وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الأول

دليل المعلم

Obeikan العبيكان

McGraw Hill Education

طبعة ١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤ م

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

يوزع مجاناً ولا يباع

الرياضيات
الصف الأول الثانوي

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة

د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
عمر محمد أبو غليون
عبدالحكيم عبدالله سليمان
يوسف سليمان جرادات
د. عبدالله محمد الجوعي
صلاح بن عبد الله الزيد
هاني جميل زريقات

التعريب والتحرير اللغوي

نخبة من المتخصصين

المشرف على لجان المراجعة

د. محمد بن عبد الله الزغيبي

المراجعة والاعتماد النهائي

د. خالد بن عبدالله المعثم
صلاح بن عبدالله الزيد

المشاركون في المراجعة

غازي منور المجنوني
خالد مبرك اللقماني
خالد عطية الثقفي
نجوى رجب محمد الشوا
لميا عبدالله يحي خان
شادية أحمد عيسى باعزيز
العنود عبدالعزيز محمد التركي

حول الغلاف

تسقط أشعة الشمس المتوازية على الطبق الشمسي فترتد مكوِّنة زوايا متناظرة وأخرى متحالفة. تدرس هذه الزوايا في هذا الصف.

Original Title:

Geometry © 2010

By:
John A. Carter, Ph. D
Gilbert J. Cuevas, Ph. D
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D

Contributing Authors
Jerry Cummins
Dinah Zike

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph. D
Arthur K. Wayman, Ph. D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

College Readiness
Robert Lee Kimball, Jr.

Graphing Calculator
Ruth M. Casey

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro, Ph.D

Pre-AP
Dixie Ross

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

www.obeikaneducation.com

www.macmillanmh.com

McGraw Hill Education

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل © ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies. Inc. © 2008.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

أخي المعلم / أختي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آملين أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلاب، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولاً: مقدمة حول السلسلة:

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علميًّا وتربويًّا، وتبرز النقاط المحورية التي يركز عليها المنهج في هذا الصف، وفلسفة السلسلة المتوازنة أفقيًّا والمترابطة رأسيًّا، وأساليب التدريس المتبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

ثانيًا: نظرة عامة على الفصل:

تم توزيع المقرر إلى فصول. ويبدأ دليل المعلم في كل فصل بتقديم نظرة عامة عليه تتضمن مخططًا للدروس وأهدافها، ومصادر تدريسها، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس. ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. كما يقترح الدليل آلية لتعلم مهارات الفصل من خلال مهارة الدراسة. ثم يقدم دعما للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، كما يبرز غرض المطويات ووظيفتها ووقت استعمالها. ثم يعرض مخططًا للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثًا: الدروس:

يقدّم الدليل أنشطة مقترحة تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، وبأساليب تدريس متنوعة، تساعد المعلم في تدريس كل درس. بعد ذلك يعرض الدليل الدرس بخطوات محددة هي:

التركيز: يبين ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثنائه وبعده.

التدريس: يقدّم مقترحات للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حوارية وأنشطة مقترحة، ويبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس. كما يقدّم أمثلة إضافية للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريبات متنوعة حسب مستويات الطلاب تحقق أهداف الدرس.

التقويم: يقدّم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحًا للمعلم للتأكد من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم وإتقانهم المهارات المقدّمة في الدرس، ويعرض الدليل آلية لمتابعة المطويات.
كما يقدّم الدليل في كل درس إجابات مفