات

منظم أفكار

وقت استعمالها شجع الطلاب في أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى مطوياتهم لاستعمالها في المراجعة لاختبار الفصل.

تنوع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (47). يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

غرضها يدون الطلاب ملاحظاتهم حول كثيرات الحدود ودوالها في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب منها في أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل. وشجعهم كذلك على تطبيق ما تعلموه، عن طريق كتابة الأمثلة.

المفردات قدم مفردات الفصل مستعملاً النمط الآتي:

التعريف: درجة كثيرة الحدود هي أعلى درجة لحدودها بعد التبسيط.

مثال: درجة كثيرة الحدود

$$2k^5 + 7k^3$$

سؤال: ما درجة كثيرة الحدود

$$8 - 9b^3 - 2b^8$$

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى	ضمن المتوسط
1	أخطأ بعض الطلاب في حل 25% تقريباً من الأسئلة،
إذا	بمراجعة كتابة الطرح على صورة جمع، واستعمال خاصية التوزيع لكتابة عبارة دون أقواس، وحل المعادلات التربيعية.
فضم	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com
المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل 50% تقريباً من الأسئلة،
فضم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

مراجعة سريعة

اختبار سريع

مثال 1

أعد كتابة العبارة $2xy - 3 - z$ على صورة جمع.
العبارة الأصلية $2xy - 3 - z$
بإعادة الكتابة باستعمال الجمع $= 2xy + (-3) + (-z)$

مثال 2

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة الآتية دون أقواس:
 $-3(a + b - c)$
العبارة الأصلية $-3(a + b - c)$
خاصية التوزيع $= -3(a) + (-3)(b) + (-3)(-c)$
بالتبسيط. $= -3a - 3b + 3c$

مثال 3

حل المعادلة: $x^2 - 6x + 12 = 19$.
يمكن استعمال طريقة إكمال المربع.
المعادلة الأصلية $x^2 - 6x + 12 = 19$
بطرح 12 من كلا الطرفين $x^2 - 6x = 7$
بإضافة 9 لكلا الطرفين $x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$
بتحليل $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 16$
بإيجاد الجذر التربيعي لكلا الطرفين $x - 3 = \pm 4$
بإضافة 3 لكلا الطرفين $x = 3 \pm 4$
الحلان هما: 7، -1

(1-5) انظر الهامش

أعد كتابة كل من العبارات الآتية على صورة جمع:

(1) $5 - 3y$

(2) $5 - 3y$

(3) $5mr - 7mp$

(4) $3x^2y - 14xy^2$

(5) محاضرات: حضر 20 شخصاً محاضرة، ثم غادروا القاعة في مجموعات ثنائية، فغادرت منهم x مجموعة. اكتب عدد الأشخاص الباقين على صورة جمع.

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي دون أقواس: (7) $-3b^2 - 2b + 1$ (9) $-\frac{9}{4}z - \frac{15}{4}$

(6) $-4(a + 5)$ (7) $-4a - 20$ (8) $-1(3b^2 + 2b - 1)$

(9) $-m + \frac{5}{2}$ (10) $-\frac{3}{4}(3z + 5)$

(10) وزع معلم قلمًا وحقية على كل طالب في صف يضم 15 طالبًا. إذا كان ثمن القلم 8 ريالات، والحقية 18 ريالاً، فاكتب عبارة تمثل ثمن الأقلام والحقائب. استعمل خاصية التوزيع لحساب الثمن.

$15(8 + 18) = 15(8) + 15(18) = 390$ ريالاً

حل كل معادلة فيما يأتي:

(11) $x^2 + 2x - 8 = 0$

(12) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(13) $x^2 - x - 20 = 0$

(14) $x^2 - x = 0$

(15) فيزياء: إذا سقط جسم من ارتفاع 50ft عن سطح الأرض فإن ارتفاعه عن سطحها بعد t ثانية يعبر عنه بالصيغة $h = -16t^2 + 50$. استعمل المعادلة $0 = -16t^2 + 50$ لحساب الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يصل إلى الأرض. 1.77 ثانية تقريباً

(12) $-4, 2$ (13) $5, -4$ (14) $1, 0$

إجابات:

(1) $-5 + (-13)$

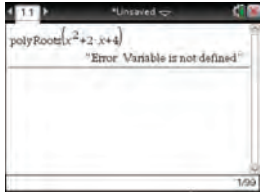
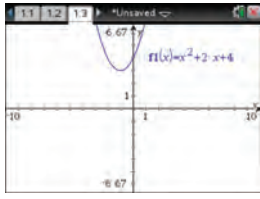
(2) $5 + (-3y)$

(3) $5mr + (-7mp)$

(4) $3x^2y + (-14xy^2)$

(5) $20 + (-2x)$

الأعداد المركبة Complex Numbers



لماذا؟

بالنظر إلى الشكل المجاور، تلاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ لا يقطع المحور x ، ولذا فليس للمعادلة جذور حقيقية. فهل يعني ذلك أنه ليس للمعادلة حلول؟

للتأكد من ذلك، اضغط على المفاتيح التالية بالترتيب:



ثم أدخل $x^2 + 2x + 4$ واضغط **enter** **enter** فيظهر على الشاشة كلمة Error، وهذا يعني أنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة، ولكن هناك حلول تخيلية.

فيما سبق:

درست تبسيط الجذور التربيعية.

والآن:

- أجري العمليات على الأعداد التخيلية البحتة.
- أجري العمليات على الأعداد المركبة.

المفردات:

الوحدة التخيلية
imaginary unit

العدد التخيلي البحت
pure imaginary number

العدد المركب
complex number

المركبان المترافقان
complex conjugates

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

التربط الراسي

ما قبل الدرس 3-1

تبسيط الجذور التربيعية .

الدرس 3-1

إجراء العمليات على الأعداد التخيلية البحتة.

إجراء العمليات على الأعداد المركبة .

ما بعد الدرس 3-1

حل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" واسأل:

- عند أي نقاط من التمثيل البياني على المستوى الإحداثي تكون $y = 0$ ؟

عند نقاط تقاطع التمثيل البياني مع المحور x .

- كيف ترتبط الدالة $y = x^2 + 2x + 4$ بالمعادلة $x^2 + 2x + 4 = 0$ ؟

حلا المعادلة هما قيمتا x التي تجعل الدالة تساوي صفرًا .

- الجملة "حافظت الدالة على إشارتها" تعني عدم وجود حل للمعادلة، فسر ذلك.

إجابة ممكنة: إذا قطع تمثيل الدالة البياني المحور x فإن قيمة الدالة تتغير من الموجب إلى السالب أو العكس.

الجذور التربيعية للأعداد السالبة

مثال 1

بسّط كلاً مما يأتي:

$$\begin{aligned} \sqrt{-27} & \text{ (a)} & \sqrt{-216} & \text{ (b)} \\ \sqrt{-27} & = \sqrt{-1 \cdot 3^2 \cdot 3} & \sqrt{-216} & = \sqrt{-1 \cdot 6^2 \cdot 6} \\ & = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} & & = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6^2} \cdot \sqrt{6} \\ & = i \cdot 3 \cdot \sqrt{3} & & = i \cdot 6 \cdot \sqrt{6} \\ & = 3i\sqrt{3} & & = 6i\sqrt{6} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$3i\sqrt{2} \sqrt{-18} \text{ (1A)} \quad 5i\sqrt{5} \sqrt{-125} \text{ (1B)}$$

تحقق الأعداد التخيلية البحتة كلاً من الخاصيتين التجميعية والتبديلية على الضرب، وبين الجدول الآتي بعض قوى الوحدة التخيلية i :

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = (i^2)^2 \cdot i = i$	$i^6 = (i^2)^2 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = (i^2)^2 \cdot i^3 = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

مصادر الدرس 3-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (112)	• تنوع التعليم، ص (107,112)	• تنوع التعليم، ص (107,112)
كتاب التمارين	• ص (15)	• ص (15)	• ص (15)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

مثال 2

ضرب الأعداد التخيلية البحتة

أوجد ناتج كل مما يأتي :

$$(a) -5i \cdot 3i$$

$$\begin{aligned} \text{بالضرب} \quad & -5i \cdot 3i = -15i^2 \\ & = -15(-1) \\ \text{بالتبسيط.} \quad & = 15 \end{aligned}$$

$$(b) \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15}$$

$$\begin{aligned} i = \sqrt{-1} \quad & \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15} = i\sqrt{6} \cdot i\sqrt{15} \\ \text{بالضرب} \quad & = i^2\sqrt{90} \\ \text{بالتبسيط} \quad & = -1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{10} \\ \text{بالضرب} \quad & = -3\sqrt{10} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$(2C) -i^{31}$$

$$(2B) \sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12} - 4\sqrt{15}$$

$$(2A) 3i \cdot 4i - 12$$

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستعمال خصائص الجذر التربيعي .

إرشادات للدراسة

خصائص الجذر

التربيعي راجع

خصائص الجذر

التربيعي التي درستها

في الصف الثالث

المتوسط.

الأعداد التخيلية البحتة

مثال 1 يبين كيفية تبسيط عبارات تتضمن جذورًا تربيعية لأعداد سالبة.

مثال 2 يبين كيفية إيجاد ناتج ضرب أعداد تخيلية بحتة.

مثال 3 يبين كيفية حل معادلة تربيعية حلولها أعداد تخيلية بحتة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

1 بسّط كلاً مما يأتي :

$$(a) 2i\sqrt{7} - \sqrt{-28}$$

$$(b) 4i\sqrt{2} - \sqrt{-32}$$

2 أوجد ناتج كل مما يأتي :

$$(a) 2i \cdot 3i - 6$$

$$(b) \sqrt{-2} \cdot \sqrt{-12} - 2\sqrt{6}$$

3 حل المعادلة:

$$5y^2 + 20 = 0 \quad y = \pm 2i$$

مثال 3 معادلة حلولها أعداد تخيلية بحتة

حل المعادلة : $4x^2 + 256 = 0$

$$\text{المعادلة الأصلية} \quad 4x^2 + 256 = 0$$

$$\text{ب طرح 256 من كلا الطرفين} \quad 4x^2 = -256$$

$$\text{بقسمة كلا الطرفين على 4} \quad x^2 = -64$$

$$\text{خاصية الجذر التربيعي} \quad x = \pm\sqrt{-64}$$

$$\sqrt{-64} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{-1} = 8i \quad x = \pm 8i$$

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي :

$$(3B) x^2 + 4 = 0 \quad \pm 2i$$

$$(3A) 4x^2 + 100 = 0 \quad \pm 5i$$

العمليات على الأعداد المركبة : تتكون العبارة $2 + 3i$ ، حيث 2 عدد حقيقي، و $3i$ عدد تخيلي بحت، من حدين غير متشابهين ولا يمكن جمعهما. ويسمى هذا النوع من العبارات **العدد المركب**.

أضف إلى
طوبتك

الأعداد المركبة (C)

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$ ؛ حيث a و b عددا حقيقيان، و i الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، و b الجزء التخيلي.

$$1 - 3i = 1 + (-3)i$$

$$5 + 2i$$

مثالان:

الدرس 3-1 الأعداد المركبة 107

تنبيه !

تجنب الأخطاء تأكد من استيعاب الطلاب ضرورة وضع الرمز \pm أمام رمز الجذر عند أخذ الجذر التربيعي لطرفي معادلة .

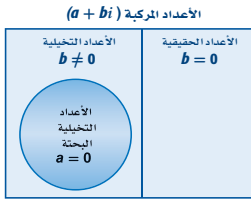
تنوع التعليم

دون ضمن فوق

إذا احتاج بعض الطلاب إلى مساعدة في تذكر الخصائص الرياضية للوحدة التخيلية i ،

فتقم بتوجيههم لكتابة أنشودة عن الوحدة التخيلية i ، والقيم المتكررة لقواها. وقد يقوم الطلاب بتضمين الأنشودة المفردتين: حقيقي، تخيلي؛ بهدف المساعدة على تذكر الخصائص الرياضية للوحدة التخيلية i .

يوضح شكل فن المجاور مجموعة الأعداد المركبة .



- إذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًا.
- إذا كانت $b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًا.
- إذا كانت $a = 0, b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًا بحتًا.

يتساوى عدنان مركبان إذا فقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين، والجزأين التخيليين؛ أي أن:
 $a = c, b = d$ إذا فقط إذا كان $a + bi = c + di$

مثال 4 تساوي الأعداد المركبة

أوجد قيمتي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.
ساو الجزأين الحقيقيين أحدهما بالآخر، وكذلك الجزأين التخيليين.

الجزآن الحقيقيان	$3x - 5 = 7$	الجزآن التخيليان	$y - 3 = 6$
بجمع 5 لكلا الطرفين	$3x = 12$	بجمع 3 لكلا الطرفين	$y = 9$
بقسمة كلا الطرفين على 3	$x = 4$		

$$x = -1, y = -9 \quad (4)$$

تحقق من فهمك

(4) أوجد قيمتي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

ويمكن استعمال كل من الخاصية التبديلية والخاصية التجميعية وخاصية التوزيع عند جمع الأعداد المركبة وضربها، ولكي تجمع أو تطرح أعدادًا مركبة، جمع الأجزاء المتشابهة؛ أي جمع الأجزاء الحقيقية معًا وجمع الأجزاء التخيلية معًا.

مثال 5 جمع الأعداد المركبة وطرحها

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$(5 - 7i) + (2 + 4i) \quad (a)$$

$$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$$

خواص التبديل والتجميع والتوزيع

$$= 7 - 3i$$

بالتبسيط

$$(4 - 8i) - (3 - 6i) \quad (b)$$

$$(4 - 8i) - (3 - 6i) = (4 - 3) + [-8 - (-6)]i$$

خواص التبديل والتجميع والتوزيع

$$= 1 - 2i$$

بالتبسيط

تحقق من فهمك

$$(5A) \quad -1 - 2i \quad (-2 + 5i) + (1 - 7i)$$

$$(5B) \quad 5 + 4i \quad (4 + 6i) - (-1 + 2i)$$

تستعمل الأعداد المركبة في مسائل الكهرباء، ففي الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد يمكن تمثيل فرق الجهد، وشدة التيار، والمعاوقة بأعداد مركبة، ولضرب هذه الأعداد تستعمل طريقة التوزيع بالترتيب.

العمليات على الأعداد المركبة

مثال 4 يبين كيفية استعمال تساوي عددين مركبين في إيجاد قيم مجهولة.

مثال 5 يبين كيفية جمع الأعداد المركبة وطرحها.

المثالان 6-7 يبينان كيفية ضرب الأعداد المركبة وقسمتها.

مثالان إضافيان

4 أوجد قيمتي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة:

$$2x + yi = -14 - 3i \quad \text{صحيحة.}$$

$$x = -7, y = -3$$

5 أوجد ناتج كل مما يأتي:

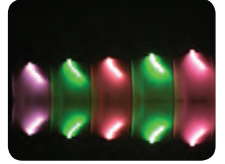
$$(a) \quad (3 + 5i) + (2 - 4i) + 5 + i$$

$$(b) \quad (4 - 6i) - (3 - 7i) + 1 + i$$

تنبيه

تجنب الأخطاء أكد للطلاب أنه يتساوى عدنان مركبان إذا فقط إذا تساوى كل من الجزأين الحقيقيين، والتخيليين لهما.

كهرباء: يرتبط فرق الجهد V ، وشدة التيار C ، والمعاوقة I في الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد إذا كانت شدة تيارها $2 + 4i$ أمبير، ومعاوقتها $9 - 3i$ أوم.



الربط مع الحياة

مصابيح الزينة من الأمثلة على الدوائر الكهربائية الموصولة على التوالي، ويؤثر عدد المصابيح فيها في شدة التيار، فينعكس هذا على شدة الإضاءة.

$$V = C \cdot I$$

$$C = 2 + 4i, I = 9 - 3i \quad = (2 + 4i) \cdot (9 - 3i)$$

$$\text{باستخدام طريقة التوزيع بالترتيب} \quad = 2(9) + 2(-3i) + 4i(9) + 4i(-3i)$$

$$\text{بالضرب} \quad = 18 - 6i + 36i - 12i^2$$

$$i^2 = -1 \quad = 18 + 30i - 12(-1)$$

$$\text{بالجمع} \quad = 30 + 30i$$

فرق الجهد $= 30 + 30i$ فولت.

تحقق من فهمك

6 أوجد فرق الجهد لتيار متردد شدته $2 - 4i$ أمبير، ومعاوقته $3 - 2i$ أوم. $-2 - 16i$ فولت

يسمى العددين المركبان $a + bi$ ، $a - bi$ **مركبين مترافقين**، وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائماً على الصورة $a^2 + b^2$. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة لإيجاد ناتج قسمة عددين مركبين.

مثال 7

قسمة الأعداد المركبة

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$\frac{2i}{3 + 6i} \quad (a)$$

$$\frac{2i}{3 + 6i} = \frac{2i}{3 + 6i} \cdot \frac{3 - 6i}{3 - 6i}$$

بالضرب

$$= \frac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$$

$$i^2 = -1$$

$$= \frac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{6i + 12}{45}$$

بكتابة الناتج على الصورة $a + bi$

$$= \frac{4}{15} + \frac{2}{15}i$$

$$\frac{4 + i}{5i} \quad (b)$$

$$\frac{4 + i}{5i} = \frac{4 + i}{5i} \cdot \frac{i}{i}$$

بالضرب في $\frac{i}{i}$

$$= \frac{4i + i^2}{5i^2}$$

بالضرب

$$= \frac{4i - 1}{-5}$$

$$i^2 = -1$$

بكتابة الناتج على الصورة $a + bi$

$$= \frac{1}{5} - \frac{4}{5}i$$

تحقق من فهمك

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \cdot \frac{2+i}{1-i} \quad (7B)$$

$$-\frac{5}{17} - \frac{3}{17}i \cdot \frac{-2i}{3+5i} \quad (7A)$$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اكتب مثلاً على ضرب عددين مركبين على السبورة مستعملاً اللون الأحمر للجزء التخيلي واللون الأزرق للجزء الحقيقي في كلا العددين. وفي أثناء حلك للمثال، حافظ على استعمال اللونين لتبيين الجزء التخيلي والجزء الحقيقي للأعداد المركبة.

مثالان إضافيان

6

كهرباء: يرتبط فرق الجهد V ،

وشدة التيار C ، والمعاوقة I في الدوائر الكهربائية ذات التيار المتردد بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد إذا كانت شدة تيارها $1 + 4i$ أمبير، ومعاوقتها $3 - 6i$ أوم. $27 + 6i$

7

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$$\frac{10}{13} + \frac{15}{13}i \cdot \frac{5i}{3 + 2i} \quad (a)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i \cdot \frac{5 + i}{2i} \quad (b)$$

المحتوى الرياضي

الأعداد المركبة العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته في الصورة $a + bi$ حيث a, b عدنان حقيقيان، i الوحدة التخيلية. فإذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب عدد حقيقي، وإذا كانت $b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون تخيلياً، وإذا كانت $a = 0$ فإن العدد المركب عدد تخيلي بحت. ومن هنا فإن مجموعتي الأعداد التخيلية البحتة والأعداد الحقيقية مجموعتان جزئيتان من مجموعة الأعداد المركبة، ومن ثم فإن كل عدد حقيقي هو عدد مركب، وكل عدد تخيلي بحت هو عدد مركب أيضاً.

بسط كل ما يأتي :

(2) $4i\sqrt{2}\sqrt{-32}$

(4) $-72\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{-24}\cdot 2\sqrt{-18}$

(6) $-i i^{63}$

(1) $9i\sqrt{-81}$

(3) $12(4i)(-3i)$

(5) $1i^{40}$

المثالان 1, 2

حل كل معادلة مما يأتي :

(8) $\pm 2i\sqrt{3} 2x^2 + 24 = 0$

(7) $\pm 2i\sqrt{2} 4x^2 + 32 = 0$

مثال 3

في كل معادلة مما يأتي أوجد قيمتي a, b الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

(10) $4b - 5 + (-a - 3)i = 7 - 8i$

(9) $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$

مثال 4

بسط كل ما يأتي :

(12) $6 + 2i (7 + 4i) - (1 + 2i)$

(11) $-3 + 2i (-1 + 5i) + (-2 - 3i)$

المثالان 5, 7

(14) $-14 + 8i (3 + 2i)(-2 + 4i)$

(13) $70 - 60i (6 - 8i)(9 + 2i)$

(16) $\frac{16}{61} - \frac{7}{61}i \frac{2+i}{5+6i}$

(15) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \frac{3-i}{4+2i}$

(17) **كهرباء:** تبلغ شدة التيار في أحد أجزاء دائرة كهربائية موصولة على التوالي $5 - 3i$ أمبير، وفي الجزء الآخر من الدائرة $7 + 9i$ أمبير. اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد شدة التيار الكلية في الدائرة.

$12 + 6i$ أمبير

تدرب وحل المسائل

بسط كل ما يأتي :

(19) $13i\sqrt{-169}$

(18) $11i\sqrt{-121}$

المثالان 1, 2

(21) $9i\sqrt{-81}$

(20) $10i\sqrt{-100}$

(23) $-144i 4i(-6i)^2$

(22) $-42i (-3i)(-7i)(2i)$

(25) $i i^{25}$

(24) $-i i^{11}$

(27) $9 (11 - 8i) - (2 - 8i)$

(26) $-7 (-3 + i) + (-4 - i)$

(29) $30 + 16i (3 + 5i)(5 - 3i)$

(28) $5 (1 + 2i)(1 - 2i)$

(31) $1 + i \frac{2i}{1+i}$

(30) $18 - 30i (4 - i)(6 - 6i)$

(33) $\frac{1}{3} - \frac{5}{3}i \frac{5+i}{3i}$

(32) $\frac{1}{2} - i \frac{5}{2+4i}$

حل كل معادلة مما يأتي :

(35) $\pm 4i 3x^2 + 48 = 0$

(34) $\pm i 4x^2 + 4 = 0$

مثال 3

(37) $\pm 3i\sqrt{2} 6x^2 + 108 = 0$

(36) $\pm i\sqrt{5} 2x^2 + 10 = 0$

3 تدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-17 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
59-72 ، 57 ، 18-51	دون المتوسط
52-72 : 19-49 فردي	ضمن المتوسط
52-72	فوق المتوسط

في كل معادلة مما يأتي أوجد قيمتي x, y الحقيقيتين اللتين تجعلانها صحيحة :

$$- \frac{11}{2}, -3 \quad 2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i \quad (39) \quad 2, -3 \quad x + 1 + 2yi = 3 - 6i \quad (38) \quad \text{مثال 4}$$

$$25, -2 \quad (2x - 4y)i + x + 5y = 15 + 58i \quad (41) \quad \frac{4}{3}, 4 \quad 5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i \quad (40)$$

بسّط كلّ مما يأتي :

$$i^{41} \quad (44) \quad 4i \quad 4i \left(\frac{1}{2}i\right)^2 (-2i)^2 \quad (43) \quad -4\sqrt{15} \quad \sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24} \quad (42) \quad \text{المثالان 5, 7}$$

$$-21 + 15i \quad (-6 - i)(3 - 3i) \quad (47) \quad 1 - 6i \quad (8 - 5i) - (7 + i) \quad (46) \quad 8(4 - 6i) + (4 + 6i) \quad (45)$$

$$\frac{1}{7} - \frac{4\sqrt{3}}{7}i \quad \frac{2 - i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}} \quad (50) \quad \frac{7}{9} - \frac{4i\sqrt{2}}{9} \quad \frac{4 - i\sqrt{2}}{4 + i\sqrt{2}} \quad (49) \quad (1 + i)(2 + 3i)(4 - 3i) \quad (48)$$

$$11 + 23i$$

(51) **كهرباء :** تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $7 + 8i$ أوم، وفي الجزء الآخر منها $13 - 4i$ أوم. اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية. $20 + 4i$ أوم

مثال 6

كهرباء : استعمل الصيغة $V = C \cdot I$ ، حيث V فرق الجهد، و C شدة التيار، و I المعاوقة في حل السؤالين 53, 52 :

(52) إذا كانت شدة التيار في دائرة كهربائية $3 + 6i$ أمبير، والمعاوقة $5 - i$ أوم، فكم يكون فرق الجهد؟ **فولت $21 + 27i$**

(53) إذا كان فرق الجهد في دائرة كهربائية $20 - 12i$ فولت، والمعاوقة $6 - 4i$ أوم، فكم تكون شدة التيار؟

(54) أوجد ناتج جمع $ix^2 - (4 + 5i)x + 7$ إلى $3x^2 + (2 + 6i)x - 8i$ إلى $(3 + i)x^2 + (-2 + i)x - 8i + 7$.

(55) بسّط العبارة: $[(2 + i)x^2 - ix + 5 + i] - [(-3 + 4i)x^2 + (5 - 5i)x - 6]$ إلى $(5 - 3i)x^2 + (-5 + 4i)x + i + 11$

(56) **تمثيلات متعددة :** ستكتشف في هذه المسألة جمع الأعداد المركبة في المستوى المركب. فالمنشور المركب يشبه إلى حد بعيد المستوى الحقيقي، وفيه تكون الأعداد الحقيقية على المحور الأفقي والأعداد التخيلية البحتة على المحور الرأسى.

(a) **بيانياً :** مثل العدد $3 + 4i$ بيانياً في المستوى المركب، وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(3, 4)$ ، وسمّها A . **(56a-c) انظر الهامش**

(b) **بيانياً :** مثل العدد $-2 - 5i$ بيانياً في المستوى المركب، وذلك برسم قطعة مستقيمة من نقطة الأصل إلى النقطة $(-2, -5)$ ، وسمّها B .

(c) **بيانياً :** إذا كانت النقطتان A, B ونقطة الأصل ثلاثة رؤوس لمتوازي أضلاع فأكمل رسمه بإضافة النقطة الرابعة C .

(d) **تحليلياً :** ما العدد المركب الذي تمثله النقطة C ؟ وما العلاقة بين النقاط A, B, C ؟ **$1 - i$ ؛ النقطة C تمثل ناتج جمع العددين المركبين الممثلين بالنقطتين A, B**

$$53 \quad i \frac{2}{13} + \frac{42}{13} \text{ أمبير}$$

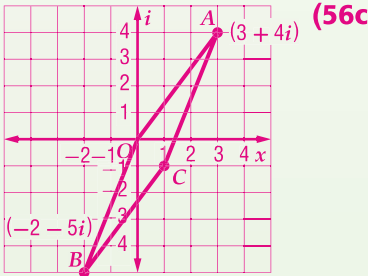
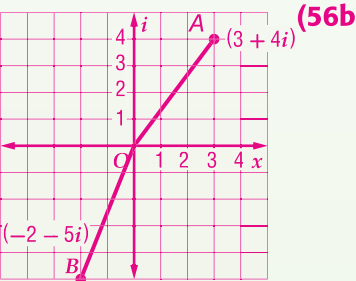
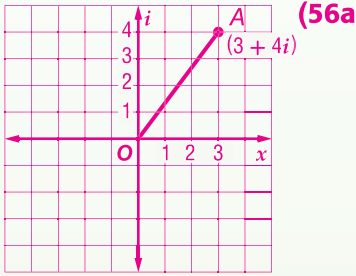


الربط مع الحياة

الكهرباء هي سريان شحنات كهربائية. والكهرباء التي نستعملها هي أحد مصادر الطاقة التي يتم توليدها أيضاً من الوقود الأحفوري والمفاعلات النووية ومصادر طبيعية أخرى.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 56 التمثيل البياني في المستوى المركب، والتحليل المنطقي لتمثيل الأعداد المركبة.

إجابات :



مسائل مهارات التفكير العليا

(57) **اكتشف الخطأ:** قامت كلٌّ من صفاء ومنال بتبسيط $(2i)(3i)(4i)$ ، فأَيُّ منهما على صواب؟ وضح إجابتك. صفاء؛ لأن $-i^3 = -1$ وليس -1

منال

$$24i^3 = -24$$

صفاء

$$24i^3 = -24i$$

(58) **تحذّر:** بسّط العدد المركب $(1 + 2i)^3$. $-11 - 2i$

(59) **تبرير:** حدد إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً. وضح إجابتك:

"يتكون كل عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي"

(60) **مسألة مفتوحة:** اكتب عددين مركبين يكون ناتج ضربهما يساوي 20. **إجابة ممكنة:** $(4 + 2i)(4 - 2i)$

(61) **اكتب:** وضح كيف ترتبط الأعداد المركبة بالمعادلات التربيعية، وكيف تحدد إذا كان للمعادلة التربيعية حلول مركبة فقط أم لا؟

(59) **إجابة ممكنة:** صحيحة

دائماً فالعدد الحقيقي x يمكن

أن يمثل بالعدد المركب

$x + 0i$ ، والعدد التخيلي

البحث iy يمكن أن يمثل

بالعدد المركب $0 + yi$.

(61) **لبعض المعادلات**

التربيعية حلول مركبة،

ولا يمكن حلها بالأعداد

الحقيقية فقط. وذلك إذا لم

يقطع منحنى الدالة المرتبطة

بالمعادلة المحور x فإن

للمعادلة التربيعية حلولاً

مركبة فقط.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب كتابة

عددين مركبين ناتج ضربهما 10 على ورقة

وتسليمك إياها قبل مغادرتك غرفة الصف.

إجابة ممكنة: $1 - 3i, 1 + 3i$

تنبيه

اكتشف الخطأ بما أن i^2 تساوي

دائماً -1 ، فأعد كتابة i^3 في السؤال

57 على الصورة $i(i^2)$

تدريب على اختبار

(63) قيمة $(3 + 6i)^2$ تساوي: **A**

(A) $-27 + 36i$

(B) $9 + 36$

(C) $9 - 36$

(D) $36 - 27i$

(62) ما قيمتا x, y الحقيقيتان اللتان تجعلان

$$(-1 - 3i) = (x + yi) - (5 + 4i)$$
 صحيحة؟ **A**

(A) $x = 6, y = 7$

(B) $x = 4, y = i$

(C) $x = 4, y = i$

(D) $x = 4, y = 7$

مراجعة تراكمية

حل كل معادلة مما يأتي مستعملاً التحليل إلى العوامل: (مهارة سابقة)

(66) $6x^2 = 5x + 4$ $-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$

(65) $4x^2 - 12 = 22x$ $-\frac{1}{2}, 6$

(64) $2x^2 + 7x = 15$ $-5, \frac{3}{2}$

نظرية الأعداد: استعمل معادلة تربيعية لإيجاد عددين حقيقيين يحققان كلاً ممّا يأتي، (إذا كان ذلك ممكناً): (مهارة سابقة)

(67) مجموعهما -3 ، وناتج ضربهما 40 . $-8, 5$

هل تمثّل كلٌّ من ثلاثيات الحدود الآتية مربعاً كاملاً أم لا؟ (مهارة سابقة)

(69) $x^2 + 16x + 64$ نعم

(71) $x^2 + 8x - 16$ لا

(70) $x^2 - 12x + 36$ نعم

(72) $x^2 + 5x + 6.25$ نعم

112 الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

تنوع التعليم

ضمن فوق

توسّع أخبر الطلاب أنك تفكر في عددين مركبين مجموعهما $3 + i$ ، والفرق بينهما $5 + 7i$. واطلب إليهم إيجاد ناتج ضربهما. $8 + 19i$



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 3

دون دون المتوسط **ضمن** ضمن المتوسط **فوق** فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-1 تدريبات إعادة التعليم

الأعداد المركبة

الأعداد التخيلية الجذرة، الجذر التربيعي للمعد m هو عدد مربعه m ، وإذا كان a, b عددين حقيقيين غير سالبين فإن: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ و $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ حيث $b \neq 0$.

- تُعرف الوحدة التخيلية (i) على أنها تحقق الخاصية: $i^2 = -1$
- تبسيط العبارات التي تتضمن جذورًا تربيعية يعني أن هذه العبارات لا تحتوي جذورًا في المقام، وأي عدد يبقى داخل الجذر التربيعي لا يتضمن عاملًا مربعًا كاملًا غير المعدد 1.

مثال 2

(a) بسط -48
 $\sqrt{-48} = \sqrt{16 \cdot (-3)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-3} = 4i\sqrt{3}$

(b) بسط -63
 $\sqrt{-63} = \sqrt{-1 \cdot 7 \cdot 9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{9} = 3i\sqrt{7}$

مثال 3

حل المعادلة $x^2 + 5 = 0$
 المعادلة الأصلية $x^2 + 5 = 0$
 طرح 5 من كلا الطرفين $x^2 = -5$
 خاضع الجذر التربيعي $x = \pm\sqrt{-5}$

توازن:

بسط كلاهما بأبي:

(1) $6i\sqrt{2} - \sqrt{-72}$ (1) $6i\sqrt{2} - \sqrt{-72}$
 (2) $2i\sqrt{6} - \sqrt{-24}$ (2) $2i\sqrt{6} - \sqrt{-24}$
 (3) $2i\sqrt{21} - \sqrt{-84}$ (3) $2i\sqrt{21} - \sqrt{-84}$
 (4) $5(2+i)(2-i)$ (4) $5(2+i)(2-i)$
 (5) $\pm 3i$ $5x^2 + 45 = 0$ (5) $\pm 3i$ $5x^2 + 45 = 0$
 (6) $\pm i\sqrt{6}$ $4x^2 + 24 = 0$ (6) $\pm i\sqrt{6}$ $4x^2 + 24 = 0$
 (7) ± 1 $-9x^2 = 9$ (7) ± 1 $-9x^2 = 9$
 (8) $\pm 2i\sqrt{5}$ $7x^2 + 84 = 0$ (8) $\pm 2i\sqrt{5}$ $7x^2 + 84 = 0$

الفصل 3، تمارين العمود ونواتها 6

تدريبات إعادة التعليم - تزمة (7) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-1 تدريبات إعادة التعليم

الأعداد المركبة

المعانيات على الأعداد المركبة.

العدد المركب هو أي عدد يكتب على الصورة $a+bi$ حيث a, b عددين حقيقيين، و i الوحدة التخيلية ($i^2 = -1$). يسمى a الجزء الحقيقي من العدد المركب، و b الجزء التخيلي.

العدد المركب	جمع الحدود المتشابهة
$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$	جمع الحدود المتشابهة
$(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$	طرحها

ضرب الأعداد المركبة

استعمل تعريف i^2 وقانون التوزيع:
 $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

مراقب العدد المركب

يسمى العددين $a+bi$ و $a-bi$ مرافقين مترافقين، وينتج ضربهما عدد حقيقي دائمًا.

لنقسمه على عدد مركب، أولاً نضرب كلا من المقوم والمقسوم عليه بمرافق المقوم عليه.

مثال 1 بسط $(6+i) + (4-5i)$
 $(6+i) + (4-5i) = (6+4) + (1-5)i = 10-4i$

مثال 2 بسط $(8+3i) - (6-2i)$
 $(8+3i) - (6-2i) = (8-6) + [(3-(-2))i] = 2+5i$

مثال 3 بسط $(2-5i) \cdot (-4+2i)$
 $(2-5i) \cdot (-4+2i) = 2(-4) + 2(2i) + (-5i)(-4) + (-5i)(2i) = -8+4i+20i-10i^2 = -8+24i+10 = 2+24i$

مثال 4 بسط $\frac{3-i}{2+3i} - \frac{2-3i}{2+3i}$
 $\frac{3-i}{2+3i} - \frac{2-3i}{2+3i} = \frac{3-i-2+3i}{2+3i} = \frac{1+2i}{2+3i}$
 نضرب البسط والمقام بالمرافق $\frac{1+2i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{(1+2i)(2-3i)}{2^2-9i^2} = \frac{2-3i+4i-6i^2}{4+9} = \frac{2-3i+4i+6}{13} = \frac{8+i}{13}$

توازن:

بسط كلاهما بأبي:

(1) $(6-3i) + (4-2i)$ (3) $(5-i) - (3-2i)$ (2) $(-4+2i) + (6-3i)$ (1) $(6-3i) + (4-2i)$
 (4) $(5+2i) - (-6-3i)$ (6) $(8+4i) + (8-4i)$ (5) $(-11+4i) - (1-5i)$ (4) $(5+2i) - (-6-3i)$
 (7) $11+5i$ (9) $18-13i$ (5-2i)(4-i) (8) $7+1(2+i)(3-i)$ (7) $11+5i$
 (10) $-10i(4-2i)(1-2i)$ (12) $-\frac{13}{2} - \frac{7}{2}i$ (11) $\frac{3-i}{2} - \frac{5}{3+i}$ (10) $-10i(4-2i)(1-2i)$

الفصل 3، تمارين العمود ونواتها 7

تدريبات المهارات (8) دون ضمن

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-1 تدريبات المهارات

الأعداد المركبة

بسط كلاهما بأبي:

(1) $3\sqrt{11} - \sqrt{99}$ (1) $3\sqrt{11} - \sqrt{99}$
 (2) $\frac{3\sqrt{3}}{7} - \sqrt{\frac{27}{49}}$ (2) $\frac{3\sqrt{3}}{7} - \sqrt{\frac{27}{49}}$
 (3) $2ix^2y^2 - \sqrt{13xy}$ (3) $2ix^2y^2 - \sqrt{13xy}$
 (4) $6ix^2\sqrt{3x} - \sqrt{108x^3}$ (4) $6ix^2\sqrt{3x} - \sqrt{108x^3}$
 (5) $9ix^2\sqrt{-81ix^3}$ (5) $9ix^2\sqrt{-81ix^3}$
 (6) $-23\sqrt{2} - 23\sqrt{-46}$ (6) $-23\sqrt{2} - 23\sqrt{-46}$
 (7) $30i(30)(-20)(50)$ (7) $30i(30)(-20)(50)$
 (8) $-i^4$ (8) $-i^4$
 (9) i^{80} (9) i^{80}
 (10) $-5-12i(7-8i) + (-12-4i)$ (10) $-5-12i(7-8i) + (-12-4i)$
 (11) $15-2i(-3+5i) + (18-7i)$ (11) $15-2i(-3+5i) + (18-7i)$
 (12) $3-7i(10-4i) - (7+3i)$ (12) $3-7i(10-4i) - (7+3i)$
 (13) $-4-33i(7-6i)(2-3i)$ (13) $-4-33i(7-6i)(2-3i)$
 (14) $25(3+4i)(3-4i)$ (14) $25(3+4i)(3-4i)$
 (15) $-2-2\frac{3}{5}i - \frac{8-6i}{3i}$ (15) $-2-2\frac{3}{5}i - \frac{8-6i}{3i}$

حل كل معادلة بما يأتي:

(16) ± 1 $3x^2 + 3 = 0$ (16) ± 1 $3x^2 + 3 = 0$
 (17) ± 1 $3x^2 + 3 = 0$ (17) ± 1 $3x^2 + 3 = 0$
 (18) $\pm 5i$ $5x^2 + 125 = 0$ (18) $\pm 5i$ $5x^2 + 125 = 0$
 (19) ± 1 $4x^2 + 20 = 0$ (19) ± 1 $4x^2 + 20 = 0$
 (20) $\pm 4i$ $-x^2 - 16 = 0$ (20) $\pm 4i$ $-x^2 - 16 = 0$
 (21) $\pm 3i\sqrt{2}$ $x^2 + 18 = 0$ (21) $\pm 3i\sqrt{2}$ $x^2 + 18 = 0$
 (22) $\pm 2i\sqrt{3}$ $8x^2 + 96 = 0$ (22) $\pm 2i\sqrt{3}$ $8x^2 + 96 = 0$
 (23) $4, -3$ $20 - 12i = 5i + (4m)$ (23) $4, -3$ $20 - 12i = 5i + (4m)$
 (24) $3, 8$ $\ell - 16i = 3 - (2m)$ (24) $3, 8$ $\ell - 16i = 3 - (2m)$
 (25) $5, 7$ $(4+i) + (2m)i = 9 + 14i$ (25) $5, 7$ $(4+i) + (2m)i = 9 + 14i$
 (26) $3, 2$ $(3-m) + (7\ell-14)i = 1 + 7i$ (26) $3, 2$ $(3-m) + (7\ell-14)i = 1 + 7i$

الفصل 3، تمارين العمود ونواتها 8

تدريبات حل المسألة (9) دون ضمن

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-1 تدريبات حل المسألة

الأعداد المركبة

أخطاء الإشارات، حصل عماد وناسر على إجابات مختلفة لحاصل الضرب: $(4+i)(4-i)$ ، وكتبوا إجاباتهم على صورة أعداد مركبة، وكانت إجابة عماد 17، وإجابة ناسر 15. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسر إجابتيك.

إجابة عماد صحيحة،
 $(4+i)(4-i) = 16+4i-4i-i^2 = 16+4i-4i-(-1) = 16-(-1) = 16+1 = 17$

المركبان مترافقان، لقد وجدت أن حاصل ضرب عددين مركبين مترافقين عدد حقيقي. بين أن مجموع عددين مركبين مترافقين عدد حقيقي أيضًا.

$a+bi$ و $a-bi$ مركبان مترافقان مجموعهما $2a$ وهو عدد حقيقي

لاوليات فيثاغورس، إذا حققت ثلاثة أعداد صحيحة المتادلة: $a^2 + b^2 = c^2$ ، فإنها تُسمى ثلاثية فيثاغورس. اذكر من الأعداد a, b, c ثلاثية فيثاغورس، وبين أن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للمعادلة $(a+bi)^2$ تكون مع c^2 ثلاثية فيثاغورس.

(1) هوران، يمكن استعمال الأعداد المركبة لتحديد الإحداثيات الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل في المستوى الإحداثي. الجزء الحقيقي والتخيلي في المعادلة $(x+iy)$ يمثلان الإحداثي الأفقي والعمودي للرأس لنقطة (x, y) نتيجة دوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها 90° باتجاه عكس عقارب الساعة. ما الجزءان الحقيقي والتخيلي للمعادلة $i(x+iy)$ ؟

الجزء الحقيقي $-y$ ، الجزء التخيلي x

(2) هلتمسة الكهربية، التيار الكهربائي المتردد (AC) هو دائرة كهربية يمكن وصفها باستخدام الأعداد المركبة. في أي دائرة كهربية، يرتبط فرق الجهد V ، وشدة التيار C ، والمعاوقة Z بالصيغة $V = C \cdot Z$ (فرق الجهد الكهربائي النموذجي في أوروبا 220 فولت). أجب عن الأسئلة التالية التي يتضمن كل منها دائرة كهربية أوروبية نموذجية (فرق الجهد $V = 220$ فولت).

(a) أوجد المعاوقة إذا كانت شدة التيار 22-أمبير.
 $8 + 4i$

(b) أوجد شدة التيار إذا كانت المعاوقة $10 - 5i$ واط.
 $17.6 + 8.8i$ أمبير

(c) أوجد المعاوقة إذا كانت شدة التيار 20i أمبير.
 $-11i$

الفصل 3، تمارين العمود ونواتها 9



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 3

دون دون المتوسط		ضمن ضمن المتوسط		فوق فوق المتوسط	
التدريبات الإرشائية (10)		كتاب التمارين (15)		فوق	
<p>الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p>3-1 التدريبات الإرشائية المركبان المترافقان والقيمة المطلقة</p> <p>عالمًا ما يُستعمل العدد المركب باعتباره واحد في دراسة الأعداد المركبة، فمثلًا نرمز للعدد $x+iy$ بالرمز z، وعندما نرمز للعدد المركب المترافق للعدد z بالرمز \bar{z}، أي $\bar{z} = x-iy$.</p> <p>وتمُكِّن القيمة المطلقة للعدد المركب على الصورة $z = x+iy = \sqrt{x^2+y^2}$، وتوجد علاقات كثيرة مهمة تتضمن الأعداد المترافقة والقيمة المطلقة للأعداد المركبة.</p> <p>مثال 1: بين أن $z\bar{z} = z ^2$ لأي عدد مركب z.</p> <p>مثال 2: بين أن $\frac{z}{ z }$ هو النظير الضربي لأي عدد مركب z حيث $z \neq 0$.</p> <p>تعلم أن $z\bar{z} = z ^2$. إذا كان $z \neq 0$ فإن $\frac{z}{ z } = 1$. وعليه يكون $\frac{z}{ z }$ نظيرًا حرجيًا للعدد z.</p> <p>تمارين: أوجد القيمة المطلقة والنظير الضربي لكل عدد مركب فيما يأتي:</p> <p>(1) $z = 2i$ (2) $z = -4 - 3i$ (3) $z = \frac{12 + 5i}{169}$ (4) $z = 5 + 12i$</p> <p>(5) $z = 1 + i$ (6) $z = \sqrt{2} - i$ (7) $z = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$</p> <p>(8) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (9) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (10) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$</p> <p>الفصل: الثالث، التمارين 10</p>		<p>3-1 الفصل الثالث، كثيرات الحدود ودوالها الأعداد المركبة</p> <p>بسِّطْ كلًّا مما يأتي:</p> <p>(1) $\sqrt{-36}$ (2) $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{-32}$ (3) $\sqrt{-15} \cdot \sqrt{-25}$ (4) $(-5)(4)(-3)$</p> <p>(5) $(7i)^2$ (6) $-294i$ (7) i^{100} (8) i^{1000}</p> <p>(9) $(5-2i) + (-13-8i)$ (10) $(7-6i) + (9+11i)$</p> <p>(11) $(-12+48i) + (15+21i)$ (12) $(10+15i) - (48-30i)$</p> <p>(13) $(8-11i)(8-11i)$ (14) $(6-4i)(6+4i)$ (15) $(8-11i)(8-11i)$</p> <p>(16) $(4+3i)(2-5i)$ (17) $(23-14i)(4+3i)$ (18) $75-24i(7+2i)$</p> <p>(19) $\frac{2}{7-8i}$ (20) $\frac{3-i}{2-i}$ (21) $\frac{2-4i}{1+3i}$</p> <p>حلِّ كل معادلة مما يأتي:</p> <p>(22) $\pm i\sqrt{7} 5m^2 + 35 = 0$ (23) $\pm i\sqrt{5} 2m^2 + 10 = 0$</p> <p>(24) $\pm i\sqrt{19} 4m^2 + 76 = 0$ (25) $\pm i\sqrt{3} -2m^2 - 6 = 0$</p> <p>(26) $\pm i\sqrt{13} -5m^2 - 65 = 0$ (27) $\pm 4i \frac{3}{4}x^2 + 12 = 0$</p> <p>أوجد قيمتي m و l الحقيقيتين اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة:</p> <p>(28) $5 - 7 - 15 - 28i = 3l + (4m)i$ (29) $18 - 9(6-l) + (3m)i = -12 + 27i$</p> <p>(30) $4 - 6(3l+4) + (3-m)i = 16 - 3i$ (31) $4 - 4 - 1(7+m) + (4l-10)i = 3 - 6i$</p> <p>(32) كوبياء: تبلغ المعاوقة في أحد طرفي دائرة كهربائية موصولة على التوالي $1 + 3i$ أوم، وفي الطرف الآخر $7 - 5i$ أوم. اجمع هذين العددين المركبين لتحصل على المعاوقة الكلية في تلك الدائرة الكهربائية. 8-2i أوم</p> <p>(33) كوبياء: استعمل القانون $E = IZ$ لإيجاد فرق الجهد E في دائرة كهربائية فيها شدة التيار I تساوي $i - 3$ أمبير، والمعاوقة Z تساوي $2i + 3$ أوم. 11 + 3i فولت</p> <p>الفصل: الثالث، التمارين 15</p>			

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 3-2

حل معادلات تربيعية بإكمال المربع .

الدرس 3-2

حل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.

استعمال المميز لتحديد عدد جذور

معادلة تربيعية وأنواعها.

ما بعد الدرس 3-2

حل متباينات تربيعية باستعمال كل من التمثيل البياني والطرق الجبرية .

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

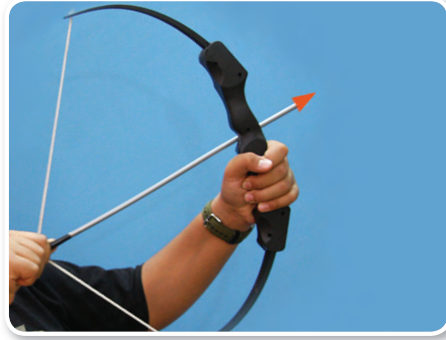
• ما تأثير زيادة قيمة t في المعادلة على

قيمة h ? تزداد ثم تعود لتتناقص.

• ما شكل تمثيل المعادلة البياني؟

قطع مكافئ

• ما اتجاه فتحة القطع المكافئ؟ إلى أسفل



لماذا؟

أطلق سهم نحو هدف على الأرض، ويمكن التعبير عن ارتفاعه عن الأرض بالدالة التربيعية:

$$h = -4.9t^2 + 117t + 42$$

حيث h ارتفاع السهم بعد t ثانية من إطلاقه،

وللتنبؤ بالزمن اللازم لوصول السهم إلى

الهدف، نحل المعادلة:

$$-4.9t^2 + 117t + 42 = 0$$

ومن الصعب حل هذه المعادلة باستعمال

التحليل إلى العوامل، أو التمثيل البياني، أو

إكمال المربع.

القانون العام: تمكنت سابقاً من حل بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني، أو بالتحليل إلى العوامل، أو باستعمال خاصية الجذر التربيعي، أو بإكمال المربع، أو باستعمال القانون العام؛ وهو قانون يمكن استعماله لحل أية معادلة تربيعية، ويمكن اشتقاق هذا القانون من خلال حل معادلة تربيعية على الصورة القياسية.

الحالة العامة	معادلة تربيعية على الصورة القياسية	مثال
$ax^2 + bx + c = 0$	معادلة تربيعية على الصورة القياسية	$2x^2 + 8x + 1 = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	بقسمة كلا الطرفين على a	$x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	ب طرح $\frac{c}{a}$ من كلا الطرفين	$x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	بإكمال المربع	$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	بتحليل الطرف الأيسر	$(x + 2)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	بتبسيط الطرف الأيمن	$(x + 2)^2 = \frac{7}{2}$
$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	خاصية الجذر التربيعي	$x + 2 = \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$
$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	ب طرح $\frac{b}{2a}$ من كلا الطرفين	$x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	بالتبسيط	$x = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$

تعرف المعادلة: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **بالقانون العام** لحل المعادلات التربيعية.

فيما سبق:

درست حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

والآن:

- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز لأحدد عدد جذور معادلة تربيعية وأنواعها.

المضردات

القانون العام

Quadratic Formula

المميز

discriminant

www.obekaneducation.com

مصادر الدرس 3-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (114)	• تنوع التعليم، ص (114، 117)	• تنوع التعليم، ص (117)
كتاب التمارين	• ص (16)	• ص (16)	• ص (16)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

التعبير اللفظي: يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ باستعمال القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: $x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$

القانون العام

على الرغم من أن طريقة التحليل إلى العوامل قد تكون الأسهل لحل بعض المعادلات التربيعية، إلا أن القانون العام يحل أي معادلة تربيعية.

القانون العام

مثال 1 يبيّن كيفية حل معادلة تربيعية باستعمال القانون العام.

مثال 2 يبيّن كيفية حل معادلة تربيعية عندما تكون قيمة ما تحت الجذر في القانون العام صفرًا.

مثال 3 يبيّن كيفية التعبير عن الجذور غير النسبية للمعادلة التربيعية من خلال كتابتها على الصورة الجذرية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

1 حل المعادلة $x^2 - 8x = 33$ باستعمال القانون العام. $-3, 11$

المحتوى الرياضي

القانون العام يمكن حل أي معادلة تربيعية مكتوبة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ بتعويض القيم a, b, c في القانون العام، وذلك لإيجاد قيمتي x . والقانون العام هو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$$

مثال 1 معادلة لها جذران نسبيين

حل المعادلة: $x^2 - 10x = 11$ باستعمال القانون العام.

أولاً اكتب المعادلة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ، وحدّد قيم a, b, c .

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x^2 - 10x = 11 \rightarrow 1x^2 - 10x - 11 = 0$$

ثم عوض بعد ذلك بتلك القيم في القانون العام.

$$\text{القانون العام} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{بالتعويض عن: } a \text{ بالعدد } 1, b \text{ بالعدد } -10, c \text{ بالعدد } -11$$

$$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$$

$$\text{بالضرب} \quad = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$$

$$\sqrt{144} = 12 \quad = \frac{10 \pm 12}{2}$$

$$\text{بالتكتابة على صورة معادلتين.} \quad x = \frac{10 - 12}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{10 + 12}{2}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = -1 \quad = 11$$

وعليه يكون الحلان هما: $11, -1$.

تحقق: عوض كلتا القيمتين في المعادلة الأصلية.

$$x^2 - 10x = 11 \quad x^2 - 10x = 11$$

$$(11)^2 - 10(11) \stackrel{?}{=} 11 \quad (-1)^2 - 10(-1) \stackrel{?}{=} 11$$

$$121 - 110 \stackrel{?}{=} 11 \quad 1 + 10 \stackrel{?}{=} 11$$

$$\checkmark \quad 11 = 11 \quad \checkmark \quad 11 = 11$$

تحقق من فهمك

حل كلاً من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

$$(1A) \quad x^2 + 6x = 16, -8, 2 \quad (1B) \quad 2x^2 + 25x + 33 = 0, -\frac{3}{2}, -11$$

عندما يكون ما تحت الجذر في القانون العام صفرًا، فإننا نحصل على جذرٍ نسبيٍّ واحدٍ، ويكون حل المعادلة في هذه الحالة هو هذا الجذر النسبي، ولكنه مكرر مرتين.

تنوع التعليم

دور صين

إذا عوض بعض الطلاب القيم في القانون العام بشكل غير صحيح،

فاطلب إليهم كتابة قيم a, b, c على هامش الورقة بعد كتابة المعادلة التربيعية على الصورة القياسية قبل التعويض في القانون العام.



تاريخ الرياضيات

براهام جويتا

(م 598-668) عالم رياضي هندي، وهو أول من أوجد حلاً عاماً للمعادلة التربيعية التي على الصورة $ax^2 + bx = c$ ، وهو ما يُسمى الآن القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

مثال 2

معادلة لها جذر نسبي واحد (مكرر مرتين)

حل المعادلة $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستعمال القانون العام .
حدد قيم كل من a, b, c ، وعرّض هذه القيم في القانون العام .

$$\begin{aligned} \text{القانون العام} \quad x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)} \end{aligned}$$

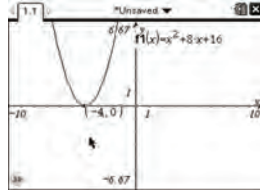
$$\text{بالتعويض عن: } a \text{ بالعدد } 1, b \text{ بالعدد } 8, c \text{ بالعدد } 16$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$\sqrt{0} = 0 \quad = \frac{-8}{2} = -4$$

الحل هو -4 (مكرر مرتين) .

تحقق: يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة وجود حل واحد عند $x = -4$.



تحقق من فهمك

حل كلا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

$$8x^2 - 16x + 64 = 0 \quad (2A) \quad -17x^2 + 34x + 289 = 0 \quad (2B)$$

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بكتابتها على الصورة الجذرية .

مثال 3

الجذور غير النسبية

حل المعادلة: $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستعمال القانون العام.

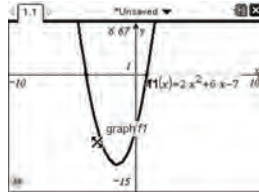
$$\begin{aligned} \text{القانون العام} \quad x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)} \end{aligned}$$

بالتعويض عن: a بالعدد 2 ، b بالعدد 6 ، c بالعدد -7

$$\begin{aligned} \text{بالتبسيط} \quad &= \frac{-6 \pm \sqrt{92}}{4} \\ \sqrt{92} &= \sqrt{4(23)} = 2\sqrt{23} \\ &= \frac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{23}}{2} \end{aligned}$$

الحلان التقريبيان هما: 0.9 ، -3.9

تحقق: تحقق من صحة الحل بتمثيل الدالة المرتبطة بالمعادلة $y = 2x^2 + 6x - 7$ بيانياً. مستعملاً خاصية Zero في الحاسبة البيانية للحصول على القيمتين التقريبتين لصفري الدالة المرتبطة وهما: -3.9 ، 0.9



تحقق من فهمك

حل كلا من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

$$3x^2 + 5x + 1 = 0 \quad (3A) \quad \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6} \quad 4x^2 - 8x + 9 = 0 \quad (3B)$$

تنبيه

أخطاء مفاهيمية شائعة قد

يلاحظ بعض الطلاب أنه يمكن حل المعادلتين في المثالين 2، 1، بالتحليل إلى العوامل، فقبل أن تبدأ بمثال 3، أكد على أن العديد من المعادلات التربيعية لا يمكن حلها بسهولة باستعمال التحليل إلى العوامل، وأن المعادلة التربيعية في المثال 3 هي واحدة من هذه المعادلات. أكد كذلك أن القانون العام يوفر طريقة لإيجاد جذري أي معادلة تربيعية.

مثالان إضافيان

2 حل المعادلة:

$$x^2 - 34x + 289 = 0 \text{ باستعمال}$$

القانون العام. 17

3 حل المعادلة: $x^2 - 6x + 2 = 0$

بإستعمال القانون العام.

$3 \pm \sqrt{7}$ أو 0.4 تقريباً، تقريباً 5.6

الأعداد المركبة

تذكر أن تكتب حلك على الصورة $a + bi$ ، وتسمى هذه الصورة الصورة القياسية للعدد المركب.

الجذور المركبة

مثال 4 يبين طريقة حل معادلة تربيعية عندما يكون ناتج ما تحت الجذر في القانون العام سالباً.

مثال 4

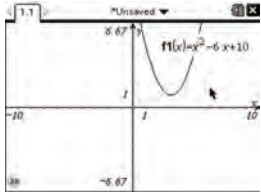
الجذور المركبة

حل المعادلة: $x^2 - 6x = -10$ باستعمال القانون العام.

$$\begin{aligned} \text{القانون العام} \quad x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)} \\ \text{بالتبسيط} &= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ \sqrt{-4} &= \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2i \\ \text{بالتبسيط} &= 3 \pm i \end{aligned}$$

الحلان هما: $3 + i$ ، $3 - i$ عدنان مركبان مترافقان.

تحقق: يظهر التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة أن الحلين هما عدنان مركبان، ولكن لا يساعدك التمثيل البياني على إيجادهما. وللتحقق من صحة الحلين المركبين، عوضهما في المعادلة الأصلية.



$$\text{المعادلة الأصلية} \quad x^2 - 6x = -10$$

$$x = 3 + i \quad (3 + i)^2 - 6(3 + i) \stackrel{?}{=} -10$$

$$\text{بإيجاد مفكوك } (3 + i)^2 \text{ وخاصية التوزيع} \quad 9 + 6i + i^2 - 18 - 6i \stackrel{?}{=} -10$$

$$\text{بالتبسيط} \quad -9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$$

$$i^2 = -1 \quad \checkmark \quad -9 - 1 = -10$$

$$\text{المعادلة الأصلية} \quad x^2 - 6x = -10$$

$$x = 3 - i \quad (3 - i)^2 - 6(3 - i) \stackrel{?}{=} -10$$

$$\text{بإيجاد مفكوك } (3 - i)^2 \text{ وخاصية التوزيع} \quad 9 - 6i + i^2 - 18 + 6i \stackrel{?}{=} -10$$

$$\text{بالتبسيط} \quad -9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$$

$$i^2 = -1 \quad \checkmark \quad -9 - 1 = -10$$

تحقق من فهمك

حل كلاً من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام:

$$(4A) \quad 3x^2 + 5x + 4 = 0 \quad \frac{-5 \pm i\sqrt{23}}{6} \quad (4B) \quad x^2 - 4x = -13 \quad 2 \pm 3i$$

الجذور والمميز: في المعادلة التربيعية لاحظ العلاقة بين قيمة ما تحت الجذر وجذور المعادلة التربيعية في الأمثلة السابقة. تسمى العبارة $b^2 - 4ac$ **المميز**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftarrow \text{المميز}$$

يمكن استعمال المميز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية، ونوعها، ويلخص الجدول في الصفحة الآتية الأنواع الممكنة للجذور. ويمكن أن يستعمل المميز للتأكد من عدد الحلول وأنواعها بعد حل المعادلة التربيعية.

مثال إضافي

4 حل المعادلة $x^2 + 13 = 6x$ باستعمال القانون العام $3 \pm 2i$.

تنبيه!

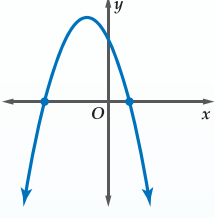
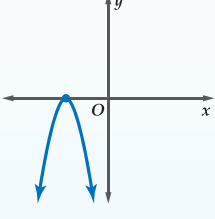
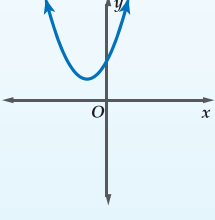
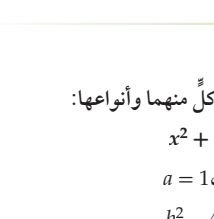
تجنب الأخطاء ذكر الطلاب بأن المترافقين المركبين هما عدنان مركبان على الصورة $a + bi$ ، $a - bi$.

المحتوى الرياضي

الجذور يمكن استعمال قيمة المميز لتحديد عدد جذور معادلة تربيعية ونوعها. افترض معادلة تربيعية معاملات حدها أعداد نسبية، فإذا كان المميز مربعاً كاملاً غير الصفر، فإن للمعادلة جذرين نسبين مختلفين، وإذا كان المميز صفراً فإن للمعادلة جذراً حقيقياً واحداً. وإذا كان المميز موجباً، وليس مربعاً كاملاً، فإن جذري المعادلة حقيقيان غير نسبين، وإذا كان سالباً فإن للمعادلة جذرين مركبين.

الجذور تذكر أن حلول المعادلة تسمى جذوراً وهي قيم X التي يقطع عندها التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة المحور X .

في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a, b, c أعداد نسبية، $a \neq 0$.

مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة	عدد الجذور وأنواعها	قيمة التمييز
	جذران حقيقيان نسبيا	$b^2 - 4ac > 0$ والعبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل.
	جذران حقيقيان غير نسبيا	$b^2 - 4ac > 0$ والعبارة $b^2 - 4ac$ ليست مربعاً كاملاً.
	جذر حقيقي مكرر مرتين	$b^2 - 4ac = 0$
	جذران مركبان	$b^2 - 4ac < 0$

الجذور والتمييز

مثال 5 يبين كيفية إيجاد قيمة التمييز للمعادلة التربيعية، واستعماله لتحديد عدد جذور المعادلة ونوعها.

مثال إضافي

5

أوجد قيمة التمييز لكل من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين، وحدد عدد جذور كل منهما وأنواعها:

(a) $x^2 + 3x + 5 = 0$

-11، جذران مركبان

(b) $x^2 - 11x + 10 = 0$

81، جذران نسبيا

مثال 5 وصف الجذور

أوجد قيمة التمييز لكل من المعادلتين التربيعيتين الآتيتين، وحدد عدد جذور كل منهما وأنواعها:

(a) $7x^2 - 11x + 5 = 0$

(b) $x^2 + 22x + 121 = 0$

$a = 7, b = -11, c = 5$

$a = 1, b = 22, c = 121$

$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(7)(5)$

$= 121 - 140$

$= -19$

$b^2 - 4ac = (22)^2 - 4(1)(121)$

$= 484 - 484$

$= 0$

التمييز سالب؛ لذا يوجد

جذران مركبان.

التمييز يساوي صفراً؛ لذا يوجد

جذر حقيقي واحد مكرر مرتين.

(5A) 44، جذران حقيقيان غير نسبيا

(5B) 289، جذران حقيقيان نسبيا

(5A) $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

(5B) $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

تحقق من فهمك

(5A) $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

(5B) $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابة قدّم للطلاب معادلة

تربيعية، واطلب إليهم أن يستعملوا

التمييز لتحديد عدد جذورها ونوعها.

وزودهم بنظام تقني له ثلاثة خيارات:

A: للمعادلة جذران مركبان

B: للمعادلة جذر حقيقي واحد

C: للمعادلة جذران حقيقيان

مختلفان

ثم اطلب إليهم اختيار أحدها.

تنوع التعليم

ضمن هون

$x^3 - 8 = 0$

$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

$x - 2 = 0$ أو $(x^2 + 2x + 4) = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$

$x = -1 \pm i\sqrt{3}$

حلول المعادلة هي: $-1 - i\sqrt{3}$ ، $-1 + i\sqrt{3}$ ، 2 .

توسّع اكتب المعادلة $x^3 - 8 = 0$ على السبورة

ووضّح للطلاب أن هذه معادلة تكعيبية، واطلب إليهم استعمال ما تعلموه في هذا الدرس لحل هذه المعادلة.

وذكّرهم بأن المعادلة التربيعية (من الدرجة الثانية) لها حلان على الأكثر، بينما يكون للمعادلة التكعيبية (من الدرجة الثالثة) ثلاثة حلول على الأكثر.

درست فيما سبق طرائق مختلفة لحل المعادلات التربيعية، والجدول أدناه يلخص تلك الطرائق.

حالات استعمالها	إمكانية استعمالها	الطريقة
عندما لا يطلب إيجاد الحل الدقيق، وأفضل استعمال لها عند التحقق من معقولية الحلول التي يتم إيجادها بالطرائق الجبرية.	أحياناً	التمثيل البياني
عندما يساوي الحد الثابت صفراً، أو عندما يكون من السهل إيجاد العوامل . مثال: $x^2 - 7x = 0$	أحياناً	التحليل إلى العوامل
مع المعادلات المكتوبة على صورة مربع كامل يساوي ثابتاً. مثال: $(x - 5)^2 = 18$	أحياناً	خاصية الجذر التربيعي
مع المعادلات المكتوبة على الصورة: $x^2 + bx + c = 0$. مثال: $x^2 + 6x - 14 = 0$	دائماً	إكمال المربع
عندما لا يمكن استعمال بقية الطرائق أو عندما يكون من الصعب استعمالها. مثال: $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$	دائماً	القانون العام

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي إن الجدول في صفحة (118) من كتاب الطالب يقدم إمكانية استعمال كل طريقة عند حل المعادلات التربيعية، فقد لا يتمكن بعض الطلاب من تحليل كل معادلة وتحديد الطريقة الأنسب لحلها وتوفير الوقت.

تأكد

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{3} (4), \frac{5 \pm \sqrt{57}}{8} (3)$$

$$x^2 + 8x + 5 = 0 \quad (2) \quad x^2 + 12x - 9 = 0 \quad (1)$$

$$9x^2 + 6x - 4 = 0 \quad (4) \quad 4x^2 - 5x - 2 = 0 \quad (3)$$

$$1.5, \frac{1}{3} \quad 22x = 12x^2 + 6 \quad (6) \quad 1.5, -0.2 \quad 10x^2 - 3 = 13x \quad (5)$$

$$-3 \pm \sqrt{14} \quad x^2 + 3 = -6x + 8 \quad (8) \quad \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{3} \quad -3x^2 + 4x = -8 \quad (7)$$

الأمثلة 1-4

$$-6 \pm 3\sqrt{5} \quad (1)$$

$$-4 \pm \sqrt{11} \quad (2)$$

(9) **ترفيه:** يُعطى ارتفاع لعبة ترفيهية عن سطح الأرض بالدالة: $h = -16t^2 - 64t + 60$ ؛ حيث h الارتفاع بالأقدام، و t الزمن بالثواني. فإذا علمت أنها ترتفع مسافة 60 ft ثم تهوي بسرعة تصل إلى 80 ft/s، فما الزمن الذي يستغرقه هبوطها من ارتفاع 60 ft إلى 0 ft ؟ **0.78 ثانية تقريباً**

أجب عن الفرعين a، b لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

(a) أوجد قيمة المميز.

(b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

$$2x^2 - 6x + 9 = 0 \quad (11) \quad 3x^2 + 8x + 2 = 0 \quad (10)$$

$$5x^2 + 2x + 4 = 0 \quad (13) \quad -16x^2 + 8x - 1 = 0 \quad (12)$$

40 (10a)
 جذران غير نسبيين (10b)
 -36 (11a)
 جذران مركبان (11b)
 0 (12a)
 1 نسبي (12b)
 -76 (13a)
 جذران مركبان (13b)

118 الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:

$$x^2 + 45x = -200 \quad (14) \quad -5, -40$$

$$4x^2 - 6 = -12x \quad (15) \quad \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}$$

$$5x^2 - 9 = 11x \quad (16)$$

$$12x^2 + 9x - 2 = -17 \quad (17) \quad \frac{-3 \pm i\sqrt{71}}{8}$$

الأمثلة 1-4

$$(16) \quad \frac{11 \pm \sqrt{301}}{10}$$

(18a) المجال =

$$\{t \mid 0 \leq t \leq 2\},$$

$$\text{المدى} = \{h \mid 0 \leq h \leq 10\}$$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-13 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

أجب عن الفروع a-c لكل معادلة تربيعية مما يأتي:

(a) أوجد قيمة المميز.

(b) أوجد عدد الجذور، وحدد أنواعها.

(c) حل المعادلة باستعمال القانون العام. (19-30) انظر ملحق الإجابات

$$2x^2 + 4x + 7 = 0 \quad (21) \quad 3x^2 - 3x + 8 = 0 \quad (20) \quad 2x^2 + 3x - 3 = 0 \quad (19)$$

$$x^2 + 2x - 4 = -9 \quad (24) \quad x^2 - 6x = -9 \quad (23) \quad -5x^2 + 4x + 1 = 0 \quad (22)$$

$$8x^2 = -2x + 1 \quad (27) \quad 5x^2 + 8x = 0 \quad (26) \quad -6x^2 + 5 = -4x + 8 \quad (25)$$

$$0.6x^2 + 1.4x = 4.8 \quad (30) \quad 0.8x^2 + 2.6x = -3.2 \quad (29) \quad 4x - 3 = -12x^2 \quad (28)$$

إجابة:

31c) 2017، إجابة ممكنة: لا؛ لأن معدل

الإصابة بسرطان الرئة لن يصبح

صفرًا إلا إذا وجد علاج ناجح لهذا

المرض، وهذا لا يمكن التنبؤ به.

العام	عدد الإصابات لكل 100000
2000	92
2002	90
2004	85
2010	?
2015	?

(31) **التدخين:** تبذل دول العالم جهودًا مكثفة للتوعية بأخطار التدخين، وقد أثمرت عن تناقص أعداد المدخنين. وفي إحدى البلدان أجريت دراسة حول الإصابات بمرض سرطان الرئة بين كل 100000 شخص في بعض الأعوام، وكانت نتائجها التقريبية كما في الجدول المجاور. ويمكن تمثيل العدد التقريبي للمصابين بالدالة $y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$ ، حيث x عدد السنوات بعد عام 2000.

(a) احسب عدد المصابين بسرطان الرئة لكل 100000 شخص في عامي 2010، 2015. **60.31، 25.06**(b) استعمل القانون العام لإيجاد قيمة x عندما $y=50$. **11.7 تقريبًا**(c) اعتمادًا على الدالة التربيعية، متى يصبح معدل الإصابة يساوي صفرًا؟ وهل هذا التوقع معقول؟ فسر إجابتك. **انظر الهامش**(32) **نظرية الأعداد:** يعطى مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية n ، $1، 2، 3، \dots$ بالقانون

$$S = \frac{1}{2} n (n + 1)$$

فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا بالعدد 1 مجموعها يساوي 666؟ **36**

الربط مع الحياة

في إطار الجهود العالمية لمكافحة التدخين، بدأت وزارة الصحة بالمملكة العربية السعودية عام 1423هـ برنامجها الشامل لمكافحة التدخين، والذي يقدم خدماته التوعوية والعلمية والاستشارية والعلاجية للفرد وللأسرة وللمجتمع.

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
35-44 ، 33 ، 14-25	دون المتوسط دون
31-33 ، 20-30 فردي ، 15-19 فردي	ضمن المتوسط ضمن
28-44	فوق المتوسط فوق

مسائل مهارات التفكير العليا

33 اكتشف الخطأ: حددت كل من هدى ولولو عدد حلول للمعادلة $3x^2 - 5x = 7$. فمن منهما إجابتها صحيحة؟

لولو
 $3x^2 - 5x = 7$
 $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7)$
 $= -59$
 وبها أت الهميز سالب فلا توجد للمعادلة حلول حقيقية.

هدى
 $3x^2 - 5x = 7$
 $3x^2 - 5x - 7 = 0$
 $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7)$
 $= 109$
 وبها أت الهميز موجب فللمعادلة حالات حقيقية.

34 تحدد: حل المعادلة $4ix^2 - 4ix + 5i = 0$ باستعمال القانون العام $\frac{1 \pm 2i}{2}$.

35 تبيرير: حدد إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائماً أو أحياناً أو غير صحيحة أبداً. وضع إجابتك:
 (a) إذا كانت إشارتا كل من المعاملين a, c في المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة القياسية مختلفتين، فإن جذري المعادلة حقيقيان.
 (b) إذا كان مميز المعادلة التربيعية أكبر من 1، فإن لها جذرين حقيقيين غير نسبيين.

36 اكتب: صف ثلاث طرائق مختلفة لحل المعادلة: $x^2 - 2x - 15 = 0$. وأيها تفضل؟ ولماذا؟
 انظر الهامش.

33 هدى، على لولو أن تكتب المعادلة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0$ لإيجاد a, b, c . لذا فإن قيمة c هي -7 وليس 7 .
35a إجابة ممكنة: دائماً عندما تكون إشارتا a, c مختلفتين فإن المميز يكون موجباً، ولن تكون الحلول أعداداً مركبة.
35b إجابة ممكنة: أحياناً؛ تكون الجذور غير نسبية إذا كانت: $b^2 - 4ac$ ليست مربعاً كاملاً.

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب في السؤال 33 أن المعادلة التربيعية يجب أن تكتب على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ قبل إيجاد المميز.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اعمل نسخاً عدة لخمس معادلات تربيعية مختلفة، وأعط معادلة لكل طالب واطلب إليه حلها باستعمال القانون العام وتسليمك إجابته قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين 3-2, 3-1 بإعطائهم:
 الاختبار القصير 1، ص (49).

تدريب على اختبار

38 إذا علمت أن 75% من العدد 88 يساوي 60% من العدد x ، فما قيمة x ؟
 D
 100 A
 101 B
 108 C
 110 D

37 أي المعادلات الآتية لها جذر حقيقي مكرر مرتين؟
 D
 A $x^2 - 2x + 5 = 0$
 B $x^2 - 2x - 5 = 0$
 C $x^2 = 19$
 D $x^2 - 8x = -16$

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة c التي تجعل كل ثلاثية حدود مما يأتي مربعاً كاملاً. ثم اكتبها على صورة مربع كامل: (مهارة سابقة)
39 $x^2 + 13x + c$ **42.25; (x + 6.5)^2** **40** $x^2 + 2.4x + c$ **1.44; (x + 1.2)^2** **41** $x^2 + \frac{4}{5}x + c$ **4** $\frac{4}{25}; (x + \frac{2}{5})^2$
 بسط كلاً مما يأتي: (الدرس 3-1)
42 $i^{26} - 1$ **43** $4i\sqrt{-16}$ **44** $(4\sqrt{-9}) \cdot (2\sqrt{-25}) - 120$

إجابات:

36 إجابة ممكنة:

التحليل إلى عوامل:

$$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$$

$$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

إكمال المربع:

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x^2 - 2x = 15$$

$$x^2 - 2x + 1 = 15 + 1$$

$$(x-1)^2 = 16$$

$$x-1 = \pm 4 \rightarrow x = 5 \text{ أو } -3$$

القانون العام:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 8}{2} \rightarrow x = 5 \text{ أو } -3$$

واستمع إلى آراء الطلاب حول الطريقة التي يفضلونها

الهدف
كتابة المعادلة
التربيعية بمعرفة
مجموع جذريها
وحاصل ضربهما.

1 التركيز

الهدف استخدام حاصل ضرب وجمع جذري معادلة تربيعية لإيجادها.

إرشادات التدريس

يجب أن يتقن الطلاب تحليل ثلاثي الحدود قبل بدء هذا المعمل.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات لتنفيذ النشاطين.

واسأل:

- عند جمع جذري معادلة تربيعية، ماذا يحصل للجذرين التربيعيين الموجودين في كل منهما.
- يمكن جمع أو طرح الجذرين المتشابهين، ويكون ناتج جمعها صفرًا.
- ماذا يحصل للجذرين التربيعيين عند ضرب جذري المعادلة؟ عند ضرب مقدارين مترافقين فإن حاصل ضربهما يكون مربع الجزء الأول + مربع الجزء الثاني، وبالتالي يكون الناتج بلا جذور.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 1-10.

إذا علمت جذري معادلة تربيعية فإنه يمكنك كتابتها باستعمال مجموع جذريها وحاصل ضربهما.
للمعادلة التربيعية: $x^2 + 5x - 24 = 0$ جذران هما $-8, 3$ ومجموعهما -5 ، وحاصل ضربهما -24 .

$$\text{مجموع الجذرين} \quad 3 + (-8) = -5 \quad \text{هو النظير الجمعي لمعامل } x$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} \quad 3(-8) = -24 \quad \text{هو الحد الثابت}$$

ويمكن تعميم ذلك لأية معادلة تربيعية باستعمال القانون العام لحل المعادلة التربيعية، فإذا كان جذرا المعادلة التربيعية r_1, r_2 فإن:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{مجموع الجذرين} \quad r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = \frac{-2b + 0}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\text{مجموع الجذرين يساوي } -\frac{b}{a}$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{بالضرب} \quad = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$\text{الخاصية التوزيعية} \quad = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$\text{بالتبسيط} \quad = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين يساوي } \frac{c}{a}$$

مما سبق يمكن التوصل للقانون الآتي الذي يستعمل لكتابة أية معادلة تربيعية علم جذراها.

أضف إلى
مطويتك

مفهوم أساسي

مجموع جذري معادلة وحاصل ضربهما

إذا كان r_1, r_2 جذري المعادلة $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

$$\text{فإن } r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}, \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال 4 لتقويم مدى مقدرة الطلاب على تكوين معادلة تربيعية علم جذراها.

من المحسوس إلى المجرد

يتطلب السؤالان 9, 10 أن يفهم الطلاب كيفية تحديد قيم a, b, c من مجموع الجذرين وحاصل ضربهما.

اسأل:

- إذا علمت مجموع الجذرين، فماذا تستنتج؟ استنتج القيمة $(-\frac{b}{a})$ والتي تمثل سالب ناتج قسمة معامل الحد من الدرجة الأولى على معامل الحد من الدرجة الثانية في المعادلة التربيعية.
- إذا علمت حاصل ضرب الجذرين، فماذا تستنتج؟ استنتج القيمة $\frac{c}{a}$ والتي تمثل ناتج قسمة الحد الثابت على معامل الحد من الدرجة الثانية في المعادلة التربيعية.

$$32x^2 + 4x - 15 = 0 \quad (1)$$

$$3x^2 + 19x - 14 = 0 \quad (2)$$

$$25x^2 - 4 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 - 8x + 13 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (5)$$

$$49x^2 + 28x - 41 = 0 \quad (6)$$

$$x^2 - 14x + 58 = 0 \quad (7)$$

$$x^2 - 2\sqrt{5}x + 69 = 0 \quad (8)$$

$$12x^2 - 48x + 13 = 0 \quad (9)$$

$$42x^2 - 7x + 10 = 0 \quad (10)$$

النشاط 1

استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $-7, 2$.

الخطوة 1: أوجد مجموع الجذرين:

$$r_1 + r_2 = 2 + (-7) \\ = -5$$

الخطوة 2: أوجد حاصل ضرب الجذرين:

$$r_1 \cdot r_2 = 2(-7) \\ = -14$$

الخطوة 3: اكتب المعادلة:

$$\text{بما أن } -5 = -\frac{b}{a}, -14 = \frac{c}{a} \text{، فإذا كانت } a = 1 \text{ فإن: } b = 5, c = -14$$

وبالتالي المعادلة: $x^2 + 5x - 14 = 0$ تحقق المطلوب.

النشاط 2

استعمال مجموع جذرين وحاصل ضربهما

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $-\frac{12}{5}, \frac{3}{4}$.

الخطوة 1: أوجد مجموع الجذرين:

$$r_1 + r_2 = \frac{3}{4} + \left(-\frac{12}{5}\right) \\ = \frac{15}{20} - \frac{48}{20} = -\frac{33}{20}$$

الخطوة 2: أوجد حاصل ضرب الجذرين:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{3}{4} \left(-\frac{12}{5}\right) \\ = -\frac{36}{20}$$

الخطوة 3: اكتب المعادلة:

$$\text{بما أن } -\frac{33}{20} = -\frac{b}{a}, -\frac{36}{20} = \frac{c}{a} \text{، فإذا كانت } a = 20 \text{ فإن: } b = 33, c = -36$$

وبالتالي المعادلة: $20x^2 + 33x - 36 = 0$ تحقق المطلوب.

تمارين:

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها العدان المعطيان في كل مما يأتي:

$$(1) -\frac{3}{4}, \frac{5}{8} \quad (2) -7, \frac{2}{3} \quad (3) \pm \frac{2}{5} \quad (4) 4 \pm \sqrt{3}$$

$$(5) 1 \pm \sqrt{6} \quad (6) \frac{-2 \pm 3\sqrt{5}}{7} \quad (7) 7 \pm 3i \quad (8) \sqrt{5} \pm 8i$$

اكتب المعادلة التربيعية التي تحقق كلاً مما يأتي:

$$(9) \text{ مجموع جذريها } 4, \text{ وحاصل ضربهما } \frac{13}{12} \quad (10) \text{ مجموع جذريها } \frac{1}{6}, \text{ وحاصل ضربهما } \frac{5}{21}$$



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 3

دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-2 تدريبات إعادة التعليم

القانون العام والمميز

المميز	العبارة $b^2 - 4ac$ تحت الجذر التربيعي في القانون العام يسمى المميز.	عدد الجذور والتواصيا
$b^2 - 4ac > 0$	مربع كامل	جذران حقيقيين
$b^2 - 4ac > 0$	ليس مربعاً كاملاً	جذران غير نسبيين
$b^2 - 4ac = 0$		جذر نسبي مكرر مرتين
$b^2 - 4ac < 0$		جذران مركبان

مثال: أوجد قيمة المميز لكل معادلة، ثم صف عدد الجذور ونوعها.

(a) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ المميز $b^2 - 4ac = 5^2 - 4(2)(3) = 25 - 24 = 1$
المميز موجب ومربع كامل، لذا يوجد للمعادلة جذران حقيقيين.

(b) $3x^2 - 2x + 5 = 0$ المميز $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(5) = 4 - 60 = -56$
المميز سالب، لذا يوجد للمعادلة جذران مركبان.

تدريبات:

حل الفروع $(a-c)$ لكل معادلة ما يأتي:

(a) أوجد قيمة المميز.

(b) صف عدد الجذور، وحدد أنواعها.

(c) أوجد حلول المعادلة مستعملاً القانون العام.

(1) $x^2 + 12p = -4$ جذران غير نسبيين: $128 \pm 4\sqrt{2}$

(2) $3x^2 - 6x + 1 = 0$ جذران نسبيين واحد: 0

(3) $2x^2 - 7x - 4 = 0$ جذران نسبيين: 81

(4) $x^2 + 4x - 4 = 0$ جذران غير نسبيين: $32 \pm 2\sqrt{2}$

(5) $5x^2 - 36x + 7 = 0$ جذران غير نسبيين: $156 \pm \frac{1}{5}\sqrt{10}$

(6) $4x^2 - 4x + 11 = 0$ جذران مركبان: $160 \pm \frac{1}{2}\sqrt{10}$

(7) $x^2 - 7x + 6 = 0$ جذران نسبيين: 25

(8) $m^2 - 8m = -14$ جذران نسبيين واحد: $1, 6$

(9) $25x^2 - 40x = -16$ جذران نسبيين واحد: 0

(10) $4x^2 + 20x + 29 = 0$ جذران مركبان: $64 \pm 4\sqrt{2}$

(11) $6x^2 + 28x + 8 = 0$ جذران نسبيين: 1484

(12) $4x^2 - 4x - 11 = 0$ جذران غير نسبيين: $192 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$

الفصل 3، كثيرات الحدود وخواصها

تدريبات إعادة التعليم (26) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-2 تدريبات إعادة التعليم

القانون العام والمميز

القانون العام، يستخدم القانون العام في حل أي معادلة تربيعية مكتوبة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ يُعطى بالقانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: حل المعادلة $x^2 - 5x - 14 = 0$ مستعملاً القانون العام.

أعد كتابة المعادلة على الصورة $x^2 - 5x - 14 = 0$

القانون العام $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بالتعويض: $a=1, b=-5, c=-14$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-14)}}{2(1)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm 9}{2}$$

$$= 7 \text{ أو } -2$$

إذن، حل المعادلة هما: -2 و 7 .

تدريبات:

حل كل معادلة ما يأتي مستعملاً القانون العام.

(1) $x^2 + 2x - 35 = 0$ جذران نسبيين واحد: $5, -7$

(2) $x^2 + 10x + 24 = 0$ جذران نسبيين: $-4, -6$

(3) $x^2 - 11x + 24 = 0$ جذران نسبيين: $3, 8$

(4) $4x^2 + 19x - 5 = 0$ جذران غير نسبيين: $\frac{1}{4}, -5$

(5) $14x^2 + 9x + 1 = 0$ جذران غير نسبيين: $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{7}$

(6) $2x^2 - x - 15 = 0$ جذران غير نسبيين: $3, -\frac{5}{2}$

(7) $3x^2 + 5x = 2$ جذران غير نسبيين: $-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$

(8) $2y^2 + y - 15 = 0$ جذران غير نسبيين: $\frac{5}{2}, -3$

(9) $3x^2 - 16x + 16 = 0$ جذران غير نسبيين: $4, \frac{4}{3}$

(10) $8x^2 + 6x - 9 = 0$ جذران غير نسبيين: $-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}$

(11) $r^2 - \frac{3r}{5} + \frac{2}{25} = 0$ جذران غير نسبيين: $\frac{2}{5}, \frac{1}{5}$

(12) $x^2 - 10x - 50 = 0$ جذران غير نسبيين: $5 \pm 5\sqrt{3}$

(13) $x^2 + 6x - 23 = 0$ جذران غير نسبيين: $-3 \pm 4\sqrt{2}$

(14) $4x^2 - 12x - 63 = 0$ جذران غير نسبيين: $\frac{3 \pm 6\sqrt{2}}{2}$

(15) $x^2 - 6x + 21 = 0$ جذران غير نسبيين: $3 \pm 21\sqrt{3}$

الفصل 3، كثيرات الحدود وخواصها

تدريبات حل المسألة (9) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-2 تدريبات حل المسألة

القانون العام والمميز

1 قطع مكافئ، يمثل الشكل التالي التمثيل البياني للمعادلة التربيعية على الصورة: $y = ax^2 + bx + c$

حل المسألة: أوجد قيمة a و b و c .

2 اعمد، بجوار عبد العزيز إيجاد قيمة b في المعادلة $y = x^2 + bx + 4$ على أن يكون المحور x مماساً للقطع المكافئ الذي يمثل المعادلة. فوجد أن $b = 4$. هل هي القيمة الوحيدة لـ b ؟ فسر إجابتك.

3 اعمد، أعمد مثلاً للدالة التربيعية $f(x)$ تحقق الخواص التالية:

(a) تميز f بساوي صفراً.

(b) لا توجد حلول حقيقية للمعادلة $f(x) = 10$ مثل الدالة $f(x)$ بيانياً.

إجابة ممكنة: $f(x) = -x^2$

4 معامات، منحى $y = x^2$ قطع مكافئ يمر بالنقطة $(1, 1)$ ، والمستقيم الذي معادلته $y = mx - m + 1$ ثابت يمر بالنقطة $(1, 1)$ أيضاً.

(a) لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم $y = mx - m + 1$ والقطع المكافئ $y = x^2$ ، ضع $x^2 = mx - m + 1$ وحل المعادلة، وابتداءً ترتيب الحدود تصحيح المعادلة $x^2 - mx + m - 1 = 0$.

هل يمكن إيجاد m ؟

(b) ما قيمة m لكي تكون هناك نقطة تقاطع واحدة؟ فسر إجابتك مستعملاً باستقيم والقطع المكافئ المذكورين في (a).

(c) القطع المكافئ $y = 2x - 1$ يتقاطع مع المستقيم $y = mx + 2$ عند نقطة واحدة هي $(1, 1)$ وعليه يكون المستقيم مماساً للقطع المكافئ

الفصل 3، كثيرات الحدود وخواصها

تدريبات المهارات (26) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-2 تدريبات المهارات

القانون العام والمميز

حل الفروع $(a-c)$ لكل معادلة ما يأتي:

(a) أوجد قيمة المميز.

(b) صف عدد الجذور، وحدد أنواعها.

(c) أوجد حلول المعادلة مستعملاً القانون العام.

(1) $x^2 - 8x + 16 = 0$ جذران نسبيين واحد: 4

(2) $x^2 - 11x - 26 = 0$ جذران غير نسبيين: 225

(3) $3x^2 - 2x = 0$ جذران نسبيين: $0, \frac{2}{3}$

(4) $20x^2 + 7x - 3 = 0$ جذران غير نسبيين: 289

(5) $5x^2 - 6 = 0$ جذران غير نسبيين: 120

(6) $x^2 - 6 = 0$ جذران غير نسبيين: $\pm\sqrt{6}$

(7) $x^2 + 8x + 13 = 0$ جذران غير نسبيين: 12

(8) $5x^2 - x - 1 = 0$ جذران غير نسبيين: $4 \pm \sqrt{3}$

(9) $x^2 - 2x - 17 = 0$ جذران غير نسبيين: 172

(10) $x^2 + 49 = 0$ جذران غير نسبيين: $1 \pm 3\sqrt{2}$

(11) $x^2 - x + 1 = 0$ جذران مركبان: $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

(12) $2x^2 - 3x = -2$ جذران مركبان: 7

(13) حل كل معادلة ما يأتي مستعملاً القانون العام.

(14) $x^2 - 30 = 0$ جذران غير نسبيين: $\pm\sqrt{30}$

(15) $x^2 - x = 30$ جذران غير نسبيين: $-5, 6$

(16) $16x^2 - 24x - 27 = 0$ جذران غير نسبيين: $\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}$

(17) $x^2 - 4x - 11 = 0$ جذران غير نسبيين: $2 \pm \sqrt{15}$

(18) $x^2 - 8x - 17 = 0$ جذران غير نسبيين: $4 \pm \sqrt{33}$

(19) $x^2 + 25 = 0$ جذران غير نسبيين: $\pm 5i$

(20) $3x^2 + 36 = 0$ جذران غير نسبيين: $\pm 2i\sqrt{3}$

(21) $2x^2 + 10x + 11 = 0$ جذران غير نسبيين: $-\frac{5 \pm \sqrt{3}}{2}$

(22) $2x^2 - 7x + 4 = 0$ جذران غير نسبيين: $\frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}$

(23) $8x^2 + 1 = 4x$ جذران غير نسبيين: $\frac{1 \pm i}{4}$

(24) $2x^2 + 2x + 3 = 0$ جذران غير نسبيين: $-\frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2}$

25 اعرف بالقطعة، تُقَدَّر المسافة $d(t)$ بالأقدام التي يقطعها مظلي بعد t ثانية من الملاحظة $d(t) = 16t^2$ مع إهمال مقاومة الرياح. وإذا قفز مظلي من طائرة، وقطع مسافة 1100 قدم قبل فتح المظلة. فكم ثانية تكون قد مرت قبل أن يفتح المظلة؟

8.3 ثانية تقريباً

الفصل 3، كثيرات الحدود وخواصها



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 3

دون دون المتوسط		ضمن المتوسط		فوق المتوسط																																																							
التدريبات الإثرائية (10)		كتاب التمارين (16)		دون ضمن فوق																																																							
<p>الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p>3-2 التدريبات الإثرائية مجموع الجذرين وحاصل ضربهما</p> <p>تعرف جذور المعادلة التربيعية دون أن تعرف المعادلة نفسها أحياناً، وباستعمال معرفتك السابقة في التحليل إلى العوامل لحل معادلة، يمكنك العمل عكسًا لإيجاد المعادلة. والقاعدة التالية تفكك من إيجاد مجموع جذري معادلة تربيعية وحاصل ضربها.</p> <table border="1"> <tr> <td>مجموع الجذرين</td> <td>إذا كان s_1 و s_2 جذري المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ و $a \neq 0$،</td> </tr> <tr> <td>وحاصل ضربهما</td> <td>فإن $s_1+s_2=-\frac{b}{a}$ و $s_1 \cdot s_2=\frac{c}{a}$</td> </tr> </table> <p>مثال اكتب المعادلة التربيعية التي جذورها 3 و-8.</p> <p>جذرا المعادلة هما 3 و-8 $3+(-8)=-5$ $3(-8)=-24$ إذن المعادلة: $x^2+5x-24=0$</p> <p>تقارن: اكتب المعادلة التربيعية المعطاة جذورها في كل ما يأتي:</p> <table border="0"> <tr> <td>(1) $x^2+3x-54=0$</td> <td>(2) $x^2-4x-5=0$</td> <td>(3) $x^2-12x+36=0$</td> </tr> <tr> <td>(4) $x^2-8x+13=0$</td> <td>(5) $x^2+\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}=0$</td> <td>(6) $x^2+28x-41=0$</td> </tr> </table> <p>أوجد k على أن يكون العدد المعطى جذراً للمعادلة.</p> <table border="0"> <tr> <td>(7) $2x^2+kx-21=0$</td> <td>(8) $x^2-13x+k=0$</td> </tr> </table>		مجموع الجذرين	إذا كان s_1 و s_2 جذري المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ و $a \neq 0$ ،	وحاصل ضربهما	فإن $s_1+s_2=-\frac{b}{a}$ و $s_1 \cdot s_2=\frac{c}{a}$	(1) $x^2+3x-54=0$	(2) $x^2-4x-5=0$	(3) $x^2-12x+36=0$	(4) $x^2-8x+13=0$	(5) $x^2+\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}=0$	(6) $x^2+28x-41=0$	(7) $2x^2+kx-21=0$	(8) $x^2-13x+k=0$	<p>3-2 القانون العام والمميز</p> <p>حل كل معادلة مما يأتي باستعمال القانون العام:</p> <table border="0"> <tr> <td>(1) $7x^2-5x=0$</td> <td>(2) $4x^2-9=0$</td> </tr> <tr> <td>(3) $3x^2+8x=3$</td> <td>(4) $x^2-21=4x$</td> </tr> <tr> <td>(5) $3x^2-13x+4=0$</td> <td>(6) $15x^2+22x-8=0$</td> </tr> <tr> <td>(7) $x^2-6x+3=0$</td> <td>(8) $x^2-14x+53=0$</td> </tr> <tr> <td>(9) $3x^2=-54$</td> <td>(10) $25x^2-20x-6=0$</td> </tr> <tr> <td>(11) $4x^2-4x+17=0$</td> <td>(12) $8x-1=4x^2$</td> </tr> <tr> <td>(13) $x^2=4x-15$</td> <td>(14) $4x^2-12x+7=0$</td> </tr> </table> <p>أجب عن الأسئلة a-c لكل معادلة تربيعية في الأسئلة (15-29):</p> <p>(a) أوجد قيمة المميز. (b) أوجد عدد الجذور المختلفة، وحدد أنواعها. (c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.</p> <table border="0"> <tr> <td>(15) $x^2-16x+64=0$</td> <td>(16) $x^2=3x$</td> <td>(17) $9x^2-24x+16=0$</td> </tr> <tr> <td>(18) جذري نسبي واحد 8</td> <td>(19) جذران نسيان 0,3</td> <td>(20) جذري نسبي واحد $\frac{4}{3}$</td> </tr> <tr> <td>(21) $x^2-3x=40$</td> <td>(22) $3x^2+9x-2=0$</td> <td>(23) $2x^2+7x=0$</td> </tr> <tr> <td>(24) جذران نسيان، 5، -8</td> <td>(25) جذران غير نسيان، $\frac{-9 \pm \sqrt{105}}{6}$</td> <td>(26) جذران نسيان، $-\frac{2}{3}$</td> </tr> <tr> <td>(27) $5x^2-2x+4=0$</td> <td>(28) $12x^2-x-6=0$</td> <td>(29) $7x^2+6x+2=0$</td> </tr> <tr> <td>(30) جذران نسيان، $-\frac{2}{3}$، $\frac{1}{2}$</td> <td>(31) جذران مركبان، $\frac{1 \pm \sqrt{19}}{3}$</td> <td>(32) جذران نسيان، $\frac{3}{4}$، $-\frac{2}{3}$</td> </tr> <tr> <td>(33) $x^2+3x+6=0$</td> <td>(34) $6x^2-2x-1=0$</td> <td>(35) $x^2+3x+6=0$</td> </tr> <tr> <td>(36) جذران نسيان، $-\frac{2}{3}$، $\frac{1}{2}$</td> <td>(37) جذران غير نسيان، $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$</td> <td>(38) $x^2+3x+6=0$</td> </tr> <tr> <td>(39) $4x^2-3x-6=0$</td> <td>(40) $16x^2-8x+1=0$</td> <td>(41) $2x^2-5x-6=0$</td> </tr> <tr> <td>(42) جذران غير نسيان، $\frac{3 \pm \sqrt{105}}{8}$</td> <td>(43) جذري نسبي واحد، $\frac{1}{2}$</td> <td>(44) جذران غير نسيان، $\frac{5 \pm \sqrt{23}}{4}$</td> </tr> </table> <p>(39) هزيه، إذا كانت المعادلة $60t^2-16t^2-16t^2=-16t^2+60t^2$ تعبر عن الارتفاع $h(t)$ بالأقدام لجسم بعد t ثانية من قذفه رأسياً إلى الأعلى من سطح الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها 60 m/s، فما قيمة t اللتان يكون عندهما الجسم على ارتفاع 156 m؟ 1.75 s، 2 s</p>		(1) $7x^2-5x=0$	(2) $4x^2-9=0$	(3) $3x^2+8x=3$	(4) $x^2-21=4x$	(5) $3x^2-13x+4=0$	(6) $15x^2+22x-8=0$	(7) $x^2-6x+3=0$	(8) $x^2-14x+53=0$	(9) $3x^2=-54$	(10) $25x^2-20x-6=0$	(11) $4x^2-4x+17=0$	(12) $8x-1=4x^2$	(13) $x^2=4x-15$	(14) $4x^2-12x+7=0$	(15) $x^2-16x+64=0$	(16) $x^2=3x$	(17) $9x^2-24x+16=0$	(18) جذري نسبي واحد 8	(19) جذران نسيان 0,3	(20) جذري نسبي واحد $\frac{4}{3}$	(21) $x^2-3x=40$	(22) $3x^2+9x-2=0$	(23) $2x^2+7x=0$	(24) جذران نسيان، 5، -8	(25) جذران غير نسيان، $\frac{-9 \pm \sqrt{105}}{6}$	(26) جذران نسيان، $-\frac{2}{3}$	(27) $5x^2-2x+4=0$	(28) $12x^2-x-6=0$	(29) $7x^2+6x+2=0$	(30) جذران نسيان، $-\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{2}$	(31) جذران مركبان، $\frac{1 \pm \sqrt{19}}{3}$	(32) جذران نسيان، $\frac{3}{4}$ ، $-\frac{2}{3}$	(33) $x^2+3x+6=0$	(34) $6x^2-2x-1=0$	(35) $x^2+3x+6=0$	(36) جذران نسيان، $-\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{2}$	(37) جذران غير نسيان، $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$	(38) $x^2+3x+6=0$	(39) $4x^2-3x-6=0$	(40) $16x^2-8x+1=0$	(41) $2x^2-5x-6=0$	(42) جذران غير نسيان، $\frac{3 \pm \sqrt{105}}{8}$	(43) جذري نسبي واحد، $\frac{1}{2}$	(44) جذران غير نسيان، $\frac{5 \pm \sqrt{23}}{4}$
مجموع الجذرين	إذا كان s_1 و s_2 جذري المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ و $a \neq 0$ ،																																																										
وحاصل ضربهما	فإن $s_1+s_2=-\frac{b}{a}$ و $s_1 \cdot s_2=\frac{c}{a}$																																																										
(1) $x^2+3x-54=0$	(2) $x^2-4x-5=0$	(3) $x^2-12x+36=0$																																																									
(4) $x^2-8x+13=0$	(5) $x^2+\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}=0$	(6) $x^2+28x-41=0$																																																									
(7) $2x^2+kx-21=0$	(8) $x^2-13x+k=0$																																																										
(1) $7x^2-5x=0$	(2) $4x^2-9=0$																																																										
(3) $3x^2+8x=3$	(4) $x^2-21=4x$																																																										
(5) $3x^2-13x+4=0$	(6) $15x^2+22x-8=0$																																																										
(7) $x^2-6x+3=0$	(8) $x^2-14x+53=0$																																																										
(9) $3x^2=-54$	(10) $25x^2-20x-6=0$																																																										
(11) $4x^2-4x+17=0$	(12) $8x-1=4x^2$																																																										
(13) $x^2=4x-15$	(14) $4x^2-12x+7=0$																																																										
(15) $x^2-16x+64=0$	(16) $x^2=3x$	(17) $9x^2-24x+16=0$																																																									
(18) جذري نسبي واحد 8	(19) جذران نسيان 0,3	(20) جذري نسبي واحد $\frac{4}{3}$																																																									
(21) $x^2-3x=40$	(22) $3x^2+9x-2=0$	(23) $2x^2+7x=0$																																																									
(24) جذران نسيان، 5، -8	(25) جذران غير نسيان، $\frac{-9 \pm \sqrt{105}}{6}$	(26) جذران نسيان، $-\frac{2}{3}$																																																									
(27) $5x^2-2x+4=0$	(28) $12x^2-x-6=0$	(29) $7x^2+6x+2=0$																																																									
(30) جذران نسيان، $-\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{2}$	(31) جذران مركبان، $\frac{1 \pm \sqrt{19}}{3}$	(32) جذران نسيان، $\frac{3}{4}$ ، $-\frac{2}{3}$																																																									
(33) $x^2+3x+6=0$	(34) $6x^2-2x-1=0$	(35) $x^2+3x+6=0$																																																									
(36) جذران نسيان، $-\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{2}$	(37) جذران غير نسيان، $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$	(38) $x^2+3x+6=0$																																																									
(39) $4x^2-3x-6=0$	(40) $16x^2-8x+1=0$	(41) $2x^2-5x-6=0$																																																									
(42) جذران غير نسيان، $\frac{3 \pm \sqrt{105}}{8}$	(43) جذري نسبي واحد، $\frac{1}{2}$	(44) جذران غير نسيان، $\frac{5 \pm \sqrt{23}}{4}$																																																									

1 التركيز

الترباط الرأسي

ما قبل الدرس 3-3

إيجاد قيم القوى.

الدرس 3-3

ضرب وحيدات حد وعبارات تتضمن:
قوى، وقسمتها، وتبسيطها.

جمع كثيرات حدود وطرحها وضربها.

ما بعد الدرس 3-3

استعمال طرائق تتضمن التحليل
للعوامل لإعادة كتابة معادلات كثيرة
حدود وحلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
واسأل:

• كيف يمكن كتابة 3×10^8 بالصيغة

القياسية؟ 300000000

• كم ثانية في 8 دقائق؟ 480

• بالاعتماد على المعلومات المعطاة، كم

تبعد الشمس عن الأرض تقريباً؟

$(2.4 \times 10^9) m$



لماذا؟

يستغرق وصول ضوء الشمس إلى الأرض 8 دقائق تقريباً؛ إذ يسير الضوء بسرعة كبيرة تصل إلى $3 \times 10^8 m/s$ تقريباً.

فما الوقت الذي سيستغرقه وصول الضوء إلينا من مجرة تبعد مسافة $2.367 \times 10^{21} m$ تقريباً؟

ضرب وحيدات الحد وقسمتها تذكر أن وحدة الحد هي: عدد، أو متغير، أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة، وتتكون من حد واحد فقط. والجدول الآتي يلخص خصائص الأسس التي تساعد على ضرب وقسمة وحيدات الحد وتبسيطها، حيث إن عملية **تبسيط** عبارات تتضمن قوى تعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.

ملخص المفهوم	خصائص الأسس	أضف إلى
الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	حيث $x \neq 0$ ، $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$ $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأسس السالبة	حيث $x \neq 0$ ، $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ ، $\frac{1}{x^{-a}} = x^a$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$ $(d^2)^4 = d^{2 \cdot 4} = d^8$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$ $(ab)^3 = a^3 b^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$ ، $y \neq 0$ ، $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}$ ، $x \neq 0$ ، $y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1$ ، $x \neq 0$	$7^0 = 1$

فيما سبق:

درست إيجاد قيم القوى.

والآن:

- أضرب وحيدات حد وعبارات تتضمن قوى، وأقسمها وأبسطها.
- أجمع كثيرات حدود، وأطرحها وأضربها.

المفردات:

لتبسيط
simplifying

درجة كثيرة الحدود
Degree of a polynomial

مصادر الدرس 3-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (124)	• تنوع التعليم، ص (124,128)	• تنوع التعليم، ص (124,128)
كتاب التمارين	• ص (17)	• ص (17)	• ص (17)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

عند تبسيط وحيدة الحد، تأكد من أنك قد بسّطتها على نحوٍ كامل.

أضف إلى
مطوّبتك

مفهوم أساسي تبسيط وحيدات الحد

- تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:
- لا تتضمن قوى قوة.
- يظهر كل أساس مرة واحدة.
- تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- لا تتضمن أسسًا سالبة.

مثال 1 تبسيط العبارات

بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا أن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

$$(a) \quad (2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2})$$

$$\begin{aligned} \text{العبارة الأصلية} & (2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2}) \\ \text{بضرب 2 في 3، وضرب } a^{-2} \text{ في } a^3 & = 6ab^2c^{-2} \\ \text{تعريف الأسس السالبة} & = 6ab^2 \left(\frac{1}{c^2}\right) \\ \text{بالتبسيط} & = \frac{6ab^2}{c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \frac{q^2r^4}{q^7r^3} & \\ \text{قسمة القوى} & \frac{q^2r^4}{q^7r^3} = q^{2-7} \cdot r^{4-3} \\ \text{ب طرح الأسس} & = q^{-5}r \\ \text{تعريف الأسس السالبة} & = \frac{r}{q^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3 & \\ \text{قوة ناتج القسمة} & \left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3 = \frac{(-2a^4)^3}{(b^2)^3} \\ \text{قوة ناتج الضرب} & = \frac{(-2)^3(a^4)^3}{(b^2)^3} \\ \text{قوة القوة} & = \frac{-8a^{12}}{b^6} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$\begin{aligned} \text{(1A)} \quad \frac{-14x^2}{y^3} (2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6}) & \\ \text{(1B)} \quad -\frac{5c^3}{d^4} \frac{15c^5d^3}{-3c^2d^7} & \\ \text{(1C)} \quad \frac{64}{a^3} \left(\frac{a}{4}\right)^{-3} & \\ \text{(1D)} \quad -32x^{15}y^{10} (-2x^{-3}y^2)^5 & \end{aligned}$$

إرشادات للدراسة

تحقق يمكنك التحقق من إجابتك دائمًا باستخدام تعريف الأسس، فمثلًا:

$$\frac{q^2}{q^7} = \frac{q \cdot q}{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q} = \frac{1}{q^5}$$

ضرب وحيدات الحد وقسمتها

مثال 1 يبيّن كيفية استعمال خصائص الأسس لتبسيط عبارات تتضمن ضرب وحيدات الحد وقسمتها.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا أن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

$$(a) \quad \frac{b^4}{ac} (a^{-3})(a^2b^4)(c^{-1})$$

$$(b) \quad \frac{1}{n^8} \frac{n^2}{n^{10}}$$

$$(c) \quad \frac{9a^6}{b^8} \left(\frac{3a^3}{b^4}\right)^2$$

المحتوى الرياضي

خصائص الأسس عند ضرب قوى المتغيرات أو قسمتها. تأكد من أن لها الأساس نفسه. اجمع الأسس عند ضرب قوى المتغير نفسه، واطرحها عند قسمة قوتين للمتغير نفسه.

تنبيه!

أخطاء شائعة عند حل ومناقشة المثال الإضافي 1b إذا أخطأ بعض الطلاب وكانت إجابتهم $\frac{1}{n^5}$ ، فوضح لهم أنهم قاموا بقسمة الأسس بدلًا من طرحها.

تنوع التعليم

دون ضمن فوق

واجه بعض الطلاب صعوبة في وصف أو استعمال خصائص الأسس،

بتوجيههم إلى كتابة ملخص لخصائص الأسس خاص بهم مثل: "الضرب عبارات تتضمن أسسًا يتم جمع أسس الأساس نفسه، ولقسمتها يتم طرح أسس الأساس نفسه".

تذكر أن كثيرة الحدود هي وحدة حد أو مجموع وحدات حد، وتسمى كل وحدة حد منها حدًا في كثيرة الحدود. ودرجة وحدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها.

العمليات على كثيرات الحدود: درجة كثيرة الحدود المبسطة هي أكبر درجة لوحدات الحد المكوّنة لها. فمثلاً درجة كثيرة الحدود $x^2 + 4x + 58$ هي 2.

مثال 2 درجة كثيرة الحدود

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

$$(a) \frac{1}{4}x^4y^3 - 8x^5$$

تعّد هذه العبارة كثيرة حدود؛ لأن كل حد فيها هو وحدة حد؛ ودرجة الحد الأول فيها تساوي $4 + 3 = 7$ ، ودرجة الحد الثاني 5؛ لذا فإن درجة كثيرة الحدود 7.

$$(b) \sqrt{x} + x + 4$$

هذه العبارة ليست كثيرة حدود؛ لأن \sqrt{x} ليست وحدة حد.

$$(c) x^{-3} + 2x^{-2} + 6$$

هذه العبارة ليست كثيرة حدود؛ لأن كلاً من x^{-3} ، x^{-2} ليست وحدة حد؛ حيث $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ ، $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ، ووحدات الحد لا تتضمن متغيرات في المقام.

تحقق من فهمك

$$(2A) \frac{x}{y} + 3x^2 \text{ لا؛ لأن } \frac{x}{y} \text{ ليست وحدة حد.} \quad (2B) x^5y + 9x^4y^3 - 2xy \text{ نعم؛ 7}$$

يمكنك تبسيط كثيرة الحدود تماماً كما تبسط وحدة الحد، حيث تجرى العمليات المطلوبة ثم تجمع الحدود المتشابهة.

مثال 3 تبسيط عبارات كثيرات الحدود

بسّط كلاً من العبارتين الآتيتين:

$$(a) (4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$$

تخلص من الأقواس وجمع الحدود المتشابهة.

$$\begin{aligned} & (4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1) \\ &= 4x^2 - 5x + 6 - 2x^2 - 3x + 1 \\ &= (4x^2 - 2x^2) + (-5x - 3x) + (6 + 1) \\ &= 2x^2 - 8x + 7 \end{aligned}$$

العبارة الأصلية
بتوزيع العدد -1
بتجميع الحدود المتشابهة
بجمع الحدود المتشابهة

$$(b) (6x^2 - 7x + 8) + (-4x^2 + 9x - 5)$$

رتب الحدود المتشابهة رأسياً، وأوجد ناتج الجمع.

$$\begin{aligned} & 6x^2 - 7x + 8 \\ & (+) -4x^2 + 9x - 5 \\ & \hline & 2x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$(3A) -2x^2 - 5x - 1 \quad (3B) (3x^2 - x - 5) + (-x + 1) \quad (3A) (-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$$

يمكن استعمال خاصية التوزيع لضرب كثيرات الحدود.

تنبيه!

تجنب الأخطاء اقترح على

الطلاب أن يعتمدوا تعريفات الأسس الأساسية، بدلاً من حفظ القوانين. فمثلاً يمكن أن يشتقوا ناتج الضرب $x^2 \cdot x^3$ من خلال إعادة كتابتها على الصورة $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$.

العمليات على كثيرات الحدود

مثال 2 يبين طريقة تحديد ما إذا كانت عبارة تمثّل كثيرة حدود أم لا، وتحديد درجتها إذا كانت كثيرة حدود.

مثال 3 يبين كيفية جمع أو طرح كثيرتي حدود.

مثال 4 يبين كيفية استعمال خاصية التوزيع لضرب وحدة حد في كثيرة حدود.

مثال 5 يبين كيفية تمثيل موقف من واقع الحياة بكثيرة حدود.

مثال 6 يبين كيفية تطبيق خاصية التوزيع مرتين لضرب كثيرة حدود في ثنائية حد.

مثالان إضافيان

2 حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

$$(a) c^4 - 4\sqrt{c} + 18 \text{ لا}$$

$$(b) -16p^5 + \frac{3}{4}p^2t^7 \text{ نعم، 9}$$

$$(c) x^2 - 3x^{-1} + 7 \text{ لا}$$

3 بسّط كلاً من العبارتين الآتيتين.

(a)

$$(2a^3 + 5a - 7) - (a^3 - 3a + 2)$$

$$a^3 + 8a - 9$$

(b)

$$(4x^2 - 9x + 3) + (-2x^2 - 5x - 6)$$

$$2x^2 - 14x - 3$$

طراق بديلة

لاحظ أن المثال 3a يستعمل طريقة الجمع الأفقي. على حين يستعمل المثال 3b طريقة الجمع الرأسى، وكلتاهما تؤدي إلى الإجابة الصحيحة.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اكتب عبارة على السبورة تتطلب جمع أو طرح كثيرتي حدود.

ثم حرّك الحدود المتشابهة لتجمعها معاً. ثم اجمعها وبسّط العبارة.

التبسيط باستعمال خاصية التوزيع

مثال 4

أوجد ناتج: $3x(2x^2 - 4x + 6)$

$$3x(2x^2 - 4x + 6) = 3x(2x^2) + 3x(-4x) + 3x(6)$$

$$= 6x^3 - 12x^2 + 18x$$

تحقق من فهمك

أوجد ناتج:

$$6a^3 + 22a^2 - 40a \quad (4B)$$

$$-2a(-3a^2 - 11a + 20) \quad (4B)$$

$$8x^4 + 12x^3 - 16x^2 \quad (4A)$$

$$\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12) \quad (4A)$$

يمكن استعمال كثيرات الحدود لتمثيل مواقف من واقع الحياة.

كتابة عبارة كثيرة حدود

مثال 5 من واقع الحياة

قيادة: تتطلب أنظمة إحدى شركات النقل البري أن تكون مدة قيادة سائقي الشاحنات 10 ساعات يومياً، تتخللها فترة استراحة، فإذا قاد أحد سائقي الشركة شاحنته في فترة ما قبل الاستراحة بسرعة 90km/h، وبعد الاستراحة بسرعة 100km/h، فاكتب كثيرة حدود تمثل المسافة التي قطعها.

التعبير اللفظي	المتغير	العبارة
قاد السائق سيارته بسرعة 90 km/h في فترة ما قبل الاستراحة، و 100 km/h في فترة ما بعد الاستراحة.		
ليكن x عدد ساعات القيادة قبل الاستراحة.		$90x + 100(10 - x)$

العبارة الأصلية $90x + 100(10 - x)$

خاصية التوزيع $= 90x + 1000 - 100x$

بجمع الحدود المتشابهة $= 1000 - 10x$

فتكون كثيرة الحدود هي $1000 - 10x$

$16200 + 0.24x$

تحقق من فهمك

(5) استثمر فيصل مبلغ 90000 ريال في مشروعين أحدهما صناعي نسبة ربحه السنوي 18%، والآخر مشروع عقاري نسبة ربحه السنوي 42%، فإذا كانت x تمثل المبلغ الذي استثمره فيصل في المشروع العقاري، فاكتب كثيرة حدود تمثل ربحه في المشروعين بعد عام واحد.

ضرب كثيرات الحدود

مثال 6

أوجد ناتج: $(n^2 + 4n - 6)(n + 2)$

العبارة الأصلية $(n^2 + 4n - 6)(n + 2)$

خاصية التوزيع $= n^2(n + 2) + 4n(n + 2) + (-6)(n + 2)$

خاصية التوزيع $= n^2 \cdot n + n^2 \cdot 2 + 4n \cdot n + 4n \cdot 2 + (-6) \cdot n + (-6) \cdot 2$

بضرب وحدات الحد $= n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 8n - 6n - 12$

بجمع الحدود المتشابهة $= n^3 + 6n^2 + 2n - 12$

$6x^3 - 14x^2 + 19x - 5 \quad (6B)$

تحقق من فهمك

أوجد ناتج كل مما يأتي:

$(2x^2 - 4x + 5)(3x - 1) \quad (6B)$

$x^3 - 64 \quad (6A)$

$(x^2 + 4x + 16)(x - 4) \quad (6A)$

أمثلة إضافية

أوجد ناتج:

$-y(4y^2 + 2y - 3)$

$-4y^3 - 2y^2 + 3y$

ربح:

يقدر صاحب متجر تكلفة وحدة من سلعة معينة بالعبارة $0.001x^2 + 5x + 500$ ، كما يقدر العائد من بيع x وحدة من السلعة نفسها بالعبارة $10x$. اكتب كثيرة حدود تمثل الربح من بيع x وحدة من السلعة إذا كان الربح = العائد - التكلفة.

$-0.001x^2 + 5x - 500$

أوجد ناتج:

$(a^2 + 3a - 4)(a + 2)$

$a^3 + 5a^2 + 2a - 8$

ارشادات للدراسة

تذكر أن:

المسافة = السرعة \times الزمن



الربط مع الحياة

تعقد معظم الدول دورات تدريبية متخصصة واختبارات مشددة لقائدي الشاحنات للتأكد من مستوى تأهيلهم لقيادتها، وتوعيتهم بكيفية التعامل مع الطرق السريعة، بما يقلل المخاطر ويؤمن حركة السير.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-13 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

(22) $2a^2 - a - 2$

(23) $8x^3 + 4xy$

(24) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$

(25) $a^4 + a^3b - 3a^2b - 4ab^2 - b^3$

(32) $2g^3 + 3g^2h - 4g^3h^2$

(33) $x^2 - 3x + \frac{1}{x^3}$

(34) $b^3 + \frac{b}{a} + \frac{1}{a^2}$

(35) $2n^5 - 14n^3 + 4n^2 - 28$

(36) $8x^3 - 24x^2y + 24xy^2 - 8y^3$

مثال 1 بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$(1) \frac{6x^3}{y^3} \frac{12x^4y^2}{2xy^5} (2) \frac{(2a^3b^{-2})(-4a^2b^4)}{-8a^5b^2} (3) \frac{8a^6}{27b^3} \left(\frac{2a^2}{3b}\right)^3 (4) \frac{216g^{15}}{h^{12}} (6g^5h^{-4})^3$$

مثال 2 حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

$$(5) 3x + 4y \text{ نعم؛ } 1 (6) \frac{1}{2}x^2 - 7y \text{ نعم؛ } 2 (7) x^2 + \sqrt{x} \text{ لا } (8) \frac{ab^3 - 1}{az^4 + 3} \text{ لا}$$

$$(9) -2x^2 - 6x + 3 (10) 3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3) (11) 6x^3y - 9x^3y^2 + 12x^4y^3 (12) n^2 - 2n - 63 (n - 9)(n + 7)$$

$$(9) (x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1) (10) 9a - 2b (3a + 4b) + (6a - 6b)$$

$$(11) 3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3) (12) n^2 - 2n - 63 (n - 9)(n + 7)$$

مثال 5 رياضة: يمارس عثمان رياضي الركض السريع ورفع الأثقال مدة 75 دقيقة يومياً. وعند ركضه يحرق 10 سعرات حرارية في الدقيقة، أما عندما يرفع الأثقال فيحرق 7.5 سعرات حرارية في الدقيقة. فإذا مارس رفع الأثقال x دقيقة في أحد الأيام، فاكتب كثيرة حدود تمثل عدد السعرات الحرارية التي حرقها في ممارسته للرياضتين ذلك اليوم. $750 - 2.5x$

تمارين ومسائل

مثال 1

بسّط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$(14) \frac{20x^4}{y^2} (15) (5x^3y^{-5})(4xy^3) (16) -yz^2 \frac{-y^3z^5}{y^2z^3} (17) -\frac{z^2}{3x^2} \frac{-7x^5y^5z^4}{21x^7y^5z^2} (18) n^{20} (n^5)^4$$

مثال 2

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

$$(18) 2x^2 - 3x + 5 \text{ نعم؛ } 2 (19) a^3 - 11 \text{ نعم؛ } 3 (20) \frac{5np}{n^2} - \frac{2g}{h} \text{ لا } (21) \sqrt{m-7} \text{ لا}$$

الأمثلة 3, 4, 6

بسّط كلاً مما يأتي : (22-25) انظر الهامش

$$(22) (6a^2 + 5a + 10) - (4a^2 + 6a + 12) (23) 4x(2x^2 + y)$$

$$(24) (x - y)(x^2 + 2xy + y^2) (25) (a + b)(a^3 - 3ab - b^2)$$

مثال 5

26 طلاء: استأجر سلمان عاملين لطلاء منزله، فإذا تقاضى الأول 12 ريالاً عن كل ساعة عمل، وتقاضى الثاني 11 ريالاً عن كل ساعة عمل، واحتاج المنزل إلى 15 ساعة عمل لطلائه، فاكتب كثيرة حدود تمثل تكلفة طلاء المنزل إذا عمل الأول مدة x ساعة. $x + 165$

بسّط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً: (32-36) انظر الهامش

$$(27) \frac{y^4}{81x^4} \left(\frac{8x^2y^3}{24x^3y^2}\right)^4 (28) \frac{x^6}{16y^{14}} \left(\frac{4x^{-2}y^3}{xy^{-4}}\right)^{-2} (29) b (a^2b^3)(ab)^{-2}$$

$$(30) 36x^7y^4 (-3x^3y)^2(4xy^2) (31) \frac{2}{5}cd^4 \frac{3c^2d(2c^3d^5)}{15c^4d^2} (32) \frac{1}{4}g^2(8g + 12h - 16gh^2)$$

$$(33) x^{-2}(x^4 - 3x^3 + x^{-1}) (34) a^{-3}b^2(ba^3 + b^{-1}a^2 + b^{-2}a)$$

$$(35) (n^2 - 7)(2n^3 + 4) (36) (2x - 2y)^3$$

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط دون	14-31 , 42 , 43-53
ضمن المتوسط ضمن	15-37 , 40 , 42 , 43-53
فوق المتوسط فوق	32-53



37) **فلك:** ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس. $10^{12} \times 7.89$ تقريباً أي 250190.26 سنة تقريباً

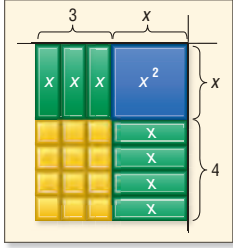
(a) ما الوقت الذي يستغرقه الضوء حتى يصل من المجرة المذكورة إلى الأرض؟

(b) ما الوقت الذي يستغرقه الضوء حتى يصل من الشمس إلى المريخ إذا كانت المسافة بينهما

$2.28 \times 10^{11} \text{ m}$ ؟ 760 ثانية؛ أي 12.67 دقيقة تقريباً

38) إذا كان $5^{2k} - 7 = 5^k + 7$ ، فما قيمة k ؟ 10

39) ما قيمة k التي تجعل $q^5 = q^{4k} \cdot q^5$ صحيحة؟ 9



40) **تمثيلات متعددة:** استعمل النموذج المجاور الذي يمثل حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$.

(a) هندسياً: مساحة المستطيل تساوي حاصل ضرب طوله في عرضه، أو جد حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$ باستعمال النموذج. $x^2 + 7x + 12$

(b) جبرياً: استعمل طريقة التوزيع بالترتيب لإيجاد حاصل ضرب $x + 3$ في $x + 4$. $x^2 + 7x + 12$

(c) لفظياً: وضح كيف يمثل النموذج كل حد في حاصل الضرب.

الربط مع الحياة

يصعب التنبؤ بالطقس على كوكب المريخ، نظراً إلى بيئته المتقلبة. ويبدو أن فيه أعماق واد، وأكبر بركان في المجموعة الشمسية.

40c) **مثّل كل حد بمستطيل أو أكثر، بحيث تمثل المساحة في النموذج ناتج حاصل الضرب.**

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا كيف سيساعدكم ما تعلموه اليوم حول قسمة وحيدات الحد عند دراسة قسمة كثيرات الحدود.

مسائل مهارات التفكير العليا

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n} \quad (41)$$

41) **برهان:** وضح كيف يمكن برهنة خاصية الأسس السالبة باستعمال خاصيتي قسمة القوى والقوة الصفرية؟

42) **تحذّر:** ما الذي يحدث للمقدار x^{-y} عندما تزداد قيمة y لكل $x > 1, y > 0$ ؟

43) **تبرير:** فسّر لماذا تكون العبارة 0^{-2} غير معرّفة؟

44) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث عبارات مختلفة مكافئة لـ x^{12} .

45) **اكتب:** وضح لماذا تُعد خصائص الأسس مهمة في الفلك؟ وضمّن توضيحك طريقة إيجاد الزمن اللازم لوصول الضوء من مصدرٍ ما إلى أحد الكواكب. **انظر الهامش.**

42) **إجابة ممكنة:** قيمة المقدار تقترب من الصفر.

43) **إجابة ممكنة:** يظهر الصفر في المقام $\frac{1}{0^2}$ مما يجعل العبارة غير معرّفة.

44) **إجابة ممكنة:** $(x^6)^2, (x^3)^4, 2x^{12} - x^{12}, x^9 \cdot x^3$

إجابات:

45) **إجابة ممكنة:** يتعامل الفلكيون بأعداد كبيرة بحيث يصعب أحياناً التعامل معها؛ لأنها تحتوي أرقاماً كثيرة، وخواص الأسس أنها تعبر عن الأعداد الكبيرة والصغيرة بطريقة مختصرة. ولكي تعرف بعد الكوكب عن مصدر الضوء فإنك تقسم المسافة على سرعة الضوء لتحسب كم من الوقت تحتاج.

تدريب على اختبار

47) أي مما يأتي ليس عاملاً لكثيرية الحدود $x^3 - x^2 - 2x$ ؟ C

A x

B $x + 1$

C $x - 1$

D $x - 2$

46) **إجابة قصيرة:** بسّط المقدار $\frac{(2x^2)^3}{12x^4}$ $\frac{2x^2}{3}$

مراجعة تراكمية

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي: (مهارة سابقة)

49) $x^2 + 2x + 6 + 3x = (x + 3)(x + 2)$

48) $12ax^3 + 20bx^2 + 32cx = 4x(3ax^2 + 5bx + 8c)$

51) $2my + 7x + 7m + 2xy = (m + x)(2y + 7)$

50) $12y^2 + 9y + 8y + 6 = (3y + 2)(4y + 3)$

53) $10x^2 - 14xy - 15x + 21y = (2x - 3)(5x - 7y)$

52) $8ax - 6x - 12a + 9 = (2x - 3)(4a - 3)$

128 الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

تنوع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اكتب $3^0, (4y^3x)^0, 0^0, \left(\frac{x^5}{y^2}\right)^0$ على السبورة. واطلب إلى الطلاب تبسيط كل عبارة. جميعها تساوي 1 ما عدا 0^0 .

شجّع الطلاب على استعمال $0^m - m$ ليفسروا أن 0^0 لا يساوي 1 مثل بقية العبارات. يفسر ذلك على النحو: $0^m - m = \frac{0^m}{0^m}$ ، وبما أن $0^m = 0$ فإن العبارة تحوي قسمة على الصفر وهذا غير معرف. لذا فإن 0^0 غير معرفة.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 3

دون المتوسط **دون** ضمن **ضمن** فوق المتوسط **فوق**

تدريبات إعادة التعليم (16) دون **دون** تدريبات إعادة التعليم - تزمة (17) **دون**

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-3 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على كثيرات الحدود

كثيرات الحدود وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد.

الحدود المتشابهة الحدود التي لها المتغير نفسه مرفوع للقوة نفسها.

لجمع كثيرات حدود وطرحها أجمع العملية وأضع الحدود المتشابهة.

بسطة $4xy^2 + 12xy - 7x^2y - (20xy + 5xy^2 - 8x^2y)$

$4xy^2 + 12xy - 7x^2y - 20xy - 5xy^2 + 8x^2y$

$4xy^2 + 12xy - 7x^2y - 20xy - 5xy^2 + 8x^2y$

$= (4xy^2 - 5xy^2) + (12xy - 20xy) + (-7x^2y + 8x^2y)$

$= -xy^2 - 8xy + x^2y$

توزيع إشارة الطرح.

تجميع الحدود المتشابهة.

وضع الحدود المتشابهة أو جمعها.

تستعمل الصيغة المختصرة لخاصية التوزيع في ضرب ثنائي حد بطريقة التوزيع بالتدريج الآتية:

لضرب ثنائي الحد (كثرتي حدود كل منها من حدين) أجمع نواتج الضرب التالية:

الحدين الأولين، والحدين الطرفين، والحدين الأوسطين، والحدين الأخيرين.

أوجد نتائج $(6x - 5)(2x + 1)$

$(6x - 5)(2x + 1) = 6x \cdot 2x + 6x \cdot 1 + (-5) \cdot 2x + (-5) \cdot 1$

$= 12x^2 + 6x - 10x - 5$

$= 12x^2 - 4x - 5$

بسط كلاهما يأتي.

$(7y^2 + 12xy - 5x^2) + (6xy - 4y^2 - 3x^2)$ (1) $6x^2 - 3x + 2 - (4x^2 + x - 3)$

$3y^2 + 18xy - 8x^2$ (2) $2x^2 - 4x + 5$

$27x^2 - 5y^2 + 12xy - 14x^2$ (4) $(-4m^2 - 6m) - (6m + 4m^2)$ (3)

$13x^2 + 7y^2$ (5) $-8m^2 - 12m$

$24p^2 - 15p^2 + 3p - 15p^2 + 13p^2 - 7p$ (6) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{8}x^2$

$9p^2 - 2p^2 - 4p$ (7) $-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}xy + \frac{1}{2}y^2$

أوجد نتائج الضرب في كل ما يأتي.

$7a(6 - 2a - a^2)$ (8) $2x(3x^2 - 5)$ (7)

$42a - 14a^2 - 7a^3$ (9) $6x^2 - 10x$

$(x + 1)(2x^2 - 3x + 1)$ (10) $(x^2 - 2)(x^2 - 5)$ (9)

$2x^2 - x^2 - 2x + 1$ (11) $x^4 - 7x^2 + 10$

$(x - 1)(x^2 - 3x + 4)$ (12) $(2n^2 - 3)(n^2 + 5n - 1)$ (11)

$x^3 - 4x^2 + 7x - 4$ (17) $2n^4 + 10n^3 - 5n^2 - 15n + 3$

الفصل 3، كثيرات الحدود ونواتجها 17 الصف، الثاني الثانوي

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-3 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على كثيرات الحدود

ضرب وحيدات الحد وقسمتها، الأسس السالبة وسيلة للتعبير عن الضرب بعمكوس العدد.

الأسس سالبة $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ و $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ أي عدد حقيقي $a \neq 0$ وأي عدد صحيح n

عندما تبسط عبارة فذلك تعيد كتابتها على أن لا تتضمن قوة لثقة أو أسس سالبة. ويظهر كل أساس مرة واحدة، وتكون الكسور في أبسط صورة، واختصاصات التالية مفيدة في تبسيط العبارات.

ضرب القوى $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ أي عدد حقيقي a وأعداد صحيحة m و n

قسمة القوى $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ أي عدد حقيقي $a \neq 0$ وأعداد صحيحة m و n

أي عددين حقيقيين a, b و عددين صحيحين m, n

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

خصائص القوى $(ab)^n = a^n b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $a \neq 0, b \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ $a \neq 0, b \neq 0$

بسطة. افترض أن المتغيرات لا تساوي صفراً.

$(-m)^3$ (a) $(3m^2n^{-2})(-5mn)^2$

$(-m)^3 = -\frac{m^3}{1}$ (b) $(3m^2n^{-2})(-5mn)^2 = 3m^2n^{-2} \cdot 25m^2n^2$

$(-m)^3 = -\frac{m^3}{1}$ $(2m)^{-2} = \frac{1}{4m^2}$ $= 75m^4n^{-2+2}n^2$

$= -m^3 \cdot 4m^2 = -4m^5$ $= 75m^4$

تساويين.

بسطة متفرضا أن المتغيرات لا تساوي صفراً

$a^m (a^4)^5$ (3) b^6 (2) $a^4 \cdot a^{11} \cdot a^6$ (1)

$\frac{x^2}{y^2} \left(\frac{x^3y}{xy^2}\right)^2$ (6) $\frac{y^2}{x^2} \left(\frac{a^2b}{a^2b}\right)^{-1}$ (5) $\frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{x^3y}{xy^2}$ (4)

$\frac{2m^2}{n^2} \cdot \frac{8m^3n^2}{4mn^2}$ (9) $m^{15} \cdot m^7 \cdot m^8$ (8) $\frac{1}{2}(-5a^2b)^2(abc)^2$ (7)

$\frac{2mn^2(3m^2n)^2}{12m^2n^2}$ (12) $4j(-j^{-2}k)(3jk^{-1})$ (11) $\frac{2^2c^2d^2}{2^2c^2d^2}$ (10)

$\frac{3}{2}m^2$ (16) $\frac{12j}{k^3}$ (11)

الفصل 3، كثيرات الحدود ونواتجها 16 الصف، الثاني الثانوي

تدريبات حل المسألة (19) **دون** **ضمن** **فوق**

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-3 تدريبات حل المسألة

العمليات على كثيرات الحدود

1) الأرض، يقدر طول قطر الكرة الأرضية 1.2756×10^4 كيلومتر تقريبا، ويمكن إيجاد مساحة سطح الكرة الأرضية باستعمال القانون $SA = 4\pi r^2$.

قوالب، طلب جمال من صانع أشربة القوالب أن يصنع شراباً لقهوه، فإذا كانت قاعدة شرابه مثلثة الشكل بطول $2x + 1$ وارتفاع $4x + 6$.

أوجد مساحة الشراب.

$4x^2 + 8x + 3$

2) الحجم، يعطى حجم متوازي المستطيلات من خلال ضرب الطول في العرض في الارتفاع، فإذا كان لدى خالد صندوقاً على شكل متوازي مستطيلات طوله b^2 وحدة، وعرضه a وحدة وارتفاعه c وحدة.

فما حجم صندوق خالد؟ ضع إجابتك في أبسط صورة.

$a^2b^2 + ab^2c$

3) إنشاء، بُني وصيف مستطيل الشكل حول بركة مربعة طول ضلعها s وحدة، فإذا كان طول الوصيف يزيد 5 وحدات عن مثل طول ضلع البركة وعرضه يزيد 3 وحدات عن طول ضلع البركة، في مساحة الوصيف بدلالة s .

$2s^2 + 11s + 15$

الفصل 3، كثيرات الحدود ونواتجها 19 الصف، الثاني الثانوي

تدريبات المهارات (18) **دون** **ضمن** **فوق**

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-3 تدريبات المهارات

العمليات على كثيرات الحدود

بسطة متفرضا أن المتغيرات لا تساوي صفراً.

$a^3 \cdot a^2 \cdot a^3$ (2) $b^4 \cdot b^3$ (1)

$x^3 \cdot x^{-4} \cdot x$ (4) $a^{-1} \cdot a^{-3}$ (3)

$-2gh(g^2h^2)$ (6) $(2x)^2(4y)^2$ (5)

$\frac{24uz^2}{3w^2z^2} \cdot \frac{8z^2}{w^2}$ (8) $10x^2y(10xy^2)$ (7)

$\frac{-10p^2r}{-5p^2r} \cdot \frac{2f}{p^2}$ (10) $\frac{6a^2bc^3}{36a^2b^2c}$ (9)

$(5d + 5) - (d + 1)$ (12) $3g + 12$ (11)

$(-2f - 3f - 5) + (-2f^2 - 3f + 8)$ (14) $(x^2 - 3x - 3) + (2x^2 + 7x - 2)$ (13)

$x^2(2x + 9)$ (16) $-5(2c - d^2)$ (15)

$(2x - 3)(3x - 5)$ (18) $6x^2 - 19x + 15$ (17)

$(3y + 4)(2y - 3)$ (20) $6y^2 - y - 12$ (20)

$(3w + 1)^2$ (22) $9w^2 + 6w + 1$ (22)

الفصل 3، كثيرات الحدود ونواتجها 18 الصف، الثاني الثانوي



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 3

مصادر الدرس 3 - 3	
دون	فوق
<p>دون ضمن فوق</p> <p>التدريبات الإثرائية (20)</p> <p>الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p>3-3 التدريبات الإثرائية كثيرات حدود بمعاملات كسرية</p> <p>قد يكون لحذو كثيرات الحدود معاملات على صورة كسور ما دام لا يوجد متغيرات في المقام. وتجري الحسابات على كثيرات الحدود بوجود معاملات كسرية بالطريقة المستخدمة في حسابات الأعداد الكسرية. يسط. اكتب جمع المعاملات في صورة كسور.</p> <p>1) $\frac{31}{10}m + \frac{5}{12}n - \frac{55}{21}p - (\frac{3}{5}m - \frac{2}{7}p - \frac{1}{3}n) - (\frac{7}{8}p - \frac{5}{2}m - \frac{3}{4}n)$</p> <p>2) $\frac{3}{8}x - \frac{25}{21}y - \frac{7}{20}z - (\frac{3}{2}x - \frac{4}{3}y - \frac{5}{4}z) + (\frac{1}{4}x + y + \frac{2}{5}z) + (-\frac{7}{8}x - \frac{6}{7}y + \frac{1}{2}z)$</p> <p>3) $\frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{3}ab - \frac{1}{2}b^2 - (\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2) + (\frac{5}{6}a^2 + \frac{2}{3}ab - \frac{3}{4}b^2)$</p> <p>4) $\frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{6}ab - \frac{7}{12}b^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2 - (\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{5}{6}b^2)$</p> <p>5) $\frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{2}a^2b + \frac{25}{22}ab^2 - \frac{1}{6}b^3 - (\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2) \cdot (\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b)$</p> <p>6) $\frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{25}a^3 + \frac{4}{35}a^2 - \frac{4}{49}a - (\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{5}a + \frac{2}{7}) \cdot (\frac{2}{3}a + \frac{1}{5}a^2 - \frac{2}{7}a)$</p> <p>7) $-\frac{1}{9}a^3 + \frac{79}{120}a^2 - \frac{3}{5}a^3 - \frac{49}{40}a + 1 - (\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x - 2) \cdot (\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2})$</p> <p>8) $\frac{1}{36}a^2 - \frac{5}{36}a^3 + \frac{7}{36}a^2 + \frac{1}{18}a^2 - \frac{1}{6}a - \frac{1}{18} - (\frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x^2) \cdot (\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x)$</p> <p>المصدر: الكتاب الثانوي</p>	<p>فوق ضمن دون</p> <p>كتاب التمارين (17)</p> <p>3-3 العمليات على كثيرات الحدود</p> <p>يسط. كلًا مما يأتي مفترضًا أن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:</p> <p>1) $a^7 \cdot a^2$ 2) $a^7 \cdot a^2 \cdot a^3$</p> <p>3) $t^3 \cdot t^4$ 4) $\frac{1}{x^2} \cdot x^4 \cdot x^4 \cdot x^4$</p> <p>5) $64f^{24} \cdot (2f^4)^6$ 6) $\frac{-8c^6}{b^3} \cdot (-2b^{-2}c)^3$</p> <p>7) $64u^2 \cdot 8u(2u)^3$ 8) $-\frac{20f^4t^2}{v^5} \cdot (4d^4t^2v^3) \cdot (-5dt^3v^{-1})$</p> <p>9) $-\frac{4m^3y^2}{3} \cdot \frac{12m^2y^6}{-9my^4}$ 10) $-\frac{a^4}{3x^2} \cdot \frac{-6a^2x^2}{18ax^2}$</p> <p>11) $\frac{27x^2(-x)}{16x^2}$ 12) $\frac{4}{9y^2z^{12}} \cdot (\frac{2}{3m^2z^3})^2$</p> <p>13) $-\frac{25b}{10z^2} \cdot (4w^3z^{-3})(8w)^2$ 14) $m^3n^2y^{30} \cdot (m^2n)(m^2n^2y^6)^2$</p> <p>15) $\frac{y^4}{4x^2} \cdot \frac{(2xy^2)^{-2}}{(-xy^2)^2}$ 16) $\frac{15x^{11}}{y^3} \cdot \frac{(3x^{-2}y^3)(5xy^{-7})}{(x^{-3})^2y^{-2}}$</p> <p>17) $-\frac{4v^3}{m^2} \cdot \frac{-20(m^2v)(-v)}{5(-v)(-m^2)}$ 18) $11u^2 - 7(3u^2 + 1) + (8u^2 - 8)$</p> <p>19) $(6w - 11w^2) - (4 + 7w^2) - 18w^2 + 6w - 4$ 20) $w^3 + 8t^3 + (w + 2t)(w^2 - 2wt + 4t^2)$</p> <p>21) استمتمار، استمتمار سلطان 15000 ريال في مشروعين، في السنة الأولى زاد المبلغ المستثمر في المشروع الأول بنسبة 3.8%، وزاد المبلغ المستثمر في المشروع الثاني بنسبة 6%. اكتب كثيرة حدود تمثل المبلغ المتجمع في نهاية السنة الأولى من كلا المشروعين، مفترضًا أن x هو المبلغ المستثمر في المشروع الأول. $-0.022x + 15900$</p> <p>22) هندسة: تُعطي مساحة قاعدة صندوق على شكل متوازي مستطيلات بالعلاقة $2x^2 + 4x - 3$ وحدة مربعة. فإذا كان ارتفاع الصندوق يساوي x وحدة، فاطبب كثيرة حدود تمثل حجم الصندوق.</p> <p>$2x^3 + 4x^2 - 3x$</p> <p>17</p>

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-4

قسمة وحيدات الحد.

الدرس 3-4

قسمة كثيرات الحدود باستعمال القسمة الطويلة.

قسمة كثيرات الحدود باستعمال القسمة التركيبية.

ما بعد الدرس 3-4

استعمال طرائق تتضمن التحليل للعوامل لإعادة كتابة معادلات كثيرة حدود وحلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

• ما عرض غلاف الكتاب؟

• $10x$ بوصات

• ما طول الغلاف؟

• $(14x + 2f)$ بوصة

• إذا علمت أن عرض الغلاف $10x$

بوصات، ومساحته $(140x^2 + 60x)$

بوصة مربعة، فكيف يمكنك إيجاد طول

الغلاف؟ اقسّم مساحة الغلاف على

عرضه.

فيما سبق:

درست قسمة وحيدات الحد.

والآن:

- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة الطويلة.
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة التركيبية.

المفردات:

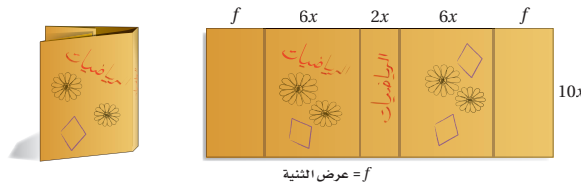
القسمة التركيبية
Synthetic division

obeikaneducation.com

إرشادات للدراسة

خطوات خوارزمية قسمة كثيرة حدود على أخرى:
- اكتب كثيرة الحدود في كل من المقسوم والمقسوم عليه في الصورة القياسية.
- ابدأ بقسمة الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه، وضع الإجابة في المكان المخصص لذلك.
- اضرب ناتج القسمة في الخطوة السابقة في المقسوم عليه، وكتب الإجابة تحت المقسوم، واطرحه من المقسوم.
- استمر بقسمة الحد الثاني... إلخ، حتى تصل إلى أن يكون باقي القسمة 0، أو كثيرة حدود درجتها أقل من درجة المقسوم عليه.

لماذا؟
تحتاج سلمى إلى $(140x^2 + 60x)$ بوصة مربعة من الورق لعمل غلاف لكتاب طوله $10x$ بوصات. ويظهر الشكل أدناه الجزء الذي تركته للثني على جانبي الغلاف. فإذا كان عرض كعب الغلاف $2x$ بوصة، وعرض كل من الغلاف الأمامي والخلفي $6x$ بوصة، فما عرض كل من جزأي الثني؟ يمكنك استعمال قسمة كثيرات الحدود لمساعدتك على إيجاد الجواب.



القسمة الطويلة: تعلمت في الدرس السابق قسمة وحيدات الحد، لذا يمكنك قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد مستعملاً المهارات نفسها.

مثال 1

قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

$$\text{بسّط العبارة: } \frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy}$$

بقسمة كل حد في البسط على المقام

$$\text{بإجراء القسمة}$$

$$y^1 - 1 = y^0 = 1$$

$$\frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy} = \frac{6x^4y^3}{3xy} + \frac{12x^3y^2}{3xy} - \frac{18x^2y}{3xy}$$

$$= \frac{6}{3} \cdot x^4 - 1y^3 - 1 + \frac{12}{3} \cdot x^3 - 1y^2 - 1 - \frac{18}{3} \cdot x^2 - 1y^1 - 1$$

$$= 2x^3y^2 + 4x^2y - 6x$$

تحقق من فهمك بسّط كل مقدار فيما يأتي: $5c^3d - 4f + 1$ (1A)

$$(1A) (4cdf) \div (20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \quad (1B) (18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1} \quad (1C) 9x^2yz$$

يمكنك استعمال عملية مشابهة للقسمة الطويلة لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى. وتسمى خطواتها خوارزمية القسمة.

مثال 2

قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$.

$$\begin{array}{r} x + 8 \\ x - 5 \overline{) x^2 + 3x - 40} \\ \underline{(-) x^2 - 5x} \\ 8x - 40 \\ \underline{(-) 8x - 40} \\ 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $x + 8$ ، والباقي 0.

تحقق من فهمك استعمل القسمة الطويلة لإيجاد الناتج في كل مما يأتي:

$$(2A) (x^2 + 7x - 30) \div (x - 3) \quad (2B) (x^2 - 13x + 12) \div (x - 1) \quad (2C) x - 12$$

مصادر الدرس 3-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (132)	• تنويع التعليم، ص (132)	• تنويع التعليم، ص (134)
كتاب التمارين	• ص (18)	• ص (18)	• ص (18)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

قد ينتج باقٍ عن قسمة كثيرتي حدود كما في قسمة الأعداد الكلية، فمثلاً عند إيجاد $3 \div 11$ يكون الناتج 3 والباقي 2، وتكتب عادةً على الصورة $3 + \frac{2}{3}$. ويمكن كتابة نتيجة قسمة كثيرتي حدود مع باقٍ بالطريقة نفسها.

مثال 3 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1}$ ؟

A $a + 10 - \frac{19}{3 - a}$ B $-a + 10$

C $-a - 10 + \frac{19}{3 - a}$ D $-a - 10 - \frac{19}{3 - a}$

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن العامل الثاني مرفوع للأس -1، فهذه إذن مسألة قسمة.

$$(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = \frac{a^2 + 7a - 11}{3 - a}$$

حل فقرة الاختبار

$$\begin{array}{r} -a - 10 \\ -a + 3 \sqrt{a^2 + 7a - 11} \\ \underline{-a + 3} \\ 10a - 11 \\ \underline{-a^2 - 3a} \\ 7a - (-3a) = 10a \\ \underline{-10(-a + 3) = 10a - 30} \\ -11 - (-30) = 19 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $-a - 10$ ، والباقي 19.

لذا فإن $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = -a - 10 + \frac{19}{3 - a}$ ، ومن ثم تكون الإجابة هي البديل C.

تحقق من فهمك

3) أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(r^2 + 5r + 7)(1 - r)^{-1}$ ؟

A $r - 6 + \frac{13}{1 - r}$ B $-r - 6 + \frac{13}{1 - r}$

C $r + 6 - \frac{13}{1 - r}$ D $r + 6$

القسمة التركيبية: الطريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

أضف إلى

طوبتك

مفهوم أساسي

القسمة التركيبية

- الخطوة 1:** اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازلياً بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $X - r$ ، ثم اكتب الثابت r في الصندوق، وكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.
- الخطوة 2:** اضرب المعامل الأول في r ، وكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه.
- الخطوة 3:** اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه.
- الخطوة 4:** كرر الخطواتين 2، 3 على ناتج الجمع في الخطوة السابقة حتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.

130 الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

القسمة الطويلة

مثال 1 يبين كيفية قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد.

مثال 2 يبين كيفية قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد، باستعمال خوارزمية القسمة.

مثال 3 يبين كيفية حل فقرة اختبار من متعدد من اختبار، تتضمن هذه الفقرة قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد مع وجود باقٍ.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

1 بسط العبارة:

$$\frac{5a^2b - 15ab^3 + 10a^3b^4}{5ab} = a - 3b^2 + 2a^2b^3$$

2 استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $(x^2 - 2x - 15) \div (x - 5)$

$$x + 3$$

3 تدريب على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة:

$$D \quad (a^2 - 5a + 3)(2 - a)^{-1}$$

$$A \quad a + 3$$

$$B \quad -a + 3 + \frac{3}{2 - a}$$

$$C \quad -a - 3 + \frac{3}{2 - a}$$

$$D \quad -a + 3 - \frac{3}{2 - a}$$

إرشادات للمعلم الجديد

استراتيجية الإجابة عن فقرات اختبار

وضّح للطلاب أن العبارة $3 - a$ في مثال 3 يعاد كتابتها على الصورة $3 - a$ قبل البدء بعملية القسمة؛ وذلك ليكون كل من البسط والمقام في ترتيب تنازلي. الخطوة الأولى في القسمة الطويلة تستبعد البديل A. ويمكن للطلاب استبعاد البديل B بضرب $(-a + 10)$ في $(-a + 3)$ وملاحظة أن ناتج الضرب لا يساوي $a^2 + 7a - 11$.

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج: $(2x^3 - 13x^2 + 26x - 24) \div (x - 4)$.

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 2 \quad -13 \quad 26 \quad -24} \\ \underline{2} \\ 0 \end{array}$$

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم. و اكتب الثابت r في الصندوق، وهو في هذا المثال 4. ثم اكتب المعامل الأول وهو 2 أسفل الخط الأفقي.

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 2 \quad -13 \quad 26 \quad -24} \\ \underline{8} \\ 2 \end{array}$$

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في الثابت r : $8 = 4 \times 2$ ، و اكتب الناتج أسفل المعامل الثاني.

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 2 \quad -13 \quad 26 \quad -24} \\ \underline{8} \\ 2 \end{array}$$

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني: $-13 + 8 = -5$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 2 \quad -13 \quad 26 \quad -24} \\ \underline{8} \\ 2 \end{array}$$

الخطوة 4: اضرب المجموع وهو -5 في الثابت r : $-5 \times 4 = -20$ ،

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 2 \quad -13 \quad 26 \quad -24} \\ \underline{8} \\ 2 \end{array}$$

و اكتب الناتج أسفل المعامل التالي، ثم اجمع:

$$26 + (-20) = 6 \text{ . اضرب المجموع وهو 6 في الثابت } r:$$

$$6 \times 4 = 24 \text{ ، و اكتب ناتج الضرب تحت المعامل التالي،}$$

$$\text{ثم اجمع: } -24 + 24 = 0 \text{ .}$$

إذن ناتج القسمة هو $2x^2 - 5x + 6$ ، والباقي 0.

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 6 \\ \times \quad x - 4 \\ \hline -8x^2 + 20x - 24 \\ \hline 2x^3 - 5x^2 + 6x \\ \hline 2x^3 - 13x^2 + 26x - 24 \end{array}$$

تحقق: اضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه، فيكون الناتج هو المقسوم.

$$3x^2 - 2x + 7 \quad (4B) \quad 2x^2 - 3x + 5 \quad (4A)$$

تحقق من فهمك

استعمل القسمة التركيبية لتجد ناتج القسمة في كل مما يأتي:

$$(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3) \quad (4A)$$

$$(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2) \quad (4B)$$

$$4a^3 - 8a^2 + 18a - 40 + \frac{92}{a+2} \quad (4C) \quad (4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2)$$

$$6b^3 + 4b^2 + 8b + 28 + \frac{42}{b-2} \quad (4D) \quad (6b^4 - 8b^3 + 12b - 14) \div (b - 2)$$

القسمة التركيبية

مثال 4 يبين كيفية استعمال القسمة التركيبية لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

مثال 5 يبين كيفية استعمال القسمة التركيبية لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد عندما يكون معامل x في المقسوم عليه لا يساوي واحد.

مثال إضافي

4 استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج: $(x^3 - 4x^2 + 6x - 4) \div (x - 2)$
 $x^2 - 2x + 2$

تنبيه!

تجنب الأخطاء في تمارين "تحقق من فهمك" ذكّر الطلاب أن يضعوا معاملات الحدود الناقصة صفرًا عند القسمة.

المحتوى الرياضي

قسمة كثيرات الحدود يمكنك استعمال القسمة التركيبية لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود بحيث ترتب الحدود في كل من المقسوم والمقسوم عليه ترتيباً تنازلياً بحسب درجاتها. ضع معاملات الحدود الناقصة صفرًا. وإن لم يكن المقسوم عليه على الصورة $x - r$ ، فاقسم حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه على معامل الحد الأول في المقسوم عليه، ثم استعمل القسمة التركيبية.

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات، وحدد لكل مجموعة إحدى مسائل قسمة كثيرات الحدود. واطلب إلى كل مجموعة تجهيز عرض تقديمي يبين كيفية استعمال القسمة التركيبية في إيجاد ناتج القسمة. ثم ضع هذه العروض على موقع الصف الإلكتروني؛ لتتيح للطلاب جميعاً مشاهدتها.

تنبيه!

القسمة التركيبية تذكر أن الحدود تجمع ولا تطرح عند إجراء القسمة التركيبية.

إرشادات للدراسة

إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معاملته صفرًا. فمثلاً إذا كان المقسوم $2x^3 - 4x^2 + 6$ فاكتبه في صورة $2x^3 - 4x^2 + 0x + 6$

ولإجراء القسمة التركيبية يجب أن يكون المقسوم عليه على الصورة $x - r$ ، وإذا كان معامل x في المقسوم عليه لا يساوي الواحد، فيجب إعادة كتابة عبارة القسمة بحيث يمكنك استعمال القسمة التركيبية.

مثال 5 معامل x في المقسوم عليه لا يساوي 1

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج: $(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div (3x + 1)$.

إعادة كتابة العبارة ليكون معامل x في المقسوم عليه 1 وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على 3.

بتبسيط كل من البسط والمقام

$$\frac{3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x}{3x + 1} \div 3 = \frac{(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div 3}{(3x + 1) \div 3} = \frac{x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x}{x + \frac{1}{3}}$$

وبما أن المقسوم لا يحتوي حدًا ثابتًا، فضع صفرًا مكانه.

$$x - r = x + \frac{1}{3}, r = -\frac{1}{3} \rightarrow -\frac{1}{3} \begin{array}{r} 1 \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \hline 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \Big| -\frac{2}{3}$$

وعليه فإن الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x+1}$. وأخيرًا بسط الكسر

بإعادة كتابة الكسر على صورة عبارة قسمة

$$x + \frac{1}{3} = \frac{3x}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3x+1}{3}$$

بالضرب في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3x+1} = \frac{2}{3x+1}$$

بالتبسيط

وعليه يكون الناتج هو: $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x+1}$.

تحقق: أوجد ناتج القسمة مستعملًا القسمة الطويلة.

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x + 2 \\ 3x + 1 \overline{) 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x} \\ \underline{(-) 3x^4 + x^3} \\ -6x^3 + x^2 + 7x \\ \underline{(-) -6x^3 - 2x^2} \\ 3x^2 + 7x \\ \underline{(-) 3x^2 + x} \\ 6x \\ \underline{(-) 6x + 2} \\ -2 \end{array}$$

وعليه يكون الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x+1}$. ✓

تحقق من فهمك ✓

(5A) $4x^3 - 2x^2 - x + 1 + \frac{3}{2x+1}$ (5B) $2y^4 - 4y - 1 + \frac{3}{4y-1}$

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج كل مما يأتي:

(5A) $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$ (5B) $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$

(5C) $(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4)$ (5D) $(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div (3c - 4)$

تنبيه!

قسمة جميع الحدود

تذكر أن تقسم جميع الحدود في البسط والمقام على معامل x في المقام.

مثال إضافي

5

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج: $(4y^3 - 6y^2 + 4y - 1) \div (2y - 1)$

$$2y^2 - 2y + 1$$

إرشادات للمعلم الجديد

تعزيز المفاهيم اطلب إلى الطلاب

مناقشة إذا كانوا يفضلون استعمال: القسمة الطويلة أم القسمة التركيبية، مبررين اختيارهم.

$$3b^2 + 4b - 1 + \frac{2}{5b-4} \quad (5C)$$

$$2c^2 - 3c - 2 \quad (5D)$$

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في الحفاظ على تركيزهم خلال تنفيذهم الخطوات المتتالية للقسمة الطويلة،

فقم بتشجيعهم على مقارنة نتائج كل خطوة مع زملائهم، وبذلك يمكنهم طرح الأسئلة واكتشاف الأخطاء قبل الانتهاء من حل المسألة.

$$3z^3 - 15z^2 + 36z - 105 + \frac{309}{z+3} \quad (5)$$

$$y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 5y + 10 \quad (6)$$

بسط كل عبارة فيما يأتي:

مثال 1

$$3a + 5b - 6 \quad (3a^2b - 6ab + 5ab^2)(ab)^{-1} \quad (2) \quad 4y + 2x - 2 \quad \frac{4xy^2 - 2xy + 2x^2y}{xy} \quad (1)$$

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلِّ ممَّا يأتي:

المثالان 2, 4

$$2a - 6 - \frac{2}{a+1} \quad (2a^2 - 4a - 8) \div (a + 1) \quad (4) \quad x - 8 - \frac{4}{x+2} \quad (x^2 - 6x - 20) \div (x + 2) \quad (3)$$

$$(y^5 - 3y^2 - 20) \div (y - 2) \quad (6) \quad (3z^4 - 6z^3 - 9z^2 + 3z - 6) \div (z + 3) \quad (5)$$

(7) اختيار من متعدد: أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(x^2 + 3x - 9)(4 - x)^{-1}$ ؟ A

مثال 3

$$-x - 7 - \frac{19}{4-x} \quad D \quad x + 7 - \frac{19}{4-x} \quad C \quad -x - 7 \quad B \quad -x - 7 + \frac{19}{4-x} \quad A$$

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج كل مما يأتي: (8) $2x + 1 + \frac{3}{x+1}$ (9) $6a + 6 + \frac{21}{3a-2}$

مثال 5

$$(18a^2 + 6a + 9) \div (3a - 2) \quad (9) \quad (10x^2 + 15x + 20) \div (5x + 5) \quad (8)$$

$$3y + 5 \quad \frac{27y^2 + 27y - 30}{9y - 6} \quad (11) \quad 4b - 3 + \frac{39}{3b+8} \quad \frac{12b^2 + 23b + 15}{3b+8} \quad (10)$$

التدريب 3

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-11 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير عند تطبيق خوارزمية القسمة، شجع الطلاب على حل مثال على قسمة أعداد بسيطة مثل $8 \div 5 = ?$ ليساعدهم على تذكر طريقة كتابة الباقي بوصفه جزءاً من ناتج القسمة.

إجابات:

$$(x^2 + y^2)(x + y) \quad (29)$$

$$\frac{4c^2d - 3d}{2} \quad (30)$$

$$-a^2b + a - \frac{2}{a} \quad (31)$$

$$n^2 - n - 1 \quad (32)$$

$$p^2 - p - 4 - \frac{9}{p+3} \quad (33)$$

$$3z^4 - z^3 + 2z^2 - 4z + 9 - \frac{13}{z+2} \quad (34)$$

تدرب وحل المسائل

مثال 1

بسط كل عبارة فيما يأتي: (12) $3a^2b - 2ab^2$ (13) $x + 3y - 2$ (14) $7g^2h + 3g - 2h^2$

$$\frac{7g^3h^2 + 3g^2h - 2gh^3}{gh} \quad (14) \quad \frac{5x^2y - 10xy + 15xy^2}{5xy} \quad (13) \quad \frac{24a^3b^2 - 16a^2b^3}{8ab} \quad (12)$$

$$\frac{9n^3p^3 - 18n^2p^2 + 21n^2p^3}{3n^2p^2} \quad (17) \quad \frac{16c^4d^4 - 24c^2d^2}{4c^2d^2} \quad (16) \quad \frac{4a^3b - 6ab + 2ab^2}{2ab} \quad (15)$$

$$3np - 6 + 7p \quad (18) \quad 4c^2d^2 - 6 \quad (19) \quad 2a^2 + b - 3 \quad (20)$$

(18) مخبز: يقدر عدد أرغفة الخبز التي ينتجها مخبز في اليوم بالعبارة: $-w^2 + 16w + 1000$ ، حيث w عدد العاملين في المخبز. اقم العبارة المعطاة على w لتجد معدل عدد الأرغفة التي ينتجها العامل الواحد.

$$-w + 16 + \frac{1000}{w} \quad (22) \quad x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 52x + 208 + \frac{832}{x-4}$$

الأمثلة 2,4,5

$$(b^3 - 4b^2 + b - 2) \div (b + 1) \quad (20) \quad a - 10 - \frac{6}{a+2} \quad (a^2 - 8a - 26) \div (a + 2) \quad (19)$$

$$(x^5 - 4x^3 + 4x^2) \div (x - 4) \quad (22) \quad (z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4)(z - 1)^{-1} \quad (21)$$

$$(g^4 - 3g^2 - 18) \div (g - 2) \quad (24) \quad \frac{y^3 + 11y^2 - 10y + 6}{y + 2} \quad (23)$$

$$2x + 3, 3x + 5 \quad \frac{6x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x}{3x + 1} \quad (26) \quad (6a^2 - 3a + 9) \div (3a - 2) \quad (25)$$

(27) هندسة: صمّم صندوق على شكل متوازي مستطيلات بحيث ترتبط أبعاده بعلاقة معينة بدلالة المتغير x . فإذا كان حجم الصندوق $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$ ، وارتفاعه $x + 2$ ، فما عرضه، وما طوله؟(28) فيزياء: يرتبط فرق جهد التيار V بشدة التيار I ، والقوة P بالمعادلة $V = \frac{P}{I}$. فإذا عبّر عن القوة بالدالة $P(t) = t^3 + 9t^2 + 26t + 24$ ، وشدة التيار بالمعادلة $I = t + 4$ ، فاكتب عبارة تمثل فرق الجهد V .إجابة ممكنة: $V(t) = t^2 + 5t + 6$

بسط كل عبارة فيما يأتي: (29-34) انظر الهامش.

$$(a^3b^2 - a^2b + 2b)(-ab)^{-1} \quad (31) \quad (28c^3d^2 - 21cd^2) \div (14cd) \quad (30) \quad (x^4 - y^4) \div (x - y) \quad (29)$$

$$\frac{3z^5 + 5z^4 + z + 5}{z + 2} \quad (34) \quad \frac{p^3 + 2p^2 - 7p - 21}{p + 3} \quad (33) \quad \frac{n^3 + 3n^2 - 5n - 4}{n + 4} \quad (32)$$

الدرس 3-4 قسمة كثيرات الحدود 133

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	39-51 ، 37 ، 12-28
ضمن المتوسط	13-27 فردي ، 28 ، 30 ، 32 ، 34-37 ، 39-51
فوق المتوسط	29-51

35 أعمال: يمكن تقدير عدد النسخ المبيعة من مجلة استعمال المعادلة $n = \frac{3500a^2}{a^2 + 100}$ ؛ حيث a المبلغ الذي تنفقه المجلة على الإعلان بمئات الريالات، و n عدد النسخ المبيعة من المجلة.

- (a) أجر عملية القسمة المعبر عنها بالمقدار: $\frac{3500a^2}{a^2 + 100} - \frac{35000}{a^2 + 100}$
 (b) كم نسخة بيعت من المجلة إذا أنفق على الدعاية والإعلان 6000 ريال؟ **3500 نسخة تقريباً**



الربط مع الحياة

شركات الإعلان هي شركات تقوم بالأنشطة الإعلانية نيابة عن الشركات في وسائل الإعلان المختلفة، فتقوم بتصميم الإعلانات والشعارات، والعلامات المميزة.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 36 بطاقات الجبر وعمليات جبرية لقسمة كثيرات الحدود.

تنبيه لحل سؤال!

يتطلب السؤال 36 استعمال بطاقات الجبر.

36 تمثيلات متعددة: افترض أن مساحة مستطيل هي $2x^2 + 7x + 3$ ، وطوله $2x + 1$. **a - c انظر الهامش**

- (a) **حسياً:** مثل الموقف باستعمال البطاقات الجبرية، ثم استعمالها لإيجاد عرض المستطيل.
 (b) **رمزياً:** اكتب عبارة جبرية تمثل إيجاد عرض المستطيل.
 (c) **عددياً:** حل المسألة جبرياً باستعمال القسمة التركيبية أو القسمة الطويلة، وهل يتفق الحل باستعمال البطاقات الجبرية مع الحل الجبري؟

مسائل مهارات التفكير العليا

- 37 اكتشف الخطأ:** قسم كل من خليفة وجمال $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ على $x - 3$ ، فقال خليفة: إن الباقي 26، وقال جمال: إن الباقي 100. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.
38 تحد: إذا قُسمت كثيرة حدود على ثنائية حد وكان الباقي 0، فما الذي تستنتج عن العلاقة بينهما؟
39 تبرير: راجع أحد أسئلة القسمة في هذا الدرس، وبين العلاقة بين درجة كل من: المقسوم، والمقسوم عليه، وناتج القسمة.
40 مسألة مفتوحة: اكتب عبارة تتضمن قسمة كثيرتي حدود، بحيث يكون الباقي 3. **40-42 انظر الهامش**
41 حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسر إجابتك.

$$3xy + 6x^2$$

$$\frac{5}{x^2}$$

$$x + 5$$

$$5b + 11c - 9ad^2$$

42 اكتب: استعن بالمعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، وكتب تعليمات متسلسلة لعمل غلاف لكتاب الرياضيات باستعمال قسمة كثيرات الحدود.

تدريب على اختبار

- 43** أي مما يأتي يكافئ العبارة:
 $4a(2a - 3) + 3a(5a - 4)$ **A** $2x^2$ **C** $-10x^2 + 17x$
 $3(-4x^2 + 2x + 3) - 3(2x^2 - 5x + 1)$ **B** $-10x^2$ **D** $2x^2 + 17x$
44 أي كثيرات الحدود الآتية درجتها 3؟ **D**
A $x^3 + x^2 - 2x^4$ **C** $x^2 + x + 12^3$
B $-2x^2 - 3x + 4$ **D** $1 + x + x^3$

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس 3-3)

45 $4a(2a - 3) + 3a(5a - 4)$ **46** $(xy)^2(2xy^2z)^3$ **47** $(3ab^2)^{-2}(2a^2b)^2$ **48** $23a^2 - 24a$

إذا كان $f(x) = 4x + 3$ ، $h(x) = -2x^2 - 2x + 4$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 1-2)

48 $f(-6)$ **21-** **49** $h(3)$ **20-** **50** $f(c)$ **4c + 3** **51** $h(2b + 1)$ **8b^2 - 12b -**

134 الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

تنوع التعليم

فوق

توسّع القسمة على ثنائيات الحدود التي تتضمن كسوراً أو جذوراً تتطلب الانتباه والترتيب ودقة إجراء العمليات. اطلب إلى الطلاب قسمة $8 - 6x^2 + x^4$ على $(x - \sqrt{2})$. $x^3 + \sqrt{2}x^2 - 4x - 4\sqrt{2}$

40 إجابة ممكنة: $\frac{x^2 + 5x + 9}{x + 2}$

41 $\frac{5}{x^2}$ ؛ لأن مقامها يحوي x^2 ، في حين أن باقي العبارات كثيرات حدود.

42 إجابة ممكنة:
 نقسم $140x^2 + 60x$ على $10x$ فيكون الناتج $14x + 6$ ويمثل طول الغلاف كاملاً. ثم نطرح $14x$ من الناتج فنحصل على 6، نصفها يمثل (وهو العدد 3) عرض كل من جزأي الشئ.

إجابات

36a

x^2	x	x	x
x^2	x	x	x
x	1	1	1

العرض يساوي $x + 3$

36b $(2x^2 + 7x + 3) \div (2x + 1)$

36c

$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$
	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	
	1	3	0

نعم



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 4

دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم - تزمة (22) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-4 تدريبات إعادة التعليم
قسمة كثيرات الحدود

القسم التركيبي
هي أساليب لقسم كثيرة حدود على ثنائية حد باستعمال معاملات القسوم وقية F في القسمة عليه $x - F$

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج $(x - 1) \div (2x^2 - 5x + 5x - 2) + (x - 1)$

الخطوة 1:	اكتب حدود القسوم بحيث ترتب درجات الحدود تنازلياً، ثم اكتب المعاملات.
الخطوة 2:	اكتب الثابت في القسوم عليه F إلى اليسار وفي هذا السؤال $F = 1$. وانزل المعامل الأول في القسوم وهو 2 أسفل الخط الأضيق.
الخطوة 3:	اضرب المعامل الأول في F ، وكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه، ثم اجمع ناتج القرب مع معامل الحد الذي فوقه: $-5 + 2 = -3$
الخطوة 4:	اضرب المجموع -3 في F ، وكتب الناتج تحت الحد التالي ثم اجمع: $-3 + 2 = -1$
الخطوة 5:	اضرب المجموع -1 في F ، وكتب ناتج القرب تحت الحد التالي واجمع: $-1 + 2 = 1$

إذن: $(2x^2 - 5x + 5x - 2) \div (x - 1) = 2x^2 - 3x + 2$

تقارن:

1) $(5x^3 + 7x^2 - x - 3) \div (x + 1)$	2) $(3x^3 - 7x^2 + 9x - 14) \div (x - 2)$
3) $(x^3 - 8x^2 + 19x - 9) \div (x - 4)$	4) $(2x^3 + 3x^2 - 10x - 3) \div (x + 3)$
5) $(3x^3 - 8x^2 + 16x - 1) \div (x - 1)$	6) $(2x^3 + 10x^2 + 9x + 38) \div (x + 5)$
7) $(4x^3 - 25x^2 + 4x + 20) \div (x - 6)$	8) $(x^3 - 9x^2 + 17x - 1) \div (x - 2)$
9) $(x^3 - 4x^2 + x^2 + 7x - 2) \div (x - 2)$	10) $(6x^3 + 28x^2 - 7x + 9) \div (x + 5)$
11) $4x^3 - 8x + 20 + \frac{-65}{3x + 5}$	12) $(12x^4 + 20x^3 - 24x^2 + 20x + 35) \div (3x + 5)$

الفصل 3: كثيرات الحدود وبنائها الصف: الثاني الثانوي 22

تدريبات إعادة التعليم (21) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-4 تدريبات إعادة التعليم
قسمة كثيرات الحدود

القسم الطولية: لقسم كثيرة حدود على وحدة حد استعمال المهارات التي تعلمتها في الدرس السابق، وقسم كثيرة حدود على كثيرة حدود، استعمال القسمة الطولية. تذكر أن الحدود المشابهة هي التي يمكن جمعها أو طرحها.

بسطة: $\frac{12p^2qr - 21p^2qr^2 - 9p^2r}{3p^2r} = \frac{12p^2qr}{3p^2r} - \frac{21p^2qr^2}{3p^2r} - \frac{9p^2r}{3p^2r}$

$= \frac{12}{3}p^{2-2}q^{1-1}r^{1-1} - \frac{21}{3}p^{2-2}q^{1-1}r^{2-1} - \frac{9}{3}p^{2-2}q^{0-0}r^{1-1}$

$= 4qt - 7qr - 3p$

استعمل القسمة الطولية في إيجاد $(x - 4) \div (x^2 - 8x^2 + 4x - 9)$

بسطة: $\frac{x^2 - 4x - 12}{x - 4} = \frac{x^2 - 4x^2 - 8x^2 + 4x - 9}{x - 4}$

$= \frac{-4x^2 + 4x}{x - 4} = \frac{-4x^2 + 16x}{x - 4} - \frac{-12x - 9}{x - 4}$

$= \frac{-12x - 9}{x - 4}$

ناتج القسمة يساوي $-12x - 9$ ، والباقي -57 .

إذن: $\frac{x^2 - 8x^2 + 4x - 9}{x - 4} = x^2 - 4x - 12 - \frac{57}{x - 4}$

تقارن:

1) $\frac{60a^2b^3 - 48b^4 + 84a^2b^2}{12ab^2}$	2) $\frac{24mn^2 + 40m^2n^2}{4m^2n}$	3) $\frac{18a^2 + 30a^2}{3a}$
4) $\frac{5ab - 4b^2}{a} + 7a^4$	5) $\frac{m^2 - 3m - 7}{3} \div (m + 2)$	6) $\frac{p^2 - 6}{p - 1} \div (p - 1)$
7) $\frac{r^2 - 6r + 1}{r + 2} \div (r + 2)$	8) $\frac{r^2 - 6}{p - 1} \div (p - 1)$	9) $\frac{2x^2 - 5x^2 + 4x - 4}{2x^2 - x + 2} \div (x - 2)$

الفصل 3: كثيرات الحدود وبنائها الصف: الثاني الثانوي 21

تدريبات حل المسألة (24) ضمن دون فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-4 تدريبات حل المسألة
قسمة كثيرات الحدود

1) العواقي: قسم تعان $p(x) = 3x^3 + 3x^2 - 9x - 23x + 12$ على $x^2 + 3x - 4$ بالأسس، ولكنه في هذا اليوم لم يكن على ما يرام، فلم يتمكن من قراءة $p(x)$ ، والجزء الذي تمكن من قرأته هو الباقي $x + 4$ وناتج القسمة $-3x - 3$. ولكن المعلم أراد أن يجد $p(x)$ ، فما هي $p(x)$ ؟

2) القسمة الطولية: استعملت جبة القسمة الطولية لقسم $x^3 + x^2 + x + 1$ على $x^2 + 2$ وبيأت عملها كالآتي:

3) معدلات: يريد لث أن يجد معدل $m + 1$ من الأعداد، فإذا كان m^2 و m عددين من هذه الأعداد، وكل عدد من الأعداد الباقية وعددها $m - 1$ يساوي 1، فما معدل هذه الأعداد؟

4) الحجم: إذا كان حجم عمود برجي إحدى القلاع يعطى بالعلاقة $\pi(x^3 + 32x^2 - 304x + 640)$ وكان ارتفاع ذلك العمود يساوي 40 قدم، فأوجد مساحة قاعدة العمود بدلالة x و π .

5) نظرية الأعداد: يعمل طلاب فصل المعلم صلاح بكثيرات الحدود، وقد كتب على السبورة أن العدد 1111 يكتب باستعمال القوى بالشكل $B^3 + B^2 + B + 1$. ثم أعطى طلابه الأسئلة التالية:

(a) إذا علمت أن العدد 11 يكتب بالشكل $B + 1$ ، فما قيمة 1111 مقسوماً على 11 بدلالة B ؟

(b) قيمة 1111 بدلالة B تساوي $B^3 + B^2 + B + 1$ ، فما قيمة 1111 مقسوماً على 11 بدلالة B ؟

الفصل 3: كثيرات الحدود وبنائها الصف: الثاني الثانوي 24

تدريبات المهارات (23) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-4 تدريبات المهارات
قسمة كثيرات الحدود

بسطة:

1) $\frac{10c + 6}{4}$	2) $\frac{3x + 5}{4}$	3) $\frac{15y^2 + 6y^2 + 3y}{3y}$
4) $\frac{12x^2 - 4x - 8}{4x}$	5) $\frac{5y^2 + 2y + 1}{3}$	6) $\frac{15a^4 + 5a^4}{5a^4}$
7) $\frac{3q^2 + \frac{3}{q}}{q^2}$	8) $\frac{6f^2k - 9fk^2}{3k}$	9) $\frac{2f}{3k}$
10) $\frac{d^2 + 4d + 3}{d + 1}$	11) $\frac{n^2 + 7n + 10}{n + 5}$	12) $\frac{2t^2 + 13t + 15}{t + 5}$
13) $\frac{4g^2 - 9}{2g - 3}$	14) $\frac{4g^2 - 9}{2g - 3}$	15) $\frac{u^2 + 5u - 12}{u - 3}$
16) $\frac{2x^2 - 5x - 4}{x - 3}$	17) $\frac{12}{u + 8} - \frac{12}{u - 3}$	18) $\frac{3v^2 + 5v + \frac{10}{v}}{v^2 - 6}$
19) $\frac{y^2 - y - 6}{y + 2}$	20) $\frac{y^2 - y - 6}{y + 2}$	21) $\frac{4p^3 - 3p^2 + 2p}{p - 1}$
22) $\frac{3c^3 - 2 + \frac{8}{c} + 2}{c^2 + 2}$	23) $\frac{4p^3 - 3p^2 + 2p}{p - 1}$	

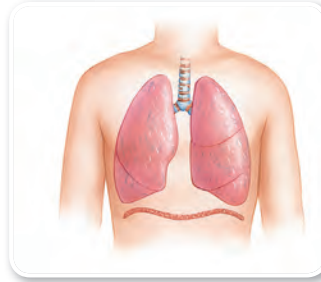
الفصل 3: كثيرات الحدود وبنائها الصف: الثاني الثانوي 23



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 4

دون دون المتوسط		ضمن ضمن المتوسط		فوق المتوسط															
التدريبات الإثرائية (25)		كتاب التمارين (18)		دون ضمن فوق															
<p>الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p>3-4 التدريبات الإثرائية</p> <p>خطوط التقارب المائلة يسمى المستقيم $y = ax + b$ حيث $a \neq 0$ خط تقارب مائل للدالة $y = f(x)$ إذا اقترب منحني f أكثر فأكثر من هذا المستقيم مع اقتراب $x \rightarrow \infty$ أو $x \rightarrow -\infty$ حيث يرمز إلى ما لا نهاية للدالة $f(x) = 3x + 4 + \frac{2}{x}$ خط تقارب مائل هو المستقيم $y = 3x + 4$ لأن $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ مع اقتراب $x \rightarrow \infty$ أو $x \rightarrow -\infty$ وبعبارة أخرى مع زيادة x بلا حدود فإن قيمة $\frac{2}{x}$ تصغر لتقترب من الصفر.</p> <p>مثال أوجد خط التقارب المائل للدالة $f(x) = \frac{x^2 + 8x + 15}{x + 2}$</p> <table border="1"> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>8</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>-2</td> <td>-2</td> <td>-12</td> <td></td> </tr> <tr> <td>باستعمال القسمة التركيبية</td> <td>1</td> <td>6</td> <td>3</td> </tr> </table> $y = \frac{x^2 + 8x + 15}{x + 2} = x + 6 + \frac{3}{x + 2}$ <p>ومع زيادة x فإن قيمة $\frac{3}{x + 2}$ تصغر وبعبارة أخرى وبما أن $\frac{3}{x + 2} \rightarrow 0$ عندما $x \rightarrow \infty$ أو $x \rightarrow -\infty$ فإن $x + 6$ هو معادلي مائل.</p> <p>تقاربن: استعمل القسمة التركيبية لإيجاد خط تقارب مائل لكل دالة فيما يلي.</p> <p>(1) $y = 8x - 44$ $y = \frac{8x^2 - 4x + 11}{x + 5}$</p> <p>(2) $y = x + 5$ $y = \frac{x^2 + 3x - 15}{x - 2}$</p> <p>(3) $y = x + 1$ $y = \frac{x^2 - 2x - 18}{x - 3}$</p> <p>(4) $y = ax + b + ad$ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - d}$</p> <p>(5) $y = ax + b - ad$ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$</p>			1	8	15	-2	-2	-12		باستعمال القسمة التركيبية	1	6	3	<p>3-4 قسمة كثيرات الحدود بسّط كل معادلة فيما يأتي مستعملًا القسمة:</p> <p>(1) $\frac{15x^3 - 5x^2 + 40x^2}{5x^2}$ $\frac{3x^3 - x^2 + \frac{8}{x}}{x^2}$ $\frac{3k}{m} - 6k^2 + \frac{9m}{2k} - \frac{6k^2m - 12k^2m^2 + 9m^3}{2km^2}$</p> <p>(2) $\frac{(-30x^2y + 12x^2y^2 - 18x^2y) \div (-6x^2y)}{5x - 2y + 3}$ $\frac{(-6w^2z^2 - 3w^2z^2 + 4w + 5z) \div (2w^2z)}{-3wz^2 - \frac{3z^2}{2} + \frac{5}{wz^2} + 2wz^2}$</p> <p>(3) $\frac{a^2 - 2a + \frac{4}{a}}{a^2 - 8a^2 + a^2(4a)^{-1}}$ $\frac{f^2 + 7f + 10}{f + 2}$</p> <p>(4) $\frac{2x + 7}{x - 2} - \frac{2x^2 + 3x - 14}{x - 2}$ $\frac{2x^2 - 8x + 38}{x + 4} - \frac{2x^2 + 6x + 152}{x + 4}$</p> <p>(5) $\frac{a^2 + 4a + 16}{a^2 - 64} \div (a - 4)$ $\frac{3w^3 + 7w^2 - 4w + 3}{3w^2 - 2w + 2} \div (w + 3)$</p> <p>(6) $\frac{2x^2 - 6x + 22 - \frac{72}{x+3} - \frac{2x^2 + 4x - 6}{x+3}}{6y^2 + 3y^2 - 6y - 16 + \frac{26}{y+2}}$ $\frac{3m^3 - 3m^2 + 3m - 3m + 4 - \frac{5}{m+1}}{(3m^2 + m - 1) \div (m + 1)}$</p> <p>(7) $\frac{x^2 + 2x^2 - x - 2}{(x^2 - 3x^2 - 11x^2 + 3x + 10) \div (x - 5)}$ $\frac{(x^2 - 3x^2 + 5x - 6)(x + 2)^{-1}}{x^3 - 5x^2 + 10x - 15 + \frac{24}{x+2}}$</p> <p>(8) $\frac{6y^2 - 5y - 15}{3y - 7 + \frac{2y + 3}{y+2}}$ $\frac{2x - 1 - \frac{6}{3x+1} - \frac{6x^2 - x - 2}{3x + 1}}{2x + 2 + \frac{12}{2x - 3}}$</p> <p>(9) $\frac{6x^2 + 5x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 1 + \frac{2}{3y + 1}}$ $\frac{2x^2 + 5x^2 - 2x - 15}{2x^2 - 3}$</p> <p>(10) $\frac{2h^2 - h + 3}{h^2 - 1}$ $\frac{4p^2 - 17p^2 + 14p - 3}{2p - 3}$</p> <p>(11) $\frac{2x^2 - 8x + 38}{x + 4} - \frac{2x^2 + 6x + 152}{x + 4}$</p> <p>(12) $\frac{2x^2 - 6x + 22 - \frac{72}{x+3} - \frac{2x^2 + 4x - 6}{x+3}}{6y^2 + 3y^2 - 6y - 16 + \frac{26}{y+2}}$</p> <p>(13) $\frac{3m^3 - 3m^2 + 3m - 3m + 4 - \frac{5}{m+1}}{(3m^2 + m - 1) \div (m + 1)}$</p> <p>(14) $\frac{6y^2 - 5y - 15}{3y - 7 + \frac{2y + 3}{y+2}}$</p> <p>(15) $\frac{x^2 + 2x^2 - x - 2}{(x^2 - 3x^2 - 11x^2 + 3x + 10) \div (x - 5)}$</p> <p>(16) $\frac{2x - 1 - \frac{6}{3x+1} - \frac{6x^2 - x - 2}{3x + 1}}{2x + 2 + \frac{12}{2x - 3}}$</p> <p>(17) $\frac{6x^2 + 5x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 1 + \frac{2}{3y + 1}}$</p> <p>(18) $\frac{2h^2 - h + 3}{h^2 - 1}$</p> <p>(19) $\frac{4p^2 - 17p^2 + 14p - 3}{2p - 3}$</p> <p>(20) $\frac{2x^2 - 8x + 38}{x + 4} - \frac{2x^2 + 6x + 152}{x + 4}$</p> <p>(21) $\frac{a^2 + 4a + 16}{a^2 - 64} \div (a - 4)$</p> <p>(22) $\frac{3w^3 + 7w^2 - 4w + 3}{3w^2 - 2w + 2} \div (w + 3)$</p> <p>(23) $\frac{6y^2 - 5y - 15}{3y - 7 + \frac{2y + 3}{y+2}}$</p> <p>(24) $\frac{2x - 1 - \frac{6}{3x+1} - \frac{6x^2 - x - 2}{3x + 1}}{2x + 2 + \frac{12}{2x - 3}}$</p> <p>(25) هندسة: أعمد مساحة مستطيل بالعبارة $2x^2 - 11x + 15$ فإذا كان عرض المستطيل يساوي $(x - 3)$ ft، فأوجد طوله.</p> <p>(26) هندسة: أعمد مساحة مثلث بالعبارة $3x^2 - x - 3$ فإذا كان طول القاعدة يساوي $(5x^2 + x + 3)$ m، فأوجد ارتفاعه.</p>		<p>الفصل 3، كثيرات الحدود ودوالها</p>		<p>الفصل 3، التفاضل والتكامل</p>	
	1	8	15																
-2	-2	-12																	
باستعمال القسمة التركيبية	1	6	3																



لماذا؟

يمكن تمثيل حجم الهواء في رئة الإنسان خلال دورة تنفس مدتها 5 دقائق بالدالة: $v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$ ، حيث v الحجم باللترات، t الزمن بالثواني. وهذه الدالة مثال على دالة كثيرة حدود.

فيما سبق؟

درست تحليل التمثيل البياني للدوال التربيعية.

والآن؟

- أجد قيم دوال كثيرات الحدود.
- أعرف الأشكال العامة للتمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود، وأحدد عدد أصفارها الحقيقية.

المفردات:

كثيرة حدود بمتغير واحد
polynomial in one variable

المعامل الرئيس
leading coefficient

دالة كثيرة الحدود
polynomial function

دالة القوة
power function

سلوك طرفي التمثيل البياني
end behavior

صفر الدالة
zero of a function

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

التربيط الراسي

ما قبل الدرس 3-5

تحليل التمثيل البياني للدوال التربيعية.

الدرس 3-5

إيجاد قيم دوال كثيرات الحدود.

تعرف الأشكال العامة للتمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود.

ما بعد الدرس 3-5

استعمال طرائق تتضمن التحليل إلى عوامل لإعادة كتابة معادلات كثيرات حدود وحلها.

دوال كثيرات الحدود: كثيرة الحدود بمتغير واحد هي عبارة جبرية على الصورة:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ، حيث $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$ ، n عدد صحيح غير سالب. وتكون كثيرة الحدود مكتوبة بالصيغة القياسية إذا كانت أسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيباً تنازلياً، ودرجة كثيرة الحدود هي أس المتغير ذي أكبر أس فيها، وتسمى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية **المعامل الرئيس**.

كثيرة الحدود	الدرجة	المعامل الرئيس	مثال
الثابتة	0	12	12
الخطية	1	4	$4x - 9$
التربيعية	2	5	$5x^2 - 6x - 9$
التكعيبية	3	8	$8x^3 + 12x^2 - 3x + 1$
الصيغة العامة	n	a_n	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

1 مثال الدرجات والمعاملات الرئيسة

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

(a) $8x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 3$

هذه كثيرة حدود بمتغير واحد، وأكبر أس للمتغير فيها 5، لذا درجتها 5، والمعامل الرئيس 8.

(b) $12x^2 - 3xy + 8x$

هذه ليست كثيرة حدود بمتغير واحد؛ فهناك متغيران هما x, y .

(c) $3x^4 + 6x^3 - 4x^8 + 2x$

هذه كثيرة حدود بمتغير واحد، وأكبر أس للمتغير فيها 8، لذا درجتها 8، والمعامل الرئيس -4.

1A-1C انظر الهامش.

تحقق من فهمك

(1A) $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$ (1B) $5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14$ (1C) $8x^4 - 2x^3 - x^6 + 3$

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- مم تتكون دورة التنفس؟ **إجابة ممكنة:** تتكون الدورة من شهيق وزفير.
- باستعمال القانون، ما قيمة $v(1)$ ؟ **0.288 لتر**
- ما أكبر قيمة لـ t تجعل النموذج معقولاً؟ **5**

إجابات (تحقق من فهمك):

- (1A) ليست كثيرة حدود؛ لأن أحد الحدود يحتوي متغيراً في المقام.
- (1B) كثيرة حدود، درجتها 6، المعامل الرئيس 5
- (1C) كثيرة حدود، درجتها 6، المعامل الرئيس -1

مصادر الدرس 3-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (137)	• تنويع التعليم، ص (137)	• تنويع التعليم، ص (137)
كتاب التمارين	• ص (19)	• ص (19)	• ص (19)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26)	• تدريبات المهارات، ص (28)	• تدريبات المهارات، ص (28)
	• تدريبات المهارات، ص (28)	• تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات حل المسألة، ص (29)
	• تدريبات حل المسألة، ص (29)	• التدريبات الإثرائية، ص (30)	• التدريبات الإثرائية، ص (30)

دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود في متغير واحد، فمثلاً $f(x) = 3x^3 - 4x + 6$ دالة كثيرة حدود تكعيبية. وتكتب أبسط دوال كثيرات الحدود على الصورة $f(x) = ax^b$ ، حيث a عدد حقيقي، b عدد صحيح غير سالب، وتُسمى عندئذٍ **دوال القوة**. إذا علمت عنصرًا في مجال دالة كثيرة حدود، تستطيع معرفة القيمة المقابلة له في المدى.



الربط مع الحياة

تصل سعة الرئة لدى الشخص البالغ السليم إلى 6 لترات تقريبًا.

دوال كثيرات الحدود

مثال 1 يوضح كيفية تحديد الدرجة والمعامل الرئيس لكثيرة حدود بمتغير واحد.

مثال 2 يوضح كيفية إيجاد قيمة دالة كثيرة حدود عند عدد.

مثال 3 يوضح كيفية إيجاد قيمة دالة عند متغير أو عبارة جبرية.

مثال 2 من واقع الحياة

الانتفس: ارجع إلى الفقرة في بداية الدرس، وأوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها ثانيتان. بتعويض العدد 2 في الدالة نجد $v(2)$ ، وهو حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها ثانيتين.

الدالة الأصلية	$v(t) = -0.037t^3 + 0.152t^2 + 0.173t$
بتعويض 2 بدلاً من t	$v(2) = -0.037(2)^3 + 0.152(2)^2 + 0.173(2)$
بالتبسيط	$= -0.296 + 0.608 + 0.346$
بالجمع	$= 0.658 \text{ L}$

تحقق من فهمك

2 أوجد حجم الهواء في الرئتين خلال دورة تنفس مدتها 4 ثوانٍ. **0.756 L**

يمكنك إيجاد قيم الدوال عند متغيرات وعبارات جبرية.

مثال 3

إيجاد قيم الدالة عند متغيرات

إذا كانت $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ، فأوجد: $f(3c - 4) - 5f(c)$.

لإيجاد قيمة $f(3c - 4)$ عوض $3c - 4$ بدلاً من x في الدالة $f(x)$

الدالة الأصلية	$f(x) = x^2 + 2x - 3$
بتعويض $3c - 4$ بدلاً من x	$f(3c - 4) = (3c - 4)^2 + 2(3c - 4) - 3$
بالضرب	$= 9c^2 - 24c + 16 + 6c - 8 - 3$
بالتبسيط	$= 9c^2 - 18c + 5$

لإيجاد قيمة $5f(c)$ عوض c بدلاً من x في الدالة $f(x)$ ، واضرب الناتج في العدد 5.

الدالة الأصلية	$f(x) = x^2 + 2x - 3$
بتعويض c بدلاً من x	$5f(c) = 5(c^2 + 2c - 3)$
خاصية التوزيع	$= 5c^2 + 10c - 15$

والآن أوجد قيمة $f(3c - 4) - 5f(c)$.

	$f(3c - 4) - 5f(c) = (9c^2 - 18c + 5) - (5c^2 + 10c - 15)$
خاصية التوزيع	$= 9c^2 - 18c + 5 - 5c^2 - 10c + 15$
بالتبسيط	$= 4c^2 - 28c + 20$

تحقق من فهمك

3A إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 8$ ، فأوجد $3g(2a) + g(5a - 2)$. **$37a^2 - 75a + 46$**

3B إذا كانت $h(x) = 2x^2 + 5x + 3$ ، فأوجد $h(-4d + 3) - 0.5h(d)$. **$31d^2 - 70.5d + 34.5$**

أمثلة إضافية

1 حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

(a) $7z^3 - 4z^2 + z$ الدرجة 3، والمعامل الرئيس 7

(b) $6a^3 - 4a^2 + ab^2$ ليست كثيرة حدود بمتغير واحد؛ لاحتوائها على متغيرين هما: a و b .

(c) $3x^5 + 2x^2 - 4 - 8x^6$ الدرجة 6 والمعامل الرئيس -8

2 **الانتفس** ارجع الى التطبيق في بداية الدرس، وأوجد حجم الهواء في الرئة لدورة التنفس خلال 1.5 ثانية. **0.4766 L**

3 إذا كانت $b(m) = 2m^2 + m - 1$ ، فأوجد: $b(2x - 1) - 3b(x)$. **$2x^2 - 9x + 3$**

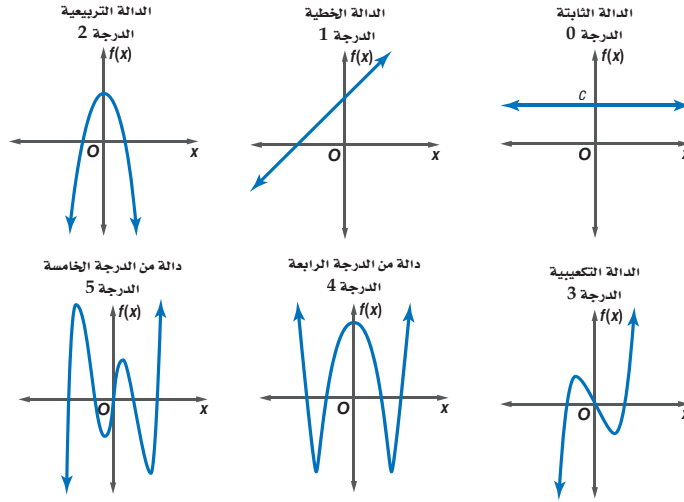
تنبيه!

معالجة الأخطاء ذكّر الطلاب أن المعامل الرئيس لا يُشترط أن يكون معامل الحد الأول في كثيرة الحدود.

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي اختر مجموعة طلاب ليعرضوا أمام الصف كيفية إيجاد قيمة دالة كثيرة حدود عند قيمة معطاة ويوضحوها من خلال عرض تقديمي.

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانياً: إن التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود يظهر أكبر عدد من المرات التي قد يقطع فيها هذا التمثيل المحور x ، وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.



التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود

مثال 4 يوضح كيفية استعمال الدرجة والمعامل الرئيس لوصف سلوك الدالة، وتحديد إذا كانت درجة الدالة فردية أو زوجية، وكذلك تحديد عدد مرات تقاطع المنحنى مع المحور x .

إرشادات للمعلم الجديد

توسيع المفهوم نظراً لأن أشكال

المنحنيات في صفحة 134 تعرض أكبر عدد من المرات يقطع فيها منحنى الدالة المحور x ، فربما يسأل بعض الطلاب عن أقل عدد من المرات يقطع فيها كل منحنى المحور x . لذا اطلب إلى الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية، ويستعملوا أحد المنحنيات، ويناقشوا هذه القضية، ثم توصل معهم إلى ما يلي:

في الدالة الخطية أكبر عدد من المرات = أقل عدد من المرات = 1 .

في الدالة التربيعية: أقل عدد من

المرات صفر، وأكبر عدد من المرات 2 .

في الدالة التكعيبية: أقل عدد من المرات 1 ، وأكبر عدد من المرات 3 . وفي الدالة من

الدرجة الرابعة: أقل عدد من المرات صفر، وأكبر عدد من المرات 4 .

وفي الدالة من الدرجة الخامسة: أقل عدد

من المرات 1 ، وأكبر عدد من المرات 5 .

وربما يستطيع بعض الطلاب ملاحظة النمط للدوال ذات الدرجات الفردية والزوجية.

إرشادات للدراسة

المالانهاية (∞) غير محدد أو لا حدود له.
 $+\infty$: تقرأ زائد
 مالانهاية.
 $-\infty$: تقرأ ناقص
 مالانهاية.

مفهوم أساسي سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

<p>الدرجة: فردية</p> <p>المعامل الرئيس: موجب</p> <p>المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية</p> <p>المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني:</p> <p>$x \rightarrow -\infty$ عندما $f(x) \rightarrow -\infty$</p> <p>$x \rightarrow +\infty$ عندما $f(x) \rightarrow +\infty$</p>	<p>الدرجة: زوجية</p> <p>المعامل الرئيس: موجب</p> <p>المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية</p> <p>المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو التي تساوي القيمة الصغرى .</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني:</p> <p>$x \rightarrow -\infty$ عندما $f(x) \rightarrow +\infty$</p> <p>$x \rightarrow +\infty$ عندما $f(x) \rightarrow +\infty$</p>
<p>الدرجة: فردية</p> <p>المعامل الرئيس: سالب</p> <p>المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية</p> <p>المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني:</p> <p>$x \rightarrow -\infty$ عندما $f(x) \rightarrow +\infty$</p> <p>$x \rightarrow +\infty$ عندما $f(x) \rightarrow -\infty$</p>	<p>الدرجة: زوجية</p> <p>المعامل الرئيس: سالب</p> <p>المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل</p> <p>المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الأقل</p> <p>من أو التي تساوي القيمة العظمى</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني:</p> <p>$x \rightarrow -\infty$ عندما $f(x) \rightarrow -\infty$</p> <p>$x \rightarrow +\infty$ عندما $f(x) \rightarrow -\infty$</p>

الدرس 3-5 دوال كثيرات الحدود 137

إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني
 المعامل الرئيس ودرجة كثيرة الحدود هما العاملان الوحيدان في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني.

المحتوى الرياضي

دالة كثيرة الحدود: دالة كثيرة الحدود هي دالة تعطى قاعدتها من خلال كثيرة حدود بمتغير واحد، الحد الرئيس هو الحد الذي له أكبر أس، والمعامل الرئيس a_n هو معامل الحد الرئيس. درجة كثيرة الحدود هي أكبر درجة n في جميع الحدود بعد التبسيط.

دون ضمن

تنوع التعليم

المتعلمون المنطقيون دالة القوة هي أحادية الحد، ويمكن أن تكون لها أية درجة.

اطلب إلى الطلاب أن يختبروا منحنيات عدة دوال قوى، وأن يبحثوا أوجه الشبه والاختلاف بينها.

صفر الدالة هو الإحداثي x لنقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور x ، لذا فإنه يمكن تحديد عدد الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية لمعادلة كثيرة الحدود من التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود المرتبطة بها. تذكر أن مقاطع x تحدد هذه الأصفار؛ ولذا فإن عدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع محور x يساوي عدد هذه الأصفار.

إرشادات للدراسة

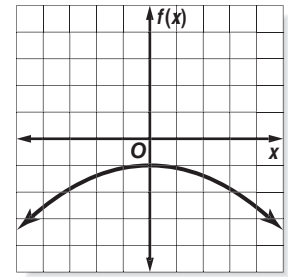
الجذر المكرر عندما يمس التمثيل البياني المحور x يكون للدالة جذور متساوية.

مثال إضافي

4

أجب عن الأسئلة الآتية لكل من التمثيلين البيانيين أدناه:

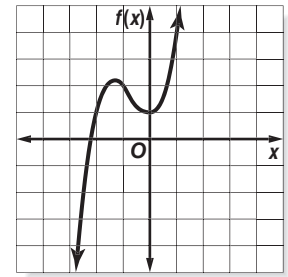
- صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
- حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.



- $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$
- $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

• الدالة زوجية الدرجة.

- التمثيل البياني للدالة لا يقطع المحور x . لذا لا يوجد أصفار حقيقية.



- $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$
- $f(x) \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

• الدالة فردية الدرجة.

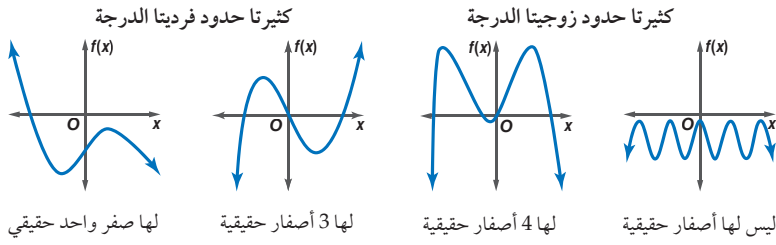
- يقطع التمثيل البياني للدالة المحور x في نقطة واحدة، لذا يكون للدالة كثيرة الحدود صفر حقيقي واحد.

مفهوم أساسي

أصفار الدوال الضربية الدرجة والزوجية الدرجة

أضف إلى مطوبتك

يكون للدوال الضربية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية، ويكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.



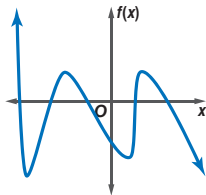
ليس لها أصفار حقيقية لها 4 أصفار حقيقية لها 3 أصفار حقيقية لها صفر واحد حقيقي

مثال 4

التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود

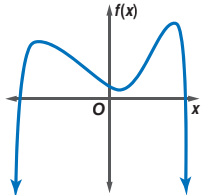
أجب عن الأسئلة الآتية لكل من التمثيلين البيانيين أدناه:

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
- حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.



- $f(x) \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$
- $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين، فالدالة فردية الدرجة، وبما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x في 5 نقاط؛ لذا للدالة 5 أصفار حقيقية.

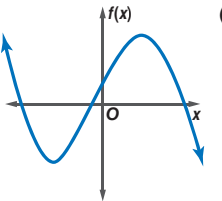
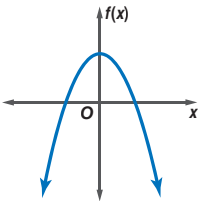


- $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$
- $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه، فالدالة زوجية الدرجة، وبما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x في نقطتين؛ لذا للدالة صفران حقيقيان.

(4A, 4B) انظر الهامش.

تحقق من فهمك



إجابات (تحقق من فهمك)

- (4B) $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$
- $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه، فالدالة زوجية الدرجة. والتمثيل البياني للدالة يقطع محور السينات في ثلاث نقاط، لذا يكون للدالة صفران حقيقيان.

- (4A) $f(x) \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$
- $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في اتجاهين مختلفين، فالدالة فردية الدرجة. والتمثيل البياني للدالة يقطع محور السينات في ثلاث نقاط، لذا يكون للدالة ثلاثة أصفار حقيقية.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-12 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

11a $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$

$f(x) \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

11b بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة في اتجاهين مختلفين، فالدالة فردية الدرجة.

11c يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات في ثلاث نقاط، لذا هنالك ثلاثة أصفار حقيقية.

12a $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$

$f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

12b بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة في الاتجاه نفسه، فللدالة درجة زوجية.

12c لا يقطع التمثيل البياني للدالة محور السينات، لذا لا يوجد أصفار حقيقية.

13 ليست دالة بمتغير واحد؛ هنالك متغيران هما x و y .

14 ليست كثيرة حدود؛ لأنها تتضمن متغيراً في المقام.

15 درجتها 6، والمعامل الرئيس -12

16 درجتها 7، والمعامل الرئيس -21

17 درجتها 5، والمعامل الرئيس 3

18 درجتها 2، والمعامل الرئيس -6

19 درجتها 9، والمعامل الرئيس 2

20 درجتها 8، والمعامل الرئيس -2

21 $p(-6) = 1227; p(3) = 66$

22 $p(-6) = 2322; p(3) = 9$

23 $p(-6) = 319; p(3) = -5$

24 $p(-6) = 2232; p(3) = 153$

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذاكر السبب: (2) الدرجة 7، والمعامل الرئيس -10

(2) $-10x^7 - 5x^3 + 4x - 22$

(4) $8x^5 - 3x^2 + 4xy - 5$ ليست كثيرة حدود بمتغير واحد؛ فهناك متغيران هما: x, y

(6) $w(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 8$

$w(5) = 698; w(-4) = 896$

إذا كانت $c(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2, d(x) = 3x^2 + 6x - 10$ فأوجد كلاً مما يأتي:

(8) $-108z^2 - 72z + 40 - 4[d(3z)]$

(10) $-3c(2b) + 6d(4b - 3)$

$-96b^3 + 348b^2 - 288b - 12$

(1) $11x^6 - 5x^5 + 4x^2$

(3) $14x^4 - 9x^3 + 3x - 4y$

أوجد $w(5), w(-4)$ لكل من الدالتين الآتيتين:

(5) $w(x) = -2x^3 + 3x - 12$

$w(5) = -247; w(-4) = 104$

(7) $4y^9 - 5y^6 + 2 c(y^3)$

(9) $6c(4a) + 2d(3a - 5)$

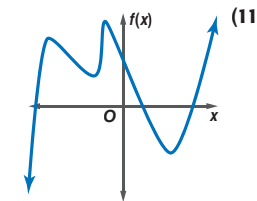
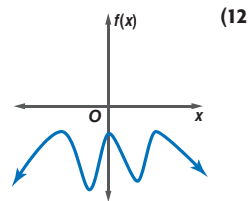
$1536a^3 - 426a^2 - 144a + 82$

أجب عن الفروع a - c لكل من التمثيلين البيانيين أدناه:

(a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.

(b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.

(c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة. (11, 12) انظر الهامش.



تمارين ومسائل

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذاكر السبب: (13-20) انظر الهامش.

(14) $3a^7 - 4a^4 + \frac{3}{a}$

(16) $-12 - 8x^2 + 5x - 21x^7$

(18) $(5 - 2y)(4 + 3y)$

(20) $7x^4 + 3x^7 - 2x^8 + 7$

(13) $-6x^6 - 4x^5 + 13xy$

(15) $8x^5 - 12x^6 + 14x^3 - 9$

(17) $13b^3 - 9b + 3b^5 - 18$

(19) $6x^5 - 5x^4 + 2x^9 - 3x^2$

أوجد $p(3), p(-6)$ لكل دالة مما يأتي: (21-24) انظر الهامش.

(22) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 24$

(24) $p(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2$

(21) $p(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

(23) $p(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$

إذا كانت $c(x) = 2x^2 - 4x + 3, d(x) = -x^3 + x + 1$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

(25) $2b^4 - 4b^2 + 3 c(b^2) (27-40a^3 + 10a + 5 5d(2a) (26 18a^2 - 12a + 3 c(3a)$

$2y^4 - 8y^2 + 9 c(y^2 - 1) (30 d(4y - 3) (29-64a^6 + 4a^2 + 1 d(4a^2) (28$

139 الدرس 3-5 دوال كثيرات الحدود $-64y^3 + 144y^2 - 104y + 25$

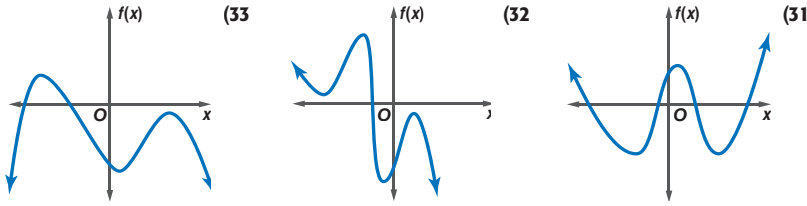
تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	54-66 ، 52 ، 13-34
ضمن المتوسط	56-66 ، 48-54 ، 35-47 ، 34 ، 13-33 فردي
فوق المتوسط	35-66

مثال 4

أجب عن الفروع من a-c لكل التمثيلات البيانية الآتية:

- (a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
 (b) حدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
 (c) اذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة. (31-33) انظر ملحق الإجابات



(34) **فيزياء:** تعطى الطاقة الحركية KE بالجول لجسم متحرك كتلته m kg بالدالة $KE(v) = 0.5mv^2$ ، حيث تمثل v سرعة الجسم بالأمتار لكل ثانية. أوجد الطاقة الحركية لعربة كتلتها 171 kg تسير بسرعة 11 m/s. **10345.5 جول**

أوجد $f(-2)$, $f(8)$ لكل دالة مما يأتي: (35) $f(-2) = -16$; $f(8) = 1024$

(36) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 12x - 18$

(35) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2$

(38) $f(x) = \frac{5}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 10$

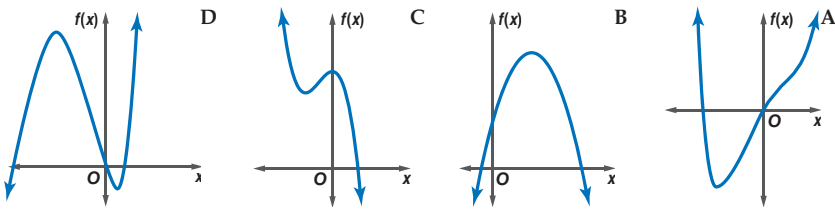
(37) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^2 + 6x$

(43) $3a^3 - 24a^2 + 240a + 66$

(45) $5a^6 - 298a^2 + 1008a - 928$

(46) $6a^{12} + 18a^8 - 28a^6 + 6a^4 + 42a^3 - 62$

حدد التمثيل البياني المناسب لكل دالة في الأسئلة (39-42) مستعملًا درجة كثيرة الحدود وسلوك طرفي التمثيل البياني لها.



(40) $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$ D

(39) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$ B

(42) $f(x) = -4x^3 - 4x^2 + 8$ C

(41) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 6x$ A

إذا كانت $c(x) = x^3 - 2x$, $d(x) = 4x^2 - 6x + 8$ ، فأوجد كلاً مما يأتي:

(44) $-4a^6 - 12a^4 - 36a^2 - 72a - 48$

(43) $-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1)$

(45) $3c(a - 4) + 3d(a + 5)$

(46) $-7d(a^3) + 6c(a^4 + 1)$

(45) $5c(a^2) - 8d(6 - 3a)$

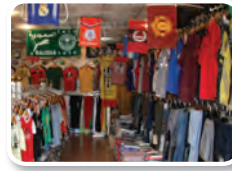
(47) **ملابس:** تُمثل أرباح مصنع للملابس بدالة كثيرة الحدود $w(x) = -x^4 + 40x^2 - 144$ ، حيث x عدد قطع الملابس المباعة بالألوف، و $w(x)$ ربح المصنع بالآلاف الريالات.

(a) أنشئ جدولاً لتمثيل الدالة بيانياً. انظر الهامش.

(b) أوجد أصفار الدالة. $-6, -2, 2, 6$

(c) بين أي قيمتين يجب أن يبيع المصنع من قطع الملابس ليحقق ربحاً. **2000, 6000**

(d) وضح لماذا أخذ صفران فقط بعين الاعتبار في الفرع c. انظر الهامش.

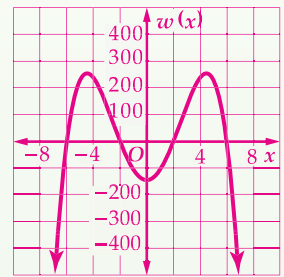


الربط مع الحياة

يعد الشباب زبائن مهمين لمحال الملابس، ولذا يوفر تجار الملابس الأنواع التي يفضل الشباب شراؤها.

إجابات:

x	w(x)
-7	-585
-6	0
-4	240
-3	135
-2	0
0	-144
1	-105
2	0
4	240
6	0
7	-585



(47d) إجابة ممكنة، تحذف الإجابة السالبة؛

لأن العدد المنتج من القطع لا يمكن

أن يكون سالبًا.

تمثيلات متعددة (48 a, c, d) انظر ملحق الإجابات.

(48) **تمثيلات متعددة:** افترض أن $g(x) = (x-2)(x+1)(x-3)(x+4)$.

(a) **تحليلياً:** حدد المقطع x والمقطع y والجزور، ودرجة الدالة $g(x)$ ، وصف سلوك طرفي تمثيلها البياني.

(b) **جبرياً:** اكتب الدالة بالصيغة القياسية. $g(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$

(c) **جدولياً:** أنشئ جدولاً لتمثيل الدالة بيانياً. انظر ملحق الإجابات.

(d) **بيانياً:** مثل الدالة بيانياً بتعيين نقاط، والتوصيل بينها بمنحنى. انظر ملحق الإجابات.

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة فيما يأتي: (49-51) انظر الهامش.

$h(x) = -4x^7 + 8x^6 - 4x$ (51) $g(x) = 2x^5 + 6x^4$ (50) $f(x) = -5x^4 + 3x^2$ (49)

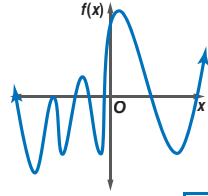
تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في السؤال 48 كلاً من التحليل، والجبر، وجدول القيم، لتمثيل الدوال من الدرجات العليا.

تنبيه!

اكتشف الخطأ وضح في السؤال 52، أن الجذر المكرر لا يعني وجود حلين مختلفين للمعادلة، وإنما يعني ظهور عامل مرتين عند التحليل.

مسائل مهارات التفكير العليا



(52) **اكتشف الخطأ:** حدّد كل من ماجد وبدر عدد أصفار التمثيل البياني المجاور. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

بدر
يوجد 7 أصفار، لأن التمثيل البياني يقطع المحور x سبع مرات.

ماجد
يوجد 8 أصفار، لأن التمثيل البياني يقطع المحور x 7 مرات، وأحد الجذور مكرر مرتين.

(54-55) انظر الهامش.

(53) **تحّد:** إذا كانت $g(x)$ من عوامل $f(x)$ ، وكانت درجة $f(x)$ تساوي 5، ومعاملها الرئيس موجباً، وكانت درجة

$g(x)$ تساوي 3 ومعاملها الرئيس موجباً، فصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، وفسر إجابتك.

(54) **مسألة مفتوحة:** مثل بيانياً كثيرة حدود زوجية الدرجة عدد جذورها 8، وأحدھا مكرر مرتين.

(55) **اكتب:** صف المقصود بسلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود، وكيف يتم تحديده؟

(52) إجابة ممكنة: ماجد، الدالة زوجية والتي لها عدد زوجي من الأصفار، والجذر المكرر مرتين يدل على وجود صفرين.

(53) إجابة ممكنة:

$f(x) \rightarrow +\infty$

عندما $x \rightarrow -\infty$

$f(x) \rightarrow +\infty$

عندما $x \rightarrow +\infty$

ودرجة الدالة $\frac{f(x)}{g(x)}$

ستكون 2 ومعاملها الرئيس

سيكون موجباً.

4 التقييم

بطاقة مكافأة اعمل عدداً من النسخ لخمس دوال مختلفة لكثيرات حدود. أعط كل طالب دالة، واطلب إلى كل طالب أن يوجد قيمة الدالة عند عدد وعند عبارة جبرية، واطلب إليهم تسليمك الورقة قبل مغادرتك غرفة الصف.

إجابات:

(49) $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$

$f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

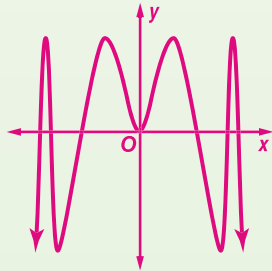
(50) $g(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$

$g(x) \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

(51) $h(x) \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$

$h(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

(54) إجابة ممكنة:



(55) إجابة ممكنة: يدل سلوك طرفي

التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

على القيم التي يقترب منها المنحنى

عندما تقترب قيمة المتغير في الدالة

من المالا نهاية في الاتجاهين الموجب

والسالب.

ويمكن تحديد هذا السلوك من العامل

الرئيس ودرجة كثيرة الحدود.

تدريب على اختبار

(57) إذا كان $i = \sqrt{-1}$ ، فإن $5i(7i)$ يساوي: C

(A) 70

(B) 35

(C) -35

(D) -70

(56) ما باقي قسمة: $5x^3 - 7x + 3$ على $x + 3$ ؟ C

(A) -11

(B) 1

(C) -1

(D) 11

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 3-4) (58) $2x^2y^2 + 4x^4y^4z^2$ (59) $3b^3c^3 - 5a^3b^2 + 2a^4c$ (60) $6c^3 - 1 + 4a^5cd^2$

(60) $\frac{18c^5d^2 - 3c^2d^2 + 12a^5c^3d^4}{3c^2d^2}$

(59) $\frac{18ab^4c^5 - 30a^4b^3c^2 + 12a^5bc^3}{6abc^2}$

(58) $\frac{16x^4y^3 + 32x^6y^5z^2}{8x^2y}$

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها: (الدرس 3-3)

(63) $3x^4 + 2x^2 - x^{-1}$ ليست كثيرة حدود.

(62) $9x^4 + 12x^6 - 16$ نعم؛ 6

(61) $8x^2 + 5x^4 - 6x + 4$ نعم؛ 4

حل كلاً من المعادلات الآتية مستعملاً القانون العام لحل المعادلة التربيعية: (الدرس 3-2)

(66) $x^2 - 13x + 12 = 0$ 1, 12

(65) $x^2 + 1 = 0$ $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(64) $x^2 - x - 3 = 0$ $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

الدرس 3-5 دوال كثيرات الحدود 141

فوق

تنوع التعليم

توسّع وضح للطلاب أنه يمكن أن يكون للدوال تماثل حول نقطة الأصل أو المحور y .

الدالة الزوجية هي الدالة التي تحقق الشرط $f(x) = f(-x)$ ، وهي متماثلة حول المحور y .

كمثال على دالة زوجية $f(x) = x^2$.

أما الدالة الفردية: فهي دالة تحقق الشرط $f(x) = -f(-x)$ ، وتكون متماثلة حول نقطة الأصل، وكمثال عليها $f(x) = x$.

اسأل الطلاب أن يحددوا ما إذا كانت $f(x) = x^3 - 5x$ و $g(x) = x^4 - 3x^2$ دوالاً زوجية أم فردية. فردية، زوجية

واسألهم عن إمكانية تماثل الدوال حول المحور x . الدالة الوحيدة التي تكون متماثلة حول المحور x هي $y = 0$ ،

أي تمثيل آخر تماثل حول المحور x لا يمثل دالة.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 5

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) دون تدريبات إعادة التعليم - تنمة (27) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-5 تدريبات إعادة التعليم

دوال كثيرات الحدود

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانياً

إذا كانت درجة الدالة زوجية والمعامل الرئيس موجباً، فإن: $f(x) \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$	إذا كانت درجة الدالة زوجية والمعامل الرئيس سالباً، فإن: $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$
إذا كانت درجة الدالة فردية والمعامل الرئيس موجباً، فإن: $f(x) \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$	إذا كانت درجة الدالة فردية والمعامل الرئيس سالباً، فإن: $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$

سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

الأصناف الحقيقية لدوال كثيرات الحدود

أكثر عدد من الأصناف لدالة كثيرة حدود يساوي درجة تلك الدالة، ويمثل صفر الدالة الحقيقي نقطة انقضاء التمثيل البياني للدالة مع المحور x .
بحسب عدد الأصناف على التمثيل البياني للدالة بعدد مرات تقاطع الرسم أو تقاسمه مع المحور x .

مثال: حدد فيها إذا كان التمثيل البياني يمثل دالة زوجية أو فردية واذكر عدد الأصناف الحقيقية.

تعاريف:

لكل تمثيل بياني فيها يأتي، أجب عن:

(a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
(b) حدد فيها إذا كان يمثل دالة زوجية أو فردية.
(c) اذكر عدد الأصناف الحقيقية.

فردية، 3

زوجية، 6

الفصل 3، كثيرات الحدود ودوالها 27

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-5 تدريبات إعادة التعليم

دوال كثيرات الحدود

كثيرة الحدود في متغير واحد من الدرجة n تكتب على الصورة
 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
حيث معاملات الحدود $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية، a_n متغير واحد ليس صفراً، n عدد صحيح غير سالب.

درجة كثيرة الحدود في متغير واحد هي أكبر أس للمتغير فيها. والمعامل الرئيس هو معامل الحد الذي له أكبر أس.

يمكن وصف دالة كثيرة الحدود من الدرجة n بمعادلة على الصورة
 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
حيث المعاملات $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية و a_n لا يساوي صفراً و n عدد صحيح غير سالب.

مثال 1: ما درجة كثيرة الحدود $x^2 - 7x - 2x^3 - 2x^4$ ، وما المعامل الرئيس فيها؟
أعد كتابة العبارة على أن تكون قوى x في ترتيب تنازلي.
 $-2x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 2x$
وهذه كثيرة حدود بمتغير واحد، درجتها 4 والمعامل الرئيس فيها -2.

مثال 2: $f(x) = x^2 + 2x^2 - 10x + 20$ إذا كان $f(-5) = 20$
النتيجة الأصلية
 $f(x) = x^2 + 2x^2 - 10x + 20$
نعرض -5 بدلاً من x .
 $f(-5) = (-5)^2 + 2(-5)^2 - 10(-5) + 20$
 $= 25 + 50 + 50 + 20$
 $= 125$
بالنتيجة، -5 .

مثال 3: اوجد قيمة $g(a^2 - 1)$ إذا كان $g(x) = x^2 + 3x - 4$
النتيجة الأصلية
 $g(x) = x^2 + 3x - 4$
نعرض $a^2 - 1$ بدلاً من x .
 $g(a^2 - 1) = (a^2 - 1)^2 + 3(a^2 - 1) - 4$
 $= a^4 - 2a^2 + 1 + 3a^2 - 3 - 4$
 $= a^4 + a^2 - 6$

تعاريف:

اذكر الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذا ذكر السبب.

(1) $4x^3 + 6x^2 + 8x - 10x^2 + 20$ (3) $100 - 5x^2 + 10x^2$ (2) $3x^4 + 6x^3 - x^2 + 12$
 $8; 8$ $7; 10$ $4; 3$

(4) $4x^2 - 3xy + 16y^2$ (5) $4x^3 - 9x^2 + 4x^2 - 36$ (6) $8x^3 - 9x^2 + 4x^2 - 36$
 $5; -9$ $6; -\frac{1}{25}$

ليست كثيرة حدود بمتغير واحد حيث يوجد متغيران.

أوجد $f(2)$ و $f(-5)$ لكل دالة فيها يأتي.

(7) $f(x) = 9x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ (9) $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ (8) $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 2x - 1$
 $-5; 16$ $73; -1243$ $23; -586$

الفصل 3، كثيرات الحدود ودوالها 26

تدريبات المهارات (28) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة (29) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-5 تدريبات حل المسألة

دوال كثيرات الحدود

التصنيف: تم تشكيل قطعة معدنية على شكل منحني
الدالة $f(x) = x^4 - 9x^2 + 14x$ في درجة كثيرة الحدود
هذه؟
4

تمثيل بياني، رسمت قطعة التمثيل البياني التالي للدالة
 $f(x)$

اعتمد على الرسم، وصف سلوك طرفي التمثيل البياني، وحدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية، ثم اكتب عدد الأصناف الحقيقية للدالة.

$x \rightarrow +\infty$ عندما $f(x) \rightarrow -\infty$
 $x \rightarrow -\infty$ عندما $f(x) \rightarrow +\infty$

الدالة فردية الدرجة، 3 أصناف حقيقية.

(B) الأعداد العكسية، يعطى العدد الجبرائي التالي بالعبارة
 $\frac{n(3n-1)}{2}$ ما درجة كثيرة الحدود هذه؟ وما العدد الجبرائي السابح.
 $2; 70$

(a) ما درجة f ؟
(b) إذا رسم ساسر 15 نقطة، فكم مثلثاً يمكن أن يكون؟
455

الفصل 3، كثيرات الحدود ودوالها 29

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-5 تدريبات المهارات

دوال كثيرات الحدود

اذكر الدرجة والمعامل الرئيس لكل دالة كثيرة حدود في متغير واحد، وإن لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذا ذكر السبب.

(1) $a + 8$ (2) $(2x-1)(4x^2+3)$ (3) 8
(4) $7y^4 - 7y^3 + 5y^2 - 3y + 18$ (5) $-5x^3 + 3x^2 - 8$
(6) $2r - r^2 + \frac{1}{r^2}$ (7) $4x^2 + 4r^2 + r^4$
لا لأنها تعوي على متغيرين r, x ، وليست كثيرة حدود، لأن الحد $\frac{1}{r^2}$ لا يمكن كتابته على الصورة r^k ، حيث k عدد صحيح غير سالب.

(8) $p(x) = 4 - 3x$ (9) $p(x) = 2x^2 - 4x + 1$
(10) $p(x) = -2x^3 + 5x + 3$ (11) $p(x) = x^4 + 8x^2 - 10$
(12) $p(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + 2$ (13) $p(a) = 4a^2 - 3$
(14) $r(2a) = 1 + 6a$ (15) $3r(a) = 3 + 9a$
(16) $-16a^2 + 12 - 4p(a)$ (17) $p(a^2) = 4a^4 - 3$

إذا كان $3 - 4x^2 = p(x)$ و $1 + 3x = r(x)$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

(18) $7 + 3x$ (19) $4a^4 - 3$

لكل تمثيل بياني فيها يأتي، أجب عن:

(a) صف سلوك طرفي التمثيل البياني.
(b) حدد فيها إذا كان يمثل دالة زوجية أم فردية.
(c) اذكر عدد الأصناف الحقيقية.

(20) $f(x) = x^2 + 2x^2 - 10x + 20$ إذا كان $f(-5) = 20$
النتيجة الأصلية
 $f(x) = x^2 + 2x^2 - 10x + 20$
نعرض -5 بدلاً من x .
 $f(-5) = (-5)^2 + 2(-5)^2 - 10(-5) + 20$
 $= 25 + 50 + 50 + 20$
 $= 125$
بالنتيجة، -5 .

(21) $g(x) = x^2 + 3x - 4$ إذا كان $g(a^2 - 1) = a^4 + a^2 - 6$
النتيجة الأصلية
 $g(x) = x^2 + 3x - 4$
نعرض $a^2 - 1$ بدلاً من x .
 $g(a^2 - 1) = (a^2 - 1)^2 + 3(a^2 - 1) - 4$
 $= a^4 - 2a^2 + 1 + 3a^2 - 3 - 4$
 $= a^4 + a^2 - 6$

$x \rightarrow +\infty$ عندما $f(x) \rightarrow -\infty$
 $x \rightarrow -\infty$ عندما $f(x) \rightarrow +\infty$

فردية، 1

زوجية، 4

الفصل 3، كثيرات الحدود ودوالها 28

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الفصل.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (51).

المطويات متابعة المطويات

قبل أن تطلب إلى الطلاب الإجابة عن اختبار منتصف الفصل شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 3-1 إلى 3-5 من خلال مطوياتهم.

بسط كلاً مما يأتي:

(1) $9i\sqrt{-81}$

(3) i^{37}

حل كلاً من المعادلتين الآتيتين:

(5) $x^2 - 8x - 9 = 0$

(6) $-4.8x^2 + 1.6x + 24 = 0$

بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

(7) $12rt^2 - 4rt$ $4t(3rt - r)$ $(8 - 6x^5y^2)(3x^2y^{-3})(-2x^3y^5)$

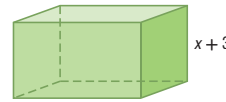
(9) $\frac{a^2}{2b^2c^2}$ $\frac{3a^4b^3c}{6a^2b^3c^3}$

(10) $\frac{p^2}{r^2} \left(\frac{p^2r^3}{pr^4}\right)^2$

(11) $-2m^2 - 9m + 6$ $(4m^2 - 6m + 5) - (6m^2 + 3m - 1)$

(12) اختيار من متعدد: إذا علمت أن حجم متوازي المستطيلات

في الشكل أدناه هو $6x^3 + 19x^2 + 2x - 3$ ، فأبي كثيرة حدود فيما يأتي تمثل مساحة قاعدته؟ C



A $6x^4 + 37x^3 + 59x^2 + 3x - 9$

B $6x^2 + x + 1$

C $6x^2 + x - 1$

D $6x + 1$

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة)؛ لإيجاد الناتج في كلِّ ممّا يأتي:

(13) $2r^2 + r - 4$ $(4r^3 - 8r^2 - 13r + 20) \div (2r - 5)$

(14) $3x^2 - x + 4 - \frac{4}{x-5}$ $\frac{3x^3 - 16x^2 + 9x - 24}{x-5}$

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلِّ ممّا يأتي:

(15) $(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3) \div (2x - 1)$

(16) $(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 4x + 10) \div (x + 3)$

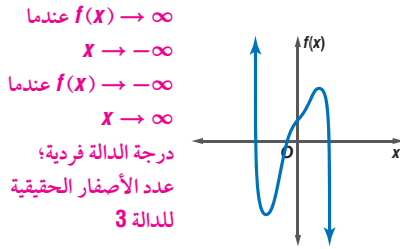
(16) $x^3 - 2x + 2 + \frac{4}{x+3}$

(15) $2x^2 - 2x + 2 - \frac{1}{2x-1}$

142 الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

(17) استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $x + 6$ $(x^2 + 2x - 24) \div (x - 4)$

(18) صف سلوك طرفي التمثيل البياني الآتي، وحدد ما إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية. واذكر عدد الأصفار الحقيقية للدالة.



(19) اختيار من متعدد: إذا كان $p(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 5x$ ، فما قيمة $p(-3)$ ؟ A

0 A

11 B

30 C

36 D

(20) اختيار من متعدد: إذا كانت

$f(x) = x^2 + 3x$, $h(x) = 2x^2 - 3x + 5$

فإن $.3f(a - 4) - 2h(a)$ ؟ D

A $-a^2 + 15a - 74$

B $-a^2 - 2a - 1$

C $a^2 + 9a - 2$

D $-a^2 - 9a + 2$

(21) بندول: يُعطى طول بندول بالصيغة $L(t) = \frac{8t^2}{\pi^2}$ ؛

حيث t الزمن الدوري له بالثواني، L طول البندول بالأقدام. أوجد طول بندول زمنه الدوري 4 ثوانٍ. تقريباً 12.97 ft

(22) طاقة: يعبر عن القوة التقريبية التي تولدها طاحونة تعمل بطاقة

الرياح بالدالة: $P(s) = \frac{s^3}{1000}$ ، حيث s سرعة الرياح بالكيلومتر

لكل ساعة. فكم وحدة قوة تولدها الطاحونة عندما تكون سرعة

الرياح 18km/h؟ 5.832 وحدات

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريباً من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس من 3-1 إلى 3-5.		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26).
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28).		www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-6

حل معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.

الدرس 3-6

تحليل كثيرات الحدود.

حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل إلى العوامل.

ما بعد الدرس 3-6

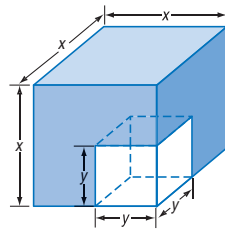
استعمال طرائق تتضمن التحليل للعوامل لإعادة كتابة معادلات كثيرة حدود وحلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
واسأل:

- ما قانون حجم المكعب؟ $v = l^3$
- ما حجم المكعب الكبير في الشكل إذا كان $x = 5\text{in}$ ؟ 125in^3
- ما الفرق بين حجمي المكعبين إذا كان $x = 5\text{in}$ و $y = 2\text{in}$ ؟ 117in^3



لماذا؟
قُطع مكعب صغير من آخر كبير كما في الشكل المجاور، وأُعطي حجم الجزء المتبقي والعلاقة بين بعدي المكعبين، والمطلوب إيجاد أبعاد المكعبين الصغير والكبير. لاحظ أنه يمكن إيجادها بتحليل كثيرة الحدود التكعيبة $x^3 - y^3$.

تحليل كثيرات الحدود: تعلمت سابقاً أنه يمكن تحليل كثيرات الحدود التربيعية تماماً كما تحلل الأعداد الكلية، ولكن عواملها ستكون كثيرات حدود أخرى، وكما هو الحال في كثيرات الحدود التربيعية يمكن تحليل بعض كثيرات الحدود التكعيبة بقوانين خاصة.

مفهوم أساسي	مجموع مكعبين والفرق بينهما	أضف إلى مطويتك
طريقة التحليل	الحالة العامة	
مجموع مكعبين	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	
الفرق بين مكعبين	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	

تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها إلى كثيرتي حدود درجة كل منهما أقل من درجة كثيرة الحدود المُعطاة **كثيرة حدود أولية**.

مثال 1

مجموع مكعبين والفرق بينهما

حلل كلاً من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فاكتب كثيرة حدود أولية:

(a) $16x^4 + 54xy^3$

بإخراج العامل المشترك الأكبر.

$$16x^4 + 54xy^3 = 2x(8x^3 + 27y^3)$$

كل من $8x^3$ و $27y^3$ مكعب كامل، لذا تستطيع استعمال طريقة مجموع مكعبين.

$$\begin{aligned} 8x^3 + 27y^3 &= (2x)^3 + (3y)^3 \\ &= (2x + 3y)[(2x)^2 - (2x)(3y) + (3y)^2] \\ &= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) \end{aligned}$$

بكتابة العامل المشترك الأكبر $16x^4 + 54xy^3 = 2x(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

(b) $8y^3 + 5x^2$

الحد الأول مكعب كامل، لكن الحد الثاني ليس كذلك، لذا لا يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال طريقة مجموع مكعبين، ولا يمكن تحليلها كذلك بطرائق تحليل كثيرات الحدود التربيعية، أو بإخراج العامل المشترك الأكبر؛ لذا فهي كثيرة حدود أولية.

(1A) $5y(y - 4z)(y^2 + 4yz + 16z^2)$
(1B) $-2w(3w + 5z)(9w^2 - 15wz + 25z^2)$

(1B) $-54w^4 - 250wz^3$

تحقق من فهمك

(1A) $5y^4 - 320yz^3$

فيما سبق:

درست حل معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.

والآن:

- أحل كثيرات الحدود.
- أحل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل إلى العوامل.

المفردات

كثيرة حدود أولية
prime polynomial
الصورة التربيعية
quadratic form

مصادر الدرس 3-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (145)	• تنويع التعليم، ص (145)	• تنويع التعليم، ص (145-149)
كتاب التمارين	• ص (20)	• ص (20)	• ص (20)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

يلخص الجدول الآتي معظم الطرائق المستعملة لتحليل كثيرات الحدود، وعندما تريد تحليل كثيرة حدود ابحث أولاً عن العامل المشترك الأكبر، ثم حدد ما إذا كانت كثيرة الحدود الناتجة بعد إخراج العامل المشترك الأكبر قابلة للتحليل أم لا مستعملاً واحدة أو أكثر من الطرائق المذكورة في الجدول أدناه:

اضف إلى مطويتك	ملخص المفهوم	طرائق التحليل	عدد الحدود
	نموذج	طريقة التحليل	عدد الحدود
	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$	إخراج العامل المشترك الأكبر	أي عدد
	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	الفرق بين مربعين مجموع مكعبين الفرق بين مكعبين	حدان
	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	ثلاثية حدود المربع الكامل	ثلاثة حدود
	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	ثلاثة حدود
	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$	تجميع الحدود	أربعة حدود أو أكثر

تحليل كثيرات الحدود

مثال 1: يوضح كيفية تحليل مجموع مكعبين أو الفرق بينهما.

مثال 2: يوضح كيفية استعمال التجميع لتحليل كثيرة حدود إلى العوامل.

مثال 3: يوضح كيفية تحليل كثيرة حدود باستعمال الفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بين مكعبين.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال 2 التحليل بتجميع الحدود

حلّل كلّاً من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلاً تاماً، وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فاكتب كثيرة حدود أولية:

$$(a) \quad 8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$$

العبارة الأصلية

بالتجميع لإخراج العامل المشترك الأكبر

بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع

خاصية التوزيع

$$\begin{aligned} &= (8ax + 4bx + 4cx) + (6ay + 3by + 3cy) \\ &= 4x(2a + b + c) + 3y(2a + b + c) \\ &= (4x + 3y)(2a + b + c) \end{aligned}$$

$$(b) \quad 20fy - 16fz + 15gy + 8hz - 10hy - 12gz$$

العبارة الأصلية

بالتجميع لإخراج العامل المشترك الأكبر

بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع

خاصية التوزيع

$$\begin{aligned} &= (20fy + 15gy - 10hy) + (-16fz - 12gz + 8hz) \\ &= 5y(4f + 3g - 2h) - 4z(4f + 3g - 2h) \\ &= (5y - 4z)(4f + 3g - 2h) \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$(2A) \quad 30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2 \quad (6x - y^2)(5a - 4b + c)$$

$$(2B) \quad 13ax + 18bz - 15by - 14az \quad \text{كثيرة حدود أولية}$$

تُعد طريقة التحليل بتجميع الحدود هي الطريقة الأساسية لتحليل كثيرات الحدود المكونة من أربعة حدود أو أكثر، أما كثيرات الحدود المتضمنة حدين أو ثلاثة حدود فيمكن تحليلها اعتماداً على إحدى الطرائق الموجودة في الجدول أعلاه.

إرشادات للدراسة

بعد تحليل كثيرة الحدود تحليلاً تاماً إذا كتبت في صورة ناتج ضرب كثيرات حدود جميعها أولية، أي إذا حلت إلى أقصى درجة ممكنة.

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة: اضرب العوامل للتحقق من صحة تحليل كثيرة الحدود.

مثالان إضافيان

1 حلّل كلّاً من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فاكتب كثيرة حدود أولية:

$$(a) \quad x^2 + 10$$

$$(b) \quad 24x^5 + 3x^2y^3$$

$$3x^2(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$$

$$(a) \quad x^3 + 5x^2 - 2x - 10$$

$$(x + 5)(x^2 - 2)$$

$$(b) \quad a^2 + 3ay + 2ay^2 + 6y^3$$

$$(a + 3y)(a + 2y^2)$$

تنبيه

معالجة الأخطاء وضح للطلاب أن كثيراً منهم غالباً ما يتجاهلون أو لا يعرفون أن طريقة التجميع يمكن استخدامها في تحليل دالة كثيرة الحدود.

لذا أكد أن هذا النوع يستعمل غالباً عندما يكون هنالك أربعة حدود أو أكثر.

معالجة الأخطاء

أكد على الطلاب أن يتحققوا من كل عامل توصلوا إليه هل هو عامل أولي أم لا، قبل أن يحددوا عدد العوامل النهائي.

في المثال a ، إذا بدأت بالتحليل على اعتبار أن كثيرة الحدود المعطاة فرق بين مكعبين؛ فإنك تحصل على التحليل التالي:
 $(x^2 - y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$
وهو تحليل غير تام ويصعب إتمامه.

تجميع 6 حدود أو أكثر جمع الحدود التي بينها أكبر عدد من العوامل المشتركة.

مثال 3

التحليل باستعمال الفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بين مكعبين

حلل كلاً من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فاكتب كثيرة حدود أولية:
 $x^6 - y^6$ (a)

يمكن اعتبار كثيرة الحدود هذه فرقاً بين مربعين أو فرقاً بين مكعبين، وفي مثل هذه الحالة يجب أن يتم التحليل أولاً على اعتبار أنها فرق بين مربعين قبل التحليل على اعتبار أنها فرق بين مكعبين؛ تسهياً للتحليل.

$$x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$$

مجموع مكعبين والفرق بين مكعبين

$$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

بما أن كثيرة الحدود هذه من 6 حدود، إذن حلل أولاً بتجميع الحدود.

$$a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$$

بالتجميع لإخراج العامل المشترك الأكبر

بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع

خاصية التوزيع

فرق بين مكعبين

ثلاثية حدود المربع الكامل

$$= (a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3) + (-b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3)$$

$$= a^3(x^2 - 6x + 9) - b^3(x^2 - 6x + 9)$$

$$= (a^3 - b^3)(x^2 - 6x + 9)$$

$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x^2 - 6x + 9)$$

$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x - 3)^2$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - 3)^2 \quad \text{3B}$$

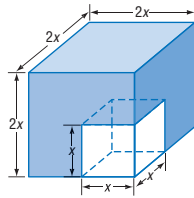
تحقق من فهمك

$$x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3 \quad \text{3B} \quad (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) \quad a^6 + b^6 \quad \text{3A}$$

حل معادلات كثيرات الحدود: يمكنك تطبيق طرائق حل المعادلات التربيعية في حل معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات الأعلى من الدرجة الثانية.

مثال 4 من واقع الحياة

حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل



هندسة: ارجع إلى فقرة لماذا في بداية هذا الدرس. إذا كان طول ضلع المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي 7000cm^3 ، فما بُعدا المكعبين؟

بما أن طول ضلع المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير فيمكن أن يعبر عن طول ضلع المكعب الصغير بـ x ، وطول ضلع المكعب الكبير بـ $2x$. لاحظ أن حجم الجزء المتبقي يساوي حجم المكعب الكبير مطروحاً منه حجم المكعب الصغير.

حجم الجزء المتبقي

$$(2x)^3 - 8x^3$$

بالطرح

بالقسمة

ب طرح 1000 من كلا الطرفين

فرق بين مكعبين

خاصية الضرب الصفري

$$(2x)^3 - x^3 = 7000$$

$$8x^3 - x^3 = 7000$$

$$7x^3 = 7000$$

$$x^3 = 1000$$

$$x^3 - 1000 = 0$$

$$(x - 10)(x^2 + 10x + 100) = 0$$

$$x^2 + 10x + 100 = 0 \quad \text{أو} \quad x - 10 = 0$$

$$x = -5 \pm 5i\sqrt{3} \quad x = 10$$

وبما أن العدد 10 هو الحل الحقيقي الوحيد. فإن طولي ضلعي المكعبين هما 10cm, 20cm.

تحقق من فهمك

4 إذا كان طول ضلع المكعب الصغير ثلث طول ضلع المكعب الكبير، وحجم الجزء المتبقي 3250cm^3 ، فأوجد بُعدي المكعبين. **5 cm, 15 cm**

مثال إضافي

3

حلل كلاً من كثيرتي الحدود الآتيتين، وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فاكتب كثيرة حدود أولية:

$$x^2y^3 - 3xy^3 + 2y^3 + x^2z^3 - 3xz^3 + 2z^3 \quad \text{a}$$

$$(x - 2)(x - 1)(y + z)$$

$$(y^2 - yz + z^2)$$

$$(2x - y)64x^6 - y^6 \quad \text{b}$$

$$(4x^2 + 2xy + y^2)(2x + y)$$

$$(4x^2 - 2xy + y^2)$$

حل معادلات كثيرات الحدود

مثال 4 يوضح كيفية حل معادلة كثيرة حدود بالتحليل.

مثال 5 يوضح كيفية كتابة بعض العبارات على الصورة التربيعية.

مثال 6 يوضح كيفية حل معادلات كثيرات حدود باستعمال الصورة التربيعية.

مثال إضافي

4

هندسة بالرجوع إلى مثال 4، حدد

أبعاد المكعبين إذا علمت أن طول ضلع المكعب الصغير يساوي نصف طول ضلع المكعب الكبير،

وأن حجم الجزء المتبقي 23625 ستمتراً مكعباً.

الكبير 30 سم، والصغير 15 سم

المحتوى الرياضي

حل معادلات كثيرات حدود: إذا أمكن كتابة كثيرة حدود على صورة حاصل ضرب عامل خطي وعامل تربيعي، فإنه يمكن إيجاد أصفارها بمساواة كل عامل بالصففر وحل المعادلات الناتجة.

تنوع التعليم

دون ضمنى فوق

إذا احتاج بعض الطلاب إلى مساعدة بصرية لحل مسائل شبيهة بمثال 4 والمثال الإضافي 4،

بمساعدهتهم على عمل نموذج للمكعبات من الورق المقوى.

تستطيع أحياناً أن تكتب كثيرة حدود فيها المتغير x على الصورة $au^2 + bu + c$ ، فمثلاً بفرض أن $u = x^2$ ، يمكن كتابة كثيرة الحدود $x^4 + 12x^2 + 32$ على الصورة $(x^2)^2 + 12(x^2) + 32$ أو $u^2 + 12u + 32$. وكثيرة الحدود الجديدة هذه تكافئ كثيرة الحدود الأصلية، ولكنها مكتوبة على الصورة التربيعية.

مفهوم أساسي الصورة التربيعية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي: $au^2 + bu + c$ ، $a \neq 0$ ، a, b, c أعداد حقيقية، ويمكن أن نكتب بعض كثيرات الحدود في المتغير x على هذه الصورة، وذلك بعد تعريف u بدلالة x .

مثال: $12x^6 + 8x^3 + 1 = 3(2x^3)^2 + 4(2x^3) + 1$

مثال 5 الصورة التربيعية

اكتب العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن أمكن ذلك:

(a) $150n^8 + 40n^4 - 15$

ابحث عن عاملين للعدد 150؛ أحدهما مربع كامل، وعن عاملين للعدد 40؛ أحدهما الجذر التربيعي لأحد عاملي العدد 150.

$150 = 6 \times 25, 40 = 8 \times 5$ $150n^8 + 40n^4 - 15 = 6 \times 25n^8 + 8 \times 5n^4 - 15$
 $(5n^4)^2 = 25n^8$ $= 6(5n^4)^2 + 8(5n^4) - 15$

(b) $y^8 + 12y^3 + 8$

لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية؛ لأن $(y^3)^2 \neq y^8$.

(5A) لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية **تحقق من فهمك**

(5B) $8x^4 + 12x^2 + 18$ $2(2x^2)^2 + 6(2x^2) + 18$ $x^4 + 5x + 6$ (5A)

يمكنك في بعض الأحيان استعمال الصورة التربيعية لحل معادلات كثيرات الحدود ذات درجات أكبر من الدرجة الثانية.

مثال 6 حل معادلات كثيرات الحدود باستعمال الصورة التربيعية

حل المعادلة: $18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$

المعادلة الأصلية $18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$

$2(3x^2)^2 = 18x^4$ $2(3x^2)^2 - 7(3x^2) + 3 = 0$

بفرض أن $u = 3x^2$ $2u^2 - 7u + 3 = 0$

بالتحليل إلى العوامل $(2u - 1)(u - 3) = 0$

خاصية الضرب الصفري $u = 3$ أو $u = \frac{1}{2}$

بتعويض $3x^2$ بدلاً من u $3x^2 = 3$ $3x^2 = \frac{1}{2}$

بالقسمة على 3 $x^2 = 1$ $x^2 = \frac{1}{6}$

بإيجاد الجذر التربيعي $x = \pm 1$ $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$

حلول المعادلة هي: $1, -1, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(6A) $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$ **تحقق من فهمك**

(6B) $8x^4 + 10x^2 - 12 = 0$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي جهز عرضاً تقديمياً لحل مثال يوضح كيفية حل معادلة كثيرة حدود من خلال تحويلها إلى الصورة التربيعية، واعرضه أمام الطلاب، ويمكنك وضعه على الموقع ليتسنى للطلاب مشاهدته واعتباره مرجعاً لهم خارج الصف.

إرشادات للدراسة

الصورة التربيعية

لكتابة كثيرة حدود على الصورة التربيعية، اختر العبارة المكافئة لـ u بالنظر إلى الحدود التي تحوي متغيرات، واهتم خصوصاً بأسس المتغير الأصلي في تلك الحدود. فهناك كثيرات حدود لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية.

مثالان إضافيان

5 اكتب العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن أمكن ذلك:

(a) $2x^6 - x^3 + 9$

$2(x^3)^2 - (x^3) + 9$

(b) $x^4 - 2x^3 - 1$ لا يمكن

كتابتها على الصورة التربيعية

لأن $(x^3)^2 \neq x^4$.

6 حل المعادلة:

$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

$-5, -2, 2, 5$

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة ربما يستتج الطلاب خطأً في مثال 5 أن المتغيرات في التعبير يجب أن تكون بقوى زوجية لإعادة كتابتها على الصورة التربيعية. وضح لهم أن العلاقة بين قوة حدين تشير إلى إمكانية كتابتها بالصورة التربيعية.

فمثلاً $3 + 9x^{\frac{1}{2}} - x$ يمكن كتابتها على الصورة $9(x^{\frac{1}{2}})^2 - 9(x^{\frac{1}{2}}) + 3$ ؛ لأن قوة الحد x مثلي قوة الحد $x^{\frac{1}{2}}$.

3-6) انظر الهامش

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تاماً. وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فاكتب كثيرة حدود أولية:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 3ax + 2ay - az + 3bx \\ (2) \quad & 2(2g + h)(4g^2 - 2gh + h^2) \quad 16g^3 + 2h^3 \\ (3) \quad & 12qw^3 - 12q^4 \\ (4) \quad & a^6x^2 - b^6x^2 \\ (5) \quad & x^3y^2 - 8x^3y + 16x^3 + y^5 - 8y^4 + 16y^3 \\ (6) \quad & 8c^3 - 125d^3 \end{aligned}$$

الأمثلة 1-3

(1) كثيرة حدود أولية

3) التدريب

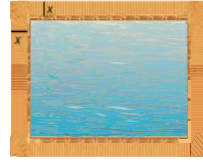
تقويم تكويني

استعمل الأسئلة 1-11 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفله هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

$$\begin{aligned} (3) \quad & 12q(w - q)(w^2 + qw + q^2) \\ (4) \quad & x^2(a+b)(a-b)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \\ (5) \quad & (x + y)(x^2 - xy + y^2)(y - 4)^2 \\ (6) \quad & (2c - 5d)(4c^2 + 10cd + 25d^2) \\ (12) \quad & (2c - 3d)(4c^2 + 6cd + 9d^2) \\ (13) \quad & x(4x + y)(16x^2 - 4xy + y^2) \\ (14) \quad & a^2(a+b)(a-b)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \\ (15) \quad & y^3(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) \\ (26) \quad & (x^2)^2 + 12(x^2) - 8 \\ (27) \quad & -15(x^2)^2 + 18(x^2) - 4 \\ (28) \quad & 2(2x^3)^2 + 3(2x^3) + 7 \\ (29) \quad & \text{غير ممكن} \\ (30) \quad & (3x^4)^2 - 7(3x^4) + 12 \\ (31) \quad & 4(2x^5)^2 + 1(2x^5) + 6 \\ (32) \quad & \pm i\sqrt{5}, \pm i \\ (33) \quad & \pm\sqrt{5}, \pm i\sqrt{2} \\ (34) \quad & \pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \\ (35) \quad & \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{15}}{3} \\ (36) \quad & \pm\sqrt{2}, \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ (37) \quad & \pm\frac{\sqrt{6}}{6}, \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



(7) **إنشاءات:** صنع أنس ممراً خشبياً عرضه x ft حول بركة مستطيلة الشكل. فإذا كان طول البركة 40ft وعرضها 30 ft، ومساحتها مع الممر 2000ft²، فما عرض الممر الخشبي؟ **5 ft**

مثال 4

اكتب كلاً من العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكناً:

$$(8) \quad 4x^6 - 2x^3 + 8 \quad (2x^3)^2 - 1(2x^3) + 8 \quad (9) \quad 25y^6 - 5y^2 + 20$$

$$(10) \quad x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \quad (2, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad (11) \quad y^4 - 18y^2 + 72 = 0 \quad (\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$$

مثال 5

مثال 6

تدرب وحل المسائل

12-15) انظر الهامش

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلاً تاماً. وإذا لم يكن ذلك ممكناً، فاكتب كثيرة حدود أولية:

$$\begin{aligned} (13) \quad & 64x^4 + xy^3 \\ (14) \quad & a^8 - a^2b^6 \\ (15) \quad & x^6y^3 + y^9 \\ (16) \quad & gx^2 - 3hx^2 - 6fy^2 - gy^2 + 6fx^2 + 3hy^2 \\ (17) \quad & 18x^6 + 5y^6 \quad \text{كثيرة حدود أولية} \\ (18) \quad & 8x^5 - 25y^3 + 80x^4 - x^2y^3 + 200x^3 - 10xy^3 \\ (19) \quad & 12ax^2 - 20cy^2 - 18bx^2 - 10ay^2 + 15by^2 + 24cx^2 \\ (20) \quad & 3, -3, \pm i\sqrt{10} \\ (21) \quad & 6, -6, \pm 2i\sqrt{5} \\ (22) \quad & x^4 - 7x^2 - 44 = 0 \\ (23) \quad & x^4 + x^2 - 90 = 0 \\ (24) \quad & x^3 + 216 = 0 \\ (25) \quad & 64x^3 + 1 = 0 \\ (26) \quad & x^4 + 12x^2 - 8 \\ (27) \quad & -15x^4 + 18x^2 - 4 \\ (28) \quad & 8x^6 + 6x^3 + 7 \\ (29) \quad & 5x^6 - 2x^2 + 8 \\ (30) \quad & 9x^8 - 21x^4 + 12 \\ (31) \quad & 16x^{10} + 2x^5 \\ (32) \quad & 4x^4 - 14x^2 + 12 = 0 \\ (33) \quad & x^4 - 3x^2 - 10 = 0 \\ (34) \quad & 24x^4 + 14x^2 - 3 = 0 \\ (35) \quad & 9x^4 - 27x^2 + 20 = 0 \\ (36) \quad & 4x^4 - 5x^2 - 6 = 0 \end{aligned}$$

الأمثلة 1-3

مثال 4

$$(23) \quad \pm\sqrt{7}, \pm i\sqrt{13} \\ (24) \quad -6, 3 \pm 3i\sqrt{3}$$

مثال 5

مثال 6

الدرس 3-6 حل معادلات كثيرات الحدود 147

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون	دون المتوسط 68-77 ، 12-41
ضمن	ضمن المتوسط 53-64 ، 67-77 ، فردي 13-43
فوق	فوق المتوسط 51-77

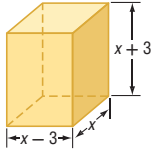
حلّ كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًا، وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية: (38-45) **انظر الهامش**
 $8x^5y^2 - 27x^2y^5$ (41) $x^5 - 16x$ (40) $x^6 - 64$ (39) $x^4 - 625$ (38)

$$15ax - 10bx + 5cx + 12ay - 8by + 4cy + 15az - 10bz + 5cz \quad (42)$$

$$6a^2x^2 - 24b^2x^2 + 18c^2x^2 - 5a^2y^3 + 20b^2y^3 - 15c^2y^3 + 2a^2z^2 - 8b^2z^2 + 6c^2z^2 \quad (43)$$

$$6x^5 - 11x^4 - 10x^3 - 54x^3 + 99x^2 + 90x \quad (44)$$

$$20x^6 - 7x^5 - 6x^4 - 500x^4 + 175x^3 + 150x^2 \quad (45)$$



(46) **هندسة:** إذا كان حجم المجسم المجاور يساوي 440cm^3 ، فأوجد كلاً من قيمة x ، وطول المجسم، وعرضه، وارتفاعه. $x = 8; 5, 8, 11$

حلّ كل معادلة مما يأتي: (47-53) **انظر الهامش**

$$6x^4 - 5x^2 - 4 = 0 \quad (48) \quad 8x^4 + 10x^2 - 3 = 0 \quad (47)$$

$$18x^4 + 43x^2 - 5 = 0 \quad (50) \quad 20x^4 - 53x^2 + 18 = 0 \quad (49)$$

$$3x^4 - 22x^2 - 45 = 0 \quad (52) \quad 8x^4 - 18x^2 + 4 = 0 \quad (51)$$

$$-1, 1, \pm \frac{1}{2} \quad 4x^4 - 4x^2 - x^2 + 1 = 0 \quad (54) \quad x^6 - 26x^3 - 27 = 0 \quad (53)$$

$$\pm i\sqrt{5}, \pm i\sqrt{3} \quad x^4 + 8x^2 + 15 = 0 \quad (56) \quad \pm 3, \pm 1, \pm i \quad x^6 - 9x^4 - x^2 + 9 = 0 \quad (55)$$

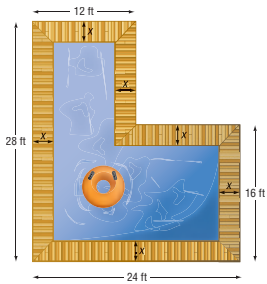
(57) **هندسة:** منشور متوازي مستطيلات أبعاده $x - 2, x - 4, x - 6$ ، وحجمه $40x$ وحدة مكعبة.

(a) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل حجم المنشور. $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 40x$

(b) حل المعادلة باستعمال التحليل إلى العوامل. $12, \pm 2i$

(c) هل هناك قيم غير مقبولة للمتغير x عند حل المعادلة؟ وضع إجابتك.

(d) ما أبعاد المنشور؟ $6, 8, 10$



(58) **تصميم:** يريد سليمان أن يبني بركة سباحة وفق التصميم المجاور، حيث يحيط بها ممر خشبي بعرض ثابت.

(a) إذا كانت مساحة البركة فقط 336ft^2 ، فما قيمة x ؟ **قدمان**

(b) إذا أصبحت قيمة x مثلها وذلك بتقليل مساحة البركة، فما المساحة الجديدة للبركة؟ **176ft^2**

(c) إذا نصفت قيمة x بزيادة مساحة البركة، فما مساحة البركة فقط عندئذٍ؟ **428ft^2**

(59) **أحياء:** قدّر مأمون عدد الفيروسات في إحدى التجارب بالدالة:

$P(t) = -0.012t^3 - 0.24t^2 + 6.3t + 8000$ ، حيث t الزمن بالساعات، $P(t)$ عدد الفيروسات. فإذا أراد مأمون أن يحدد الزمن الذي يصبح فيه عدد الفيروسات 8000 فيروس.

(a) فأوجد قيمة t باستعمال التحليل إلى العوامل. **$15, 0, -35$**

(b) كيف أجريت عملية التحليل إلى العوامل؟ (59b, 59c) **انظر الهامش.**

(c) ما قيم t المقبولة؟ وما القيم غير المقبولة؟ وضع إجابتك.



الربط مع الحياة

يتراوح عدد الفيروسات في دم المصاب بالتهاب الكبد الفيروسي المزمن بين 50 ألف و 50 مليون فيروس في الملمتر الواحد.

إرشادات للمعلم الجديد

حس رياضي اسأل الطلاب عن سبب

عدم صحة العبارة في سؤال 66 هل

$a^2 + b^2 = (a + b)^2$ عبارة غير صحيحة؟

ووضّح لهم أنه عند فك الطرف الأيمن

تصبح العبارة $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

وليس $a^2 + b^2$.

إجابات:

$$(x^2 + 25)(x + 5)(x - 5) \quad (38)$$

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x - 2) \quad (39)$$

$$(x^2 + 2x + 4)$$

$$x(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4) \quad (40)$$

$$x^2y^2(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) \quad (41)$$

$$(5x + 4y + 5z)(3a - 2b + c) \quad (42)$$

$$(43)$$

$$(6x^2 - 5y^3 + 2z^2)(a^2 - 4b^2 + 3c^2)$$

$$x(x + 3)(x - 3)(3x + 2)(2x - 5) \quad (44)$$

$$(45)$$

$$x^2(x + 5)(x - 5)(4x - 3)(5x + 2)$$

$$\pm \frac{1}{2}, \pm i \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (47)$$

$$\pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, \pm i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (48)$$

$$\pm \frac{3}{2}, \pm \frac{\sqrt{10}}{5} \quad (49)$$

$$\pm \frac{1}{3}, \pm i \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (50)$$

$$\pm \frac{1}{2}, \pm \sqrt{2} \quad (51)$$

$$3, -3, \pm i \frac{\sqrt{15}}{3} \quad (52)$$

$$-1, 3, \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad (53)$$

(59b) **إجابة ممكنة:** اطرح 8000 من

كل طرف، واضرب كل طرف في

العدد 1000؛ للتخلص من الكسور

العشرية. أخرج العامل المشترك

$-12t$ ثم حلل المقدار الثلاثي.

(59c) **إجابة ممكنة:** 0، 15 قيم مقبولة

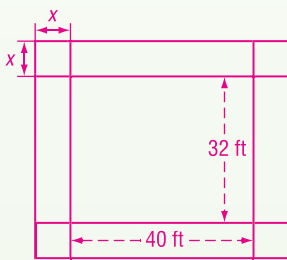
للمتغير t لكن -35 غير مقبولة؛ لأن

الوقت لا يكون سالبًا.

4 التقويم

فهم الرياضيات أحضر مغلفين فيهما قصاصات صغيرة من الأوراق. اكتب على القصاصات الورقية في أحدهما معادلات كثيرة حدود يمكن حلها بالتحليل للعوامل، واكتب على قصاصات الكيس الثاني معادلات كثيرة حدود تربيعية، ثم اطلب إلى كل طالب سحب قصاصة من كل كيس وحل معادلته.

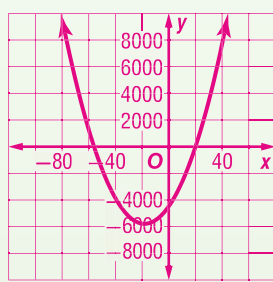
إجابات:



(64a)

$$4x^2 + 144x + 1280 = 5760; \quad (64b)$$

$$x = -56, x = 20$$



(64c)

(64d) -56 ؛ لأن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا.

(66) إجابة ممكنة: $a = 1, b = -1$

(67) إجابة ممكنة:

$$12x^6 + 6x^4 + 8x^2 + 4$$

$$= 12(x^2)^3 + 6(x^2)^2 + 8(x^2) + 4$$

(68) إجابة ممكنة: يمكن تحديد العوامل من معرفة المقطع x للتمثيل البياني للدالة؛ فإذا كان مقطع x للتمثيل البياني للدالة يساوي 5 مثلاً فإن $(x - 5)$ أحد عوامل كثيرة الحدود.

(71) الدرجة 4، والمعامل الرئيس 5

(72) الدرجة 5، والمعامل الرئيس -2

(73) الدرجة 7، والمعامل الرئيس -1

$$f(x) = 8x^2 + 34x + 24 \quad (60a)$$

(60) **تصميم المباني:** يمثل الشكل المجاور مخطط شقة سكنية.

(a) اكتب دالة بدلالة المتغير x تمثل مساحة الشقة.

(b) إذا كانت مساحة الشقة 13666ft^2 ، فما قيمة x ؟ **11 ft**

حلل كل كثيرة حدود فيما يأتي تحليلاً تاماً. وإن لم يكن ذلك ممكناً فاكتب كثيرة حدود أولية:

$$(x+2)^3(x-2)^3 \quad (61) \quad x^6 - 4x^4 - 8x^2 + 32x^2 + 16x^2 - 64 \quad (62)$$

$$y^9 - y^6 - 2y^6 + 2y^3 + y^3 - 1 \quad (62) \quad x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6 \quad (63)$$

(64) **حدائق:** حديقة مستطيلة الشكل بُعدها 32 ft و 40 ft، تم توسعتها لتصبح مساحتها 4.5 أمثال مساحتها الأصلية بزيادة كل من طولها وعرضها بالمقدار نفسه. **(64a - 64d) انظر الهامش.**

(a) ارسم شكلاً يمثل الموقف.

(b) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل المساحة الجديدة، وحلها بالتحليل إلى العوامل.

(c) مثل الدالة بيانياً. (d) ما الحل غير المقبول؟ وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

(65) **تحذ:** حلل المقدار $36x^{2n} + 12x^n + 1$ إلى عوامله. $(6x^n + 1)^2$

(66) **تبرير:** أعط مثلاً مضاداً للعبارة: $a^2 + b^2 = (a + b)^2$. **(66-68) انظر الهامش**

(67) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت الصورة التكميلية لمعادلة هي: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ، فاكتب معادلة من الدرجة السادسة يمكن كتابتها على الصورة التكميلية.

(68) **اكتب:** وضح كيف يمكن أن يساعدك تمثيل دالة كثيرة حدود بيانياً على تحليلها؟

تدريب على اختبار

(69) **إجابة قصيرة** حل المعادلة: $x^3 + 27 = 0$.

$$-3, \frac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$$

(70) إذا كان الفرق الموجب بين العددين $\frac{1}{12}$ ، k مساوياً للفرق

الموجب بين العددين $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{5}$ ، فما قيمة k ؟ **D**

$\frac{1}{15}$	C	$\frac{1}{60}$	A
$\frac{13}{60}$	D	$\frac{1}{20}$	B

مراجعة تراكمية

(71-73) انظر الهامش

حدّد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد فاذكر السبب: (الدرس 3-5)

$$f(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x^6 - x^7 \quad (73) \quad f(x) = -2x^5 + 5x^4 + 3x^2 + 9 \quad (72) \quad f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x^4 - 8x \quad (71)$$

(74) **كهرباء:** دائرة كهربائية تتكون من جزأين موصولين على التوالي؛ معاوقة الأول $4z + 3$ أوم، ومعاوقة الثاني $6z - 2$ أوم. اجمع هذين العددين المركبين لتجد المعاوقة الكلية لهذه الدائرة. (الدرس 3-1) **$5 - 2j$ أوم**

$$8x^2 - 12x + 24 - \frac{42}{x+2} \quad (77) \quad x + 3.5 - \frac{13.5}{2x+1} \quad (76) \quad x + 2 - \frac{10}{x+4} \quad (75) \quad (75) \quad (75)$$

$$(8x^3 + 4x^2 + 6) \div (x + 2) \quad (77) \quad (2x^2 + 8x - 10) \div (2x + 1) \quad (76) \quad (x^2 + 6x - 2) \div (x + 4) \quad (75)$$

149 **الدرس 3-6** حل معادلات كثيرات الحدود

تنوع التعلم

هوق

توسّع: ارسم مثلثاً قائم الزاوية على السبورة واكتب أسفل منه: المساحة: $6x^2 + zy + 2xz + 3xy$. وأسأل الطلاب أن يجدوا ثنائيي حد عوامل حدودها أعداد كلية للقاعدة والارتفاع. (مساعدة: مساحة المثلث $A = \frac{1}{2}bh$) **إجابتان ممكنتان: القاعدة $(6x + 2z)$ ، الارتفاع $(2x + y)$ ؛ القاعدة $(3x + z)$ ، الارتفاع $(4x + 2y)$.**

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل متباينات كثيرات الحدود.

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لإيجاد حلول تقريبية لمتباينة كثيرة حدود.

المواد

الحاسبة البيانية TI-nspire.

إرشادات التدريس

ذكر الطلاب أن يكتبوا $f_1(x)$, $f_2(x)$ لإدخالها إلى الحاسبة.

2 التدريس

العمل في مجموعات

اطلب إلى الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، واطلب إلى كل مجموعة العمل على حل النشاط.

- تأكد من أن الطلاب يعرفون اختيار التدرج المناسب لإظهار التمثيل البياني كاملاً.
- وضح للطلاب أنهم ربما يقومون بتجربة تحديد التدرج الأفضل التي تناسب المحورين في كل التمارين.

تدريب اطلب إلى الطلاب إكمال الأسئلة 1-9.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل التمرين 1 لتقويم مدى قدرة الطلاب على تحديد موقع تقاطع المنحنى مع المحور x بشكل صحيح.

من المحسوس إلى المجرد

ما أكبر عدد من تقاطعات المنحنى مع المحور x ؟
أكبر عدد يساوي درجة كثيرة الحدود.

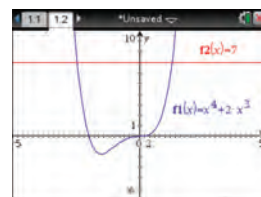
نشاط

حل المتباينة $x^4 + 2x^3 \leq 7$

الطريقة 1: تمثيل المعادلات المرتبطة بكل طرف بيانياً بشكل منفصل.

الخطوات:

- اختر **New Document** ثم اختر **2: Add Graphs**، وكتب في الطرف الأيسر $x^4 + 2x^3$ بجانب $f_1(x)$ ، ثم اضغط مفتاح **enter** ليظهر التمثيل البياني.
- اضغط المفتاح **tab**، لكتابة الطرف الأيمن 7 بجانب $f_2(x) =$ ، ثم اضغط مفتاح **enter** ليظهر التمثيل البياني. ملاحظة: تدرج الآلة المعتاد على محور y بين $(-6.67, 6.67)$ وحتى يظهر التمثيل للمعادلة $f_2(x) = 7$ قم بالضغط على مفتاح **2nd** ومنها اختر **4: Window/Zoom** ثم اختر منها **6: Window Settings...** لتمدد التدرج المناسب للمتغير y ليضمن العدد 7. فمثلاً يمكن اختيار قيمة $YMax = 10$.
- حدد نقاط التقاطع من خلال الضغط على مفتاح **2nd** ومنها اختر **7: Points & Lines** ثم اختر منها **3: Intersection Point(s)**، وقم بالضغط على كلا التمثيلين لتظهر نقاط التقاطع، فيكون الحل هو: $-2.47 \leq x \leq 1.29$ تقريباً.

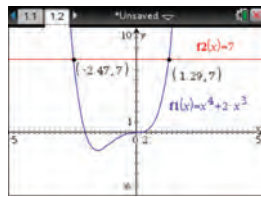


الطريقة 2: تمثيل المعادلة المرتبطة بعد مساواتها بالصفر بيانياً.

$$x^4 + 2x^3 = 7 \longrightarrow x^4 + 2x^3 - 7 = 0$$

الخطوات:

- من الشاشة الظاهرة اختر **1: New Document** ثم اختر **2: Add Graphs**.
- اكتب المعادلة المرتبطة $x^4 + 2x^3 - 7$ ، ثم اضغط مفتاح **enter** ليظهر التمثيل البياني. ملاحظة: اختر التدرج المناسب.
- حدد أصفار المعادلة من خلال الضغط على مفتاح **2nd** ومنها اختر **6: Analyze Graph**، ثم اختر منها **1: Zero**، وقم بالضغط على التمثيل البياني والمحور x عند نقطتي تقاطع التمثيلين مع المحور x ، فتظهر إحداثياتهما، فيكون الحل هو: $-2.47 \leq x \leq 1.29$ تقريباً.



تمارين: (8) $x < -3.63, -1.35 < x < 1.35, x > 3.63$ (7) $x < -0.69, 1.75 < x < 4.95$

$$-0.47 \leq x \leq 0.54,$$

$$x \geq 3.94 \text{ أو } x^3 + 1 \geq 4x^2 \quad (3)$$

$$x^3 - 9x^2 + 27x \leq 20 \quad (2)$$

$$x \leq 1.09$$

$$x^3 - 9x^2 + 27x \leq 20 \quad (2)$$

$$x \geq -4.11$$

$$\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 5x \geq -9 \quad (1)$$

$$-1.36 < x < 1.06 \quad x^8 < -x^7 + 3 \quad (6)$$

$$x \geq -1.27 \quad \frac{1}{2}x^5 \geq \frac{1}{5}x^2 - 2 \quad (5)$$

$$x^6 - 15 \leq 5x^4 - x^2 \quad (4)$$

$$x^4 - 15x^2 + x + 65 > 0 \quad (9)$$

$$x^3 - 6x^2 + 4x < -6 \quad (8)$$

$$x^4 - 15x^2 > -24 \quad (7)$$

جميع الأعداد الحقيقية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 3

دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31) دون تدريبات إعادة التعليم - تنمة (32) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-6 تدريبات إعادة التعليم

حل معادلات كثيرات الحدود

حل معادلات كثيرات الحدود، إذا أمكن كتابة كثيرة الحدود في صورة تربيعية، فطبق عليها ما تعلمته في حل المعادلات التربيعية لحل معادلة كثيرة الحدود المرتبطة.

مثال 1: حل للمعادلة $x^2 - x - 20 = 0$

الدرجة الأصلية: $x^2 - x - 20 = 0$
 بالتحليل إلى العوامل: $(x-5)(x+4) = 0$
 عاصمة القرب الصغرى: $x-5=0$ أو $x+4=0$
 بالتبسيط: $x=5$ أو $x=-4$
 الحلان هما 5، -4.

مثال 2: حل للمعادلة $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$

الدرجة الأصلية: $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$
 بكتابة العبارة على صورة تربيعية: $(x^2)^2 - 40(x^2) + 144 = 0$
 بالتحليل: $(x^2 - 4)(x^2 - 36) = 0$
 عاصمة القرب الصغرى: $x^2 - 4 = 0$ أو $x^2 - 36 = 0$
 بالتحليل إلى العوامل: $(x-2)(x+2) = 0$ أو $(x-6)(x+6) = 0$
 عاصمة القرب الصغرى: $x-2=0$ أو $x+2=0$ أو $x-6=0$ أو $x+6=0$
 بالتبسيط: $x=2$ أو $x=-2$ أو $x=6$ أو $x=-6$
 الحلون هي $\pm 2, \pm 6$.

تقاربن:
 حل كل معادلة بما يأتي:

(1) $x^4 = 49$ (2) $x^4 - 6x^2 = -8$ (3) $x^4 - 3x^2 = 54$
 $\pm 7, \pm \sqrt{7}$ $\pm 2, \pm \sqrt{2}$ $\pm 3, \pm \sqrt{6}$

(4) $3t^2 - 48t^2 = 0$ (5) $m^4 - 16m^2 + 64 = 0$ (6) $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$
 $\pm 5, \pm 2$ $2, -1 \pm \sqrt{3}$ $\pm 1, \pm 2$

(7) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ (8) $4x^4 - 73x^2 + 144 = 0$ (9) $x^6 - 3x = 0$
 $\pm 5, \pm 2$ $\pm 4, \pm \frac{3}{2}$ $0, \pm \sqrt{3}$

الفصل 3، كثيرات الحدود ودوالها الصف، الثاني الثانوي 32

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-6 تدريبات إعادة التعليم

حل معادلات كثيرات الحدود

تحليل كثيرات الحدود

لاي عدد من الحدود، ابحث عن العامل المشترك الأكبر.

أي حين: ابحث عن:
 الفرق بين مربعين: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
 مجموع مكعبين: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
 الفرق بين مكعبين: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

ثلاثة حدود: ابحث عن:
 كثيرة حدود ثلاثية تشكل مربعاً كاملاً: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
 $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
 صورة عامة لكثيرة حدود ثلاثية: $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$

لأربعة حدود أو أكثر ابحث عن تجميع مناسب للحدود
 $ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b) = (a+b)(x+y)$

مثال: حلل إلى العوامل $24x^2 - 42x - 45 = 3(8x^2 - 14x - 15)$

أولاً أخرج العامل المشترك لتصل على $8x^2 - 14x - 15 = 3(8x^2 - 14x - 15)$ لتجد عوامل الحدود التي تنقسم x هناك أن تبحث عن عددين حاصل ضربهما -120 وجمعها -14 ، فالعددين هما -20 و 6 . أعد كتابة العبارة باستخدام $6x$ و $-20x$ ثم حل بتجميع الحدود.

بالتجميع لإخراج العامل المشترك الأكبر:
 $8x^2 - 14x - 15 = 4x(2x - 5) + 3(2x - 5) = (4x + 3)(2x - 5)$

إذن، $24x^2 - 42x - 45 = 3(4x + 3)(2x - 5)$

تقاربن:
 حل كل كثيرة حدود بما يأتي تحليلًا تامًا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية.

(1) $14x^2y + 42xy^2$ (2) $6mn + 18m - n - 3$ (3) $2x^2 + 18x + 16$
 $14xy^2(x+3y)$ $(6m-1)(n+3)$ $2(x+8)(x+1)$

(4) $x^4 - 1$ (5) $35x^2y^3 - 60xy^4$ (6) $2r^2 + 250$
 $(x^2+1)(x-1)(x-1)$ $5xy^3(7y^2-12x)$ $2(r+5)(r^2-5r+25)$

(7) $100m^3 - 9$ (8) $x^3 + x + 1$ (9) $c^4 + c^3 - c^2 - c$
 $(10m^2-3)(10m^2+3)$ أولية $c(c+1)^2(c-1)$

الفصل 3، كثيرات الحدود ودوالها الصف، الثاني الثانوي 31

تدريبات المهارات (33) دون ضمن فوق تدريبات حل المسألة (34) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-6 تدريبات حل المسألة

حل معادلات كثيرات الحدود

1) توميو، يجازل سائل أن يكتشف الرقم السري الحقيقية، وبعد بحث وتقصي طويلين اكتشف أن الرقم السري الحقيقية هو عدد يتكون من رقمين مختلفين ويمثل أحد حلول معادلة كثيرة الحدود $x^4 - 68x^3 + 1557x^2 - 13770x + 37800 = 0$.
 وبعد جهد توصل إلى أن: $x^4 - 68x^3 + 1557x^2 - 13770x + 37800 = (x-5)(x-12)(x-21)(x-30)$.
 فما الرقم السري للقفول؟
 أحد الأعداد 12، 21، 30

2) نوافع، يعمل سلطان في مجال الهندسة الميكانيكية، ويتطلب أحد مشاريعه حل معادلة كثيرة الحدود $m^3 + 5m^2 - 10 = 0$
 اكتب كثيرة الحدود $m^3 + 5m^2 - 10$ على الصورة التربيعية:
 $(m^2)^2 + 5(m^2) - 10 = 0$

3) حجه، يبلغ ارتفاع صندوق للشحن x بوصة، ويزيد طوله 3.5 بوصة عن ارتفاعه، كما يقل عرضه 3 بوصات عن ارتفاعه، فإذا كان حجمه 561 بوصة مكعبة، فما قيمة x ؟

4) ما حجم الصندوق الصغير؟
90 وحدة مكعبة

5) ما حجم الصندوق الكبير؟
384 وحدة مكعبة

الفصل 3، كثيرات الحدود ودوالها الصف، الثاني الثانوي 34

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-6 تدريبات المهارات

حل معادلات كثيرات الحدود

حلل كل كثيرة حدود بما يأتي تحليلًا تامًا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية.

(1) $7x^2 - 14x$ (2) $19x^3 - 38x^2$
 $7x(x-2)$ $19x^2(x-2)$

(3) $21x^3 - 18x^2y + 24xy^2$ (4) $8t^3k - 4tk^3 - 7$
 $3x(7x^2 - 6xy + 8y^2)$ أولية

(5) $a^2 + 7a - 18$ (6) $2ak - 6a + k - 3$
 $(a+9)(a-2)$ $(2a+1)(k-3)$

(7) $b^2 + 8b + 7$ (8) $z^2 - 8z + 20$
 $(b+7)(b+1)$ أولية

(9) $4t^2 - 64$ (10) $d^2 - 12d + 36$
 $4(f+4)(f-4)$ $(d-6)^2$

(11) $9x^2 + 25$ (12) $y^2 + 18y + 81$
 أولية $(y+9)^2$

(13) $m^3 - 125$ (14) $m^3 - 1$
 $(m-5)(m^2 + 5m + 25)$ $(m^2 + 1)(m-1)(m+1)$

اكتب كل عبارة فيما يأتي على الصورة التربيعية إن كان ذلك ممكنًا.

(15) $5x^2 + 2x^2 - 8$ (16) $3y^3 - 4y^2 + 3$
 $5(x^2)^2 + 2(x^2) - 8$ غير ممكن

(17) $100a^4 + a^4$ (18) $x^4 + 4x^3 + 9$
 $100(a^2)^2 + (a^2)$ $(x^2)^2 + 4(x^2) + 9$

(19) $12x^4 - 7x^2$ (20) $6b^3 + 3b^3 - 1$
 $12(x^2)^2 - 7(x^2)$ غير ممكن

حل كل معادلة بما يأتي:

(21) $a^3 - 9a^2 + 14a = 0$ (22) $x^3 = 3x^2$
 $0, 7, 2$ $0, 3$

(23) $t^4 - 3t^3 - 40t^2 = 0$ (24) $b^3 - 8b^2 + 16b = 0$
 $0, -5, 8$ $0, 4$

الفصل 3، كثيرات الحدود ودوالها الصف، الثاني الثانوي 33



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 3

مصادر الدرس 6 - 3	
دون	ضمن
<p>دون ضمن فوق</p> <p>التمرينات الإثرائية (35)</p> <p>الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p>3-6 التمرينات الإثرائية تاريخ المعادلات التربيعية</p> <p>يُعتقد أن البابليون هم أول من حل معادلات تربيعية، وذلك حوالي 400 سنة قبل الميلاد، وجاء إقليدس الذي طور حلاً هندسياً في حوالي 300 سنة قبل الميلاد، وفي الفترة حوالي 665-598 بعد الميلاد طور رياضي هندي يدعى براهما قطا الأسلوب الحديث لحل المعادلات التربيعية، وأخيراً وفي عام 800م أوجد العالم محمد بن موسى الخوارزمي تصنيفات للمعادلات التربيعية حيث وضعها في 6 أنواع، وكتب فصلاً عن كل نوع وحاجات معادلاته في 3 أنواع مختلفة من العبارات هي الجذر x، ومربع الجذر (x^2) والأعداد.</p> <p>مثلاً: كان تصفية الأول، المربع تساوي الجذور، ومثال على ذلك كانت معادلته: $x^2 = 2x$.</p> <p>والآن حل هذه المعادلة التربيعية.</p> <p>$x^2 = 2x$ $x^2 - 2x = 0$ $x(x - 2) = 0$ $x = 0$ أو $x - 2 = 0$ $x = 0$ أو $x = 2$ إذن:</p> <p>اكتب عينة من المسائل عن كل نوع من الأنواع الخمسة الأخرى التي صنفها الخوارزمي وحلها.</p> <p>1) المربع تساوي الأعداد. إجابة ممكنة: $x = 5, x = -5, x = 25, x^2 = 25$</p> <p>2) الجذور تساوي الأعداد. إجابة ممكنة: $x = 10, x = 20, 2x = 20$</p> <p>3) المربع والجذور تساوي أعداد. إجابة ممكنة: $x = 3, x = -13, x = 39, x^2 + 10x = 39$</p> <p>4) مربعين وأعداد تساوي جذور. إجابة ممكنة: $x = 7, x = 3, x = 10, x^2 + 21 = 10x$</p> <p>5) جذور وأعداد تساوي مربعين. إجابة ممكنة: $x = 4, x = -1, x = 4, 3x + 4 = x^2$</p>	<p>دون ضمن فوق</p> <p>كتاب التمارين (20)</p> <p>3-6 حل معادلات كثيرات الحدود</p> <p>حل كل كثيرة حدود مما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فاطلب كتابة كثيرة حدود أولية:</p> <p>1) $15ab^2 - 10ab^2$ 2) $3a^2 - 9a^2 + 6a^2$ 3) $3x^2y - 2x^2y + 5x^2y$</p> <p>4) $xy^2 - x^2y + 5xy^2 + xy^2$ 5) $2x^2y - x^2y + 3x^2y$ 6) $x^2 - xy + 2x - 2y$</p> <p>7) $xy(2x^2 - x + 5y + y^2)$ 8) $2x^2y - x^2y + 5xy^2 + xy^2$ 9) $x^2 - xy + 2x - 2y$</p> <p>10) $6x^2 + 7x - 3$ 11) $4x^2 - 8x + 8$ 12) $6p^2 - 17p - 45$</p> <p>13) $3x - 10(2x + 3)$ 14) $10b^2 + 3b^2 - 11$ 15) $28d^2 + 25d^2$</p> <p>16) $4a^4 + 4a^4 + 7$ 17) $500x^2 - x^2$ 18) $8b^3 - 8b^3 - 1$</p> <p>19) $-2, 0, 9, y^2 - 7y^2 - 18y^2 = 0$ 20) $-8, 0, 4, s^3 + 4s^3 - 32s^3 = 0$</p> <p>21) $-5, 5, -5i, 5i, m^2 - 625 = 0$ 22) $0, -7, 7, n^4 - 49n^2 = 0$</p> <p>23) $-1, 1, -7, 7, x^4 - 50x^2 + 49 = 0$ 24) $-4, 4, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, t^2 - 21t + 80 = 0$</p> <p>25) هزيهاه، يعطى مسار بروتون في مجال مغناطيسي على مستوى إحداثي بالدالة $15 - 2x^2 = x^4$، فما قيم x التي يقطع عندها مسار البروتون المحور x؟ $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$</p> <p>26) مهميات، وقع الاختيار على قطعة أرض لتكون محمية طبيعية، وتُهد إلى مساحة بإعداد مسطحة لها، فوجد أن قطعة الأرض على شكل مثلث قائم الزاوية، يقل طول ضلع قائمه الأكبر 5 mi عن مربع طول ضلعها الأصغر، ويقل طول وتره عن بلقي مربع طول ضلع قائمه الأصغر 13 mi، وجميع أطوال أضلاع المثلث هي أعداد صحيحة (بالأبوال)، فما طول كل حد من حدود قطعة الأرض؟ $3 \text{ mi}, 4 \text{ mi}, 5 \text{ mi}$</p>

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 3-7

استعمال خاصية التوزيع والتحليل في تبسيط عبارات جبرية.

الدرس 3-7

إيجاد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي.

تحديد ما إذا كان ثنائي حد عاملاً من عوامل كثيرة حدود باستعمال التعويض التركيبي أم لا.

ما بعد الدرس 3-7

استعمال طرائق تتضمن التحليل إلى عوامل لإعادة كتابة معادلات كثيرات حدود وحلها.



لماذا؟

إذا استعملنا الدالة :

$S(x) = 0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$
لتقدير عدد الطلاب في جامعة، حيث x عدد السنوات منذ العام 1413هـ، وتمثل $S(x)$ عدد الطلاب بالآلاف.

فيمكنك استعمال هذه الدالة لتقدير عدد الطلاب في تلك الجامعة عام 1433هـ بإيجاد قيمة الدالة $S(x)$ عندما $x = 20$ ، ويمكنك استعمال التعويض التركيبي باعتباره طريقة أخرى للوصول إلى ذلك.

فيما سبق؟

درست استعمال خاصية التوزيع والتحليل لتبسيط عبارات جبرية.

والآن؟

أجد قيم الدوال باستعمال التعويض التركيبي.
أحدد (باستعمال التعويض التركيبي) إذا كانت ثنائية حد عاملاً من عوامل كثيرة حدود أم لا.

المضردات؟

نظرية الباقي

Remainder Theorem

التعويض التركيبي
synthetic substitution

نظرية العوامل

Factor Theorem

www.obekaneducation.com

التعويض التركيبي: يمكنك إيجاد باقي قسمة دالة كثيرة حدود مثل: $f(x) = -3x^2 + 5x + 4$ على الدالة $x - 3$ بطريقتين:

الطريقة 2 القسمة التركيبية

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & -3 & 5 & 4 \\ & & -9 & -12 \\ \hline & -3 & -4 & -8 \end{array}$$

الطريقة 1 القسمة الطويلة

$$\begin{array}{r} -3x - 4 \\ x - 3 \overline{) -3x^2 + 5x + 4} \\ \underline{(-) -3x^2 + 9x} \\ -4x + 4 \\ \underline{(-) -4x + 12} \\ -8 \end{array}$$

قارن بين باقي القسمة وهو العدد -8 وقيمة $f(3)$.

$$\begin{aligned} f(3) &= -3(3)^2 + 5(3) + 4 && \text{بتعويض العدد 3 بدلاً من } x \\ &= -27 + 15 + 4 && \text{بالضرب} \\ &= -8 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

لاحظ أن قيمة $f(3)$ تساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 3$. وهذا يوضح نظرية الباقي.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب الى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما قيمة x إذا رغبت في معرفة عدد الطلاب عام 1414 هـ؟ 1
- هل تتوقع أن يتساوى العدد الفعلي للطلاب عام 1433 هـ مع العدد الذي تحصل عليه من الدالة؟ وضح ذلك.
- إجابة ممكنة: لا، تمثل المعادلة نموذجاً رياضياً مبنيًا على البيانات المتوفرة. وهذه البيانات قد تتغير مع الزمن.
- هل سيكون النموذج أكثر دقة في السنوات القريبة التي تلي عام 1413 هـ مباشرة أو في السنوات المتأخرة.
- إجابة ممكنة: الإجابة تقترب من الحقيقية لسنوات القريبة من السنة 1413 هـ.

أضف إلى مطوبتك

مفهوم أساسي نظرية الباقي

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$ ، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$ ، وكذلك:

الباقي	المقسوم عليه	ناتج القسمة	المقسوم
$P(r)$	$(x - r)$	$Q(x)$	$P(x)$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال $x^2 + 6x + 2 = (x - 4) \cdot (x + 10) + 42$

تسمى عملية تطبيق نظرية الباقي باستعمال القسمة التركيبية **التعويض التركيبي**. وهي طريقة سهلة لإيجاد قيمة دالة عند عدد، خاصة عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية.

الدرس 3-7 نظريتا الباقي والعوامل 151

مصادر الدرس 3-7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (153)	• تنويع التعليم ص (153, 156)	• تنويع التعليم ص (153, 156)
كتاب التمارين	• ص (21)	• ص (21)	• ص (21)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36) • تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39)	• تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)	• تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)

التعويض التركيبي

مثال 1

إذا كان $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$ ، فأوجد $f(4)$ باستعمال التعويض التركيبي.
بناءً على نظرية الباقي، فإن $f(4)$ يساوي باقي قسمة كثيرة الحدود على $x - 4$.

بما أنه لا يوجد حد يحتوي على x^2 ، لذا ضع 0 للمحافظة على مكان عامل الحد x^2 .	4	3	-2	0	5	2
			12	40	160	660
		3	10	40	165	662

بما أن باقي القسمة يساوي 662، فإنه باستعمال التعويض التركيبي يكون $f(4) = 662$

وللتحقق نستعمل التعويض المباشر.

عوض عن x بالعدد 4 في دالة كثيرة الحدود.

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$$

الدالة الأصلية

$$f(4) = 3(4)^4 - 2(4)^3 + 5(4) + 2$$

بتعويض العدد 4 بدلاً من x

$$= 768 - 128 + 20 + 2 = 662$$

بالتبسيط

وعليه فإن $f(4) = 662$. وبذلك نكون قد توصلنا إلى الإجابة نفسها من خلال التعويض المباشر.

تحقق من فهمك

(1A) إذا كان $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$ ، فأوجد $f(3)$. 19

(1B) إذا كان $g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$ ، فأوجد $g(-1)$. -6

يمكنك استعمال التعويض التركيبي في الحالات التي تكون فيها حسابات التعويض المباشر معقدة.



الربط مع الحياة

بلغ عدد الطلبة المسجلين في الجامعات الحكومية عام 1430هـ في المملكة العربية السعودية 628081 طالباً وطالبة.

إيجاد قيم الدالة

مثال 2 من واقع الحياة

جامعات: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. ما العدد المتوقع لطلاب تلك الجامعة عام 1433؟
أوجد ناتج قسمة $0.02x^4 - 0.52x^3 + 4.03x^2 + 0.09x + 77.54$ على $x - 20$ مستعملاً القسمة التركيبية.

20	0.02	-0.52	4.03	0.09	77.54
		0.4	-2.4	32.6	653.8
	0.02	-0.12	1.63	32.69	731.34

العدد المتوقع لطلاب الجامعة عام 1433هـ هو 73134 طالباً تقريباً.

تحقق من فهمك

(2) يمكن استعمال الدالة $C(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$ لتقدير عدد الطلاب في إحدى محافظات المملكة منذ عام 1420، حيث تمثل x عدد السنوات، $C(x)$ عدد الطلاب بالعشرات، قدر عدد طلاب المحافظة عام 1432. 21298

مثالان إضافيان

1 إذا كان

$$f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 8x - 7$$

فأوجد $f(6)$. 2453

2 **كليات:** ارجع إلى التطبيق في بداية

الدرس. كم سيكون عدد الطلاب

عام 1431هـ؟ تقريباً 451760

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلاب كتابة

ملخص في المدونة لتوضيح العلاقة

بين نظرية العوامل ونظرية الباقي،

والتركيز على أن نظرية العوامل هي

حالة خاصة من نظرية الباقي.

إرشادات للمعلم الجديد

يعتمد هذا الدرس بشكل كبير على التعويض التركيبي.

تأكد من أن الطلاب قد استوعبوا الطريقة قبل الانتهاء

من مثال 1.

واطلب إلى أحد الطلاب أن يوضح خطوات التعويض

التركيبي في الطريقة الأولى للمثال 1، وحث الطلاب

على مناقشة أية مشكلة تصادفهم.

عوامل كثيرات الحدود: تبين القسمة التركيبية أدناه أن ناتج قسمة $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ على $x + 3$ هو $2x^2 - 9x + 10$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & -3 & -17 & 30 \\ & & -6 & 27 & -30 \\ \hline & 2 & -9 & 10 & 0 \end{array}$$

عند قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد من عواملها، يكون ناتج القسمة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة كثيرة الحدود الأصلية.

بناءً على عملية القسمة وباستعمال نظرية الباقي فإن:

$$\begin{array}{c} \text{المقسوم} \\ 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 \end{array} = \begin{array}{c} \text{ناتج القسمة} \\ (2x^2 - 9x + 10) \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{المقسوم عليه} \\ (x + 3) \end{array} + \begin{array}{c} \text{الباقي} \\ 0 \end{array}$$

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا، فإن $f(-3) = 0$ ، وهذا يعني أن $x + 3$ عامل لكثيرة الحدود $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ ، وهذا يوضح **نظرية العوامل**، التي تعدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

عوامل كثيرات الحدود

مثال 3 يبين كيفية استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد عاملاً من عوامل كثيرة الحدود كما يوضح كيفية إيجاد بقية العوامل.

مثال إضافي

حدد ما إذا كان $x - 3$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $x^3 + 4x^2 - 15x - 18$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 4 & -15 & -18 \\ & & 3 & 21 & 18 \\ \hline & 1 & 7 & 6 & 0 \end{array}$$

إذاً:

$$x^3 + 4x^2 - 15x - 18 = (x - 3)(x^2 + 7x + 6)$$

وبما أن:

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 6 &= (x + 1)(x + 6), \\ \text{فإن } x^3 + 4x^2 - 15x - 18 &= (x - 3)(x + 1)(x + 6). \end{aligned}$$

المحتوى الرياضي

نظرية العوامل تنص نظرية الباقي أن قيمة $f(a)$ تساوي باقي قسمة كثيرة الحدود f على $x - a$ ، وتعتبر نظرية العوامل حالة خاصة من نظرية الباقي، حيث تنص على أنه إذا كانت قيمة $f(a)$ تساوي صفرًا فإن $x - a$ عامل من عوامل كثيرة الحدود.

تنبيه!

معالجة الأخطاء أكد على الطلاب أن نظرية العوامل لا تذكر الأعداد التي يجب أن نجربها. وسوف يتم تقديم طريقة للتعرف على العوامل المحتملة لاحقًا في هذا الفصل.

إجابة (تحقق من فهمك):

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -7 & 4 & 12 \\ & & 2 & -10 & -12 \\ \hline & 1 & -5 & -6 & 0 \end{array}$$

$$(x - 2)(x - 6)(x + 1)$$

مفهوم أساسي

نظرية العوامل

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

يمكنك استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة، ويمكنك استعمالها أيضًا لتحديد جميع عوامل كثيرة الحدود.

استعمال نظرية العوامل

مثال 3

حدد ما إذا كان $x - 5$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

بناءً على نظرية العوامل تكون ثنائية الحد $x - 5$ عاملاً من عوامل $P(x)$ إذا كان $P(5) = 0$ ، ولإيجاد $P(5)$ ، يمكنك استعمال التعويض التركيبي. استعمال نظرية العوامل والقسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & -7 & 7 & 15 \\ & & 5 & -10 & -15 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

وبما أن باقي القسمة يساوي صفرًا؛ أي أن $P(5) = 0$ ، فإن $x - 5$ عامل لكثيرة الحدود؛ لذا يمكن تحليل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على النحو الآتي: $(x - 5)(x^2 - 2x - 3)$. وتكون $x^2 - 2x - 3$ هي كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ على $(x - 5)$.

تحقق مما إذا كانت كثيرة الحدود هذه قابلة للتحليل أم لا.

بتحليل ثلاثية الحدود

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

$$\text{وعليه فإن } x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = (x - 5)(x + 1)(x - 3)$$

يمكنك التحقق من إجابتك بضرب العوامل ومقارنة كثيرة الحدود الناتجة بكثيرة الحدود الأصلية.

تحقق من فهمك

(3) انظر الهامش

(3) حدد ما إذا كان $x - 2$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ أم لا، ثم أوجد عواملها الأخرى.

الدرس 3-7 نظريتا الباقي والعوامل 153

إرشادات للدراسة

التحليل إلى العوامل

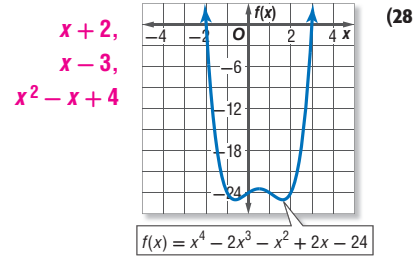
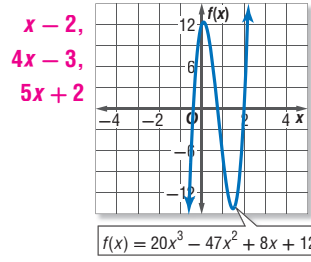
ليس شرطاً أن تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد. فمثلاً، عاملاً كثيرة الحدود $x^3 + x^2 - x + 15$ هما $x + 3$ و $x^2 - 2x + 5$.

تنوع التعليم

استطاع الطلاب وصف فكرتين أو أكثر من الأفكار التي وجدوها صعبة في هذا الدرس،

بتوجيههم إلى كتابة استفسارات وإيضاحات عن كل فكرة تساعدهم على مراجعة المادة في وقت لاحق.

استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يأتي:



تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 30 التحليل، وجدول القيم، والتمثيل البياني لاستكشاف خصائص الدوال من الدرجات العليا.

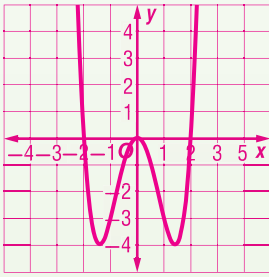
إجابات:

(30b)

x	$g(x)$
-2	0
-1	1
0	0
1	3
2	16

(30c) عامل $(x+2)$ عامل من عوامل الدالة، عامل من عوامل الدالة

(30d)



(30) **تمثيلات متعددة:** لتكن الدالة: $f(x) = x^4 - 4x^2$. انظر الهامش (30b-d)

(a) **جبرياً:** إذا كان $x - 2$ عاملاً من عوامل هذه الدالة، فأوجد كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة هذه الدالة على $(x - 2)$. $g(x) = x^3 + 2x^2$

(b) **جدولياً:** كوّن جدول قيم لكثيرة الحدود التي وجدتها في الفرع "a" حيث $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

(c) **تحليلياً:** اعتماداً على جدول القيم الذي كوّنته، ما الاستنتاجات التي يمكن أن نتوصل إليها حول بقية عوامل الدالة: $f(x) = x^4 - 4x^2$ ؟ وضع إجابتك.

(d) **بيانياً:** مثل الدالة الأصلية بياناً لتؤكد الاستنتاجات التي توصلت إليها.

أوجد قيم k التي تجعل باقي القسمة في كل مما يأتي يساوي 3:

(31) $3(x^2 - x + k) \div (x - 1)$

(32) $8(x^2 + kx - 17) \div (x - 2)$

(33) $1, 4(x^2 + 5x + 7) \div (x - k)$

(34) $-3(x^3 + 4x^2 + x + k) \div (x + 2)$

مسائل مهارات التفكير العليا

(35) $\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{3}$ **تحذّر:** أوجد حلول كل من المعادلتين:

(36) $(x^2 + 3)^2 - 7(x^2 + 3) + 12 = 0$ $-1, 0, 1$

(37) $(x^2 - 4)^2 - (x^2 - 4) - 2 = 0$

(37) **تبرير:** إذا قسمت دالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - c$ ، فماذا يمكن أن تستنتج إذا كان:

(a) الباقي يساوي صفراً؟ $x - c$ عامل للدالة $f(x)$.

(b) الباقي يساوي 1؟ $x - c$ ليس عاملاً للدالة $f(x)$.

(c) ناتج القسمة يساوي 1 والباقي يساوي صفراً؟ $f(x) = x - c$

(38) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة تكعيبية يكون باقي قسمتها على $x - 2$ يساوي 8، وباقي قسمتها على $x - 3$ يساوي -5.

$f(x) = -x^3 + x^2 + x + 10$ **إجابة ممكنة:**

(39) **اكتب:** وضح لماذا تعد نظرية العوامل حالة خاصة من نظرية الباقي؟

تنبيه!

التعويض التركيبي

تذكر أنه في التعويض التركيبي يتم قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد على الصورة $(x - a)$. وفي هذه الحالة استعمل a وإذا كانت ثنائية الحد على الصورة $(x + a)$ ، فاستعمل $-a$.

(39) **إجابة ممكنة:**

لأن نظرية الباقي تمكّنك من إيجاد $P(r)$ (باقي قسمة $P(x)$ على $x - r$ بشكل عام)، ونظرية العوامل تعالج الحالة الخاصة عندما $P(r) = 0$.

تدريب على اختبار

41 ما حاصل ضرب العددين المركبين $(4+i)(4-i)$ ؟ C

- 17 C 15 A
17 - 8i D 16 - i B

40 أي مما يأتي هو تحليل للعلاقة $27x^3 + y^3$ ؟ B

- $(3x + y)(3x + y)(3x + y)$ A
 $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$ B
 $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$ C
 $(3x - y)(9x^2 + 9xy + y^2)$ D

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى كل طالب الكتابة عن علاقة التعويض التركيبي بالقسمة التركيبية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين 3-7، 3-6 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (50).

مراجعة تراكمية

حل كل معادلة مما يأتي: (الدرس 3-2)

42 $x^4 - 4x^2 - 21 = 0$ ، $\pm\sqrt{7}$ ، $\pm i\sqrt{3}$

43 $x^4 - 6x^2 = 27$ ، ± 3 ، $\pm i\sqrt{3}$

44 $4x^4 - 8x^2 - 96 = 0$ ، $\pm\sqrt{6}$ ، $\pm 2i$

حل كلاً من النظامين الآتيين بيانياً: (مهارة سابقة) 45، 46 انظر الهامش

45 $y = 3x - 1$
 $y = -2x + 4$

46 $3x + 2y = 8$
 $-4x + 6y = 11$

إذا كان $c(x) = x^2 - 2x$ ، $d(x) = 3x^2 - 6x + 4$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-3)

47 $c(a + 2) - d(a - 4)$ ، $-2a^2 + 32a - 76$

48 $c(a - 3) + d(a + 1)$ ، $4a^2 - 8a + 16$

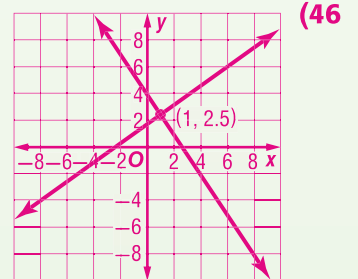
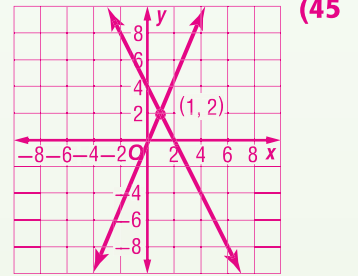
49 $c(-3a) + d(a + 4)$ ، $12a^2 + 24a + 28$

50 $3d(3a) - 2c(-a)$ ، $79a^2 - 58a + 12$

51 $c(a) + 5d(2a)$ ، $61a^2 - 62a + 20$

52 $-2d(2a + 3) - 4c(a^2 + 1)$ ، $-4a^4 - 24a^2 - 48a - 22$

إجابات:



تنوع التعليم

ضمن فوق

توسّع وضح للطلاب أنهم تعلموا طريقة التعويض لإيجاد $f(4)$ عندما تكون $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$

$f(4) = 4^3 - 6(4)^2 + 9(4) - 7 = 64 - 96 + 36 - 7 = -3$. وهذا يتطلب استعمال آلة حاسبة. أبلغهم

بأنك ستعرض عليهم طريقة أخرى لإيجاد قيمة كثيرة حدود، ولا تحتاج لحساب القوى، وفي هذه الطريقة

نعيد كتابة $x^3 - 6x^2 + 9x - 7$ على الصورة $x[(x - 6)x + 9] - 7$

لذا $f(4) = 4[(4 - 6) \cdot 4 + 9] - 7 = 4(-2 \cdot 4 + 9) - 7 = 4 \cdot 1 - 7 = -3$



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 3

دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (36) دون تدريبات إعادة التعليم - تزمة (37) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-7 تدريبات إعادة التعليم

نظريتنا الباقي والعوامل

تحليل كثيرات الحدود، يمكن أن تساعدك نظرية العوامل في إيجاد عوامل كثيرة الحدود جميعها.

نظرية العوامل

ثابتة الحد $x - 8$ عامل لكثيرة الحدود $f(x)$ ، إذا فقط إذا كان $f(8) = 0$.

مثال

بين أن $x + 5$ عامل لكثيرة الحدود $10x^2 - 13x + 2$ ، ثم أوجد عواملها الأخرى.

من نظرية العوامل يكون:

عوامل $x + 5$ عاملًا إذا كان -5 صفرًا للدالة كثيرة الحدود، والتحقق استعمل التعويض التركيبي:

-5	1	2	-13	10
-5	-5	-15	-10	0
1	-3	2	0	

وحيث أن الباقي يساوي صفرًا، فإن $x + 5$ عامل لكثيرة الحدود. ويمكن كتابة كثيرة الحدود $10x^2 - 13x + 2$ على الصورة $(x + 5)(x^2 - 3x + 2)$. ويمكن تحليل كثيرة الحدود $x^2 - 3x + 2$ على الصورة $(x - 2)(x - 1)$.

إذن: $x^2 - 3x + 2 = (x + 5)(x - 2)(x - 1)$.

$x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = (x + 5)(x - 2)(x - 1)$.

تعاريف:

في كل ما يأتي كثيرة حدود واحد عواملها، أوجد عواملها الأخرى.

1	$x^3 + x^2 - 10x + 8; x - 2$	2	$x^3 - 4x^2 - 11x + 30; x + 3$
3	$x^3 + 15x^2 + 71x + 105; x + 7$	4	$x^3 - 7x^2 - 26x + 72; x + 4$
5	$2x^3 - x^2 - 7x + 6; x - 1$	6	$3x^3 - x^2 - 62x - 40; x + 4$
7	$12x^3 - 71x^2 + 57x - 10; x - 5$	8	$14x^3 + x^2 - 24x + 9; x - 1$
9	$x^3 + x + 10; x + 2$	10	$2x^3 - 11x^2 + 19x - 28; x - 4$
11	$3x^3 - 13x^2 - 34x + 24; x - 6$	12	$x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18; x - 1$

الفصل 3، كثيرات الحدود ونواتها

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-7 تدريبات إعادة التعليم

نظريتنا الباقي والعوامل

التعويض التركيبي

بإتي نسبة $f(x)$ على $(x - a)$ هو $f(a)$ حيث $q(x) = f(x) - (x - a) \cdot f'(x)$.

مثال 1

إذا كان $f(x) = 3x^2 + 2x^3 - 5x^2 + x - 2$ ، فأوجد $f(-2)$.

الطريقة 1: التعويض التركيبي

من خلال نظرية الباقي $f(-2)$ يعين أن يكون الباقي تعويض -2 بدلًا من x .

من قسمة كثيرة الحدود على $x + 2$.

-2	3	2	-5	1	-2
-2	-2	-6	-8	-6	10
3	-4	3	-5	8	8

الباقي 8، إذن $f(-2) = 8$.

مثال 2

إذا كان $f(x) = 5x^3 + 2x - 1$ ، فأوجد $f(3)$.

من النظرية، $f(3)$ هو الباقي من قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - 3$ ومن خلال التعويض التركيبي.

3	5	0	2	-1
3	15	45	141	140
5	15	47	140	

الباقي 140، إذن $f(3) = 140$.

تعاريف:

أوجد $f(-5)$ و $f(\frac{1}{2})$ لكل دالة ما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:

1	$f(x) = -3x^2 + 5x - 1$	2	$f(x) = 4x^2 + 6x - 7$
3	$f(x) = -x^3 + 3x^2 - \frac{5}{4}$	4	$f(x) = x^4 + 11x^2 - \frac{1}{4}$
5	$f(x) = 2x^4 + x^2 - 3x + 3$	6	$f(x) = 3x^3 - 4x + 2$
7	$f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2$	8	$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 + x - 6$
9	$f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 2x + 4$	10	$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 5$
11	$f(x) = 2x^4 - 4x^3 - x^2 - 2x + 3$	12	$f(x) = 4x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

الفصل 3، كثيرات الحدود ونواتها

تدريبات حل المسألة (39) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-7 تدريبات حل المسألة

نظريتنا الباقي والعوامل

1) ارتفاع ريت كرهة إلى أعلى في الهواء، فانحذت مسارها على شكل قطع مكافئ، ارتفاعها f بعد t ثانية تلتها كثيرة حدود من الدرجة الثانية العامل الرئيس فيها يساوي -16 . باستعمال التعويض التركيبي، أوجد أن الكرة وصلت إلى الأرض عندما كان $t = 4$ ، $f = 0$ ، فأ كثيرة الحدود التي تلت ارتفاع الكرة على صورة دالة في t .

2) التعويض التركيبي، وجد أحد قيم الدالة كثيرة الحدود $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$ عند عددها مستعملًا التعويض التركيبي. واسلوب عمله موضح تاليًا مع إعفاء العدد والحل لسقوط الحبر عليها.

1	-5	3	5
1	11	66	759
1	6	69	

ما العدد الذي استخدمته، وما الحل؟

11; 764

3) أوجد $f(2)$ و $f(-1)$ لكل دالة ما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:

1	$f(x) = x^2 + 6x + 5$	2	$f(x) = x^2 - x + 1$
3	$f(x) = x^2 - 2x - 2$	4	$f(x) = x^2 + 2x^2 + 5$
5	$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$	6	$f(x) = x^3 + 6x^2 + x - 4$
7	$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$	8	$f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 6$
9	$f(x) = x^4 + 2x^2 - 9$	10	$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 6$
11	$f(x) = x^5 - 7x^3 - 4x + 10$	12	$f(x) = x^5 - 2x^3 + x^4 + x^3 - 9x^2 - 20$

في كل ما يأتي كثيرة حدود واحد عواملها، أوجد عواملها الأخرى

13	$x^3 + x^2 - 5x + 3; x - 1$	14	$x^3 + 2x^2 - x - 2; x + 1$
15	$x^3 + 3x^2 - 4x - 12; x + 3$	16	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x - 3$
17	$x^3 + 2x^2 - 33x - 90; x + 5$	18	$x^3 - 6x^2 + 32; x - 4$
19	$x^3 - x^2 - 10x - 8; x + 2$	20	$x^3 - 19x + 30; x - 2$
21	$2x^3 + x^2 - 2x - 1; x + 1$	22	$2x^3 + x^2 - 5x + 2; x + 2$
23	$3x^3 + 4x^2 - 5x - 2; 3x + 1$	24	$3x^3 + x^2 + x - 2; 3x - 2$

الفصل 3، كثيرات الحدود ونواتها

تدريبات المهارات (38) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-7 تدريبات المهارات

نظريتنا الباقي والعوامل

أوجد $f(2)$ و $f(-1)$ لكل دالة ما يأتي مستعملًا التعويض التركيبي:

1	$f(x) = x^2 + 6x + 5$	2	$f(x) = x^2 - x + 1$
3	$f(x) = x^2 - 2x - 2$	4	$f(x) = x^2 + 2x^2 + 5$
5	$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$	6	$f(x) = x^3 + 6x^2 + x - 4$
7	$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 2$	8	$f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 6$
9	$f(x) = x^4 + 2x^2 - 9$	10	$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 6$
11	$f(x) = x^5 - 7x^3 - 4x + 10$	12	$f(x) = x^5 - 2x^3 + x^4 + x^3 - 9x^2 - 20$

في كل ما يأتي كثيرة حدود واحد عواملها، أوجد عواملها الأخرى

13	$x^3 + x^2 - 5x + 3; x - 1$	14	$x^3 + 2x^2 - x - 2; x + 1$
15	$x^3 + 3x^2 - 4x - 12; x + 3$	16	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x - 3$
17	$x^3 + 2x^2 - 33x - 90; x + 5$	18	$x^3 - 6x^2 + 32; x - 4$
19	$x^3 - x^2 - 10x - 8; x + 2$	20	$x^3 - 19x + 30; x - 2$
21	$2x^3 + x^2 - 2x - 1; x + 1$	22	$2x^3 + x^2 - 5x + 2; x + 2$
23	$3x^3 + 4x^2 - 5x - 2; 3x + 1$	24	$3x^3 + x^2 + x - 2; 3x - 2$

الفصل 3، كثيرات الحدود ونواتها



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 3

مصادر الدرس 7 - 3	
دون	ضمن
دون	ضمن
<p>التدريبات الإثرائية (40)</p> <p>الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p>3-7 التدريبات الإثرائية رمز الجذر</p> <p>في عام 1494 م صدرت أول طبعة من <i>Summa</i>، وهو كتاب إيطالي يعرف الآن باسم <i>سوما</i> (<i>Suma</i>)، وقد كتب المؤلف الإيطالي (لوكا باكيليو) الكتاب على صورة ملخص لما كان يعرف عن الرياضيات في ذلك الوقت، وقد استعمل رموزاً شبيهة بالرموز المستخدمة حالياً، فمثلاً لتمثيل الجذور استعمل العبارة التالية: $6 \cdot p \cdot R \cdot 10$</p> <p>وفي تعبيرنا اليوم نكتب p حيث p الحرف الأول من كلمة زائد "plus" و R من كلمة "radical". لذا، $6 \cdot p \cdot R \cdot 10$ تعني $6 + \sqrt{10}$.</p> <p>1 ما الحرف الذي توقعه لتمثيل الطرح؟ m</p> <p>2 ترجم الرموز التالية إلى الرموز الحالية. a $18 \cdot m \cdot R \cdot 90$ $18 - \sqrt{90}$ b $108 \cdot m \cdot R \cdot 3240 \cdot p \cdot R \cdot 3240 \cdot m \cdot R \cdot 900$ $108 - \sqrt{3240} + \sqrt{3240} - \sqrt{900}$ c $10 \cdot R \cdot 5 \cdot p \cdot 2 \cdot R \cdot 3$ $10\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$</p> <p>3 ترجم الرموز الحديثة التالية إلى رموز كانت تستعمل قبل عام 1494. a $32\sqrt{10}$ 32 \cdot R \cdot 10 b $21\sqrt{6} + 3\sqrt{3}$ 21 \cdot R \cdot 6 \cdot p \cdot 3 \cdot R \cdot 3 c $5\sqrt{2} - 2 + 7\sqrt{11}$ 5 \cdot R \cdot 2 \cdot m \cdot 2 \cdot p \cdot 7 \cdot R \cdot 11</p> <p>الفصل 3، كثيرات الحدود ودوالها 40</p>	<p>3-7 نظرياً الباقي والعوامل</p> <p>أوجد $f(-3)$ و $f(4)$ لكل دالة مما يأتي مستخدماً التعريف التركيبي:</p> <p>1 $f(x) = x^2 + 2x + 3$ 2 $f(x) = x^2 - 5x + 10$ 3 $f(x) = x^2 + 2x - 4$ 4 $f(x) = x^2 - 2x + 3$</p> <p>5 $f(x) = x^2 + 2x + 5$ 6 $f(x) = x^2 - 6x^2 + 2x$ 7 $f(x) = x^2 - 2x^2 - 2x + 8$ 8 $f(x) = x^2 - x^2 + 4x - 4$</p> <p>9 $f(x) = x^2 + 2x - 50$ 10 $f(x) = x^2 + x^2 - 3x^2 - x + 12$ 11 $f(x) = x^4 - 2x^2 - x + 7$ 12 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$</p> <p>13 $f(x) = 2x^4 - x^2 + 2x^2 - 26$ 14 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x - 3$ 15 $f(x) = x^6 + 2x^3 - x^4 + x^3 - 9x^2 + 20$ 16 $f(x) = x^6 + 7x^3 - 4x - 10$</p> <p>في كل مما يأتي كثيرة حدود واحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى:</p> <p>17 $x^3 - x^2 - 4x + 4$ 18 $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ 19 $x^3 - 3x^2 - 27x - 27$ 20 $x^3 - 3x^2 - 9x^2 + 27x - 27$ 21 $x^3 + x^2 - 2x - 1$</p> <p>22 $x^3 + x^2 - 2x - 1$ 23 $3x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ 24 $3x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ 25 $3x^3 + 9x^2 - 2x - 1$</p> <p>26 $3x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ 27 $3x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ 28 $3x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ 29 $3x^3 + 9x^2 - 2x - 1$</p> <p>30 $3x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ 31 $3x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ 32 $3x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ 33 $3x^3 + 9x^2 - 2x - 1$</p> <p>الفصل 3، كثيرات الحدود ودوالها 21</p>

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-8

استعمال الأعداد المركبة لوصف حلول معادلات تربيعية.

الدرس 3-8

• تحديد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.

• إيجاد أصفار دالة كثيرة حدود.

ما بعد الدرس 3-8

استعمال طرائق تتضمن التحليل إلى عوامل لإعادة كتابة معادلات كثيرات حدود وحلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" وأسأل:

• بناءً على المعادلة: ما تكلفة إنتاج القطعة الواحدة في عام 1410هـ؟ 1.37 ريال تقريباً

• هل تبقى المعادلة صحيحة لقيم x السالبة؟ ممكن؛ وفي هذه الحالة تعبر القيم السالبة عن السنوات قبل عام 1410هـ



لماذا؟

يستعمل مدير الإنتاج في مصنع الدالة: $g(x) = 1.384x^4 - 0.003x^3 + 0.28x^2 - 0.078x + 1.365$ لتقدير معدل تكلفة إنتاج القطعة الواحدة على مدى عدة سنوات، حيث x عدد السنوات منذ 1410هـ.

ولكي تجد العام الذي يبلغ فيه معدل تكلفة إنتاج قطعة واحدة قيمة معينة، يمكنك استعمال جذور معادلة كثيرة الحدود المرتبطة بالدالة.

أنواع الجذور تعلمت سابقاً أن صفر دالة مثل $f(x)$ يمكن أن يكون أية قيمة مثل c ، حيث $f(c) = 0$. وعند تمثيل الدالة بيانياً تكون أصفارها الحقيقية هي مقاطع المحور x .

فيما سبق:

درست استعمال الأعداد المركبة لوصف حلول المعادلات التربيعية.

والآن:

- أحد عدد جذور معادلة كثيرة حدود وأنواعها.
- أجد أصفار دالة كثيرة حدود.
- أكتب دالة كثيرة حدود بأقل درجة ممكنة بمعرفة أصفارها.

المفردات:

النظرية الأساسية في الجبر
Fundamental Theorem of Algebra

www.obeikaneducation.com

أضف إلى مطويتك

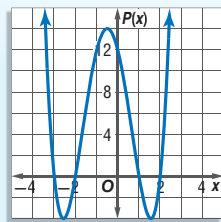
ملخص المفهوم الأصفار، العوامل، والجذور، والمقاطع

التعبير اللفظي إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود،

فإن العبارات الآتية متكافئة:

- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.
- إذا كان c عدداً حقيقياً، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع تمثيل الدالة $P(x)$ مع المحور x .

افترض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$



فإن أصفار هذه الدالة هي: $2, 1, -2, -3$

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

هي: $2, 1, -2, -3$

عوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

هي: $(x - 2), (x - 1), (x + 2), (x + 3)$

نقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور x

هي: $(2, 0), (1, 0), (-2, 0), (-3, 0)$

عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أي أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد مركب على الأقل، وهذه هي النظرية الأساسية في الجبر.

أضف إلى مطويتك

النظرية الأساسية في الجبر

مفهوم أساسي

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

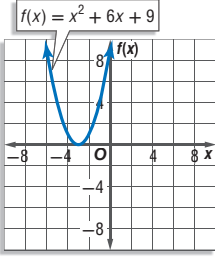
مصادر الدرس 3-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (160)	• تنوع التعليم، ص (160, 163)	• تنوع التعليم، ص (160, 163)
كتاب التمارين	• ص (22)	• ص (22)	• ص (22)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (41) • تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44)	• تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)	• تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)

تحديد عدد الجذور وأنواعها

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها ونوعها :



المعادلة الأصلية
بالتحليل إلى العوامل
بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين
بإيجاد قيمة x

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \quad (a)$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

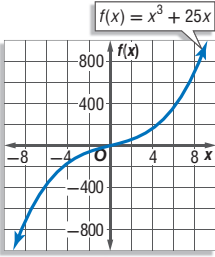
$$(x + 3)^2 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

وبما أن العامل $(x + 3)$ مكرر مرتين في تحليل كثيرة الحدود، فإن -3 جذر مكرر مرتين. أي للمعادلة جذر حقيقي واحد مكرر مرتين هو -3 .

تحقق: بما أن التمثيل البياني للدالة يمس المحور x عندما $x = -3$. فإن -3 جذر مكرر مرتين. ✓



بالتحليل إلى العوامل

$$x^3 + 25x = 0 \quad (b)$$

$$x(x^2 + 25) = 0$$

$$x^2 + 25 = 0 \quad \text{أو} \quad x = 0$$

$$x^2 = -25$$

$$x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$$

للمعادلة ثلاثة جذور: جذر حقيقي واحد هو 0 ، وجذران تخيليان هما $5i$ ، $-5i$.

تحقق: بما أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور x عندما $x = 0$ ،

فإن للمعادلة جذرًا حقيقيًا واحدًا هو 0 . ✓

(1A) $0, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$ ؛ للمعادلة جذر حقيقي واحد، وجذران تخيليان

تحقق من فهمك ✓

$$3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0 \quad (1C)$$

$$x^4 - 16 = 0 \quad (1B)$$

$$x^3 + 2x = 0 \quad (1A)$$

(1B) $2, -2, 2i, -2i$

للمعادلة جذران حقيقيان وجذران تخيليان.

(1C) $\frac{1}{3}, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}$ ؛

للمعادلة جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان.

اختبر حل كل معادلة في المثال 1، ولاحظ أن عدد حلول كل معادلة يساوي درجة كثيرة الحدود. والنتيجة الآتية للنظرية الأساسية في الجبر تصف العلاقة بين درجة معادلة كثيرة الحدود وعدد جذورها.

أضف إلى

مطويتك

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال:	$x^3 + 2x^2 + 6$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6$	$-2x^5 - 3x^2 + 8$
	3 جذور	4 جذور	5 جذور

وبالمثل دالة كثيرة الحدود من الدرجة n لها فقط العدد n من الأصفار المركبة.

وقد اكتشف العالم الفرنسي ديكارت علاقة بين إشارات معاملات دالة كثيرة الحدود وعدد الأصفار الحقيقية.

أنواع الجذور

مثال 1 يبين كيفية تحديد عدد الجذور وأنواعها لمعادلة كثيرة الحدود.

مثال 2 يبين كيفية تحديد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة، وعدد الأصفار التخيلية لدالة كثيرة الحدود.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

1 حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها ونوعها:

$$x^2 + 2x - 48 = 0 \quad (a)$$

لهذه المعادلة جذران حقيقيان هما: 6 و -8 .

$$y^4 - 256 = 0 \quad (b)$$

لهذه المعادلة جذران حقيقيان هما 4 و -4 وجذران تخيليان هما $4i$ و $-4i$.

المحتوى الرياضي

الأصفار: الأصفار الحقيقية للدالة f تشير إلى تقاطع المحور x مع التمثيل البياني للدالة، وهي نفسها مجموعة الحلول الحقيقية لمعادلة كثيرة الحدود $f(x) = 0$. ومن المفيد ذكره في هذا المجال أن عدد أصفار دالة كثيرة الحدود لا يزيد على درجتها.

- إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن:
- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.
 - عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اكتب دالة كثيرة حدود على السبورة، ووضّح للطلاب كيفية تطبيق قانون ديكرت لتغير إشارات معاملات كثيرة الحدود من خلال تظليل مواقع تغير الإشارات في المعاملات.

مثال إضافي

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة

$$p(x) = -x^6 + 4x^3 - 2x^2 - x - 1$$

للدالة جذران أو 0 من الجذور الحقيقية الموجبة. وجذران أو 0 من الجذور الحقيقية السالبة و 6 أو 4 أو 2 من الجذور التخيلية.

2

تنبيه!

أخطاء مفاهيمية شائعة ووضّح

للطلاب طريقة تحديد عدد الأصفار التخيلية لدالة كثيرة الحدود. ففي مثال 2 درجة كثيرة الحدود هي 6. لذا فإن أكبر عدد للأصفار الحقيقية هو 6. لذا أوجد العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة للأصفار السالبة، واطرح في كل مرة مجموعهما من العدد 6 لتجد العدد الممكن للأصفار التخيلية. ذكّر الطلاب أن الأصفار التخيلية تأتي في أزواج مترافقة، ولذا فإن عدد الأصفار التخيلية يجب أن يكون زوجياً.

مثال 2

إيجاد عدد الأصفار الموجبة والسالبة

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$$

بما أن درجة الدالة $f(x)$ تساوي 6، فإن لها 6 أصفار: حقيقية أو تخيلية أو كليهما. استعمل قانون ديكرت للإشارات لتحديد العدد الممكن للأصفار الحقيقية ونوعها.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(x)$.

$$f(x) = \begin{array}{cccccccc} x^6 & + & 3x^5 & - & 4x^4 & - & 6x^3 & + & x^2 & - & 8x & + & 5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{لا} & & \text{نعم} & & \text{لا} & & \text{نعم} & & \text{نعم} & & \text{نعم} & & \text{نعم} \\ + & & + & & - & & - & & + & & - & & + \end{array}$$

نجد أن هناك 4 تغيرات في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون: 4 أو 2 أو 0.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(-x)$.

$$f(-x) = (-x)^6 + 3(-x)^5 - 4(-x)^4 - 6(-x)^3 + (-x)^2 - 8(-x) + 5$$

$$= \begin{array}{cccccccc} x^6 & - & 3x^5 & - & 4x^4 & + & 6x^3 & + & x^2 & + & 8x & + & 5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{نعم} & & \text{لا} & & \text{نعم} & & \text{لا} & & \text{لا} & & \text{لا} & & \text{لا} \\ + & & - & & + & & - & & - & & - & & - \end{array}$$

نجد أن هناك تغيرين في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون: 2 أو 0. أنشئ جدولاً يبين عدد الجذور الحقيقية والتخيلية الممكنة.

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية
4	2	0
2	2	2
0	2	4
0	0	6

تحقق من فهمك

(2) اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة:

$$h(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

تعلمت سابقاً أن حاصل ضرب العددين المركبين المترافقين هو عدد حقيقي دائماً، ومن الجدير بالذكر أن الجذور المركبة تكون في أزواج مترافقة. فمثلاً إذا علمت أن أحد جذري المعادلة $x^2 - 8x + 52 = 0$ هو $4 + 6i$ ، فإنك تستنتج أن الجذر الآخر هو $4 - 6i$.

وينطبق هذا الأمر على أصفار دوال كثيرات الحدود أيضًا. فإذا كان العدد المركب صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن مرافقه أيضًا صفر لدالة كثيرة الحدود.

أضف إلى
مطوياتك

نظرية الأصفار المركبة المترافقة

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا كان a, b عددين حقيقيين، و كان $a + bi$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - bi$ صفر لدالة أيضًا.
مثال: إذا كان $3 + 4i$ صفرًا للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$ ، فإن $3 - 4i$ صفر لدالة أيضًا.

عندما تعطى جميع أصفار دالة كثيرة حدود ويطلب إليك تحديد الدالة، حوّل الأصفار إلى عوامل، ثم اضرب جميع العوامل بعضها في بعض؛ لتحصل على دالة كثيرة الحدود المطلوبة.

مثال 3

استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة حدود

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددين $5 - i, -1$ من أصفارها.

افهم

المعطيات: العددين $5 - i, -1$ من أصفار كثيرة حدود.
المطلوب: كتابة دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، والعددين $5 - i, -1$ من أصفارها.

خطط

بما أن $5 - i$ صفر للدالة، فإن $5 + i$ أيضًا صفر للدالة بحسب نظرية الأصفار المترافقة.

لذا فإن $(x - (5 + i)), x - (5 - i), x + 1$ عوامل لكثيرة الحدود.

حل

اكتب دالة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عواملها.

$$P(x) = (x + 1)[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$$

اضرب العوامل لتحصل على دالة كثيرة الحدود.

$$P(x) = (x + 1)[x - (5 - i)][x - (5 + i)]$$

$$= (x + 1)[(x - 5) + i][(x - 5) - i]$$

$$= (x + 1)[(x - 5)^2 - i^2]$$

$$= (x + 1)[(x^2 - 10x + 25 - (-1))]$$

$$= (x + 1)(x^2 - 10x + 26)$$

$$= x^3 - 10x^2 + 26x + x^2 - 10x + 26$$

$$= x^3 - 9x^2 + 16x + 26$$

بكتابة المعادلة

بإعادة تجميع الحدود

الفرق بين مربعين

بإيجاد مربع الحدين

بالتبسيط

بالضرب

بجمع الحدود المتشابهة

تحقق

بما أن هناك 3 أصفار، فإن دالة كثيرة الحدود ستكون من الدرجة الثالثة، ولذا فإن $P(x) = x^3 - 9x^2 + 16x + 26$ دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، وأصفارها هي: $5 + i, 5 - i, -1$.

تحقق من فهمك

3) اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددين $1 + 2i, -1$ من أصفارها. $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5$

مثال إضافي

3

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددين $4 - i$ و 4 من أصفارها.

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 49x - 68$$

تنوع التعليم

دون ضمن فوق

إذا

أخطأ بعض الطلاب في حل التمارين الرياضية؛ لعدم قدرتهم على قراءة ملاحظاتهم،

فقم

بالتأكيد عليهم دومًا بضرورة ترتيب خطتهم وملاحظاتهم خلال هذا الفصل؛ حيث من السهل أن نخطئ في قراءة المعاملات والأسس، أو نخلط في قراءة i مع العدد 1.

$$2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3} \quad (4)$$

جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان

حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها:

مثال 1

(1) $x^2 - 3x - 10 = 0$ ، جذران حقيقيان $-2, 5$ (2) $x^3 + 12x^2 + 32x = 0$ ، $-8, -4, 0$ ؛ جذور حقيقية 3 (3) $16x^4 - 81 = 0$ ، جذران حقيقيان وجذران تخيليان $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}i, \frac{3}{2}i$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-12 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفله هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

(13) $-\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i$ ؛ جذران تخيليان

(14) جذران تخيليان $\frac{5 \pm i\sqrt{87}}{4}$

(15) $1, \frac{-8}{3}$ جذران حقيقيان

(16) $\frac{3}{2}, \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{4}$ ؛ جذر حقيقي، وجذران تخيليان

(17) $-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}i, \frac{5}{2}i$ ؛ جذران حقيقيان، وجذران تخيليان

(18) $3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, 0$ ؛ ثلاثة جذور حقيقية

(19) $2, 2, 0, -2, -2$ خمسة جذور حقيقية

(20) $0, -i, -i, i, i$ ؛ جذر حقيقي و 4 جذور تخيلية

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي :

(5) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 6$ 3 أو 1 أو 0

(6) $f(x) = 6x^4 + 4x^3 - x^2 - 5x - 7$ 2 أو 0

(7) $f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 2x - 4$ 1 أو 3 أو 0 أو 2 أو 4

(8) $f(x) = -2x^4 - 3x^3 - 2x - 5$ 0 أو 2 أو 4

مثال 3 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها :

(10) $x^3 - 9x^2 + 14x + 24$ ، $3, -1, 1, 2$ (11) $x^3 - 3x^3 - x^2 - 27x - 90$ ، $4, -1, 6$

(12) $x^4 - 4x^2 - 15x + 68$ ، $-4, 4, i$ (13) $x^3 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ ، $-2, 5, -3i$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها، وأنواعها: (13-20) انظر الهامش

(14) $2x^2 - 5x + 14 = 0$

(15) $4x^2 + 1 = 0$

(16) $8x^3 - 27 = 0$

(17) $-3x^2 - 5x + 8 = 0$

(18) $x^3 - 6x^2 + 7x = 0$

(19) $16x^4 - 625 = 0$

(20) $x^5 + 2x^3 + x = 0$

(21) $x^5 - 8x^3 + 16x = 0$

مثال 2 اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي :

(21) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x + 7$

(22) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 12$ 2 أو 0 أو 1 أو 2 أو 0

(23) $f(x) = -3x^5 + 5x^4 + 4x^2 - 8$ 0 أو 2 أو 4

(24) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5x + 19$ 0 أو 2 أو 1 أو 4

(25) $f(x) = 4x^6 - 5x^4 - x^2 + 24$ 0 أو 2 أو 4 أو 6

(26) $f(x) = -x^5 + 14x^3 + 18x - 36$ 0 أو 2 أو 1 أو 4

مثال 3 اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها : (27-32) انظر الهامش.

(27) $5, -2, -1$

(28) $-4, -3, 5$

(29) $-1, -1, 2i$

(30) $-3, 1, -3i$

(31) $0, -5, 3 + i$

(32) $-2, -3, 4 - 3i$

(33) أرباح: قَدَّر مدير الإنتاج في مصنع للأجهزة الإلكترونية أن الربح الذي يحققه المصنع من إنتاج x جهاز يعطى بالدالة: $P(x) = -0.006x^4 + 0.15x^3 - 0.05x^2 - 1.8x$

- (a) ما عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لهذه الدالة؟
 جذر فإن عدد الجذور التخيلية صفر أو اثنان
 2 أو 0، 1 وبما أن الصفر جذر فإن عدد الجذور التخيلية صفر أو اثنان
- (b) ماذا تعني الأصفار في هذه الحالة؟

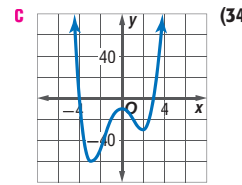
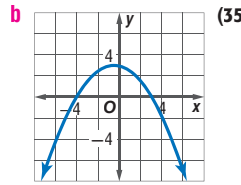
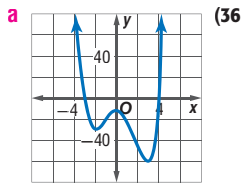
(33b) تمثل الجذور غير السالبة عدد الأجهزة المنتجة يومياً دون أن يحقق المصنع ربحاً.

اكتب بجانب التمثيل البياني للدالة الرمز الذي يمثل أصفارها في كل مما يأتي:

(a) $-3, 4, i, -i$

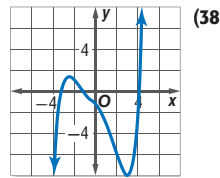
(b) $-4, 3$

(c) $-4, 3, i, -i$

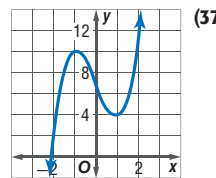


(37) ليس هناك جذور حقيقية موجبة؛ هناك جذر حقيقي سالب؛ وهناك جذران تخيليان. إجابة ممكنة: لا يقطع التمثيل البياني الجزء الموجب من المحور x ، ويقطع الجزء السالب منه مرة واحدة. ولأن درجة كثيرة الحدود 3، لذا فإن للدالة صفرين تخيليين.

حدد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل من الدالتين الممثلتين بيانياً فيما يأتي، ووضح إجابتك:



الدرجة: 5



الدرجة: 3

(38) هناك جذر حقيقي موجب، وجذران حقيقيان سالبان وجذران تخيليان. إجابة ممكنة: يقطع التمثيل البياني الجزء الموجب من المحور x مرة واحدة، ويقطع الجزء السالب مرتين، ولأن درجة كثيرة الحدود 5، لذا فإن للدالة صفرين تخيليين.

إرشادات للمعلم الجديد

عند حساب عدد الأصفار التخيلية الممكنة للدالة، في سؤال 33 تحقق من العدد صفر هل يمثل جذراً للدالة، أم لا؟ حيث إن العدد صفر لا يصنف عدداً موجباً أو سالباً.

إجابات:

(27) $y = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

(28) $y = x^3 + 2x^2 - 23x - 60$

(29) $y = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

(30) $y = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 18x - 27$

(31) $y = x^4 - x^3 - 20x^2 + 50x$

(32) $y = x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 77x + 150$

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	43-50، 13-37
ضمن المتوسط	42-50، 13-37 فردي
فوق المتوسط	26-50

39) مسألة مفتوحة: في كل مما يأتي، مثل بيانياً دالة كثيرة حدود بحيث يكون لها: (a-c) انظر ملحق الإجابات

(a) 3 أصفار حقيقية و صفران تخيليان (b) 4 أصفار حقيقية (c) صفران تخيليان

40) تحدّد: اكتب معادلة على صورة حاصل ضرب عوامل دالة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة، لها صفران تخيليان، و صفر غير صحيح، و صفران غير نسبيين، ووضح إجابتك. انظر الهامش.

41) حدد أي المعادلات الآتية تختلف عن الأخرى، ووضح إجابتك: انظر الهامش.

$$r^4 + 1 = 0$$

$$r^3 + 1 = 0$$

$$r^2 - 1 = 0$$

$$r^3 - 8 = 0$$

42) تبرير: اكتب مثلاً مضاداً لكل عبارة فيما يأتي:

(a) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي سالب.

(b) جميع دوال كثيرات الحدود التي تزيد درجتها على 2 لها على الأقل صفر حقيقي موجب.

(42a) إجابة ممكنة:

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4$$

(42b) إجابة ممكنة:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$$

43) اكتب: وضح لزميلك كيف تستعمل قانون ديكرات للإشارات لتحديد عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة الممكنة لدالة كثيرة الحدود: $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 5x - 12$ انظر ملحق الإجابات.

تدريب على اختبار

44) استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$

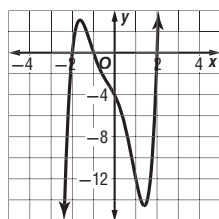
وحّد أيّ مما يأتي لا يعدّ عاملاً لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$ ؟ B

C $x + 2$

A $x - 2$

D $x + 1$

B $x - 1$



40) إجابة ممكنة:

$$f(x) = (x + 2i)$$

$$(x - 2i)(3x + 5)(x + \sqrt{5})$$

$$(x - \sqrt{5})$$

للتخيلي.

41) $r^4 + 1 = 0$ إجابة ممكنة: جميع

حلول هذه المعادلة أعداد تخيلية، أما المعادلات البقية فلها حلول حقيقية.

$$f(-8) = -1638, f(4) = 342 \quad (45)$$

$$f(-8) = 21808, f(4) = 1192 \quad (46)$$

$$f(-8) = -63940, f(4) = 1868 \quad (47)$$

مراجعة تراكمية

$$(a - 4)(a - 2)(5a + 2b) \quad (50) \quad (x^2 + 2x + 4)(4y - 3z) \quad (49)$$

أوجد $f(-8)$, $f(4)$ لكل دالة مما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي: (الدرس 3-7) (45-47) انظر الهامش

$$f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 3x + 2 \quad (45)$$

$$f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x \quad (46)$$

$$f(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 4 \quad (47)$$

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي تحليلًا تامًا، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب كثيرة حدود أولية: (الدرس 3-6)

$$(x + y)(x - y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) \quad x^6 - y^6 \quad (48)$$

$$4x^2y + 8xy + 16y - 3x^2z - 6xz - 12z \quad (49)$$

$$5a^3 - 30a^2 + 40a + 2a^2b - 12ab + 16b \quad (50)$$

تنوع التعليم

ضمن شوق

توسّع وضح للطلاب أنه إذا كان $(x - r)^k$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ ، ولم يكن $(x - r)^{k+1}$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود، فإن r صفرًا لدالة كثيرة الحدود $f(x)$ ، ويكون k هو درجة العامل الذي ينتج الحل $x = r$ ، ومن هنا يقال: إن للقيمة r ، k مرة من عمليات الضرب المتكررة، فعندما يكون $k = 1$ ، فإن القيمة ترتبط بعملية ضرب مرة واحدة، وعادة يسمى الصفر في هذه الحالة بالصفر البسيط. استعمل المثال التالي لتوضيح الصفر المكرر والصفر البسيط للدالة $f(x) = x^7 - 5x^6 + 6x^5 + 4x^4 - 8x^3$. عند تحليل هذه الدالة يمكن كتابتها على الصورة: $f(x) = x^3(x - 2)^3(x + 1)$. إذن لدالة كثيرة الحدود هذه 3 أصفار مختلفة: الصفر الأول عند $x = -1$ ، وهذا الصفر صفر بسيط، وصفر آخر عند $x = 0$ ، وهذا الصفر مكرر ثلاث مرات، وصفر ثالث عند $x = 2$ ، وهذا الصفر مكرر ثلاث مرات. حفز طلابك على إيجاد الأصفار وتكرارها في كثيرة الحدود $f(x) = (x^6 - x^4)(x + 1)$. لها 3 أصفار مختلفة: الصفر الأول عند $x = 1$ ، وهو صفر بسيط، والصفر الثاني عند $x = 0$ وهو مكرر 4 مرات والصفر الثالث عند $x = -1$ وهو مكرر مرتين.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 8 - 3

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (41) دون

الاسم: التاريخ:

3-8 تدريبات إعادة التعليم الجذور والأصفار

البرابر التالية متكافئة لأي دالة كثيرة حدود $f(x)$

- c صفر الدالة كثيرة الحدود $f(x)$
- c جذرًا أو حلًا لمعادلة كثيرة الحدود $f(x) = 0$
- $(x - c)$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$
- إذا كانت c عددًا حقيقيًا، فإن نقطة تقاطع منحني $f(x)$ مع محور x .

الظاهرة الأساسية: كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد على الأقل من مجموعة الأعداد المركبة.

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر: تكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n على الصورة $P(x) = 0$ العدد n من الجذور المركبة (بما في ذلك الجذور المتكررة).

إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود معاملات حدها أعداد حقيقية، وحدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًا وفق درجتها فإن:

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x) = 0$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات الحدود أو أقل منه بعدد زوجي.
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x) = 0$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات الحدود $P(-x)$ أو أقل منه بعدد زوجي.

الاسم: التاريخ:

3-8 تدريبات إعادة التعليم الجذور والأصفار

حل المعادلة $3x^2 + 3x = 0$ واذكر عدد الجذور وأصغارها.

حل كل معادلة بما يأتي واذكر عدد جذورها، وأصغارها.

1) $3x^2 + 4x - 21 = 0$ جذران حقيقيان: $3, -7$

2) $x^2 + 4x - 21 = 0$ جذران حقيقيان: $3, -7$

3) $2x^2 - 50x = 0$ جذر واحد حقيقي وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{5\sqrt{3}}{3}$

4) $3x^2 - 8x - 12 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $4, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

5) $4x^2 - 4x - 1 = 0$ جذران حقيقيان: $1, -\frac{1}{4}$

6) $x^2 - 81x = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm 9$

7) $3x^2 - 4x^2 - 17x + 6 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

8) $4x^2 - 12x^2 - x + 3 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

9) $x^2 - 3x^2 + 2x - 4 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

10) $x^2 - 2x^2 + 4x - 6 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

11) $x^2 + 7x^2 + 3x - 9 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

12) $x^2 - 5x^2 + 6x + 1 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

13) $x^2 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

14) $x^2 - 21x^2 + 80 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

15) $x^2 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

16) $x^2 - 21x^2 + 80 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

17) $x^2 - 3x^2 - 5x^2 + 3x + 4 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

18) $x^2 - 21x^2 + 80 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

19) $x^2 + 7x^2 + 7x - 15 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

20) $x^2 + x^2 + 9 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

21) $x^2 + 7x^2 + 7x - 15 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

22) $x^2 + 7x^2 + 7x - 15 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

23) $x^2 + 26x^2 + 25 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

تدريبات إعادة التعليم - تمة (42) دون

الاسم: التاريخ:

3-8 تدريبات إعادة التعليم الجذور والأصفار

أوجد أصفار المعادلة $f(x) = x^4 - 15x^2 + 38x - 60 = 0$ واذكر عدد الجذور الحقيقية الموجبة والسالبة.

أوجد جميع أصفار المعادلة $f(x) = x^4 - 15x^2 + 38x - 60 = 0$ واذكر عدد الجذور الحقيقية الموجبة والسالبة.

أوجد جميع أصفار المعادلة $f(x) = x^4 - 15x^2 + 38x - 60 = 0$ واذكر عدد الجذور الحقيقية الموجبة والسالبة.

أوجد جميع أصفار المعادلة $f(x) = x^4 - 15x^2 + 38x - 60 = 0$ واذكر عدد الجذور الحقيقية الموجبة والسالبة.

الاسم: التاريخ:

3-8 تدريبات إعادة التعليم الجذور والأصفار

أوجد جميع أصفار كل دالة بما يأتي:

1) $f(x) = x^2 + x^2 + 9x + 9$

2) $f(x) = x^2 - 3x^2 + 4x - 12$

3) $f(x) = x^2 + x^2 + 9x + 9$

4) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$

5) $f(x) = x^2 + x^2 + 9x + 9$

6) $f(x) = x^2 - 3x^2 + 4x - 12$

7) $f(x) = x^2 + x^2 + 9x + 9$

8) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$

9) $f(x) = x^2 + x^2 + 9x + 9$

10) $f(x) = x^2 - 3x^2 + 4x - 12$

11) $f(x) = x^2 + x^2 + 9x + 9$

12) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$

13) $f(x) = x^2 + x^2 + 9x + 9$

14) $f(x) = x^2 - 3x^2 + 4x - 12$

15) $f(x) = x^2 + x^2 + 9x + 9$

16) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$

17) $f(x) = x^2 + x^2 + 9x + 9$

18) $f(x) = x^2 - 3x^2 + 4x - 12$

19) $f(x) = x^2 + x^2 + 9x + 9$

20) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$

21) $f(x) = x^2 + x^2 + 9x + 9$

22) $f(x) = x^2 - 3x^2 + 4x - 12$

23) $f(x) = x^2 + x^2 + 9x + 9$

تدريبات المهارات (43) دون ضمن

الاسم: التاريخ:

3-8 تدريبات المهارات الجذور والأصفار

حل كل معادلة بما يأتي واذكر عدد جذورها، وأصغارها:

1) $5x + 12 = 0$ جذر حقيقي واحد

2) $x^2 - 4x + 40 = 0$ جذران تخيليان

3) $x^2 + 4x^2 = 0$ جذران حقيقيان: $0, 0, 2, -2$

4) $x^2 - 625 = 0$ جذران حقيقيان: $0, 0, 25, -25$

5) $x^2 - 4x - 1 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $1, -\frac{1}{4}$

6) $x^2 - 81x = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm 9$

7) $3x^2 - 4x^2 - 17x + 6 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

8) $4x^2 - 12x^2 - x + 3 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

9) $x^2 - 3x^2 + 2x - 4 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

10) $x^2 - 2x^2 + 4x - 6 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

11) $x^2 + 7x^2 + 3x - 9 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

12) $x^2 - 5x^2 + 6x + 1 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

13) $x^2 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

14) $x^2 - 21x^2 + 80 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

15) $x^2 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

16) $x^2 - 21x^2 + 80 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

17) $x^2 - 3x^2 - 5x^2 + 3x + 4 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

18) $x^2 - 21x^2 + 80 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

19) $x^2 + 7x^2 + 7x - 15 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

20) $x^2 + x^2 + 9 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

21) $x^2 + 7x^2 + 7x - 15 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

22) $x^2 + 7x^2 + 7x - 15 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

23) $x^2 + 26x^2 + 25 = 0$ جذر حقيقي واحد وجذران تخيليان: $0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

الاسم: التاريخ:

3-8 تدريبات حل المسألة الجذور والأصفار

جدول، صممت انصاف جدول قيم دالة كثيرة حدود كما هو موضح:

x	p(x)
-4	-3
-3	-1
-2	0
-1	2
0	0
1	4
2	0
3	2
4	5

اكتب 3 جذور للدالة $p(x)$.

جدول، يعمل هند مهندسا كهربائيا ويقوم بحل معادلات كثيرة حدود غالبًا لتعرف خصائص الدوائر الكهربائية التي يعملها، وكان عليه أن يجد لإحدى الدوائر جذور كثيرة الحدود $p(x)$. وقد وجد أن $p(2) = 0$ و $p(3) = 0$ و $p(4) = 0$.

جدول، يعمل هند مهندسا كهربائيا ويقوم بحل معادلات كثيرة حدود غالبًا لتعرف خصائص الدوائر الكهربائية التي يعملها، وكان عليه أن يجد لإحدى الدوائر جذور كثيرة الحدود $p(x)$. وقد وجد أن $p(2) = 0$ و $p(3) = 0$ و $p(4) = 0$.

جدول، يعمل هند مهندسا كهربائيا ويقوم بحل معادلات كثيرة حدود غالبًا لتعرف خصائص الدوائر الكهربائية التي يعملها، وكان عليه أن يجد لإحدى الدوائر جذور كثيرة الحدود $p(x)$. وقد وجد أن $p(2) = 0$ و $p(3) = 0$ و $p(4) = 0$.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 8	
دون	ضمن
<p>التدريبات الإثرائية (45)</p> <p>الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p>3-8 التدريبات الإثرائية أسلوب التنصيف لتقريب الأصفار الحقيقية يمكن أن يستعمل التنصيف لتقريب أصفار دوال كثيرات الحدود مثل $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$ على الأقل ومتوسط الفترة بينها هو: $f(1) = -4$ و $f(2) = 3$، فإن هناك صفر واحد بين 1 و 2، على الأقل ومتوسط الفترة بينها هو: $\frac{1+2}{2} = 1.5$، وبما أن $f(1.5) = -1.875$، فإن الصفر يقع بين 1.5 و 2، ومتوسط الفترة هو $\frac{1.5+2}{2} = 1.75$، وبما أن $f(1.75) = 0.172$، فالصفر يقع بين 1.5 و 1.75، ومتوسط هذه الفترة هو $\frac{1.5+1.75}{2} = 1.625$، وبما أن $f(1.625) = -0.94$، تقريبًا، لذا يقع الصفر بين 1.625 و 1.75، ومتوسط هذه الفترة هو $\frac{1.625+1.75}{2} = 1.6875$، وبما أن قيمة $f(1.6875) = -0.41$، تقريبًا، فإن الصفر الدالة يقع بين 1.6875 و 1.75، إذن، صفر الدالة يساوي 1.7 لأقرب عشر.</p> <p>وبلخص الشكل الأتي الناتج التي تم التوصل إليها:</p> <p>استعمل أسلوب التنصيف لتقريب صفر كل دالة فيما يأتي لأقرب عُشر.</p> <p>1 (1) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 2$, $f(0) = 2$, $f(1) = -12$ 0.2</p> <p>2 (2) $f(x) = 2x^4 + x^2 - 15$, $f(1) = -12$, $f(2) = 21$ 1.6</p> <p>3 (3) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 12$, $f(1) = -13$, $f(2) = 4$ 1.9</p> <p>4 (4) $f(x) = 4x^3 - 2x + 7$, $f(-2) = -21$, $f(-1) = 5$ -1.3</p> <p>5 (5) $f(x) = 3x^3 - 14x^2 - 27x + 126$, $f(4) = -14$, $f(5) = 16$ 4.7</p> <p>الصفحة الثاني التمام</p>	<p>كتاب التمارين (22)</p> <p>3-8 الجذور والأصفار حل كل معادلة مما يأتي، واذكر عدد جذورها وترعاها: (1) $x^2 - 15 = 0$، $-\frac{3}{2}$، جذر حقيقي واحد (2) $x^2 - 5x^2 + 4 = 0$، $1, -2, 2$، جذور حقيقية (3) $x^3 - 81x = 0$، $3i, -3i, 3, -3, 0$ (4) $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$، $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1, -1$، جذور حقيقية (5) $x^3 + x + 3 = 0$، $4i, 2i, 0$، $2i, 0$، $2i, 0$، $2i, 0$ (6) $f(x) = 4x^2 - 2x^2 + x + 3$، 2 أو 0، 1 أو 2 (7) $g(x) = 3x^2 + x^2 - 3x^2 + 7x + 5$، 2 أو 0، 2 أو 0 (8) $h(x) = 7x^4 + 3x^2 - 2x - 1$، 0 أو 2، 0 أو 2 (9) $p(x) = 2x^4 - 2x^2 + 2x^2 - x - 1$، 1 أو 3 (10) $q(x) = x^4 + 50x^2 + 49$، $7i, 7i, -7i, -7i, i, -i$ (11) $r(x) = x^4 - 7x^2 + 17x - 15$، 4 أو 2، 0 أو 2 (12) $s(x) = x^4 + 4x^2 - 3x^2 - 14x - 8$، $-1, -1, 2, -4$ (13) $t(x) = x^4 + 6x^2 + 24x - 40$، $2, 2, 3 - i, 3 + i$ (14) $u(x) = x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 24x - 40$، $2, 2, 3 - i, 3 + i$ (15) $v(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$، $-2, 3 + i$ (16) $w(x) = x^3 + 5x^2 + 9x + 45$، $-5, 3i$ (17) $x^3 - 9x^2 + 26x^2 - 34x + 20$، $2, 5, 1 + i$ (18) $f(x) = x^4 - 3x^4 + 5x^2 - 27x - 36$، $-1, 4, 3i$ (19) $f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 34x + 20$، $2, 5, 1 + i$</p> <p>أوجد جميع الأصفار لكل دالة مما يأتي:</p> <p>(1) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 7$، $1, 1 + i\sqrt{6}, 1 - i\sqrt{6}$ (2) $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 65x + 84$، $7, \frac{3}{2}, 4$ (3) $h(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$، 4 أو 2، 0 أو 2 (4) $g(x) = x^4 + 4x^2 - 3x^2 - 14x - 8$، $-1, -1, 2, -4$ (5) $g(x) = x^4 + 6x^2 + 24x - 40$، $2, 2, 3 - i, 3 + i$ (6) $g(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$، $-2, 3 + i$ (7) $g(x) = x^3 + 5x^2 + 9x + 45$، $-5, 3i$ (8) $f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 34x + 20$، $2, 5, 1 + i$ (9) $f(x) = x^4 - 3x^4 + 5x^2 - 27x - 36$، $-1, 4, 3i$</p> <p>اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها:</p> <p>(19) تصميم: صمم شخص تابلو حيزه الداخلي مكعب الشكل أبعاده 10in، 8in، 6in، ويريد أن يقلل من حجم الحيز الداخلي ليصبح 105 in³، وذلك بإنقاص كل من أبعاده بالمقدار نفسه، اكتب معادلة كثيرة حدود تم حلها لتجد مقدار ما يجب عليه أن يُقص من كل بعد. $105 = (10-x)(8-x)(6-x)$</p> <p>22</p>

نظرية الصفر النسبي Rational Zero Theorem



لماذا؟

يمكن تقدير عدد الهواتف النقالة المباعة سنوياً $d(x)$ في إحدى الشركات بالدالة:
 $d(x) = 30x^3 - 478x^2 + 1758x + 12392$ ، حيث تمثل x عدد السنوات منذ 1418 هـ، ويمكن أن تستعمل هذه الدالة لمعرفة متى يبلغ عدد الهواتف النقالة المباعة 200000 هاتف.

تحديد الأصفار النسبية إن عملية اختبار جميع الأصفار الممكنة لدالة كثيرة حدود من خلال التعويض التركيبي ليست عملية سهلة. وتساعد **نظرية الصفر النسبي** على اختيار بعض الأعداد النسبية لاختبارها. وإذا كان المعامل الرئيس للدالة هو 1، فإننا نستعمل نتيجة النظرية لاختبار بعض الأصفار.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-9

إيجاد أصفار دالة كثيرة حدود على الصورة:
 $f(x) = ax^2 + bx + c$

الدرس 3-9

- تعرّف نظرية الصفر النسبي وتطبيقها.
- إيجاد جميع الأصفار النسبية لدالة كثيرة حدود.

ما بعد الدرس 3-9

استعمال ناتج قسمة كثيرة حدود لوصف التمثيل البياني للدالة النسبية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب الى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
واسأل:

- في أي عام كان عدد الهواتف النقالة 12392 هاتفاً؟ 1418
- ما قيمة x التي يمكن أن تستعملها لتقريب عدد الهواتف المباعة عام 1431؟ 13

إجابات (تحقق من فهمك):

(1A) $\pm \frac{10}{3}, \pm 10, \pm \frac{5}{3}, \pm 5, \pm \frac{2}{3}, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm 1$

(1B) $\pm 24, \pm 12, \pm 8, \pm 6, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1$

فيما سبق:

درست إيجاد أصفار الدوال التربيعية التي على الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$.

والآن:

- أتعرف نظرية الصفر النسبي وأطبقها.
- أجد جميع الأصفار النسبية لدالة كثيرة حدود.

المفردات:

نظرية الصفر النسبي

Rational Zero Theorem

www.obekaneducation.com

أضف إلى مطويتك

نظرية الصفر النسبي

مفهوم أساسي

التعبير اللغوي: إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة $f(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة، حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيس.

مثال: لتكن $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 17x + 12$ ، فإذا كان العدد النسبي $\frac{3}{2}$ صفراً للدالة $f(x)$ ، فإن 3 أحد عوامل العدد 12، و 2 أحد عوامل العدد 2.

نتيجة نظرية الصفر النسبي

إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، والمعامل الرئيس لها 1، وحدها الثابت لا يساوي صفراً، فإن أي صفر نسبي للدالة $f(x)$ يجب أن يكون أحد عوامل الحد الثابت.

مثال 1 تحديد الأعداد النسبية وفق نظرية الصفر النسبي

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحدها نظرية الصفر النسبي لكل من الدوال الآتية:

(a) $f(x) = 4x^5 + x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 16$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفراً نسبياً، فإن p أحد عوامل العدد 16، و q أحد عوامل العدد 4.

$p : \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$ $q : \pm 1, \pm 2, \pm 4$

اكتب القيم الممكنة للعدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة.

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 12$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفراً نسبياً، فإن p أحد عوامل العدد 12، و q أحد عوامل العدد 1.

$p : \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ $q : \pm 1$

لذا فإن $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

(1A, 1B) انظر الهامش.

تحقق من فهمك

(1B) $h(x) = x^3 + 11x^2 + 24$

(1A) $g(x) = 3x^3 - 4x + 10$

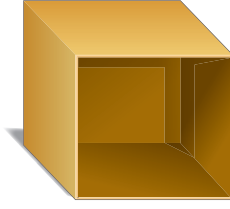
مصادر الدرس 3-9

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (166)	• تنويع التعليم، ص (166, 168)	• تنويع التعليم، ص (166, 168)
كتاب التمارين	• ص (23)	• ص (23)	• ص (23)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (46) • تدريبات المهارات، ص (48)	• تدريبات المهارات، ص (48) • تدريبات حل المسألة، ص (49) • التدريبات الإثرائية، ص (50)	• تدريبات المهارات، ص (48) • تدريبات حل المسألة، ص (49) • التدريبات الإثرائية، ص (50)

إيجاد الأصفار النسبية: عندما تكتب جميع الأعداد النسبية، يمكنك اختبار كل عدد باستعمال التعويض التركيبي، واستعمال الطرائق الأخرى التي تعلمتها لإيجاد أصفار الدالة.

مثال 2 من واقع الحياة

إيجاد الأصفار النسبية



نجارة: صنع إبراهيم صندوقاً على شكل منشور متوازي مستطيلات حجمه 8019 in^3 ، أوجد أبعاد الصندوق إذا كان طوله يزيد على عرضه بمقدار 24 in ، وارتفاعه يزيد على عرضه بمقدار 18 in .

بفرض أن عرض الصندوق x ، فإن طوله $x + 24$ ، وارتفاعه $x + 18$.
اكتب معادلة الحجم.

$$\ell wh = V \quad \text{قانون الحجم}$$

$$(x + 24)(x)(x + 18) = 8019 \quad \text{بالتعويض}$$

$$x^3 + 42x^2 + 432x = 8019 \quad \text{بالضرب}$$

$$x^3 + 42x^2 + 432x - 8019 = 0 \quad \text{ب طرح 8019 من كلا الطرفين}$$

المعامل الرئيس يساوي 1؛ لذا فإن الأعداد النسبية الممكنة هي عوامل العدد 8019.

$$\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 11, \pm 27, \pm 33, \pm 81, \pm 99, \pm 243, \pm 297, \pm 729, \pm 891, \pm 2673, \pm 8019$$

وبما أن الأبعاد قيم موجبة دائماً، فاختر القيم الموجبة فقط.

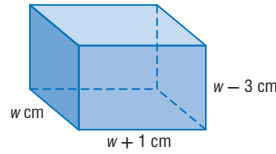
هنالك تغير واحد في إشارة المعاملات، وبحسب قانون ديكرات للإشارات، فهناك صفر واحد حقيقي موجب. أنشئ جدولاً للقسم التركيبي، واختبر القيم الممكنة.

p	1	42	432	-8019
1	1	43	475	-7544
3	1	45	567	-6318
9	1	51	891	0

بما أن العدد 9 صفر حقيقي موجب، فلا داعي لاختبار بقية القيم. ويكون البعدان الآخران هما:
 $9 + 18 = 27 \text{ in}$ و $9 + 24 = 33 \text{ in}$

تحقق: اضرب الأبعاد الثلاثة وتحقق من أن الناتج يساوي 8019
 $\checkmark 9 \times 33 \times 27 = 8019$

تحقق من فهمك



(2) هندسة: منشور متوازي مستطيلات حجمه 1056 cm^3 ، ويزيد طوله 1 cm على عرضه، ويقل ارتفاعه 3 cm عن عرضه، أوجد أبعاده. **12 cm, 11 cm, 8 cm**

ليس من الضروري في العادة اختبار جميع الأصفار الممكنة، فعند إيجاد أحدها، حلل الدالة الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود على أحد عواملها لتجد الأصفار الأخرى.

الدرس 3-9 نظرية الصفر النسبي 165

تحديد الأصفار النسبية

مثال 1 يبين كيفية استعمال نظرية الصفر النسبي لكتابة جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لدالة كثيرة الحدود التي تكون معاملاتها أعداداً صحيحة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل من الدالتين التاليتين:

$$f(x) = 3x^4 - x^3 + 4 \quad \text{(a)}$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}$$

$$f(x) = x^4 + 7x^3 - 15 \quad \text{(b)}$$

$$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$$

تنبيه

أخطاء مفاهيمية شائعة في أثناء شرح مثال 1 وضّح للطلاب أن ± 1 هي أصفار نسبية ممكنة دائماً. وأكد عليهم أن هذه الأعداد من الممكن أن تكون أصفاراً، لكنها ليست مؤكدة، لذا لا بد من التحقق بالتعويض.

إيجاد الأصفار النسبية

مثال 2 يبين كيفية إيجاد الأصفار بعد وضع قائمة الأصفار الممكنة للمسائل الحياتية.

مثال 3 يبين كيفية استعمال الصفر الذي يتم التوصل إليه في عملية تحليل دالة كثيرة الحدود إلى عواملها.

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي اختر عدداً من الطلاب ليعرضوا أمام الصف كيفية إيجاد الأصفار النسبية لدالة كثيرة حدود، ويوضحوا ذلك من خلال عرض تقديمي. اطلب إلى أحد الطلاب أن يكتب قائمة بالأصفار النسبية الممكنة، واطلب إلى آخر عمل جدول لاختبار القيم.

أوجد جميع الأصفار للدالة: $f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 41x^2 - 72x - 36$.

اعتمادًا على نتيجة النظرية الأساسية في الجبر يكون للدالة 4 أصفار مركبة فقط، وبحسب قانون ديكرارت للإشارات هناك صفر واحد أو 3 أصفار حقيقية موجبة، وهناك صفر واحد فقط حقيقي سالب، والأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي هي:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{2}{5}, \pm \frac{3}{5}, \pm \frac{4}{5}, \pm \frac{6}{5}, \pm \frac{9}{5}, \pm \frac{12}{5}, \pm \frac{18}{5}, \pm \frac{36}{5}$

$\frac{p}{q}$	5	-8	41	-72	-36
-1	5	-13	54	-126	90
1	5	-3	38	-34	-70
2	5	2	45	18	0

أنشئ جدولاً، واختبر الأعداد النسبية.

بما أن $f(2) = 0$ ، فإن $x = 2$ صفر للدالة.

حلل كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $x - 2$ وهي $5x^3 + 2x^2 + 45x + 18$:

بكتابة كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $x - 2$

$$5x^3 + 2x^2 + 45x + 18 = 0$$

بتجميع الحدود

$$(5x^3 + 2x^2) + (45x + 18) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$x^2(5x + 2) + 9(5x + 2) = 0$$

خاصية التوزيع

$$(x^2 + 9)(5x + 2) = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x^2 + 9 = 0 \quad \text{أو} \quad 5x + 2 = 0$$

$$x^2 = -9 \quad 5x = -2$$

$$x = \pm 3i \quad x = -\frac{2}{5}$$

لذا يوجد صفر حقيقي آخر هو $x = -\frac{2}{5}$ ، وصفران تخيلاني هما $x = 3i$ و $x = -3i$.

لذا فإن أصفار الدالة هي $-\frac{2}{5}, 2, 3i, -3i$.

تحقق من فهمك

2, $-\frac{1}{2}, \pm 3i$ (3B)

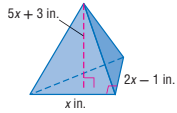
$k(x) = 2x^4 - 5x^3 + 20x^2 - 45x + 18$ (3B) $\pm \frac{2}{3}, \pm i$ $h(x) = 9x^4 + 5x^2 - 4$ (3A)

تأكد

مثال 1 اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل من الدالتين الآتيتين: (1-2) انظر الهامش

$f(x) = 2x^4 + 3x^2 - x + 15$ (2)

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 8x + 24$ (1)



3 هندسة إذا كان حجم الهرم الثلاثي المجاور 210 in^3 ، فأوجد أبعاده.

5 in., 9 in., 28 in.

$f(x) = 2x^4 + 11x^3 + 26x^2 + 29x + 12$ (5) $-\frac{3}{2}, -1$

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ (4) $-3, 2, 7$

$-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1 + 2i, 1 - 2i$ (9)

$f(x) = 8x^3 + 14x^2 + 11x + 3$ (7)

$f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 8x + 5$ (6) $\frac{5}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

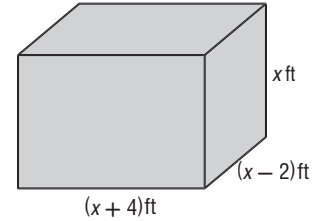
$f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 14x - 15$ (9)

$f(x) = 4x^4 + 13x^3 - 8x^2 + 13x - 12$ (8)

مثالان إضافيان

2 هندسة: إذا كان حجم مجسم

على شكل متوازي مستطيلات 1120 قدمًا مكعبة، وعرضه يقلّ قدمين عن ارتفاعه، بينما يزيد طوله 4 أقدام على ارتفاعه، فأوجد أبعاد المجسم.



الطول 14 ft، العرض 8 ft،

الارتفاع 10 ft

أوجد جميع أصفار الدالة

$f(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30$

-5, -1, 2, 3

المحتوى الرياضي

نظرية الصفر النسبي توفر نظرية الصفر النسبي معلومات عن الأصفار النسبية لدوال كثيرات الحدود ذات المعاملات الصحيحة. وتعطي هذه النظرية الأعداد التي يمكن أن تكون أصفارًا نسبية لكثيرة الحدود، ومن الممكن أن لا يكون هنالك أصفار نسبية.

إجابات:

(1) $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$

(2) $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15,$

$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{15}{2}$

تنوع التعليم

المتعلمون المنطقيون نظّم الطلاب في مجموعات من 4 أو 5، واطلب إلى كل مجموعة تجزيء الحل في مثال 3 إلى ثلاث أو خمس خطوات، ثم اطلب إليهم شرحًا للخطوات، وخصوصًا توضيح العمليات الرياضية، ونتائج خطواتهم، وكيف تربط النتيجة بالخطوة اللاحقة في العملية.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة من 1-9 للتأكد من فهم الطلاب.

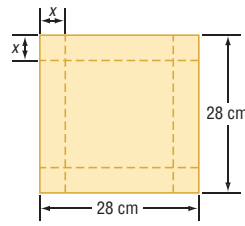
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

- (10) $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$
- (11) $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}$
- (12) $\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{7}{3}, \pm \frac{35}{3}$
- (13) $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{6}$
- (14) $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{7}{2}, \pm \frac{21}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{7}{4}, \pm \frac{21}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{3}{8}, \pm \frac{7}{8}, \pm \frac{21}{8}$
- (15) $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 9, \pm 10, \pm 15, \pm 18, \pm 30, \pm 45, \pm 90, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{2}{5}, \pm \frac{3}{5}, \pm \frac{6}{5}, \pm \frac{9}{5}, \pm \frac{18}{5}, \pm \frac{1}{15}, \pm \frac{2}{15}$
- (16a) $V(x) = (28 - 2x)(28 - 2x)x$
 $= 4x^3 - 112x^2 + 784x$
- (33a) $V(x) = 324x^3 + 54x^2 - 19x - 2$
- (33b) $3, \frac{-57 \pm i\sqrt{8927}}{36}$ ؛ حيث 3 هي القيمة الوحيدة المقبولة.

أكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل دالة مما يأتي: 10-15. انظر الهامش.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 5x^2 - 8x - 10 & (11) & & f(x) &= x^4 + 8x - 32 & (10) \\ f(x) &= 6x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 18 & (13) & & f(x) &= 3x^6 - 4x^4 - x^2 - 35 & (12) \\ f(x) &= 15x^3 + 6x^2 + x + 90 & (15) & & f(x) &= 8x^4 - 4x^3 - 4x^2 + x + 42 & (14) \end{aligned}$$



(16) تصنيع يُراد تصنيع صندوق بقص مربعات صغيرة متساوية في المساحة من زوايا ورقة مقواة مربعة الشكل، ثم ثني الجوانب إلى الأعلى.

- (a) اكتب الدالة $V(x)$ التي تمثل حجم الصندوق. انظر الهامش
- (b) ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق 1152 cm^3 ؟ 2 أو 8
- (c) إذا كان $x = 6 \text{ cm}$ ، فما حجم الصندوق؟ 1536 cm^3

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل دالة فيما يأتي:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 100x + 75 & (18) & & f(x) &= x^3 + 10x^2 + 31x + 30 & (17) \\ f(x) &= x^4 + x^3 - 8x - 8 & (20) & & f(x) &= 4x^4 + 12x^3 - 5x^2 - 21x + 10 & (19) \\ f(x) &= 81x^4 - 256 & (22) & & f(x) &= 4x^3 + x^2 + 16x + 4 & (21) \end{aligned}$$

$$1, \frac{1}{2}, -2, -\frac{5}{2}$$

$$(23) \frac{2}{3}, \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$(24) 2, -1, i, f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$$

أوجد جميع أصفار كل دالة فيما يأتي:

$$(25) f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 9x + 2$$

-i

$$2, \frac{1}{5}, -\frac{1}{2}$$

$$(26) 0, 3, -i, i, f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x$$

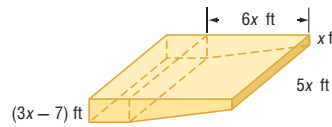
$$(27) f(x) = 10x^3 - 17x^2 - 7x + 2$$

$$(28) \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -2, f(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$$

$$(29) 3, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}, f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 8x + 28$$

$$(30) f(x) = 9x^5 - 94x^3 + 27x^2 + 40x - 12$$

$$(31) f(x) = x^5 - 2x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 13x - 10$$



(33) بركة سباحة يوضح الشكل الآتي مخطط بركة سباحة

تسع 9175 ft^3 من الماء. (a, b) انظر الهامش

(a) اكتب دالة كثيرة حدود تمثل حجم البركة.

(b) ما قيم x الممكنة؟ وأيها مقبولة في هذه الحالة؟

(34) أفعوانة: يمكن تمثيل ارتفاع قطار أفعوانة عن مستوى الأرض في مدينة الألعاب بالدالة

$$f(t) = t^4 - 31t^3 + 308t^2 - 1100t + 1200$$

حيث t الزمن بالثواني، و $f(t)$ ارتفاع الأفعوانة. استعمل

نظرية الصفر النسبي لتحديد الأوقات الأربعة التي تكون عندها الأفعوانة عند مستوى الأرض.

(35) يُباع أحد أنواع الزيوت في عبوات أسطوانية الشكل حجم كل منها 160 min^3 تقريباً، ويزيد ارتفاعها 6 in على نصف قطرها.

$$V = \pi r^3 + 6\pi r^2$$

(a) اكتب معادلة كثيرة حدود تمثل حجم عبوة الزيت مستعملاً قانون حجم الأسطوانة $V = \pi r^2 h$

(b) ما قيم r الممكنة؟ وأيها مقبولة في هذه الحالة؟ $4, -5 \pm i\sqrt{15}; 4$

(c) أوجد أبعاد العبوة. $r = 4 \text{ in}, h = 10 \text{ in}$

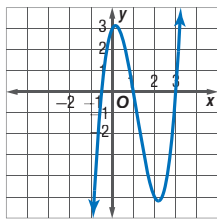
(34) ثانياً، 4 ثوانٍ،

10 ثوانٍ، 15 ثانية

الدرس 3-9 نظرية الصفر النسبي 167

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	43-54, 42, 41, 39, 10-32
ضمن المتوسط	41-51, 39, فردي 11-35
فوق المتوسط	33-51



36 أجب عن كل من الفرعين الآتيين:

- (a) أوجد جميع أصفار كل من الدالتين: $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ و $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$.
 (b) أي الدالتين لها التمثيل البياني المجاور f أم g ؟

أوجد جميع أصفار كل من الدالتين الآتيتين :

- 37 $f(x) = x^5 + 3x^4 - 19x^3 - 43x^2 + 18x + 40$ $1, -1, -2, 4, -5$
 38 $f(x) = x^5 - x^4 - 23x^3 + 33x^2 + 126x - 216$ $2, 3, 3, -3, -4$

مسائل مهارات التفكير العليا

39 **اكتشف الخطأ:** كتبت كل من سلمى ونوف جميع الأصفار النسبية الممكنة للدالة: $f(x) = 4x^4 + 8x^5 + 10x^2 + 3x + 16$ فأي منهما إجابتها صحيحة؟ وضع إجابتك.

نوف
 $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$

سلمى
 $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$

(40) إجابة ممكنة:

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 38x - 58$$

(41) إجابة ممكنة:

صحيحة دائماً؛ وذلك لأن أحد عوامل الثابت p العدد 1، فيكون $\frac{1}{q}$ صفراً ممكناً. وحتى يكون عدداً صحيحاً فإن المعامل الرئيسي q يجب أن تساوي ± 1 .

40 **تحذّر:** اكتب دالة كثيرة حدود معاملاتها أعداد صحيحة يكون كل من العددين $5 + 2i, 1 + \sqrt{3}$ صفراً من أصفارها.

41 **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو غير صحيحة أبداً؟ وضع إجابتك. "إذا كانت جميع الأصفار الممكنة للدالة كثيرة حدود أعداداً صحيحة فإن معاملها الرئيس إما 1 أو -1."

42 **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة تكون جميع أصفارها الممكنة: $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 8x + 18$ $\pm 18, \pm 9, \pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1, \pm \frac{9}{4}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$

43 **اكتب:** وضع طريقة استعمال نظرية الصفر النسبي لإيجاد جميع الأصفار النسبية الممكنة للدالة. انظر الهامش.

تدريب على اختبار

45 كم صفراً حقيقياً سالباً للدالة:
 $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ ؟ **C**
 0 **D** 1 **C** 2 **B** 3 **A**

44 أي مما يأتي يعدّ صفراً للدالة:
 $f(x) = 12x^5 - 5x^3 + 2x - 9$ ؟ **D**
 1 **D** $\frac{3}{8}$ **C** $-\frac{2}{3}$ **B** -6 **A**

مراجعة تراكمية

اكتب دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن، ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، والأعداد المعطاة في كل مما يأتي من أصفارها: **الدرس (3-8)**

- 46 $6, -3, \sqrt{2}$ (46) $5, -1, 4i$ (47) $-4, -2, i\sqrt{2}$ (48)
 $f(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 12x + 16$ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 64x - 80$ $f(x) = x^4 - 3x^3 - 20x^2 + 6x + 36$
 في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها الأخرى: **الدرس (3-7)**
 $x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12; x + i$ (51) $a^4 - 2a^3 - 17a^2 + 18a + 72; a - 3$ (50) $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6; x + 3$ (49)
 $(x - 3)(x + 4)(x - i)$ $(a + 3)(a - 4)(a + 2)$ $(x - 1)(x + 2)(x + 1)$

168 الفصل 3 كثيرات الحدود ودوالها

تنبیه

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب في سؤال 39 بأن المعامل الرئيس هو معامل الحد الذي له أكبر درجة، وليس بالضرورة أن يكون الأول.

4 التقويم

فهم الرياضيات اسأل الطلاب:

- ما الشرط الواجب توفره في معاملات الدالة الكثيرة الحدود، حتى يتم تطبيق نظرية الصفر النسبي؟
- كيف يمكن تحديد الأصفار الممكنة لمثل هذه الدالة؟

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين 3-9، 3-8 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (50)

تنوع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب تحليل العبارة: $x^4 - 2x^2 - 3$ إلى العوامل في أبسط صورة في مجموعة الأعداد النسبية. $(x^2 - 3)(x^2 + 1)$
 ثم اطلب إليهم تحليل العبارة نفسها إلى العوامل في أبسط صورة في مجموعة الأعداد الحقيقية. $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 1)$
 وأخيراً اطلب إليهم تحليلها تحليلًا تاماً في مجموعة الأعداد المركبة. $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + i)(x - i)$

إجابة:

43 إجابة ممكنة: يمثل الحد الثابت في أي دالة كثيرة حدود بالرمز p ، ويمثل المعامل الرئيس بالرمز q .

ويمكن إيجاد الأصفار الممكنة من $\frac{m}{n}$.

حيث m عامل من عوامل p ، n عامل من عوامل q . فمثلاً إذا كانت $q = 3$ ، $p = 4$ فإن الأصفار النسبية الممكنة هي $\pm 4, \pm 2, \pm 1, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{3}$.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 9 - 3

دون دون المتوسط **ضمن** ضمن المتوسط **فوق** فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم - تزمة (47)

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-9 تدريبات إعادة التعليم

نظرية الصفر النسبي

أوجد جميع الأصفار النسبية للدالة $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 29x + 12$

من نتيجة النظرية السابقة في الجبر تعلم أنه يوجد 3 أصفار مركبة، وفق قانون ديكارث في الإشارات، هناك صفران حقيقيان أو صفر واحد من الأصفار الحقيقية الموجبة، وصفر حقيقي سالب واحد. والأصفار الممكنة هي $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{2}{5}, \pm \frac{3}{5}, \pm \frac{4}{5}, \pm \frac{6}{5}, \pm \frac{12}{5}$

كُنْ جدولاً للنسبة التركيبة، واختبر الأصفار النسبية الممكنة.

$\frac{p}{q}$	5	12	-29	12
$\frac{p}{q}$	1	5	17	-12

يا أن، $f(1) = 0$ ، فإن $x = 1$ صفر للدالة، حلل كثيرة الحدود الناتجة عن قسمة كثيرة الحدود الأصلية على $x - 1$ وهي $5x^2 + 17x - 12$ ويمكن تحليلها على الصورة $(5x - 3)(x + 4)$

ومن خاصية الضرب الصغرى تكون العبارة مساوية للصفر عندما $x = \frac{3}{5}$ أو $x = -4$

لذا، فالأصفار النسبية هي $1, \frac{3}{5}, -4$

مستاد

أوجد جميع أصفار الدالة $f(x) = 8x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x - 3$

هناك 4 أصفار مركبة، صفر حقيقي موجب واحد، و 3 أو 1 أصفار حقيقية سالبة، أما الأصفار الممكنة فهي: $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{3}{8}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

كُنْ جدولاً، واختبر بعض القيم الممكنة.

$\frac{p}{q}$	8	2	5	2	-3	
$\frac{p}{q}$	1	8	10	15	17	14
$\frac{p}{q}$	2	8	18	41	84	165
$\frac{p}{q}$	$\frac{1}{2}$	8	6	8	6	0

وبما أن $x = \frac{1}{2}$ جذر، $f(\frac{1}{2}) = 0$ ، فإن $x = \frac{1}{2}$ جذر.

إذنا، أصفار الدالة $f(x)$ هي $\frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{4}$

تعاريف:

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدوال الآتية:

1) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 25x - 28$ (1) $-1, 4, -7$

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدوال الآتية:

2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 4x + 24$ (2) -6

3) $f(x) = 4x^4 + 5x^3 + 30x^2 + 45x - 54$ (3) $\frac{3}{4}, -2, \pm 3$

الفصل 3، تمارين الحدود ونواتها 47

تدريبات إعادة التعليم (46)

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-9 تدريبات إعادة التعليم

نظرية الصفر النسبي

تحديد الأصفار النسبية

افرض أن $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة $f(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة، حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل معامل الرتبة.

نتيجة (نظرية الصفر الصحيح) إذا كانت معاملات حدود كثيرة الحدود أعداداً صحيحة، وكان $a_0 \neq 0$ ، $a_n \neq 0$ ، فإن أي صفر نسبي للدالة يتعين أن يكون من عوامل a_0 .

مستاد: اكتب جميع الأصفار النسبية الممكنة لكل من الدالتين التاليتين:

1) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6x - 10$

إذا كان $\frac{p}{q}$ صفر نسبي، فإن q عامل للعدد -10 و p عامل للعدد 3 . القيم الممكنة لـ p هي $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 10$ والقيم الممكنة لـ q هي $\pm 1, \pm 3$. لذا، فإن جميع الأصفار الممكنة هي: $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3}, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 10$

2) $g(x) = x^3 - 7x^2 + 3x - 20$

3) $h(x) = x^4 - 7x^3 - 4x^2 + x - 49$

4) $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 3x - 5$

5) $q(x) = 3x^4 - 5x^2 + 10x + 12$

6) $r(x) = 4x^3 - 2x^2 + 18$

7) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3x^4 + x^3 + 4x^2 - 120$

8) $g(x) = 5x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 2x^2 - 15$

9) $h(x) = 6x^3 - 3x^4 + 12x^2 + 18x^2 - 9x + 21$

10) $p(x) = 2x^7 - 3x^6 + 11x^5 - 20x^4 + 11$

الفصل 3، تمارين الحدود ونواتها 46

تدريبات حل المسألة (49)

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-9 تدريبات حل المسألة

نظرية الصفر النسبي

1) الجذور، تصفح حامد كتاباً في الجبر، وقد وصل إلى دالة كثيرة حدود لم يظهر منها غير الحدين الأول والأخير كما هو مبين في الشكل.

$x^3 + 8$

ما الأصفار النسبية لهذه الدالة؟ $\pm 1, +2, +4, +8$

2) التوافق غير النسبية، طلب إلى صالح أن يسجل دالة كثيرة حدود حدها ثابت $\sqrt{2}$. فهل من الممكن أن يكون لكل هذه الدالة صفر نسبي؟ إذا كانت الإجابة لا، فسر لماذا، وإذا كان ذلك ممكناً، فأعط مثالاً لكثيرة حدود شبيهة وبها جذر نسبي.

نعم، ممكن. **مثلاً كثيرة الحدود** $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

أحد جوارها العدد 1.

3) تعمل سارة في تدريس الرياضيات، وتختص بالأحجام، وفي أثناء عملها أرادت أن تجد أصفار كثيرة الحدود $p(x) = 288x^4 - 288x^3 + 106x^2 - 17x + 1$ فإيه أصفار الدالة $p(x)$ ؟

$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$

4) أهرامات، أكبر أهرامات الجيزة في مصر قاعدته مربع طول ضلعه 5x ياردة وارتفاعه 50 - 4x ياردة، إذا كان حجمه 3125000 ياردة مكعبة، فاستعمل الحاسبة لإيجاد قيمة x وإعادة القرم.

$x = 50$

طول ضلع القاعدة = 250 ياردة، الارتفاع = 150 ياردة

5) صندوق، عمل صالح صندوقاً عرضه $x + 1$ وطوله $x + 3$ وارتفاعه $x - 3$.

6) أوجد حجم صندوق صالح حل صورة دالة في x ؟ $V(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$

7) ما قيمة x إذا كان حجم الصندوق 1001 بوصة مكعبة؟ 10

8) ما قيمة x إذا كان حجم الصندوق $14\frac{2}{3}$ بوصة مكعبة؟ 3.5

الفصل 3، تمارين الحدود ونواتها 49

تدريبات المهارات (48)

الاسم: _____ التاريخ: _____

3-9 تدريبات المهارات

نظرية الصفر النسبي

اكتب جميع الأصفار النسبية الممكنة لكل من الدوال الآتية.

1) $n(x) = x^2 + 5x + 3$ (1) $\pm 1, \pm 3$

2) $h(x) = x^2 - 2x - 5$ (2) $\pm 1, \pm 5$

3) $w(x) = x^2 - 5x + 12$ (3) $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

4) $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$ (4) $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 1, \pm 3$

5) $q(x) = 6x^2 + x^2 - x + 2$ (5) $\pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{3}, \pm 1, \pm 2$

6) $g(x) = 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x + 27$ (6) $\pm \frac{1}{9}, \pm \frac{1}{3}, \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27$

7) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$ (7) 1

8) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ (8) $-2, 2, 3$

9) $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ (9) 1

10) $x(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ (10) 2

11) $h(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ (11) 1

12) $g(x) = 3x^2 - 9x^2 - 10x - 8$ (12) 4

13) $h(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ (13) $-4, -1, \frac{3}{2}$

14) $h(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ (14) $-1, \frac{1}{2}, 3$

15) $q(x) = 3x^2 + 2x^2 + 27x + 18$ (15) $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

16) $p(x) = 3x^2 - 5x^2 - 14x - 4$ (16) $-\frac{1}{3}, 1$

17) $q(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$ (17) $-\frac{2}{3}, 1, 2$

18) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$ (18) $-3, -1, 2, 4$

19) $n(x) = 16x^4 - 32x^3 - 13x^2 + 29x - 6$ (19) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2$

20) $p(x) = x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 25x - 70$ (20) $-2, -7$

أوجد جميع الأصفار لكل دالة مما يأتي.

21) $q(x) = x^3 + 5x^2 + 11x + 15$ (21) $2, 4 + \sqrt{14}, 4 - \sqrt{14}$

22) $q(x) = x^3 - 10x^2 + 18x - 4$ (22) $-3, -1 + 2i, -1 - 2i$

23) $m(x) = 6x^4 - 17x^3 + 8x^2 + 8x - 3$ (23) $\frac{1}{3}, 1 + \sqrt{5}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}$

الفصل 3، تمارين الحدود ونواتها 48



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 9 - 3

مصادر الدرس 9 - 3	
دون	ضمن
دون	ضمن
<p>التدريبات الإثرائية (50)</p> <p>ضمين فوق</p>	<p>كتاب التمارين (23)</p> <p>دون ضمن فوق</p>
<p>الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p>3-9 التدريبات الإثرائية الأعداد غير النسبية</p> <p>اعتقد أحد الفلاسفة ويدهي هيباتوس أن $\sqrt{2}$ ليس عدداً نسبياً، وقد أنكروا الرياضيون الذين عاصروه وجود أعداد غير نسبية وقاموا، ولأنهم لم يقنعوا بفكرة وجود عدد لا يمكن تقيله على صورة نسبة بين عددين صحيحين. الطريقة النموذجية لبرهنة أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي هي باستعمال التناقض، وبالاعتداد على بعض الحقائق البسيطة يمكن برهنتها بسهولة. حيث يفترض البرهان أنه عدد نسبي، ثم يتوصل إلى تناقض مع هذا الفرض.</p> <p>نظرية ، $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي</p> <p>البرهان، افترض أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي، لذا $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$، حيث a و b عددان أوليان فيما بينهما، أي ليس بينهما عوامل مشتركة غير الواحد الصحيح. لذلك $\frac{a^2}{b^2}$ في أسط صيغة، وهذه هي الحالة المسؤولة عن التناقض، فإذا ربعنا طرفي المعادلة $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ نحصل على $2 = \frac{a^2}{b^2}$، وهذا يعني أن a^2 عدد زوجي، وإذا كانت a^2 عدداً زوجياً، و $\frac{a^2}{2} = b^2$، فإن b عدد زوجي أيضاً. نستنتج من هذا أن a و b بينهما عامل مشترك غير العدد الواحد وبالذات العدد 2، فهذا ليساً أوليين فيما بينهما، وهذا تناقض.</p> <p>نظرية الصفر النسبي تقدم برهاناً مباشراً لذلك.</p> <p>تمارين</p> <p>(1) استعمل نظرية الصفر النسبي لبرهنة أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي. يمكن $2 - x^2 = P(x)$، فاصفر العروق لهذه الدالة هو $\sqrt{2}$. ولكن من خلال نظرية الصفر النسبي، فإن الأصفار النسبية هي ± 2 أو ± 2.</p> <p>(2) بين أن مربع العدد الزوجي هو عدد زوجي. يمكن a عدداً زوجياً $2k$، $a^2 = 2(2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ وهو عدد زوجي.</p> <p>(3) بين أن أي عدد صحيح ينحل صفراً لدالة كثيرة حدود يمين أن يكون من عوامل الحد الثابت a_0. تكن $k = \frac{p}{q}$ عدداً صحيحاً، حيث p من عوامل a_0، أي يوجد عدد صحيح M يحقق العلاقة $MP = a_0$. إذا يكن كتابة $k = \frac{MP}{q} = \frac{a_0}{q}$ وهذا يعني أن $k = \frac{MP}{q} = k(qM)$، $a_0 = MP = k(qM)$، لذا يكون k عاملاً للعدد a_0.</p>	<p>3-9 نظرية الصفر النسبي</p> <p>اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكل دالة فيما يأتي:</p> <p>(1) $h(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 12$ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$</p> <p>(2) $s(x) = x^4 - 8x^3 + 7x - 14$ $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$</p> <p>(3) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + x + 6$ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$</p> <p>(4) $p(x) = 3x^2 + x + 7$ $\pm 1, \pm 7$</p> <p>(5) $g(x) = 5x^3 + x^2 - x + 8$ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 8$</p> <p>(6) $q(x) = 6x^3 + x^2 - 3$ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$</p> <p>(7) $h(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$ $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$</p> <p>(8) $q(x) = x^2 + 3x^2 - 6x - 8$ $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$</p> <p>(9) $c(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$</p> <p>(10) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x - 24$ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 24$</p> <p>(11) $h(x) = 2x^3 - 7x^2 - 21x + 54$ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm 27, \pm 54$</p> <p>(12) $z(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36$ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$</p> <p>(13) $n(x) = x^4 - 2x^3 - 3$ $\pm 1, \pm 3$</p> <p>(14) $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 6$ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$</p> <p>أوجد جميع الأصفار النسبية لكل دالة فيما يأتي:</p> <p>(1) $r(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ 3</p> <p>(2) $f(x) = x^4 - 49x^2$ $0, -7, 7$</p> <p>(3) $h(x) = x^3 + 6x + 20$ -2</p> <p>(4) $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ -2</p> <p>(5) $h(x) = 2x^3 - 7x^2 - 21x + 54$ $-3, 2, \frac{9}{2}$</p> <p>(6) $z(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36$ $-1, 4$</p> <p>(7) $n(x) = x^4 - 2x^3 - 3$ -1</p> <p>(8) $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 6$ $-1, 1, \frac{3}{2}, 2$</p> <p>أوجد جميع الأصفار لكل دالة فيما يأتي:</p> <p>(9) $q(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 20$ $-2, 2, 2 + i, 2 - i$</p> <p>(10) $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 19x - 12$ $-1, -3, \frac{1+\sqrt{33}}{4}, \frac{1-\sqrt{33}}{4}$</p> <p>(11) $g(x) = x^4 - 1$ $-1, 1$</p> <p>(12) $h(x) = x^4 - 8x^2$ $0, 2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}$</p> <p>(13) $z(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36$ $-1, 1, \frac{-1+i\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{5}}{2}, \frac{1+i\sqrt{5}}{2}, \frac{1-i\sqrt{5}}{2}$</p> <p>(14) هندسة، بطل ارتفاع صندوق على شكل متوازي مستطيلات $3m$ من عرضه، بينما يزيد طوله $2m$ على طوله عرضه. فإذا كان حجم الصندوق $1540 m^3$، فما أبعاده؟ $22m \times 10m \times 7m$</p> <p>(15) هندسة، هرم قاعدته مربعة الشكل يزيد طولها $3m$ على ارتفاعه. فإذا كان حجم الهرم $432 m^3$، فما ارتفاعه؟ استعمل القانون $V = \frac{1}{3} Bh$. $9m$</p>

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 1-8، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعاً ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (52).

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلاب الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلاب من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

المفردات الأساسية

- (106) الوحدة التخيلية (106) الحد التخيلي البحت (107) العدد المركب (109) المركبان المترافقان (113) القانون العام (116) المميز (123) التبسيط (125) درجة كثيرة الحدود (130) القسمة التركيبية (135) كثيرة حدود بمتغير واحد (135) نظرية الصفر النسبي (164) المعامل الرئيس (135)
- (136) دالة كثيرة الحدود (136) دالة القوة (137) سلوك طرفي التمثيل البياني (143) كثيرة الحدود الأولية (146) الصورة التربيعية (151) نظرية الباقي (151) التعويض التركيبي (153) نظرية العوامل (157) النظرية الأساسية في الجبر (164) نظرية الصفر النسبي (164)

اختبر مفرداتك

بين ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

- العدد 6 تخيلي بحت **صحيحة**
- تسمى المعادلة: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بالمميز **خطأ؛ القانون العام لحل المعادلة التربيعية**
- يُسمى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية المعامل الرئيس. **صحيحة**
- تُسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها كثيرة حدود بمتغير واحد. **خطأ؛ كثيرة حدود أولية**
- دالة كثيرة الحدود هي دالة متصلة يمكن وصفها بمعادلة كثيرة حدود بمتغير واحد. **صحيحة**
- تبسيط عبارات تتضمن قوى، يعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة. **صحيحة**
- القسمة التركيبية هي طريقة مختصرة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد. **صحيحة**
- $0 = 8 - 3x^3 + (x^3)^2$ هي دالة قوة. **خطأ؛ دالة مكتوبة على الصورة التربيعية.**

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة 169

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الأعداد المركبة (الدرس 3-1)

• i هي الوحدة التخيلية، $i^2 = -1$ ، $i = \sqrt{-1}$

القانون العام والمميز (الدرس 3-2)

• القانون العام لحل المعادلة التربيعية: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

العمليات على كثيرات الحدود (الدرس 3-3)

- عند الجمع أو الطرح: أجمع الحدود المتشابهة.
- عند الضرب: أستعمل خاصية التوزيع.
- عند القسمة: أستعمل القسمة الطويلة أو التركيبية.

حل معادلات كثيرات الحدود (الدرس 3-6)

- يمكن تحليل كثيرة الحدود باستعمال العامل المشترك الأكبر أو تجميع الحدود، أو بإحدى طرائق تحليل الدالة التربيعية.

نظريتا الباقي والعوامل (الدرس 3-7)

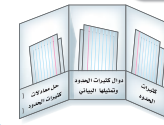
- نظرية الباقي: إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$ ، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$.
- نظرية العوامل: تكون ثنائية الحد $x - a$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ إذا وفقط إذا كان $f(a) = 0$.

الجدور، والأصفار، ونظرية الصفر النسبي (الدرس 3-8.3-9)

- نظرية الأعداد المركبة المترافقة: إذا كان $a + bi$ صفراً للدالة، فإن $a - bi$ صفر للدالة أيضاً.
- نظرية الصفر النسبي: إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة $P(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة، حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيس.

المطويات

منظم أفكار



تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المطويات

منظم أفكار

ويبين لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعداداً لاختبار الفصل.

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

مراجعة الدروس

3-1 الأعداد المركبة (الصفحات: 106-112)

مثال 1

حل المعادلة: $3x^2 + 12 = 0$

المعادلة الأصلية	$3x^2 + 12 = 0$
بطرح 12 من كلا الطرفين	$3x^2 = -12$
بقسمة كلا الطرفين على 3	$x^2 = -4$
خاصية الجذر التربيعي	$x = \pm\sqrt{-4}$
	$x = \pm 2i$

بسّط كلّ مما يأتي:

- (9) $2i\sqrt{2} \sqrt{-8}$ (10) $(2-i) + (13+4i)$ $15+3i$
 (11) $(6+2i) - (4-3i)$ $2+5i$ $28+3i$ $(6+5i)(3-2i)$ (12)
 (13) **كهرباء** تبلغ المعاوقة في أحد أجزاء دائرة كهربائية $3+2i$ أوم، وفي الجزء الآخر منها $4-3i$ أوم. اجمع هذين العددين لتجد المعاوقة الكلية في الدائرة الكهربائية. $7-i$ أوم
 حل كلّ من المعادلات الآتية:
 (14) $2x^2 + 50 = 0$ $\pm 5i$ (15) $4x^2 + 1 = 0$ $\pm \frac{1}{2}i$

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلّهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 3 ص (46)، وناقشهم حول تغيير إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

3-2 القانون العام والمميز (الصفحات: 113-120)

مثال 2

حل المعادلة: $x^2 - 4x - 45 = 0$

$a = 1, b = -4, c = -45$

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)}$
	$= \frac{4 \pm 14}{2}$
بالكتابة على صورة معادلتين	$x = \frac{4+14}{2}, x = \frac{4-14}{2}$
	$= 9 \quad = -5$

أجب عن الفروع a-c لكل معادلة تربيعية فيما يأتي:

- (a) أوجد قيمة المميز. **16-19** انظر الهامش
 (b) أوجد عدد الجذور المختلفة، وحدد أنواعها.
 (c) حل المعادلة باستعمال القانون العام.
 (16) $x^2 - 10x + 25 = 0$ (17) $x^2 + 4x - 32 = 0$
 (18) $2x^2 + 3x - 18 = 0$ (19) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
 (20) **فيزياء** قذف محمد كرة رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 40 ft/s. إذا علمت أن ارتفاع الكرة عن الأرض (h) بالأقدام يعطى بالمعادلة $h = -16t^2 + 40t + 5$ ، حيث t الزمن بالثواني، فأوجد الزمن اللازم لتصل الكرة إلى الأرض. **حوالي 2.62 ثانية**

إجابات:

- (16a) 0
 (16b) جذر حقيقي نسبي
 (16c) 5
 (17a) 144
 (17b) جذران حقيقيان نسبيان
 (17c) $\{-8, 4\}$
 (18a) 153
 (18b) جذران حقيقيان غير نسبيين
 (18c) $\frac{-3 \pm 3\sqrt{17}}{4}$
 (19a) 0
 (19b) جذر حقيقي نسبي
 (19c) $\frac{1}{2}$

3-3 العمليات على كثيرات الحدود (الصفحات: 123-128)

مثال 3

بسّط كلّ مما يأتي:

- (a) $(-4a^3b^5)(5ab^3)$ بضرب القوى بالتبسيط
 $(-4a^3b^5)(5ab^3) = (-4)(5)a^3+1b^5+3 = -20a^4b^8$
 (b) $(2x^2 + 3x - 8) + (3x^2 - 5x - 7)$
 $(2x^2 + 3x - 8) + (3x^2 - 5x - 7) = (2x^2 + 3x^2) + (3x - 5x) + [-8 + (-7)] = 5x^2 - 2x - 15$

بسّط كلّ مما يأتي مفترضاً أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

- (21) $\frac{7x}{y^4} \frac{14x^4y}{2x^3y^5}$
 (22) $3t^2n - 15t$ $3t(tn - 5)$
 (23) $r^2 + 8r - 5$ $(4r^2 + 3r - 1) - (3r^2 - 5r + 4)$
 (24) x^{12} $(x^4)^3$
 (25) $m^3 - m^2p - mp^2 + p^3$ $(m+p)(m^2 - 2mp + p^2)$
 (26) $8b^2 + 3b$ $3b(2b - 1) + 2b(b + 3)$

$$2a^5 - a^4 - 2a^3 + a^2 + a - 1 + \frac{1}{2a+1} \quad (30)$$

3-4 قسمة كثيرات الحدود (الصفحات: 129-134)

مثال 4

بسّط المقدار: $(6x^3 - 31x^2 - 34x + 22) \div (2x - 1)$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 14x - 24 \\ 2x - 1 \overline{) 6x^3 - 31x^2 - 34x + 22} \\ \underline{(-) 6x^3 - 3x^2} \\ -28x^2 - 34x + 22 \\ \underline{(-) -28x^2 + 14x} \\ -48x + 22 \\ \underline{(-) -48x + 24} \\ -2 \end{array}$$

وعليه يكون الناتج هو $3x^2 - 14x - 24 - \frac{2}{2x-1}$

بسّط كلّاً مما يأتي:

$$3x^3 + 2x^2y^2 - 4xy \frac{12x^4y^5 + 8x^3y^7 - 16x^2y^6}{4xy^5} \quad (27)$$

$$6y^2 + y - 12 (6y^3 + 13y^2 - 10y - 24) \div (y + 2) \quad (28)$$

$$a^3 + 3a^2 - 4a + 2 (a^4 + 5a^3 + 2a^2 - 6a + 4)(a + 2)^{-1} \quad (29)$$

$$(4a^6 - 5a^4 + 3a^2 - a) \div (2a + 1) \quad (30)$$



(31) هندسة: حجم المنشور المتوازي المستطيلات في الشكل المجاور يساوي وحدة $3x^3 + 11x^2 - 114x - 80$ مكعبة، فما مساحة القاعدة؟ $x^2 + 3x - 40$ وحده مربعة

3-5 دوال كثيرات الحدود (الصفحات: 135-141)

مثال 5

حدّد درجة كثيرة الحدود $4x^3 + 3x^2 - 7x^7 + 4x - 1$ وما معاملها الرئيس؟
أكبر أس يساوي 7؛ لذا فدرجة كثيرة الحدود تساوي 7، والمعامل الرئيس هو -7.

مثال 6

إذا كان $p(x) = 3x + 2x^2 - x^3$ ، فأوجد $p(a - 2)$.

$$\begin{aligned} p(a - 2) &= 3(a - 2) + 2(a - 2)^2 - (a - 2)^3 \\ &= 3a - 6 + 2a^2 - 8a + 8 - (a^3 - 6a^2 + 12a - 8) \\ &= -a^3 + 8a^2 - 17a + 10 \end{aligned}$$

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

$$5x^6 - 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 1 \quad (32)$$

$$6xy^2 - xy + y^2 \quad (33)$$

$$12x^3 - 5x^4 + 6x^8 - 3x - 3 \quad (34)$$

أوجد $p(-2)$ ، $p(x + h)$ لكل دالة فيما يأتي:

$$p(x) = x^2 + 2x - 3 \quad (35)$$

$$p(x) = 3x^2 - x \quad (36)$$

$$p(x) = 3 - 5x^2 + x^3 \quad (37)$$

3-6 حل معادلات كثيرات الحدود (الصفحات: 143-149)

مثال 7

حلّ المعادلة: $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$

$$(x^2 - 4)(4x^2 - 9) = 0$$

$$4x^2 - 9 = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = \frac{9}{4} \quad x^2 = 4$$

$$x = \pm \frac{3}{2} \quad x = \pm 2$$

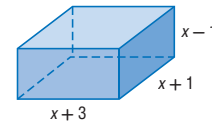
الحلول هي: $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2, -2$.

حلّ كلّاً من المعادلتين الآتيتين:

$$-7, 0, 5 \quad x^3 + 2x^2 - 35x = 0 \quad (38)$$

$$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 8x^4 - 10x^2 + 3 = 0 \quad (39)$$

(40) هندسة: إذا كان حجم المنشور في الشكل الآتي يساوي 315 in^3 ، فأوجد كلّاً من قيمة x وطول المنشور وعرضه وارتفاعه.



$x = 6$ ، الطول = 9 in ، الارتفاع = 5 in ، والعرض = 7 in .

إجابات

(32) الدرجة 6 والمعامل الرئيس 5.

(33) كثيرة حدود بمتغيرين x, y .

(34) الدرجة 8، والمعامل الرئيس 6.

$$p(-2) = -3; p(x + h) = x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 3 \quad (35)$$

$$p(-2) = 14; p(x + h) = 3x^2 + 6xh + 3h^2 - x - h \quad (36)$$

$$p(-2) = -25; p(x + h) = 3 - 5x^2 - 10xh - 5h^2 + x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 \quad (37)$$

3-7 نظريتا الباقي والعوامل (الصفحات: 151-156)

مثال 8

حدد ما إذا كان $x - 6$ عامل من عوامل كثيرة الحدود الآتية أم لا:
 $x^3 - 2x^2 - 21x - 18$

6	1	-2	-21	-18
		6	24	18
	1	4	3	0

$x - 6$ عامل من عوامل كثيرة الحدود؛ لأن باقي قسمة كثيرة الحدود عليه يساوي صفراً.

أوجد $f(4)$ ، $f(-2)$ لكل دالة فيما يأتي مستعملاً التعويض التركيبي:

(41) $f(x) = x^2 - 3$ $f(-2) = 1$; $f(4) = 13$

(42) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ $f(-2) = 18$; $f(4) = 0$

(43) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ $f(-2) = 16$; $f(4) = 118$

(44) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1$ $f(-2) = 57$; $f(4) = 321$

في كل مما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى:

(45) $3x^3 + 20x^2 + 23x - 10$, $x + 5$ $3x + 1$, $x + 2$

(46) $2x^3 + 11x^2 + 17x + 5$, $2x + 5$ $2x^2 + 3x + 1$

(47) $x^3 + 2x^2 - 23x - 60$, $x - 5$ $x + 3$, $x + 4$

3-8 الجذور والأصفار (الصفحات: 157-163)

مثال 9

أذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية للدالة: $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 26x - 48$.

تغير إشارة الدالة $f(x)$ مرة واحدة؛ لذا يوجد صفر حقيقي موجب واحد.

تغير إشارة الدالة $f(-x)$ ثلاث مرات؛ لذا يوجد للدالة صفر واحد، أو ثلاثة أصفار حقيقية سالبة.

الدالة ليس لها أصفار تخيلية، أو لها صفران تخيليان.

أذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل دالة مما يأتي: (48-52) انظر الهامش

(48) $f(x) = -2x^3 + 11x^2 - 3x + 2$

(49) $f(x) = -4x^4 - 2x^3 - 12x^2 - x - 23$

(50) $f(x) = x^6 - 5x^3 + x^2 + x - 6$

(51) $f(x) = -2x^5 + 4x^4 + x^2 - 3$

(52) $f(x) = -2x^6 + 4x^4 + x^2 - 3x - 3$

3-9 نظرية الصفر النسبي (الصفحات: 164-168)

مثال 10

أوجد جميع أصفار الدالة: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$.

هناك 3 أصفار فقط؛ صفر واحد حقيقي موجب، وصفران حقيقيان سالبان، والأعداد النسبية التي تحدها نظرية الصفر النسبي هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$.

3	1	4	-11	-30
		3	21	30
	1	7	10	0

$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x - 3)(x^2 + 7x + 10)$
 $= (x - 3)(x + 2)(x + 5)$

$f(x) = 0$ عندما $(x - 3)(x + 2)(x + 5) = 0$ أي عندما $x = 3, -2, -5$

أوجد جميع أصفار كل دالة مما يأتي:

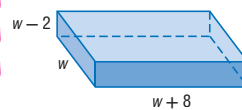
(53) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$ $-2, -1 \pm \sqrt{2}$

(54) $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$ $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

(55) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$ $-2, \pm 2i$

(56) **تخزين:** صنعت سعاد صندوقاً للتخزين على شكل منشور متوازي مستطيلات حجمه 96 ft^3 . أوجد أبعاد الصندوق باستعمال الشكل أدناه.

العرض = 4 ft
الطول = 12 ft
الارتفاع = 2 ft



إجابات:

(48) عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 3 أو 1

عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 0

عدد الأصفار التخيلية: 2 أو 0

(49) عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 0

عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 4 أو 2

أو 0

عدد الأصفار التخيلية: 4 أو 2 أو 0

(50) عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 3 أو 1

عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 1

عدد الأصفار التخيلية: 4 أو 2

(51) عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 2 أو 0

عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 1

عدد الأصفار التخيلية: 4 أو 2

(52) عدد الأصفار الحقيقية الموجبة: 2 أو 0

عدد الأصفار الحقيقية السالبة: 2 أو 0

عدد الأصفار التخيلية: 6 أو 4 أو 2

بسّط كلاً مما يأتي:

(1) $-\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i \quad \frac{2-i}{1+3i}$

(2) $6i(2+3i) - (2-3i)$

(3) $14+2i(3-i) \cdot (4+2i)$

بسّط كلاً مما يأتي:

(4) $21609a^2b^4(3a)^2(7b)^4$

(5) $14x^2 + 31x - 10(7x-2)(2x+5)$

(6) $-2x^2 + 10x - 5(2x^2 + 3x - 4) - (4x^2 - 7x + 1)$

(7) $4x^3 - x^2 + 10x - 14(4x^3 - x^2 + 5x - 4) + (5x - 10)$

(8) $x^3 + 2x^2 - 3x + 1(x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 8x + 3) \div (x+3)$

(9) $3x^2 + 4x - 11 - \frac{9}{x-3}(3x^3 - 5x^2 - 23x + 24) \div (x-3)$

(10) إذا كانت $4 - 5x^2 + 3x^3 = c(x)$ ، فما قيمة $4c(3b)$ ؟

$324b^3 + 180b^2 - 16$

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فاكتب كثيرة حدود أولية:

(11) $8y^4 + x^3y(2y+x)(4y^2-2xy+x^2)$

(12) $2x^2 + 2x + 1$ كثيرة حدود أولية

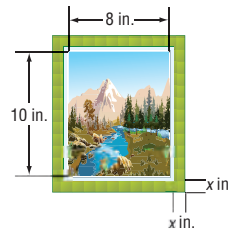
(13) $(x-y)(a+2)(a+1)a^2x + 3ax + 2x - a^2y - 3ay - 2y$

حل كلاً من المعادلات الآتية باستعمال القانون العام:

(14) $8x^3 + 1 = 0, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}$

(15) $x^4 - 11x^2 + 28 = 0, \pm\sqrt{7}, \pm 2$

(16) حل المعادلة: $x^2 - 4x + 3 = 0$ 1, 3

(17) إطارات: إذا كانت مساحة الصورة وإطارها في الشكل الآتي 168 in^2 ، فما عرض الإطار؟ 2 in (18) اختيار من متعدد: إذا كان $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 3$ ، فما قيمة $f(-2)$ ؟ B

37 A

27 B

-33 C

-21 D

(19) فيما يأتي كثيرة حدود وأحد عواملها. أوجد عواملها الأخرى:

$2x^3 + 15x^2 + 22x - 15; x + 5$

$2x - 1, x + 3$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية لكل من الدالتين الآتيتين:

(20) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 3$ انظر الهامش

(21) $p(x) = 2x^6 + 5x^4 - x^3 - 5x - 1$

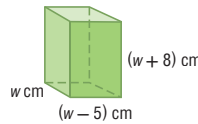
أوجد جميع أصفار كلٍّ من الدالتين الآتيتين:

(22) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ -1, 2, 3

(23) $p(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$ -2, $\pm 2i$

(24) هندسة: إذا كان حجم المنشور المتوازي المستطيلات الموضح بالشكل أدناه 612 cm^3 ، فأوجد أبعاده.

9 cm, 17 cm, 4 cm



(25) اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي:

$f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 12x + 8$ $\pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،	إذا
أحد المصادر الآتية:	فاختَر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختَر
مراجعة الدروس من 1-3 إلى 9-3		تدريبات إعادة التعليم،	
تدريبات المهارات،		ص (6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46)	
ص (8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43)			
مشروع الفصل، ص (104)			
www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com	

رسم شكل

يعدُّ رسم الشكل طريقة مفيدة في حل المسألة، فهو يعطي تصوُّرًا لكيفية الحل، لذا ارسم شكلاً يمثِّل المسألة في ورقة مسودة أو في ورقة الإجابة (إذا سمح بذلك).



استراتيجيات لرسم شكل

خطوة 1

اقرأ نص المسألة بعناية.

واسأل نفسك الأسئلة الآتية:

- ما المطلوب حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- ما المجاهيل التي يُراد نمذجتها وإيجادها؟

خطوة 2

ارسم شكلاً وضع عليه المسميات والبيانات على أن يكون:

- واضحًا ودقيقًا ما أمكن.
- تشمل المسميات التي توضع على الشكل على جميع معطيات المسألة.

خطوة 3

حل المسألة.

- استعمل الشكل لمساعدتك على نمذجة المسألة بمعادلة، ثم حلّها.
- تحقق من معقولية إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة وحدد المطلوب، واستعمل المعلومات المعطاة لحلّها.

لدى فيصل بركة سباحة سطحها على شكل مستطيل أبعاده 25 ft، 14 ft، وأراد أن يرصف حولها ممرًا متساوي العرض، إذا كانت مساحة سطح البركة مع الممر 672 ft²، فما عرض الممر؟

3.25 ft C

2.75 ft A

3.5 ft D

3 ft B

1 التركيز

الهدف استعمال استراتيجية رسم شكل؛ لحل مسائل الاختبار المعباري.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- عند رسم خريطة أو مخطط يدويًا، هل تحتاج إلى معرفة الاتجاهات لتحديد المواقع؟ **تختلف إجابات الطلاب.**
- هل يكفي الرسم يدويًا، أم نحتاج إلى رسم دقيق؟ **تختلف إجابات الطلاب.**
- ما المعلومات التي نحتاج إليها لرسم مخطط أو خريطة؟ **إجابة ممكنة: المسافات، الأطوال، نقاط التقاطع، إشارات، نقطة بداية.**

مثال إضافي

تدريب على اختبار معياري:

ألصق أسامة بطاقة بُعدها 3 cm, 5 cm داخل لوحة ورقية حمراء، بحيث يكون للإطار الظاهر من الورقة الحمراء من جميع الجهات العرض نفسه، إذا كانت مساحة سطح الشكل الناتج كاملاً 168 cm^2 ، فما عرض الإطار الأحمر الظاهر للبطاقة؟ **A**

- 4.5 cm **A**
8.5 cm **B**
9 cm **C**
14 cm **D**

3 التقييم

استعمل التمارين 1-2؛ لتقويم مدى فهم الطلاب.

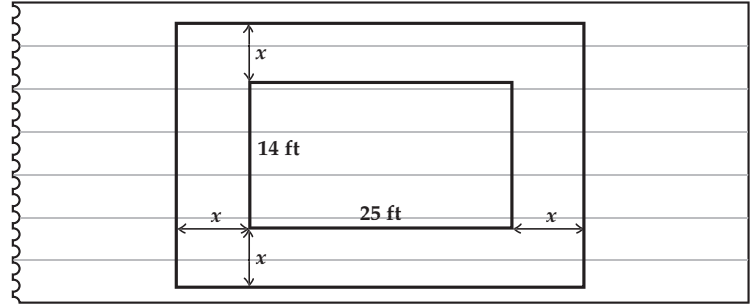
- (2) يتم تصنيع الحلقات المعدنية بعمل ثقب في رقاقة معدنية دائرية. إذا صنعت حلقة بعمل ثقب عند مركز رقاقة معدنية قطرها 1.8 in، وكانت مساحة سطح الحلقة $0.65\pi \text{ in}^2$ ، فما نصف قطر الثقب؟ **H**
- 0.35 in **F**
0.38 in **G**
0.40 in **H**
0.42 in **J**

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة من المسألتين الآتيتين، وحدد المطلوب واستعمل المعطيات في الحل:

- (1) لدى مزارع سياج طوله 240 ft، ويريد أن يحيط به حديقة مستطيلة الشكل على أن يكون جدار منزله أحد جوانبها. فما أكبر مساحة ممكنة للحديقة؟ **A**
- 7200 ft^2 **A**
4960 ft^2 **C**
3600 ft^2 **B**
3280 ft^2 **D**

ارسم شكلاً يساعدك على تصوّر المسألة، وافترض أن x يمثل عرض الممر غير المعروف.



طول البركة مع الممر يساوي $25 + 2x$ ، وعرضها مع الممر يساوي $14 + 2x$.

اضرب التعبيرين السابقين لإيجاد مساحة سطح البركة والممر معاً، وساوِ الناتج بالقيمة المعطاة وهي 672 ft^2 ثم حلّها لإيجاد x .

$$(25 + 2x)(14 + 2x) = 672$$

$$350 + 78x + 4x^2 = 672$$

$$4x^2 + 78x - 322 = 0$$

$$x = -23 \text{ أو } x = 3.5$$

وبما أن عرض الممر لا يمكن أن يكون سالباً، فإن القيمة الأنسب هي 3.5 ft

إذن الإجابة الصحيحة هي **D**

اختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

(1) أبسط صورة للمقدار $(5n^2 + 11n - 6) - (2n^2 - 5)$ هي: **B**

$3n^2 + 11n - 11$ A

$3n^2 + 11n - 1$ B

$7n^2 + 11n - 11$ C

$7n^2 + 11n - 1$ D

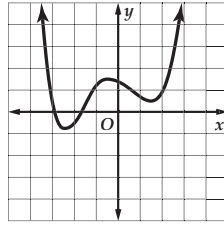
(2) أي مما يأتي ليس حلاً للمعادلة: $x^3 - 37x - 84 = 0$ ؟ **C**

-4 A

6 C

7 D

(3) كم صفراً حقيقياً للدالة الكثيرة الحدود الممثلة بيانياً أدناه؟ **A**



2 A

3 B

4 C

5 D

(4) إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي،

فإن قيمة x تساوي: **D**

$\frac{4}{3}$ A

$\frac{4}{5}$ B

$-\frac{4}{3}$ C

$-\frac{4}{5}$ D

(5) استعمل عبد الرحمن الدالة:

$P(x) = -0.000047x^2 + 0.027x + 3$

لتقدير عدد سكان المدينة التي يسكنها ما بين عامي

1390، 1430هـ؛ حيث x عدد السنوات منذ عام 1390هـ، عدد

السكان بالملايين. فما قيمة $P(20)$ التي تمثل عدد سكان هذه

المدينة عام 1410هـ؟ **D**

2 مليون تقريباً A

2.5 مليون تقريباً B

3 ملايين تقريباً C

3.5 ملايين تقريباً D

(6) أبسط صورة للمقدار $\frac{2}{1-5i}$ هي: **C**

$\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$ A

$\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$ B

$\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$ C

$2 - \frac{2}{5}i$ D

(7) ما قيمة ممیز المعادلة: $x^2 - x - 20 = 0$ ؟ **B**

5 C

9 A

-4 D

(8) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وكانت X مصفوفة

رتبتها 2×2 بحيث $X = 2A - B$ فإن: **D**

$X = 3B$ A

$X = 2A$ B

$X = -2B$ C

$X = 3A$ D

تشخيص أخطاء الطلاب

ارصد أخطاء الطلاب في كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية، مثل:

(1) لم يتم توزيع العدد -1 على العدد -5

صحيحة B

-1 لم توزع بشكل صحيح.

(2) $2n^2$ أضيفت إلى $5n^2$ بدلاً من أن تُطرح منها.

(3) أوجد حلاً للمعادلة.

أوجد حلاً للمعادلة.

صحيحة C

أوجد حلاً للمعادلة.

صحيحة A

(4) عد جميع نقاط التقاطع مع المحورين x, y .

خمن C

خمن D

خمن A

خمن B

حل المعادلة بشكل خاطئ.

C جمع نواتج ضرب عناصر القطرين

بدلاً من طرحهما.

صحيحة D

(5) بسط بطريقة غير صحيحة.

B لم يربع 20 في الحد x^2 .

C بسط بطريقة غير صحيحة.

صحيحة D

(6) لم يستطع الطالب ضرب العددين المترافقين.

صحيحة B

تم عكس البسط والمقام في المقدار.

صحيحة C

D أجرى عملية القسمة بطريقة خطأ

حيث قسم البسط على كل حد من

حدود المقام.

(7) أوجد الجذر التربيعي للمميز

صحيحة B

C أوجد حلاً للمعادلة.

D أوجد حلاً للمعادلة.

(8) أخطأ فأوجد $B - 2A$.

B أخطأ فأوجد $A - B$.

C أخطأ فأوجد $B - A$.

صحيحة D

التقويم التكويني

يمكن استعمال هاتين الصفحتين لتختبر مدى تقدم الطلاب في الفصل 3 من خلال:

اختبار تراكمي: ص (177-176).

اختبار تراكمي، ص (81).

إجابات:

14b إجابة ممكنة: درجة المعادلة 3، لذا يتوقع أن يكون لها 3 حلول على الأكثر.

14c $h = 9$ ارتفاع المنشور 9 سنتمترات، وطوله 8 سم. وعرضه 12 سم.

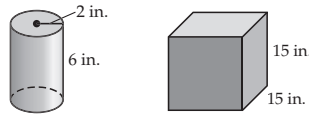
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < -2 \\ x + 1, & x > -1 \end{cases} \quad (15)$$

بديل الواجب المنزلي

التهيئة للفصل 4: حدّد الأسئلة

ص (179) واجباً منزلياً لتقويم مهارات المتطلبات السابقة للفصل القادم.

13 يريد صالح أن يملأ الإناء المكعب بالماء مستعملاً العلبة الأسطوانية في الشكل أدناه. فكم مرة يستعمل العلبة؟ **45**



إجابة طويلة

14 منشور متوازي مستطيلات حجمه 864 cm^3 ، ويقل طوله بمقدار 1 cm عن ارتفاعه، ويزيد عرضه بمقدار 3 cm على ارتفاعه.

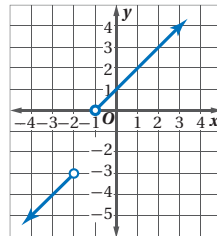
(a) اكتب معادلة كثيرة الحدود لإيجاد ارتفاع المنشور h .

(b) كم جذراً ممكنًا لمعادلة كثيرة الحدود التي كتبتها؟ فسّر إجابتك.

(c) أوجد الجذور الحقيقية للمعادلة التي كتبتها؟ وأوجد أبعاد المنشور. **(a) $h^3 + 2h^2 - 3h = 864$**

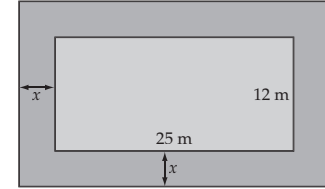
(b, c) انظر الهامش. **15** اكتب الدالة المتعددة التعريف التي لها التمثيل البياني أدناه:

انظر الهامش



إجابة قصيرة

9 يبين الشكل الآتي حديقة محاطة بممر عرضه x مترًا. فإذا علمت أن مساحة الحديقة مع الممر 558 m^2 ، فأوجد عرض الممر بالأمتار. **3m**



10 حلّ المقدار: $64a^4 + ab^3$ تحليلًا تامًا، وبيّن خطوات الحلّ. **$a(4a + b)(16a^2 - 4ab + b^2)$**

11 بسّط المقدار:

$$\frac{3x^3 - 4x^2 - 28x - 16}{x + 2}$$

واكتب إجابتك على صورة حاصل ضرب عوامل مبيّنًا خطوات الحلّ. **$(3x + 2)(x - 4)$**

12 ما قيمة a في المعادلة المصفوفية الآتية؟ **7.5**

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \end{bmatrix}$$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟															
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	إذا لم تستطع حل سؤال ...
1-3	3-9	3-8	2-5	3-4	3-5	3-6	2-2	3-2	3-1	3-5	2-5	3-8	3-6	3-3	فعد إلى الدرس ...

العرض يساوي $x + 3$ (36a)

x^2	x	x	x
x^2	x	x	x
x	1	1	1

$$2x^2 + 7x + 3 \div (2x + 1) \quad (36b)$$

(36c)

$$\begin{array}{r|l} -\frac{1}{2} & 1 \quad \frac{7}{2} \quad \frac{3}{2} \\ & -\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2} \\ \hline & 1 \quad 3 \quad 0 \end{array}$$

نعم

الدرس 3-5 ، ص (141-140) :

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow +\infty \quad (31a)$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow +\infty$$

(31b) بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه، فدرجة الدالة زوجية.

(31c) يقطع التمثيل البياني للدالة محور x في أربع نقاط، لذا هناك 4 أصفار حقيقية.

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow +\infty \quad (32a)$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

(32b) بما أن سلوك طرفي التمثيل البياني في جهتين مختلفتين، فدرجة الدالة فردية.

(32c) يقطع التمثيل البياني للدالة محور x في نقطة واحدة، لذا يوجد صفر حقيقي واحد.

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty \quad (33a)$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

(33b) بما أن سلوك التمثيل البياني للدالة في الجهة نفسها، فدرجة الدالة زوجية.

(33c) يقطع التمثيل البياني للدالة محور x في نقطتين، لذا يوجد صفران حقيقيان.

(48a) المقطع x $-4, -1, 2, 3$ ، والمقطع y 24 والجذور $-4, -1, 2, 3$ ، درجتها 4؛ سلوك طرفي تمثيلها البياني

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } g(x) \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } g(x) \rightarrow +\infty$$

(19a) 33

(19b) جذران غير نسبيين

$$\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4} \quad (19c)$$

(20a) -87

(20b) جذران مركبان

$$\frac{3 \pm i\sqrt{87}}{6} \quad (20c)$$

(21a) -40

(21b) جذران مركبان

$$\frac{-2 \pm i\sqrt{10}}{2} \quad (21c)$$

(22a) 36

(22b) جذران نسبيين

$$1, -\frac{1}{5} \quad (22c)$$

(23a) 0

(23b) جذر نسبي واحد

(23c) 3

(24a) -16

(24b) جذران مركبان

$$-1 \pm 2i \quad (24c)$$

(25a) -56

(25b) جذران مركبان

$$\frac{2 \pm i\sqrt{14}}{6} \quad (25c)$$

(26a) 64

(26b) جذران نسبيين

$$0, -\frac{8}{5} \quad (26c)$$

(27a) 36

(27b) جذران نسبيين

$$\frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \quad (27c)$$

(28a) 160

(28b) جذران غير نسبيين

$$\frac{-1 \pm \sqrt{10}}{6} \quad (28c)$$

(29a) -3.48

(29b) جذران مركبان

$$\frac{-1.3 \pm i\sqrt{0.87}}{0.8} \quad (29c)$$

(30a) 13.48

(30b) جذران غير نسبيين

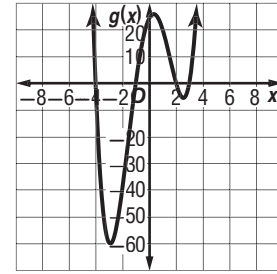
$$\frac{-0.7 \pm \sqrt{3.37}}{0.6} \quad (30c)$$

(43) إجابة ممكنة: لكي تقرر عدد الأصفار الحقيقية الموجبة قرر عدد مرات تغير إشارات الحدود في أثناء التحرك من اليسار إلى اليمين . وفي هذه الدالة هنالك 3 تغيرات في الإشارة. لذا فإن هناك 3 جذور حقيقية موجبة أو جذر واحد حقيقي موجب . ولتقرر عدد الجذور الحقيقية السالبة أوجد الدالة $f(-x)$ ، ثم ابحث عن عدد مرات التغير في إشارتها في أثناء التحرك من اليسار إلى اليمين. وفي هذه الحالة تجد أن هنالك تغيرًا واحدًا، لذا تستنتج وجود جذر حقيقي واحد سالب.

(48c)

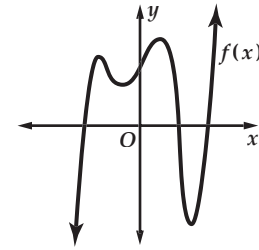
$g(x)$	x
224	-5
0	-4
-60	-3
-40	-2
0	-1
24	0
20	1
0	2
0	3
80	4
324	5

(48d)

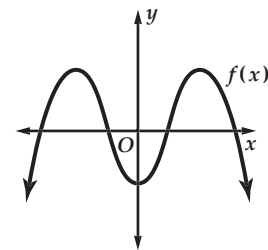


الدرس 8-3، ص (159) :

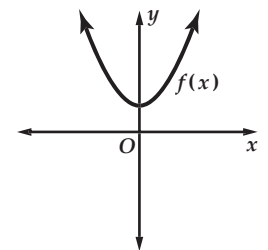
(39a)



(39b)



(39c)



التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (179)

العنوان	الدرس 4-1 3 حصص	الدرس 4-2 3 حصص	توسع 4-2 حصة واحدة	الدرس 4-3 3 حصص	الدرس 4-4 3 حصص
الأهداف	<ul style="list-style-type: none"> • إيجاد مجموع دالتين والفرق بينها وحاصل ضربهما وقسمتهما. • إيجاد تركيب دالتين. 	<ul style="list-style-type: none"> • إيجاد العلاقة العكسية والدالة العكسية. • تحديد ما إذا كانت علاقة (أو دالة) تمثل علاقة عكسية (دالة عكسية) لأخرى أم لا. 	<ul style="list-style-type: none"> • مقارنة دالة بمعكوسها باستعمال الحاسبة البيانية. 	<ul style="list-style-type: none"> • تمثيل دوال الجذور التربيعية بيانياً. • تمثيل متباينات الجذور التربيعية بيانياً. 	<ul style="list-style-type: none"> • تبسيط عبارات جذرية. • استعمال الحاسبة لتقريب قيم الجذور.
المفردات	تركيب دالتين	العلاقة العكسية الدالة العكسية		دالة الجذر التربيعي الدالة الجذرية متباينة الجذر التربيعي	الجذر النوني رمز الجذر الدليل ما تحت الجذر الجذر الرئيس
تمثيلات متعددة	ص (185)	ص (191)		ص (197)	ص (203)
مصادر الدرس	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) دون ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> • ص (24) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) دون ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> • ص (25) دون ضمن فوق 	<p>المواد</p> <ul style="list-style-type: none"> • الحاسبة البيانية. 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) دون ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> • ص (26) دون ضمن فوق 	<p>مصادر المعلم للأنشطة الصفية</p> <ul style="list-style-type: none"> • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) دون ضمن فوق <p>كتاب التمارين</p> <ul style="list-style-type: none"> • ص (27) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية، ص (182)	عرض تقديمي، ص (188)		عرض تقديمي، ص (195)	مدونة، ص (201)
تنويع التعليم	ص (182, 183, 186)	ص (189, 191)		ص (197, 198)	ص (201, 203)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل ص (205)

المفاتيح: **دون** دون المتوسط **ضمن** ضمن المتوسط **فوق** فوق المتوسط

العلاقات والدوال العكسية والجذرية

الخطة الزمنية		
المجموع	المراجعة والتقييم	التدريس
حصة واحدة	حصة (4)	حصة (23)

توسع 4-4 حصة واحدة	الدرس 4-5 حصة 3	الدرس 4-6 حصة 3	الدرس 4-7 حصة 3	توسع 4-7 حصة واحدة
معمل الحاسبة البيانية تمثيل دالة الجذر النوني بيانياً	العمليات على العبارات الجذرية	الأسس النسبية	حل المعادلات والمتباينات الجذرية	معمل الحاسبة البيانية حل المعادلات والمتباينات الجذرية
• استعمال الحاسبة البيانية لتمثيل دوال الجذر النوني بيانياً.	• تبسيط عبارات جذرية • جمع عبارات جذرية، وطرحها، وضربها، وقسمتها.	• كتابة عبارات ذات أسس نسبية على الصورة الجذرية وبالعكس. • تبسيط عبارات أسية أو جذرية.	• حل معادلات تحتوي جذوراً. • حل متباينات تحتوي جذوراً.	• استعمال الحاسبة البيانية لحل معادلات ومتباينات جذرية.
	إنطاق المقام الجذور المتشابهة المرافق		المعادلة الجذرية الحل الدخيل المتباينة الجذرية	
	ص (210)	ص (216)		
المواد • الحاسبة البيانية	مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) دون ضمن فوق • كتاب التمارين ص (28) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) دون ضمن فوق • كتاب التمارين ص (29) دون ضمن فوق	مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (36) دون • تدريبات المهارات، ص (38) دون ضمن فوق • تدريبات حل المسألة، ص (39) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (40) دون ضمن فوق • كتاب التمارين ص (30) دون ضمن فوق	
	السبورة التفاعلية، ص (208)	السبورة التفاعلية، ص (213)	مدونة، ص (219)	
	الصفحتان: (209, 211)	الصفحتان: (213, 214)	الصفحتان: (220, 223)	

التقييم الختامي

- دليل الدراسة والمراجعة ص (226-230)
- اختبار الفصل ص (231)
- اختبار تراكمي ص (234, 235)

المعالجة	التشخيص	التقويم
	بداية الفصل 4	التقويم التشخيصي
مخطط المعالجة، ص (179)	التهيئة للفصل 1، ص (179)	
	بداية كل درس	
مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب	فيما سبق، والآن، لماذا؟	التقويم التكويني
	خلال كل درس وبعده	
تدريبات المهارات، الفصل 4	تحقق من فهمك، لكل مثال	
تنوع التعليم	تأكد	
تنوع الواجبات المنزلية	مسائل مهارات التفكير العليا	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 4	مراجعة تراكمية	
www.obeikaneducation.com	أمثلة إضافية	
	تنبيه!	
	الخطوة 4، التقويم	
	الاختبارات القصيرة، ص (68, 69)	
	www.obeikaneducation.com	
	منتصف الفصل	
تدريبات المهارات، الفصل 4	اختبار منتصف الفصل، ص (205)	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 4	اختبار منتصف الفصل، ص (70)	
www.obeikaneducation.com	www.obeikaneducation.com	
	نهاية الفصل	
تدريبات المهارات، الفصل 4	دليل الدراسة والمراجعة، ص (226-230)	
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 4	اختبار الفصل، ص (231)	
www.obeikaneducation.com	اختبار تراكمي، ص (234-235)	
	www.obeikaneducation.com	
	بعد انتهاء الفصل 1	التقويم الختامي
تدريبات إعادة التعليم، الفصل 4	اختبار الفصل، النماذج 1A, 2B، ص (72-77)	
www.obeikaneducation.com	اختبار الفصل، النموذج 3، ص (78-79)	
	اختبار المفردات، ص (71)	
	اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة، ص (80)	
	اختبار تراكمي، ص (81-83)	
	www.obeikaneducation.com	

البديل 1

جميع المستويات **دون** **ضمن** **فوق**

المتعلمون السمعيون قسم الطلاب إلى مجموعات من ثلاثة أو أربعة طلاب. واطلب إلى كل مجموعة تسمية نفسها بإحدى مفردات الدرس، مثل "مجموعة الدالة العكسية". واطلب إليهم أيضًا كتابة نص حول أحد المفاهيم الأساسية في الفصل، وتبادل هذه النصوص فيما بينهم.

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلاب استعمال ورق مربعات؛ لرسم مستطيلات بأبعاد مختلفة، ثم قُصَّ هذه المستطيلات، واطلب إليهم استعمال القانون $d = \sqrt{\ell^2 + w^2}$ لإيجاد طول قطر كل مستطيل.

البديل 2

دون المتوسط **دون**

اطلب إلى الطلاب قراءة عبارات ومعادلات رياضية، بلغة رياضية صحيحة. على سبيل المثال، يجب أن يقرأ الأس بطريقة تميّزه عن المعامل أو المضروب. واطلب إليهم أيضًا التدرّب على قراءة العبارات والمعادلات الرياضية بصوت مرتفع. على سبيل المثال، يجب أن يقرأوا x^3 بصوت مرتفع: x تكعيب، أو x مرفوعة للقوة 3.

البديل 3

فوق المتوسط **فوق**

بعد مناقشة كيفية تحديد ما إذا كانت الدالتان $f(x) = 5x + 10$ ، $g(x) = \frac{1}{5}x - 2$ تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا، حفّز الطلاب لإيجاد دالتين f و g أحد تركيبهما يساوي x . واسمح لهم بالعمل في مجموعات لعصف أذهانهم في أثناء حل هذه المسألة.

ملخص الدروس

4-1 العمليات على الدوال

يمكن جمع أي دالتين $f(x)$ ، $g(x)$ و طرحهما وضربهما وقسمتهما. فإذا كانت f ، g دالتين، فإن:

- ناتج جمعهما هو دالة.
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- ناتج طرحهما هو دالة.
 $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.
- ناتج ضربهما هو دالة.
 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- ناتج قسمتهما هو دالة.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ ، حيث } g(x) \neq 0$$

تُعد عملية تركيب الدوال طريقة أخرى لدمج الدوال. فإذا كانت f ، g دالتين فإن تركيبهما $f \circ g$ يُعرّف على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

وفي معظم الحالات يكون $f \circ g \neq g \circ f$ ، لذا فإن ترتيب الدوال عند تركيبها ضروري. وكذلك فإن تعيين العلاقة بين مجال كل من الدالتين ومدى كل منهما والقيود عليهما، ضروري أيضًا عند تركيب الدوال.

4-2 العلاقات والدوال العكسية

يمكن إيجاد معكوس دالة بتبديل إحداثيي نقاطها. فلإيجاد معكوس الدالة $f(x)$:

- أعد كتابة $f(x)$ على صورة معادلة باستعمال المتغيرين x ، y .
- بَدَل المتغيرين x ، y في المعادلة.
- حل بالنسبة للمتغير y ، ثم استبدل y بالرمز $f^{-1}(x)$.
- لتختبر إذا كانت الدالتان $f(x)$ ، $g(x)$ تشكل كل منهما دالة عكسية للأخرى، تأكد أن كلاً من التركيبين $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](x)$ يساوي x . وعندما يكون معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة "متباينة".

الترايط الرأسي

ما قبل الفصل 4

- تبسيط عبارات كثيرات الحدود.
- تحويل المعادلات وحلها.
- تمثيل معادلات المستقيمات بيانيًا.
- استعمال خاصية التوزيع لتبسيط عبارات جبرية.
- استعمال خصائص الأسس لتبسيط عبارات جبرية.

الفصل 4

- تمثيلات دوال الجذور التربيعية.
- ربط معكوس دوال الجذر التربيعي بالدوال التربيعية.
- تحديد حلول دوال ومتباينات الجذر التربيعي باستعمال التمثيل البياني، والجداول، والطرق الجبرية.
- تحديد قيم المجال والمدى المقبولة للدوال الجذرية، وتحديد إمكانية وجود حلول للمعادلات والمتباينات الجذرية.
- استعمال الدالة الأساسية لبحث أثر التحويلات ووصفها وتوقع أثرها في الأشكال البيانية لدوال الجذر التربيعي، وكذلك وصف القيود على المجال والمدى.

ما بعد الفصل 4

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- تعريف الدوال، ووصف سلوكها، والتنقل ما بين تمثيلها اللفظي والعددي والبياني، والرمزي.
- تنفيذ عمليات تشتمل على تركيب الدوال، وإيجاد المعكوس، ووصف هذه الخطوات والنتائج لفظيًا، وعدديًا، ورمزيًا وبيانيًا.

العلاقات والدوال العكسية والجذرية

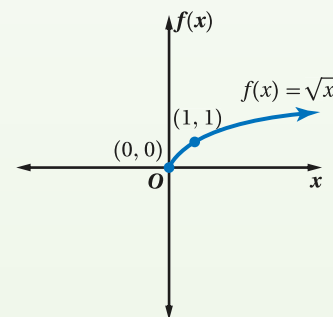
4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي

الدالة التي تحوي متغيراً تحت رمز الجذر التربيعي تسمى دالة الجذر التربيعي. ومجال دالة الجذر التربيعي ومداهما محددان بالقيم التي تكون عندها الدالة معرفة.

كما في باقي الدوال يمكن إجراء تحويلات التمثيلات البيانية على التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي.

الدالة الأم لدوال الجذر التربيعي هي $f(x) = \sqrt{x}$ ، ومجالها هو $\{x | x \geq 0\}$ ، ومداهما هو $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$.

المتباينة الجذرية هي المتباينة التي تحوي جذوراً تربيعية، ولتمثيلها بيانياً، مثل أولاً المعادلة المرتبطة بها، ثم حدّد منطقة فوق أو تحت الحد، وعوّض بنقطة في المستوى ولاحظ هل هذه المنطقة هي منطقة الحل أم لا، ومن ثم ظلّل منطقة الحل.



4-4 الجذر النوني

التعريف الشائع للجذر التربيعي هو: يكون a جذراً تربيعياً لـ b إذا كان $a^2 = b$ ، ويمكن استعمال ذلك لمساعدة الطلاب على فهم الجذر النوني، حيث يكون a جذراً نونياً لـ b إذا كان $a^n = b$ ، ويدل الرمز $\sqrt[n]{x}$ على الجذر النوني. في التعبير $\sqrt[n]{x}$ ، ويسمى n الدليل، ويسمى x ما تحت الجذر، في حين تشير $\sqrt[n]{x}$ إلى رمز الجذر التربيعي.

يكون الجذر الأساسي عدداً غير سالب دائماً، وتعتمد قيمة الجذر النوني الأساسي على إشارة ما تحت الجذر سواء أكانت سالبة أم موجبة، وكذلك على كون الدليل عدداً زوجياً أو فردياً. فعند إيجاد الجذر النوني لقوة زوجية، وكانت النتيجة قوة فردية، فينبغي عندئذ أن تستعمل القيمة المطلقة للتأكد من كون الناتج غير سالب.

4-5 العمليات على العبارات الجذرية

يمكن تبسيط العبارات الجذرية باستعمال خاصيتي ضرب الجذور وقسمتها، اللتين تم تعريفهما في هذا الدرس. وتستعمل هاتان الخاصيتان أيضاً عند ضرب عبارات جذرية أو قسمتها، وينبغي لجمع عبارتين جذريتين أو طرحهما أن تكونا متشابهتين؛ أي أن يتطابق كل من دليلهما وما تحت جذريهما.

وتستعمل عملية إنطاق المقام للتخلص من الجذور التربيعية في المقام أو الكسور من تحت الجذر. ولإنطاق المقام، اضرب كلا من البسط والمقام في مرافق على الصورة: $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$

4-6 الأسس النسبية

يمكن أن تكون الأسس كسوراً. وتشتمل قواعد كتابة عبارات مكافئة للعبارات النسبية على خصائص تصف كيفية التحويل بين الصورة الجذرية والصورة الأسية.

• لأي عدد حقيقي b ولأي عدد صحيح موجب n ، فإن $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ إلا عندما يكون $b < 0$ و n عدداً زوجياً.

• لأي عدد حقيقي $b \neq 0$ ، ولأي عددين صحيحين m, n ،

حيث $n > 1$ ، فإن $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m$ ، إلا عندما تكون $b < 0$ ، و n عدداً زوجياً.

يكون التعبير بأس نسبي في أبسط صورة، عندما تكون جميع الأسس موجبة، ولا يوجد في المقام أي أسس كسرية. والدليل أصغر ما يمكن.

4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية

تسمى المعادلات والمتباينات التي تحتوي متغيرات تحت الجذر معادلات ومتباينات جذرية. فعند حل معادلة جذرية، قم بما يأتي:

- اعزل الجذور لتكون في طرف واحد من المعادلة.
- ارفع طرفي المعادلة لقوة مساوية لدليل الجذر، ولإزالة رمز الجذر النوني ارفع طرفي المعادلة للقوة n .
- وأخيراً، حل المعادلة الناتجة.

لا تعطي عملية رفع طرفي المعادلة الجذرية لقوة معينة أحياناً تعبيراً مكافئاً. فعلى سبيل المثال: يبدو جلياً أن المعادلة $\sqrt{x} = -5$ ليس لها حل في الأعداد الحقيقية. فعند تربيع طرفي هذه المعادلة ينتج $x = 25$. لكن هذه القيمة ليست حلاً للمعادلة الأصلية، لذا فمن الضروري التحقق من الحل؛ لضمان عدم كونه حلاً دخيلاً، وعند التحقق من حل متباينة، اختبر ثلاث قيم، إحداها ضمن فترة الحل، والثانية عن يسارها، أما الثالثة فعن يمين الفترة.



مشروع الفصل

إدارة الموارد المالية

يستعمل الطلاب ما تعلموه عن الدوال العكسية والجذور لتحديد الزمن اللازم لتوفير مبلغ من المال.

- عند تركيب أرباح المبلغ المستثمر P ، فإن المبلغ المتجمع A بعد n دورة تركيبية يعبر عنه بالعلاقة $A = P(1 + j)^n$ ، حيث j معدل الربح لكل دورة.
- اطلب إلى الطلاب أن يفترضوا أنه تم استثمار مبلغ 10000 ريال في مشروع مدة سنتين. فإذا تم تركيب الأرباح سنويًا، فاطلب إليهم إيجاد دالة تعطي معدل الربح A بدلالة j في نهاية السنتين. واطلب إليهم تمثيل هذه الدالة بيانيًا. وتقدير معدل الربح اللازم حتى يصبح المبلغ المتجمع 12000 ريال. ثم اطلب إليهم إيجاد القيمة الدقيقة لمعدل الربح.
- واطلب إليهم أيضًا إيجاد معدل الربح اللازم إذا استثمر المبلغ (10000 ريال) في المشروع مدة خمس سنوات بدلًا من سنتين.
- وأخيرًا، اطلب إليهم تكرار التمارين السابقة، إذا تم تركيب الربح شهريًا بدلًا من تركيبه سنويًا.

فيما سبق

درست تبسيط كثيرات الحدود.

والآن

- أجد معكوس دالة، وتركيب دالتين.
- أمثل بيانيًا دوال ومتباينات الجذر التربيعي وأحلها.
- أيسط معادلات تتضمن جذورًا وأسسًا نسبية وأحلها.

التمارين

الموارد المالية: يعد ربط إدارة الموارد المالية بالرياضيات مهارة، وإذا أتقنتها فإنك ستستفيد منها في مجالات حياتك المختلفة. إن تعلم إدارة مواردك المالية يساعدك على وضع ميزانية والعيش ضمن حدودها، وسوف تتعرض في هذا الفصل لمواقف مالية مثل: التوفير، التضخم، صرف العملة.

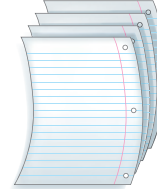
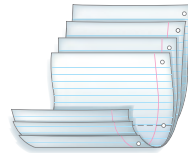
المطويات

منظم أفكار

العلاقات والدوال العكسية والجذرية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوال العكسية والجذرية، مبتدئًا بأربع أوراق من دفتر الملاحظات.

1. قَبِّت الأوراق الأربع بعضها فوق بعض، بحيث تعلق كل ورقة الورقة التي أمامها بمقدار 2.5 سم.
2. اطو أسفل الأوراق الأربع إلى أعلى، وحاذِ الحواف بحيث تكون المسافات بين نهايات جميع الأوراق متساوية.
3. عندما تتأكد من تساوي المسافات بين الحواف، اثن الأوراق جيدًا، ثم ثبتها على طول خط الطي، واكتب عنوان الفصل وعناوين الدروس كما في الشكل.

العلاقات والدوال العكسية والجذرية
1. العلاقات على الدوال
2. العلاقات والدوال العكسية
3. دوال ومتباينات الجذر التربيعي
4. الجذر النوني
5. العلاقات على المعادلات الجذرية
6. المعنى النسبية
7. حل المعادلات والمتباينات الجذرية



المفردات قدّم مفردات الفصل مستعملًا النمط الآتي:

التعريف: المتباينة الجذرية هي متباينة تحوي متغيرًا تحت الجذر.

مثال: $\sqrt{4x + 8} - 1 \leq 15$

سؤال: هل المتباينة $\sqrt{9} > 11 - 7x$ متباينة جذرية؟ وضح إجابتك. لا؛ لأنه لا يوجد أي متغير تحت الجذر.

المطويات

منظم أفكار

غرضها يدون الطلاب ملاحظاتهم حول العلاقات والدوال العكسية والجذرية في دروس هذا الفصل.

وظيفتها اطلب إلى الطلاب تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب منها في أثناء دراسة كل درس في هذا الفصل. وشجعهم كذلك على تطبيق ما تعلموه، عن طريق كتابة الأمثلة.

وقت استعمالها شجع الطلاب في أثناء دراستهم للفصل على إضافة ملاحظات إلى مطوياتهم واستعمالها في المراجعة لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (66).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. وتساعدك العبارة "إذا... فقم"، في الجدول، على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مراجعة سريعة

اختبار سريع

مثال 1

بسّط العبارة $\sqrt{\frac{45}{20}}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{45}{20}} &= \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}} \\ &= \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} \\ &= \frac{\sqrt{900}}{20} \\ &= \frac{30}{20} \\ &= \frac{3}{2} = 1.5 \end{aligned}$$

خاصية قسمة الجذور
أضرب في $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$
خاصية ضرب الجذور
أوجد قيمة $\sqrt{900}$
بسّط

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

(1) $2\sqrt{7} \sqrt{28}$

(2) $2.5 \sqrt{\frac{25}{4}}$

(3) طاقة حركية: يمكن تحديد سرعة كرة بالمعادلة $v = \sqrt{\frac{2KE}{m}}$ ، حيث (KE) تشير إلى الطاقة الحركية للكرة، (m) إلى كتلة الكرة. بسّط هذه المعادلة معتبراً كتلة الكرة 50 kg . $\frac{1}{5} \sqrt{KE}$

مثال 2

بسّط العبارة $(3x^4 + 4x^3 + x^2 + 9x - 6) \div (x + 2)$ ، مستعملاً القسمة التركيبية.

لذلك $x - r = x + 2$ ، $r = -2$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 3 & 4 & 1 & 9 & -6 \\ & & -6 & 4 & -10 & 2 \\ \hline & 3 & -2 & 5 & -1 & -4 \end{array}$$

النتيجة هي: $3x^3 - 2x^2 + 5x - 1 - \frac{4}{x+2}$

(7) $3x^3 - 4x^2 + 5x - 3 + \frac{6}{x-3}$

(8a) $4000 - \frac{200000}{x^2 + 50}$

(8b) تقريباً 2667

بسّط كلاً من العبارات الآتية مستعملاً القسمة التركيبية:

(4) $5x + 3$ $(5x^2 - 22x - 15) \div (x - 5)$

(5) $3x + 2 - \frac{20}{x+4}$ $(3x^2 + 14x - 12) \div (x + 4)$

(6) $2x^2 + 5x - 6$ $(2x^3 - 7x^2 - 36x + 36) \div (x - 6)$

(7) $(3x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 18x + 15) \div (x - 3)$

(8) مبيعات: يمكن تقدير عدد السلع المباعة من متجر

بالمعادلة $n = \frac{4000x^2}{x^2 + 50}$ ، حيث x تمثل المبلغ الذي أنفق

بمئات الريالات على الدعاية، n عدد السلع المباعة.

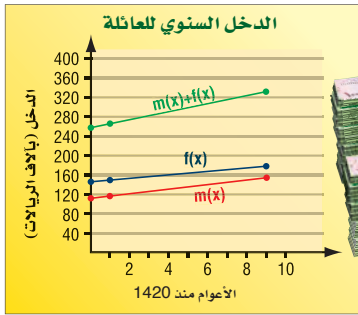
(a) أجر عملية القسمة المشار إليها بالعبارة $\frac{4000x^2}{x^2 + 50}$

(b) ما العدد التقريبي للسلع التي ستباع، إذا أنفق المتجر 1000 ريال على الدعاية؟

مخطط المعالجة

المستوى	ضمن المتوسط
1	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،
إذا	بمراجعة التمثيل البياني للدوال وإيجاد جذورها، وإيجاد ناتج قسمة كثيرتي حدود باستعمال القسمة التركيبية.
فقم	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com
المستوى	دون المتوسط
2	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،
إذا	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
فقم	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

العمليات على الدوال Operations on Functions



لماذا؟

تبين التمثيلات البيانية المجاورة الدخل السنوي لعائلة منذ عام 1420هـ؛ حيث $f(x)$ تعبر عن الدخل السنوي للزوج، و $m(x)$ تعبر عن الدخل السنوي للزوجة.

يمكن التعبير عن إجمالي الدخل السنوي لتلك العائلة بالدالة $f(x) + m(x)$.

فيما سبق

درست إجراء العمليات على كثيرات الحدود.

والآن

- أجد مجموع دالتين والفرق بينهما وحاصل ضربيهما وقسمتهما.
- أجد تركيب دالتين.

المفردات

تركيب دالتين

composition of functions

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

التربط الراسي

ما قبل الدرس 4-1

إجراء العمليات على كثيرات الحدود.

الدرس 4-1

إيجاد مجموع دالتين والفرق بينها،

وحاصل ضربيهما، وقسمتهما.

إيجاد تركيب دالتين.

ما بعد الدرس 4-1

وصف العلاقة بين الدالة ومعكوسها

وتحليلها.

العمليات الحسابية: لقد أجريت العمليات الحسابية على كثيرات الحدود في الفصل السابق. ويمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الدوال أيضًا.

يمكنك الاعتماد على القواعد الآتية لإجراء العمليات الحسابية على الدوال:

مفهوم أساسي	العمليات على الدوال	أضف إلى مطويتك
العملية	التعريف	مثال
الجمع	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	تكن $f(x) = 2x$, $g(x) = -x + 5$
الطرح	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x + (-x + 5) = x + 5$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x - (-x + 5) = 3x - 5$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$	$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10x$
		$\frac{2x}{-x+5}$, $x \neq 5$

مثال 1 جمع الدوال وطرحها

إذا كان $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 2x + 1$ ، فأوجد كل دالة فيما يأتي:

(a) $(f + g)(x)$

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (x^2 - 4) + (2x + 1) \\ &= x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

(b) $(f - g)(x)$

$$\begin{aligned} (f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (x^2 - 4) - (2x + 1) \\ &= x^2 - 2x - 5 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

إذا كان $f(x) = x^2 + 5x - 2$, $g(x) = 3x - 2$ ، فأوجد كل دالة فيما يأتي:

(IA) $(f + g)(x) = x^2 + 8x - 4$ (IB) $(f - g)(x) = x^2 + 2x$

180 الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

و أسأل:

• ما السنوات الممثلة بالقيم

$x = 0$, $x = 4$, $x = 10$

1420, 1424, 1430

• ما القيم التقريبية لكل من $f(0)$, $m(0)$

$f(0) + m(0)$ ؟

$f(0) \approx 150000$, $m(0) \approx 112000$,

$f(0) + m(0) \approx 262000$

• أي منحنيات الدوال:

$m(x)$ أو $f(x)$ أو $f(x) + m(x)$ له أكبر

ميل؟ وضح إجابتك.

منحنى الدالة $f(x) + m(x)$ ؛ ميل

المنحنيات الثلاثة موجب، وميل منحنى

الدالة $f(x) + m(x)$ هو مجموع ميلي

منحني الدالتين $m(x)$ و $f(x)$.

مصادر الدرس 4-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (183)	• تنويع التعليم، ص (182, 183, 186)	• تنويع التعليم، ص (182, 186)
كتاب التمارين	• ص (24)	• ص (24)	• ص (24)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرّف. فإذا كانت f و g دالتين، فإن $[f \circ g](x)$ يكون معرفاً فقط عند قيم x التي تجعل $g(x)$ عنصراً في مجال الدالة f . وكذلك تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرفاً فقط عند قيم x التي تجعل $f(x)$ عنصراً في مجال الدالة g .

مثال 3 تركيب دالتين

أوجد $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](x)$ ، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكناً:

$$f = \{(1, 8), (0, 13), (14, 9), (15, 11)\}, g = \{(8, 15), (5, 1), (10, 14), (9, 0)\} \quad (a)$$

لايجاد $g \circ f$ ، أوجد قيم $g(x)$ أولاً، ثم استعملها كقيم من مجال الدالة f لايجاد $f[g(x)]$

$$\begin{aligned} g(8) = 15 & \quad f[g(8)] = f(15) = 11 & \quad g(10) = 14 & \quad f[g(10)] = f(14) = 9 \\ g(5) = 1 & \quad f[g(5)] = f(1) = 8 & \quad g(9) = 0 & \quad f[g(9)] = f(0) = 13 \end{aligned}$$

$$f \circ g = \{(8, 11), (5, 8), (10, 9), (9, 13)\}$$

لايجاد $f \circ g$ ، أوجد قيم $f(x)$ أولاً ثم استعملها كقيم من مجال الدالة g ، لايجاد $g[f(x)]$

$$\begin{aligned} f(1) = 8 & \quad g[f(1)] = g(8) = 15 & \quad f(14) = 9 & \quad g[f(14)] = g(9) = 0 \\ f(0) = 13 & \quad g[f(0)] = g(13) & \quad f(15) = 11 & \quad g[f(15)] = g(11) \end{aligned}$$

$g(13)$ غير معرّف

$g(11)$ غير معرّف

وبما أن 13، 11 لا ينتميان لمجال الدالة g فإن الدالة $f \circ g$ غير معرّف عند $x = 13$ و $x = 11$ وبما أن $g \circ f = \{(1, 15), (14, 0)\}$ ، فإن $g[f(1)] = 15$ ، $g[f(14)] = 0$

$$f(x) = 2x - 5, g(x) = 4x \quad (b)$$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$	تعريف تركيب دالتين	$[f \circ g](x) = f[g(x)]$
$= g(2x - 5)$	بالتعويض	$= f(4x)$
$= 4(2x - 5)$	بالتعويض	$= 2(4x) - 5$
$= 8x - 20$	بالتبسيط	$= 8x - 5$

تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](x)$ ، $[g \circ f](x)$ ، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكناً:

$$f(x) = \{(3, -2), (-1, -5), (4, 7), (10, 8)\}, g(x) = \{(4, 3), (2, -1), (9, 4), (3, 10)\} \quad (3A)$$

$$f(x) = x^2 + 2, g(x) = x - 6 \quad (3B)$$

لاحظ أنه في معظم الحالات تكون $f \circ g \neq g \circ f$ ؛ لذا فإن ترتيب الدالتين عند تركيبهما مهم.

تركيب دالتين

مثال 3 يبين طريقة إيجاد تركيب دالتين.
مثال 4 يبين طريقة استعمال تركيب دالتين في حل مسألة من واقع الحياة.

إرشادات للدراسة

التركيب كن حذراً
من الخلط بين عملية تركيب دالتين $f[g(x)]$ وعملية ضرب دالتين $(f \cdot g)(x)$.

$$f \circ g = \{(4, -2), (3A), (2, -5), (9, 7), (3, 8)\}$$

$g \circ f$ غير معرّف.

(3B)

$$[f \circ g](x) = x^2 - 12x + 38$$

$$[g \circ f](x) = x^2 - 4$$

مثال إضافي

أوجد $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية إذا كان ذلك ممكناً:

(a)

$$f = \{(2, 6), (9, 4), (7, 7), (0, -1)\}, g = \{(7, 0), (-1, 7), (4, 9), (8, 2)\}$$

$$[f \circ g](x) = \{(7, -1), (-1, 7), (4, 4), (8, 6)\}$$

$$[g \circ f](x) = \{(9, 9), (7, 0), (0, 7)\}$$

$$f(x) = 3x^2 - x + 4 \quad (b)$$

$$g(x) = 2x - 1$$

$$[f \circ g](x) = 12x^2 - 14x + 8$$

$$[g \circ f](x) = 6x^2 - 2x + 7$$

التعليم باستعمال التقنيات

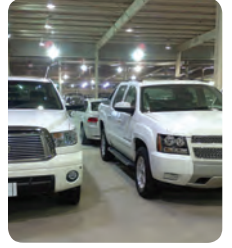
السبورة التفاعلية

اكتب دالتين $f(x)$ ، $g(x)$ على السبورة. ولكي تبين للطلاب كيفية كتابة $f[g(x)]$ ، ضع $g(x)$ بدلاً من كل x في $f(x)$ ، وكرّر الأسلوب نفسه مع $g[f(x)]$.

تنوع التعليم

ضمن فوق

توسّع في بعض المراحل الدراسية، تُمثل الدالة $f(x)$ "بآلة" تتخذ قيم x مدخلات لها، وتنتجها على صورة مخرجات هي قيم $f(x)$. لذا اطلب إلى الطلاب باستعمال هذا النموذج أن يشرحوا كيف أن تركيب دالتين يمكن تمثيله "بآلتين" مترابطتين معاً. واطلب إليهم أيضاً استعمال النموذج لشرح كيف يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرّف لبعض قيم المدخلات الابتدائية.



الربط مع الحياة

مנית كبرى شركات صناعة السيارات بخسائر كبيرة في الأزمنة المالية العالمية عام 1429 هـ، مما اضطرها إلى تخفيض أسعار مبيعاتها.

سيارات: قدّم معرض لبيع السيارات عرضًا بتخفيض 12% من قيمة كل سيارة جديدة. مضاعفًا إليه خصم مقداره 1500 ريال يقدمه وكيل شركة السيارات. فإذا أراد أحمد شراء سيارة جديدة سعرها 64500 ريال، فهل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟
افهم المعطيات: • نسبة التخفيض من قيمة كل سيارة 12%، وقيمة الخصم 1500 ريال.
• سعر السيارة التي يريد أحمد شراءها 64500 ريال.

المطلوب: هل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

خطط: افترض أن x تمثل السعر الأصلي للسيارة، و $d(x)$ تمثل السعر بعد التخفيض، و $r(x)$ تمثل السعر بعد الخصم؛ إذن $[rod](x)$ تمثل السعر إذا طبق التخفيض قبل الخصم، و $[dor](x)$ تمثل السعر إذا طبق الخصم قبل التخفيض.

حل: اكتب معادلتين للدالتين التخفيض $d(x)$ ، والخصم $r(x)$.

يخضع المعرض 12% من السعر الأصلي للسيارة. فتكون دالة التخفيض

$$d(x) = x - 0.12x$$

يخصم الوكيل 1500 ريال من سعر كل سيارة جديدة؛ لذا فإن دالة الخصم هي:

$$r(x) = x - 1500$$

إذا طُبّق التخفيض قبل الخصم، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[r \circ d](64500)$.

$$[r \circ d](x) = r[d(x)]$$

$$[r \circ d](64500) = r[d(64500)]$$

$$= r[64500 - 0.12(64500)]$$

$$= r(64500 - 7740)$$

$$= r(56760)$$

$$= 56760 - 1500 = 55260$$

أما إذا طُبّق الخصم قبل التخفيض، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[d \circ r](64500)$.

$$[d \circ r](x) = d[r(x)]$$

$$[d \circ r](64500) = d[r(64500)]$$

$$= d(64500 - 1500)$$

$$= d(63000)$$

$$= 63000 - 0.12(63000)$$

$$= 63000 - 7560 = 55440$$

وبما أن $[r \circ d](64500) = 55260$ ، $[d \circ r](64500) = 55440$

فإن السعر النهائي للسيارة سيكون أقل عندما يُطبق التخفيض قبل الخصم.

تحقق تبدو الإجابة منطقية؛ لأن تخفيضًا نسبته 12% سيتم تطبيقه على قيمة أكبر؛ لذا ستكون قيمة التخفيض أعلى.

تحقق من فهمك

4 تسوق: يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معًا على جهاز كهربائي هما: خصم 35 ريالًا، وتخفيض نسبته 15%، فإذا كان سعر الجهاز الأصلي 300 ريال، فأيهما يعطي سعرًا أقل: تطبيق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟ **تطبيق التخفيض قبل الخصم يعطي سعرًا أقل بـ 5.25 ريالًا**

مثال إضافي

4

أقساط يُقتطع 200 ريال شهريًا من راتب صالح للتأمين الصحي، بالإضافة إلى 8% للائحة. ويمكن لصالح اختيار اقتطاع التأمين الصحي قبل اقتطاع الادخار أو بعده. فإذا كان راتب صالح 6000 ريال، فما الاختلاف إذا تم اقتطاع التأمين الصحي قبل الادخار أو بعده؟ **سيكون المتبقي من راتبه أكثر بـ 16 ريالًا إذا اقتطع مبلغ التأمين الصحي قبل الادخار.**

المتعلمون الفرديون اطلب إلى الطلاب كتابة عبارات تحوي تركيب دوال، ثم كتابة ملاحظات عليها لمساعدتهم. فمثلًا تُقرأ $f[g(x)]$ على النحو الآتي: f بعد g لـ x ، أبدأ بإيجاد قيمة الدالة $g(x)$ ثم استعمل هذه القيمة بوصفها مدخلة للدالة f .

المثالان 1, 2 أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ في كل مما يأتي: (1, 2) انظر الهامش.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 5 & (2) & & f(x) &= x + 2 & (1) \\ g(x) &= -x + 8 & & & g(x) &= 3x - 1 & \end{aligned}$$

مثال 3 أوجد $f \circ g$ ، $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكناً: (3, 4) انظر الهامش.

$$\begin{aligned} f &= \{(-5, 4), (14, 8), (12, 1), (0, -3)\} & (4) & & f &= \{(2, 5), (6, 10), (12, 9), (7, 6)\} & (3) \\ g &= \{(-2, -4), (-3, 2), (-1, 4), (5, -6)\} & & & g &= \{(9, 11), (6, 15), (10, 13), (5, 8)\} & \end{aligned}$$

أوجد $[f \circ g](x)$ ، $[g \circ f](x)$ في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكناً. (5, 6) انظر الهامش.

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 4 & (6) & & f(x) &= -3x & (5) \\ g(x) &= x^2 + 3x - 10 & & & g(x) &= 5x - 6 & \end{aligned}$$

مثال 4 (7) ادخار: يُقتطع ما نسبته 8% من راتب موظف للادخار. ويستطيع الموظف أن يختار بحيث يكون الاقتطاع قبل تسديده قسماً آخر قيمته 17.5% من الراتب، أو بعده. فإذا كان راتب الموظف قبل الاقتطاع وتسديد القسط 9500 ريال، فهل يكون ادخاره أكثر إذا كان الاقتطاع قبل تسديد القسط أم بعده؟ وضح إجابتك. انظر الهامش.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ في كل مما يأتي: (8-10) انظر ملحق الإجابات.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 4 & (10) & & f(x) &= x^2 & (9) & & f(x) &= x - 1 & (8) \\ g(x) &= x^2 - 8x + 4 & & & g(x) &= -x + 1 & & & g(x) &= 5x - 2 & \end{aligned}$$

(11) مشي: يمشي راشد على ممر متحرك. فإذا كانت سرعته يُعبر عنها بالدالة: $l(x) = 3x - 4$ ، وسرعة الممر المتحرك يُعبر عنها بالدالة: $W(x) = 4x + 7$ ، حيث x الزمن بالثواني.

(a) ما الدالة التي تُعبر عن سرعته الكلية إذا كان يمشي في اتجاه سير الممر المتحرك؟ $(W + l)(x) = 7x + 3$
(b) ما الدالة التي تُعبر عن سرعته الكلية إذا مشى في عكس اتجاه سير الممر المتحرك؟ $(l - W)(x) = -x - 11$

مثال 3 أوجد $f \circ g$ ، $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكناً: (12-15) انظر ملحق الإجابات.

$$\begin{aligned} f &= \{(5, 13), (-4, -2), (-8, -11), (3, 1)\} & (13) & & f &= \{(-8, -4), (0, 4), (2, 6), (-6, -2)\} & (12) \\ g &= \{(-8, 2), (-4, 1), (3, -3), (5, 7)\} & & & g &= \{(4, -4), (-2, -1), (-4, 0), (6, -5)\} & \\ f &= \{(-1, 11), (2, -2), (5, -7), (4, -4)\} & (15) & & f &= \{(-4, -14), (0, -6), (-6, -18), (2, -2)\} & (14) \\ g &= \{(5, -4), (4, -3), (-1, 2), (2, 3)\} & & & g &= \{(-6, 1), (-18, 13), (-14, 9), (-2, -3)\} & \end{aligned}$$

أوجد $[f \circ g](x)$ ، $[g \circ f](x)$ في كل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكناً: (16-18) انظر ملحق الإجابات.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 & (18) & & f(x) &= 4x - 1 & (17) & & f(x) &= 2x^2 - x + 1 & (16) \\ g(x) &= 8x^2 + 3x & & & g(x) &= x^3 + 2 & & & g(x) &= 4x + 3 & \end{aligned}$$

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-7 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

$$(f + g)(x) = 4x + 1; \quad (1)$$

$$(f - g)(x) = -2x + 3;$$

$$(f \cdot g)(x) = 3x^2 + 5x - 2;$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{x+2}{3x-1}\right), x \neq \frac{1}{3}$$

$$(f + g)(x) = x^2 - x + 3; \quad (2)$$

$$(f - g)(x) = x^2 + x - 13;$$

$$(f \cdot g)(x) = -x^3 + 8x^2 + 5x - 40;$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 5}{-x + 8}, x \neq 8$$

(3) $f \circ g$ غير معرفة؛

$$g \circ f = \{(2, 8), (6, 13), (12, 11), (7, 15)\}$$

$$g \circ f = \{(0, 2)\} \text{ غير معرفة، } (4)$$

$$[f \circ g](x) = -15x + 18 \quad (5)$$

$$[g \circ f](x) = -15x - 6$$

$$[f \circ g](x) = x^2 + 3x - 6 \quad (6)$$

$$[g \circ f](x) = x^2 + 11x + 18$$

(7) يكون ادخاره أكثر إذا كان الاقتطاع قبل تسديد القسط؛ لأن المبلغ المدخر قبل تسديد القسط هو 760 ريالاً، وبعد تسديد القسط هو 627 ريالاً.

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
42-52 ، 38 ، 8-20	دون المتوسط
42-52 ، 38 ، 30-35 ، 9-27 فردي	ضمن المتوسط
20-52	فوق المتوسط

19 صناعة: ينتج مصنع نوعًا من الفناجين. فإذا كان ثمن بيع x فنجان يُعبر عنه بالدالة: $v(x) = 6.5x$ ، وتكلفة إنتاج x فنجان يُعبر عنها بالدالة: $c(x) = 0.75x + 1850$.

(a) اكتب الدالة $p(x)$ التي تعبر عن ربح المصنع إذا باع x فنجان. **$P(x) = 5.75x - 1850$**

(b) أوجد ربح المصنع عند بيع 500 فنجان و 1000 فنجان و 5000 فنجان.

$P(500) = 1025$; $P(1000) = 3900$; $P(5000) = 26900$

20 تسوق: يرغب سامر في شراء تلفاز ذي شاشة مسطحة معروض للبيع بخخصته 35% من السعر الأصلي. فإذا كان سعره الأصلي 2299 ريالاً، ويضاف إليه 6.25% بدل ضمان بعد الخصم.

(a) اكتب دالتين: الأولى تمثل سعر التلفاز بعد الخصم $p(x)$ ، والثانية سعر التلفاز بعد إضافة بدل الضمان $t(x)$. **$p(x) = 0.65x$; $t(x) = 1.0625x$**

(b) أي الدالتين الآتيتين يمثل سعر التلفاز النهائي: $[p \circ t](x)$ ، أم $[t \circ p](x)$ ؟ وضح إجابتك.

(c) كم سيدفع سامر ثمنًا للتلفاز؟ **1587.75 ريالاً**

20b بما أن $[p \circ t](x) = [t \circ p](x)$ ، فكلا الدالتين تمثل سعر التلفاز النهائي.

إذا كان $g(x) = x - 3$ ، $f(x) = x^2 + x - 12$ ، فأوجد كل دالة فيما يأتي، وحدد مجالها:

(21) $(f - g)(x)$ (22) $2(g \circ f)(x)$ (23) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

إذا كان $h(x) = x^2 + 6x + 8$ ، $g(x) = -2x + 1$ ، $f(x) = 5x$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

(24) $g[h(3)] = -69$ (25) $h[f(-5)] = 483$ (26) $h[f(9)] = 2303$

(27) $f[g(3a)] = -30a + 5$ (28) $f[h(a + 4)] = 5a^2 + 70a + 240$ (29) $g[f(a^2 - a)] = -10a^2 + 10a + 1$

30 تمثيلات متعددة: لتكن: $g(x) = x$ ، $f(x) = x^2$. **انظر ملحق الإجابات.**

(a) **جدولياً:** أنشئ جدولاً يبين بعض قيم الدوال: $(f + g)(x)$ ، $(f - g)(x)$ ، $g(x)$ ، $f(x)$.

(b) **بيانياً:** مثل بيانياً الدوال $(f + g)(x)$ ، $g(x)$ ، $f(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

(c) **بيانياً:** مثل بيانياً الدوال $(f - g)(x)$ ، $g(x)$ ، $f(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

(d) **لفظياً:** صف العلاقة بين التمثيلات البيانية للدوال $(f - g)(x)$ ، $(f + g)(x)$ ، $g(x)$ ، $f(x)$.

31 توظيف: يمكن التعبير عن عدد الرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1414 هـ في مؤسسة ما بالمعادلتين الآتيتين:

عدد الرجال: $y = 7x + 6$

عدد النساء: $y = 5x + 5$

حيث x تمثل عدد الأعوام منذ عام 1414 هـ، و y تمثل عدد الموظفين.

(a) اكتب دالة تمثل العدد الكلي للرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1414 هـ. **$y = 12x + 11$**

(b) إذا كانت الدالة f تمثل عدد الرجال الذين تم توظيفهم، والدالة g تمثل عدد النساء اللاتي تم توظيفهن، فماذا تمثل الدالة $(f - g)(x)$ ؟ **تمثل الفرق بين عدد الرجال وعدد النساء الذين تم توظيفهم.**

إذا كان $h(x) = x^2 - 2x + 1$ ، $g(x) = -4x + 3$ ، $f(x) = x + 2$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

(32) $(f \cdot g \cdot h)(3) = -180$ (33) $[(f + g) \cdot h](1) = 0$ (34) $\left(\frac{h}{f \cdot g}\right)(-6) = -\frac{49}{108}$

(35) $[f \circ (g \circ h)](2) = 1$ (36) $[g \circ (h \circ f)](-4) = -33$ (37) $[h \circ (f \circ g)](5) = 256$



الربط مع الحياة

الخاصية المميزة للشاشات المسطحة LCD هي أن نسبة عرضها إلى ارتفاعها هي 16:9، فتوفر للمشاهد صورة أوضح.

$(f - g)(x) = x^2 - 9$ (21)

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

$2(g \circ f)(x) = (22)$

$2x^3 - 4x^2 - 30x + 72$

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x + 4$ (23)

المجال = $\{x \mid x \neq 3\}$

مسائل مهارات التفكير العليا

(38) مسألة مفتوحة: أوجد دالتين $f(x), g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](4) = 0$.

(39) اكتشف الخطأ: تقوم ريم والعمود بإيجاد الدالة $[f \circ g](x)$ حيث $f(x) = x^2 + 2x - 8, g(x) = x^2 + 8$ من منهنما إجابتها صحيحة؟ وضح إجابتك.

العمود	ريم
$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	$[f \circ g](x) = f[g(x)]$
$= (x^2 + 8)^2 + 2x - 8$	$= (x^2 + 8)^2 + 2(x^2 + 8) - 8$
$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x - 8$	$= x^4 + 16x^2 + 64 + 2x^2 + 16 - 8$
$= x^4 + 16x^2 + 2x + 58$	$= x^4 + 18x^2 + 72$

(40) تحد: إذا كان $f(x) = \sqrt{x^3}, g(x) = \sqrt{x^6}$ فحدد مجال كل من الدالتين الآتيتين:

(a) $[g \circ f](x)$ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (b) $[f \circ g](x)$ المجال = $\{x | x \geq 0\}$

(41) تبرير: حدد ما إذا كانت كل من الجملتين الآتيتين صحيحة أحياناً أو صحيحة دائماً أو غير صحيحة أبداً. وفسر إجابتك.

(a) يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ هو نفس مجال الدالة f أو جزءاً منه. صحيحة دائماً
(b) يكون مجال الدالة $g[f(x)]$ هو نفس مجال الدالة g أو جزءاً منه. صحيحة أحياناً

(42) اكتب: وضح لماذا تقوم بتركيب دالتين. وأعط مثلاً من واقع الحياة يمكنك حله باستعمال تركيب دالتين.

(38) إجابة ممكنة:

$$f(x) = x - 9,$$

$$g(x) = x + 5$$

(39) ريم؛ لم تقم العمود بتعويض $g(x)$ بدلاً من x في الدالة $f(x)$.

(42) يستعمل تركيب دالتين عندما تحدد قيمة دالة بواسطة دالة أخرى. فعلى سبيل المثال، يمكن أن يمر إنتاج مصنع خلال عدد من العمليات في ترتيب معين، وتمثل كل عملية بدالة.

تنبیه

اكتشف الخطأ ذكر الطلاب في السؤال 39 بأن المطلوب إيجاد $f(x^2 + 8)$ لذا يتم تغيير كل x في $x^2 + 2x - 8$ بالعبارة $x^2 + 8$.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى كل طالب إخبار زميله شفويًا أو كتابيًا بالعملية الرياضية التي يمكن أن تستعمل لإيجاد ثمن سلعة عليها تخفيض بنسبة معينة وخصم إضافي بعد التخفيض. تركيب دالتين

تدريب على اختبار

(44) إذا كان $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 + 5$ فإن قيمة $f[g(6)]$ تساوي: C

38 A

43 B

86 C

261 D

(43) إذا كان $g(x) = x^2 + 9x + 21, h(x) = 2(x + 5)^2$ فما الدالة المكافئة للدالة $h(x) - g(x)$ ؟ B

$k(x) = -x^2 - 11x - 29$ A

$k(x) = x^2 + 11x + 29$ B

$k(x) = x + 4$ C

$k(x) = x^2 + 7x + 11$ D

مراجعة تراكمية

أوجد جميع الأصفار النسبية لكل من الدوال الآتية: (الدرس 3-9)

(45) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$ 1, 2, 4, -3 (46) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ -3, 5, $\frac{1}{2}$

اذكر العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة، والحقيقية السالبة، والتخيلية، لكل من الدوال الآتية: (الدرس 3-8)

(47) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ 3 أو 1؛ 1 أو 0؛ 2 أو 0؛ 2 أو 0؛ 4 أو 0

(49) صندوق أبعاده 12in, 16in, 18in. ما المقدار الثابت من الطول الذي يجب إضافته إلى كل بعد من أبعاده، ليصبح حجمه 5985 in^3 ؟ (الدرس 3-6) 3in

حل كل معادلة فيما يأتي، بالنسبة للمتغير المبين إزاء كل منها: (مهارة سابقة) $x = \frac{12+7y}{5}$ (50) $y = \frac{1-x^2}{-2x}$ (51) $y = \pm \sqrt{(x+2)^2 - 4} - 5$ (52)

(50) $5x - 7y = 12, x$ (51) $3x^2 - 6xy + 1 = 4, y$ (52) $(x+2)^2 - (y+5)^2 = 4, y$

186 الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تنوع التعليم

ضمن فوق

توسع يستعمل تركيب الدوال في العديد من دول العالم لحساب قيم مخالقات السرعة، وذلك عن طريق حساب عدد الكيلو مترات الزائدة على السرعة المحددة. وضرب ذلك العدد في مقدار محدد لكل كيلو متر، ثم إضافة مقدار ثابت. اطلب إلى الطلاب إيجاد تركيب ثلاث دوال مختلفة، بالاعتماد على قيم من افتراضهم للسرعة المحددة والمقدار المحدد لكل كيلو متر والمقدار الثابت، على أن يكون تركيب الدوال على الصورة: $[f \circ g \circ h](x)$ ، حيث x تمثل سرعة السيارة بالكيلومتر في الساعة.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 4

دون دون المتوسط **ضمن** ضمن المتوسط **فوق** فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم - تزمة (7) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-1 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على الدوال

تركيب دالتين، لكن زوج الدالتين بحيث أن مدى g مجموعة جزئية من مجال f . فإن تركيب الدالتين $f \circ g$ يعرف بالمعادلة: $[f \circ g](x) = f(g(x))$.

مثال 1: إذا كانت $f = \{(1,2), (3,3), (2,4), (4,1)\}$ و $g = \{(1,3), (3,4), (2,2), (4,1)\}$ فأوجد $f \circ g$ و $g \circ f$ إذا كان ذلك ممكناً.

حل: $f(g(1)) = f(3) = 3$ $f(g(2)) = f(2) = 4$ $f(g(3)) = f(3) = 3$ $f(g(4)) = f(1) = 2$
 أي أن: $f \circ g = \{(1,3), (2,4), (3,1), (4,2)\}$
 $g(f(1)) = g(2) = 2$ $g(f(2)) = g(3) = 4$ $g(f(3)) = g(3) = 4$ $g(f(4)) = g(1) = 3$
 أي أن: $g \circ f = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$

مثال 2: أوجد $[h \circ g](x)$ و $[g \circ h](x)$ للدالتين $h(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = 3x - 4$

حل: $[h \circ g](x) = h(g(x)) = h(3x - 4) = (3x - 4)^2 - 1 = 9x^2 - 24x + 16 - 1 = 9x^2 - 24x + 15$
 $[g \circ h](x) = g(h(x)) = g(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) - 4 = 3x^2 - 3 - 4 = 3x^2 - 7$

تدريبات:

أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$ لكل زوج من الدوال، إذا كان ذلك ممكناً:

1) $f = \{(1,2), (5,6), (0,9)\}$ 2) $f = \{(5,-2), (9,8), (-4,3), (0,4)\}$
 $g = \{(6,0), (2,-1), (9,5)\}$ $g = \{(3,7), (-2,6), (4,-2), (8,10)\}$

3) $f \circ g = \{(2,2), (6,9), (9,6)\}$ 4) $f \circ g = \{(4,7), (0,-2), (5,6), (9,10)\}$
 $g \circ f = \{(-1,-1), (0,5), (5,0)\}$

أوجد $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ لكل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكناً.

1) $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = -4x^2$ 2) $f(x) = 2x + 7$; $g(x) = -5x - 1$
 $[f \circ g](x) = 16x^4 - 1$ $[f \circ g](x) = -10x + 5$
 $[g \circ f](x) = -4x^2 + 8x^2 - 4$ $[g \circ f](x) = -10x - 36$

3) $f(x) = 5x + 4$; $g(x) = 3 - x$ 4) $f(x) = x^2 + 2x$; $g(x) = x - 9$
 $[f \circ g](x) = 19 - 5x$ $[f \circ g](x) = x^2 - 16x + 63$
 $[g \circ f](x) = -1 - 5x$ $[g \circ f](x) = x^2 + 2x - 9$

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تدريبات إعادة التعليم (6) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-1 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على الدوال

الجمع: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
 الطرح: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
 الضرب: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
 القسمة: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

مثال: أوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f \cdot g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ حيث $f(x) = x^2 + 3x - 4$ و $g(x) = 3x - 2$

حل: $(f+g)(x) = (x^2 + 3x - 4) + (3x - 2) = x^2 + 6x - 6$
 $(f-g)(x) = (x^2 + 3x - 4) - (3x - 2) = x^2 - 2$
 $(f \cdot g)(x) = (x^2 + 3x - 4)(3x - 2) = 3x^3 - 2x^2 + 9x^2 - 6x - 12x + 8 = 3x^3 + 7x^2 - 18x + 8$
 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{3x - 2}$

تدريبات:

أوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f \cdot g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ فيما يأتي:

1) $f(x) = x^2 + x - 6$; $g(x) = x - 2$ 2) $f(x) = 8x - 3$; $g(x) = 4x + 5$
 $12x^2 + 2x - 8$; $x^2 + 4$ $32x^2 + 28x - 15$
 $x^2 - x^2 - 8x + 12$; $x + 3$; $x \neq 2$ $4x + 5$; $x \neq -\frac{5}{4}$

3) $f(x) = 3x^2 - x + 5$; $g(x) = 2x - 3$ 4) $f(x) = 3x^2 - x + 5$; $g(x) = 2x - 3$
 $3x^2 + 13x - 5$; $-3x^2 - 9x + 3$ $3x^2 + x + 2$; $3x^2 - 3x + 8$
 $6x^2 + 19x^2 - 19x + 4$ $6x^2 - 11x^2 + 13x - 15$
 $\frac{2x-1}{(3x-1)(x+4)}$; $x \neq \frac{1}{3}$; $x \neq -4$ $\frac{3x^2 - x + 5}{2x - 3}$; $x \neq \frac{3}{2}$

5) $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \frac{1}{x+1}$ 6) $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \frac{1}{x+1}$
 $x \neq -1$; $x - 1$; $x \neq -1$; $x^3 + x^2 - x - 1$; $x \neq -1$

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تدريبات حل المسألة (9) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-1 تدريبات حل المسألة

العمليات على الدوال

1) المساحة، يريد خالد إيجاد مساحة الشكل التالي المكون من مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه (س) ومربع طول ضلعه (س). الدالة التي تعطي مساحة المثلث هي: $f(s) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ ، والدالة التي تعطي مساحة المربع هي: $g(s) = s^2$. ما الدالة $h(s)$ التي تعطي مساحة الشكل كاملاً بدلالة s ؟

2) أبعاد، قررت شركة حاسوب ضبط الأسعار والخصومات لتتنقح لديها القدرة على المنافسة. الدالة $P(t)$ تعطي سعر البيع بالريال للحاسوب من الفئة A بدلالة الزمن t ، والدالة $D(t)$ تعطي قيمة خصم خاص لتسريح الزبائن الدائمين. فكم ريالاً سيبيع زبون دائم ثمتاً لشراء حاسوب من الفئة A بدلالة الزمن t ؟

3) حجم، قيس درجة حرارة حمى كذات 2000، بدأت الحمى تبرد بحيث أن درجة حرارتها بعد زمن t تعطي بالدالة $T(t)$. إذا كانت $C(t)$ دالة تعطي درجة الحرارة السليبرية بدلالة الدرجة الفهرنهايتية. في الدالة التي تعطي حرارة الجسم بالدرجات السليبرية بدلالة الزمن t ؟

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تدريبات المهارات (8) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-1 تدريبات المهارات

العمليات على الدوال

أوجد $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ و $(f \cdot g)(x)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل مما يأتي:

1) $f(x) = x + 5$ 2) $f(x) = 3x + 1$
 $f(x) = x + 5$; $g(x) = 2x - 4$ $f(x) = 2x - 4$
 $x^2 + x - 4$; $x \neq 4$ $x^2 - 4$; $x \neq 4$

3) $f(x) = x^2$ 4) $f(x) = x^2$
 $15x^3 + 5$; $x \neq 0$; $\frac{3x^3 - 5}{x}$; $x \neq 0$ $4x^2 - x^2$; $x \neq 4$
 $15x^3 + 5$; $x \neq 0$; $\frac{3x^3 - 5}{x}$; $x \neq 0$ $4x^2 - x^2$; $x \neq 4$

أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكناً:

5) $f = \{(0,-3), (1,2), (2,2)\}$ 6) $f = \{(0,0), (4,-2)\}$
 $g = \{(-3,1), (2,0)\}$ $g = \{(0,4), (-2,0), (5,0)\}$
 $\{(-3,2), (2,-3)\}$ $\{(0,-2), (-2,0), (5,0)\}$
 $\{(0,1), (1,0), (2,0)\}$ $\{(0,4), (4,0)\}$

7) $f = \{(4,-3), (-1,1), (2,2)\}$ 8) $f = \{(6,6), (-3,-3), (1,3)\}$
 $g = \{(-3,6), (3,6), (6,-3)\}$ $g = \{(-1,-4), (2,-1), (3,-1)\}$
 $\{(-3,6), (3,6), (6,-3)\}$ $\{(1,3), (2,-1), (3,1)\}$
 $\{(6,-3), (-3,6), (1,6)\}$ $\{(-4,-1), (-1,-1), (2,-1)\}$

أوجد $[g \circ h](x)$ و $[h \circ g](x)$ لكل مما يأتي، إذا كان ذلك ممكناً:

9) $g(x) = 2x$ 10) $g(x) = -3x$
 $h(x) = 4x - 1$ $h(x) = 4x - 1$
 $2x + 4$; $2x + 2$ $-12x + 3$; $-12x - 1$

11) $g(x) = x - 6$ 12) $g(x) = x - 3$
 $h(x) = x + 6$ $h(x) = x^2$
 $x^2 - 3$; $x^2 - 6x + 9$

13) $g(x) = 5x$ 14) $g(x) = x + 2$
 $h(x) = x^2 + x - 1$ $h(x) = 2x^2 - 3$
 $25x^2 + 5x - 1$ $2x^2 - 1$; $2x^2 + 8x + 5$

إذا كان $h(x) = 3x - 1$ و $f \circ h(x) = x + 4$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

1) $g[f(-1)]$ 17) 3 18) $g[h(0)]$ 19) 15 20) $f[g(1)]$ 21) 15

2) $h[f(10)]$ 22) 12 23) $g[h(-3)]$ 24) $h[f(5)]$ 25) 224

26) $f \circ (h \circ g)(-2)$ 27) 72 28) $f \circ (h \circ g)(1)$ 29) 189 30) $f[h(8)]$ 31) 189

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 4

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

فوق
ضمن
دون

كتاب التمارين (24)

فوق
ضمن

التدريبات الإرشادية (10)

الفصل الرابع، العلاقات والدوال العكسية والجذرية

4-1 العمليات على الدوال

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل ما يأتي:

$f(x) = x^2 + 7x + 12$ (3)	$f(x) = 8x^2$ (2)	$f(x) = 2x + 1$ (1)
$g(x) = x^2 - 9$	$g(x) = \frac{1}{x^2}$	$g(x) = x - 3$
$2x^2 + 7x + 3$; $7x + 21$;	$\frac{8x+1}{x^2}$, $x \neq 0$;	$3x - 2$; $x + 4$;
$x^4 + 7x^2 + 3x^2 - 63x - 108$;	$\frac{8x-1}{x^2}$, $x \neq 0$;	$2x^2 - 5x - 3$;
$\frac{x+4}{x-3}$, $x \neq \pm 3$	$8x^2$, $x \neq 0$	$\frac{2x+1}{x-3}$, $x \neq 3$

أوجد $f \circ g$, $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكناً:

$f = \{(-4, 3), (0, -2), (1, -2)\}$ (5)	$f = \{(-9, -1), (-1, 0), (3, 4)\}$ (4)
$g = \{(-2, 0), (3, 1)\}$	$g = \{(0, -9), (-1, 3), (4, -1)\}$
$\{(-2, -2), (3, -2)\}$;	$\{(0, -1), (-1, 4), (4, 0)\}$;
$\{(-4, 1), (0, 0), (1, 0)\}$	$\{(-9, 3), (-1, -9), (3, -1)\}$
$f = \{(0, -3), (1, -3), (6, 8)\}$ (7)	$f = \{(-4, -5), (0, 3), (1, 6)\}$ (6)
$g = \{(8, 2), (-3, 0)\}$	$g = \{(6, 1), (-5, 0), (3, -4)\}$
غير معرف	$\{(6, 6), (-5, 3), (3, -5)\}$;
$\{(0, 0), (1, 0), (6, 2)\}$	$\{(-4, 0), (0, -4), (1, 1)\}$

أوجد $g \circ f(x)$, $f \circ g(x)$ إذا كان ذلك ممكناً:

$g(x) = x + 6$ (10)	$g(x) = -8x$ (9)	$g(x) = 3x$ (8)
$h(x) = 3x^2$	$h(x) = 2x + 3$	$h(x) = x - 4$
$3x^2 + 6$; $3x^2 + 36x + 108$	$-16x - 24$; $-16x + 3$	$3x - 12$; $3x - 4$
$g(x) = x - 2$ (13)	$g(x) = -2x$ (12)	$g(x) = x + 3$ (11)
$h(x) = 3x^2 + 1$	$h(x) = x^2 + 3x + 2$	$h(x) = 2x^2$
$3x^2 - 1$;	$-2x^2 - 6x - 4$;	$2x^2 + 3$;
$3x^2 - 12x + 13$	$4x^2 - 6x + 2$	$2x^2 + 12x + 18$

إذا كان $h(x) = x + 4$, $g(x) = 5x$, $f(x) = x^2$, فأوجد قيمة كل ما يأتي:

$h[f(4)]$ (16)	$g[h(-2)]$ (15)	$f[g(1)]$ (14)
320 $g[f(8)]$ (19)	-11 $h[g(-3)]$ (18)	25 $f[h(-9)]$ (17)

20 قياس: تستعمل الصيغة $f^{-1} = \frac{m}{12}$ لتحويل البوصات m إلى أقدام f والصيغة $m = \frac{5280}{f}$ لتحويل الأقدام إلى أميال m . اكتب تركيب دالتين لتحويل البوصات إلى أميال: $(m \circ f)(x) = \frac{m}{63360}$

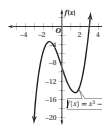
الاسم: _____ التاريخ: _____

4-1 التدرجات الإرشادية

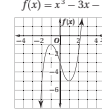
قيم عظمى محلية

يبيّن منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 6x - 9$ الجوارر وجود قيمة عظمى محلية للدالة بين القيمتين $f(-2)$ و $f(-1)$ ، ويمكنك الحصول على قيمة أكثر ترفاً لهذه القيمة العظمى المحلية بمقارنة القيم في الجدول الجوارر.

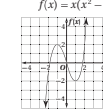
x	f(x)
-2	-5
-1.5	-3.375
-1.4	-3.344
-1.3	-3.397
-1	-4



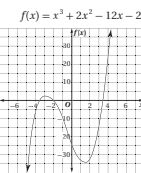
أوجد قيمة عظمى محلية لكل دالة متثلة فيما يأتي مقربة إلى أقرب جزء من عشرة:



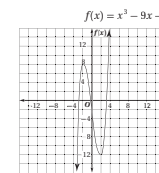
عظمى محلية = 1.0



عظمى محلية = 2.0



عظمى محلية = 3.3



عظمى محلية = 8.4

1 التركيز

الترابط الراسي

ما قبل الدرس 4-2

كتابة معادلات بالنسبة لمتغير محدد وحلها.

الدرس 4-2

إيجاد كل من العلاقة العكسية والدالة العكسية.

تحديد ما إذا كانت علاقة (أو دالة) تمثل علاقة عكسية (أو دالة عكسية) لأخرى أم لا.

ما بعد درس 4-2

تطوير تعريف الدالة اللوغاريتمية من خلال استكشاف العلاقة بين دوال أسية ومعكوساتها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" واسأل:

- اعتمادًا على الجدول، كم دولارًا أمريكيًا يقابل كلاً من: 5 ريالات، 10 ريالات تقريبًا؛ 2.67 تقريبًا
- كم ريالًا يقابل كلاً من: دولارًا أمريكيًا، 5 دولارات أمريكية؟ 3.75؛ 18.75
- ما مقلوب 0.267؟ وهل يظهر مقلوب 0.267 في الجدول؟
- $3.75 \approx \frac{1}{0.267}$ ؛ 3.75 تظهر في الجدول.



أمريكا	السعودية	السعودية	أمريكا
0.267		3.75	

لماذا؟
يبين الجدول المجاور قيمة الريال السعودي مقارنة بالدولار الأمريكي، والدالة $d = 0.267r$ تمثل عدد الدولارات التي تحصل عليها مقابل كل ريال سعودي، ولمعرفة عدد الريالات التي تحصل عليها مقابل كل دولار أمريكي، حل المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير r فتكون النتيجة $r \approx 3.75d$ وتمثل دالة عكسية للدالة السابقة.

إيجاد العلاقة العكسية: تذكر أن العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. **والعلاقة العكسية** هي مجموعة من الأزواج المرتبة، يمكنك الحصول عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب في العلاقة، فيصبح مجال العلاقة هو مدى العلاقة العكسية لها، ومداهما هو مجال العلاقة العكسية لها.

مفهوم أساسي العلاقة العكسية

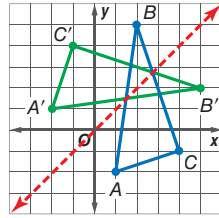
التعبير اللفظي: تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: كلما احتوت إحداها على زوج مرتب (a, b) ، احتوت الأخرى على الزوج المرتب (b, a) .

مثال: كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى:

$A = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$ $B = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3)\}$

1 مثال إيجاد العلاقة العكسية

هندسة: يمكن تمثيل رؤوس $\triangle ABC$ بالعلاقة $(1, -2), (2, 5), (4, -1)$. أوجد العلاقة العكسية لها. وصف تمثيلها البياني.



مثل العلاقة بيانيًا. ولإيجاد العلاقة العكسية قم بتبديل إحداثيات الأزواج المرتبة. فتكون العلاقة العكسية هي: $(-2, 1), (5, 2), (-1, 4)$.
من تمثيل الأزواج المرتبة للعلاقة العكسية لها يتضح أنها تمثل رؤوس $\triangle A'B'C'$ بعد انعكاس رؤوس $\triangle ABC$ حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك

1 هندسة: إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة $(-8, -3), (-8, -6), (-3, -6)$ تمثل إحداثيات رؤوس مثلث قائم الزاوية. فأوجد العلاقة العكسية لها، وصف تمثيلها البياني.

$\{(-3, -8), (-6, -8), (-6, -3)\}$ انعكاس لرؤوس المثلث حول المستقيم $y = x$

إن ما ينطبق على الأزواج المرتبة في العلاقة والعلاقة العكسية، ينطبق أيضًا على الأزواج المرتبة في الدالة **والدالة العكسية**. ويرمز إلى الدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

فيما سبق

درست كتابة معادلات بالنسبة لمتغير محدد وحلها.

والآن

- أجد كلاً من العلاقة العكسية والدالة العكسية.
- أحدد ما إذا كانت علاقة (أو دالة) تمثل علاقة عكسية (أو دالة عكسية) لأخرى أم لا.

المفردات

- العلاقة العكسية
- inverse relation
- الدالة العكسية
- inverse function

مصادر الدرس 4-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، صفحة: (189)	• تنوع التعليم، صفحة: (189, 191)	• تنوع التعليم، صفحة: (191)
كتاب التمارين	• ص (25)	• ص (25)	• ص (25)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

خواص الدالة العكسية

التعبير اللفظي: إذا كان كل من f^{-1} , f دالة عكسية للأخرى، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال: ليكن $f(x) = x - 4$ ودالتها العكسية هي $f^{-1}(x) = x + 4$.

أوجد $f(6)$ وأوجد $f^{-1}(2)$.

$f(x) = x - 4$ $f^{-1}(x) = x + 4$

$f(6) = 6 - 4 = 2$ $f^{-1}(2) = 2 + 4 = 6$

وبما أن كلًا من $f(x)$, $f^{-1}(x)$ دالة عكسية للأخرى، فإن $f(6) = 2$, $f^{-1}(2) = 6$.

قراءة الرياضيات

الدالة العكسية
 f^{-1} يقرأ الدالة

العكسية للدالة f . تذكر أن (-1) ليس أسًا.

إيجاد العلاقة العكسية ومعكوس الدالة

مثال 1 يبين طريقة إيجاد العلاقة العكسية لعلاقة ممثلة بمجموعة من الأزواج المرتبة

مثال 2 طريقة إيجاد معكوس دالة وتمثيله بيانيًا.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة متباينة. تذكر أنه يمكن استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا. وبالمثل، يمكن استعمال اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا.



يمكن رسم مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة، في أكثر من نقطة؛ لذا لا يكون معكوس الدالة دالة $y = g(x)$.

لا يمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة؛ لذا يمثل معكوس الدالة $y = f(x)$ دالة أيضًا.

يمكنك إيجاد معكوس دالة بالتبديل بين x و y في قاعدة الدالة.

مثالان إضافيان

هندسة: إذا كانت

الأزواج المرتبة للعلاقة

$\{(1,0), (6,0), (6,3), (1,3)\}$ تمثل

إحداثيات رؤوس مستطيل. فأوجد

العلاقة العكسية لها، وصف تمثيلها البياني.

العلاقة العكسية هي:

$\{(0,1), (0,6), (3,6), (3,1)\}$

وهذه الأزواج المرتبة تمثل رؤوس

مستطيل، وهي عبارة عن إحداثيات

الرؤوس الأصلية بعد انعكاسها حول

المستقيم $y = x$.

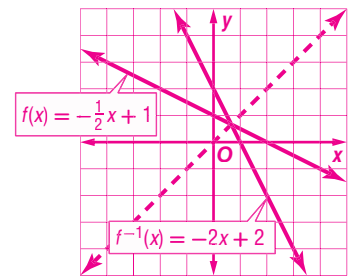
أوجد الدالة العكسية للدالة:

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانيًا على

مستوى إحداثي واحد.

$f^{-1}(x) = -2x + 2$



مثال 2 إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًا

أوجد معكوس كل من الدالتين الآتيتين، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانيًا على مستوى إحداثي واحد.

(a) $f(x) = 2x - 5$

الخطوة 1 أعد كتابة الدالة كمعادلة بدلالة المتغيرين x , y

$$f(x) = 2x - 5 \rightarrow y = 2x - 5$$

الخطوة 2 بدل بين كل من المتغير x والمتغير y في المعادلة

$$x = 2y - 5$$

الخطوة 3 حل المعادلة بالنسبة للمتغير y .

$$x = 2y - 5$$

$$x + 5 = 2y$$

$$\frac{x+5}{2} = y$$

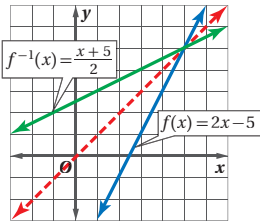
الخطوة 4 ضع $f^{-1}(x)$ بدلاً من المتغير y .

$$y = \frac{x+5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

فتكون الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x - 5$ هي $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

والتمثيل البياني للدالة $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$ هي انعكاس للتمثيل

البياني للدالة $f(x) = 2x - 5$ حول المستقيم $y = x$.



إرشادات للدراسة

بما أن معكوس الدالة $f(x)$ في الفرع a من المثال 2 هو دالة أيضًا، لذا تم التعبير عنها بـ $f^{-1}(x)$.

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي اطلب إلى الطلاب

أن يعدوا عرضًا تقديميًا يتضمن

تسجيلًا صوتيًا يوضحون فيه طريقة

إيجاد معكوس دالة، واطلب إليهم أيضًا

بيان طريقة التحقق مما إذا كانت كل

دالة من دالتين محددتين تمثل دالة

عكسية للأخرى أم لا.

الدوال معكوس الدالة f في الضرب b لا يمثل دالة؛ لأنه لا يحقق اختبار الخط الرأسى، أو لأن الدالة f لا تحقق اختبار الخط الأفقى.

$$f(x) = x^2 + 1 \quad (b)$$

الخطوة 1

$$f(x) = x^2 + 1 \rightarrow y = x^2 + 1$$

الخطوة 2

$$x = y^2 + 1$$

الخطوة 3

$$x - 1 = y^2$$

الخطوة 4

$$y = \pm\sqrt{x-1}$$

بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

$$\pm\sqrt{x-1} = y$$

$$y = \pm\sqrt{x-1}$$

مثل بيانياً $y = \pm\sqrt{x-1}$ بإجراء انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك (2A, 2B) انظر الهامش.

أوجد معكوس كل من الدالتين الآتيتين، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد.

$$f(x) = 3x^2 \quad (2B)$$

$$f(x) = \frac{x-3}{5} \quad (2A)$$

التأكد من الدالة العكسية: يمكن تحديد ما إذا كانت دالتان تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا، وذلك بإيجاد كل من تركيبيهما. فإذا كان الناتج في كل منهما يساوي الدالة المحايدة $I(x) = x$ ، فإن كلاً من الدالتين تمثل دالة عكسية للأخرى.

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضى قد يخلط بعض الطلاب بين الرمز f^{-1} و $\frac{1}{f}$ للدالة f . لذا يبين لهم أن الرمز f^{-1} يعني الدالة العكسية للدالة f ، في حين يعني الرمز $\frac{1}{f}$ مقلوب الدالة f .

التأكد من الدالة العكسية

مثال 3 يبين طريقة تحديد ما إذا كانت دالتان تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى؛ أم لا.

مثال إضافي

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين:

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 6, \quad g(x) = \frac{4}{3}x + 8$$

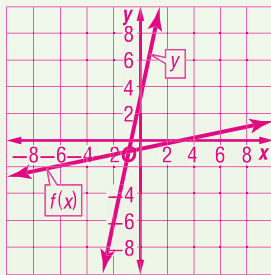
دالة عكسية للأخرى أم لا. وضح إجابتك. تمثل كل من الدالتين دالة

عكسية للأخرى؛ لأن

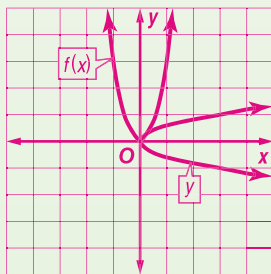
$$[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$$

إجابات (تحقق من فهمك):

$$y = 5x + 3 \quad (2A)$$



$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x} \quad (2B)$$



الدالة العكسية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: تكون كل من الدالتين f, g دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان تركيب كل منهما يساوي الدالة المحايدة.

الرموز: الدالتان $f(x), g(x)$ تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان $[g \circ f](x) = [f \circ g](x) = x$.

مثال 3

التأكد أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ وضح إجابتك.

$$f(x) = 3x + 9, \quad g(x) = \frac{1}{3}x - 3 \quad (a)$$

تأكد بأن تركيب الدالتين $f(x), g(x)$ يساوي الدالة المحايدة.

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$

$$= g(3x + 9)$$

$$= \frac{1}{3}(3x + 9) - 3$$

$$= x + 3 - 3 = x$$

إذن تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$.

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

$$= f\left(\frac{1}{3}x - 3\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}x - 3\right) + 9$$

$$= x - 9 + 9 = x$$

$$f(x) = 4x^2, \quad g(x) = 2\sqrt{x} \quad (b)$$

$$[f \circ g](x) = f(2\sqrt{x})$$

$$= 4(2\sqrt{x})^2$$

$$= 4(4x) = 16x$$

بما أن $[f \circ g](x) \neq x$ ، فإن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ لا تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى.

تنبيه

الدالة العكسية

تأكد أن التركيبين $[f \circ g](x)$ و $[g \circ f](x)$ يساوي كل منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ ؛ وذلك لتكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

تنوع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون يمثل الطلاب الدالة المحايدة $I(x) = x$ بيانياً على مستوى إحداثي كبير مستعملين قطعة سلك أو خيط أو أي شيء مشابه. ثم يضعون قطعة أخرى على المستوى الإحداثي نفسه لتمثيل الدالة $f(x) = 2x - 5$ بيانياً والواردة في المثال 2. واطلب إلى الطلاب تمثيل الدالة العكسية لتلك الدالة بيانياً والربط بين التمثيل البياني لهذه الدالة والتمثيل البياني لدالتها العكسية بالنسبة للتمثيل البياني للدالة $I(x) = x$.

3B كل من $f(x)$ و $g(x)$

دالة عكسية للأخرى لأن

$$[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$$

$$f(x) = 2x^3 - 1, g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} \quad (3B)$$

$$f(x) = 3x - 3, g(x) = \frac{1}{3}x + 4 \quad (3A)$$

تحقق من فهمك

3A الدالتان $f(x)$ و $g(x)$

لا تمثل كل منهما دالة عكسية

للأخرى؛ لأن

$$[f \circ g](x) = x + 9$$

$$[g \circ f](x) = x + 3$$

3 التدريب

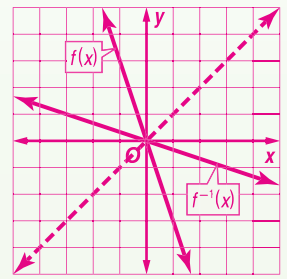
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 8-1 للتأكد من فهم الطلاب.

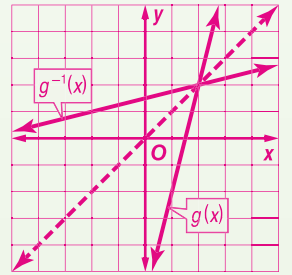
ثم استعمل الجدول أسفله هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x \quad (3)$$



$$g^{-1}(x) = \frac{x+6}{4} \quad (4)$$



تأكد

$$\{(10, -9), (-3, 1), (-5, 8)\} \quad (1)$$

$$\{(9, -2), (-1, 4), (9, -7), (0, 7)\} \quad (2)$$

$$\{(-2, 9), (4, -1), (-7, 9), (7, 0)\} \quad (2)$$

$$\{(-9, 10), (1, -3), (8, -5)\} \quad (1)$$

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

$$h(x) = x^2 - 3 \quad (5)$$

$$g(x) = 4x - 6 \quad (4)$$

$$f(x) = -3x \quad (3)$$

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟

$$f(x) = 2x^3 \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \quad (7)$$

$$f(x) = x - 7 \quad (6)$$

$$\text{لا } g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}$$

$$\text{لا } g(x) = 2x - \frac{4}{3}$$

$$\text{نعم } g(x) = x + 7$$

مثال 1

مثال 2

مثال 3

تدرب وحل المسائل

$$\{(-5, 1), (6, 2), (-7, 3), (8, 4), (-9, 5)\} \quad (9)$$

$$\{(0, 3), (4, 5), (-8, 7), (12, 9), (16, 11)\} \quad (10)$$

$$\{(3, 0), (5, 4), (7, -8), (9, 12), (11, 16)\} \quad (10) \quad \{(1, -5), (2, 6), (3, -7), (4, 8), (5, -9)\} \quad (9)$$

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

$$y = -2x + 1 \quad (13)$$

$$g(x) = 5x \quad (12)$$

$$f(x) = x + 2 \quad (11)$$

$$h(x) = x^2 + 4 \quad (16)$$

$$y = -\frac{5}{3}x - 8 \quad (15)$$

$$h(x) = \frac{x-4}{3} \quad (14)$$

$$y = (x+1)^2 + 3 \quad (19)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad (18)$$

$$f(x) = 5x^2 \quad (17)$$

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟

$$f(x) = \frac{x+10}{8} \quad (22)$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x + 3 \quad (21)$$

$$f(x) = 2x + 3 \quad (20)$$

$$\text{نعم } g(x) = 8x - 10$$

$$\text{نعم } g(x) = -3x + 9$$

$$\text{لا } g(x) = 2x - 3$$

$$f(x) = 2\sqrt{x-5} \quad (25)$$

$$f(x) = (x+6)^2 \quad (24)$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 \quad (23)$$

$$\text{لا } g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5$$

$$\text{نعم } g(x) = \sqrt{x} - 6$$

$$\text{لا } g(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x}$$

26 وقود: إذا كان عدد الكيلومترات التي تقطعها سيارة فهد لكل لتر من البنزين يُعبر عنه بالدالة $k(l) = 12l$.

(a) أوجد الدالة $c(l)$ التي تمثل سعر l من لترات البنزين $c(l) = 0.45l$

(b) أوجد دالة تمثل سعر الوقود المستهلك في الكيلومتر الواحد، مستعملاً فكرة الدالة العكسية. $P(k) \approx 0.04K$

27 هندسة: يُعبر عن مساحة الدائرة بالدالة $A = \pi r^2$.

$$(a) \text{ أوجد معكوس الدالة. } r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

(b) استعمل المعكوس لإيجاد نصف قطر دائرة مساحتها 36cm^2 . تقريباً 3.39cm



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	37-47, 34-35, 9-26
ضمن المتوسط	37-50, 31-35, 26-28, 9-25 فردي
فوق المتوسط	27-47

استعمل اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان معكوس كل دالة من الدوال الآتية دالة أيضًا:

(28) نعم $f(x) = x^3 - 8$ (29) لا $h(x) = 2x^2$ (30) نعم $g(x) = 3x + 7$

(31) **تسوق:** اشترى خالد منتجًا عن طريق الإنترنت ودفع مبلغ 2500 ريال. فإذا كانت تكلفة التسوق عبر الإنترنت هي 3.5% من السعر الأصلي، وأجرة الشحن 223 ريالاً، فما السعر الأصلي للمنتج؟ **2200 ريال**

(32) **درجات الحرارة:** تستعمل الصيغة $F(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجة الحرارة السلسيوسية إلى درجة الحرارة الفهرنهايتية.

- (a) أوجد $F^{-1}(x)$. ثم بين أن $F^{-1}(x)$ و $F(x)$ تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى. **انظر ملحق الإجابات.**
(b) فيم تستعمل $F^{-1}(x)$ ؟ **يمكن أن تستعمل للتحويل من درجة الحرارة الفهرنهايتية إلى درجة الحرارة السليزية.**

(33) **تمثيلات متعددة:** تأمل الدالة $y = x^n$ ، حيث $n = 0, 1, 2, \dots$.

- (a) **بيانيًا:** مثل الدوال $y = x^n$ بيانيًا للقيم $n = 0, 1, 2, 3, 4$. **انظر ملحق الإجابات.**
(b) **جدوليًا:** ما قيم n التي تجعل معكوس هذه الدوال دوال أيضًا؟ سجل نتائجك في جدول. **انظر ملحق الإجابات.**
(c) **تحليليًا:** استنتج قيم n التي يكون عندها معكوس الدوال $f(x) = x^n$ دوال أيضًا، على فرض أن n عدد كلي. **n عدد فردي**

مسائل مهارات التفكير العليا

(34) **تبرير:** حدد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك.
"إذا كانت العلاقة لا تمثل دالة، فإن معكوسها لا يمثل دالة أيضًا." **انظر الهامش.**

(35) **مسألة مفتوحة:** أعط مثالاً على دالة، ودالتها العكسية. وتحقق من أن كلا منهما دالة عكسية للأخرى.

(36) **تحدي:** أعط مثالاً على دالة معكوسها الدالة نفسها. **(36, 37) انظر الهامش.**
إجابة ممكنة: $f(x) = 2x$, $f^{-1}(x) = 0.5x$; $f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x$

(37) **اكتب:** إذا كان لديك تركيب للدالتين، كل منهما دالة عكسية للأخرى. فلماذا تكون قيمة تركيب الدالتين عند العدد 5 تساوي العدد 5 دائمًا؟

تدريب على اختبار

- (38) إذا كان $g(x) = -x + 1$ ، $f(x) = x^2 + 3$ ، فأي مما يأتي يمثل $f[g(x)]$ ؟ **D**
A $x^2 - x + 2$
B $-x^2 - 2$
C $-x^3 + x^2 - 3x + 3$
D $x^2 - 2x + 4$
- (39) أي الدوال الآتية هي دالة عكسية للدالة: $f(x) = \frac{3x-5}{2}$ ؟ **A**
A $g(x) = \frac{2x+5}{3}$
B $g(x) = \frac{3x+5}{2}$
C $g(x) = 2x + 5$
D $g(x) = \frac{2x-5}{3}$

مراجعة تراكمية

إذا كان $h(x) = x^2 - 1$ ، $g(x) = x - 2$ ، $f(x) = 3x + 5$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس: 4-1)
(40) $g[f(3)] = 12$ (41) $f[h(-2)] = 14$ (42) $h[g(1)] = 0$
(43) **مساحة:** قطعة أرض على شكل شبه منحرف، طول قاعدتها الأطول يزيد بمقدار 8 ft على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر، ويزيد ارتفاعها قدمًا واحدة على 3 أمثال طول قاعدتها الأقصر. ما أبعاد قطعة الأرض إذا كانت مساحتها 4104ft^2 ؟ (الدرس: 3-6)

بسّط كلاً مما يأتي: (الدرس: 3-1)

(44) $(3 + 4i)(5 - 2i)$ (45) $23 + 14i$ (46) $i \frac{1+i}{1-i}$ (47) $-\frac{2}{5} - \frac{11}{5}i$ (48) $\frac{4-3i}{1+2i}$

الدرس 4-2 العلاقات والدوال العكسية 191

تنوع التعليم

توسع يمكن أن تستعمل الدالة $f(x) = 2.3x + 61$ لتقريب طول شخص بالاستمترات إذا علم طول عظم فخذ. أوجد $f^{-1}(x)$ ، وشرح فيما تستعمل.

$f^{-1}(x) = \frac{x-61}{2.3}$ ؛ تستعمل لإيجاد الطول التقريبي لعظم الفخذ لشخص طوله معلوم.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 33 الحاسبة البيانية، وجدول القيم والتحليل لاستكشاف خصائص الدوال العكسية

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدهم مفهوم تركيب الدالتين الذي تعلموه سابقًا على التحقق من أن كلاً من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرستين 4-1، 4-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (68)

إجابات:

(34) **إجابة ممكنة:** صحيحة أحيانًا؛
 $y = \pm \sqrt{x}$ مثال على علاقة لا تمثل دالة ومعكوسها يمثل دالة. معادلة الدائرة مثال على علاقة لا تمثل دالة ومعكوسها لا يمثل دالة.

(36) **إجابة ممكنة:**

$f(x) = x$, $f^{-1}(x) = x$ أو
 $f(x) = -x$, $f^{-1}(x) = -x$

(37) **عند إيجاد قيمة إحدى الدالتين عند العدد 5 يتم تنفيذ عملية أو أكثر على هذا العدد والدالة الأخرى، وهي الدالة العكسية للدالة الأولى تعكس هذه العمليات (تزيل أثرها على العدد 5)، وبالتالي فإن قيمة التركيب عند العدد 5 تساوي العدد 5 دائمًا.**

ضمن فوق

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لمقارنة دالة بمعكوسها، باستعمال الجداول والتمثيلات البيانية.

1 التركيز

الهدف مقارنة دالة بمعكوسها باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire.

المواد اللازمة

الحاسبة البيانية TI-nspire.

إرشادات التدريس

تأكد من أن الطلاب يعرفون كيف يدخلون قوائم البيانات، ويتنقلون بين القوائم في حاسباتهم البيانية.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات؛ لتنفيذ النشاط 1 والنشاط 2. واطلب إليهم التأكد من أن شاشاتهم متطابقة في كل خطوة.

اسأل:

- ما الفرق بين النشاط 1 والنشاط 2؟
 - يقارن النشاط 1 بين أزواج مرتبة منفصلة، في حين يقارن النشاط 2 بين الدالتين خطيتين متصلتين.
 - كيف يرتبط تمثيل الدالة البياني بتمثيل معكوسها البياني؟ يمثالن انعكاسًا كل منهما للآخر حول المستقيم $f(x) = x$.
- تدريب** اطلب إلى الطلاب حل التمارين 1-8.

3 التقويم

التقويم التكويني

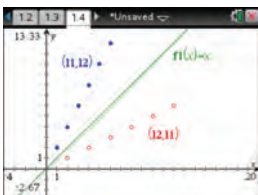
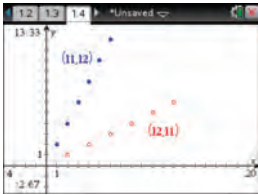
استعمل التمارين 1, 2, 5 لتقويم مدى قدرة الطلاب على مقارنة دالة بمعكوسها باستعمال الحاسبة البيانية.

نشاط 1 تمثيل المعكوس بيانيًا باستعمال الأزواج المرتبة

مثل الدالة $f(x) = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12)\}$ ومعكوسها بيانيًا.

الخطوات:

- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على \square .
- من الشاشة الظاهرة اختر **New Document**، ومنها اختر **4.Add Lists & Spreadsheet** فيظهر جدول إلكتروني.
- اكتب في أعلى العمود x الرمز **II** ثم اضغط **enter**، وكتب في أعلى العمود y الرمز **II** ثم اضغط **enter**.
- أدخل قيم x في العمود **II** بالترتيب، وقيم y في العمود **II**.
- اضغط مفتاح \square واختر من الشاشة الظاهرة \square ، ثم اضغط **enter** فيظهر أمامك مستوى إحداثي، ثم اضغط على \square واختر منها **3.Graph Entry/Edit** ومنها اختر **5.Scatter Plot**، فتظهر شاشة تتضمن مستوى إحداثيًا أسفل إشارة لقيم x, y .
- اضغط مفتاح **var** واختر **II** الموجودة عند x ثم تحرك بالسهم عند y ، ثم اضغط مفتاح **var** مرة ثانية واختر **II**، ثم اضغط **enter**.
- اضغط \square ، ثم أعد الخطوة السابقة باختيار **II** عند x ، **II** عند y ثم اضغط **enter**.
- اضغط \square ثم اختر منها **3.Graph Type** ومنها اختر **1:Function**، ثم أدخل الدالة $f(x) = x$ ثم اضغط **enter**.
- لإظهار الشكل كاملاً اضغط \square ومنها **4.Window/Zoom** واختر منها **6.Zoom - Quadrant 1**.

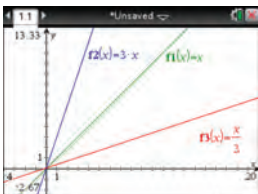


نشاط 2 تمثيل المعكوس بيانيًا باستعمال صيغة الدالة

مثل الدالة $f(x) = 3x$ ودالتها العكسية $g(x) = \frac{x}{3}$ بيانيًا. يمكن استعمال الآلة في تمثيل الدالة ومعكوسها بالضغط على المفاتيح:

\square **New Document** \square **2:Add Graphs**

ثم كتابة الدوال $f_1(x) = x$ ، $f_2(x) = 3x$ ، $f_3(x) = \frac{x}{3}$ كما مرّ سابقًا، فيظهر التمثيل المطلوب.



تمارين: مثل بيانيًا كلاً من الدالة $f(x)$ ، ومعكوسها $g(x)$ ، و $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي: **6-1** انظر ملحق الإجابات.

(1) $f(x) = 5x$ (2) $f(x) = x - 3$ (3) $f(x) = 2x + 1$

(4) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ (5) $f(x) = x^2$ (6) $f(x) = x^2 - 3$

(7) ما العلاقة بين التمثيل البياني لدالة $f(x)$ والتمثيل البياني لمعكوسها؟ **منحنى الدالة ومنحنى دالتها العكسية متمائلان حول المستقيم $y = x$.**

(8) **خمن:** ماذا يساوي $[(f \circ g)(x)]$ لأي دالة $f(x)$ ودالتها العكسية $g(x)$ ؟ **$(f \circ g)(x) = x$**

192 الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

التوسع في المفهوم

اسأل:

- إذا كان لديك مجموعة أزواج مرتبة تمثل دالة، فكيف يمكنك إيجاد معكوس هذه الدالة؟ **تبدل قيم x مع قيم y في كل زوج مرتب.**

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب في كل تمرين توقع ما إذا كان التمثيل البياني للدالة يمر بنقطة الأصل أم لا. ثم اطلب إليهم توقع ما إذا كان التمثيل البياني لدالتها العكسية يمر بنقطة الأصل أم لا، ثم اسألهم: متى يمر التمثيل البياني للدالة بنقطة الأصل؟

إذا كانت الدالة على الصورة $f(x) = ax^n$ فإن تمثيلها البياني يمر بنقطة الأصل، وإذا مر التمثيل البياني لدالة بنقطة الأصل فإن التمثيل البياني لدالتها العكسية يمر بنقطة الأصل أيضًا.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 4

دون دون المتوسط **ضمن** ضمن المتوسط **فوق** فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم - تنمة (12) دون

الاسم: التاريخ: **4-2** **تدريبات إعادة التعليم**
العلاقات والدوال العكسية

التحقق من الدالة العكسية
الدوال العكسية
تكون كل من الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ عكسية للأخرى إذا وقط إذا كان:
 $[g \circ f](x) = x$ و $[f \circ g](x) = x$

مثال 1:
حدد إن كانت $f(x) = 2x - 7$ و $g(x) = \frac{1}{2}(x + 7)$ كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا.
 $[g \circ f](x) = g[f(x)]$
 $= g(2x - 7)$
 $= \frac{1}{2}(2x - 7 + 7)$
 $= x$
 $[f \circ g](x) = f[g(x)]$
 $= f[\frac{1}{2}(x + 7)]$
 $= 2[\frac{1}{2}(x + 7)] - 7$
 $= x + 7 - 7$
 $= x$

مثال 2:
حدد إن كانت $f(x) = 4x + \frac{1}{3}$ و $g(x) = \frac{1}{4}x - 3$ كل منهما دالة عكسية للأخرى أم لا.
 $[g \circ f](x) = g[f(x)]$
 $= g(4x + \frac{1}{3})$
 $= \frac{1}{4}(4x + \frac{1}{3}) - 3$
 $= x + \frac{1}{12} - 3$
 $= x - 11\frac{1}{12}$
وبما أن $f \circ g(x) \neq x$ فإن الدالتين ليست كل منهما عكسية للأخرى.

تقاربن:
حدد إن كانت كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا في زوج مما يأتي. اكتب (نعم) أو (لا).
(1) $f(x) = \frac{1}{2}x - 10$ (ب) $f(x) = \frac{1}{4}x + 5$ (2) $f(x) = 3x - 1$
 $g(x) = 2x + \frac{1}{10}$ نعم $g(x) = 4x - 20$ نعم $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$
(4) $f(x) = -2x + 3$ (6) $f(x) = 8x - 12$ (5) $f(x) = 2x + 5$
 $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ نعم $g(x) = \frac{1}{8}x + 12$ لا $g(x) = 5x + 2$
(7) $f(x) = 4x - \frac{1}{2}$
 $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$
(10) $f(x) = 9 + \frac{3}{2}x$ (12) $f(x) = 4x - \frac{4}{5}$
 $g(x) = \frac{2}{3}x - 6$ نعم $g(x) = \frac{x}{4} + \frac{5}{5}$ نعم $g(x) = 20 - 2x$

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجبرية

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

الاسم: التاريخ: **4-2** **تدريبات إعادة التعليم**
العلاقات والدوال العكسية

إيجاد الدالة العكسية
الملاقات العكسية
خصائص الدوال العكسية
إذا كان $f^{-1}(b) = a$ فإن $f(a) = b$

مثال:
أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$. ثم مثل $f(x)$ ودالتها العكسية بيانياً.
الخطوة 1: نجح لإيجاد $f^{-1}(x)$ من $f(x) = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$ الدالة الأصلية.
 $f(x) = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$
الخطوة 2: بدل y بـ x مع بعضهما
 $x = \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}$
الخطوة 3: حل المعادلة السابقة في y .
 $x = \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}$
 $5x = 2y - 1$
 $5x + 1 = 2y$
 $y = \frac{1}{2}(5x + 1)$
إذن، الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$ هي $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(5x + 1)$

تقاربن:
أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي، ثم ارسم منحنى الدالة، ومنحنى الدالة العكسية.
(1) $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$ $f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$
(2) $f(x) = 2x - 3$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
(3) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ $f^{-1}(x) = 4x + 8$

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجبرية

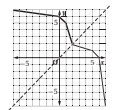
دون

دون

تدريبات حل المسألة (14) ضمن

الاسم: التاريخ: **4-2** **تدريبات حل المسألة**
العلاقات والدوال العكسية

(1) الحجم: يريد عامر أن يصنع وعاء كروي الشكل يتسع لنصف متر مكعب من الماء، ويعلم أن حجمه V بدلالة نصف قطره r يعطى بالدالة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. ولكنه يريد معرفة r بدلالة V . أوجد هذه الدالة العكسية.
 $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$



(2) تقاربن رياضية: وضع سالم برنامجاً لحاسبة التاربن الرياضية بانتظام، ولتحقيق أكبر فائدة ممكنة، حسب سالم أقصى معدل لعدد ضربات القلب مستخدماً الدالة $f(x) = 0.85(220 - x)$ ، حيث x تمثل عمره. أوجد الدالة العكسية للدالة $f(x)$.
 $f^{-1}(x) = 220 - \frac{x}{0.85}$

(3) سواريخ: ارتفاع صاروخ بالإنقاذ كدالة في الزمن t (بالثانية) حيث $t \geq 0$ يعطى بالدالة $f(t) = 49t^2$. أوجد الدالة العكسية للدالة f وحدد الزمن عندما كان الارتفاع 10 و 1000 قدم. قرب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الثانية.
 $f^{-1}(t) = \frac{\sqrt{t}}{7}$
عند $t = 0.45s$ ، $10ft$ وعند $t = 1.43s$ ، $1000ft$ وعند $t = 4.52s$ ، $1000ft$

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجبرية

تدريبات المهارات (13) دون

الاسم: التاريخ: **4-2** **تدريبات المهارات**
العلاقات والدوال العكسية

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي:
(1) $\{(3, 1), (4, -3), (8, -3)\}$
 $\{(1, -7), (5, 0), (-1, 5)\}$
(2) $\{(-7, 1), (0, 5), (5, -1)\}$
 $\{(1, -7), (5, 0), (-1, 5)\}$
(3) $\{(0, -9), (5, -3), (6, 6), (8, -3)\}$
 $\{(-9, 0), (-3, 5), (6, 6), (-3, 8)\}$
(4) $\{(-10, -2), (-7, 6), (-4, -2), (-4, 0)\}$
 $\{(-2, -10), (6, -7), (-2, -4), (0, -4)\}$
(5) $\{(-4, 1), (-4, 3), (0, -8), (8, -9)\}$
 $\{(-4, 1), (-4, 3), (-8, 0), (-9, 8)\}$
 $\{(-4, 12), (0, 7), (9, -1), (10, -5)\}$
 $\{(12, -4), (7, 0), (-1, 9), (-5, 10)\}$

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي، ثم مثل الدالتين الأصلية والعكسية بيانياً.
(7) $y = 4$
(8) $f(x) = 3x$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$
(9) $f(x) = x + 2$ $f^{-1}(x) = x - 2$
(10) $g(x) = 2x - 1$
(11) $h(x) = \frac{1}{2}x$ $h^{-1}(x) = 4x$
(12) $y = \frac{2}{3}x + 2$ $y = \frac{2}{3}x - 3$
(13) $f(x) = x - 1$
(14) $f(x) = 2x + 3$ $g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$
(15) $f(x) = 5x - 5$ $g(x) = \frac{1}{5}x + 1$
(16) $f(x) = 2x$ $g(x) = \frac{1}{2}x$
(17) $h(x) = 6x - 2$ $g(x) = \frac{1}{6}x + 3$
(18) $f(x) = 8x - 10$ $g(x) = \frac{1}{8}x + \frac{5}{4}$

حدد إن كانت كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا في كل زوج مما يأتي. اكتب (نعم) أو (لا).
(13) $f(x) = x - 1$
 $g(x) = 1 - x$
لا
(14) $f(x) = 2x + 3$
 $g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$
نعم
(15) $f(x) = 5x - 5$
 $g(x) = \frac{1}{5}x + 1$
نعم
(16) $f(x) = 2x$
 $g(x) = \frac{1}{2}x$
نعم
(17) $h(x) = 6x - 2$
 $g(x) = \frac{1}{6}x + 3$
لا
(18) $f(x) = 8x - 10$
 $g(x) = \frac{1}{8}x + \frac{5}{4}$
نعم

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجبرية

دون

دون



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 4

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

فوق

كتاب التمارين (25)

ضمن

التدريبات الإثرائية (15)

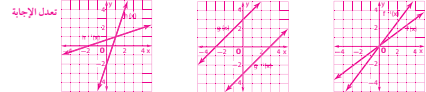
4-2 العلاقات والدوال العكسية

أوجد العلاقة العكسية لكل من العلاقات الآتية:

- 1) $\{(0, 3), (4, 2), (5, -6)\}$ 2) $\{(-5, 1), (-5, -1), (-5, 8)\}$
 3) $\{(3, 0), (2, 4), (-6, 5)\}$ 4) $\{(8, -2), (10, 5), (12, 6), (14, 7)\}$
 5) $\{(-3, -7), (0, -1), (5, 9), (7, 13)\}$ 6) $\{(-2, 8), (5, 10), (6, 12), (7, 14)\}$
 7) $\{(-3, 9), (-2, 4), (0, 0), (1, 1)\}$ 8) $\{(-5, -4), (1, 2), (3, 4), (7, 8)\}$
 9) $\{(9, -3), (4, -2), (0, 0), (1, 1)\}$ 10) $\{(-4, -5), (2, 1), (4, 3), (8, 7)\}$

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

7) $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ 8) $g(x) = 3 + x$ 9) $g^{-1}(x) = x - 3$ 10) $h(x) = x^2 - 1$ 11) $h^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$



في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى، أم لا؟

10) $f(x) = x + 6$ نعم 11) $f(x) = -4x + 1$ نعم 12) $g(x) = 13x - 13$ لا
 13) $g(x) = x - 6$ نعم 14) $f(x) = x^2 + 2$ نعم 15) $g(x) = 2x^2 - 8$ لا
 16) $h(x) = \frac{1}{13}x - 1$ نعم 17) $g(x) = \frac{1}{4}(1 - x)$ نعم 18) $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$ لا

- 16) هيام: تمثل النقاط (63, 121), (71, 180), (67, 140), (65, 108), (72, 165) الوزن بالكيلو كجم كدالة بدلالة الطول بالبرصة لخمسة طلاب. أوجد معكوس نطاق لوزن الطلاب مثل طولهم كدالة بدلالة وزنهم. (121, 63), (180, 71), (140, 67), (108, 65), (165, 72)
- 17) تجديد البناء: يستبدل خالد أرضية مطبخ بيته الذي يمداه 18 ft, 15 ft. فإنا تكلفت الباردة المربعة من الأرضية الجديدة 17.99 ريالاً، وكانت الصيغة $f(x) = 9x^2$ تستخدم لتحويل الباردة المربعة إلى أقدام مربعة.
- أ) أوجد $f^{-1}(x)$ ، وما أهمية $f^{-1}(x)$ لخالد؟ $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x}}{3}$ $f^{-1}(x)$ يمكن لخالد تحويل مساحة مطبخ بيته من الأقدام المربعة إلى الباردة المربعة باستخدام $f^{-1}(x)$ ، مما يسهل عليه حساب تكلفة أرضية المطبخ.
- ب) ما تكلفة الأرضية الجديدة؟ 540 ريالاً تقريباً.

25

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-2 التدريبات الإثرائية

قراءة في الجبر

- كلمة زمرة لها معنى خاص في الرياضيات، والعبارات المرفقة التالية توضح فكرة الزمرة، وهي مثال منع للزمرة أيضاً.
- 1) إن أي مجموعة من العناصر مع عملية ثنائية عليها تشكل زمرة إذا تحققت الشروط الأربعة الآتية: المجموعة مغلقة تحت تأثير العملية، والعملية تجميعية، ويوجد في المجموعة عنصر محايد، وكل عنصر في المجموعة له نظير في المجموعة نفسها.
- 2) والدوال الست التالية مع عملية تركيب الدوال تشكل زمرة:
- 3) هذه الزمرة مثال للزمرة غير التبادلية. فمثلًا $f \circ g \neq g \circ f$ بينما $f \circ f = f$.
- 4) يمكن تجريب بعض الحالات للتحقق من أن f عنصر محايد لهذه الزمرة.
- 5) كل دالة هي دالة عكسية لنفسها باستثناء الدالتين f و g اللتين كل منهما دالة عكسية للأخرى.

أجب عن كل من الأسئلة الآتية:

- 1) اشرح المقصود بالقول "مجموعة مغلقة تحت تأثير عملية". هل مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة مغلقة تحت تأثير **إجراء الضرب على أي عنصرين في المجموعة ينتج عنه عنصر في المجموعة نفسها**، لا، 3 و 4 أعداد صحيحة موجبة، في حين 3-4 ليس موجبا.
- 2) الطرح عملية غير إيدالية على مجموعة الأعداد الصحيحة. اكتب تعريفاً من عندك للعملية غير الإيدالية. **تغيير مكاني عددين بالنسبة لعملية تغير الناتج.**
- 3) ما العنصر المحايد لعملية الضرب على الأعداد الصحيحة؟ برر إجابتك.
- 1: لأنه لكل عدد صحيح a يكون $1 \cdot a = a$.
- 4) اشرح كيف ترتبط العبارة الآتية مع العبارة رقم (5) السابقة.
- $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{1-x+1}{x}} = \frac{1}{\frac{1-x}{x}} = x = f(x)$
- هذا يبين أن f نظير لـ f .

المحصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

15

المصف: الثاني الثانوي

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 4-3

تبسيط عبارات تحوي جذورًا تربيعية.

الدرس 4-3

تمثيل دوال الجذور التربيعية بيانيًا وتحليلها.

تمثيل متباينات الجذور التربيعية بيانيًا

ما بعد الدرس 4-3

إيجاد حلول معادلات تتضمن جذورًا تربيعية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
واسأل:

- ما المقصود بالزمن الدوري للبندول؟ هو
- الزمن اللازم ليتم البندول دورة كاملة.
- صف تغير الزمن الدوري للبندول بتغير طولهِ. يزداد الزمن الدوري للبندول بزيادة طولهِ.



لماذا؟

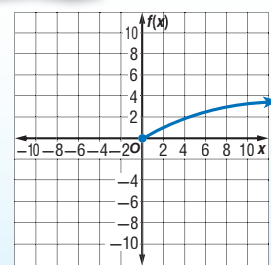
يُمثل الزمن الدوري للبندول بدالة الجذر التربيعي: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ، حيث T الزمن بالثواني، L طول البندول بالأقدام، g تسارع السقوط الحر، الذي يساوي 32 قدمًا لكل ثانية مربعة.

دوال الجذر التربيعي: إذا احتوت دالة على الجذر التربيعي لمتغير، تُسمى دالة الجذر التربيعي. وهي نوع من أنواع الدالة الجذرية.

أضف إلى
مطوبتك

الدالة الرئيسية (الأم) لدوال الجذر التربيعي

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسية (الأم): $f(x) = \sqrt{x}$ المجال: $\{x | x \geq 0\}$ المدى: $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$ المقطع والمقطع: $x = 0, f(x) = 0$ غير معرفّة عندما: $x < 0$ سلوك الدالة عند طرفيها: $x \rightarrow 0, f(x) \rightarrow 0$ $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$

مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرفّة.

مثال 1

تعيين المجال والمدى

عين كلاً من المجال والمدى للدالة: $f(x) = \sqrt{x+4}$

مجال دالة الجذر التربيعي يشمل فقط قيمًا يكون ما تحت الجذر عندها غير سالب.

اكتب المتباينة $x+4 \geq 0$ اطرح 4 من الطرفين $x \geq -4$ وبالتالي المجال هو: $\{x | x \geq -4\}$ 1A المجال $\{x | x \geq 3\}$; المدى $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$ 1B المجال $\{x | x \geq -6\}$; المدى $\{f(x) | f(x) \geq 2\}$

عَيّن المجال والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:

$$f(x) = \sqrt{x+6} + 2 \quad (1B)$$

$$f(x) = \sqrt{x-3} \quad (1A)$$

تحقق من فهمك

مصادر الدرس 4-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم، ص (197)	• تنوع التعليم، ص (197, 198)	• تنوع التعليم، ص (198)
كتاب التمارين	• ص (26)	• ص (26)	• ص (26)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

يمكنك تطبيق التحويلات على التمثيل البياني للدالة الرئيسية \sqrt{x} للحصول على التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي.

مفهوم أساسي **تحويلات دوال الجذر التربيعي** **أضف إلى مطويتك**

$f(x) = a\sqrt{x-h} + k$

إزاحة رأسية : k	إزاحة أفقية : h
إزاحة بمقدار $ k $ وحدة إلى الأعلى، إذا كانت k موجبة. إزاحة بمقدار $ k $ وحدة إلى الأسفل، إذا كانت k سالبة. المدى: $\{f(x) \mid f(x) \geq k\}$ إذا كانت a موجبة. $\{f(x) \mid f(x) \leq k\}$ إذا كانت a سالبة.	إزاحة بمقدار $ h $ وحدة يميناً، إذا كانت h موجبة. إزاحة بمقدار $ h $ وحدة يساراً، إذا كانت h سالبة. المجال هو $\{x \mid x \geq h\}$.

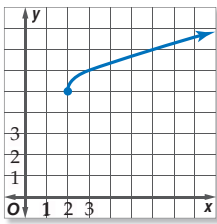
a : الشكل والاتجاه

- إذا كانت $a < 0$ ، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x .
- إذا كانت $|a| > 1$ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسياً (يتمدد في اتجاه المحور y ، حيث تصبح إحداثيات النقطة (x, y) هي (x, ay)).
- إذا كانت $0 < |a| < 1$ ، فإن التمثيل البياني يضيق رأسياً (يتقلص في اتجاه المحور y ، حيث تصبح إحداثيات النقطة (x, y) هي (x, ay)).

مثال 2 تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانياً

مثل بيانياً كل دالة مما يأتي، وحدد مجالها ومداهما:

(a) $y = \sqrt{x-2} + 5$



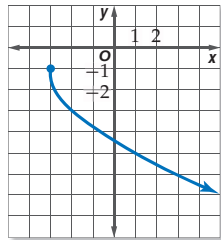
x	y
2	5
3	6
4	6.4
5	6.7
6	7
7	7.2
8	7.4

القيمة الصغرى للدالة عند $(h, k) = (2, 5)$. اعمل جدولاً من قيم x ، حيث $x \geq 2$ ، ومثل الدالة بيانياً. تلاحظ أن التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x-2} + 5$ هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ مع إزاحة وحدتين إلى اليمين، و5 وحدات إلى أعلى. لاحظ سلوك الدالة عند الأطراف، فكلما زادت x ، زادت y . المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$ ، والمدى هو $\{y \mid y \geq 5\}$.

(b) $y = -2\sqrt{x+3} - 1$

القيمة الصغرى للمجال عند $h = -3$. اعمل جدولاً من قيم x ، حيث $x \geq -3$ ، مثل الدالة بيانياً. بما أن a سالبة، فإن التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ مع الانعكاس حول المستقيم $y = 0$. وإزاحة 3 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل، وبما أن $|a| > 1$ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسياً.

المجال هو $\{x \mid x \geq -3\}$
المدى هو $\{y \mid y \leq -1\}$



x	y
-3	-1
-2	-3.8
-1	-4.5
0	-5
1	-5.5
2	-5.9

(2A, 2B) انظر الهامش.

تحقق من فهمك

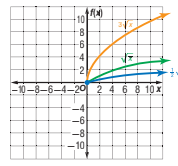
مثل بيانياً كل دالة مما يلي، وحدد مجالها ومداهما:

(2B) $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x-5} + 3$

(2A) $f(x) = 2\sqrt{x+4}$

إرشادات للدراسة

تحويلات دوال الجذر التربيعي



الدالة الرئيسية $f(x) = \sqrt{x}$
لاحظ أن منحنى $f(x) = 3\sqrt{x}$ يتسع رأسياً؛ لأن $|a| = |3| > 1$ بينما منحنى $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ يضيق رأسياً؛ لأن $|a| = |\frac{1}{2}| < 1$

إرشادات للدراسة

المجال والمدى

حدود المجال والمدى تمثل إحداثيات نقطة بدء منحنى دالة الجذر التربيعي.

قراءة الرياضيات

الدوال الأسية

دوال الجذر التربيعي هي دوال أسية أيضاً. فدالة الجذر التربيعي هي دالة أسية، أسها $\frac{1}{2}$.

دوال الجذر التربيعي

مثال 1 يبين طريقة إيجاد مجال دالة جذر تربيعي ومداهما.

مثال 2 يبين طريقة تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانياً.

مثال 3 يبين طريقة حل مسألة من واقع الحياة عن طريق تمثيل دالة جذر تربيعي بيانياً، والاعتماد على هذا التمثيل في حل المسألة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 عيّن كلاً من المجال والمدى للدالة

$f(x) = \sqrt{x-2}$

المجال = $\{x \mid x \geq 2\}$

المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

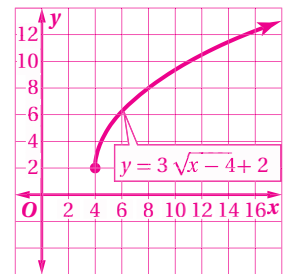
2 مثل بيانياً كل دالة مما يأتي، وحدد مجالها ومداهما:

(a) $y = 3\sqrt{x-4} + 2$

(b) $y = -\sqrt{x+5} - 6$

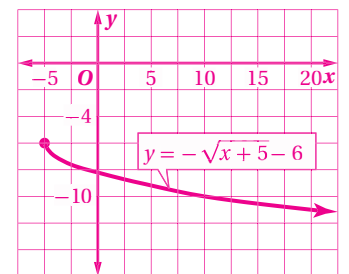
(a) المجال = $\{x \mid x \geq 4\}$

المدى = $\{y \mid y \geq 2\}$



(b) المجال = $\{x \mid x \geq -5\}$

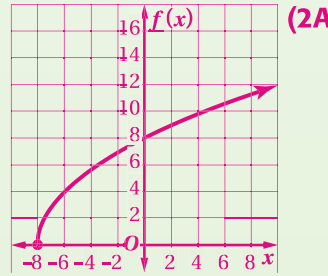
المدى = $\{y \mid y \leq -6\}$



إجابات (تحقق من فهمك):



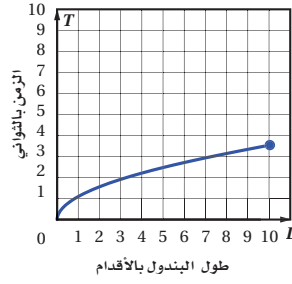
المجال = $\{x \mid x \geq 5\}$
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq 3\}$



المجال = $\{x \mid x \geq -4\}$
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

بالرجوع إلى فقرة لماذا؟ بداية هذا الدرس، يمكن تحديد الزمن T بالثواني باستعمال الدالة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ حيث تمثل L طول البندول بالأقدام.

(a) مثل هذه الدالة بيانيًا في الفترة $0 \leq L \leq 10$.



L	T
0	0
1	1.11
4	2.22
6	2.72
8	3.14
10	3.51

(b) ما الزمن الدوري إذا كان طول البندول 8 أقدام؟

بناءً على التمثيل البياني والجدول فإن الزمن الدوري يكون 3.14 ثوانٍ تقريبًا.

تحقق من فهمك

(3) الصوت: يمكن تحديد تردد اهتزازات وتر مشدود باستعمال الدالة: $F = 200\sqrt{T}$ ، حيث F تمثل عدد الاهتزازات في الثانية، T كتلة ثقل قوة الشد مقيسة بالرطل. مثل هذه الدالة بيانيًا في الفترة $0 \leq T \leq 10$ ، ثم أوجد التردد عندما تكون قوة الشد 3 أرطال. انظر ملحق الإجابات.

متباينات الجذر التربيعي: متباينة الجذر التربيعي هي متباينة تحتوي الجذر التربيعي. ويمكن تمثيلها بيانيًا تمامًا مثل طريقة تمثيل المتباينات الأخرى.

إرشادات حل المسألة

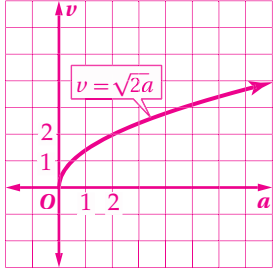
عمل جدول يعد عمل جدول طريقة جيدة لترتيب الأزواج المرتبة؛ لدراسة سلوك التمثيل البياني للدالة.

مثال إضافي

3

فيزياء: عندما يدور جسم في مسار دائري نصف قطره 2m بسرعة v متر لكل ثانية، فإن تسارعه المركزي a بالأمتار لكل ثانية مربعة يكون في اتجاه مركز الدائرة، ويُعبّر عن العلاقة بين v و a للجسم بالدالة: $v = \sqrt{2a}$

(a) مثل هذه الدالة بيانيًا في الفترة $a \geq 0$:



(b) أوجد التسارع المركزي لجسم يدور في مسار دائري بسرعة 4 أمتار لكل ثانية. 8 m/s^2

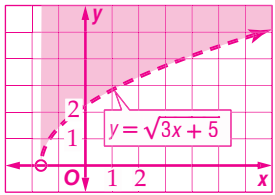
متباينات الجذر التربيعي

مثال 4: يبيّن طريقة تمثيل متباينة الجذر التربيعي بيانيًا.

مثال إضافي

4

مثل المتباينة $y > \sqrt{3x+5}$ بيانيًا:



مثال 4

تمثيل متباينة الجذر التربيعي بيانيًا

مثل المتباينة $y < \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًا.

مثل الحد $y = \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًا.

المجال هو $\{x \mid x \geq 4\}$. وبما أن المتباينة تحوي « y أقل من»، فإن التمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد، وضمن المجال.

تحقق: اختر نقطة في المنطقة المظللة، وتأكد أنها تحقق المتباينة.

$$\text{اختبر } (7, -5): -5 \geq \sqrt{7-4} - 6$$

$$-5 \geq \sqrt{3} - 6$$

$$\checkmark -5 < -4.27$$

تحقق من فهمك

مثل كلاً من المتباينتين الآتيتين بيانيًا: (4A, 4B) انظر ملحق الإجابات

$$f(x) < -\sqrt{x+2} - 4 \quad (4B)$$

$$f(x) \geq \sqrt{2x+1} \quad (4A)$$

التعليم باستعمال التقنيات

عرض تقديمي اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات لتجهيز عرض تقديمي يبيّنون من خلاله طريقة تمثيل دالة جذر تربيعي بيانيًا مضمّنين عرضهم توضيحًا لطريقة تحديدهم لمجال الدالة. ثم اطلب إليهم تبادل العروض فيما بينهم.

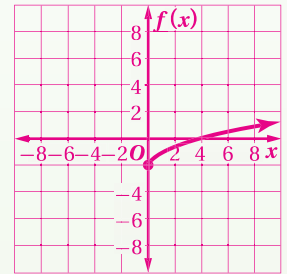
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-12 للتأكد من فهم الطلاب.

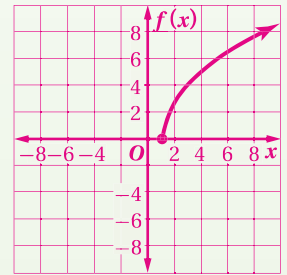
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات :

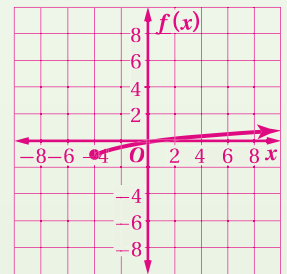
(4) المجال $\{x | x \geq 0\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \geq -2\}$



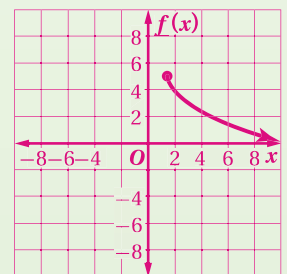
(5) المجال $\{x | x \geq 1\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$



(6) المجال $\{x | x \geq -4\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \geq -1\}$



(7) المجال $\{x | x \geq \frac{5}{3}\}$
المدى $\{f(x) | f(x) \leq 5\}$



عَيِّن المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي: (1) المجال $\{x | x \geq 0\}$ ؛ المدى $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$

(1) $f(x) = \sqrt{4x}$ (2) $f(x) = \sqrt{x-5}$ (3) $f(x) = \sqrt{x+8} - 2$

مثال 1
(2) المجال $\{x | x \geq 5\}$ ؛
المدى $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$

مثال 2
(3) المجال $\{x | x \geq -8\}$ ؛
المدى $\{f(x) | f(x) \geq -2\}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومداهما: (4-7) انظر الهامش.

(4) $f(x) = \sqrt{x} - 2$ (5) $f(x) = 3\sqrt{x-1}$
(6) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 1$ (7) $f(x) = -\sqrt{3x-5} + 5$

مثال 3 (8) **محيطات:** يمكن تمثيل سرعة موجات تسونامي باستعمال المعادلة: $v = 356\sqrt{d}$ ، حيث تمثل v السرعة بالكيلومترات لكل ساعة، و d متوسط عمق الماء بالكيلومترات. إذا كانت سرعة الموجة 145 km/h ، فما متوسط عمق الماء؟ قَرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الكيلومتر. **0.17 km**

مثال 4 مثّل كل متباينة مما يأتي بيانيًا: (9-12) انظر ملحق الإجابات.

(9) $f(x) \geq \sqrt{x} + 4$ (10) $f(x) \leq \sqrt{x-6} + 2$
(11) $f(x) < -2\sqrt{x+3}$ (12) $f(x) > \sqrt{2x-1} - 3$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 عَيِّن المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

(13) $f(x) = -\sqrt{2x} + 2$ (14) $f(x) = \sqrt{x} - 6$ (15) $f(x) = 4\sqrt{x-2} - 8$

مثال 2 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومداهما: (16-21) انظر ملحق الإجابات.

(16) $f(x) = \sqrt{6x}$ (17) $f(x) = -\sqrt{5x}$ (18) $f(x) = \sqrt{x+1}$
(19) $f(x) = \sqrt{x-4} - 10$ (20) $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x+12} + 3$ (21) $f(x) = -3\sqrt{x+7} + 9$

مثال 3 (22) **القفز بالمظلات:** إذا كان الزمن التقريبي t بالثواني، اللازم لسقوط جسم من ارتفاع d بالأقدام يعطى بالعلاقة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$ ، فإذا قفز مظلي قبل 11 ثانية من فتح المظلة، فكم قدمًا هبط المظلي خلال هذا الزمن؟

1936 ft

(23) **العربة الدوّارة:** إذا كانت سرعة العربة الدوّارة في مدينة الألعاب في أثناء نزولها من أعلى قمة تعطى بالعلاقة: $V = \sqrt{v^2 + 64h}$ ، حيث v السرعة الابتدائية بالأقدام لكل ثانية، و h الارتفاع الرأسي بالأقدام. أراد مصمم اللعبة أن تكون سرعة العربة عند القمة 90 ft/s عندما تصل أدنى مستوى لها.

$90 = \sqrt{100 + 64h}$

(a) إذا كانت السرعة الابتدائية للعربة عند القمة هي 10 ft/s ، فاكتب معادلة تمثل ذلك الموقف.
(b) حتى يتحقق ما يريده المصمم، كم يجب أن يكون ارتفاع القمة، إذا كانت سرعة العربة الابتدائية عند القمة 10 ft/s ؟ **125 ft**

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
13-29 ، 37-49	دون المتوسط
13-29 ، 30-35 ، 37-49	ضمن المتوسط
30-49	فوق المتوسط

مثل كل متباينة مما يأتي بيانياً: (24-29) انظر ملحق الإجابات

$$y > \sqrt{x+6} \quad (25) \qquad y < \sqrt{x-5} \quad (24)$$

$$y > 2\sqrt{x+7} - 5 \quad (27) \qquad y \geq -4\sqrt{x+3} \quad (26)$$

$$y \leq 6 - 3\sqrt{x-4} \quad (29) \qquad y \geq 4\sqrt{x-2} - 12 \quad (28)$$

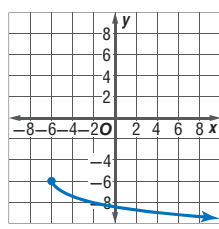
30) قيادة: تستطيع إدارة المرور بعد كل حادث سير، تحديد سرعة السيارة قبل ضغط السائق على الكوابح (الفرامل) وذلك باستعمال المعادلة: $v = \sqrt{30fd}$ ، حيث v تمثل السرعة بالأميال لكل ساعة، f معامل الاحتكاك، d طول أثر احتكاك العجلات بالأقدام. بما أن معامل الاحتكاك يعتمد على حالة الطريق، افترض $f = 0.6$ أن

(a) أوجد سرعة سيارة طول أثر احتكاك عجلاتها بالأرض 25ft. 21.2 mil/h تقريباً

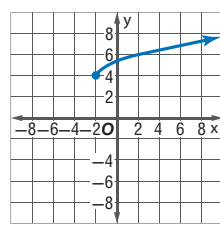
(b) إذا كانت سيارتك تسير بسرعة 35 mil/h، فكم قدماً تحتاج لتقف وقوفاً تاماً؟ 68 ft تقريباً

(c) إذا تضاعفت سرعة سيارة مرة واحدة، فهل يتضاعف طول أثر احتكاك العجلات بالأرض عند الوقوف المفاجئ مرة واحدة؟ وضح إجابتك.

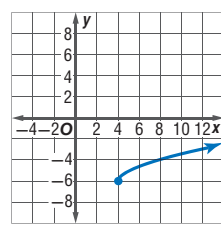
لا؛ لأن الدالة $v = \sqrt{30fd}$ ليست خطية، فطول أثر احتكاك العجلات سيكون 4 أمثال الطول الأصلي. اكتب دالة الجذر التربيعي لكل تمثيل بياني مما يأتي:



(33)



(32)



(31)

(34) عيّن المجال والمدى للدالة: $f(x) = -\sqrt{x-6} + 5$ ، ثم مثلها بيانياً. انظر الهامش.

35) تمثيلات متعددة: في هذا السؤال ستستعمل الدوال الثلاث الآتية لتكتشف التحويّلات الهندسية لدوال الجذر التربيعي. انظر ملحق الإجابات.

$$f(x) = 4\sqrt{x-6} + 3$$

$$g(x) = \sqrt{16x+1} - 6$$

$$h(x) = \sqrt{x+3} + 2$$

(a) بيانياً: مثل بيانياً جميع الدوال السابقة على المستوى الإحداثي نفسه.

(b) تحليلاً: ما الانسحاب الذي أجرته على التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) لتمثل بيانياً كلاً من الدوال السابقة؟

(c) تحليلاً: ما الدوال التي أظهر تمثيلها البياني اتساعاً أو ضيقاً رأسياً في التمثيل البياني للدالة الرئيسة؟ فسر إجابتك.

(d) نفضياً: يبدو أن الدالتين المتسعتين رأسياً اتسعتا بالمقدار نفسه. فكيف يكون ذلك ممكناً؟

(e) جدولياً: اعمل جدولاً لمعدلات التغير في الدوال الثلاث بين 8 و12 وقارنها بمعدلات التغير بين 16 و12، وبناءً على ذلك، ما التعميم الذي يمكنك التوصل إليه فيما يخص معدل تغير دوال الجذر التربيعي؟

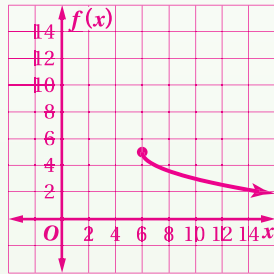
تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في السؤال 35، التمثيل البياني وجدول القيم، والتحليل لبيان أثر التحويّلات الهندسية في دوال الجذور التربيعية.

إجابة:

(34) المجال $\{x \mid x \geq 6\}$ ،

المدى $\{f(x) \mid f(x) \leq 5\}$



الربط مع الحياة

توصلت دراسة إلى أن السبب الأول لحوادث السيارات بين أوساط الشباب يعود إلى إرسال رسائل نصية من هواتفهم في أثناء القيادة.

$$y = \sqrt{x-4} - 6 \quad (31)$$

$$y = \sqrt{x+2} + 4 \quad (32)$$

$$y = -\sqrt{x+6} - 6 \quad (33)$$

دون ضمن

تنوع التعليم

واجه بعض الطلاب صعوبة في تمثيل متباينات الجذر التربيعي بيانياً،

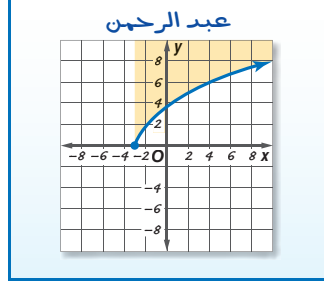
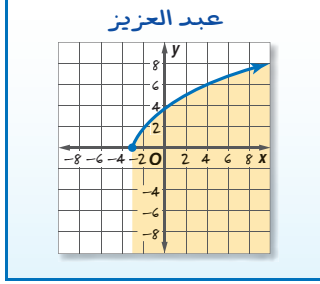
إذا

بتوجيههم للعمل في مجموعات ثنائية أو صغيرة لمناقشة طريقة تمثيل متباينات الجذر التربيعي بيانياً كما هو مطلوب في الأسئلة 24-29. كما ينبغي للطلاب مناقشة طريقة تحديد مجال المتباينة ومداهما وتحديد ما إذا كان الحد متصلًا أم متقطعًا، وتحديد منطقة الحل.

هضم

مسائل مهارات التفكير العليا

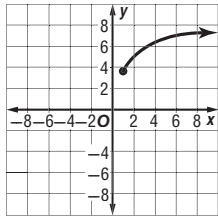
- 36 **تحذّر:** اكتب معادلة لدالة جذر تربيعي مجالها $\{x \mid x \geq -4\}$ ، ومداهما $\{y \mid y \leq 6\}$ ، وتمر بالنقطة (5, 3).
- 37 **تبرير:** ما قيم a الصحيحة الموجبة التي تجعل مجال ومدى الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}$ مجموعة الأعداد الحقيقية (R)؟ **كل الأعداد الفردية الموجبة**
- 38 **اكتب:** وضح لماذا لا تمثل $y = \pm\sqrt{x}$ دالة؟ **انظر الهامش.**
- 39 **اكتشف الخطأ:** مثل كل من عبد الرحمن وعبد العزيز المتباينة $y \leq \sqrt{5x+15}$. فأيهما إجابته صحيحة؟ برر إجابتك. **انظر الهامش**



تنبيه

اكتشف الخطأ في السؤال 39 يجب على الطلاب أن يلاحظوا أن التمثيل البياني غير صحيح عندما تظل المنطقة التي فوق الحد وتعتبر منطقة حل. يبين للطلاب أن يحددوا إذا كان هناك مساواة فإن الحد سيكون متصلًا، وإذا لم يكن هناك مساواة فإنه سيكون متقطعًا، ولا يكون ضمن منطقة الحل.

تدريب على اختبار



- 40 أي مما يأتي يكافئ العبارة $x \neq 0$, $\frac{-64x^6}{8x^3}$ D
- 41 يمثل الشكل المجاور التمثيل البياني لدالة جذر تربيعي. أي مما يأتي صحيح؟ D
- (I) المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية
 (II) الدالة هي $y = \sqrt{x} + 3.5$
 (III) المدى هو $\{y \mid y \geq 3.5\}$ تقريبًا

A فقط I فقط B II, III فقط C I, II, III فقط D III فقط

4 التقويم

تعلم لاحق سيقوم الطلاب في الدرس التالي بتبسيط عبارات جذرية واستعمال الحاسبة لتقريب قيم الجذور. لذا اطلب إليهم كتابة تصوراتهم عن ارتباط ما تعلموه في الدرس الحالي بالفكرة الرئيسة للدرس اللاحق.

مراجعة تراكمية

- في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى، أم لا؟ (الدرس: 2-4)
- 42 **نعم لأن** $f(x) = 2x$ **نعم لأن** $f(x) = 3x - 7$ **لا، لأن** $f(x) = x - \frac{133}{16}$ **44** $[f \circ g](x) = x - \frac{3x+2}{5}$ $[g \circ f](x) = x$ $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{16}$ $f(x) = \frac{5x-2}{3}$ $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$ $g(x) = \frac{1}{2}x$
- 45 **زمن:** إذا كانت الصيغة: $h = \frac{m}{60}$ تستعمل لتحويل الدقائق m إلى ساعات h ، والصيغة: $d = \frac{h}{24}$ تستعمل لتحويل الساعات h إلى أيام d ، فاكتب دالة يمكن استعمالها لتحويل الدقائق إلى أيام. (الدرس: 1-2) $[doh](m) = \frac{m}{1440}$
- حدد ما إذا كان كل عدد مما يأتي نسبيًا أو غير نسبي: (مهارة سابقة)
- 46 **عدد نسبي** 6.34 **47** 3.787887888... **عدد غير نسبي** 5.333... **48** **عدد نسبي** 1.25 **49** **عدد نسبي**

إجابات:

38 حتى تمثل المعادلة دالة، يجب أن يكون لكل قيمة من قيم المتغير x قيمة واحدة فقط للمتغير y تناظرها. إلا أن ذلك لا يتحقق في هذه المعادلة؛ إذ توجد لكل قيمة من قيم المتغير x قيمتان للمتغير y ، إحداهما موجبة، والأخرى سالبة، بالإضافة إلى كون التمثيل البياني للمعادلة لا يحقق اختبار الخط الرأسي.

39 إجابة عبد العزيز صحيحة؛ لأن عبد الرحمن ظلل المنطقة فوق المنحنى، وليست هي منطقة الحل.

تنوع التعليم

ضمن فوق

توسّع ما العلاقة بين التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x-3} - 5$ ، والتمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x}$ ؟ التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x-3} - 5$ هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x}$ بإزاحته 3 وحدات إلى اليمين و5 وحدات إلى أسفل.



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 4

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16) دون

الاسم: التاريخ:

4-3 تدريبات إعادة التعليم

دوال ومتباينات الجذر التربيعي

دوال الجذر التربيعي، الدالة التي تحتوي على الجذر التربيعي تسمى دالة الجذر التربيعي، وبها جمع القيم التي يكون عندها ما تحت الجذر موجباً أو صفراً.

مثل الدالة $y = \sqrt{3x-2}$ بيانياً، وأوجد مجالها ومدنها.

بما أن ما تحت الجذر التربيعي لا يكون سالباً، فإن مجال الدالة هو $3x-2 \geq 0$ ، ومنه تكون $x \geq \frac{2}{3}$ ، ومقطع المنحنى مع المحور x هو $\frac{2}{3}$ ، والمدى هو $y \geq 0$.

صنم جدولاً لبعض قيم x, y ، واستعمله في تمثيل الدالة.

x	y
2/3	0
1	1
2	2
3	√7

تصانيف:

مثل كل دالة بيانياً، وأوجد مجالها ومدنها.

1) $y = \sqrt{2x}$ المجال: $x \geq 0$ ، المدى: $y \geq 0$

2) $y = -3\sqrt{x}$ المجال: $x \geq 0$ ، المدى: $y \leq 0$

3) $y = -\sqrt{x}$ المجال: $x \geq 0$ ، المدى: $y \leq 0$

4) $y = 2\sqrt{x-3}$ المجال: $x \geq 3$ ، المدى: $y \geq 0$

5) $y = -\sqrt{2x-3}$ المجال: $x \geq \frac{3}{2}$ ، المدى: $y \leq 0$

6) $y = \sqrt{2x+5}$ المجال: $x \geq -\frac{5}{2}$ ، المدى: $y \geq 0$

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تدريبات إعادة التعليم - تزمة (17) دون

الاسم: التاريخ:

4-3 تدريبات إعادة التعليم

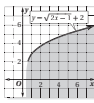
دوال ومتباينات الجذر التربيعي

متباينات الجذر التربيعي، المتباينة التي تحتوي الجذر التربيعي تسمى متباينة الجذر التربيعي. استعمل معلوماتك حول تمثيل دوال الجذر التربيعي، والمتباينات بيانياً، في تمثيل متباينات الجذر التربيعي.

مثل المتباينة $y \leq \sqrt{2x-1}+2$ بيانياً.

مثل المعادلة المرتبطة بالمتباينة: $y = \sqrt{2x-1}+2$

المنحنى متضمن في حل المتباينة كما هو في الشكل المجاور. يتضمن مجال الدالة القيم $x \geq \frac{1}{2}$ لذا يكون التمثيل البياني للمتباينة واقعاً على يمين المستقيم $x = \frac{1}{2}$.



1) $y < 2\sqrt{x}$

2) $y > \sqrt{x+3}$

3) $y < 3\sqrt{2x-1}$

4) $y < \sqrt{3x-4}$

5) $y > \sqrt{x+1}-4$

6) $y > 2\sqrt{2x-3}$

7) $y \geq \sqrt{3x+1}-2$

8) $y \leq \sqrt{4x-2}+1$

9) $y < 2\sqrt{2x-1}-4$

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تدريبات المهارات (18) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-3 تدريبات المهارات

دوال ومتباينات الجذر التربيعي

مثل كل دالة بيانياً، وأوجد مجالها ومدنها.

1) $y = \sqrt{2x}$ المجال: $x \geq 0$ ، المدى: $y \geq 0$

2) $y = -\sqrt{3x}$ المجال: $x \geq 0$ ، المدى: $y \leq 0$

3) $y = 2\sqrt{x}$ المجال: $x \geq 0$ ، المدى: $y \geq 0$

4) $y = \sqrt{x+3}$ المجال: $x \geq -3$ ، المدى: $y \geq 0$

5) $y = -\sqrt{2x-5}$ المجال: $x \geq 2.5$ ، المدى: $y \leq 0$

6) $y = \sqrt{x+4}-2$ المجال: $x \geq -4$ ، المدى: $y \geq -2$

7) $f(x) < \sqrt{4x}$

8) $f(x) \geq \sqrt{x+1}$

9) $f(x) \leq \sqrt{4x-3}$

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تدريبات حل المسألة (19) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-3 تدريبات حل المسألة

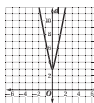
دوال ومتباينات الجذر التربيعي

1) مربعاً، يريد محمود إنشاء حديقة منزلية مربعة الشكل مساحتها 625 m^2 . ما أبعاد الحديقة؟
 $25 \text{ m} \times 25 \text{ m}$

2) البندول، الزمن الذي يستغرقه بندول للتحرك اهتزازة كاملة يُعطى بالعلاقة:
 $p = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

حيث L طول البندول بالأمتار، و g تسارع الجاذبية الأرضية ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$).

أوجد زمن اهتزازة بندول طوله 0.65 m ، قرب إجاباتك إلى أقرب جزء من عشرة.
 1.6 s



18.25 متر

3) ردة الفعل، يريد صالح وسعد قياس ردت فعل بعضها بعضاً. يُسقط صالح مطرقة من ارتفاع معين لتسقط بين أصمعي يد سعد (الأبهام والنسيان). ويجادل سعد الإنسان بالمطرقة قبل أن تسقط من يده. الزمن المنقطع للإسك بالمطرقة يُعطى بالعلاقة $\frac{v}{4} = t$ ، حيث t مقيسة بالأقدام. أكمل الجدول التالي. قرب إجاباتك لأقرب جزء من مئة.

الزمن ردة الفعل (بالثواني)	المسافة (بالياردة)
0.13	3
0.18	6
0.22	9
0.25	12

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 4

دون		ضمن		فوق	
دون		ضمن		فوق	
التدريبات الإثرائية (20)		كتاب التمارين (26)		دون	
<p>الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p>4-3 قراءة في الجبر</p> <p>إذا تشابهت مسألتان رياضيتان في البنية فيقال أنهما متشابهتان. واستعمال المثل إحدى الطرق للاستكشاف، وبرهنة النظريات الجديدة. والعبارة المرفقة التالية تبين المثل التالي لإثبات نظرية فيثاغورس.</p> <p>(1) افرض أن لديك مجسمًا رباعي السطح فيه ثلاثة أوجه متعامدة تنتهي في الرأس O.</p> <p>(2) افرض أنك تريد معرفة ارتباط المساحات C, B, A للأوجه الثلاثة المتعامدة بمساحة السطح الرابع (D) المقابل للرأس O.</p> <p>(3) من الطبيعي أن تتوقع صيغة مماثلة لنظرية فيثاغورس $a^2 + b^2 = c^2$، وتكون صحيحة للحالات المشابهة ذات البعدين.</p> <p>(4) لتكتشف الصيغة في حالة الأشكال ثلاثية الأبعاد، عليك أن تقترح صيغة، وتبرهن صحتها.</p> <p>(5) الاقتران التالي معقولان: $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$ و $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$</p> <p>بالرجوع إلى العبارات المرفقة السابقة، أجب عن الأسئلة التالية:</p> <p>(1) استعمل العبارة رقم 1 والشكل العلوي، اكتب تعريفًا من عندك للشكل رباعي السطح. شكل ثلاثي الأبعاد بأربعة أوجه.</p> <p>(2) استعمل العبارة رقم 2 والشكل العلوي، ما أطوال أضلاع كل سطح في الشكل رباعي السطح؟ $a, b, c ; a, q, r ; b, p, r ; c, p, q$</p> <p>(3) أعد كتابة العبارة رقم 1 لتناسب وضعًا مماثلًا ذا بعدين. مثلك أنه متعلقان متعامدان في الرأس C</p> <p>(4) بالرجوع إلى الشكل العلوي، اكتب عبارات للمساحات A و B و C المذكورة في العبارة رقم 2. $A = \frac{1}{2} pr, B = \frac{1}{2} pq, C = \frac{1}{2} rq$</p> <p>(5) اكتب عبارات للمتغيرات a و b و c بدلالة p و q و r، ولتكتشف حالة مماثلة ذات ثلاثة أبعاد، استعمل نظرية فيثاغورس للحصول على هذه العبارات. $a^2 = q^2 + r^2, b^2 = r^2 + p^2, c^2 = p^2 + q^2$</p> <p>(6) أي التزاوج في العبارة رقم 5 يبدو أكثر معقولة؟ برّر إجابتك. تابع تغييرات الثلاث.</p>		<p>4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي</p> <p>مثل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومدنها:</p> <p>(1) $y = \sqrt{5x}$ المجال = $\{x x \geq 0\}$ المدى = $\{y y \geq 0\}$</p> <p>(2) $y = -\sqrt{x} - 1$ المجال = $\{x x \geq 1\}$ المدى = $\{y y \leq 0\}$</p> <p>(3) $y = 2\sqrt{x+2}$ المجال = $\{x x \geq -2\}$ المدى = $\{y y \geq 0\}$</p> <p>(4) $y = \sqrt{3x-4}$ المجال = $\{x x \geq \frac{4}{3}\}$ المدى = $\{y y \geq 0\}$</p> <p>(5) $y = \sqrt{x+7} - 4$ المجال = $\{x x \geq -7\}$ المدى = $\{y y \geq -4\}$</p> <p>(6) $y = 1 - \sqrt{2x+3}$ المجال = $\{x x \geq -\frac{3}{2}\}$ المدى = $\{y y \leq 1\}$</p> <p>(7) $y = -\sqrt{6x}$ المجال = $\{x x \geq 0\}$ المدى = $\{y y \leq 0\}$</p> <p>(8) $y \leq \sqrt{x-5} + 3$ المجال = $\{x x \geq 5\}$ المدى = $\{y y \geq 3\}$</p> <p>(9) $y > -2\sqrt{3x+2}$ المجال = $\{x x \geq -\frac{2}{3}\}$ المدى = $\{y y < 0\}$</p> <p>مثل كل متباينة مما يأتي بيانيًا:</p> <p>(10) ألعاب: إذا كانت سرعة لعبة في مدينة الألعاب في أثناء جوبوطها من المرتفع تُعطى بالصيغة $v = \sqrt{17t^2 + 64t}$ حيث v السرعة الابتدائية، h الارتفاع الراسي بالأقدام، وكانت $v_1 = 8 \text{ ft/s}$, $v_2 = 70 \text{ ft/s}$، فأوجد h تقريبًا 75.6 ft</p>		<p>العلاقات والدوال العكسية والجذرية</p>	

1 التركيز

الترابط الراسي

ما قبل الدرس 4-4

التعامل مع دوال الجذور التربيعية.

الدرس 4-4

تبسيط عبارات جذرية.

استعمال الحاسبة لتقريب قيم الجذور.

ما بعد الدرس 4-4

إيجاد حلول معادلات تتضمن جذورًا

تربيعية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

• ما المتغير المستقل في المعادلة؟

عدد الدرجات الهوائية

• ما المتغير التابع الذي يمكن إيجاداه؟

عدد الحوادث

• هل تعتقد أن عدد الحوادث سوف يزيد أو

ينقص بازدياد عدد الدرجات الهوائية؟

عدد الحوادث يزداد بازدياد عدد

الدرجات الهوائية.



تبسيط الجذور: يعد إيجاد الجذر التربيعي لعدد عملية عكسية لتربيعه. فلإيجاد الجذر التربيعي للعدد a ، يجب أن تجد العدد الذي مربعه يساوي a . وبالمثل فإن العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد الجذر النوني للعدد.

القوى	العوامل	التعبير اللفظي	الجذور
$x^3 = 64$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$	4 هو الجذر التكعيبي للعدد 64	$\sqrt[3]{64} = 4$
$x^4 = 625$	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$	5 هو الجذر الرابع للعدد 625	$\sqrt[4]{625} = 5$
$x^5 = 32$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	2 هو الجذر الخامس للعدد 32	$\sqrt[5]{32} = 2$
$a^n = b$	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots \cdot a}_n = b$	a هو الجذر النوني للعدد b	$\sqrt[n]{b} = a$

يقترح هذا النموذج التعريف الآتي للجذر النوني.

أضف إلى
مطويتك

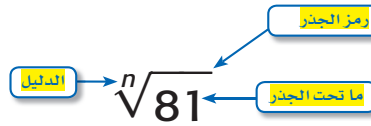
تعريف الجذر النوني

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين a, b ، ولأي عدد صحيح موجب n ، إذا كان $a^n = b$ ، فإن a هو جذر نوني للعدد b .

مثال: بما أن $(-3)^4 = 81$ ، فإن -3 هو جذر رابع للعدد 81.

يشير الرمز $\sqrt[n]{\quad}$ إلى الجذر النوني.



بعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي. فعلى سبيل المثال، العدد 64 له جذران تربيعيان هما: 8 و -8 ؛ لأن 8^2 و $(-8)^2$ كليهما يساوي 64. فعندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، ويكون n عددًا زوجيًا، فإن الجذر غير السالب يسمى الجذر الرئيس.

وفيما يأتي بعض الأمثلة على الجذر النوني:

$\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{25}$ يشير إلى الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$-\sqrt{25} = -5$ ، $-\sqrt{25}$ يشير إلى معكوس (النظير الجمعي) الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$\pm\sqrt{25} = \pm 5$ ، $\pm\sqrt{25}$ يشير إلى كلا الجذرين التربيعيين للعدد 25.

فيما سبق

درست دوال الجذر التربيعي.

والآن

- أبسط عبارات جذرية.
- استعمل الحاسبة لتقريب قيم الجذور.

المفردات

الجذر النوني

nth root

رمز الجذر

radical sign

الدليل

index

ما تحت الجذر

radicand

الجذر الرئيس

principal root

مصادر الدرس 4-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (201)	• تنويع التعليم ص (201, 203)	• تنويع التعليم ص (203)
كتاب التمارين	• ص (27)	• ص (27)	• ص (27)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

ليكن n عددًا صحيحًا أكبر من 1، و a عددًا حقيقيًا.

n عدد فردي	n عدد زوجي	a
هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب: $\sqrt[n]{a}$.	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد: $\pm\sqrt[n]{a}$ ؛ الجذر الموجب هو الجذر الرئيس	$a > 0$
ليس هناك جذور حقيقية موجبة. وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد: $\sqrt[n]{a}$	ليس هناك جذور حقيقية.	$a < 0$
هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$	$a = 0$

مثال 1 إيجاد الجذور

بسّط كلاً مما يأتي:

(a) $\pm\sqrt{16y^4}$
 $\pm\sqrt{16y^4} = \pm\sqrt{(4y^2)^2}$
 $= \pm 4y^2$
 الجذران التربيعيان لـ $16y^4$ هما $\pm 4y^2$.

(b) $-\sqrt{(x^2 - 6)^8}$
 $-\sqrt{(x^2 - 6)^8} = -\sqrt{[(x^2 - 6)^4]^2}$
 $= -(x^2 - 6)^4$
 معكوس الجذر التربيعي الرئيس لـ $(x^2 - 6)^8$ هو $-(x^2 - 6)^4$.

(c) $\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}}$
 $\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}} = \sqrt[5]{(3a^4b^5)^5}$
 $= 3a^4b^5$
 الجذر الخامس لـ $243a^{20}b^{25}$ هو $3a^4b^5$.

(d) $\sqrt[7]{128}$
 $\sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2$

تحقق من فهمك

بسّط كلاً مما يأتي:

(1A) $2x^2 \sqrt[3]{8x^6}$
 (1B) $-(y+7)^8 - \sqrt{(y+7)^{16}}$

إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا وأسس ما تحت الجذر عددًا زوجيًا، وكان أسس الناتج عددًا فرديًا، يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لتتأكد من أن الجواب ليس سالبًا.

مثال 2 التبسيط باستخدام القيمة المطلقة

بسّط كلاً مما يأتي:

(a) $\sqrt[4]{y^4}$
 $\sqrt[4]{y^4} = |y|$
 بما أن y من الممكن أن تكون سالبة فالجذر الرئيس لهذه العبارة يساوي القيمة المطلقة لـ y .

(b) $\sqrt[6]{64(x^2 - 3)^{18}}$
 $\sqrt[6]{64(x^2 - 3)^{18}} = 2|(x^2 - 3)^3|$
 بما أن دليل الجذر (العدد 6) عدد زوجي، وأسس العبارة $x^2 - 3$ (العدد 3) عدد فردي فيجب استعمال رمز القيمة المطلقة.

(2A) $6|y^3| \sqrt[3]{36y^6}$
 (2B) $2|(x - 3)^3| \sqrt[4]{16(x - 3)^{12}}$

تحقق من فهمك

بسّط كلاً مما يأتي:

إرشادات للدراسة

دليل الجذر إذا كان n عددًا فرديًا فهناك فقط جذر حقيقي واحد، وبناءً على ذلك، فلا يوجد هناك جذر رئيس، ولا يوجد حاجة إلى استعمال رمز القيمة المطلقة. أما إذا كان n عددًا زوجيًا فإن $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

تبسيط الجذور

مثال 1 يبين كيفية تبسيط عبارات الجذور النونية.

مثال 2 يبين كيفية استعمال رمز القيمة المطلقة للناتج عند تبسيط جذور نونية لعبارات ذات قوى زوجية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثال إضافي

بسّط كلاً مما يأتي:

a. $\pm 4x^4 \pm \sqrt{16x^8}$
 b. $-(q^3 + 5)^2 - \sqrt{(q^3 + 5)^4}$
 c. $3a^2b^3 \sqrt[5]{243a^{10}b^{15}}$
 d. $4 \sqrt[5]{1024}$

تنبيه!

أخطاء شائعة تأكد من أن الطلاب استوعبوا أنه لكون $3^2 = 9$ و $(-3)^2 = 9$ ، فإن العدد 9 له جذران تربيعيان هما 3، و -3، ومع ذلك فإن قيمة $\sqrt{9}$ هي العدد 3 فقط. وللدلالة على كلا الجذرين التربيعيين وليس الجذر الرئيس فقط، يجب أن تكون العبارة الجذرية على الصورة $\pm\sqrt{9}$.

تنبيه!

تجنب الأخطاء اقترح في أثناء مناقشة المعلومة التي تلي المثال 1، طريقة أخرى لتبسيط الجذور التي تتضمن أعدادًا فقط وليس متغيرات، وهي تبسيط العبارة تحت رمز الجذر أولاً. فعلى سبيل المثال، يمكن إعادة كتابة $\sqrt{(-5)^2}$ عن طريق تبسيط ما تحت رمز الجذر أولاً لتصبح $\sqrt{25}$. ثم إيجاد الجذر الرئيس ليكون الناتج 5. وبالمثل يمكن تبسيط $\sqrt{(-2)^6}$ ليصبح $\sqrt{64}$ ، والجذر التربيعي الرئيس للعدد 64 هو 8.

المحتوى الرياضي

استعمال القيمة المطلقة بشكل عام، إذا كان n عددًا صحيحًا أكبر من 2، وكان a عددًا حقيقيًا، فإن $\sqrt[n]{a^n} = a$ إذا كان n عددًا فرديًا، وكذلك $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ إذا كان n عددًا زوجيًا.

تقريب الجذور باستعمال الحاسبة: تذكر أن الأعداد الحقيقية التي لا يمكن كتابتها في صورة كسور عشرية منتهية أو دورية، تُسمى أعداداً غير نسبية. وغالباً ما يستعمل تقريب الأعداد غير النسبية في مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة

تقريب الجذور

تجنب الحوادث: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس.

(a) إذا كانت $c = \sqrt[5]{b^2}$ تمثل عدد الحوادث، و b تمثل عدد الدراجات الهوائية، فقدّر عدد الحوادث الشهرية على طريق ما، إذا عُلم أن 1000 دراجة تمر خلاله كل شهر.

افهم المعطيات: $c = \sqrt[5]{b}$ • توضح العلاقة بين عدد الدراجات الهوائية (b) التي تمر في طريق، وعدد الحوادث بينها (الدراجات) وبين السيارات (c).

• عدد الدراجات الهوائية التي تمر في الطريق خلال كل شهر هو 1000 دراجة.

المطلوب: تقدير عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات في هذا الطريق خلال شهر.

خطّط عوض عن b (عدد الدراجات الهوائية) بالعدد 1000.

$$c = \sqrt[5]{b^2} \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$b = 1000 \quad = \sqrt[5]{1000^2}$$

$$\text{باستعمال الحاسبة} \quad \approx 15.85$$

فهناك 16 حادثاً تقريباً كل شهر على ذلك الطريق.

$$c = 15.85 \quad 15.85 \pm \sqrt[5]{b^2} \quad \text{تحقق}$$

$$\text{برفع الطرفين للأس 5} \quad 15.85^5 \pm b^2$$

$$\text{بالتبسيط} \quad 1000337 \pm b^2$$

$$\text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب} \quad 1000 \approx b \quad \checkmark$$

(b) إذا كان عدد الحوادث المسجلة على طريق ما في أحد الأشهر يساوي 21 حادثاً، فقدّر عدد الدراجات الهوائية التي سارت على ذلك الطريق.

$$c = \sqrt[5]{b^2} \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$21 = \sqrt[5]{b^2}$$

$$\text{برفع الطرفين للأس 5} \quad 21^5 = b^2$$

$$\text{بالتبسيط} \quad 4084101 = b^2$$

$$\text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب} \quad 2021 \approx b$$

إذن عدد الدراجات الهوائية التي سارت في الطريق خلال ذلك الشهر هو 2021 دراجة تقريباً.

تحقق من فهمك ✓

(3A) يمكن إيجاد مساحة سطح كرة إذا علم حجمها، باستعمال القانون $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$ ، حيث V تمثل حجم الكرة. أوجد مساحة سطح كرة حجمها 200 in^3 . **165 in² تقريباً**

(3B) إذا كانت مساحة سطح كرة تساوي 214.5 in^2 ، فأوجد حجم الكرة. **295.4 in³**

تأكد

المثالان 1, 2 بسّط كلاً مما يأتي:

$$\pm 10y^4 \pm \sqrt{100y^8} \quad (1)$$

$$(y-6)^4 \sqrt{(y-6)^8} \quad (3)$$

$$-5 \sqrt[3]{-125} \quad (5)$$

$$-7u^4v^6 - \sqrt{49u^8v^{12}} \quad (2)$$

$$2g^4h^6 \sqrt[4]{16g^{16}h^{24}} \quad (4)$$

$$2|(2y+1)^3| \sqrt[6]{64(2y+1)^{18}} \quad (6)$$

استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي، إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

$$2.903 \sqrt[4]{71} \quad (10) \quad -2.122 \sqrt[5]{-43} \quad (9) \quad -8.718 - \sqrt{76} \quad (8) \quad 7.616 \sqrt{58} \quad (7)$$

الدرس 4-4 الجذر النوني 201

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا مدونة يوضحون فيها طريقة إيجاد عدد الجذور (وأشاراتها) قبل إجراء أي حسابات.

مثال إضافي

بسّط كلاً مما يأتي:

$$(a) \sqrt[6]{t^6} \quad |t|$$

$$(b) \sqrt[3]{243(x+2)^{15}} \quad 3(x+2)^3$$

تقريب الجذور باستعمال

الحاسبة

مثال 3 يبيّن للطلاب طريقة استعمال الحاسبة لتقريب الحل في موقف من واقع الحياة.

مثال إضافي

الفضاء: يراعى في تصميم الأقمار الصناعية حمايتها من الدمار الناتج عن اصطدامها بالأجسام السابحة في الفضاء. وقد أفادت دراسة أن قطر الثقب d بالملمترات في الخلية الشمسية للقمر الصناعي والناتج عن الارتطام بجسم يتحرك بطاقة حركية مقدارها k جول، يمكن تقريبه بالعلاقة:

$$d = 0.926\sqrt[3]{k} + 0.169$$

(a) قدّر قطر ثقب ناتج عن الارتطام بجسم يتحرك بطاقة حركية مقدارها 3.5 جول. **1.575 mm**

(b) إذا كان قطر ثقب 2.5mm، فقدّر الطاقة الحركية التي يتحرك بها الجسم الذي أحدث ارتطامه الثقب. **15.951 جول**

دون ضمن

تنويع التعليم

المتعلمون المنطقيون يعتقد بعض الطلاب أن x يجب أن تمثل عدداً موجباً، و $-x$ يجب أن تمثل عدداً سالباً. لذا، فإن قراءة $-x$ على أنها "معكوس x " تساعد الطلاب على فهم أنه إذا كانت x تساوي -9 ، فإن $-x$ تساوي 9 . يبيّن لهم كذلك أن -9 ليس لها جذر تربيعي حقيقي؛ أي أنه لا يوجد هناك عدد حقيقي مربعه يساوي -9 . وذكرهم أن $\sqrt{-9}$ هو $3i$ ، وهو عدد تخيلي.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 1-11 للتأكد من فهم الطلاب.
ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

(35) النسب: 226.5 Cal تقريباً لكل يوم ،
الكلب: 939.6 Cal تقريباً لكل يوم،
التمساح: 1811.8 Cal تقريباً لكل يوم،
الدولفين: 3235.5 Cal تقريباً لكل يوم،
الفيل: 24344.4 Cal تقريباً لكل يوم



الربط مع الحياة

الأيض هو عملية تجري داخل الخلية الحية، وفيها يتم تفكيك المواد الممتصة من الطعام مثل البروتينات والدهون وتحويلها إلى طاقة يستفيد منها جسم الكائن الحي في نشاطاته.

مثال 3 (11) قمر اصطناعي: إذا كان نصف القطر r لمدار قمر اصطناعي تلفزيوني يُعطى بالصيغة $\sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}}$ ؛ حيث G تمثل ثابت الجذب الكوني، M كتلة الأرض، t الزمن اللازم لإكمال القمر الاصطناعي دورة واحدة حول الأرض، فأوجد نصف قطر مدار القمر الاصطناعي إذا كانت $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N.m}^2/\text{kg}^2$ ، $M = 5.98 \times 10^{24} \text{kg}$ ، $t = 2.6 \times 10^6 \text{s}$ تقريباً $4.088 \times 10^8 \text{m}$

تدريب وحل المسائل

المثالان 1, 2

بسّط كلّ مما يأتي:

$$(12) \pm \sqrt{225a^{16}b^{36}} \pm \sqrt{400x^{32}y^{40}} \quad (13) \pm 15a^8b^{18} \quad (14) -20x^{16}y^{20} - \sqrt{(a^2 + 4a)^6} \sqrt{(a^2 + 4a)^{12}}$$

$$(15) 3b^6c^4 \sqrt[3]{27b^{18}c^{12}} \quad (16) -3 \sqrt[5]{-243} \quad (17) -(y-9)^3 \sqrt[3]{-(y-9)^9}$$

$$(18) |x^3| \sqrt[6]{x^{18}} \quad (19) a^4 \sqrt[3]{a^{12}} \quad (20) 3|(x+4)| \sqrt[4]{81(x+4)^4}$$

$$(21) (y^3 + 5)^6 \sqrt[3]{(y^3 + 5)^{18}} \quad (22) x^2|y| \sqrt[8]{x^{16}y^8} \quad (23) 2a^3b^2 \sqrt[5]{32a^{15}b^{10}}$$

مثال 3

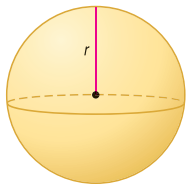
(24) شحن: يريد متجر لبيع الكتب عبر الإنترنت زيادة حجم الصناديق المستعملة في الشحن. إذا كان حجم الصندوق الجديد N يساوي حجم الصندوق القديم V مضروباً في مكعب عدد ثابت F ؛ أي أن $N = V \cdot F^3$. فما قيمة العدد F إذا كان الحجم الأصلي للصندوق يساوي 0.8ft^3 ، والحجم الجديد يساوي 21.6ft^3 ؟

(25) هندسة: يمكن إيجاد طول ضلع مكعب r باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{V}$ ، حيث V تمثل حجم المكعب بالوحدات المكعبة. أوجد طول ضلع مكعب حجمه 512cm^3 . **8 cm**

استعمل الآلة الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

$$(26) -\sqrt{150} \quad (27) -12.247 \quad (28) \sqrt{0.43} \quad (29) -5.350 \quad (30) \sqrt[3]{(8912)^2}$$

(30) هندسة: يمكن إيجاد نصف القطر r لكرة حجمها V باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.



(a) أوجد نصف قطر كل من الكرات ذات الأحجام الآتية:

$$6.2, 12.4, 24.8, 1000 \text{ cm}^3, 8000 \text{ cm}^3, 64000 \text{ cm}^3$$

(b) ما مقدار التغير في حجم الكرة عند زيادة نصف القطر إلى مثليه؟

بسّط كلّ مما يأتي: (31) $14|c^3|d^2$ (32) $-3a^5b^3$ (33) $\pm 2ix^4y^2$

$$(31) \sqrt{196c^6d^4} \quad (32) \sqrt[3]{-27a^{15}b^9} \quad (33) \sqrt[3]{64(x+y)^6}$$

(34) فيزياء: طوّر جوهانز كيبلر (Johannes Kepler) الصيغة $d = \sqrt[3]{6t^2}$ ، حيث d تمثل المسافة بملايين الأميال بين أي كوكب والشمس، و t تمثل عدد الأيام الأرضية التي يستغرقها الكوكب ليدور حول الشمس. إذا كانت سنة كوكب المريخ تساوي 687 يوماً أرضياً، فكم يبعد المريخ عن الشمس؟ **141 مليون ميل تقريباً**

(35) أحياء: يبين قانون كليبر (Kleiber) العلاقة $P = 73.3 \sqrt[4]{m^3}$ ، العلاقة بين كتلة كائن حي m بالكيلوجرام ومتوسط الأيض اليومي له P بالسرعات الحرارية. أوجد متوسط الأيض اليومي لكل من الحيوانات في الجدول المجاور. **انظر الهامش.**

الحيوان	كتلته (kg)
النسر	4.5
الكلب	30
التمساح	72
الدولفين	156
الفيل	2300

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	41-51, 38, 39, 12-29
ضمن المتوسط	41-51, 30-39, 13-29 فردي
فوق المتوسط	22-36 زوجي, 37-51

(36) تمثيلات متعددة: سوف تستعمل في هذا السؤال كلاً من: $f(x) = x^n$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. لاستكشاف المعكوس.

- (a) جدولياً: اعمل جدولاً لكل من $f(x)$, $g(x)$ مستعملاً $n = 3$, $n = 4$.
 (b) بيانياً: مثل كلاً من المعادلتين السابقتين بيانياً.
 (c) تحليلياً: أي المعادلتين السابقتين تمثل دالة؟ وأيها تمثل دالة متباينة؟
 (d) تحليلياً: ما قيم n التي يكون عندها كل من الدالتين $f(x)$, $g(x)$ دالة عكسية للأخرى؟
 (e) لفظياً: ما الاستنتاجات التي يمكن أن تتوصل إليها حول $g(x) = \sqrt[n]{x}$ و $f(x) = x^n$ ، لقيم n الزوجية الموجبة، وقيم n الفردية الموجبة؟

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب

في السؤال 36، جدول القيم، والتمثيل البياني، والتحليل المنطقي لاستكشاف الدوال العكسية.

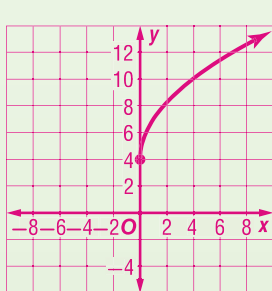
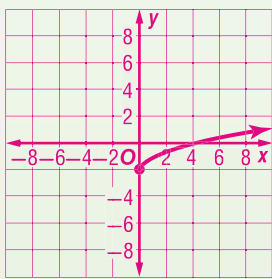
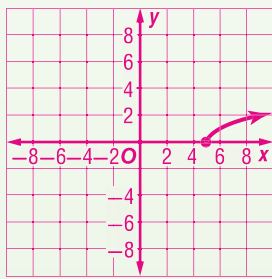
4 التقويم

بطاقة مكافأة اعمل نسخاً عدة لخمس عبارات جذرية مختلفة شبيهة بتلك الموجودة في المثال 1. وأعط عبارة لكل طالب واطلب إليه تبسيطها وتسليمك إجابته قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 4-4، 4-3 بإعطائهم:
 الاختبار القصير 2، ص (68).

إجابات:



مسائل مهارات التفكير العليا

- (37) تحدّ: ما قيم x التي تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية وتحقق المتباينة $\sqrt[3]{x} > x$ ؟ $0 < x < 1$, $x < -1$.
 (38) مسألة مفتوحة: أوجد عدداً يكون جذره التربيعي الرئيس وجذره التكعيبي عددين صحيحين.
 (39) اكتب: وضح متى يكون استعمال رمز القيمة المطلقة ضرورياً عند إيجاد الجذر النوني؟ ولماذا؟ انظر الهامش.
 (40) تحدّ: حل المعادلة: $\frac{1}{625} = -\frac{5}{\sqrt{a}} = -125$

(38) اجابة ممكنة: 64

تدريب على اختبار

- (41) ما قيمة w في المعادلة: $\frac{1}{2}(4w + 36) = 3(4w - 3)$ ؟ B
 A 2
 B 2.7
 C 27
 D 36
- (42) ما ناتج ضرب العددين المركبين $(5 - i)$ و $(5 + i)$ ؟ B
 A 24
 B 26
 C $25 - i$
 D $25 - 10i$

مراجعة تراكمية

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً: (الدرس: 3-4) (43-45) انظر الهامش.

$$y = 3\sqrt{x} + 4 \quad (45)$$

$$y = \sqrt{x} - 2 \quad (44)$$

$$y = \sqrt{x-5} \quad (43)$$

(46) صحة: تبلغ كتلة طفل وُلد حديثاً $7\frac{1}{2}$ أرطال، وطوله 19.5 in. فإذا كان الكيلوجرام الواحد يساوي 2.2 رطل تقريباً، والستيمتر الواحد يساوي 0.3937 in تقريباً. فأوجد كتلة المولود بالكيلوجرامات وطوله بالستيمترات. (مهارة سابقة) **3.41 kg تقريباً، 49.53 cm تقريباً**

$$4x^2 + 22x - 34 \quad (48) \quad (الدرس: 3-3)$$

$$4a^4 + 24a^2 + 36 \quad (2a^2 + 6)^2 \quad (48)$$

$$(11x^2 + 13x - 15) - (7x^2 - 9x + 19) \quad (47)$$

أوجد حاصل الضرب في كل مما يأتي: (الدرس: 3-3)

$$2(w+z)(w-4z) \quad (51) \quad x^2 + xy - 2y^2 \quad (x+2y)(x-y) \quad (50) \quad x^2 + 9x + 20 \quad (x+4)(x+5) \quad (49)$$

$$2w^2 - 6wz - 8z^2$$

203 الدرس 4-4 الجذر النوني

تنوع التعليم

ضمن شوق

توسع ما الشروط التي يجب توافرها لكي تكون المعادلة $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ صحيحة؟

يجب أن يكون n عدداً صحيحاً أكبر من 1، وإذا كان n عدداً زوجياً، يجب أن تكون $a \geq 0$ و $b > 0$ ، في حين أنه إذا كان n عدداً فردياً، يجب أن تكون $b \neq 0$.

(39) إجابة ممكنة، رمز القيمة المطلقة ضروري للتأكد من كون الإجابة ليست سالبة. فعندما نأخذ أي جذر فردي لعدد، نلاحظ وجود إجابة واحدة فقط. فإذا كان العدد موجياً فإن الجذر يكون موجياً. وإذا كان سالباً فإن الجذر يكون سالباً. لكل عدد حقيقي موجب جذران نونيان، إذا كان n (دليل الجذر) عدداً زوجياً، أحد الجذرين موجب والآخر سالب. استعمال رمز القيمة المطلقة غير ضروري عند إيجاد جذور فردية، ولكن عند إيجاد جذور نونية زوجية؛ فإن استعمال رمز القيمة المطلقة يكون ضرورياً إذا كانت قوة الناتج فردية.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل دوال الجذور النونية بيانياً.

1 التركيز

الهدف

استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لتمثيل دوال الجذر النوني بيانياً.

المواد اللازمة

• الحاسبة البيانية TI-nspire .

إرشادات التدريس

هناك أكثر من طريقة لإدخال دالة الجذر التربيعي في قائمة $f(x)$. فيمكن إدخال الدالة باستعمال مفتاح الجذر التربيعي \sqrt{x} ، أو باستعمال مفتاح الأس مثل $x \wedge (1/2)$ ، أو $x \wedge (0.5)$.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، لتمثيل دالة الجذر النوني بيانياً.

أسأل:

- ما قيم n التي تسمح بوجود قيم سالبة في مجال $\sqrt[n]{x}$ ؟ قيم n الفردية
- لماذا يكون مجال $\sqrt[n]{x}$ القيم غير السالبة عندما يكون n عدداً زوجياً؟ الجذر الزوجي لعدد سالب ليس عدداً حقيقياً.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمارين

1-8

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-3 لتقويم مدى قدرة الطلاب على استعمال الحاسبة البيانية لتمثيل دوال الجذر النوني بيانياً.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب أن يصفوا كيفية إيجاد الأزواج المرتبة لنقاط تقاطع تمثيل بياني مع محور y ، وكذلك الأزواج المرتبة لنقاط تقاطع تمثيل بياني مع محور x .

افتراض أن $x = 0$ ، ثم حل بالنسبة إلى المتغير y ؛
افتراض أن $y = 0$ ، ثم حل بالنسبة إلى المتغير x .

مثال 1

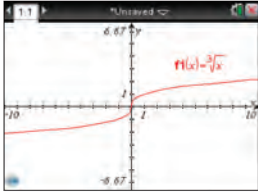
تمثيل دالة الجذر النوني بيانياً

مثّل بيانياً $y = \sqrt[3]{x}$.

• استعمل المفاتيح التالية بالترتيب .

1 New Document 2: Add Graphs

• أدخل الدالة الجذرية بالضغطة على مفتاح $\sqrt[3]{x}$ ثم مفتاح \wedge ، ثم أدخل الدالة .
ثم اضغط enter فيظهر تمثيلها البياني .

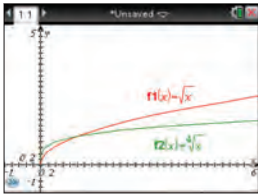


مثال 2

دوال الجذور النونية المختلفة الدليل

مثّل الدالتين: $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt[3]{x}$ بيانياً .

أدخل المعادلة $f1(x) = \sqrt{x}$ ومثلها مستعملاً الخطوات السابقة، ثم أدخل المعادلة $f2(x) = \sqrt[3]{x}$ فيظهر التمثيل البياني المجاور .

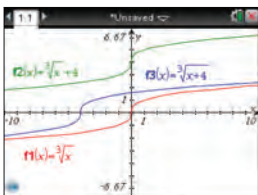


مثال 3

دوال الجذور النونية المختلفة فيما تحت الجذر

مثّل الدوال الثلاث: $y = \sqrt[3]{x+4}$ ، $y = \sqrt[3]{x} + 4$ ، $y = \sqrt[3]{x}$ بيانياً .

باستعمال الخطوات السابقة يظهر التمثيل البياني المجاور .



تمارين:

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً: (1-6) انظر ملحق الإجابات.

(1) $y = \sqrt[3]{x}$ (2) $y = \sqrt{x+2}$ (3) $y = \sqrt[3]{x} + 2$

(4) $y = \sqrt[3]{x}$ (5) $y = \sqrt[3]{x-5}$ (6) $y = \sqrt[3]{x} - 5$

(7) ما تأثير جمع أو طرح عدد ثابت لما تحت الجذر على التمثيل البياني لدالة الجذر النوني؟ يتم إزاحة التمثيل البياني أفقيًا يمينًا أو يسارًا .

(8) ما تأثير جمع أو طرح عدد ثابت لدالة الجذر النوني على تمثيلها البياني؟ يتم إزاحة التمثيل البياني رأسيًا إلى أعلى أو إلى أسفل .



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 4

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم - تزمة (22) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-4 تدريبات إعادة التعليم الجذور الثنوي

تقريب الجذور باستعمال الآلة الحاسبة

العدد غير النسبي	هو العدد الذي لا يمكن التعبير عنه بكسر عشري متناهي أو دوري.
$\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ أمثلة للأعداد غير النسبية. ويُستعمل تقريب الكسور العشرية في تقريب قيم الأعداد غير النسبية في التطبيقات عادة. ويمكنك إيجاد هذه القيم التقريبية بسهولة بواسطة الآلة الحاسبة.	

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة $\sqrt{18.2}$ مقربة لأقرب جزء من ألف.

$\sqrt{18.2} \approx 1.787$

تعاريف:

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل ما يأتي مقربة إلى أقرب جزء من ألف.

$\sqrt{0.054}$ (3)	$\sqrt{1050}$ (2)	$\sqrt{62}$ (1)
0.378	32.404	7.874
$\sqrt{18600}$ (6)	$\sqrt{5280}$ (5)	$-\sqrt{5.45}$ (4)
136.382	72.664	-1.528
$\sqrt[3]{100}$ (9)	$\sqrt[3]{-15}$ (8)	$\sqrt{0.095}$ (7)
2.512	-2.466	0.308
$\sqrt{0.05}$ (12)	$\sqrt{3200}$ (11)	$\sqrt[3]{856}$ (10)
0.224	56.569	3.081
$-\sqrt{500}$ (15)	$\sqrt{0.60}$ (14)	$\sqrt{12500}$ (13)
-4.729	0.775	111.803
$\sqrt{75}$ (18)	$\sqrt[3]{4200}$ (17)	$\sqrt{0.15}$ (16)
8.660	4.017	0.531

19 الانزلاق: تستعمل شرطة السير الصيغة $f = 2\sqrt{5L}$ لتقدير سرعة سيارة (r) بالأقدام لكل ساعة، عندما تنزلق مسافة (L) بالأقدام. قُدّر سرعة سيارة بالأقدام لأقرب جزء من عشرة إذا انزلت مسافة 300 ft قبل أن تتوقف. 77.5 mil/h

20 رحلات الفضاء: تستعمل شرطة المسافة الألفية (d) بالأقدام من مركبة فضائية تدور على ارتفاع (h) ميلاً فوق سطح الأرض بالمعادلة $h = \sqrt{80000d} + 49$. ما المسافة الألفية المقطرة من مركبة تدور على ارتفاع 150 ميلاً فوق سطح الأرض؟ 1106 mil

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية 22

تدريبات إعادة التعليم (21) دون

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-4 تدريبات إعادة التعليم الجذور الثنوي

تسبب الجذور

الجذر التربيعي	أي عددين حقيقيين a ، b ، إذا كان $a = b^2$ ، فإن a جذر تربيعي لـ b .
الجذر الثنوي	إذا كان a عدديين حقيقيين a ، b ، وأي عدد صحيح موجب n ، إذا كان $a = b^n$ ، فإن a جذر ثنوي للعدد b .
الجذور الثنوية الحقيقية	إذا كان n عدداً زوجياً، و $b > 0$ ، فإن b له جذر حقيقي واحد موجب، وجذر حقيقي واحد سالب، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس. إذا كان n عدداً فردياً و $b > 0$ ، فإن b له جذر حقيقي واحد موجب. إذا كان n عدداً زوجياً و $b < 0$ ، فإنه لا يوجد للعدد b جذور حقيقية. إذا كان n عدداً فردياً و $b < 0$ ، فإنه يوجد للعدد b جذر حقيقي واحد سالب.

مثال: $\sqrt{49x^6} = 7x^3$ $\sqrt[3]{-27} = -3$ $\sqrt[3]{(2a-1)^3} = 2a-1$

تعاريف:

تُسبب كلما يأتي:

$\sqrt{81}$ (1)	$\sqrt{-343}$ (2)	$\sqrt{144p^8}$ (3)
9	-7	$12 p ^4$
$\pm\sqrt{4a^{10}}$ (4)	$\sqrt[3]{243p^{10}}$ (5)	$-\sqrt[3]{m^6n^9}$ (6)
$\pm 2a^5$	$3p^2$	$-m^2n^3$
$\sqrt{-b^2}$ (7)	$\sqrt[3]{16a^{10}b^4}$ (8)	$\sqrt{121x^6}$ (9)
$-b^4$	$4 a ^2b^4$	$11 x^3 $
$\sqrt{(4k)^4}$ (10)	$\pm\sqrt{169x^4}$ (11)	$-\sqrt{-27p^6}$ (12)
$16k^2$	$\pm 13x^2$	$3p^2$
$-\sqrt{625x^4}$ (13)	$\sqrt[3]{36q^{12}}$ (14)	$\sqrt{100x^2y^4z^6}$ (15)
$-25 y x^2$	$6 q ^4$	$10 x^2y^2z^3 $
$\sqrt{-0.027}$ (16)	$-\sqrt{-0.36}$ (17)	$\sqrt{0.64p^{10}}$ (18)
-0.3	ليس عدداً حقيقياً	$0.8 p ^5$ (19)
$\sqrt{(2x)^8}$ (19)	$\sqrt{(11y^2)^4}$ (20)	$\sqrt[3]{(5a^2b)^6}$ (21)
$4x^2$	$121y^4$	$25a^4b^2$
$\sqrt{(3x-1)^2}$ (22)	$\sqrt{(m-5)^6}$ (23)	$\sqrt{36x^2 - 12x + 1}$ (24)
$ 3x-1 $	$(m-5)^2$	$ 6x-1 $

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية 21

تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-4 تدريبات حل المسألة الجذور الثنوي

1 مكيبات، يريد سمور بناء مخزن مكعب الشكل سعته 1728 قدمًا مكعبًا. كم ستكون أبعاد المخزن؟

$12ft \times 12ft \times 12ft$

2 اصفاء، مثل المعادلة $a = \sqrt{p^2}$ حالة خاصة لقانون كبلر الثالث المتعلق بحركة الكواكب، حيث a معدل بُعد الكوكب عن الشمس بالوحدات الفلكية، و p الفترة الزمنية بالسنوات لدورة الكوكب. إذا كانت دورة كوكب المشتري تستغرق 12 سنة، فما بُعده عن الشمس بالوحدات الفلكية؟ 5.24 وحدة فلكية.

3 هاشم الفريج، تبايع تكاليف سلعة لدى تاجر حلة D ريالاً، وبيعهما لتاجر توزيع بربح $P\%$. وبيعهما لتاجر التوزيع لتاجر مخزن بربح $P\%$. ما السعر الذي يشتري به المستهلك؟ وإذا اشترى المستهلك السلعة بمبلغ 80 ريالاً، وكانت تكلفتها على تاجر الجملة 29.15 ريالاً، فما نسبة الربح $P\%$.

$D(1 + \frac{P}{100})^2 = 40\%$

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية 24

تدريبات المهارات (23) دون ضمن فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-4 تدريبات المهارات الجذور الثنوي

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل ما يأتي مقربة لثلاث منازل عشرية.

$\sqrt{230}$ (1)	15.166	$\sqrt{38}$ (2)	6.164
$-\sqrt{152}$ (3)	-12.329	$\sqrt{5.6}$ (4)	2.366
$\sqrt[3]{88}$ (5)	4.448	$\sqrt[3]{-222}$ (6)	-6.055
$-\sqrt{0.34}$ (7)	-0.764	$\sqrt[3]{500}$ (8)	3.466
$\pm\sqrt{81}$ (9)	± 9	$\sqrt{144}$ (10)	12
$(-5)^2$ (11)	5	$\sqrt{-5^2}$ (12)	ليس عدداً حقيقياً
$\sqrt{0.36}$ (13)	0.6	$-\sqrt{\frac{4}{9}}$ (14)	$-\frac{2}{3}$
$\sqrt{-8}$ (15)	-2	$-\sqrt[3]{27}$ (16)	-3
$\sqrt[3]{0.064}$ (17)	0.4	$\sqrt[3]{32}$ (18)	2
$\sqrt[3]{81}$ (19)	3	$\sqrt[3]{y^3}$ (20)	$ y $
$\sqrt[3]{125c^3}$ (21)	$5c$	$\sqrt[3]{64x^3}$ (22)	$8 x^3 $
$-\sqrt[3]{27a^3}$ (23)	$-3a$	$\sqrt[3]{m^3p^3}$ (24)	m^4p^2
$-\sqrt[3]{100p^3q^2}$ (25)	$-10p^2 q $	$\sqrt[3]{16u^3v^6}$ (26)	$2 u v^2$
$\sqrt{(-3c)^2}$ (27)	$9c^2$	$\sqrt{(a+b)^2}$ (28)	$ a+b $

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية 23



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 4

دون دون المتوسط		ضمن ضمن المتوسط		فوق فوق المتوسط																																																									
التدريبات الإثرائية (25)			كتاب التمارين (27)																																																										
ضمين فوق			دون ضمن فوق																																																										
<p>الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p>4-4 التدريبات الإثرائية تقريب الجذور التربيعية</p> <p>لديك المفكوك التالي: $(a + \frac{b}{2a})^2 = a^2 + \frac{2ab}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}$ $= a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}$</p> <p>افترض أن قيمة a كبيرة جداً مقارنة بقيمة b. عندها تكون القيمة $\frac{b^2}{4a^2}$ صغيرة جداً، لدرجة أنه يمكن إهمالها في التقريب. أي أن $(a + \frac{b}{2a})^2 \approx a^2 + b$</p> <p>افترض أن عددًا يمكن التعبير عنه على الصورة $a^2 + b$، حيث $a > b$، فإن القيمة التقريبية للجذر التربيعي للمقدار $a^2 + b$ تساوي $a + \frac{b}{2a}$. وكذلك يمكنك التوصل إلى القيمة التقريبية $a - \frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2 - b}$</p> <p>مثال: استخدم الصيغة $\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a}$ لتقريب قيمتي $\sqrt{101}$ و $\sqrt{622}$. (a) $\sqrt{101} = \sqrt{100 + 1} = \sqrt{10^2 + 1}$ لكن $a = 10$ و $b = 1$ $\sqrt{101} \approx 10 + \frac{1}{2(10)} = 10.05$ (b) $\sqrt{622} = \sqrt{625 - 3} = \sqrt{25^2 - 3}$ لكن $a = 25$ و $b = 3$ $\sqrt{622} \approx 25 - \frac{3}{2(25)} = 24.94$</p> <p>مصادر: استعمال الصيغة السابقة لتقريب كل قيمة مما يأتي إلى أقرب جزء من مئة. تحقق من إجابتك مستعملًا الآلة الحاسبة. (1) $\sqrt{626}$ (2) $\sqrt{99}$ (3) $\sqrt{402}$ (4) $\sqrt{1604}$ (5) $\sqrt{223}$ (6) $\sqrt{80}$ (7) $\sqrt{4890}$ (8) $\sqrt{2505}$ (9) $\sqrt{3575}$ (10) $\sqrt{1441100}$ (11) $\sqrt{290}$ (12) $\sqrt{260}$ (13) $\sqrt{1200.46}$</p> <p>13 يُن أن $a - \frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2 - b}$ حيث $a > b$ $(a - \frac{b}{2a})^2 = a^2 - b + \frac{b^2}{4a^2}$ يمكنك إهماله $\frac{b^2}{4a^2}$ $(a - \frac{b}{2a})^2 \approx a^2 - b$; $a - \frac{b}{2a} \approx \sqrt{a^2 - b}$</p> <p>الصف: الثاني الثانوي 25 العلاقات والدوال العكسية والجذرية</p>																																																													
<p>4-4 الجذر الثنائي بسط كل ما يأتي:</p> <table border="0"> <tr> <td>$\sqrt{64}$ (4)</td> <td>$-\sqrt{256}$ (3)</td> <td>$-\sqrt{324}$ (2)</td> <td>$\sqrt{0.81}$ (1)</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>-4</td> <td>-18</td> <td>0.9</td> </tr> <tr> <td>$-\sqrt{1296}$ (8)</td> <td>$\sqrt{-243}$ (7)</td> <td>$\sqrt{0.512}$ (6)</td> <td>$\sqrt{-64}$ (5)</td> </tr> <tr> <td>-6</td> <td>-3</td> <td>0.8</td> <td>-4</td> </tr> <tr> <td>$\sqrt{-(14a)^2}$ (12)</td> <td>$\sqrt{(14a)^2}$ (11)</td> <td>$\sqrt{243x^{10}}$ (10)</td> <td>$\sqrt{\frac{-1024}{243}}$ (9)</td> </tr> <tr> <td>ليس عددًا حقيقيًا</td> <td>$14 a$</td> <td>$3x^5$</td> <td>$-\frac{4}{3}$</td> </tr> <tr> <td>$\sqrt{(2x)^2}$ (16)</td> <td>$\sqrt{-64r^{10}t^3}$ (15)</td> <td>$\sqrt{\frac{16m^2}{25}}$ (14)</td> <td>$\sqrt{49m^2n^4}$ (13)</td> </tr> <tr> <td>$16x^2$</td> <td>$-4r^5t^{1.5}$</td> <td>$\frac{4 m }{5}$</td> <td>$7 n t^2$</td> </tr> <tr> <td>$\sqrt[3]{-27x^3y^3}$ (20)</td> <td>$\sqrt{676x^2y^2}$ (19)</td> <td>$\sqrt[3]{216p^3q^3}$ (18)</td> <td>$-\sqrt{625z^4}$ (17)</td> </tr> <tr> <td>$-3x^2y^2$</td> <td>$26x^2 y^2$</td> <td>$6p^2q^2$</td> <td>$-5z^2$</td> </tr> <tr> <td>$\sqrt{(2x+1)^2}$ (24)</td> <td>$\sqrt{(m+4)^2}$ (23)</td> <td>$\sqrt{-32x^2y^2}$ (22)</td> <td>$-\sqrt{144m^2n^2}$ (21)</td> </tr> <tr> <td>$2x+1$</td> <td>$m+4$</td> <td>$-2xy^2$</td> <td>$-12m^2 n^2$</td> </tr> <tr> <td>$\sqrt{x^2+10x+25}$ (28)</td> <td>$\sqrt{343d^3}$ (27)</td> <td>$\sqrt{(x-5)^2}$ (26)</td> <td>$-\sqrt{49a^2b^2}$ (25)</td> </tr> <tr> <td>$x+5$</td> <td>$7d^3$</td> <td>$x-5$</td> <td>$-7 a b^2$</td> </tr> </table> <p>استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية: (29) $\sqrt{7.8}$ (30) $-\sqrt{89}$ (31) $\sqrt{25}$ (32) $\sqrt{-4}$ (2.793) (3.9434) (5) (1.587) (33) $\sqrt{1.1}$ (34) $\sqrt{-0.1}$ (35) $\sqrt{5555}$ (36) $\sqrt{(0.94)^2}$ (1.024) (0.631) (4.208) (0.970)</p> <p>37 حرارة إشعاعية: تسمى كمية الطاقة المشعة من الجسم "الحرارة الإشعاعية". وتسمى درجة الحرارة الداخلية للجسم "الحرارة الحركية". وترتبط الصيغة $T_c = T_f - 32$ بين الحرارة الإشعاعية للجسم T_c وحرارته الحركية T_f، حيث المتغير في الصيغة هو مقياس قدرة الجسم على إطلاق الطاقة. فإذا كانت الحرارة الحركية لجسم 30°C وكان $c = 0.94$، فأوجد الحرارة الإشعاعية للجسم مقربة إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة. 29.5°C</p> <p>38 قانون هيرو (Hero's Formula): لدى حمود حديقة مثلثة الشكل أطوال أضلاعها 15ft، 17ft، 20ft. يريد إيجاد مساحة سطحها باستعمال قانون هيروز، الذي ينص على أن "مساحة سطح المثلث تساوي $(s-a)(s-b)(s-c)$، حيث $s = \frac{a+b+c}{2}$، a, b, c أطوال أضلاع المثلث، s نصف محيط المثلث". استعمل قانون هيروز لإيجاد مساحة سطح الحديقة مقربة إلى أقرب عدد كلي. 124 ft^2</p>						$\sqrt{64}$ (4)	$-\sqrt{256}$ (3)	$-\sqrt{324}$ (2)	$\sqrt{0.81}$ (1)	2	-4	-18	0.9	$-\sqrt{1296}$ (8)	$\sqrt{-243}$ (7)	$\sqrt{0.512}$ (6)	$\sqrt{-64}$ (5)	-6	-3	0.8	-4	$\sqrt{-(14a)^2}$ (12)	$\sqrt{(14a)^2}$ (11)	$\sqrt{243x^{10}}$ (10)	$\sqrt{\frac{-1024}{243}}$ (9)	ليس عددًا حقيقيًا	$14 a $	$3x^5$	$-\frac{4}{3}$	$\sqrt{(2x)^2}$ (16)	$\sqrt{-64r^{10}t^3}$ (15)	$\sqrt{\frac{16m^2}{25}}$ (14)	$\sqrt{49m^2n^4}$ (13)	$16x^2$	$-4r^5t^{1.5}$	$\frac{4 m }{5}$	$7 n t^2$	$\sqrt[3]{-27x^3y^3}$ (20)	$\sqrt{676x^2y^2}$ (19)	$\sqrt[3]{216p^3q^3}$ (18)	$-\sqrt{625z^4}$ (17)	$-3x^2y^2$	$26x^2 y^2 $	$6p^2q^2$	$-5z^2$	$\sqrt{(2x+1)^2}$ (24)	$\sqrt{(m+4)^2}$ (23)	$\sqrt{-32x^2y^2}$ (22)	$-\sqrt{144m^2n^2}$ (21)	$2x+1$	$ m+4 $	$-2xy^2$	$-12m^2 n^2 $	$\sqrt{x^2+10x+25}$ (28)	$\sqrt{343d^3}$ (27)	$\sqrt{(x-5)^2}$ (26)	$-\sqrt{49a^2b^2}$ (25)	$ x+5 $	$7d^3$	$ x-5 $	$-7 a b^2$
$\sqrt{64}$ (4)	$-\sqrt{256}$ (3)	$-\sqrt{324}$ (2)	$\sqrt{0.81}$ (1)																																																										
2	-4	-18	0.9																																																										
$-\sqrt{1296}$ (8)	$\sqrt{-243}$ (7)	$\sqrt{0.512}$ (6)	$\sqrt{-64}$ (5)																																																										
-6	-3	0.8	-4																																																										
$\sqrt{-(14a)^2}$ (12)	$\sqrt{(14a)^2}$ (11)	$\sqrt{243x^{10}}$ (10)	$\sqrt{\frac{-1024}{243}}$ (9)																																																										
ليس عددًا حقيقيًا	$14 a $	$3x^5$	$-\frac{4}{3}$																																																										
$\sqrt{(2x)^2}$ (16)	$\sqrt{-64r^{10}t^3}$ (15)	$\sqrt{\frac{16m^2}{25}}$ (14)	$\sqrt{49m^2n^4}$ (13)																																																										
$16x^2$	$-4r^5t^{1.5}$	$\frac{4 m }{5}$	$7 n t^2$																																																										
$\sqrt[3]{-27x^3y^3}$ (20)	$\sqrt{676x^2y^2}$ (19)	$\sqrt[3]{216p^3q^3}$ (18)	$-\sqrt{625z^4}$ (17)																																																										
$-3x^2y^2$	$26x^2 y^2 $	$6p^2q^2$	$-5z^2$																																																										
$\sqrt{(2x+1)^2}$ (24)	$\sqrt{(m+4)^2}$ (23)	$\sqrt{-32x^2y^2}$ (22)	$-\sqrt{144m^2n^2}$ (21)																																																										
$2x+1$	$ m+4 $	$-2xy^2$	$-12m^2 n^2 $																																																										
$\sqrt{x^2+10x+25}$ (28)	$\sqrt{343d^3}$ (27)	$\sqrt{(x-5)^2}$ (26)	$-\sqrt{49a^2b^2}$ (25)																																																										
$ x+5 $	$7d^3$	$ x-5 $	$-7 a b^2$																																																										

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الفصل.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (70).

المطويات متابعة المطويات

قبل أن تطلب إلى الطلاب حل اختبار منتصف الفصل، شجعهم على مراجعة المعلومات في الدروس من 4-1 إلى 4-4 من خلال مطوياتهم.

إجابات:

- (1) $(f + g)(x) = 2x^2 + 9x - 5$
- (2) $(f - g)(x) = 2x^2 - x - 1$
- (3) $(f \cdot g)(x) = 10x^3 + 16x^2 - 23x + 6$
- (4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2 + 4x - 3}{5x - 2}, x \neq \frac{2}{5}$
- (5) $[f \circ g](x) = 50x^2 - 20x - 3$
- (6) $[g \circ f](x) = 10x^2 + 20x - 17$
- (12) $h^{-1}(x) = \frac{5}{2}(x - 8)$
- (13) $f^{-1}(x) = \frac{9}{4}x + 3$
- (14) $h^{-1}(x) = -\frac{3}{10}x - 5$
- (15) $f^{-1}(x) = 7x - 12$
- (16a) $f^{-1}(h) = \frac{1}{15}h - \frac{5}{3}$

$f^{-1}(h)$ تمثل عدد ساعات العمل.

17-20 انظر ملحق الاجابات.

مثل كل متباينة مما يأتي بيانياً:

(18) $y \leq -2\sqrt{x}$ (19) $y < \sqrt{x-5}$

(20) $y \geq \sqrt{x+4} - 5$ (21) $y > \sqrt{x+9} + 3$

مثل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانياً، وحدد مجال كل منهما ومداهما:

(22) $y = \sqrt{x+4} - 1$ (23) $y = 2 + \sqrt{x}$

21, 22 انظر ملحق الاجابات.

23 اختيار من متعدد: ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{2x+5}$ ؟

A $\{x | x > \frac{5}{2}\}$ C $\{x | x \geq \frac{5}{2}\}$

B $\{x | x > -\frac{5}{2}\}$ D $\{x | x \geq -\frac{5}{2}\}$

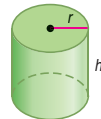
بسّط كلاً مما يأتي:

(24) $\sqrt{121a^4b^{18}}$ (25) $\sqrt{(x^4+3)^{12}}$

(26) $\sqrt[3]{27(2x-5)^{15}}$ (27) $\sqrt[5]{-(y-6)^{20}}$

(28) $\sqrt[3]{8(x+4)^6}$ (29) $\sqrt[4]{16(y+x)^8}$

(30) اختيار من متعدد: نصف قطر الأسطوانة أدناه يساوي ارتفاعها. ويمكن إيجاد نصف قطرها r باستعمال الصيغة $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ ، حيث V حجم الأسطوانة. ما نصف القطر التقريبي للأسطوانة إذا كان حجمها 500 in^3 ؟



- A 2.53 in
B 5.42 in
C 7.94 in
D 24.92 in

(31) إنتاج: إذا كانت تكلفة إنتاج p قطعة بالريالات في مصنع يعبر عنها بالدالة: $C(p) = 5p + 60$. وكان عدد القطع المنتجة في نهاية ساعة عمل يُعبر عنه بالدالة: $P(h) = 40h$.

- (a) أوجد $C[P(h)]$.
- (b) أوجد تكلفة الإنتاج في نهاية 8 ساعات عمل. 1660 SR

إذا كان $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$, $g(x) = 5x - 2$ فأوجد كل دالة مما يأتي: (1-6) انظر الهامش.

(1) $(f + g)(x)$ (2) $(f - g)(x)$

(3) $(f \cdot g)(x)$ (4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

(5) $[f \circ g](x)$ (6) $[g \circ f](x)$

(7) مطاعم: حصل سعيد على قسيمة خصم بنسبة 25% من المبلغ الإجمالي في أحد المطاعم. فإذا أضيف بدل خدمة بنسبة 6% إلى المبلغ الإجمالي بعد خصم نسبة القسيمة.

(a) عبر عن المبلغ الإجمالي بعد خصم القسيمة، والمبلغ النهائي بعد إضافة بدل الخدمة مستعملاً رمز الدالة. اجعل x المبلغ قبل الخصم، $p(x)$ المبلغ بعد الخصم، $g(x)$ المبلغ النهائي بعد إضافة بدل الخدمة.

$p(x) = 0.75x$
 $g(x) = 1.06x$

(b) أي الدالتين الآتيتين تمثل المبلغ النهائي $[g \circ p](x)$ ، $[p \circ g](x)$ ؟ وضح إجابتك. بما أن $g[p(x)] = p[g(x)]$ ، إذن فكلتا الدالتين تمثل المبلغ النهائي.

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا:

(8) $f(x) = 2x + 16$ (9) $g(x) = 4x + 15$

(10) $f(x) = x^2 - 5$ (11) $g(x) = -6x + 8$

(12) $g(x) = 5 + x^{-2}$ (13) $h(x) = \frac{1}{2}x - 8$

(14) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (15) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(16) $f(x) = \frac{4}{9}(x - 3)$ (17) $h(x) = \frac{2}{5}x + 8$

(18) $h(x) = 5 + x^{-2}$ (19) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(20) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (21) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(22) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (23) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(24) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (25) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(26) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (27) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(28) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (29) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(30) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (31) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(32) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (33) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(34) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (35) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(36) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (37) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(38) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (39) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(40) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (41) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(42) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (43) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(44) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (45) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(46) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (47) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(48) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (49) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(50) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (51) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(52) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (53) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(54) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (55) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(56) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (57) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(58) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (59) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(60) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (61) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(62) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (63) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(64) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (65) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(66) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (67) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(68) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (69) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(70) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (71) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(72) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (73) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(74) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (75) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(76) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (77) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(78) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (79) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

(80) $h(x) = -\frac{10}{3}(x + 5)$ (81) $f(x) = \frac{x+12}{7}$

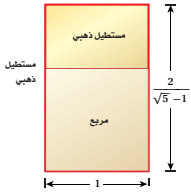
مخطط المعالجة

دون المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط	المستوى 1
أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريباً من الأسئلة أو أقل،	إذا
أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصادر الآتية:	فاختر
تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 31, 36).		مراجعة الدروس 4-1 إلى 4-4.	
www.obeikaneducation.com		تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23).	
		www.obeikaneducation.com	

العمليات على العبارات الجذرية Operations with Radical Expressions

لماذا؟

عُرف المستطيل الذهبي قديمًا، حيث استعمله الفنانون والمهندسون في تصاميمهم، والنسبة بين طوله إلى عرضه هي $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$. ومن أهم خصائصه أنه إذا أزيل منه مربع طول ضلعه هو عرض المستطيل فالشكل الباقي مستطيل ذهبي أيضًا. وستتعلم في هذا الدرس تبسيط عبارات جذرية مثل $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.



تبسيط العبارات الجذرية: يمكن تبسيط العبارات التي تحوي جذورًا نونية باستعمال خواص العمليات عليها.

فيما سبق

درست تبسيط عبارات تتضمن الجذر النوني.

والآن

- أبسط عبارات جذرية.
- أجمع عبارات جذرية وأطرحها وأضربها وأقسمها.

المفردات

إنتاج المقام

rationalizing the denominator

الجذور المتشابهة

like radical expressions

المرافق

conjugate

obeikaneducation.com

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 4-5

تبسيط عبارات تتضمن الجذر النوني.

الدرس 4-5

تبسيط عبارات جذرية

جمع عبارات جذرية، وطرحها وضربها وقسمتها.

ما بعد الدرس 4-5

إيجاد حلول معادلات تتضمن جذورًا تربيعية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" و اسأل:

- هل المقام $1 - \sqrt{5}$ أكبر من 2 أم أقل؟ أقل من 2.
- هل النسبة $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ أكبر من 1 أم أقل؟ أكبر من 1

مفهوم أساسي **خاصية ضرب الجذور**

التعبير اللغوي: لأي عددين حقيقيين a, b ، ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$ ، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ، إذا كانت n عددًا زوجيًا وكان a, b عددين غير سالبين أو إذا كان n عددًا فرديًا.

مثال: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ و $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

ولكي تكون العبارة الجذرية التي تتضمن جذورًا في أبسط صورة، يجب ألا يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تكتب في صورة قوى نونية لعدد صحيح أو كثيرة حدود.

مثال 1 تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية الضرب

بسط كلاً مما يأتي:

(a) $\sqrt{32x^8}$

حل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$$\sqrt{32x^8} = \sqrt{4^2 \cdot 2 \cdot (x^4)^2}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{(x^4)^2} \cdot \sqrt{2}$$

بالتبسيط

$$= 4x^4\sqrt{2}$$

(b) $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$

حل ما يمكن تحليله إلى عوامل مرفوعة للأس 4

$$\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot (a^6)^4 \cdot (b^3)^4 \cdot b}$$

خاصية ضرب الجذور

$$= \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{(a^6)^4} \cdot \sqrt[4]{(b^3)^4} \cdot \sqrt[4]{b}$$

بالتبسيط

$$= 2a^6 |b^3| \sqrt[4]{b}$$

ولا ضرورة لكتابة رمز القيمة المطلقة في هذه الحالة؛ لأنه حتى يكون $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}}$ معرفًا، يجب أن تكون b موجبة.

لذا فإن $\sqrt[4]{16a^{24}b^{13}} = 2a^6 b^3 \sqrt[4]{b}$

تحقق من فهمك

(1A) $\sqrt{12d^3c^{12}}$ (1B) $3y^4z^2\sqrt[3]{z}\sqrt[3]{27y^{12}z^7}$

مصادر الدرس 4-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (209)	• تنويع التعليم، ص (209)	• تنويع التعليم، ص (211)
كتاب التمارين	• ص (28)	• ص (28)	• ص (28)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

أضف إلى مطويتك

خاصية قسمة الجذور

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين a, b ، حيث $b \neq 0$ ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$ فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ، إذا كانت جميع الجذور معرفة.

أمثلة: $\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$

إزالة الجذور من المقام أو الكسور تحت الجذر، استعمل عملية تُسمى **إنطاق المقام**. ولعمل ذلك، اضرب البسط والمقام في مقدار بحيث تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر مما يسهل إيجاد الجذر الدقيق.

مثال	فاضرب البسط والمقام في	إذا كان المقام
$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	\sqrt{b}	\sqrt{b}
$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$	$\sqrt[n]{b^x}$

إرشادات للدراسة

الجذور الدقيقة

يسهل إيجاد الجذور بصورة دقيقة عندما تكون جميع أسس الثوابت والمتغيرات الموجودة تحت الجذر من مضاعفات دليل الجذر، فمثلاً:

$\sqrt{25a^4} = 5a^2$

تبسيط العبارات الجذرية

مثال 1 يبين طريقة استعمال خاصية ضرب الجذور لتبسيط عبارة جذرية.

مثال 2 يبين طريقة استعمال خاصية قسمة الجذور لتبسيط عبارة جذرية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

بسط كلاً مما يأتي:

(a) $5a^2b^4\sqrt{b} \sqrt{25a^4b^9}$

(b) $5m^{10}p^6\sqrt[3]{p^2} \sqrt[3]{125m^{30}p^{20}}$

بسط كلاً مما يأتي:

(a) $\frac{y^4\sqrt{x}}{x^4} \sqrt{\frac{y^8}{x^2}}$

(b) $\frac{\sqrt[3]{6x^2}}{3x} \sqrt[3]{\frac{2}{9x}}$

المحتوى الرياضي

خاصية ضرب الجذور تنص خاصية

ضرب الجذور على أن

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ، وهذه العبارة

صحيحة لأي عددين حقيقيين، عندما

تكون n عدداً صحيحاً فردياً أكبر من 1.

وإذا كان n عدداً زوجياً فإن a, b يجب

أن يكونا عددين حقيقيين غير سالبين.

مثال 2

تبسيط عبارات جذرية باستعمال خاصية القسمة

بسط كلاً مما يأتي:

(a) $\sqrt{\frac{x^6}{y^7}}$

(b) $\sqrt[4]{\frac{6}{5x}}$

خاصية قسمة الجذور

$\sqrt[4]{\frac{6}{5x}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}}$

خاصية قسمة الجذور

$\sqrt{\frac{x^6}{y^7}} = \frac{\sqrt{x^6}}{\sqrt{y^7}}$

إنطاق المقام

$= \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3x^3}}{\sqrt[4]{5^3x^3}}$

حلل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2 \cdot y}}$

خاصية ضرب الجذور

$= \frac{\sqrt[4]{6 \cdot 5^3x^3}}{\sqrt[4]{5x \cdot 5^3x^3}}$

خاصية ضرب الجذور

$= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2} \cdot \sqrt{y}}$

بالضرب

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{\sqrt[4]{5^4x^4}}$

بالتبسيط

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}}$

$\sqrt[4]{5^4x^4} = 5x$

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{5x}$

إنطاق المقام

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$

$\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$

$= \frac{|x^3|\sqrt{y}}{y^4}$

تحقق من فهمك

(2A) $\frac{a^4\sqrt{ab}}{b^3} \frac{\sqrt{a^9}}{\sqrt{b^5}}$

(2B) $\frac{\sqrt[5]{24y^4}}{2y} \sqrt[5]{\frac{3}{4y}}$

إرشادات للمعلم الجديد

خاصية ضرب الجذور عند مناقشة

خاصية ضرب الجذور، أكد على

ضرورة أن يكون كل من a و b عددين

غير سالبين إذا كان n عدداً زوجياً.

فمثلاً $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{-2} \neq \sqrt{16}$ وهذا الشرط

ضروري؛ لأن كل من $\sqrt{-8}$ و $\sqrt{-2}$

ليست أعداد حقيقية.

فيما يأتي ملخص للقواعد التي تستعمل في تبسيط العبارات الجذرية:

ملخص المفاهيم

تبسيط العبارات الجذرية

تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية:

- إذا كان دليل الجذر n أصغر ما يمكن.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تكتب على صورة قوى نونية لعدد صحيح أو لكثيرة حدود.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسورًا.
- إذا لم توجد جذور في المقام.

العمليات على العبارات الجذرية: يمكنك استعمال خاصيتي الضرب والقسمة لضرب بعض العبارات الجذرية وقسمتها.

مثال 3

ضرب العبارات الجذرية

بسط العبارة الجذرية: $5\sqrt{-12ab^4} \cdot 3\sqrt{18a^2b^2}$

$$\begin{aligned} 5\sqrt{-12ab^4} \cdot 3\sqrt{18a^2b^2} &= 5 \cdot 3 \cdot \sqrt{-12ab^4} \cdot \sqrt{18a^2b^2} \\ &= 15 \cdot \sqrt{-2^2 \cdot 3 \cdot ab^4} \cdot \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a^2b^2} \\ &= 15 \cdot \sqrt{-2^3 \cdot 3^3 \cdot a^3b^6} \\ &= 15 \cdot \sqrt{-2^3} \cdot \sqrt{3^3} \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b^6} \\ &= 15 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 \\ &= -90ab^2 \end{aligned}$$

بتحليل الثوابت
بتجميع العوامل على صورة أسس
تكميية، إذا أمكن ذلك
خاصية ضرب الجذور
بالتبسيط
بالضرب

تحقق من فهمك

بسط العبارات الجذرية الآتية:

$$12x^2|y| \quad 2\sqrt[4]{8x^3y^2} \cdot 3\sqrt[4]{2x^5y^2} \quad (3B) \quad 96c^2d^4 \quad 6\sqrt[3]{8c^3d^5} \cdot 4\sqrt[3]{2cd^3} \quad (3A)$$

يمكن جمع العبارات الجذرية وطرحها بالأسلوب المستعمل عند جمع وحيدات الحد أو طرحها، ولكن بشرط أن تكون **الجذور متشابهة**؛ أي أن يكون للجذور الدليل نفسه وما تحت الجذور المقادير نفسها.

غير متشابهين: $\sqrt{3b}$ و $\sqrt{2b}$

غير متشابهين: $\sqrt[3]{3b}$ و $\sqrt{3b}$

متشابهان: $4\sqrt{3b}$ و $\sqrt{3b}$

مثال 4

جمع العبارات الجذرية وطرحها

بسط العبارة الجذرية: $\sqrt{98} - 2\sqrt{32}$

$$\begin{aligned} \sqrt{98} - 2\sqrt{32} &= \sqrt{2 \cdot 7^2} - 2\sqrt{4^2 \cdot 2} \\ &= \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{2} \\ &= 7\sqrt{2} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \\ &= 7\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

حل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة
خاصية ضرب الجذور
بتبسيط العبارات الجذرية
بالضرب
 $(7 - 8)\sqrt{2} = (-1)(\sqrt{2})$

تحقق من فهمك

$$16\sqrt{3} - 8\sqrt{2} \quad 5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - \sqrt{128} \quad (4B) \quad 23\sqrt{2} \quad 4\sqrt{8} + 3\sqrt{50} \quad (4A)$$

إرشادات للدراسة

جمع العبارات الجذرية وطرحها
بسط كل جذر على حدة
قبل محاولة تجميع الجذور المتشابهة.

العمليات على العبارات الجذرية

مثال 3 يبين طريقة استعمال خاصية ضرب

الجذور لضرب عبارات جذرية

مثال 4 يبين طريقة جمع عبارات جذرية أو

طرحها.

مثال 5 يبين طريقة ضرب ثنائيات حدود

تحتوي جذورًا

مثال 6 يبين طريقة استعمال المرافق لإنطاق

مقام عبارة جذرية.

مثالان إضافيان

بسط العبارة الجذرية:

$$50a \sqrt[3]{100a^2} \cdot \sqrt[3]{10a}$$

بسط العبارة الجذرية:

$$3\sqrt{45} - 5\sqrt{80} + 4\sqrt{20} - 3\sqrt{5}$$

تنبيه!

تجنب الأخطاء حث الطلاب

على التحقق من أن إجاباتهم النهائية في أبسط صورة، وذلك عن طريق اختبارها وفق الشروط الأربعة الواردة في ملخص المفاهيم حول تبسيط العبارات الجذرية.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اكتب عبارة على السبورة تتضمن جمع أو طرح عبارات جذرية. ولتبسيط هذه العبارة حرك الحدود المتشابهة لتجمعها معًا. ثم اجمعها وبسط العبارة.

وبما أنه يمكنك جمع الجذور وطرحها بالطريقة نفسها المتبعة في جمع وحدات الحد وطرحها، فإنه يمكنك أيضاً ضرب الجذور باستعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائيي حد.

مثال 5 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية $(4\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 6)$.

$$(4\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 6) = 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} \cdot (-6) + 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \cdot (-6)$$

$$\text{خاصية ضرب الجذور} = 12\sqrt{3} \cdot 2 - 24\sqrt{3} + 15\sqrt{2}^2 - 30\sqrt{2}$$

$$\text{بالتبسيط} = 12\sqrt{6} - 24\sqrt{3} + 30 - 30\sqrt{2}$$

$$12\sqrt{15} + 24\sqrt{6} - 10\sqrt{5} - 20\sqrt{2} \quad (5A)$$

تحقق من فهمك

بسّط كلاً من:

$$71 \quad (7\sqrt{2} - 3\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) \quad (5B)$$

$$(6\sqrt{3} - 5)(2\sqrt{5} + 4\sqrt{2}) \quad (5A)$$

تعتبر كلٌّ من ثنائيي الحد اللتين على الصورة $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ ، $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ حيث a, b, c, d أعداد نسبية مرافقة للأخرى. ويمكنك استعمال المرافقات لإنطاق المقام.

مثال 6 من واقع الحياة استعمال المرافقات لإنطاق المقام

هندسة معمارية: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، واستعمل المرافقات لإنطاق المقام وتبسيط

العبارة الجذرية: $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

$$\sqrt{5} + 1 \text{ مرافق لـ } \sqrt{5} - 1$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$$

بالضرب

$$= \frac{2\sqrt{5} + 2(1)}{(\sqrt{5})^2 + 1(\sqrt{5}) - 1(\sqrt{5}) - 1(1)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{2\sqrt{5} + 2}{5 + \sqrt{5} - \sqrt{5} - 1}$$

بالطرح

$$= \frac{2\sqrt{5} + 2}{4}$$

بالتبسيط

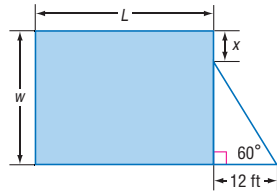
$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$10800\sqrt{3} - 900x$$

$$432 - x^2$$

تحقق من فهمك

6 هندسة: إذا كانت مساحة المستطيل في الشكل المجاور تساوي 900 ft²، فاكتب معادلة تمثل طول المستطيل L بدلالة x ، ثم بسّطها.



مثالان إضافيان

بسّط العبارة الجذرية:

$$(2\sqrt{3} + 3\sqrt{5})(3 - \sqrt{3})$$

$$6\sqrt{3} - 6 + 9\sqrt{5} - 3\sqrt{15}$$

هندسة: مربع طول ضلعه a ،

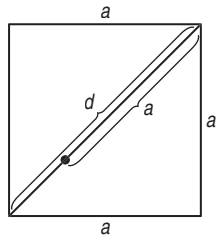
ونسبة طول الضلع إلى الفرق

بين طول القطر وطول الضلع

$$\text{هي: } \frac{a}{a\sqrt{2} - a}$$

استعمل المرافقات لإنطاق مقام النسبة،

ثم بسّطها.



$$\frac{\sqrt{2} + 1}{1} = \sqrt{2} + 1$$

تأكد

الأمثلة 1-5

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{10xy^3} \sqrt[4]{5x} \sqrt[5]{8y} \quad (4) \quad \frac{c^2\sqrt{cd}}{d^5} \frac{\sqrt{c^5}}{\sqrt{d^9}} \quad (5) \quad \sqrt{144x^2y^5} \quad (2) \quad \sqrt{36ab^4c^5} \quad (1) \\ & 36xy \sqrt[3]{36xy} \cdot 2\sqrt[3]{6x^2y^2} \quad (6) \quad 60x \sqrt{5\sqrt{2x}} \cdot 3\sqrt{8x} \quad (5) \\ & 20\sqrt{2} + 13\sqrt{3} \sqrt{5\sqrt{32} + \sqrt{27}} + 2\sqrt{75} \quad (8) \quad 3xy \sqrt[3]{3x^3y^2} \cdot \sqrt[4]{27xy^2} \quad (7) \end{aligned}$$

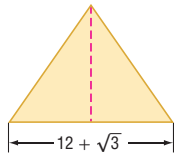
209 الدرس 4-5 العمليات على العبارات الجذرية

تنوع التعليم

دون ضمن

قام بعض الطلاب بجمع العدد 6 مع العدد 11 عند تقديم عبارات جذرية مثل $11 + 6\sqrt{3}$ ،

بمقارنة العبارة الجذرية $11 + 6\sqrt{3}$ بالعبارة $11 + 6x$ لتبيّن لهم أن ذلك غير ممكن، وركّز على أن العبارة الجذرية $6\sqrt{3}$ هي عبارة ضرب تشبه $6x$. وذكرهم أن ترتيب العمليات يستلزم إجراء عملية الضرب قبل عملية الجمع. ربما يجد بعض الطلاب أنه من المفيد إعادة كتابة $11 + 6\sqrt{3}$ على الصورة: $11 + 6 \cdot \sqrt{3}$.



$$(8\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(8\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \quad (10)$$

$$\frac{-40 - 8\sqrt{6}}{19} \cdot \frac{8}{\sqrt{6} - 5} \quad (12)$$

$$\frac{27 - 10\sqrt{3}}{13} \cdot \frac{6 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 4} \quad (14)$$

$$(4 + 2\sqrt{5})(3\sqrt{3} + 4\sqrt{5}) \quad (9)$$

$$\frac{15 - 5\sqrt{2}}{7} \cdot \frac{5}{\sqrt{2} + 3} \quad (11)$$

$$-2 - \sqrt{2} \cdot \frac{4 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 3} \quad (13)$$

$$12\sqrt{3} + 16\sqrt{5} + 6\sqrt{15} + 40 \quad (9)$$

$$3|a^3|bc^2\sqrt{2bc} \quad (18)$$

$$120y\sqrt{2z} \quad (22)$$

$$32a^5b^3\sqrt{b} \quad (23)$$

هندسة: أوجد ارتفاع المثلث في الشكل المجاور في أبسط صورة إذا كانت مساحته $189 + 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$. $32 - 2\sqrt{3} \text{ cm}$ مثال 6

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-15 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 44 ورقة نقطية ونظرية فيثاغورس لاستكشاف العمليات على الجذور المتشابهة.

تنبيه لحل سؤال

ورقة رسم بياني يتطلب السؤال 44 من الطلاب استعمال ورقة نقطية.

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 1-4

بسّط كل عبارة جذرية فيما يأتي: $3a^7b\sqrt{ab}$ (17) $6a^4b^2\sqrt{2b}$ (16)

$$\frac{\sqrt{70xy}}{10y^2} \sqrt{\frac{7x}{10y^3}} \quad (19)$$

$$\sqrt{18a^6b^3c^5} \quad (18)$$

$$\sqrt{9a^{15}b^3} \quad (17)$$

$$\sqrt{72a^8b^5} \quad (16)$$

$$9\sqrt{10} + 8\sqrt{5} + 9\sqrt{2} \quad (24)$$

$$2\sqrt{32a^3b^5} \cdot \sqrt{8a^7b^2} \quad (23)$$

$$3\sqrt{5y} \cdot 8\sqrt{10yz} \quad (22)$$

$$\frac{\sqrt[4]{28b^2x^3}}{2|b|} \sqrt[4]{\frac{7x^3}{4b^2}} \quad (21)$$

$$\frac{\sqrt[3]{150x^2y^2}}{5y} \sqrt[3]{\frac{6x^2}{5y}} \quad (20)$$

$$8\sqrt{7} - 72\sqrt{10} + 2\sqrt{11} \quad (25)$$

$$6\sqrt{3} + 6\sqrt{2} \quad (29)$$

$$8\sqrt{6} + 3\sqrt{2}; 16 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \text{ ft} \quad (26)$$

$$4\sqrt{28} - 8\sqrt{810} + \sqrt{44} \quad (25)$$

$$3\sqrt{90} + 4\sqrt{20} + \sqrt{162} \quad (24)$$

$$\frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2} \quad (30)$$

$$\frac{20 - 7\sqrt{3}}{11} \quad (31)$$



هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور واكتبه في أبسط صورة. ثم أوجد مساحته واكتبها في أبسط صورة.

$$36\sqrt{2} + 36\sqrt{6} + 20\sqrt{3} + 60 \quad (28)$$

$$56\sqrt{3} + 42\sqrt{6} - 36\sqrt{2} - 54 \quad (27)$$

بسّط كلّاً من العبارات الجذرية الآتية:

$$(6\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(2\sqrt{6} + 3\sqrt{8}) \quad (28)$$

$$(7\sqrt{2} - 3\sqrt{3})(4\sqrt{6} + 3\sqrt{12}) \quad (27)$$

المثالان 5, 6

$$2 \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \quad (32)$$

$$\frac{9 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 6} \quad (31)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \quad (30)$$

$$\frac{6}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \quad (29)$$

$$\frac{\sqrt[3]{450y^2z^2}}{5z} \sqrt[3]{\frac{36xy^2}{10xz}} \quad (35)$$

$$\sqrt[4]{\frac{12x^3y^2}{5a^2b}}$$

$$\sqrt[3]{-3x^2y^3\sqrt[3]{2y^2}} \sqrt[3]{-54x^6y^{11}} \quad (34)$$

$$\frac{\sqrt{x^3 - x}}{x^2 - 1} \sqrt{x} \quad (38)$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2} \cdot \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad (37)$$

$$\frac{x + 1}{\sqrt{x} - 1} \quad (36)$$

تفاح: يرتبط قطر التفاحة مع كتلتها بالصيغة $d = \sqrt[3]{3w}$ ، حيث d تمثل القطر بالبوصة، w الكتلة بالأونصات. أوجد قطر تفاحة كتلتها 6.47 أونصات. 2.69 بوصة تقريباً

بسّط كل عبارة جذرية فيما يأتي، حيث b عدد زوجي:

$$|a^3| \sqrt[3]{a^{3b}} \quad (43)$$

$$a^2 \sqrt[3]{a^{2b}} \quad (42)$$

$$a^4 \sqrt[3]{a^{4b}} \quad (41)$$

$$|a| \sqrt[3]{a^b} \quad (40)$$

تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال العمليات على الجذور المتشابهة. $(a - e)$ انظر ملحق الإجابات.

(a) عدددياً: انقل الشكل المجاور على ورقة نقطية. واستعمل نظرية فيثاغورس لإثبات أن طول القطعة المستقيمة الحمراء يساوي $\sqrt{2}$ وحدة.

(b) بيانياً: زد طول القطعة المستقيمة الحمراء ليصبح $\sqrt{2} + \sqrt{2}$.

(c) تحليلياً: استعمل الشكل الذي رسمته لتبين أن: $\sqrt{2} + \sqrt{2} \neq \sqrt{2 + 2} = 2$.

(d) بيانياً: استعمل الورقة النقطية لرسم مربع طول ضلعه $\sqrt{2}$ وحدة.

(e) عدددياً: برهن على أن مساحة المربع تساوي $2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ وحدة مربعة.



الربط مع الحياة

يطفو التفاح الطازج على الماء لأن 25% من حجمه هواء.

$$\frac{\sqrt{1500a^2b^3x^3y^2}}{5|a|b} \quad (34)$$

$$\text{أو } \frac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \quad (36)$$

$$\frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + x + 1}{x-1}$$

210 الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تنوع الواجبات المنزلية

الأسئلة	المستوى
48-61, 47, 43-45, 18-32	دون المتوسط
47-61, 44-45, 42, 40-41, 19-39 فردي	ضمن المتوسط
33-61	فوق المتوسط

مسائل مهارات التفكير العليا

(45) **اكتشف الخطأ:** بسّط كل من خالد وناصر العبارة الجذرية $4\sqrt{32} + 6\sqrt{18}$ ، فمن منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

ناصر

$$\begin{aligned} 4\sqrt{32} + 6\sqrt{18} &= 4\sqrt{16 \cdot 2} + 6\sqrt{9 \cdot 2} \\ &= 64\sqrt{2} + 54\sqrt{2} \\ &= 118\sqrt{2} \end{aligned}$$

خالد

$$\begin{aligned} 4\sqrt{32} + 6\sqrt{18} &= 4\sqrt{4^2 \cdot 2} + 6\sqrt{3^2 \cdot 2} \\ &= 16\sqrt{2} + 18\sqrt{2} \\ &= 34\sqrt{2} \end{aligned}$$

(46) **تحذّر:** بين أن $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ هو جذر تكعيبي للعدد 1. **انظر ملحق الاجابات.**

(47) **تبرير:** ما قيم a ، التي تجعل العبارة الجذرية $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a}$ عددًا حقيقيًا؟ فسر إجابتك.

(48) **مسألة مفتوحة:** أوجد عددًا غير الواحد الصحيح بحيث يكون كل من جذوره: التربيعي، والتكعيبي، والرابع عددًا كليًا موجبًا. **إجابة ممكنة: 4096**

(49) **اكتب:** وضح متى يكون وضع رمز القيمة المطلقة ضروريًا، أو غير ضروري في ناتج تبسيط الجذر النوني لعبارة ما. **انظر الهامش**

(45) خالد: أخطأ ناصر؛ لأنه ضرب العدد 4 في العدد 16 بدلًا من ضرب العدد 4 في العدد 9. كذلك ضرب العدد 6 في العدد 9 بدلًا من ضرب العدد 6 في العدد 3. (47) هي القيمة الوحيدة الممكنة للعدد a لأن \sqrt{a} يساوي عددًا حقيقيًا عندما $a \geq 0$ وكذلك $\sqrt{-a}$ يساوي عدد حقيقي عندما $a \leq 0$.

تنبيه!

اكتشف الخطأ

الطلاب، في السؤال 45، أن ناصرًا قد ارتكب خطأً في كل مرة كان يخرج فيها عاملاً من تحت رمز الجذر التربيعي؛ لذا وضح لهم أن $4\sqrt{16 \cdot 2} = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ وأن $6\sqrt{9 \cdot 2} = 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ كما هو مبين في حل خالد.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب أن يذكروا أوجه الشبه والاختلاف بين جمع عبارات جذرية وجمع عبارات جبرية.

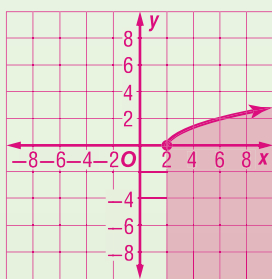
تنبيه!

تجنب الأخطاء

إلى تبسيط عبارات تحوي جذورًا في كثير من دراستهم المستقبلية للجبر. لذا وفر الوقت الكافي لتساعدهم على اكتشاف أخطائهم المفاهيمية وتصويبها عن طريق تحليل الأخطاء التي وقعوا فيها.

إجابات:

(49) إذا كان n عددًا فرديًا فهناك فقط جذر حقيقي واحد، وبناءً على ذلك فلا حاجة إلى استعمال رمز القيمة المطلقة، أما إذا كان n عددًا زوجيًا فإن $\sqrt[n]{x^n} = |x|$



(57) $-\frac{1}{3}, \frac{1+i\sqrt{3}}{6}, \frac{1-i\sqrt{3}}{6}$

تدريب على اختبار

(50) أي العبارات الجذرية الآتية تكافئ العبارة الجذرية $\sqrt{180a^2b^8}$ ؟ **B**

A $5\sqrt{6|a|b^4}$ **B** $6\sqrt{5|a|b^4}$ **C** $3\sqrt{10|a|b^4}$ **D** $36\sqrt{5|a|b^4}$

مراجعة تراكمية

بسّط كلًا من العبارات الجذرية الآتية:

(51) $\sqrt{81x^6}$ (52) $\sqrt[3]{729a^3b^9}$ (53) $|g+5| \sqrt{(g+5)^2}$

(54) مثل المتباينة $y \leq \sqrt{x-2}$ بيانًا. (الدرس: 3-1) **انظر الهامش**

حل كل معادلة مما يأتي: (الدرس: 3-6) **(55) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$** **(56) $x^4 + 6x^2 - 27 = 0$**

(58) **قوارب:** تبيع شركة لصناعة القوارب، 5000 ريال من صنع القارب الصغير، و 9000 ريال من صنع القارب الكبير. فإذا زاد عدد ما أنتجته الشركة من القوارب الصغيرة 5 قوارب على عدد القوارب الكبيرة خلال فصلي الصيف والربيع. وربحت مقابل ذلك 81000 ريال. فكم عدد القوارب التي أنتجتها الشركة من كل نوع؟ (الدرس: 3-6) **4 قوارب كبيرة، 9 قوارب صغيرة.**

أوجد ناتج كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

(59) $3\left(\frac{1}{8}\right)$ (60) $\frac{7}{8} \frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ (61) $\frac{13}{30} \frac{5}{6} - \frac{2}{5}$

الدرس 4-5 العمليات على العبارات الجذرية 211

تنوع التعليم

فوق

توسع أوجد قيمتي a, b اللتين تحققان المعادلة: $\sqrt{\frac{3^a}{7^b}} = \frac{3^2\sqrt{7}}{7^2}$ **$a = 4, b = 3$**



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 4

دون	ضمن	فوق
دون	ضمن	فوق

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-5 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على العبارات الجذرية

المعاملات على الجذور، يمتلك جمع الجذور المشابهة فقط عدد جمع عبارات تحتوي على جذور. ويكون جذوران متشابهين إذا كان لها الدليل نفسه، وما تحت الجذر نفسه.

تستعمل خصائص الضرب والنسبة في ضرب الجذور، ولإيجاد ناتج $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})(e\sqrt{f}+g\sqrt{h})$ استعمل خاصية التوزيع، ولإطلاق المقام استعمل المرافق. تُعد كل من ناتحي الحد التين على الصورة $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ و $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ حيث a, b, c, d أعداد نسبية، مرافقة للأخرى. وحاصل ضرب المقدار بمرافق عدد نسبي دائمًا $2\sqrt{50} + 4\sqrt{500} - 6\sqrt{125}$

مثال 1: $2\sqrt{50} + 4\sqrt{500} - 6\sqrt{125} = 2\sqrt{5 \cdot 2 \cdot 5} + 4\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2} - 6\sqrt{5 \cdot 5 \cdot 5} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot 10 \cdot \sqrt{2} - 6 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} = 10\sqrt{2} + 40\sqrt{2} - 30\sqrt{5} = 50\sqrt{2} - 30\sqrt{5}$

مثال 2: $(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2}) = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2 \cdot 3 + 4\sqrt{6} - 4\sqrt{6} - 16 = -14$

مثال 3: $\frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(2-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{6-2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{9-5} = \frac{6-5\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{11-5\sqrt{5}}{4}$

تدريبات:

بسط كل ما يأتي:

(1) $3\sqrt{2} + \sqrt{50} - 4\sqrt{8}$ (2) $\sqrt{20} + \sqrt{125} - \sqrt{45}$ (3) $\sqrt{300} - \sqrt{27} - \sqrt{75}$

(4) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$ (5) $\sqrt[3]{2(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{12})}$ (6) $2\sqrt{3}(\sqrt{15} + \sqrt{60})$

(7) $(2 + 3\sqrt{7})(4 + \sqrt{7})$ (8) $(6\sqrt{3} - 4\sqrt{2})(3\sqrt{3} + \sqrt{2})$ (9) $(4\sqrt{2} - 3\sqrt{5})(2\sqrt{8} + \sqrt{5})$

(10) $5\sqrt{48} + \sqrt{75}$ (11) $\frac{4 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$ (12) $\frac{5 - 3\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}}$

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-5 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على العبارات الجذرية

تبسيط الجذور

لأي عددين حقيقيين a و b ، وأي عدد صحيح $n > 1$:

(1) إذا كان n عددًا زوجيًا، a, b غير سالبين، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

(2) إذا كان n عددًا فرديًا، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

اتبع الخطوات التالية لتبسيط الجذور التربيعية:

(1) احلل ما تحت الجذور إلى مربعات ما أمكن ذلك.

(2) استعمل خاصية ضرب الجذور لتفصل المربعات الكاملة.

(3) تبسط كل جذر.

لأي عددين حقيقيين a و b ، وأي عدد صحيح $n > 1$:

(1) إذا كانت a و b غير صفرية، فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(2) إذا كانت a و b غير صفرية، فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

لتخلص من الجذور في المقام، والكسور من المقادير تحت الجذور، اضرب كلا من البسط والمقام بمقدار يبسط إجمال الجذر الدقيق (نطاق المقام).

مثال 1: $\sqrt[3]{\frac{8x^3}{45y^3}} = \frac{\sqrt[3]{8x^3}}{\sqrt[3]{45y^3}} = \frac{\sqrt[3]{2^3 \cdot x^3}}{\sqrt[3]{3^3 \cdot 5 \cdot y^3}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{5y}}$

مثال 2: $\sqrt{-16a^2b^2} = \sqrt{(-2)^2 \cdot a^2 \cdot (-b)^2 \cdot b^2} = -2ab\sqrt{2a^2b^2}$

تدريبات:

بسط كل ما يأتي:

(1) $5x^2\sqrt{3y} - \sqrt{75x^2y^3}$ (2) $3\sqrt{2a^2b^2} + \sqrt{2a^2b^2} - \sqrt{32a^2b^2}$

(3) $\frac{pq\sqrt{25p^2}}{10} - \sqrt{\frac{p^2q^2}{40}}$ (4) $\frac{6\sqrt{5}}{25} - \sqrt{\frac{36}{125}}$

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تدريبات حل المسألة (29)

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-5 تدريبات حل المسألة

العمليات على العبارات الجذرية

(1) كميات، يمتلك عمر صندوقًا على شكل متوازي مستطيلات أبعاده 20 بوصة، 35 بوصة، 40 بوصة. ويُريد أن يصنع صندوقًا جديدًا مكعب الشكل له حجم الصندوق السابق نفسه. فما طول ضلع الصندوق الجديد؟ اكتب إجابتك في أبسط صورة.

10/28 بوصة

(2) هزياء، سرعة موجة تنتقل عبر حيط تُعطى بالعلاقة $\sqrt{\frac{d}{t}}$ حيث d قوة شد الحيط، و t كثافة مادة الحيط. اكتب العبارة في أبسط صورة بإطلاق المقام.

$\frac{\sqrt{tu}}{u}$

(3) نفقة، افرض أن شدة إشارة ضوء I_1 عندما كان مصدره على بُعد d_1 ، وهذه إشارة ضوء I_2 عندما كان مصدره على بُعد d_2 . هذه الكميات ترتبط بالمعادلة:

$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$

افرض أن I_1 تساوي 50 وحدة. و d_1 تساوي 24 وحدة، فما قيمة d_2 ؟ اكتب إجابتك في أبسط صورة.

$\frac{5\sqrt{3}}{6}$

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تدريبات المهارات (28)

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-5 تدريبات المهارات

العمليات على العبارات الجذرية

بسط كل ما يأتي:

(1) $2\sqrt{6} - \sqrt{24}$ (2) $\sqrt{75} - 5\sqrt{3}$

(3) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}$ (4) $-\sqrt[3]{48} - 2\sqrt[3]{3}$

(5) $20x^2 - \sqrt{2x} - 4\sqrt{50x^3}$ (6) $\sqrt[3]{64a^3b^3} - 2\sqrt[3]{ab}$

(7) $-2\sqrt[3]{4^2x^2} - \sqrt[3]{-8d^2x^3}$ (8) $\frac{5}{6}\sqrt{11}\sqrt{r} - \sqrt{\frac{25}{36}r^2}$

(9) $-\sqrt{\frac{21}{7}} - \sqrt{\frac{3}{7}}$ (10) $\frac{\sqrt{6}}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}$

(11) $\frac{8\sqrt{10}z}{5z} - \sqrt{\frac{2z^2}{32}}$ (12) $45(3\sqrt{3})(5\sqrt{3})$

(13) $48\sqrt{15} - (4\sqrt{12})(3\sqrt{20})$ (14) $8\sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50}$

(15) $6\sqrt{3} - \sqrt{12} - 2\sqrt{3} + \sqrt{108}$ (16) $\sqrt{5} - \sqrt{45} - \sqrt{80} - \sqrt{8}$

(17) $\sqrt{3} - 2\sqrt{48} - \sqrt{75} - \sqrt{12}$ (18) $(2 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{2})$

(19) $-4 - (1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})$ (20) $(3 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{2})$

(21) $8 - 4\sqrt{3} - (\sqrt{2} - \sqrt{6})^2$ (22) $\frac{21 + 3\sqrt{2}}{47} - \frac{3}{7 - \sqrt{2}}$

(23) $\frac{12 - 4\sqrt{2}}{7} - \frac{4}{3 + \sqrt{2}}$ (24) $\frac{40 + 5\sqrt{6}}{58} - \frac{5}{8 - \sqrt{6}}$

الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 5

دون المتوسط	ضمن	فوق المتوسط
التدريبات الإثرائية (30)		
الاسم: _____ التاريخ: _____		
4-5 التدريبات الإثرائية		
نواتج ضرب خاصة في الجذور		
لاحظ أن $(\sqrt{3})(\sqrt{3})=3$ أو $(\sqrt{3})^2=3$ وعموماً، $(\sqrt{x})^2=x$ حيث $x \geq 0$. ولاحظ أيضاً أن $\sqrt{4}=\sqrt{36}$ ، وعموماً، $\sqrt{a}=\sqrt{a^2}$ حيث $a \geq 0$ وليس سالبين. يمكنك استخدام هذه الأنتكارات لإيجاد حواصل الضرب الخاصة الآتية.		
$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$ $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$		
مثال 1: اوجد ناتج الضرب: $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = 2 - 5 = -3$		
مثال 2: اوجد قيمة: $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + (\sqrt{8})^2$ $= 2 + 2\sqrt{16} + 8 = 2 + 2(4) + 8 = 2 + 8 + 8 = 18$		
تقارن: اوجد ناتج الضرب في كل ما يأتي: (1) $(\sqrt{3} - \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{7}) = 3 - 7 = -4$ (2) $(\sqrt{10} + \sqrt{2})(\sqrt{10} - \sqrt{2}) = 10 - 2 = 8$ (3) $(\sqrt{2x} - \sqrt{6})(\sqrt{2x} + \sqrt{6}) = 2x - 6$ (4) $(\sqrt{3} - (-7))^2 = (\sqrt{3} + 7)^2 = 3 + 14\sqrt{3} + 49 = 52 + 14\sqrt{3}$ (5) $(\sqrt{1000} + \sqrt{10})^2 = 1000 + 2\sqrt{10000} + 10 = 1010 + 200\sqrt{10}$ (6) $(\sqrt{y} + \sqrt{5})(\sqrt{y} - \sqrt{5}) = y - 5$ (7) $(\sqrt{5} - \sqrt{x})^2 = 5 - 2\sqrt{5x} + x$ (8) $(\sqrt{x} + 20)^2 = x + 40\sqrt{x} + 400$		
يمكنك توسيع الأنتكارات السابقة لتتضمن أي زوج من الجذور. ادرس النمط التالي، ثم أكمل الأسئلة 9-12.		
(9) $(\sqrt{8} - \sqrt{2})(\sqrt{8} + \sqrt{2}) = 8 - 2 = 6$ (10) $(\sqrt{y} + \sqrt{w})(\sqrt{y} - \sqrt{w}) = y - w$ (11) $(\sqrt{7} + \sqrt{20})(\sqrt{7} - \sqrt{20}) = 7 - 20 = -13$ (12) $(\sqrt{11} - \sqrt{8})(\sqrt{11} + \sqrt{8}) = 11 - 8 = 3$		
الفصل 4: العلاقات والعمليات الجبرية		

دون	ضمن	فوق
كتاب التمارين (28)		
4-5 العمليات على العبارات الجذرية		
ينطبق كل ما يأتي:		
(1) $6\sqrt{15}$	(2) $\sqrt{-432}$	(3) $\sqrt{540}$
(4) $-3\sqrt{5}$	(5) $\sqrt{-5000}$	(6) $\sqrt{-1215}$
(7) $5x^2\sqrt{125x^2}$	(8) $2x^2\sqrt{3z}$	(9) $2gk^2\sqrt{k^2}$
(10) $3xy^2\sqrt{5x}$	(11) $\frac{\sqrt{11}}{3}$	(12) $\sqrt[3]{\frac{216}{24}}$
(13) $\frac{1}{16}x^2\sqrt{2x}$	(14) $\frac{3x^2\sqrt{a}}{80^2}$	(15) $\frac{\sqrt{72a}}{3a}$
(16) $-180\sqrt{3}(3\sqrt{15})(-4\sqrt{45})$	(17) $168\sqrt{5}(2\sqrt{24})(7\sqrt{18})$	(18) $\sqrt{810} + \sqrt{240} - \sqrt{250}$
(19) $6\sqrt{20} + 8\sqrt{5} - 9\sqrt{45}$	(20) $8\sqrt{48} - 6\sqrt{75} + 7\sqrt{80}$	(21) $4\sqrt{10} + 4\sqrt{15}$
(22) $(3 - \sqrt{7})^2$	(23) $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$	(24) $(\sqrt{2} + \sqrt{10})(\sqrt{2} - \sqrt{10})$
(25) $(1 + \sqrt{6})(5 - \sqrt{7})$	(26) $(\sqrt{3} + 4\sqrt{7})^2$	(27) $(\sqrt{108} - 6\sqrt{3})^2$
(28) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 2}$	(29) $\frac{6}{\sqrt{2} - 1}$	(30) $\frac{17 - \sqrt{3}}{13}$
(31) $\frac{8 + 5\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$	(32) $\frac{3 + \sqrt{6}}{5 - \sqrt{24}}$	(33) $\frac{6 + 5\sqrt{x} + 3}{4 - x}$
34 متابع، لتستعمل الصيغة $s = 2\sqrt{5}t$ لتقدير سرعة سيارة س بالميل لكل ساعة لحظة الضغط على المكابح، حيث t طول أتر احتكاك عجلاتها بالطريق مقبلاً بالأقدام. استعمل الصيغة لتعبر عن السرعة s في أبسط صورة، إذا كان $s = 85$ ، ثم أوجد قيمة s مقربة إلى أقرب ميل في الساعة. $10\sqrt{17}; 41 \text{ mi/h}$		
35 نظرية فيثاغورس، يُعطي طولاً سائلياً مثلث قائم الزاوية بالعبارة $6x^2y$ و $9x^2y^2$. استعمل هذه النظرية لإيجاد عبارة في أبسط صورة تمثل طول الوتر. $3x^2 y \sqrt{13}$		
28		

الأسس النسبية Rational Exponents



لماذا؟

يمكن أن تستعمل الصيغة $P = c(1 + r)^n$ لتقدير الثمن المستقبلي لسلعة اعتماداً على التضخم المالي، حيث P يمثل الثمن المستقبلي، c تمثل الثمن الحالي، r يمثل معدل التضخم، n تمثل عدد السنوات المستقبلية. فمثلاً يمكن أن تستعمل الصيغة

$$P = c(1 + r)^{\frac{1}{2}}$$

لتقدير الثمن المستقبلي لجهاز تبريد ماء في ستة أشهر.

الأسس النسبية والعبارات الجذرية: تعلم أن تربيع عدد غير سالب وإيجاد جذره التربيعي هما عمليتان عكسيتان. ولكن كيف يمكنك إيجاد قيمة عبارة تتضمن أساً نسبياً كما في الصيغة أعلاه؟ يمكنك إيجاد قيم مثل هذه العبارات بافتراض أن عبارات الأسس النسبية يصح فيها ما يصح في عبارات الأسس الصحيحة.

$$\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{اكتبه على صورة حاصل ضرب} \quad = b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$\text{اجمع الأسس} \quad = b^1 = b$$

$$\text{بسّط} \quad = b^1 = b$$

$$\text{لذا فإن } b^{\frac{1}{2}} \text{ هو عدد مربعه يساوي } b \text{؛ إذن } b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$$

فيما سبق

درست استعمال خصائص الأسس.

والآن

- أكتب عبارات ذات أسس نسبية بالصورة الجذرية وبالعكس.
- أبسّط عبارات أسية أو جذرية.

obeikaneducation.com

1 التركيز

التربيط الرأسي

ما قبل الدرس 4-6

استعمال خصائص الأسس.

الدرس 4-6

كتابة عبارات ذات أسس نسبية بالصورة الجذرية وبالعكس.
تبسيط عبارات أسية أو جذرية.

ما بعد الدرس 4-6

إيجاد حلول معادلات تتضمن جذوراً تربيعية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

و اسأل:

- ما أس c في الصيغة $P = c(1 + r)^n$ ؟ أس c هو 1.
- ما العبارة المرفوعة إلى الأس n ؟ n هي أس للمقدار $(1 + r)$.
- لماذا كان الأس $\frac{1}{2}$ في الصيغة الأخيرة؟ n تمثل عدد السنوات، وستة أشهر تساوي نصف سنة.

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

الأسس النسبية ($b^{\frac{1}{n}}$)

التعبير اللفظي: لأي عدد حقيقي b ، وأي عدد صحيح موجب n ، $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ ، إلا إذا كانت $b < 0$ ، و n عدداً زوجياً فإن الجذر النوني يكون عدداً مركباً.

$$\text{مثالان: } 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3 \quad , \quad (-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16} = 4i$$

مثال 1

الصورتان الجذرية والأسية

(a) اكتب $x^{\frac{1}{6}}$ على الصورة الجذرية. (b) اكتب $\sqrt[4]{z}$ على الصورة الأسية.

$$\text{تعريف } b^{\frac{1}{n}} \quad x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x} \quad \text{تعريف } \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$$

تحقق من فهمك

- (1A) اكتب $a^{\frac{1}{5}}$ على الصورة الجذرية. $\sqrt[5]{a}$ (1B) اكتب $\sqrt[3]{c}$ على الصورة الأسية. $c^{\frac{1}{3}}$
(1C) اكتب $d^{\frac{7}{4}}$ على الصورة الجذرية. $\sqrt[4]{d^7}$ (1D) اكتب $\sqrt[3]{c^{-5}}$ على الصورة الأسية. $c^{-\frac{5}{3}}$

مصادر الدرس 4-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنوع التعليم ص (213)	• تنوع التعليم (213, 214)	• تنوع التعليم ص (214)
كتاب التمارين	• ص (29)	• ص (29)	• ص (29)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

أضف إلى
طويبتك

الأسس النسبية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: يكون $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = (\sqrt[y]{b})^x$ لأي عدد حقيقي $b \neq 0$ يساوي صفرًا، ولأي عددين صحيحين x, y بحيث $y > 1$ ، إلا إذا كانت $b < 0$ و y عددًا زوجيًا، فإن الجذر قد يكون عددًا مركبًا.

مثالان: $27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$ ، $(-16)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{-16})^3 = (4i)^3 = -64i$

كما أن القواعد التي تنطبق على الأسس الصحيحة السالبة تنطبق أيضًا على الأسس النسبية السالبة.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية

اكتب عبارة بأس نسبي على السبورة.

اعرض قالبًا، مثل: $a^{\frac{0}{0}} = \sqrt[0]{a^0}$

ثم حرّك بسط الأس ومقامه لإعادة كتابة هذه العبارة على الصورة الجذرية.

الأسس النسبية والعبارات الجذرية

مثال 1 يبيّن طريقة كتابة عبارات على الصورتين الجذرية والأسية.

مثال 2 يبيّن طريقة إيجاد قيم عبارات تتضمن أسسًا نسبية.

مثال 3 يبيّن طريقة استخدام الأسس النسبية في مثال من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

أمثلة إضافية

1 اكتب $a^{\frac{1}{7}}$ على الصورة الجذرية. $\sqrt[7]{a}$

2 اكتب \sqrt{w} على الصورة الأسية. $w^{\frac{1}{2}}$

3 أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (a) $49^{-\frac{1}{2}}$ (b) $32^{\frac{2}{5}}$

4 رفع الأثقال: يمكن استعمال الصيغة

$$M = 512 - 146230B^{-\frac{8}{5}}$$

أكبر كتلة بالكيلوجرامات يمكن لرافع أثقال كتلته B كيلوجرامًا أن يرفعها.

بالاعتماد على هذه الصيغة

ما أكبر كتلة يمكن أن يرفعها

رافع أثقال كتلة 168 كيلوجرامًا؟

بالاعتماد على الصيغة يتوقع أنه

يستطيع رفع 472 كيلوجرامًا على

الأكثر.

مثال 2

إيجاد قيم عبارات تتضمن أسسًا نسبية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

$81^{-\frac{1}{4}}$ (a)	$216^{\frac{2}{3}}$ (b)	$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$	$81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}}$
$81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}}$	$216^{\frac{2}{3}} = (6^3)^{\frac{2}{3}}$	$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81}$	$= \frac{1}{\sqrt[4]{81}}$
$= \frac{1}{\sqrt[4]{81}}$	$= 6^{3 \cdot \frac{2}{3}}$	$81 = 3^4$	$= \frac{1}{\sqrt[4]{3^4}}$
$= \frac{1}{\sqrt[4]{3^4}}$	$= 6^2$	بالتبسيط	$= \frac{1}{3}$
	$= 36$		

تحقق من فهمك

(2A) $-3125^{-\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}$ (2B) $8 \cdot 256^{\frac{3}{8}}$

مثال 3 من واقع الحياة

حل معادلات تتضمن أسسًا نسبية

تقافة مائية: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وافترض أن ثمن جهاز تبريد الماء الآن 390 ريالًا. فكم سيزيد الثمن خلال ستة أشهر إذا كان معدل التضخم المالي السنوي 5.3%؟

$$P = c(1+r)^n$$

$$= 390(1 + 0.053)^{\frac{6}{12}}$$

$$\approx 400.20$$

الصيغة
بالتبسيط
باستعمال الحاسبة

400.20 - 390.00 = 10.20 إذن سيزيد ثمن جهاز تبريد الماء بعد ستة أشهر بمقدار 10.20 ريالًا تقريبًا.

تحقق من فهمك

3 افترض أن ثمن لتر الحليب الآن 4 ريالًا. فكم سيزيد الثمن بعد تسعة أشهر، إذا كان معدل التضخم المالي السنوي 5.3%؟ **0.16 ريال تقريبًا**

تبسيط العبارات: خواص الأسس التي تعلمتها سابقًا تنطبق أيضًا على الأسس النسبية؛ لذا اكتب كل عبارة على صورة أسس موجبة. واحرص على أن تكون الأسس في مقام الكسر أعدادًا صحيحة موجبة؛ لذلك يمكن أن يكون من الضروري إنطاق المقام.

الدرس 4-6 الأسس النسبية 213

تنوع التعليم

دون ضمن

ثم يقرأ بعض الطلاب الأسس على نحو صحيح،

إذا

بتشجيعهم على قراءتها بصوت عالٍ، بطريقة تميزها عن المعامل أو العدد الذي تم ضربه. واطلب إليهم التدريب على قراءة الأسس على نحو صحيح، مثل: قراءة x^3 على أنها "مرفوعة للقوة 3" أو "x تكعيب". ثم اطلب إليهم أيضًا التدريب على قراءة عبارات جذرية على نحو صحيح؛ مثل قراءة $\sqrt[3]{y}$ على أنها "الجذر التربيعي لـ y تكعيب" أو "الجذر التربيعي للقوة الثالثة لـ y".

فقط

تبسيط عبارات بأسس نسبية

مثال 4

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}} \quad (a) \quad b^{-\frac{5}{6}} \quad (b)$$

$$a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}} = a^{\frac{2}{7} + \frac{4}{7}} \quad \text{خاصية ضرب القوى}$$

$$= a^{\frac{6}{7}} \quad \text{جمع الأسس}$$

$$b^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}}$$

$$= \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$$

$$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{6}{6}}}$$

$$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b}$$

لماذا نضرب في $\frac{1}{b^{\frac{1}{6}}}$ ؟

$$b^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{5}{6} + \frac{1}{6}}$$

$$b^{\frac{6}{6}} = b^1 = b$$

تحقق من فهمك

$$r^{\frac{1}{5}} r^{-\frac{4}{5}} \quad (4B)$$

$$p^{\frac{5}{2}} p^{\frac{1}{4}} \cdot p^{\frac{9}{4}} \quad (4A)$$

عند تبسيط عبارة جذرية اجعل دليل الجذر أقل ما يمكن. وتذكر أن استعمال الأسس النسبية يسهّل هذه العملية، وبعد الانتهاء من استعمال الأسس النسبية، أعد كتابة الناتج في الصورة الجذرية.

تبسيط العبارات الجذرية

مثال 5

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\sqrt[4]{9g^2} \quad (b) \quad \frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}} \quad (a)$$

$$\sqrt[4]{9g^2} = (9g^2)^{\frac{1}{4}} \quad \text{الأسس النسبية}$$

$$\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}} = \frac{27^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$$

$$9g^2 = (3g)^2 \quad \text{خاصية قوة القوة}$$

$$= [(3g)^2]^{\frac{1}{4}}$$

$$27 = 3^3$$

$$= \frac{(3^3)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$$

خاصية قوة القوة

$$= (3g)^{\frac{1}{2}}$$

خاصية قوة القوة

$$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}}$$

الأسس النسبية

$$= \sqrt{3g}$$

خاصية قسمة قوتين

$$= 3^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}$$

بالتبسيط

$$= 3^{\frac{1}{4}}$$

إعادة كتابة العبارة على الصورة الجذرية

$$= \sqrt[4]{3}$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2} \quad (c)$$

$$3x^{\frac{1}{2}} + 2 \text{ مرافق } 3x^{\frac{1}{2}} - 2 \quad \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2} = \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} + 2} \cdot \frac{3x^{\frac{1}{2}} - 2}{3x^{\frac{1}{2}} - 2}$$

المحتوى الرياضي

الأسس النسبية هناك قيود على

المتغيرات b, m, n

في التعريف العام للأسس النسبية،

$$(b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m)$$

وهي: يجب أن يكون المتغير b عددًا

حقيقيًا غير صفري إلا عندما يكون n

عددًا زوجيًا فعندئذٍ يجب أن يكون

b عددًا حقيقيًا موجبًا. يجب أن يكون

المتغير m عددًا صحيحًا، والمتغير

n عددًا طبيعيًا. ولا تقلل القيود على

المتغيرين m, n من عمومية التعريف؛

لأن أي عدد نسبي يمكن التعبير عنه

على صورة ناتج قسمة عدد صحيح على

عدد طبيعي

تبسيط العبارات

مثال 4 يبيّن طريقة تبسيط عبارات بأسس نسبية.

مثال 5 يبيّن طريقة تبسيط عبارات جذرية.

مثال إضافي

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$y^{\frac{5}{7}} y^{\frac{1}{7}} \cdot y^{\frac{4}{7}} \quad (a)$$

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} x^{-\frac{2}{3}} \quad (b)$$

تنوع التعليم

ضمن هون

توسع افترض أن x و y عدنان حقيقيان غير سالبين.

$$\text{وأوجد ناتج الضرب: } (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) \quad x - y$$

تنبيه

تجنب الأخطاء إذا واجه بعض

الطلاب صعوبة في تحديد أي جزء

من الأس الكسري هو دليل الجذر،

فاقترح عليهم مراجعة التعريف

$$\text{الأساسي: } \frac{1}{b^2} = \sqrt{b}$$

مثال إضافي

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$\sqrt[3]{2} \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} \quad (a)$$

$$\sqrt[3]{2x^2} \sqrt[6]{4x^4} \quad (b)$$

$$\frac{y + 2y^{\frac{1}{2}} + 1}{y - 1} \frac{y^{\frac{1}{2}} + 1}{y^{\frac{1}{2}} - 1} \quad (c)$$

5

إرشادات للمعلم الجديد

التحقق من صحة الإجابة حثّ الطلاب على تعويض قيم في كل من: العبارة الأصلية والعبارة بعد تبسيطها، فإذا كانت قيم العبارتين متساوية، فإن حلهم صحيح في الأغلب.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-15 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

$$\begin{aligned} &= \frac{3x^{\frac{2}{3}} - 8x^{\frac{1}{3}} + 4}{9x^{\frac{2}{3}} - 4} \\ &= \frac{3x - 8x^{\frac{1}{3}} + 4}{9x - 4} \end{aligned}$$

بالضرب

بالتبسيط

تحقق من فهمك

$$\frac{y + 4y^{\frac{1}{2}} + 4}{y - 4} \frac{y^{\frac{1}{2}} + 2}{y^{\frac{1}{2}} - 2} \quad (5C)$$

$$2x\sqrt[3]{2x} \sqrt[3]{16x^4} \quad (5B)$$

$$\sqrt[12]{211} \frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{2}} \quad (5A)$$

إرشادات للدراسة

العبارات الجذرية والأسية

اكتب العبارة بعد تبسيطها (النتائج النهائية) على الصورة التي كان عليها قبل التبسيط؛ أي إذا بدأت بعبارة جذرية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الجذرية، وإذا بدأت بعبارة تتضمن أسساً نسبية، فاكتب الناتج النهائي على الصورة الأسية.

ملخص المفاهيم

عبارات تتضمن أسساً نسبية

تكون العبارات التي تتضمن أسساً نسبية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط الآتية:

- جميع الأسس غير سالبة.
- جميع الأسس في المقام هي أعداد صحيحة موجبة.
- لا يتضمن أي من البسط أو المقام أو كليهما كسراً.
- دليل الجذر أو الجذور المتبقية فيها أصغر ما يمكن.

تأكد

اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسية في كل مما يأتي:

$$10^{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{10} \quad (1) \quad x^{\frac{3}{5}} \sqrt[5]{x^3} \quad (2) \quad \sqrt[3]{15} \sqrt[3]{15} \quad (3) \quad \sqrt[9]{7x^6y^9} \sqrt[4]{x^2y^4} \quad (4)$$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

$$343^{\frac{1}{3}} \quad (5) \quad 32^{-\frac{1}{5}} \quad (6) \quad 125^{\frac{2}{3}} \quad (7) \quad \frac{24}{4^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

(9) إذا علمت مساحة مربع، فإنه يمكن إيجاد طول ضلعه l باستعمال القانون $l = A^{\frac{1}{2}}$. فإذا علمت أن مساحة حديقة مربعة الشكل $169m^2$ ، فما طول ضلعها؟ $13m$

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$a^{\frac{5}{4}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \quad (10) \quad x^{\frac{3}{5}} \cdot \frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}} \quad (11) \quad b^{\frac{8}{3}} c^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{b^3}{c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{c}{b^{\frac{1}{3}}} \quad (12)$$

$$4z^2 \sqrt[3]{64z^6} \quad (13) \quad \sqrt[5]{16} \cdot \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[4]{4}} \quad (14) \quad \frac{g - 2g^{\frac{1}{2}} + 1}{g - 1} \cdot \frac{g^{\frac{1}{2}} - 1}{g^{\frac{1}{2}} + 1} \quad (15)$$

تدرب وحل المسائل

اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسية في كل مما يأتي:

$$5x^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{625x^2} \quad (19) \quad 17^{\frac{1}{2}} \sqrt{17} \quad (18) \quad \sqrt{x^9} (x^3)^{\frac{3}{2}} \quad (17) \quad \sqrt[5]{8} \cdot 8^{\frac{1}{5}} \quad (16)$$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{1}{9} (-27)^{-\frac{2}{3}} \quad (23) \quad \frac{1}{4} 16^{-\frac{1}{2}} \quad (22) \quad 4 \cdot 256^{\frac{1}{4}} \quad (21) \quad 3 \cdot 27^{\frac{1}{3}} \quad (20)$$

الدرس 4-6 الأسس النسبية 215

تنوع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	49-67، 47، 16-29
ضمن المتوسط	17-31، فردي، 34-38، 40-42، 45-47، 49-67
فوق المتوسط	30-67

$$v = 455 \text{ in}^3 \quad v = 413 \text{ in}^3$$



مثال 3 (24) كرة سلة: يوجد حجمان لكرة السلة؛ حجم كبير وآخر صغير، كما في

الصورة جانبًا. فإذا كان نصف قطر الكرة r التي تسع V وحدة مكعبة من الهواء

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

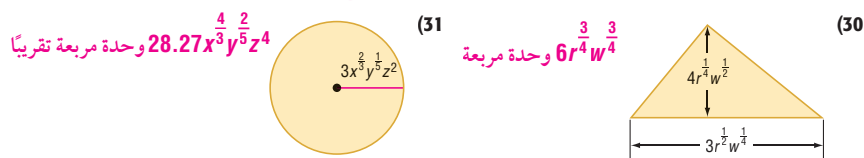
(a) فأوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الصغير. **4.62 in تقريبًا**

(b) أوجد نصف قطر كرة السلة ذات الحجم الكبير. **4.77 in تقريبًا**

بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$(25) \quad x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}} \cdot x^{\frac{1}{15}} \quad (26) \quad y^{-\frac{4}{5}} \cdot y^{\frac{1}{5}} \quad (27) \quad \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} \quad (28) \quad \sqrt[4]{25x^2} \quad (29) \quad \sqrt{5|x|} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}} + 2}{x^{\frac{1}{4}} - 2}$$

هندسة: أوجد مساحة كل شكل فيما يأتي: (29) $x + 4x^{\frac{3}{4}} + 8x^{\frac{1}{2}} + 16x^{\frac{1}{4}} + 16$ $x - 16$



(32) ما أبسط صورة للعبارة $32^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} + 18^{\frac{1}{2}}$ ؟ **0**

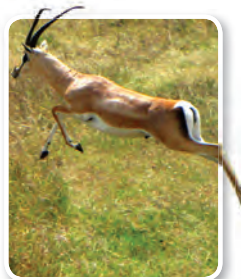
بسّط كل عبارة مما يأتي:

$$(33) \quad a^3 \cdot a^{\frac{7}{4}} \cdot a^{\frac{5}{4}} \quad (34) \quad \left(y^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{4}} \quad (35) \quad \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{216} \quad (36) \quad \frac{w^{\frac{8}{3}}}{w} \cdot w^{-\frac{7}{8}}$$

(37) محميات: إذا افترضنا أن عدد الغزلان يتضاعف في المحميات الطبيعية كل سنتين. فإذا كان في المحمية

100 غزال، وكان عدد الغزلان D بعد t من السنوات يعبر عنه بالصيغة $D = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$ ، فأجب عما يأتي:

- (a) ماذا يصبح عدد الغزلان بعد أربع سنوات ونصف؟
 (b) اعمل جدولاً يحدد عدد الغزلان في كل سنة من السنوات الخمس القادمة.
 (c) مثل بيانيًا بيانات الجدول الذي كوّنته في الفرع b.
 (d) قرّر باستعمال الجدول، والتمثيل البياني: هل عدد الغزلان في المحمية معقول على المدى البعيد أم لا؟ ووضح إجابتك.



الربط مع الحياة

الطريقة الأكثر دقة لتحديد عمر بعض أنواع الغزلان هي النظر إلى مقطع عرضي لإحدى أسنانه، حيث تنمو كل فصل شتاء طبقة كلسية تكسو السن على شكل حلقة، وكل حلقة تمثل سنة كما هو الحال في حلقات جذع الشجرة.

بسّط كل عبارة مما يأتي: (41) $23^{\frac{3}{2}} \cdot 23$ (45) $2\sqrt{6} - 5$

$$(38) \quad \frac{f^{\frac{7}{12}}}{4f} \cdot f^{-\frac{1}{4}} \quad (39) \quad \frac{g^{\frac{5}{2}}}{g^{\frac{1}{2}} + 2} \cdot \frac{g^{\frac{5}{2}}}{g - 4} \quad (40) \quad \frac{c^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{6}}}$$

$$(42) \quad 3\sqrt{\sqrt{81}} \quad (43) \quad 2\sqrt[4]{\sqrt{256}} \quad (44) \quad \frac{xy\sqrt[3]{z^2}}{z} \cdot \frac{xy}{\sqrt[3]{z}} \quad (45) \quad \frac{8^{\frac{1}{6}} - 9^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

(46) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا السؤال الدالتين:

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

(a) **جدولياً:** انسخ الجدول المجاور، وأكمّله.

(b) **بيانيًا:** مثل بيانيًا كلاً من: $f(x)$, $g(x)$. **انظر الهامش.**

(c) **لفظياً:** ما التحويل الهندسي الذي يصف العلاقة بين تمثيليهما البيانيين؟

x	$f(x)$	$g(x)$
-2	-8	-1.26
-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1
2	8	1.26

انعكاس حول المحور $y = x$

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب

في السؤال 46 جدول القيم والتمثيل البياني؛ للمقارنة بين دالة تكعيبية ودالة أس نسبي.

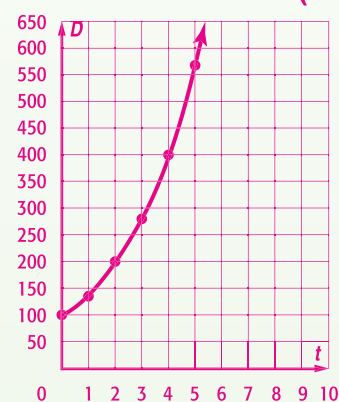
إجابات:

(37a) 476 تقريبًا

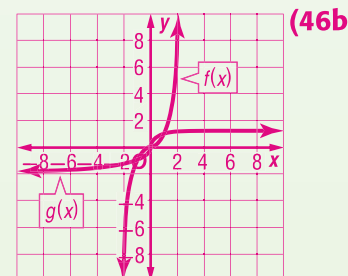
(37b)

السنة	0	1	2	3	4	5
عدد الغزلان	100	141	200	283	400	567

(37c)



(37d) إجابة ممكنة: لا؛ ليس معقولاً القول بأن العدد سيستمر في الزيادة من دون حدود. وهو لم يأخذ بعين الاعتبار أعداد الغزلان الهائلة.



مسائل مهارات التفكير العليا

- (47) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت المعادلة $-x^{-2} = (-x)^{-2}$ صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً. وضع إجابتك.
- (48) **اكتشف الخطأ:** بسّط كل من محمود وعلي العبارة $\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ ، فهل إجابة أيّ منهما صحيحة؟

علي	محمود
$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}$ $= x^{\frac{3}{4} + \frac{2}{4}}$ $= x^{\frac{5}{4}}$	$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}$ $= x^{\frac{3}{4} - \frac{2}{4}}$ $= x^{\frac{1}{4}}$

- (49) **مسألة مفتوحة:** أوجد عبارتين مختلفتين على الصورة $x^{\frac{1}{6}}$ بحيث تكون قيمة كل منهما 2.
- (50) **اكتب:** وضّح كيف يمكن أن يكون استعمال الأسس النسبية لتبسيط عبارة أسهل من استعمال الجذور.

- (47) غير صحيحة أبداً؛ فعندما يكون معامل الأساس سالباً والأس زوجياً يكون الناتج موجباً. وإذا ضربت القوة ذات الأس الزوجي في عدد سالب يكون الناتج سالباً.
- (48) إجاباتهما خاطئة؛ لأن علي قسم الأسس بدلاً من أن يطرحها، ومحمود جمع الأسس.
- (49) $\frac{1}{42}, \frac{1}{164}$

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدتهم الدرس السابق الذي تضمن العبارات الجذرية على كتابة عبارات بأسس نسبية في هذا الدرس وتبسيطها.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرسين 4-6، 4-5 بإعطائهم: الاختبار القصير 3، ص (69).

إجابات:

(50) **إجابة ممكنة:** قد يكون من الأسهل تبسيط عبارات تتضمن أسساً نسبية؛ لأنه يمكن تطبيق جميع خصائص الأسس عليها، في حين لا يوجد الكثير من الخصائص للجذور. حيث يمكننا تحويل كل عبارة جذرية إلى عبارة بأس نسبي، ثم استعمال خصائص الأسس للتبسيط.

$$20; x^2 + 2xh + h^2 - x - h \quad (61)$$

(62)

$$-129; 2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 1$$

$$(f+g)(x) = x^2 + 3x + 1 \quad (63)$$

$$(f-g)(x) = -3x^2 - 3x + 11$$

$$(f.g)(x) = -2x^4 - 3x^3 + 17x^2 + 18x - 30$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{-x^2 + 6}{2x^2 + 3x - 5}, x \neq 1, x \neq -\frac{5}{2}$$

$$(f+g)(x) = 2x^2 - x + 8 \quad (64)$$

$$(f-g)(x) = 2x^2 + x - 8$$

$$(f.g)(x) = 16x^2 - 2x^3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^2}{8-x}, x \neq 8$$

تدريب على اختبار

- (51) تكون العبارة $\sqrt{56-c}$ مساوية لعدد صحيح موجب عندما تكون قيمة c هي: **B**
- (52) ما قيمة p التي تحقق المعادلة: $3^5 \cdot p = 3^3$ ؟ **B**
- 8 **A** -8 **B** 56 **C** 36 **D**
- 2⁻³ **A** 3⁻² **B** 3² **C** 2³ **D**

مراجعة تراكمية

بسّط كلّ مما يأتي: (الدرس: 4-5)

$$\sqrt[3]{243} \quad (53)$$

$$2y\sqrt[3]{16y^3} \quad (54)$$

$$3\sqrt[3]{56y^6z^3} \quad (55)$$

$$6y^2z\sqrt[3]{7} \quad (55)$$

(56) **فيزياء:** تعطى سرعة الصوت في سائل بالعلاقة $s = \sqrt{\frac{B}{d}}$ ، حيث B معامل تغيّر حجم السائل، d كثافة السائل. أما بالنسبة للماء، فإن $B = 2.1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ، $d = 10^3 \text{ kg/m}^3$. أوجد سرعة الصوت في الماء لأقرب متر لكل ثانية. (الدرس: 4-5) **1449 m/s** تقريباً

أوجد $p(-4)$ ، $p(x+h)$ لكل دالة مما يأتي: (الدرس: 1-2)

$$(57) \quad p(x) = x - 2 \quad (58) \quad p(x) = -x + 4 \quad (59) \quad p(x) = 6x + 3 \quad (60) \quad p(x) = x^2 + 5$$

$$(61) \quad p(x) = x^2 - x \quad (62) \quad p(x) = 2x^3 - 1 \quad (63) \quad p(x) = 2x^3 - 1$$

$$21; x^2 + 2xh + h^2 + 5$$

أوجد $(f+g)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f.g)(x)$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل الدالتين فيما يأتي: (الدرس: 4-1) **(63.64)** انظر الهامش.

$$(64) \quad f(x) = 2x^2 \quad (65) \quad f(x) = -x^2 + 6$$

$$g(x) = 8 - x \quad (66) \quad g(x) = 2x^2 + 3x - 5$$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس: 4-5)

$$(67) \quad 4x - 20\sqrt{x} + 25 \quad (68) \quad (2\sqrt{x} - 5)^2 \quad (69) \quad 3x - 4 \quad (70) \quad (\sqrt[3]{3x-4})^3 \quad (71) \quad x - 3 \quad (72) \quad (\sqrt{x-3})^2$$



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 4

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31) دون

الاسم: التاريخ:

4-6 تدريبات إعادة التعليم الأسس التنسبية

تعريف $b^{\frac{1}{n}}$	لأي عدد حقيقي b ، وأي عدد صحيح موجب n يكون $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ ما عدا عندما $b < 0$ و n عدد صحيح زوجي.
تعريف $b^{\frac{m}{n}}$	لأي عدد حقيقي b ، $b \neq 0$ ، وأي عددين صحيحين m و n ، $n > 1$ ، $b^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{b})^m = \sqrt[n]{b^m}$ ما عدا عندما $b < 0$ و n عدد صحيح زوجي.

مثال 1	اكتب $28^{\frac{1}{2}}$ على الصورة الجذرية
مثال 2	أوجد قيمة $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}$

تعاريف	اكتب كل عبارة أسية على الصورة الجذرية، وكل عبارة جذرية على الصورة الأسية.
(1) $11^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{11}$
(2) $15^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{15}$
(3) $300^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{300}$
(4) $\sqrt{47}$	$47^{\frac{1}{2}}$
(5) $\sqrt[3]{3a^2b^2}$	$3^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$
(6) $\sqrt[3]{2p^3}$	$2^{\frac{1}{3}}p$
(7) $-27^{\frac{1}{3}}$	$-27^{\frac{1}{3}}$
(8) $216^{\frac{1}{3}}$	6
(9) $(0.0004)^{\frac{1}{2}}$	0.02

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تدريبات إعادة التعليم - تامة (32) دون

الاسم: التاريخ:

4-6 تدريبات إعادة التعليم الأسس التنسبية

تبسيط العبارات، يمكنك تطبيق جمع خصائص وقوانين الأسس التي تعلمتها سابقاً على الأسس التنسبية. وعندما تبسط عبارات تحتوي على أسس تنسبية، أبقِ على الأسس التنسبية، واكتب العبارة بأسس موجبة، وأي أسس في المقام بتعريف أن تكون صحيحة موجبة. عندما تبسط عبارات جذرية قد تستعمل أسساً تنسبية، ولكن إجاباتك النهائية بتعريف أن تكون بالصورة الجذرية وبأصغر دليل ممكن للجذر.

مثال 1	تبسط $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$
مثال 2	تبسط $\sqrt[3]{144x^6}$

تعاريف	تبسط كل عبارة فيما يأتي:
(1) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}$	x^2
(2) $(\sqrt{a})^2$	a
(3) $p^{\frac{4}{3}} \cdot p^{\frac{2}{3}}$	p^2
(4) $(m^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$	m
(5) $x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{4}}$	x
(6) $(\frac{4}{8})^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$
(7) $\frac{p^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{p}$
(8) $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{x}$
(9) $\sqrt[3]{128}$	$2\sqrt[3]{2}$
(10) $\sqrt[3]{49}$	$\sqrt[3]{49}$
(11) $\sqrt[3]{288}$	$2\sqrt[3]{9}$
(12) $\sqrt{32} \cdot 3\sqrt{16}$	$48\sqrt{2}$

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تدريبات المهارات (33) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-6 تدريبات المهارات الأسس التنسبية

اكتب كل عبارة أسية على الصورة الجذرية، وكل عبارة جذرية على الصورة الأسية فيما يأتي:	
(1) $\sqrt[3]{3}$	$3^{\frac{1}{3}}$
(2) $\sqrt[3]{8}$	2
(3) $\sqrt{51}$	$51^{\frac{1}{2}}$
(4) $\sqrt[3]{15^2}$	$15^{\frac{2}{3}}$
(5) $\sqrt[3]{12^2}$ و $\sqrt[3]{12}$	$12^{\frac{2}{3}}$ و $12^{\frac{1}{3}}$
(6) $\sqrt[3]{37^2}$	$37^{\frac{2}{3}}$
(7) $\sqrt[3]{c^2}$ و $\sqrt[3]{c}$	$c^{\frac{2}{3}}$ و $c^{\frac{1}{3}}$
(8) $\sqrt[3]{6xy^2}$ و $\sqrt[3]{xy^2}$	$6^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ و $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$
(9) $32^{\frac{1}{5}}$	2
(10) $81^{\frac{1}{4}}$	3
(11) $27^{\frac{1}{3}}$	3
(12) $16^{\frac{1}{4}}$	2
(13) $27^{\frac{1}{3}}$ و $27^{\frac{2}{3}}$	3 و 9
(14) $\frac{8}{27} (\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}}$	$\frac{8}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$
(15) $c^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{2}{3}}$	c
(16) $m^{\frac{2}{3}} \cdot m^{\frac{10}{3}}$	m^4
(17) $(q^{\frac{1}{2}})^3$	$q^{\frac{3}{2}}$
(18) $\frac{p^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{6}}}$	$p^{\frac{1}{2}}$
(19) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$	$x^{\frac{5}{4}}$
(20) $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$	$x^{\frac{1}{6}}$
(21) $y^{\frac{1}{4}}$	$y^{\frac{1}{4}}$
(22) $\frac{h^{\frac{2}{3}}}{h^{\frac{1}{6}}}$	$h^{\frac{1}{2}}$
(23) $\sqrt[3]{64}$	4
(24) $\sqrt[3]{49a^3}$	$a\sqrt[3]{49}$

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

تدريبات حل المسألة (34) دون ضمن فوق

الاسم: التاريخ:

4-6 تدريبات حل المسألة الأسس التنسبية

(1) تربيع المتكعب، طول ضلع مكعب (8). ما طول ضلع المربع الذي تكون القبة العديدة لسطحه تساوي القبة العديدة خارج هذا المكعب؟ اكتب إجاباتك مستعملاً الأسس التنسبية.	$10^{\frac{2}{3}}$
(2) برج الماء، يُخزّن ماء الشرب في بعض المدن في أبراج للماء. ويبلغ ارتفاع برج الماء في إحدى المدن 218 قدماً، ويتسع إلى نصف مليون جالون. أرادت بلدية المدينة بناء برج جديد للماء، تعادل سعة كرتة 10 أمثال سعة كرة البرج القديم. كم مرة يساوي نصف قطر الكرة الجديدة نصف قطر الكرة القديمة؟ اكتب إجاباتك مستعملاً الأسس التنسبية.	$10^{\frac{1}{3}}$
(3) بالونات، يُنفخ بالون كروي الشكل بالهواء، وكان حجمه كدالة في الزمن $9\pi t^2$. ما طول نصف قطر البالون كدالة في الزمن (1)؟ اكتب إجاباتك مستعملاً الأسس التنسبية.	$3(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$
(4) خلايا، ينمو عدد الخلايا في مزرعة بصورة أسية. وعدد الخلايا في المزرعة كدالة في الزمن يعطى بالعبارة $N(\frac{9}{5})^t$ ، حيث t الزمن بالساعات، و N عدد الخلايا الأصلي الذي بدأت به المزرعة. أصبح عدد الخلايا بعد 3 ساعات 1728 خلية، ما قيمة N ؟	1000
(5) ما عدد الخلايا في المزرعة بعد 20 دقيقة؟	تقريباً 1063
(6) كم كان عدد الخلايا في المزرعة بعد مرور 2.5 ساعة؟	تقريباً 1577

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية



مصادر الدرس 6 - 4

فوق المتوسط

ضمن

دون المتوسط

فوق

ضمن

دون

كتاب التمارين (29)

فوق

ضمن

التدريبات الإثرائية (35)

4-6 الأسس التنسبية

اكتب العبارة الأسية على الصورة الجذرية، والعبارة الجذرية على الصورة الأسية في كل مما يأتي:

$(m)^{\frac{1}{2}}$ (4)	$m^{\frac{1}{3}}$ (3)	$8^{\frac{1}{2}}$ (2)	$\sqrt[3]{5}$ (1)
$\sqrt[3]{27m^3}$ (8)	$\sqrt[3]{m^3}$ (7)	$\sqrt[3]{153}$ (6)	$\sqrt[3]{79}$ (5)
$2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$	$3m^{\frac{1}{2}}$	$153^{\frac{1}{3}}$	$79^{\frac{1}{3}}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي:

$32 \cdot 8^{\frac{1}{2}}$ (11)	$4 \cdot 1024^{\frac{1}{4}}$ (10)	$3 \cdot 81^{\frac{1}{3}}$ (9)
$243 \cdot 27^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{3}}$ (14)	$16 \cdot (-64)^{\frac{1}{3}}$ (13)	$64 \cdot 256^{\frac{1}{4}}$ (12)
$-\frac{5}{4} \cdot (25)^{\frac{1}{2}} \cdot (-64)^{\frac{1}{3}}$ (17)	$\frac{16}{49} \cdot \frac{64^{\frac{1}{3}}}{343^{\frac{1}{3}}}$ (16)	$\frac{25}{36} \cdot \left(\frac{125}{216}\right)^{\frac{1}{3}}$ (15)
$a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$ (20)	$s^{\frac{1}{2}} \cdot s^{\frac{1}{3}} \cdot s^{\frac{1}{6}}$ (19)	$x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}}$ (18)
$q^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{q^{\frac{1}{3}}}{q^{\frac{1}{6}}}$ (23)	$\frac{b^{\frac{1}{2}}}{b} \cdot b^{\frac{1}{3}}$ (22)	$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{y} \cdot y^{\frac{1}{3}}$ (21)
$\frac{a\sqrt{30}}{30} \cdot \frac{a}{\sqrt{30}}$ (26)	$3\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6}$ (25)	$2\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ (24)

27 كهرمان، $E = \left(\frac{P}{R}\right)^2$ تستخدم الصيغة لإيجاد شدة التيار I بالأمبير المار في جهاز ما، حيث P قدرته بالواط، R مقاومته بالأوم. أوجد شدة التيار المار في الجهاز إذا كانت قدرته 500 W، ومقاومته 10 Ω، مقربة إلى أقرب جزء من عشرة. 17.1 أمبير

28 صناعة، يستعمل مدير الإنتاج في أحد المصانع الصيغة $C = 88n^3 + 330$ لتقدير التكلفة C بالريال لإنتاج n قطعة من المنتج، فما تكلفة إنتاج 150 قطعة مقربة إلى أقرب ريال؟ 798 ريالاً تقريباً.

4-6 التدريبات الإثرائية

صيغ هندسية محدودة الاستعمال

الاسم: التاريخ:

تضمن كثير من الصيغ الهندسية عبارات جذرية. اكتب أشكالاً لتوضيح الصيغ الهندسية المعطاة في هذه الصفحة، ثم أوجد قيمة كل صيغة عند القيم المعطاة للمتغيرات. قرب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

1 مساحة مثلث متساوي الضلعين (A)، طول كل من a ، c ، ضلعيه المتساويين a ، وطول الضلع الثالث c . هي: $A = \frac{c}{4} \sqrt{4a^2 - c^2}$. أوجد A عندما $a = 6$ و $c = 7$.



27.71 وحدة مربعة



17.06 وحدة مربعة

3 مساحة مجاميعي منتظم (A) طول ضلعه a ، هي: $A = \frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$. أوجد A عندما $a = 4$.



210.44 وحدات مربعة



27.53 وحدة مربعة

4 مساحة سداسي منتظم (A) طول ضلعه a تعطى بالعلاقة: $A = \frac{3a^2}{2} \sqrt{3}$. أوجد A عندما $a = 9$.



63.22 وحدة مربعة



0.94 وحدة مكعبة

5 حجم رباعي منتظم (V) طول حافته a ، هي: $V = \frac{a^3}{12} \sqrt{2}$. أوجد V عندما $a = 2$.



63.22 وحدة مربعة



0.94 وحدة مكعبة

6 قاعدة هيرون لحساب مساحة مثلث (A) باستعمال نصف محيطه s ، حيث $s = \frac{a+b+c}{2}$ و a و b و c هي أطوال أضلاع المثلث، هي: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. أوجد A عندما $a = 3$ و $b = 4$ و $c = 5$.



6 وحدات مربعة

حل المعادلات والمتباينات الجذرية Solving Radical Equations and Inequalities



لماذا؟

عندما تقفز إلى الأعلى فإنك ترتفع عن الأرض وتبقى زمناً معيناً في الهواء يُسمى زمن التحليق. ويمكنك إيجاد زمن التحليق t بالثواني إذا علمت ارتفاع القفزة h بالأقدام، وذلك باستعمال الصيغة $t = 0.5\sqrt{h}$. إذا علم أن زمن تحليق أحد لاعبي كرة السلة 0.98 ثانية تقريباً، فكيف يمكنك حساب ارتفاع قفزه؟

حل المعادلات الجذرية تحتوي **المعادلات الجذرية** على عبارات جذرية يكون المتغير فيها تحت الجذر. ويمكنك حلها عن طريق رفع طرفي المعادلة لأس معين.

فيما سبق

درست حل معادلات كثيرات الحدود.

والآن

- أحل معادلات تحتوي جذوراً.
- أحل متباينات تحتوي جذوراً.

المفردات

- المعادلة الجذرية radical equation
- الحل الدخيل extraneous solution
- المتباينة الجذرية radical inequality

obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-7

حل معادلات كثيرات حدود.

الدرس 4-7

حل معادلات تحتوي جذوراً.

حل متباينات تحتوي جذوراً.

ما بعد الدرس 4-7

تحديد المقطع المخروطي من معادلة معطاة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما المتغير الذي يظهر تحت رمز الجذر في الصيغة $t = 0.5\sqrt{h}$ ؟ وماذا يمثل؟ h ، ارتفاع القفزة بالأقدام.
- ما قيمة t إذا كانت $h = 4$ ؟ صف نتائجك. إذا كانت $h = 4$ ، فإن $t = 1$ ، زمن تحليق قفزة ارتفاعها $4ft$ يساوي ثانية واحدة.
- اعتماداً على إجابتك عن السؤال السابق، كيف ستتأثر t إذا ضربت h في العدد 4؟ تتضاعف t مرة واحدة.

أضف إلى مطوبتك

حل المعادلات الجذرية

مفهوم أساسي

- الخطوة 1 اجعل الجذر في طرف واحد من المعادلة.
- الخطوة 2 ارفع طرفي المعادلة لأس يساوي دليل الجذر؛ وذلك للتخلص من الجذر.
- الخطوة 3 حل معادلة كثيرة الحدود الناتجة، ثم تحقق من صحة الحل.

عند حل بعض المعادلات الجذرية، قد لا يحقق الحل المعادلة الأصلية. ويُسمى مثل هذا الحل **حلاً دخيلاً**.

حل معادلات جذرية

مثال 1

حل كل معادلة مما يأتي:

$$\sqrt{x+2} + 4 = 7 \quad (a)$$

$$\text{المعادلة الأصلية} \quad \sqrt{x+2} + 4 = 7$$

$$\text{بطرح 4 من الطرفين لفصل الجذر} \quad \sqrt{x+2} = 3$$

$$\text{بترتيب الطرفين للتخلص من الجذر} \quad (\sqrt{x+2})^2 = 3^2$$

$$\text{بإيجاد مربع الطرفين} \quad x+2 = 9$$

$$\text{بطرح 2 من الطرفين} \quad x = 7$$

$$\text{المعادلة الأصلية} \quad \sqrt{x+2} + 4 = 7$$

$$\text{عوض عن } x \text{ بالعدد } 7 \quad \sqrt{7+2} + 4 \stackrel{?}{=} 7$$

$$\text{بالتبسيط} \quad \checkmark 7 = 7$$

$$\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x} \quad (b)$$

$$\text{المعادلة الأصلية} \quad \sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x}$$

$$\text{بترتيب الطرفين} \quad (\sqrt{x-12})^2 = (2 - \sqrt{x})^2$$

$$\text{بإيجاد مربع الطرفين} \quad x-12 = 4 - 4\sqrt{x} + x$$

$$\text{بطرح } x+4 \text{ من الطرفين لفصل الجذر} \quad -16 = -4\sqrt{x}$$

$$\text{بقسمة الطرفين على } -4 \quad 4 = \sqrt{x}$$

$$\text{بترتيب الطرفين} \quad 16 = x$$

218 الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

مصادر الدرس 4-7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (220)	• تنويع التعليم، ص (220, 223)	• تنويع التعليم، ص (220, 223)
كتاب التمارين	• ص (30)	• ص (30)	• ص (30)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36) • تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39)	• تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)	• تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)

التحقق من الحل

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للتحقق من حل المعادلة، مثل كل طرف من أطراف المعادلة الأصلية بيانياً، ثم ابحث عن نقاط التقاطع.

$$\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x} \quad \text{تحقق}$$

$$\sqrt{16-12} \stackrel{?}{=} 2 - \sqrt{16}$$

$$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2 - 4$$

$$2 \neq -2$$

يكون حل هذه المعادلة دخليلاً. والتمثيلان البيانيان للمعادلة $y = \sqrt{x-12}$ ، والمعادلة $y = 2 - \sqrt{x}$ لا يتقاطعان، وهذا يؤكد أنه لا يوجد حل حقيقي.

تحقق من فهمك

حل كلاً من المعادلتين الآتيتين:

$$\sqrt{x+15} = 5 + \sqrt{x} \quad (1B) \quad \text{لا يوجد حل حقيقي}$$

$$5 = \sqrt{x-2} - 1 \quad (1A)$$

للتخلص من الجذر التربيعي ارفع العبارة الجذرية للأس 2، وللتخلص من الجذر التكعيبي ارفع العبارة الجذرية للأس 3.

حل المعادلات الجذرية

مثال 1 يبين طريقة حل معادلتين جذريتين، إحداهما لها حل، والأخرى لها حل دخيل.

مثال 2 يبين طريقة حل معادلة جذر تكعيبي.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حُلِّ كل معادلة مما يأتي:

$$38 \sqrt{y-2} - 1 = 5 \quad (a)$$

$$\sqrt{x-12} = 2 - \sqrt{x} \quad (b)$$

لا يوجد حل.

2 حُلِّ المعادلة $(3y+1)^{\frac{1}{3}} + 5 = 0$ -42

المحتوى الرياضي

الجذور الدخيلة من الضروري دائماً التحقق من صحة حل المعادلة أو المتباينة، وذلك بتعويض الحل في المعادلة أو المتباينة الأصلية، وتزداد الأهمية عندما يكون طرفا المعادلة مرفوعين لقوة. وعندما يكون الحل تقريبياً فإن من الصعب أحياناً تحديد ما إذا كان عدم تساوي طرفي المعادلة ناتجاً عن التقريب أم عن الحل غير الصحيح. ويتعين على الطلاب التحقق من صحة الحلول غير التقريبية كلما كان ذلك ممكناً.

تنبيه

تجنب الأخطاء ناقش الطلاب في العمليات التي يمكن أن ينجم عنها حلول دخيلة عند حل معادلة تحتوي جذراً. وذكّرهم بأن رمز الجذر التربيعي في المعادلة يعني الجذر الرئيس.

مثال 2 حل معادلة جذر تكعيبي

$$\text{حل المعادلة: } 2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$$

للتخلص من الأس $\frac{1}{3}$ (الجذر التكعيبي) يجب أولاً جعل المقدار المرفوع للأس $\frac{1}{3}$ في طرف لوحده، ثم رفع طرفي المعادلة للأس 3.

$$\text{المعادلة الأصلية} \quad 2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$$

$$\text{إضافة العدد 4 للطرفين} \quad 2(6x-3)^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$\text{بقسمة الطرفين على العدد 2} \quad (6x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$\text{بتكعيب الطرفين} \quad [(6x-3)^{\frac{1}{3}}]^3 = 2^3$$

$$\text{بإيجاد مكعب الطرفين} \quad 6x-3 = 8$$

$$\text{إضافة العدد 3 للطرفين} \quad 6x = 11$$

$$\text{بقسمة الطرفين على العدد 6} \quad x = \frac{11}{6}$$

$$\text{تحقق:} \quad 2(6x-3)^{\frac{1}{3}} - 4 = 0 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$\text{عوض عن } x \text{ بالعدد } \frac{11}{6} \quad 2\left(6 \cdot \frac{11}{6} - 3\right)^{\frac{1}{3}} - 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\text{بالتبسيط} \quad 2(8)^{\frac{1}{3}} - 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\text{الجذر التكعيبي للعدد 8 هو 2} \quad 2(2) - 4 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\text{بالطرح} \quad \checkmark \quad 0 = 0$$

تحقق من فهمك

حُلِّ كلاً من المعادلتين الآتيتين:

$$\frac{7}{27} 3(5y-1)^{\frac{1}{3}} - 2 = 0 \quad (2B)$$

$$-1 (3n+2)^{\frac{1}{3}} + 1 = 0 \quad (2A)$$

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة اطلب إلى الطلاب كتابة مدونة عن الحلول الدخيلة، واطلب إليهم توضيح المقصود بالحلول الدخيلة، وكيف يمكنهم التحقق من صحة الحل بيانياً وجبرياً.

يمكنك استعمال طرائق حل معادلات الجذور التربيعية والتكعيبية في حل المعادلات الجذرية أياً كان دليل جذرها. وللتخلص من الجذر النوني لأي تعبير ارفعه للأس n .

مثال 3 على اختبار

ما حل المعادلة $3(\sqrt[3]{2n+6}) - 6 = 0$ ؟

11 D 5 C 1 B -1 A

المعادلة الأصلية	$3(\sqrt[3]{2n+6}) - 6 = 0$
بإضافة العدد 6 للطرفين	$3(\sqrt[3]{2n+6}) = 6$
بقسمة الطرفين على 3	$\sqrt[3]{2n+6} = 2$
برفع الطرفين للأس 4	$(\sqrt[3]{2n+6})^4 = 2^4$
بإيجاد ناتج كل من الطرفين	$2n + 6 = 16$
ب طرح 6 من الطرفين	$2n = 10$
إذن الجواب هو C	$n = 5$

تحقق من فهمك

3 ما حل المعادلة: $4(3x+6)^{\frac{1}{4}} - 12 = 0$ ؟ B

$x = 37$ D $x = 29$ C $x = 25$ B $x = 7$ A

حل المتباينات الجذرية: المتباينة الجذرية هي متباينة تحوي عبارات جذرية، ويكون المتغير فيها تحت الجذر. ولحل متباينة جذرية، اتبع الخطوات الآتية:

أضف إلى مطويتك

حل المتباينات الجذرية

مفهوم أساسي

- الخطوة 1 إذا كان دليل الجذر عدداً زوجياً، فعين قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالباً.
- الخطوة 2 حل المتباينة جبرياً.
- الخطوة 3 حدد حل المتباينة من الخطوتين السابقتين، ثم اختبر القيم لتتأكد من صحة الحل.

مثال 4 حل المتباينة الجذرية

حل المتباينة: $3 + \sqrt{5x-10} \leq 8$.

الخطوة 1: بما أن ما تحت الجذر التربيعي يجب أن يكون أكبر من أو يساوي صفراً، فحل أولاً $5x - 10 \geq 0$ لتعين قيم المتغير x التي تجعل الطرف الأيسر من المتباينة معرّفاً.

ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي صفراً	$5x - 10 \geq 0$
بإضافة العدد 10 للطرفين	$5x \geq 10$
بقسمة الطرفين على العدد 5	$x \geq 2$

الخطوة 2: حل المتباينة: $3 + \sqrt{5x-10} \leq 8$

المتباينة الأصلية	$3 + \sqrt{5x-10} \leq 8$
ب طرح العدد 3 من الطرفين لفصل الجذر	$\sqrt{5x-10} \leq 5$
بتربيع الطرفين للتخلص من الجذر	$5x - 10 \leq 25$
بإضافة العدد 10 إلى الطرفين	$5x \leq 35$
بقسمة الطرفين على العدد 5	$x \leq 7$

إرشادات الاختبار

تعويض البدائل

يمكنك أيضاً حل سؤال الاختبار بتعويض كل البدائل المعطاة لقيمة n في المعادلة، لاختيار الحل الصحيح منها وهو الذي يحقق المعادلة.

مثال إضافي

3 مثال على اختبار

ما حل المعادلة

$7(\sqrt[6]{5m+4}) - 4 = 10$ ؟ C

12 C -2 A

14 D 0 B

حل المتباينات الجذرية

مثال 4 يبين طريقة حلّ متباينة جذرية والتحقق من صحة حلها.

مثال إضافي

4 حلّ المتباينة $\sqrt{3x-6} + 4 \leq 7$

$2 \leq x \leq 5$

تنبيه

تنبيه خطأ شائع أكد على

الطلاب أن عملية تربيع طرفي المتباينة تكون غير صحيحة إذا كان طرفا المتباينة مختلفين في الإشارة.

إرشادات الاختبار

المتباينات الجذرية

بما أن الجذر التربيعي الرئيس لا يكون سالباً أبداً، فإن المتباينات التي تبسط إلى الصورة: $\sqrt{ax+b} \leq c$ حيث c عدد سالب، ليس لها حل.

تنوع التعليم

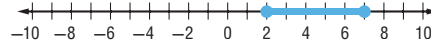
دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات؛ للمقارنة بين حل معادلات ومتباينات جذرية، وحل أنواع أخرى من المعادلات والمتباينات. واطلب إليهم كتابة أوجه الشبه والاختلاف بين الإجراءات المستعملة في عملية الحل، أو تقديم عرض مختصر يبين ذلك.

الخطوة 3: يتضح من الخطوتين السابقتين أن حل المتباينة هو $2 \leq x \leq 7$. ويمكن اختبار بعض قيم x للتأكد من الحل. استعمل ثلاث قيم؛ إحداها أقل من 2، والأخرى تقع بين 2 و 7، والثالثة أكبر من 7. ثم نظم النتائج في جدول:

$x = 0$	$x = 4$	$x = 9$
$3 + \sqrt{5(0) - 10} \leq 8$ $\times 3 + \sqrt{-10} \leq 8$	$3 + \sqrt{5(4) - 10} \leq 8$ $\checkmark 6.16 \leq 8$	$3 + \sqrt{5(9) - 10} \leq 8$ $\times 8.92 \leq 8$
وبما أن $\sqrt{-10}$ ليس عددًا حقيقيًا فإن المتباينة لا تتحقق.	وبما أن $6.16 \leq 8$ فإن المتباينة تتحقق.	وبما أن $8.92 \leq 8$ فإن المتباينة لا تتحقق.

تم التحقق من حل المتباينة. والقيم التي تقع في الفترة $2 \leq x \leq 7$ فقط هي التي تتحقق المتباينة. ويمكنك تمثيل الحل على خط الأعداد كما يأتي:



تحقق من فهمك

حل كل متباينة مما يأتي:

1A $1 \leq x < 10$ **4B** $\sqrt{4x-4} - 2 < 4$

4A $x \geq 7$ $\sqrt{2x+2} + 1 \geq 5$

تنبيه!

تجنب الأخطاء أكد على أهمية اختيار قيم اختبار؛ للتأكد من الحل ضمن حدود مناسبة.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-20 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

تجنب الأخطاء تأكد أن الطلاب يعرفون القيود على قيم المتغيرات في المعادلة الجذرية بحيث تكون الحلول أعدادًا حقيقية.

تأكد

حل كل معادلة مما يأتي:

المثالان 1, 2

23 $\sqrt{x+13} - 8 = -2$ **(2)**

20 $\sqrt{x-4} + 6 = 10$ **(1)**

29 $\sqrt[3]{x-2} = 3$ **(4)**

13 $8 - \sqrt{x+12} = 3$ **(3)**

2 $(4y)^{\frac{1}{3}} + 3 = 5$ **(6)**

13 $(x-5)^{\frac{1}{3}} - 4 = -2$ **(5)**

8 $2 + 4z^{\frac{1}{2}} = 0$ **(لا يوجد حل)**

49 $\sqrt{y} - 7 = 0$ **(7)**

9 $\sqrt{2t-7} = \sqrt{t+2}$ **(10)**

27 $5 + \sqrt{4y-5} = 12$ **(9)**

(11) فيزياء: يعطى الزمن الدوري للبندول بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ، حيث T الزمن بالثواني، L طول البندول بالأقدام، g تسارع السقوط الحر، ويساوي 32 ft/s^2 .

- (a)** ما الزمن الدوري لبندول ضخيم طوله 73 ft تقريبًا؟ **9.49S** تقريبًا
(b) يريد صانع ساعات أن يصنع بندولًا يستغرق 5s لإتمام دورته. كم يجب أن يكون طول البندول؟

مثال 3 **(12) اختيار من متعدد:** حل المعادلة $(2y+6)^{\frac{1}{4}} - 2 = 0$ هو: **B**

$y = 15$ **D** $y = 11$ **C** $y = 5$ **B** $y = 1$ **A**

مثال 4 حل كل متباينة مما يأتي:

7 ≤ b ≤ 43 $\sqrt{b-7} + 6 \leq 12$ **(14)**

$-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{77}{3}$ $\sqrt{3x+4} - 5 \leq 4$ **(13)**

-1 ≤ a ≤ 2 $\sqrt{3a+3} - 1 \leq 2$ **(16)**

1 ≤ y ≤ 5 $2 + \sqrt{4y-4} \leq 6$ **(15)**

-2 ≤ x ≤ 1 $\sqrt{3x+6} + 2 \leq 5$ **(18)**

x > 1 $1 + \sqrt{7x-3} > 3$ **(17)**

y > 4 $6 - \sqrt{2y+1} < 3$ **(20)**

x ≤ -11 $-2 + \sqrt{9-5x} \geq 6$ **(19)**

221 **الدرس 4-7** حل المعادلات والمتباينات الجذرية

تنوع الواجبات المنزلية

الأُسئلة	المستوى
51-66, 48, 21-42	دون المتوسط دون
51-66, 46, 47, 23-43 فردي	ضمن المتوسط ضمن
41-66	فوق المتوسط فوق

مثال 1 حُل كل معادلة مما يأتي:

$$\begin{aligned} 21 \quad 6 + \sqrt{3x+1} &= 11 & 22 \quad \sqrt{x+6} &= 5 - \sqrt{x+1} \\ 23 \quad \sqrt{x-15} &= 3 - \sqrt{x} & 24 \quad 2 + \sqrt{3y-5} &= 10 \\ 25 \quad \sqrt{7a-2} &= \sqrt{a+3} & 25 \quad \frac{5}{4} \sqrt{b-6} + \sqrt{b} &= 3 \end{aligned}$$

27 **فيزياء:** تصف الصيغة: $t = \frac{1}{4}\sqrt{d-h}$ الزمن t بالثواني اللازم لوصول جسم إلى الارتفاع h عن سطح الأرض عند سقوطه من ارتفاع قدره d متر عن سطح الأرض، إذا سقطت مفاتيح بدر من ارتفاع 65m من أعلى العجلة الدوارة في مدينة الألعاب، فما ارتفاع المفاتيح عن سطح الأرض بالأمتار بعد مرور ثانيين؟ **1m**

مثال 2 حُل كل معادلة مما يأتي:

$$\begin{aligned} 28 \quad (5n-6)^{\frac{1}{3}} + 3 &= 4 & 29 \quad \frac{40}{3} (6q+1)^{\frac{1}{4}} + 2 &= 5 \\ 30 \quad (4z-1)^{\frac{1}{5}} - 1 &= 2 & 31 \quad 3(x+5)^{\frac{1}{3}} - 6 &= 0 \\ 32 \quad \sqrt[3]{4n-8} - 4 &= 0 & 33 \quad \frac{1}{7}(14a)^{\frac{1}{3}} &= 1 \end{aligned}$$

34 **اختيار من متعدد:** حل المعادلة: $\sqrt{y+2} + 9 = 14$ هو: **D**

623 D 123 C 53 B 23 A

مثال 4 حُل كل متباينة مما يأتي: **37** لا يوجد حل حقيقي

$$\begin{aligned} 35 \quad \sqrt{2x+14} - 6 &\geq 4 & 36 \quad x &\geq 2110 - \sqrt{2x+7} \leq 3 \\ 37 \quad 6 + \sqrt{3y+4} &< 6 & 38 \quad \sqrt{2y+5} + 3 &\leq 6 \\ 39 \quad -2 + \sqrt{8-4z} &\geq 8 & 40 \quad a > 8 &-3 + \sqrt{6a+1} > 4 \end{aligned}$$

41 **بندول:** تمثل الصيغة $s = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{32}}$ الزمن الدوري للبندول بالثواني، حيث ℓ طول البندول بالأقدام. احسب طول البندول الذي يستغرق 1.5 ثانية لإتمام دورته. **1.82 ft تقريباً**

42 **أسماك:** يمكن تقريب العلاقة بين طول سمكة وكتلتها بالمعادلة: $L = 0.46\sqrt[3]{M}$ ، حيث L الطول بالأمتار، M الكتلة بالكيلوجرامات. حل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير M .

43 **زمن التحليق:** عُد إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس، وصف كيف يرتبط ارتفاع القفزة بزمن التحليق. واكتب توضيحاً مفصلاً لكيفية تحديد ارتفاع قفزة زمن تحليقها 0.98 ثانية. **انظر الهامش.**

44 **رفع الأثقال:** يمكن استعمال الصيغة $M = 512 - 146230B^{-\frac{8}{5}}$ ؛ لتقدير الكتلة العظمى M التي يستطيع رافع أثقال كتلته B كيلوجرام رفعها. استخدم هذه الصيغة في إيجاد كتلة رافع أثقال يستطيع رفع 470kg على الأكثر؟ **163 kg تقريباً**

$$\begin{aligned} 38 \quad -\frac{5}{2} \leq y &\leq 2 \\ 39 \quad z &\leq -23 \end{aligned}$$

مثال 3 $M = \left(\frac{L}{0.46}\right)^3$ (42)

إرشادات للمعلم الجديد

التبرير وجّه الطلاب إلى عدم ضرب $\frac{1}{7}$ بـ 14 في السؤال 33، وأسألهم عن سبب ذلك، ثم ذكّرهم بأن ترتيب العمليات يستلزم إجراء عمليات الأسس قبل إجراء عمليات الضرب.

إجابة

43 إذا أمكن الربط بين ارتفاع قفزة الشخص والزمن الذي يمضيه في الهواء بمعادلة جذرية، فإنه يمكن إيجاد ذلك الزمن من خلال حل تلك المعادلة؛ **3.84 ft تقريباً.**

45 نعم، بما أن $\sqrt{x+5} \geq 0$ ، فإن الطرف الأيسر للمعادلة غير سالب. لذا فإنه لن يساوي -4 . فالمعادلة ليس لها حل حقيقي.

مسائل مهارات التفكير العليا

45 **تحذّر:** قالت عائشة: إنه بإمكانها الحكم بعدم وجود حل حقيقي للمعادلة $(x+5)^{\frac{1}{4}} = -4$ دون حلها. فهل ما تقوله صحيح؟ وضح إجابتك.

(46) أي معادلة مما يأتي ليس لها حل؟

$$\sqrt{x+1} + 3 = 4$$

$$\sqrt{x-1} + 3 = 4$$

$$\sqrt{x+2} - 7 = -10$$

$$\sqrt{x-2} + 7 = 10$$

$$\sqrt{x+2} - 7 = -10$$

(47) **تبرير:** حدد ما إذا كانت $x = \frac{\sqrt{(x^2)^2}}{-x}$ ، صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً، وذلك إذا كان x عدداً حقيقياً. وضح إجابتك. **انظر الهامش.**

(48) **مسألة مفتوحة:** اختر عدداً كلياً، واعمل بشكل عكسي، لكتابة معادلتين جذريتين يكون حلّهما ذلك العدد الكلي، بحيث تكون إحداهما معادلة جذر تربيعي، والأخرى معادلة جذر تكعيبي.

(49) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة يمكن حلّها برفع كلا الطرفين للأس المعطى: **انظر الهامش**

$$\frac{7}{8} \quad (c) \quad \frac{5}{4} \quad (b) \quad \frac{3}{2} \quad (a)$$

(50) **تحذّر:** حلّ المعادلة: $7^{3x-1} = 49^{x+1}$. (إرشاد: $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$). **3**

(51) **اكتب:** وضح العلاقة بين دليل جذر المتغير في المعادلة الجذرية والأس الذي ترفع طرفي المعادلة له عند حلّها. **هما عمليتان عكسيتان كل منهما للأخرى.**

4 التقويم

بطاقة مكافأة اعمل نسخاً عدة لخمس معادلات ومتباينات جذرية مختلفة. ثم أعط كل طالب معادلة أو متباينة، واطلب إليه حلّها وتسليمك إجابته قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم الواردة في الدرس 4-7 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (69).

إجابات

(47) غير صحيحة أبداً؛ فإذا كانت المساواة

$$\frac{\sqrt{(x^2)^2}}{-x} = x \text{ صحيحة، فإن}$$

$$x = \frac{x^2}{-x} \text{ أو}$$

$$x^2 = (x)(-x) \text{ أي}$$

$$x^2 = -x^2 \text{ وهذا غير ممكن في المعادلة، حيث } x \neq 0$$

(49a) **إجابة ممكنة:** $0 = 6x^{\frac{2}{3}} - 5$

(49b) **إجابة ممكنة:** $4 = x^{\frac{4}{5}} - 9$

(49c) **إجابة ممكنة:** $10x^{\frac{8}{7}} - 2 = -1$

تدريب على اختبار

(52) أي المجموعات الآتية تمثل دالة؟ **B**

A $\{(3, 0), (-2, 5), (2, -1), (2, 9)\}$

B $\{(-3, 5), (-2, 3), (-1, 5), (0, 7)\}$

C $\{(2, 5), (2, 4), (2, 3), (2, 2)\}$

D $\{(3, 1), (-3, 2), (3, 3), (-3, 4)\}$

(53) **إجابة قصيرة:** محيط مثلث متطابق الضلعين 56 in. فإذا

كان طول أحد الضلعين المتطابقين 20 in، فما طول الضلع الثالث؟ **16 in**

(54) ما حل المعادلة $4 = \sqrt{x+5} + 1$ ؟ **A**

A 4 **B** 10 **C** 11 **D** 20

مراجعة تراكمية

احسب قيمة كل مما يأتي: (الدرس: 4-6)

(55) $\frac{1}{9} 27^{-\frac{2}{3}}$

(56) $81 \cdot 9^{\frac{5}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{3}}$

(57) $\frac{9}{4} \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

(58) **هندسة:** العبارتان $4x^2y^2$ ، $8x^2y^2$ تمثلان طولي ساقي القائمة في مثلث قائم الزاوية، أوجد عبارة ثالثة تمثل طول الوتر باستعمال نظرية فيثاغورس، ثم بسّطها. (الدرس: 4-6) $4\sqrt{5}x^2y^2$

$y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2}$

$y = \frac{x+4}{3}$ (61) (الدرس: 4-2) $y = -2x - 3$ (60) $y = 3x - 4$ (59)

$y = (2x+3)^2$ (62)

$y = \pm\sqrt{x}$ $y = x^2$ (61)

$y = \frac{-x-3}{2}$ $y = -2x - 3$ (60)

$y = 3x - 4$ (59)

حل كل معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة: (مهارة سابقة)

$2\frac{1}{2} \frac{1}{3}p = \frac{5}{6}$ (66)

$16 \frac{9}{8}b = 18$ (65)

$\frac{2}{21} \frac{6}{7} = 9m$ (64)

$\frac{5}{8} \frac{3}{10} = \frac{12}{25}a$ (63)

223 الدرس 4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية

تنوع التعليم

فوق ضمن

توسع قدّم المسألة الآتية للطلاب: إذا كان نصف قطر مدار قمر صناعي r يُعبّر عنه بالصيغة $r = \sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^4}}$ حيث G ثابت الجذب الكوني، M كتلة الجسم المركزي، t الزمن اللازم لإكمال القمر دورة واحدة في مداره، فحلّ هذه الصيغة بالنسبة للمتغير t .

$$t = 2\pi^2 r \sqrt{\frac{r}{GM}}$$

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل المعادلات والمتباينات الجذرية. وإحدى طرق الحل هي إعادة كتابة المعادلة أو المتباينة بحيث يكون أحد طرفيها صفرًا، ثم استعمال ميزة التقاطع في الحاسبة لإيجاد الحل.

مثال 1 المعادلة الجذرية

حل المعادلة: $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = 3$

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة.

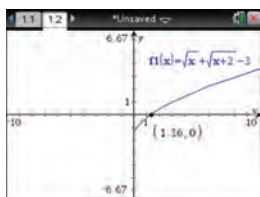
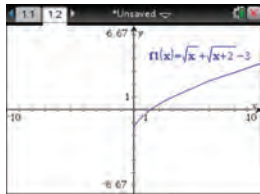
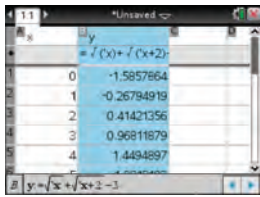
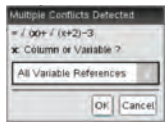
- اطرح العدد 3 من طرفي المعادلة لتحصل على المعادلة $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3 = 0$

الخطوة 2 استعمل جدولًا وقدر الحل.

- اضغط المفاتيح التالية بالترتيب: **2** Add Lists & Spreadsheet
- سمِّ رأس العمود **1** بالرمز x ثم أدخل قيمًا تختارها لـ x .
- سمِّ رأس العمود **2** بالرمز y واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3$. ثم اضغط **enter** فتظهر شاشة اختر منها **Variable Reference** ثم اضغط **enter** فتحصل على الجدول المطلوب.
- بما أن إشارة الدالة تتغير من سالب إلى موجب بين $x = 2$, $x = 1$ فهناك حل بين العددين 1, 2.

الخطوة 3 استعمل ميزة التقاطع وأوجد الحل.

- اضغط المفاتيح التالية بالترتيب: **2** Add Graphs
- اكتب الدالة: $f1(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+2} - 3$ ثم اضغط **enter** فيظهر التمثيل البياني المجاور.
- أوجد نقطة تقاطع الدالة والمحور x بالضغط على المفاتيح: **7** Points & Lines **3** Intersection Point(s)
- ثم اضغط على كل من منحنى الدالة والمحور x فتظهر نقطة التقاطع كما في الشكل المجاور. فيكون الحل هو 1.36 تقريبًا، وهو يقع بين العددين 1, 2 كما تبين في الخطوة 2.



1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحل معادلات ومتباينات جذرية.

المواد اللازمة

- الحاسبة البيانية TI-nspire.

إرشادات التدريس

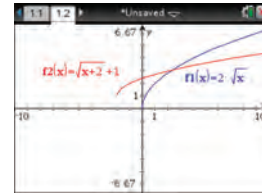
- وضح للطلاب المعلومات الآتية المتعلقة بالآلات الحاسبة التي يستعملونها:
- تكتب الحاسبة البيانية $f(x)$ على نحو آلي، ويطلب إلى الطالب كتابة الجزء الأيمن من المعادلة.
- يمكن كتابة الجذر النوني باستعمال المفاتيح **2nd** ثم **sqrt** على الترتيب، والتنقل بين ما داخل الجذر ودليله باستعمال الأسهم.
- كما يمكن كتابة الكسور الاعتيادية باستعمال المفاتيح **2nd** ثم **frac** على الترتيب، والتنقل بين بسطها ومقامها باستعمال الأسهم.

مثال 2 المتباينة الجذرية

حل المتباينة: $2\sqrt{x} > \sqrt{x+2} + 1$

الخطوة 1 ارسم طرفي المتباينة

- مثل المعادلة المرتبطة بالطرف الأيسر $f_1(x) = 2\sqrt{x}$ بيانياً، والمعادلة المرتبطة بالطرف الأيمن $f_2(x) = \sqrt{x+2} + 1$ بيانياً فتظهر الشاشة التالية:



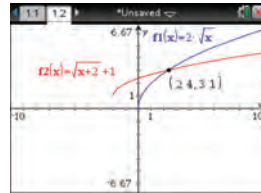
تبين الشاشة في الأعلى أن النقاط التي تقع على يسار نقطة تقاطع المنحنيين تكون عندها $f_1 < f_2$ أي $2\sqrt{x} < \sqrt{x+2} + 1$ ولحل المتباينة الأصلية، يجب أن نجد النقاط التي تكون عندها $f_1 > f_2$. وهذه النقاط تقع على يمين نقطة تقاطع المنحنيين.

الخطوة 2 استعمل نقاط التقاطع intersection Points.

- يمكنك استعمال ميزة نقاط التقاطع بالضغط على المفاتيح الآتية بالترتيب:

7:Points & Lines 3:Intersection Point(s)

- ثم اضغط على كلا المنحنيين فتظهر الشاشة التالية:



تبين الشاشة في الأعلى أن الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنيين هو 2.40 تقريباً؛ لذلك فإن الحل التقريبي للمتباينة هو $x > 2.40$. استعمل الرمز $>$ في الحل؛ لأنه الرمز الموجود في المتباينة الأصلية.

الخطوة 3 تحقق من حلك باستعمال ميزة table

- اضغط مفتاح table ، اختر الجدول.
 - سم رأس العمود x ، ثم أدخل قيمًا عشرية بين العددين الصحيحين 2, 3.
 - سم رأس العمود y_1 ، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y_1 = 2\sqrt{x}$ ثم اضغط enter .
 - سم رأس العمود y_2 ، واكتب في الخلية الواقعة أسفله مباشرة المعادلة $y_2 = \sqrt{x+2} + 1$ ثم اضغط enter فيظهر الشكل المجاور.
- لاحظ أنه عندما تكون x أقل من أو تساوي 2.4، فإن $y_1 < y_2$. وهذا يثبت أن الحل هو $\{x | x > 2.40\}$.

x	y1 = 2*sqrt(x)	y2 = sqrt(x+2)+1
2.2	2.96647	3.04939
2.3	3.0331502	3.0736441
2.4	3.09838	3.0976177
2.43	3.09838	3.0976177
2.5	3.1622777	3.1213203

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

نظم الطلاب في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إليهم حل المعادلات والمتباينات الجذرية، وحل الأسئلة 1, 2, 4, 5.

المثال 1

- اطلب إلى الطلاب حل المعادلة الجذرية مرة أخرى، باعتبار أن كل طرف دالة. والفت انتباههم إلى أن الطرف الأيمن يمكن تمثيله بيانياً بسهولة مثل الدالة $f(x)$.

المثال 2

- اطلب إلى الطلاب حل المتباينة الجذرية في هذا النشاط مرة أخرى عن طريق طرح $2\sqrt{x}$ من كلا الطرفين أولاً، ثم تمثيل الدالة $f(x) = \sqrt{x+2} + 1 - 2\sqrt{x}$ بدلاً من التعامل مع كل من طرفيها على أنه دالة. والفت انتباههم إلى أن جزء التمثيل البياني الواقع تحت محور x يبين الحل.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 2-3, 5-6.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤالين 3, 6 لتقويم مدى استيعاب الطلاب طريقة حل معادلة أو متباينة جذرية.

من المحسوس إلى المجرد

أسأل:

- كيف تعرف عند تفحص جدول القيم للمعادلة في المثال 1، إن كان الحل يقع بين قيمتين من قيم x تتغير عندهما إشارة الدالة الممثلة بيانياً؟ إجابة ممكنة: بما أنه تم حل المعادلة الأصلية بمساواة أحد الطرفين بالصفر، فإن الدالة التي تمثل الطرف الآخر لها قيمة تساوي صفرًا عندما y تساوي صفرًا. وذلك عندما تقع قيمة x للمتغير بين قيمتين أخريين للمتغير نفسه على أن تكون لقيمتي y المناظرتين لهاتين القيمتين إشارتان مختلفتان؛ (لأن الصفر يقع بين الأعداد الموجبة والسالبة).

إجابة:

- (7) أعد كتابة المتباينة، بحيث يصبح أحد طرفيها صفرًا، ثم مثل الطرف الآخر بيانياً، وأوجد قيم x التي يكون عندها التمثيل البياني فوق محور x أو تحته بالاعتماد على رمز المتباينة. واستعمل ميزة الصفر لتقريب الإحداثي x للنقطة التي يقطع عندها التمثيل البياني محور x .

توسع 4-7 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات الجذرية 225



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 4

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (36) دون	تدريبات إعادة التعليم - تنمة (37) دون		
<p style="text-align: right;">الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p style="text-align: center;">4-7 تدريبات إعادة التعليم حل المعادلات والمتباينات الجذرية</p> <p>حل المعادلات الجذرية، تستخدم الخطوات الآتية في حل المعادلات التي تحتوي على متغيرات تحت الجذر. وقد تحتاج أحياناً إلى إجراء بعض العمليات الجبرية قبل استخدام هذه الخطوات.</p> <p>الخطوة 1: انفصل الجذر في أحد طرفي المعادلة. الخطوة 2: لتخلص من الجذر، ارفع طرفي المعادلة لاسي يساوي دليل الجذر. الخطوة 3: حل المعادلة الناتجة. الخطوة 4: تحقق من حلك في المعادلة الأصلية للتأكد من أنك لم تحصل على جذور دخيلة.</p> <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; border: none;"> <p>مثال 1: حل المعادلة $2\sqrt{4x+8} - 4 = 8$</p> <p>الخطوة الأولى: $2\sqrt{4x+8} = 12$</p> <p>بقسم الطرفين $\sqrt{4x+8} = 6$</p> <p>الخطوة الثانية: $4x+8 = 36$</p> <p>بقسم الطرفين $4x = 28$</p> <p>بقسم الطرفين على 4 $x = 7$</p> <p>تحقق: $2\sqrt{4(7)+8} - 4 = 8$ $2\sqrt{36} - 4 = 8$ $2(6) - 4 = 8$ $8 = 8$</p> </td> <td style="width: 50%; border: none;"> <p>مثال 2: حل المعادلة $\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x-1}$</p> <p>الخطوة الأولى: $\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x-1}$</p> <p>بقسم الطرفين $3x+1 = 5x-2\sqrt{5x-1} + 1$</p> <p>بالتبسيط $2\sqrt{5x-1} = 2x$</p> <p>الخطوة الثانية: $\sqrt{5x-1} = x$</p> <p>بقسم الطرفين $5x-1 = x^2$</p> <p>بقسم الطرفين $x^2 - 5x + 1 = 0$</p> <p>بالتحليل إلى عوامل $x(x-5) = 0$</p> <p>$x = 0, x = 5$</p> <p>تحقق: $\sqrt{3(0)+1} = 1, \sqrt{5(0)-1} = -1$ إذن $x=0$ ليس حلاً، $\sqrt{3(5)+1} = 4, \sqrt{5(5)-1} = 4$ إذن $x=5$ هو الحل.</p> </td> </tr> </table> <p style="text-align: right;">الصف: _____ التاريخ: _____</p>	<p>مثال 1: حل المعادلة $2\sqrt{4x+8} - 4 = 8$</p> <p>الخطوة الأولى: $2\sqrt{4x+8} = 12$</p> <p>بقسم الطرفين $\sqrt{4x+8} = 6$</p> <p>الخطوة الثانية: $4x+8 = 36$</p> <p>بقسم الطرفين $4x = 28$</p> <p>بقسم الطرفين على 4 $x = 7$</p> <p>تحقق: $2\sqrt{4(7)+8} - 4 = 8$ $2\sqrt{36} - 4 = 8$ $2(6) - 4 = 8$ $8 = 8$</p>	<p>مثال 2: حل المعادلة $\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x-1}$</p> <p>الخطوة الأولى: $\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x-1}$</p> <p>بقسم الطرفين $3x+1 = 5x-2\sqrt{5x-1} + 1$</p> <p>بالتبسيط $2\sqrt{5x-1} = 2x$</p> <p>الخطوة الثانية: $\sqrt{5x-1} = x$</p> <p>بقسم الطرفين $5x-1 = x^2$</p> <p>بقسم الطرفين $x^2 - 5x + 1 = 0$</p> <p>بالتحليل إلى عوامل $x(x-5) = 0$</p> <p>$x = 0, x = 5$</p> <p>تحقق: $\sqrt{3(0)+1} = 1, \sqrt{5(0)-1} = -1$ إذن $x=0$ ليس حلاً، $\sqrt{3(5)+1} = 4, \sqrt{5(5)-1} = 4$ إذن $x=5$ هو الحل.</p>	<p style="text-align: right;">الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p style="text-align: center;">4-7 تدريبات إعادة التعليم حل المعادلات والمتباينات الجذرية</p> <p>حل المتباينات الجذرية، المتباينة الجذرية هي متباينة تحتوي متغيراً في الصورة الجذرية، وحل متباينة جذرية، اتبع الخطوات الآتية:</p> <p>الخطوة 1: إذا كان دليل الجذر عدداً موجباً، فعوّض قيم المتغير التي لا تجعل ما تحت الجذر سالباً. الخطوة 2: حل المتباينة جزئياً. الخطوة 3: اختبر القيم للتأكد من صحة الحل.</p> <p>مثال: حل المتباينة $5 - \sqrt{20x+4} \geq -3$</p> <p>بأن ما تحت الجذر التربيعي يتعين أن يكون موجباً أو صفراً، نحل أولاً $20x+4 \geq 0$</p> <p>$20x+4 \geq 0$ $20x \geq -4$ $x \geq -\frac{1}{5}$</p> <p>الآن حل المتباينة $5 - \sqrt{20x+4} \geq -3$</p> <p>الخطوة الأولى: $5 - \sqrt{20x+4} \geq -3$</p> <p>الخطوة الثانية: $\sqrt{20x+4} \leq 8$</p> <p>بقسم الطرفين $20x+4 \leq 64$</p> <p>بقسم الطرفين $20x \leq 60$</p> <p>بقسم الطرفين على 20 $x \leq 3$</p> <p>يتضح أن الحل هو $-\frac{1}{5} \leq x \leq 3$. اختبر بعض القيم في المتباينة الأصلية.</p> <p>تدريبات:</p> <p>حل كل متباينة مما يأتي:</p> <p>(1) $\sqrt{c-2} + 4 \geq 7$ (2) $3\sqrt{2x-1} + 6 < 15$ (3) $\sqrt{10x+9} - 2 > 5$ (4) $8 - \sqrt{3x+4} \geq 3$</p> <p>(5) $\frac{1}{2} \leq x < 5$ (6) $9 - \sqrt{6x+3} \geq 6$ (7) $2\sqrt{5x-6} - 1 < 5$</p> <p>(8) $\sqrt{2x+12} + 4 \geq 12$ (9) $\frac{6}{5} \leq x < 3$</p> <p>(10) $x > 4$ (11) $c \geq 11$</p> <p>الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية الصف: _____ التاريخ: _____</p>
<p>مثال 1: حل المعادلة $2\sqrt{4x+8} - 4 = 8$</p> <p>الخطوة الأولى: $2\sqrt{4x+8} = 12$</p> <p>بقسم الطرفين $\sqrt{4x+8} = 6$</p> <p>الخطوة الثانية: $4x+8 = 36$</p> <p>بقسم الطرفين $4x = 28$</p> <p>بقسم الطرفين على 4 $x = 7$</p> <p>تحقق: $2\sqrt{4(7)+8} - 4 = 8$ $2\sqrt{36} - 4 = 8$ $2(6) - 4 = 8$ $8 = 8$</p>	<p>مثال 2: حل المعادلة $\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x-1}$</p> <p>الخطوة الأولى: $\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x-1}$</p> <p>بقسم الطرفين $3x+1 = 5x-2\sqrt{5x-1} + 1$</p> <p>بالتبسيط $2\sqrt{5x-1} = 2x$</p> <p>الخطوة الثانية: $\sqrt{5x-1} = x$</p> <p>بقسم الطرفين $5x-1 = x^2$</p> <p>بقسم الطرفين $x^2 - 5x + 1 = 0$</p> <p>بالتحليل إلى عوامل $x(x-5) = 0$</p> <p>$x = 0, x = 5$</p> <p>تحقق: $\sqrt{3(0)+1} = 1, \sqrt{5(0)-1} = -1$ إذن $x=0$ ليس حلاً، $\sqrt{3(5)+1} = 4, \sqrt{5(5)-1} = 4$ إذن $x=5$ هو الحل.</p>		

تدريبات المهارات (38) دون ضمن فوق

تدريبات حل المسألة (39) دون	تدريبات المهارات (38) دون
<p style="text-align: right;">الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p style="text-align: center;">4-7 تدريبات حل المسألة حل المعادلات والمتباينات الجذرية</p> <p>(1) لوحات، يتفق رسام $(8n^2+400)$ ريالاً لرسم n لوحة. كم لوحة يمكنه رسمها بمساحة 1200 ريال؟</p> <p>(2) المساحة الجانبية، المساحة الجانبية لمخروط ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته r تعطى بالصيغة $L = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$. إذا كانت المساحة الجانبية تساوي 65π وحدة مربعة، وطول نصف قطر القاعدة 5 وحدات، فأوجد ارتفاع المخروط.</p> <p>(3) الأوريغامي (ORIGAMI): يريد صلاح أن يطوي ورقة مربعة الشكل لعمل مثلث متساوي الأضلاع، ويريد أن يحدد x على ضلع الورقة ليقيم بطي الورقة حول الخط المنقطع المبين بالشكل بحيث $h = 8$.</p> <p>(4) حيوان، يُرَبَط طرفاً في قاعدة سارية وقمتها على صورة الشكل التالي. وكان $x + y = 50$ واحداً على نظرية فيثاغورس، المسألة $\sqrt{x^2+25^2} = y$، ما قيمة x؟</p> <p>(5) مبنى: تابع وكالة الفضاء الأمريكية "ناسا" أكثر من 300 كوكب غير قريبة من الأرض. افترض أن الأرض مثل نقطة الأصل في مستوى إحداثي، فيكون مدار الكوكب وفق العلاقة $x > 0, y = \frac{17}{x}$. حيث كل وحدة تقابل مليون ميل. ويقول أحد فلكيي أنه يمكن مشاهدة الكوكب في المنظار الفلكي عندما يكون ضمن مسافة $\frac{145}{12}$ مليون ميل عن الأرض.</p> <p>(6) اكتب عبارة تعطي بُعد الكوكب عن الأرض بدلالة x.</p> <p>(7) ما قيم x التي تجعل الكوكب ضمن مدى المنظار الفلكي للرصد؟</p> <p>(8) $\frac{17}{12} \leq x \leq 12$</p> <p>الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية الصف: _____ التاريخ: _____</p>	<p style="text-align: right;">الاسم: _____ التاريخ: _____</p> <p style="text-align: center;">4-7 تدريبات المهارات حل المعادلات والمتباينات الجذرية</p> <p>حل كل معادلة مما يأتي:</p> <p>(1) $25\sqrt{x} = 5$ (2) $16\sqrt{x+3} = 7$ (3) $\frac{1}{25} 5\sqrt{y} = 1$ (4) $b^2 + 1 = 0$ لا يوجد حل</p> <p>(5) $18 - 3y^2 = 25$ لا يوجد حل (6) $\sqrt[3]{2w} = 4$ (7) $\sqrt{b-5} = 4$ (8) $8\sqrt{3n+1} = 5$ (9) $\sqrt[3]{3r-6} = 3$ (10) $3\sqrt{2} + \sqrt{3p+7} = 6$ (11) $40\sqrt{k-4} - 1 = 5$ (12) $\frac{5}{2} (2d+3)^{\frac{1}{2}} = 2$ (13) $11(t-3)^{\frac{1}{2}} = 0$ (14) $-9 - 4 - (1-7u)^{\frac{1}{2}} = 0$ (15) $\sqrt{3z-2} = \sqrt{z-4}$ لا يوجد حل</p> <p>(16) $8\sqrt{g+1} = \sqrt{2g-7}$ (17) $3 \leq c \leq 4$ (18) $5 + \sqrt{c-3} \leq 6$ (19) $-1 \leq x < 26 - 2 + \sqrt{3x+7} < 3$ (20) $-2 \leq a \leq 16 - \sqrt{2a+4} \geq -6$ (21) $r > 7\sqrt{4r-3} > 10$ (22) $-\frac{1}{3} \leq x < 0 - \sqrt{3x+1} > 3$ (23) $y \geq 32\sqrt{y+4} - 3 \geq 3$ (24) $-\frac{3}{11} \leq r \leq 2 - 3\sqrt{11r+3} \geq -15$</p> <p>الفصل 4: العلاقات والدوال العكسية والجذرية الصف: _____ التاريخ: _____</p>

مصادر المعلم للأنشطة الصفية



مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 4

فوق المتوسط

ضمن المتوسط

دون المتوسط

فوق ضمن دون

كتاب التمارين (30)

فوق ضمن

التدريبات الإثرائية (40)

4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية

حل كل معادلة مما يأتي:

- | | |
|--|---|
| $4 - \sqrt{x} = 3$ (2) | $64 \sqrt{x} = 8$ (1) |
| $4\sqrt{3x} - 2 = 0$ (4) | $\frac{49}{2} \sqrt{2p} + 3 = 10$ (3) |
| $18 + 7t^2 = 12$ لا يوجد لها حل حقيقي | $9t^2 + 6 = 9$ (5) |
| $\sqrt[3]{6t-7} = 1$ (8) | $341 \sqrt[3]{d+2} = 7$ (7) |
| $\sqrt[3]{y-9} + 4 = 0$ لا يوجد لها حل حقيقي | $6 + \sqrt[3]{q-4} = 9$ (9) |
| $\frac{63}{4} \sqrt[3]{4m+1} - 2 = 2$ (12) | $131 \sqrt{2m-6} - 16 = 0$ (11) |
| $-\frac{3}{4} \sqrt{1-4t} - 8 = -6$ (14) | $\frac{7}{4} \sqrt{8n-5} - 1 = 2$ (13) |
| $-20(6u-5)^2 + 2 = -3$ (16) | $33(3g+1)^2 - 6 = 4$ (15) |
| $2\sqrt{4r-6} = \sqrt{r}$ (18) | $4\sqrt{2d-5} = \sqrt{d} - 1$ (17) |
| $\sqrt{2x+5} = \sqrt{2x+1}$ لا يوجد لها حل حقيقي | $\frac{3}{2} \sqrt{6x-4} = \sqrt{2x+10}$ (19) |
| $-5 \leq x \leq 76 \sqrt{x+5} + 4 \leq 13$ (22) | حل كل متباينة مما يأتي: |
| $8 + \sqrt{2x} \leq 5$ لا يوجد لها حل | $a \geq 16 \quad 3\sqrt{a} \geq 12$ (21) |
| | $1 \leq x < 5 \quad \sqrt{x-1} < 2$ (23) |

- (25) إحصاء: يستعمل الإحصائيون القانون $\sigma = \sqrt{c}$ لحساب الانحراف المعياري σ ، حيث c التباين لمجموعة البيانات. أوجد التباين لمجموعة بيانات انحرافها المعياري 15. 225
- (26) جاذبية أرضية: أسقطت سلمي كرة من ارتفاع 25ft عن سطح الأرض. ويمكن تشيّل ارتفاع الكرة بالأقدام عن سطح الأرض h بعد t ثانية بالصيغة $h = \frac{1}{4}\sqrt{25-t}$. فما يكون ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بعد 1s من إسقاطها؟ 9 ft

30

الاسم: _____ التاريخ: _____

4-7 التدريبات الإثرائية

جداول الصواب

العمليات الأساسية في الرياضيات هي: الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة، وإيجاد قيمة جذر، وإيجاد قيمة قوة. وفي المنطق، العمليات الأساسية هي: النفي (\neg)، و (\wedge)، أو (\vee)، يتضمن (\rightarrow).

إذا كانت p و q عبارتين، فإن $\neg p$ تعني نفي العبارة p ، و ($p \wedge q$) تعني (p و q)، و ($p \vee q$) تعني (p أو q)، و ($p \rightarrow q$) تعني أن العبارة p تتضمن العبارة q ، وعمليات المنطق معرّفة في جداول تسمى جداول الصواب. والجداول التالية تفلّ العمليات: $\neg p$ ، و $p \wedge q$ و $p \vee q$ و $p \rightarrow q$ على الترتيب من اليسار إلى اليمين.

لاحظ في جدول الصواب للعبارة $\neg p$ أنه توجد حالتان يمكنتان للعبارة p هما: صواب (T) وخطأ (F). وبيّن الجدول أنه عندما تكون p خطأ تكون $\neg p$ صائبة.

$\neg p$	p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	q	$p \vee q$	p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T	T	F	T	F
T	F	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	F	T	T	T	F	F	T
F	F	F	F	T	F	F	F	F	T

يمكنك أن تحدد الشروط والحالات التي تكون فيها عبارة مركبة صائبة، مستعملاً المعلومات المترافقة في الجداول السابقة.

ما الشرط الذي تجعل العبارة ($\neg p \vee q$) صائبة:
أعمل جدول الصواب للعبارة، مستعملاً المعلومات المترافقة في جدول الصواب للعبارة $p \vee q$ السابقة لإكمال العمود الأخير في الجدول.

$\neg p$	q	$\neg p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

يُعد جدول الصواب على أن العبارة $\neg p \wedge q$ صائبة في جميع الحالات باستثناء الحالة التي تكون فيها p صائبة و q خطأ.

استعمل جدول الصواب لتحديد الشروط التي تكون عندما كل من العبارات الآتية صائبة:
 $\neg p \vee q$ (1)
 $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ (2)

- دائماً عدا العبارة p صحيحة و q صحيحة
- كل الحالات
- (3) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- عندما تكون p صحيحة و q صحيحة، وكذلك عندما تكون p خطأ و q خطأ

الفصل 4 العلاقات والدوال العكسية والجذرية

40

المصفى، الثاني الثانوي

التقويم التكويني

المفردات الأساسية يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 1-8، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعاً ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (71).

أحاجي المفردات

تعزز مفردات الطلاب الرياضية باستعمال أربعة نماذج من الأحاجي هي: الكلمات المتقاطعة، والحروف المبعثرة، والبحث عن كلمة باستعمال قائمة حروف، والبحث عن كلمة باستعمال التلميحات. ويمكن أن يعمل الطلاب من خلال الإنترنت أو على أوراق عمل مطبوعة.

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العمليات على الدوال. (الدرس 4-1)

العملية	التعريف
الجمع	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
الطرح	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$
التركيب	$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

العلاقات والدوال العكسية ودوال الجذر التربيعي (الدراسن 4-2، 4-3)

- اعكس إحداثيات الأزواج المرتبة لتجد العلاقة العكسية.
- تكون كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى إذا فقط إذا كان كل من تركيبهما يساوي الدالة المحايدة.

جذور الأعداد الحقيقية. (الدرس 4-4)

الجذور الحقيقية النونية لعدد a			
$a = 0$	$a < 0$	$a > 0$	n
له جذر حقيقي وحيد وهو 0	ليس له جذور حقيقية	له جذر وحيد موجب وله جذر وحيد سالب	عدد زوجي
	ليس له جذور موجبة وله جذر وحيد سالب	له جذر وحيد موجب وليس له جذور سالبة	عدد فردي

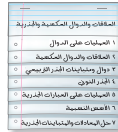
العبارات الجذرية (الدرس 4-5 إلى 4-7)

إذا كان a, b عددين حقيقيين، و n, x, y أعداد صحيحة حيث $b \neq 0, n > 1, y > 1$ يُعد كل مما يأتي صحيح.

- خاصية الضرب: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- خاصية القسمة: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- الأسس النسبية: $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = (\sqrt[y]{b})^x, b > 0$

المطويات

تأكد أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.



المفردات الأساسية

- تركيب دالتين (181) ما تحت الجذر (199)
العلاقة العكسية (187) الجذر الرئيس (199)
دالة عكسية (187) إنطاق المقام (207)
دالة الجذر التربيعي (193) الجذور المتشابهة (208)
الدالة الجذرية (193) المرافق (209)
متباينة الجذر التربيعي (195) المعادلة الجذرية (218)
الجذر النوني (199) الحل الدخيل (218)
رمز الجذر (199) المتباينة الجذرية (220)
الدليل (199)

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

- 1 عند _____، تستعمل قيم دالة منها لحساب قيم الدالة الأخرى. **تركيب دالتين**
- 2 عندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، فإن الجذر غير السالب يُسمى _____. **الجذر الرئيس**
- 3 للتخلص من الجذور في المقام، فإنك تستعمل عملية تُسمى _____. **إنطاق المقام**
- 4 عند حل معادلات جذرية، تحصل أحياناً على عدد لا يحقق المعادلة الأصلية. ويُسمى مثل هذا العدد _____. **الحل الدخيل**
- 5 دالة الجذر التربيعي هي نوع من أنواع _____. **الدوال الجذرية**
- 6 هي مجموعة من الأزواج المرتبة التي نحصل عليها عن طريق تبديل إحداثيات كل زوج مرتب للعلاقة الأصلية. **العلاقة العكسية**
- 7 إذا ساوى كل من تركيب دالتين الدالة المحايدة فإن كليهما تكون _____ **دالة عكسية**
- 8 تعد $\sqrt{x-3} > 5$ مثلاً على: _____. **متباينة الجذر التربيعي**

منظم أفكار

المطويات

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعداداً لاختبار الفصل.

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس. واقترح عليهم أن يبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

مثال 1

أوجد $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ لكل مما يأتي: (9-12) انظر الهامش.

(10) $f(x) = x^2 + 1$ (9) $f(x) = 2x + 1$

$g(x) = x - 7$ $g(x) = 4x - 5$

(12) $f(x) = 4x$ (11) $f(x) = x^3$

$g(x) = 5x - 1$ $g(x) = x - 1$

(13) قياسات: تستعمل الصيغة $f = 3y$ لتحويل اليرادات y إلى أقدم f ، كذلك تستعمل الصيغة $f = \frac{n}{12}$ لتحويل البوصات n إلى أقدم f . اكتب الصيغة التي تحول اليرادات إلى بوصات.
 $n = 36y$

بالتعويض عن $f(x)$ بالمقدار $g[f(x)] = 3(x^2 + 3) - 2$

بالتعويض عن $f(x)$ بالمقدار $= 3x^2 + 9 - 2$

بالتبسيط $= 3x^2 + 7$

بالتعويض عن $g(x)$ بالمقدار $f[g(x)] = (3x - 2)^2 + 3$

بالتعويض عن $g(x)$ بالمقدار $= 9x^2 - 12x + 4 + 3$

بالتبسيط $= 9x^2 - 12x + 7$

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 4 ص (65)، وناقشهم حول تغيير إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عما كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

(9) $[f \circ g](x) = 8x - 9$

$[g \circ f](x) = 8x - 1$

(10) $[f \circ g](x) = x^2 - 14x + 50$

$[g \circ f](x) = x^2 - 6$

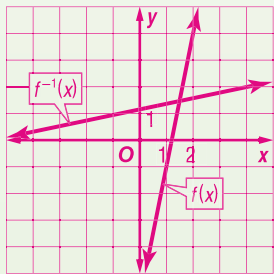
(11) $[f \circ g](x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$[g \circ f](x) = x^3 - 1$

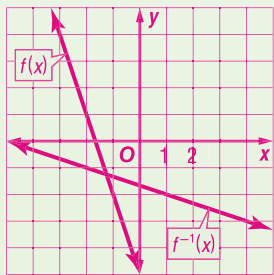
(12) $[f \circ g](x) = 20x - 4$

$[g \circ f](x) = 20x - 1$

(14) $f^{-1}(x) = \frac{x+6}{5}$



(15) $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{-3}$



مثال 2

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = -2x + 7$.

ضع المتغير y بدلاً من رمز الدالة $f(x)$: $y = -2x + 7$ ، ثم قم بالتبديل بين المتغيرين x , y ، وحل المعادلة بالنسبة للمتغير y .

بالتبديل بين المتغيرين $x = -2y + 7$

بالحل بالنسبة للمتغير $y = -x + 7$

بقسمة الطرفين على 2 $y = \frac{-x+7}{2}$

ضع الرمز $f^{-1}(x)$ بدلاً من المتغير y : لأن معكوس الدالة $f(x)$ هو دالة أيضًا.

$f^{-1}(x) = \frac{-x+7}{2}$

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانيًا على مستوى إحداثي واحد: (14-19) انظر الهامش.

(15) $f(x) = -3x - 5$ (14) $f(x) = 5x - 6$

(17) $f(x) = \frac{4x+1}{5}$ (16) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

(19) $f(x) = (2x+1)^2$ (18) $f(x) = x^2$

في كل زوج مما يأتي حدّد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا، وضح إجابتك.

(20) $f(x) = 2x + 1, g(x) = x - 2$ لا

(21) $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt[3]{x}$ نعم

(22) ثقافة مالية: قام عبدالله بالأنشطة المالية الآتية خلال الشهر الماضي: أودع مبلغًا يعادل مثلي رصيده الأصلي، ثم أودع مبلغين قيمة كل منهما 450 ريالًا، ثم سحب مبلغ 350 ريالًا خمس مرات من رصيده. إذا كان رصيده الآن 1890 ريالًا، فاكتب معادلة تمثل هذه المسألة، وماذا كان رصيده في بداية الشهر؟

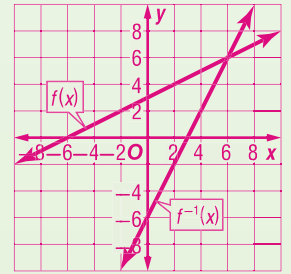
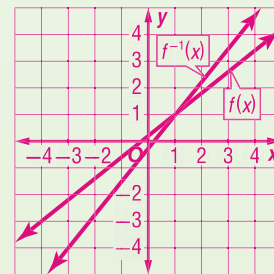
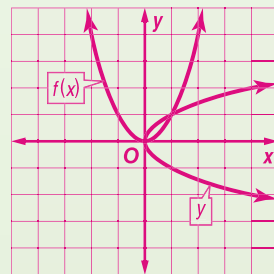
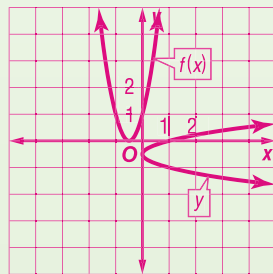
$1890 = 5(350) - 5(2x+2) + 913,33$ ريالًا تقريبًا

(19) $y = \frac{-1 \pm \sqrt{x}}{2}$

(18) $y = \pm \sqrt{x}$

(17) $f^{-1}(x) = \frac{5x-1}{4}$

(16) $f^{-1}(x) = 2x - 6$



مراجعة الدروس

إجابات

4-3 دوال ومتباينات الجذر التربيعي (الصفحات: 193-198)

مثال 3

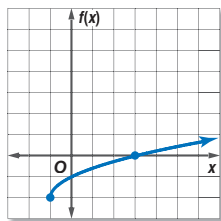
مثّل بيانيًا الدالة: $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$ ، وحدّد مجالها ومداهما:

تحديد المجال:

ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر. $x + 1 \geq 0$

اطرح العدد 1 من الطرفين. $x \geq -1$

اعمل جدولًا لبعض قيم المتغير x ، حيث $x \geq -1$ ، ومثّل الدالة بيانيًا.



x	f(x)
-1	-2
0	-1
1	-0.59
2	-0.27
3	0
4	0.24
5	0.45

المجال هو $\{x | x \geq -1\}$ ، والمدى هو $\{f(x) | f(x) \geq -2\}$.

مثّل بيانيًا كل دالة فيما يأتي، وحدد مجالها ومداهما: (23-28) انظر الهامش.

$f(x) = \sqrt{3x}$ (23) $f(x) = -\sqrt{6x}$ (24)

$f(x) = \sqrt{x-7}$ (25) $f(x) = \sqrt{x+5} - 3$ (26)

$f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x-1} + 5$ (27) $f(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{x+4} - 1$ (28)

(29) هندسة: يُعبر عن مساحة الدائرة بالقانون $A = \pi r^2$. فما نصف قطر دائرة مساحتها 300 cm^2 تقريبًا؟ **9.8 cm**

مثّل بيانيًا كل متباينة فيما يأتي: (30-32) انظر ملحق الإجابات.

$y \geq \sqrt{x} + 3$ (30)

$y < 2\sqrt{x-5}$ (31)

$y > -\sqrt{x-1} + 2$ (32)

4-4 الجذر التوحيدي (الصفحات: 199-203)

مثال 4

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{64x^6}$

$\sqrt{64x^6} = \sqrt{(8x^3)^2} = 8|x^3|$
بالتبسيط

استعمل رمز القيمة المطلقة لتجنب القيم السالبة للمتغير x .

مثال 5

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}}$

$\sqrt[6]{4096x^{12}y^{24}} = \sqrt[6]{(4x^2y^4)^6} = 4x^2y^4$
بالتبسيط

بسّط كلّ مما يأتي:

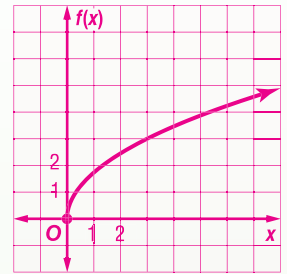
$\pm 11 \pm \sqrt{121}$ (33) $-5 \sqrt[3]{-125}$ (34)

$6 \sqrt{(-6)^2}$ (35) $(x^2+2)^3 \sqrt[6]{(x^2+2)^{18}}$ (36)

$3x^2y^5 \sqrt[5]{243x^{10}y^{25}}$ (39) $a^2|b^3| \sqrt[4]{a^8b^{12}}$ (38) $(383(x+3)) \sqrt[3]{27(x+3)^3}$ (37)

(40) فيزياء: تستعمل الصيغة $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ لحساب سرعة جسم v ، حيث v السرعة بالأمتار لكل ثانية، m كتلة الجسم بالجرام، K الطاقة الحركية بالجول. أوجد السرعة بالأمتار لكل ثانية لجسم كتلته 17 جرامًا وطاقته الحركية 850 جولًا. **10 m/s**

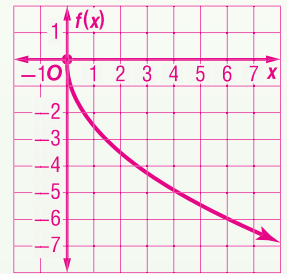
(23)



المجال $\{x | x \geq 0\}$

المدى $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$

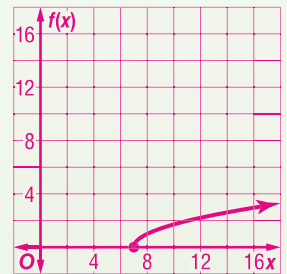
(24)



المجال $\{x | x \geq 5\}$

المدى $\{f(x) | f(x) \leq 0\}$

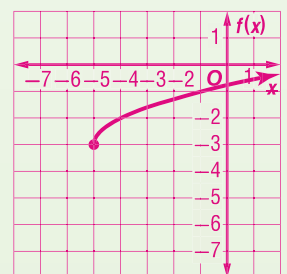
(25)



المجال $\{x | x \geq 7\}$

المدى $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$

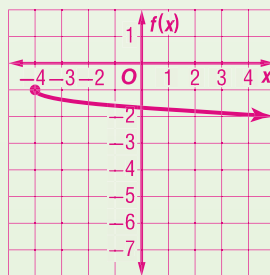
(26)



المجال $\{x | x \geq -5\}$

المدى $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$

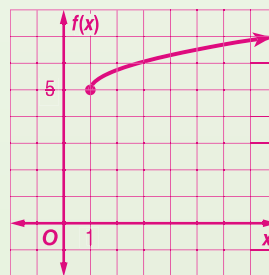
(28)



المجال $\{x | x \geq -4\}$

المدى $\{f(x) | f(x) \leq 0\}$

(27)



المجال $\{x | x \geq 1\}$

المدى $\{f(x) | f(x) \geq 0\}$

المحيط = $28 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ (49)
المساحة = $48 + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - \sqrt{6}$

العمليات على العبارات الجذرية (الصفحات: 206-211) 4-5

مثال 6

بسط العبارة $2\sqrt[3]{18a^2b} \cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$
 $2\sqrt[3]{18a^2b} \cdot 3\sqrt[3]{12ab^5}$
خاصية ضرب الجذور
بالتحليل إلى العوامل
خاصية ضرب الجذور
بيجاد الجذر التكعيبي
بالتبسيط

$$= (2 \cdot 3)\sqrt[3]{18a^2b \cdot 12ab^5}$$

$$= 6\sqrt[3]{2^3 3^3 a^3 b^6}$$

$$= 6 \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$$

$$= 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$$

$$= 36ab^2$$

مثال 7

بسط العبارة $\sqrt{\frac{x^4}{y^5}}$
خاصية قسمة الجذور
بتحليل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة
بانطاق المقام
 $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$

$$\sqrt{\frac{x^4}{y^5}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^5}}$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2)^2}}{\sqrt{(y^2)^2} \cdot \sqrt{y}}$$

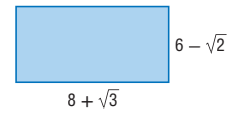
$$= \frac{x^2}{y^2\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$$

$$= \frac{x^2\sqrt{y}}{y^3}$$

بسط كل عبارة جذرية فيما يأتي:

(41) $3\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{54}$
(42) $12ab^2\sqrt{ab} \sqrt{144a^3b^5}$
(43) $12|x|y\sqrt{42} \cdot 4\sqrt{6y} \cdot 3\sqrt{7x^2y}$
(44) $80\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{72} + 7\sqrt{98} - \sqrt{50}$
(45) $74 + 18\sqrt{10} (6\sqrt{5} - 2\sqrt{2})(3\sqrt{5} + 4\sqrt{2})$
(46) $\frac{m^2\sqrt{6mp}}{p^6} \frac{\sqrt{6m^5}}{\sqrt{p^{11}}}$
(47) $\frac{15 - 3\sqrt{2}}{23} \frac{3}{5 + \sqrt{2}}$
(48) $-\sqrt{15} - 3\sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{6}}$

هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل أدناه ومساحته.



الأسس النسبية (الصفحات: 212-217) 4-6

مثال 8

بسط العبارة $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}}$
خاصية ضرب القوى
بجمع الأسس

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}$$

$$= a^{\frac{13}{15}}$$

مثال 9

بسط العبارة $\frac{2a}{\sqrt[3]{b}}$
بكتابة العبارة على الصورة الأسية
بانطاق المقام
بكتابة العبارة على الصورة الجذرية

$$\frac{2a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{2a}{b^{\frac{1}{3}}}$$

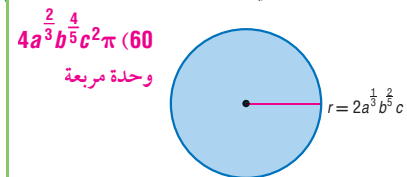
$$= \frac{2a}{b^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2ab^{\frac{2}{3}}}{b} = \frac{2a\sqrt[3]{b^2}}{b}$$

بسط كل عبارة مما يأتي:

(50) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{7}{6}}$ (51) $m^{-\frac{3}{4}} \frac{m^{\frac{1}{4}}}{m}$ (52) $\frac{d^{\frac{5}{12}}}{d} \frac{d^{\frac{1}{6}}}{d^{\frac{2}{3}}}$
بسط كل عبارة مما يأتي:
(53) $\frac{y^{\frac{3}{4}}}{y} \frac{1}{y^{\frac{1}{4}}}$ (54) $3 \sqrt[3]{\sqrt{729}}$ (55) $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

هندسة: ما مساحة الدائرة في الشكل أدناه؟



4-7 حل المعادلات والمتباينات الجذرية (الصفحات: 218-223)

مثال 10

حل المعادلة الجذرية $\sqrt{2x+9} - 2 = 5$

المعادلة الأصلية $\sqrt{2x+9} - 2 = 5$

بإضافة العدد 2 للطرفين $\sqrt{2x+9} = 7$

بتربيع الطرفين $(\sqrt{2x+9})^2 = 7^2$

بإيجاد مربع الطرفين $2x + 9 = 49$

ب طرح العدد 9 من الطرفين $2x = 40$

بقسمة الطرفين على العدد 2 $x = 20$

تحقق: $\checkmark \sqrt{20 \times 2 + 9} - 2 \stackrel{?}{=} 5$

مثال 11

حل المتباينة $\sqrt{2x-5} + 2 > 5$

ما تحت الجذر ليس سالبًا $2x - 5 \geq 0$

بإضافة العدد 5 للطرفين $2x \geq 5$

بقسمة الطرفين على العدد 2 $x \geq 2.5$

يجب أن يكون الحل أكبر من أو يساوي 2.5 لينتمي إلى المجال.

المتباينة الأصلية $\sqrt{2x-5} + 2 > 5$

ب طرح العدد 2 من الطرفين $\sqrt{2x-5} > 3$

بتربيع الطرفين $(\sqrt{2x-5})^2 > 3^2$

بإيجاد مربع الطرفين $2x - 5 > 9$

بإضافة العدد 5 للطرفين $2x > 14$

بقسمة الطرفين على العدد 2 $x > 7$

بما أن $x \geq 2.5$ تحوي $x > 7$ ، فإن حل المتباينة هو $x > 7$.

تحقق: $x = 0, \sqrt{2 \times 0 - 5} + 2 \stackrel{?}{\geq} 5$

$\times \sqrt{-5} + 2 > 5$

وبما أن $\sqrt{-5}$ ليس عددًا حقيقيًا، فإن المتباينة لا تتحقق.

$x = 8, \sqrt{2 \times 8 - 5} + 2 \stackrel{?}{\geq} 5$

$\checkmark \sqrt{11} + 2 > 5$

وبما أن $5.3 > 5$ ، فإن المتباينة تتحقق.

حل كل معادلة مما يأتي: (58) $\frac{100}{9}$ (62) لا يوجد حل حقيقي

(57) $-\sqrt{x-11} = 3 - \sqrt{x}$ (58) $\sqrt{x-3} + 5 = 15$

(59) $2\sqrt{m+3} = \sqrt{2m+1}$ (60) $\frac{17}{3} + 4 + \sqrt{3x-1} = 8$

(61) $(x+1)^{\frac{1}{4}} = -3$ (62) $3\sqrt{2x+3} = 3$

(63) $3(3x-1)^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$ (64) $64a^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$

(65) فيزياء: الصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ تمثل الزمن الدوري للبندول، حيث T الزمن بالثواني، L طول البندول بالأقدام. أوجد طول البندول الذي يستغرق 2.75s لإتمام دورته. **6.13 ft تقريبًا**

حل كل متباينة مما يأتي:

(66) $\frac{1}{3} \leq x < \frac{10}{3}$

(67) $x \geq 29$

(68) $x \geq \frac{4}{3}$

(69) $x \leq -20$

(70) لا يوجد حل

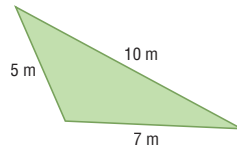
(71) $x \geq \frac{3}{2}$

(72) $x > \frac{5}{2}, \sqrt{3x+1} - \sqrt{6+x} > 0$

المعالجة: بناءً على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تشكل تحدياً للطلاب. اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (72-79).

- بسّط كلاً مما يأتي: (18) $17\sqrt{2} - 25$
- (17) $(3 - 2\sqrt{2})(-7 + \sqrt{2})$ (18-3) $(2 + \sqrt{5})(6 - 3\sqrt{5})$
- (19) $\frac{2m - 3m^{\frac{1}{2}} + 1}{4m - 1}$ $\frac{m^{\frac{1}{2}} - 1}{2m^{\frac{1}{2}} + 1}$ (20) $12\sqrt{3} + 24$ $\frac{12}{2 - \sqrt{3}}$
- (21) $5^2 = 25$ $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{5}{6}}$ (22) $-28\sqrt{3}$ $4\sqrt{3} - 8\sqrt{48}$
- (23) $2x^3y^2$ $\sqrt[5]{32x^{15}y^{10}}$ (24) $3ab^4\sqrt{a}$ $\sqrt[6]{729a^9b^{24}}$
- (25) $\frac{1}{r^2} \frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{1}{6}}}$ (26) $\frac{w^{\frac{5}{6}}}{w} w^{-\frac{4}{5}}$
- (27) $\frac{y^2 - 2y^{\frac{3}{2}}}{y - 4}$ $\frac{y^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}} + 2}$ (28) $\frac{a^{\frac{5}{12}}}{6a}$ $\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{6a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}}$
- (29) **اختيار من متعدد:** ما مساحة المستطيل في الشكل أدناه؟

- (31) $1 \leq x \leq 5$ (32) $-\frac{3}{2} \leq x \leq 39$ (33) $0 \leq b < 4$
- (34) $2 + \sqrt{6}$ $\sqrt{3}$
- (35) **هندسة:** يمكن إيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه a, b, c من القانون: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ حيث $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. اكتب مساحة المثلث في الشكل أدناه على الصورة الجذرية في أبسط صورة. $2\sqrt{66} \text{ m}^2$



231 الفصل 4 اختبار الفصل

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى، أم لا؟

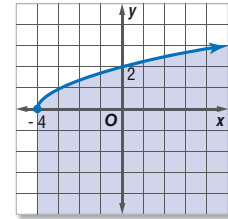
(1) نعم $f(x) = 3x + 8, g(x) = \frac{x-8}{3}$

(2) نعم $f(x) = \frac{1}{3}x + 5, g(x) = 3x - 15$

(3) نعم $f(x) = x + 7, g(x) = x - 7$

(4) لا $f(x) = \frac{x-2}{3}, g(x) = 3x - 2$

(5) **اختيار من متعدد:** أي المتباينات الآتية لها التمثيل البياني الظاهر في الشكل أدناه؟



- (A) $y \geq \sqrt{x-4}$ (B) $y \geq \sqrt{x+4}$
(C) $y \leq \sqrt{x-4}$ (D) $y \leq \sqrt{x+4}$

(7) $(f \cdot g)(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 2$

إذا كان $f(x) = 3x + 2, g(x) = x^2 - 2x + 1$ فأوجد كل دالة مما يأتي:

(6) $(f+g)(x)$ (7) $(f \cdot g)(x)$

(8) $(f-g)(x)$ (9) $(\frac{f}{g})(x)$

(10) $4\sqrt{a+12} = \sqrt{5a-4}$ (11) $\sqrt{3x} = \sqrt{x-2}$ لا يوجد حل

(12) $4(\sqrt[3]{3x+1}) - 8 = 0$ (13) $42\sqrt[3]{5m+6} + 15 = 21$

(14) $1 + \sqrt{x+11} = \sqrt{2x+15}$ (15) $\sqrt{x-6} - \sqrt{x} = 3$ لا يوجد حل

(16) **اختيار من متعدد:** قيمة العبارة $125^{-\frac{1}{3}}$ هي:

- (A) -5 (B) $-\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) 5

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% تقريباً من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريباً من الأسئلة،
فاختبر	أحد المصادر الآتية:	فاختبر	أحد المصدرين الآتين:
	مراجعة الدروس من 1-4 إلى 7-4		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26, 31, 36)
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28, 33, 38)		
	مشروع الفصل، ص (178)		
	www.obeikaneducation.com		www.obeikaneducation.com



الحل عكسياً

تعطي بعض مسائل الرياضيات معلومات عن النتيجة النهائية، وتتطلب استنتاج بعض الأمور التي حدثت مسبقاً. ويمكنك في مثل هذه المسائل الحل باستعمال استراتيجية الحل عكسياً.

استراتيجية الحل عكسياً:

خطوة 1

اقرأ نص المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المعلومات المعطاة؟
- ما المطلوب إيجاداه؟
- هل توجد معطيات ترتبط بالنتيجة النهائية؟
- هل المطلوب هو إحدى القيم غير المعطاة، والتي لم تذكر في نص المسألة؟
- ما العمليات المستعملة في المسألة؟

خطوة 2

عبر عن المسألة بما يناسبها: معادلة أو متباينة أو تمثيل بياني، ثم اعمل عكسياً لحل المسألة.

- مثل تتابع الأحداث بمخطط حسب نص المسألة إذا تطلب الأمر ذلك.
- استعمل العملية العكسية لكل عملية أثناء الحل عكسياً لتصل إلى الإجابة.

خطوة 3

تحقق من صحة الحل مبتدئاً بإجابتك التي حصلت عليها، وتأكد من أنك ستصل إلى النتيجة المعطاة في نص المسألة نفسها؟

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيداً، وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل معطيات المسألة لحلها.

اشترى عبدالرحمن سيارة مستعملة. فكان مجموع ما دفعه 36550 ريالاً. ويتضمن ذلك المبلغ رسوم نقل الملكية وهي 150 ريالاً، وعمولة مكتب الوساطة وهي 4% من ثمن السيارة. فما ثمن السيارة؟ بين خطوات الحل.

اقرأ المسألة بعناية. أنت تعلم المبلغ الذي دفعه عبد الرحمن بما فيه رسوم نقل الملكية وعمولة المكتب.

والمطلوب هو إيجاد ثمن السيارة قبل إضافة رسوم نقل الملكية وعمولة المكتب.

1 التركيز

الهدف استعمال استراتيجية الحل عكسياً؛ لحل مسائل الاختبار المعياري.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- هل فقدت شيئاً يوماً ما، وعُدت بخطواتك بحثاً عن ذلك الشيء؟ **تختلف إجابات الطلاب.**
- هل عُدت بخطواتك في ترتيب عكسي أم عشوائي؟ **تختلف إجابات الطلاب.**
- ما عكس عملية الجمع؟ وما عكس عملية الضرب؟ **الطرح، القسمة.**

مثال إضافي

تدريب على اختبار معياري:

حصل خالد على بطاقة خصم من أحد المحلات بقيمة 100 ريال، واستعملها لدفع جزء من ثمن جهاز اشتراه من المحل، وبعد إضافة بدل التوصيل والتركييب الذي تبلغ نسبته 6.5% من ثمن الجهاز وتبرعه بمبلغ 3.5 ريالات، كان مجموع ما دفعه خالد زيادة على قيمة بطاقة الخصم 862 ريالاً. فما ثمن الجهاز الأصلي؟ **C**

- A** 958.5 ريالاً
B 962 ريالاً
C 900 ريالاً
D 1062 ريالاً

3 التقويم

استعمل التمارين 1-3؛ لتقويم مدى فهم الطلاب.

افترض أن x تمثل ثمن السيارة. اكتب معادلة، واستعمل استراتيجية الحل عكسياً لحلها.

المتغير	$x =$ ثمن السيارة.
المعادلة	$1.04x + 150 = 36550$
التعبير اللفظي	ثمن السيارة مضاف إليه رسوم نقل الملكية وعمولة مكتب الوساطة يساوي المبلغ الذي دفعه عبدالرحمن.

ينتج عن استعمال استراتيجية الحل عكسياً معادلة بسيطة. استعمل العمليات العكسية لإيجاد قيمة x .

$$1.04x + 150 = 36550$$

$$1.04x = 36400$$

$$x = 35000$$

تحقق من صحة حلّك بالبدء بالإجابة التي حصلت عليها؛ لتتأكد من أنك ستحصل على القيمة نفسها المعطاة في نص المسألة.

$$35000(1.04) = 36400 \quad \text{أوجد عمولة مكتب الوساطة}$$

$$36400 + 150 = 36550 \quad \text{اجمع رسوم نقل الملكية}$$

$$36550 = 36550 \quad \text{القيمة نفسها المعطاة}$$

لذلك فإن ثمن السيارة هو 35000 ريال.

تمارين ومسائل

اقرأ المسائل الآتية جيداً، وحدد المطلوب في كل منها، ثم استعمل معطياتها لحلّها:

- 1) تستعمل المعادلة $d = \frac{s^2}{30}$ لإيجاد طول الأثر الذي تتركه عجلات سيارة على الطريق عند الوقوف المفاجئ، حيث d طول الأثر على الطريق بالأقدام، و s سرعة السيارة بالأميال لكل ساعة، و f معامل الاحتكاك الذي يصف حالة سطح الطريق. فإذا كان طول أثر عجلات سيارة على الطريق يساوي 120 قدماً.

$$s = \sqrt{30df} \quad (a)$$

(a) اكتب معادلة لإيجاد سرعة السيارة قبل الوقوف المفاجئ s بدلالة طول الأثر على الطريق d ومعامل الاحتكاك f .

(b) إذا كان معامل الاحتكاك للطريق يساوي 0.75، فكم كانت السرعة التقريبية للسيارة قبل الوقوف؟ **52 ميلاً لكل ساعة تقريباً**

(c) كم كانت سرعة السيارة قبل الوقوف إذا كان معامل الاحتكاك للطريق 1.1؟ **63 ميلاً لكل ساعة تقريباً**

- 2) قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 800 ft/s . إذا كان ارتفاع الجسم h بالأقدام بعد t ثانية فإنه يُعبر عنه بالمعادلة: $h = -16t^2 + 800t$. فبعد كم ثانية يصل الجسم إلى ارتفاع **B** ؟ 10000ft

- A** 10 ثوانٍ
B 25 ثانية
C 100 ثانية
D 625 ثانية

- 3) يقوم عليٌّ بعمل نموذج لسيارة مستعملاً مقياس رسم، فوجد أن ارتفاع نموذج السيارة يعادل $\frac{1}{32}$ من ارتفاع السيارة الحقيقي x . فأبي المعادلات الآتية تمثل هذه العلاقة؟ **H**

$$y = \frac{1}{32}x \quad \text{H} \quad y = x - \frac{1}{32} \quad \text{F}$$

$$y = x + \frac{1}{32} \quad \text{J} \quad y = \frac{1}{32}x \quad \text{G}$$

اسئلة الاختيار من متعدد

تشخيص أخطاء الطلاب

ارصد أخطاء الطلاب عن كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية، مثل:

- 1 A جمع قيمة القسيمة إلى السعر الأصلي ثم الضرب في النسبة التي يجب أن تدفع. **صحيحة**
B
C طرح قيمة القسيمة من السعر الأصلي ثم الضرب في نسبة الخصم.
D طرح قيمة القسيمة من السعر الأصلي ثم الضرب في النسبة التي يجب أن تدفع.

- 2 A **صحيحة**
B لم يتبع ترتيب العمليات بشكل صحيح
C لم يتبع ترتيب العمليات بشكل صحيح
D أخطأ في التبسيط.

- 3 A لم يتبع ترتيب العمليات بالشكل الصحيح **الصحيح**
B **صحيحة**
C لم يضرب بصورة صحيحة.
D لم يضرب بصورة صحيحة.
4 A لم يطرح رسوم النقل أولاً.
B **خمن الإجابة.**
C **صحيحة**
D طرح رسوم نقل الملكية فقط.

- 5 A لم يجد الجذر التكعيبي للأسس بصورة صحيحة. **صحيحة**
B
C لم يجد الجذر التكعيبي للعدد -27 بصورة صحيحة.
D **خمن الإجابة.**

- 6 A خلط بين الثوابت التي تسبب إزاحة إلى أعلى وإلى أسفل، وتلك التي تسبب إزاحة إلى اليمين وإلى اليسار. **صحيحة**
B لم يستوعب أن الثابت تحت الجذر؛ يسبب إزاحة للتمثيل البياني إلى اليمين أو إلى اليسار. **خمن الإجابة.**
C **صحيحة.**
D

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

- 1 يقدم محل خصماً نسبته 20% على جميع لوازم التخميم. ويملك بدر قسيمة حسم إضافية بقيمة 5 ريالات عند أي عملية شراء من المحل. إذا استعمل بدر القسيمة بعد الخصم لشراء خيمة، فأبي الدوال الآتية يمكن أن تستعمل لإيجاد سعر خيمة سعرها الأصلي d ريالاً؟ **B**

A $P(d) = 0.8 \times (d + 5)$

B $P(d) = (0.8 \times d) - 5$

C $P(d) = 0.2 \times (d - 5)$

D $P(d) = 0.8 \times (d - 5)$

2 إذا كان $X = \begin{bmatrix} a+b & 2 \\ 7 & c+d \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 8 & d \\ b & a \end{bmatrix}$ وكانت $X = Y$ فإن قيمة c تساوي: **A**

A -1

B 2

C -2

D 1

- 3 أي العبارات الآتية تكافئ: $3a(2a+1) - (2a-2)(a+3)$: **B**

A $2a^2 + 6a + 7$

B $4a^2 - a + 6$

C $4a^2 + 6a - 6$

D $4a^2 - 3a + 7$

- 4 اشترى سلمان سيارة مستعملة، أضيف إلى ثمنها 6.5% بدل صيانة دورية، ودفع 150 ريالاً رسوم نقل الملكية، أو جد ثمن السيارة إذا كان مجموع ما دفعه سلمان 68310 ريال. **C**

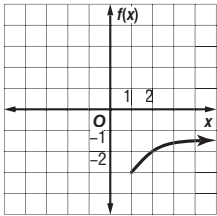
A 64140 C 64000

B 68000 D 68160

- 5 ما أبسط صورة للعبارة: $\sqrt[3]{-27b^6c^{12}}$. **B**

A $-3b^3c^6$ C $3b^2c^4$

B $-3b^2c^4$ D $3b^3c^6$



- 6 أي دوال الجذر التربيعي الآتية لها التمثيل البياني في الشكل المجاور؟ **D**

A $f(x) = \sqrt{x-3} - 1$

B $f(x) = \sqrt{x+1} - 3$

C $f(x) = \sqrt{x+3} + 1$

D $f(x) = \sqrt{x-1} - 3$

- 7 ما حل المعادلة: $\sqrt[3]{5x} = 10$? **C**

A 2 C 200

B 20 D 1000

- 8 أوجد الدالة العكسية للدالة: $f(x) = x - 5$. **A**

A $f^{-1}(x) = x + 5$ C $f^{-1}(x) = \frac{x}{5}$

B $f^{-1}(x) = 5x$ D $f^{-1}(x) = 5 - x$

- 9 أي المعادلات الآتية لها جذران نسيبان مختلفان؟ **A**

I. $3x^2 + x - 2 = 0$

II. $x^2 - 2x + 1 = 0$

III. $x^2 + 2x + 5 = 0$

A فقط I

B فقط II

C II، III فقط

D I، III فقط

- 7 A قسم على 5 مباشرة. **صحيحة**
B ربّع الطرفين بدلاً من أن يُكعبهما.
C **صحيحة.**
D أخطأ في التبسيط.
8 A **صحيحة**
B قام بالضرب بدلاً من الجمع.
C قام بالقسمة بدلاً من الجمع.
D ضرب في العدد -1 بدلاً من تبديل المتغيرين.

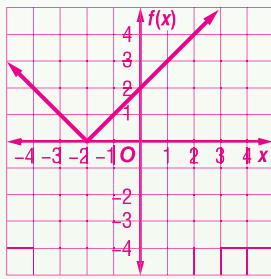
التقويم التكويني

يمكنك استعمال هاتين الصفحتين لتختبر مدى تقدم الطلاب في الفصل 4 من خلال:

اختبار تراكمي: ص (234-235)

اختبار تراكمي، ص (81).

إجابات:

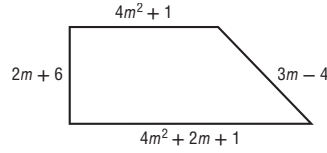


(10)

(15a) إجابة ممكنة: سيكونان انعكاسًا لبعضهما بعضًا حول المستقيم $y = x$.

(15b) إجابة ممكنة: 2؛ بما أن كلاً من f و g معكوس للأخرى، فإن أي عملية تقوم بها الدالة g على 2 تبطلها الدالة f ، لذا فإن المخرجات ستكون هي المدخلات نفسها.

13 إذا كان محيط الشكل الرباعي أدناه 160 وحدة، فما قيمة m ؟ 4



14-15 انظر الهامش

إجابات مطولة

أجب عن كل مما يلي موضِّحًا خطوات الحل: B

14 عمر أب وابنه 56 عامًا فإذا كان عمر الأب يزيد على مثلي عمر الابن بـ 20 عامًا:

(a) اكتب نظامًا من المعادلات الخطية يمثل المسألة.

(b) اكتب معادلة مصفوفية يمكن استعمالها لحل النظام في a

(c) أوجد النظر الضري لمصفوفة المعاملات، وحل المعادلة المصفوفية لإيجاد عمر كل من الأب وابنه.

15 إذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين كل منهما دالة عكسية للأخرى،

(a) فصف التمثيل البياني لكلتا الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ على مستوى إحداثي واحد. (a, b) انظر الهامش.

(b) ما قيمة $f[g(2)]$ ؟ وضع إجابتك.

أسئلة مقالية

إجابات قصيرة

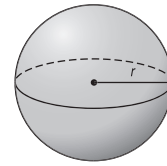
أجب عن كل مما يلي: للتمثيل البياني انظر الهامش

10 مثل الدالة $f(x) = |x + 2|$ بيانيًا، ثم حدد مجالها ومداهما. المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية المدى $= \{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

11 قُذِفَ جسم من منصة إلى أعلى. وتستهمل الصيغة الآتية لإيجاد ارتفاع الجسم h بالأقدام عن سطح الأرض بعد مرور t ثانية من لحظة القذف. فما أعلى ارتفاع يصل إليه الجسم؟ 95 ft

12 يمكن إيجاد نصف قطر كرة r حجمها V باستعمال الصيغة

$$V = 8580 \text{ in}^3 \quad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$



(a) ما نصف قطر الكرة في الشكل المجاور تقريبًا إلى أقرب عُشر؟ 12.7 in

(b) استعمل الصيغة السابقة لإيجاد الحجم V بدلالة نصف القطر r . $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

(c) احسب حجم كرة سلة قطرها 9 in تقريبًا إلى أقرب عُشر. 381.7 in³

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	إذا أخطأت في السؤال ...
4-2	2-5	3-3	4-4	4-7	1-3	3-2	4-2	4-7	4-3	4-3	4-2	3-3	2-1	4-1	فعد إلى الدرس ...

235 الفصل 4 اختبار تراكمي

إجابات:

$$x + y = 56, x - 2y = 20 \quad (14a)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (14b)$$

$$-\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \quad (14c)$$

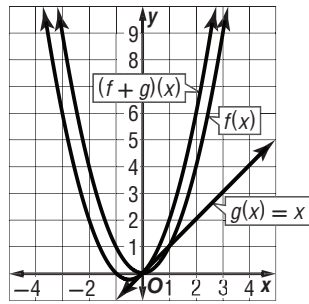
$$-\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 56 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 44 \end{bmatrix}$$

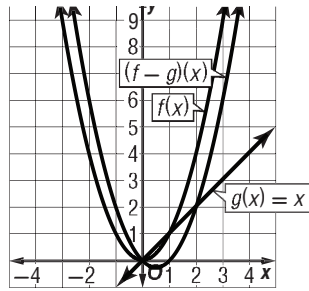
عمر الأب 44 عامًا عمر الابن 12 عامًا

(30a)

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x$	$(f+g)(x) = x^2 + x$	$(f-g)(x) = x^2 - x$
-3	9	-3	6	12
-2	4	-2	2	6
-1	1	-1	0	2
0	0	0	0	0
1	1	1	2	0
2	4	2	6	2
3	9	3	12	6



(30b)

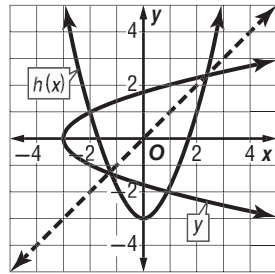


(30c)

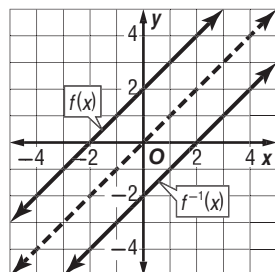
(30d) إجابة ممكنة: لأي قيمة من قيم x تكون المسافة الرأسية بين تمثيل الدالة $g(x)$ البياني ومحور x مساوية للمسافة الرأسية بين التمثيلين البيانيين للدالتين $(f+g)$, $f(x)$ وهي مساوية أيضًا للمسافة الرأسية بين التمثيلين البيانيين للدالتين $(f-g)(x)$, $f(x)$.

الدرس 4-2، ص (190-191) :

$$y = \pm\sqrt{x+3} \quad (5)$$



$$f^{-1}(x) = x - 2 \quad (11)$$



$$(f+g)(x) = 6x-3 \quad (8)$$

$$(f-g)(x) = -4x+1$$

$$(f \cdot g)(x) = 5x^2 - 7x + 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-1}{5x-2}, x \neq \frac{2}{5}$$

$$(f+g)(x) = x^2 - x + 1 \quad (9)$$

$$(f-g)(x) = x^2 + x - 1$$

$$(f \cdot g)(x) = -x^3 + x^2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{-x+1}, x \neq 1$$

$$(f+g)(x) = 4x^2 - 8x \quad (10)$$

$$(f-g)(x) = 2x^2 + 8x - 8$$

$$(f \cdot g)(x) = 3x^4 - 24x^3 + 8x^2 + 32x - 16$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x^2 - 4}{x^2 - 8x + 4}, x \neq 4 \pm 2\sqrt{3}$$

$$f \circ g = \{(-4, 4)\} \quad (12)$$

$$(g \circ f)(x) = \{(-8, 0), (0, -4), (2, -5), (-6, -1)\}$$

$$f \circ g \text{ غير معرفة} \quad (13)$$

$$g \circ f \text{ غير معرفة}$$

$$f \circ g \text{ غير معرفة} \quad (14)$$

$$(g \circ f)(x) = \{(-4, 9), (0, 1), (-6, 13), (2, -3)\}$$

$$f \circ g \text{ غير معرفة} \quad (15)$$

$$g \circ f \text{ غير معرفة}$$

$$(f \circ g)(x) = 32x^2 + 44x + 16 \quad (16)$$

$$(g \circ f)(x) = 8x^2 - 4x + 7$$

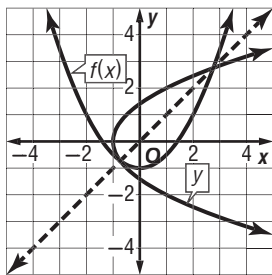
$$(f \circ g)(x) = 4x^3 + 7 \quad (17)$$

$$(g \circ f)(x) = (4x-1)^3 + 2$$

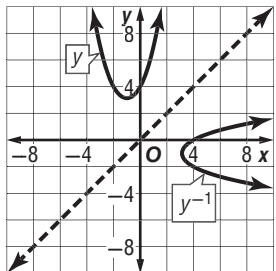
$$(f \circ g)(x) = 128x^4 + 96x^3 + 18x^2 \quad (18)$$

$$(g \circ f)(x) = 32x^4 + 6x^2$$

$$y = \pm\sqrt{2x+2} \quad (18)$$



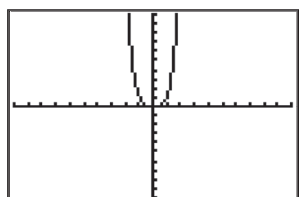
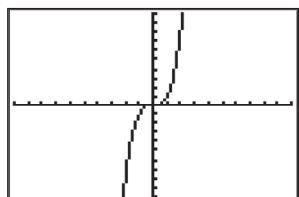
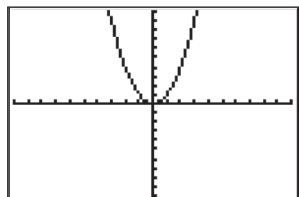
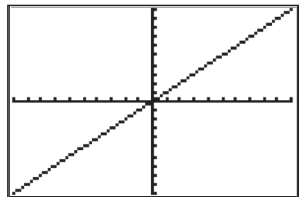
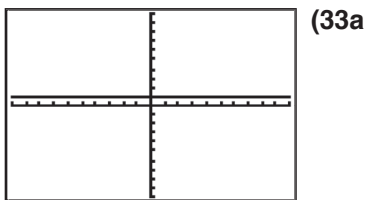
$$y^{-1} = \pm\sqrt{x-3} - 1 \quad (19)$$



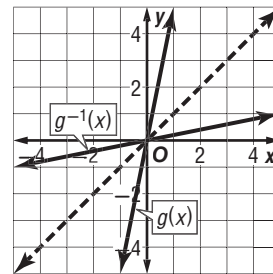
$$F^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x-32); \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} F[F^{-1}(x)] &= \frac{9}{5} \left[\frac{5}{9}(x-32) \right] + 32 \\ &= x - 32 + 32 \\ &= x \end{aligned}$$

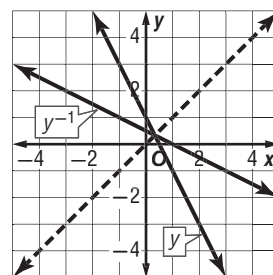
$$\begin{aligned} F^{-1}[F(x)] &= \frac{5}{9} \left(\frac{9}{5}x + 32 - 32 \right) \\ &= \frac{5}{9} \left(\frac{9}{5}x + 0 \right) \\ &= x \end{aligned}$$



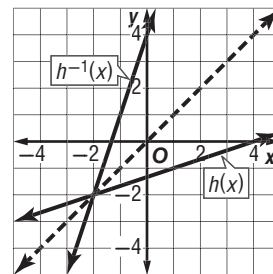
$$g^{-1}(x) = \frac{1}{5}x \quad (12)$$



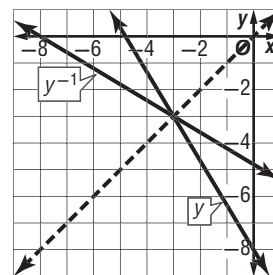
$$y^{-1} = \frac{x-1}{-2} \quad (13)$$



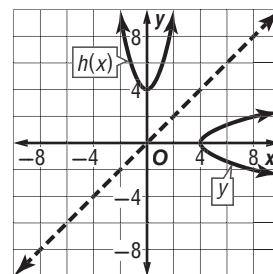
$$h^{-1}(x) = 3x + 4 \quad (14)$$



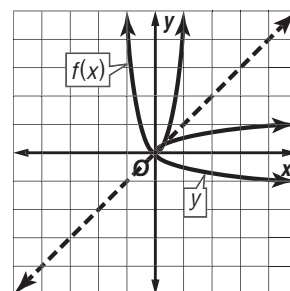
$$y^{-1} = -\frac{3}{5}(x+8) \quad (15)$$



$$y = \pm\sqrt{x-4} \quad (16)$$

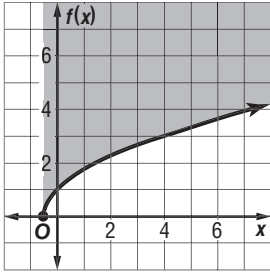
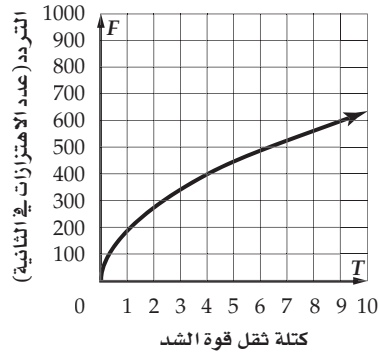


$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{5}x} \quad (17)$$

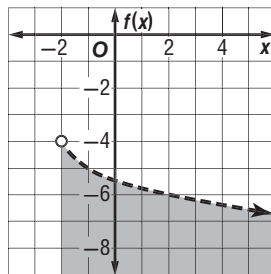


الدرس 3-4 ، أسئلة تحقق من فهمك، ص (195) :

(3)



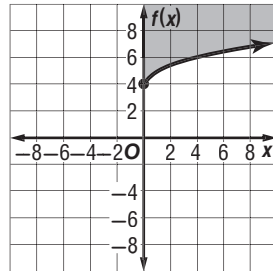
(4B)



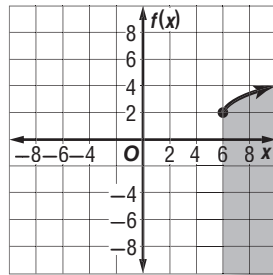
(4A)

الدرس 3-4 ، ص (196-198) :

(9)



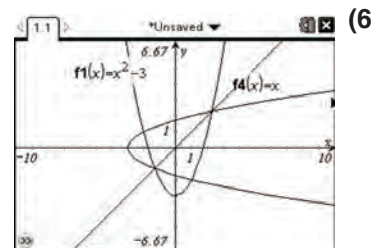
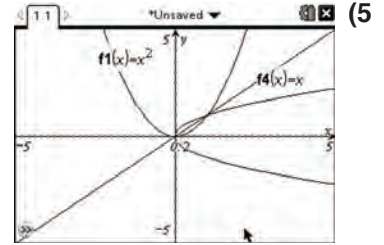
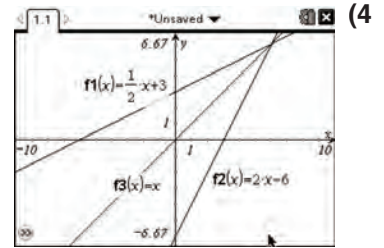
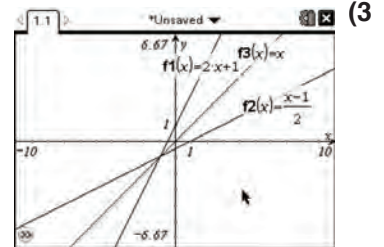
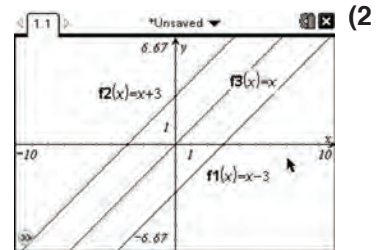
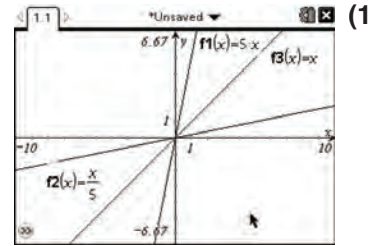
(10)

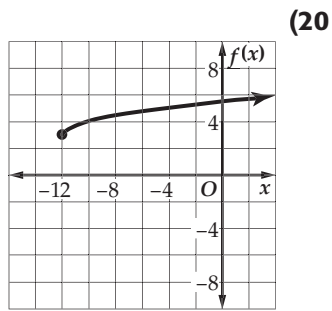


هل المعكوس دالة؟	الدالة
لا	$y = x^0$ أو $y = 1$
نعم	$y = x^1$ أو $y = x$
لا	$y = x^2$
نعم	$y = x^3$
لا	$y = x^4$

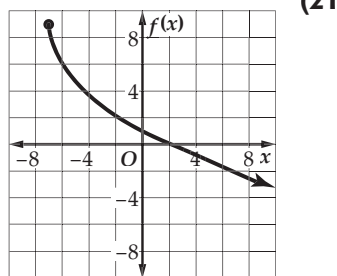
(33b)

توسع الدرس 2-4 ، ص (192) :

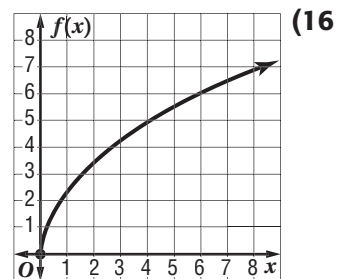
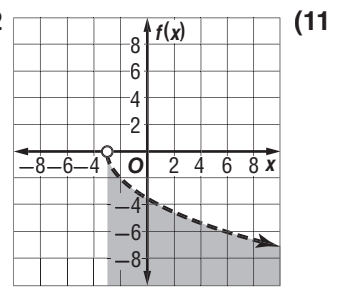
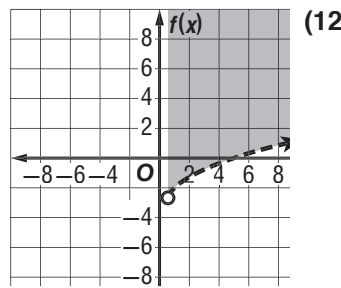
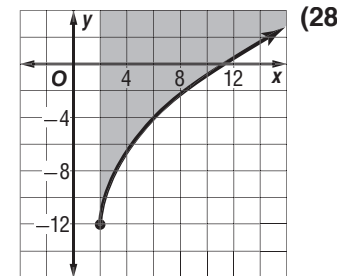
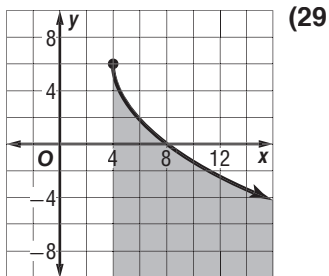
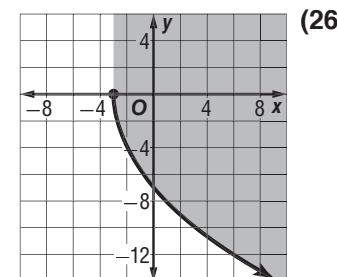
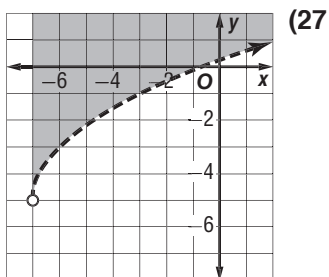
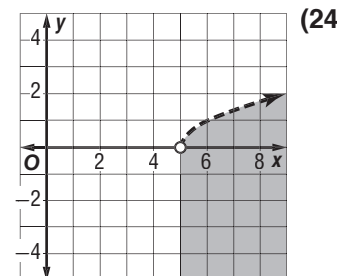
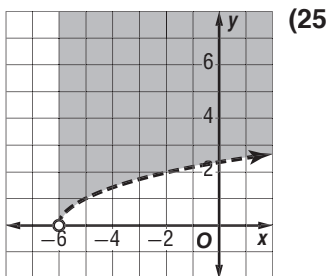




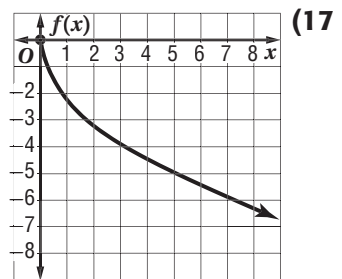
(20) المجال $\{x \mid x \geq -12\}$
المدى $\{f(x) \mid f(x) \geq 3\}$



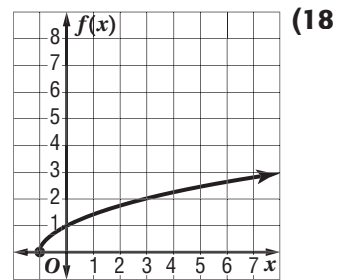
(21) المجال $\{x \mid x \geq -7\}$
المدى $\{f(x) \mid f(x) \leq 9\}$



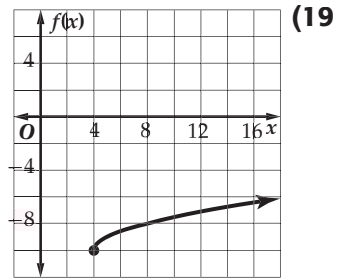
(16) المجال $\{x \mid x \geq 0\}$
المدى $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$



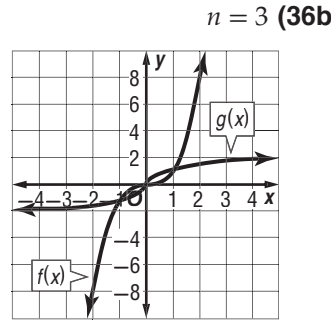
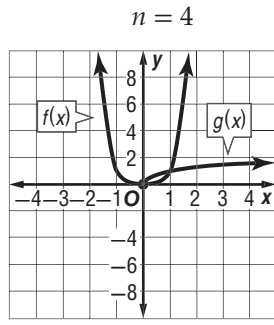
(17) المجال $\{x \mid x \geq 0\}$
المدى $\{f(x) \mid f(x) \leq 0\}$



(18) المجال $\{x \mid x \geq -1\}$
المدى $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$



(19) المجال $\{x \mid x \geq 4\}$
المدى $\{f(x) \mid f(x) \geq -10\}$

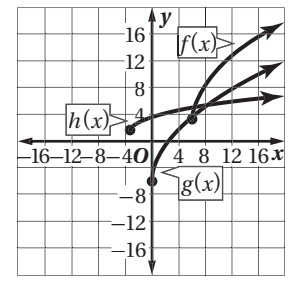
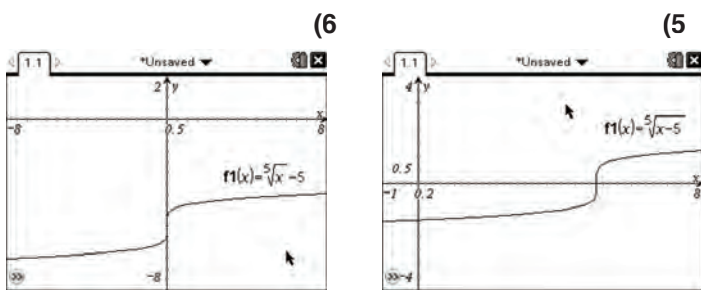
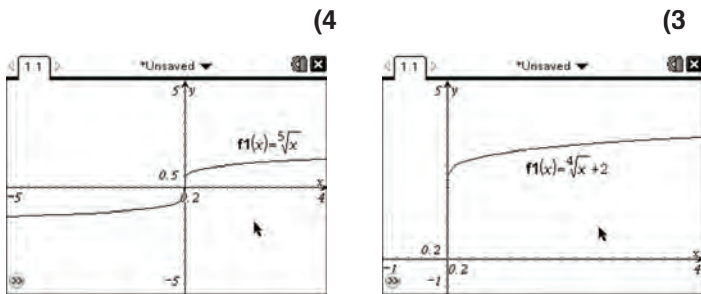
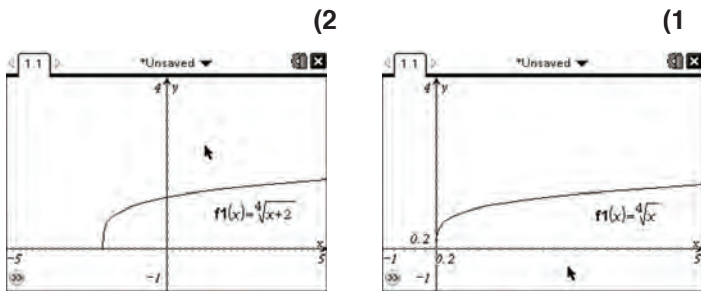


(36c) دالة متباينة، $f(x) = x^3$ دالة متباينة، $g(x) = \sqrt[3]{x}$ دالة متباينة،
 $f(x) = x^4$ دالة غير متباينة، $g(x) = \sqrt[4]{x}$ دالة متباينة.

(36d) القيم الفردية الموجبة

(36e) إجابة ممكنة: لجميع قيم n الفردية الموجبة تكون كل من الدالتين $f(x), g(x)$ دالة عكسية للأخرى، لجميع قيم n الزوجية الموجبة تكون كل من الدالتين $f(x), g(x)$ دالة عكسية للأخرى إذا كان مدى ومجال الدالتين $f(x), g(x)$ مقيدتين بالقيم الموجبة.

توسع الدرس 4-4 ، ص (204) :



(35a)

(35b) $f(x)$: 6 وحدات للميمين؛ 3 وحدات إلى أعلى
 $g(x)$: $\frac{1}{16}$ وحدة إلى اليسار، 6 وحدات إلى أسفل.

$h(x)$: 3 وحدات لليساار، وحدتين إلى أعلى.

(35c) إجابة ممكنة: $f(x), g(x)$

أظهر التمثيل البياني للدالتين اتساعاً رأسياً في التمثيل البياني للدالة الأم؛ لأن مقدار تزايد هاتين الدالتين أكبر من مقدار تزايد الدالة الأم

(35d) لأن $4 = \sqrt{16}$

(35e)

$x = 8$	$x = 12$	$x = 16$	معدل التغير بين 8, 12	معدل التغير بين 12, 16
$f(8) = 8.66$	$f(12) = 12.798$	$f(16) = 15.65$	1.0345	0.713
$g(8) = 5.36$	$g(12) = 7.89$	$g(16) = 10.03$	0.6325	0.535
$h(8) = 5.317$	$h(12) = 5.873$	$h(16) = 6.359$	0.139	0.1215

معدل تغير دوال الجذور التربيعية من الشكل $a\sqrt{x-6} + c$ حيث $a > 0$ يتناقص مع زيادة قيم x

الدرس 4-4 ، ص (203) :

(36a) $n = 3$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	-125	-64	-27	-8	-1	0
x	1	2	3	4	5	
$f(x)$	1	8	27	64	125	

$n = 4$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$	625	256	81	16	1	0
x	1	2	3	4	5	
$f(x)$	1	16	81	256	625	

$n = 3$

x	-125	-64	-27	-8	-1	0
$g(x)$	-5	-4	-3	-2	-1	0
x	1	8	27	64	125	
$g(x)$	1	2	3	4	5	

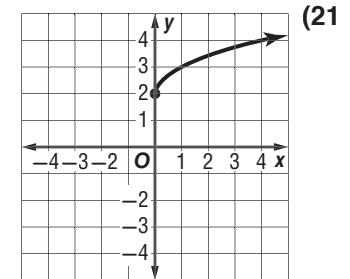
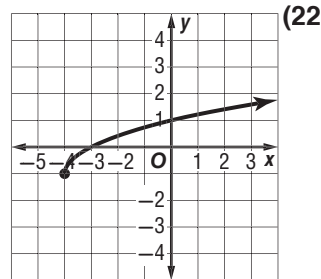
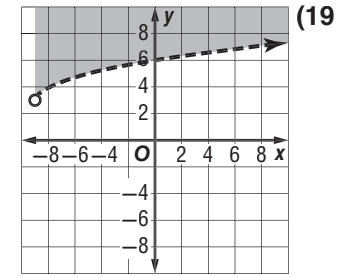
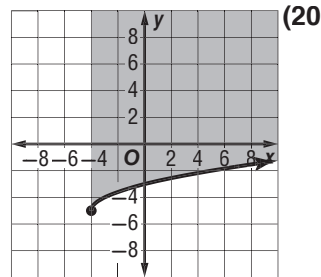
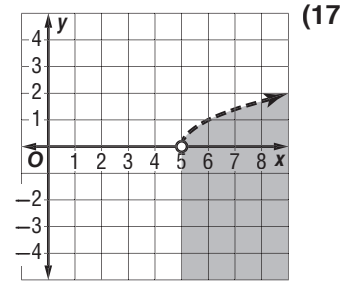
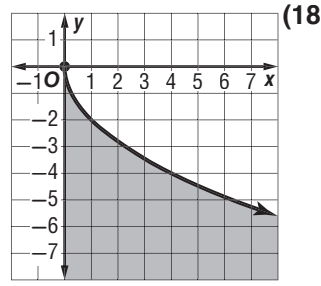
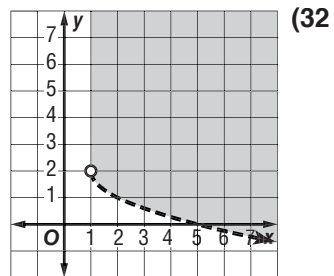
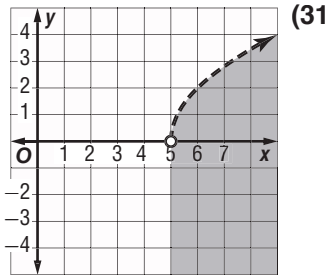
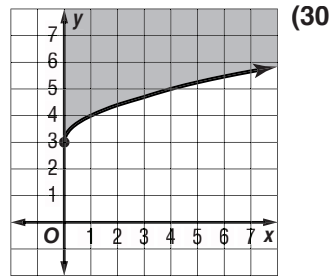
$n = 4$

x	-625	-256	-81	-16	-1	0
$g(x)$	تخيلي	تخيلي	تخيلي	تخيلي	تخيلي	0
x	1	16	18	256	625	
$g(x)$	1	2	3	4	5	

(44e) بما أن المربع ينتج أربعة مثلثات طول قاعدة كل منها وحدة واحدة، وارتفاعه وحدة واحدة لذا فمساحة كل منها هي: $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}$ ، إذن مساحة المربع: $4(\frac{1}{2}) = 2$ أو $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \quad (46) \\ &= \frac{(-1-i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{8} \\ &= \frac{(1+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3i^2)(-1-i\sqrt{3})}{8} \\ &= \frac{(2i\sqrt{3}-2)(-1-i\sqrt{3})}{8} \\ &= \frac{-2i\sqrt{3}-6i^2+2+2i\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{-6i^2+2}{8} \\ &= \frac{8}{8} \\ &= 1 \end{aligned}$$

دليل الدراسة والمراجعة ، ص (226-230) :

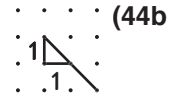


المجال = $\{x | x \geq -4\}$
المدى = $\{y | y \geq -1\}$

المجال = $\{x | x \geq 0\}$
المدى = $\{y | y \geq 2\}$

الدرس 4-5 ، ص (210,211) :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \quad (44a) \\ 1^2 + 1^2 &= c^2 \\ 2 &= c^2 \\ c &= \sqrt{2} \end{aligned}$$



(44c) طول وتر المثلث القائم الزاوية المتطابق الضلعين والذي طول كل منهما وحدتان يساوي $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ وحدة، لذا فإن $\sqrt{2} + \sqrt{2} > 2$.

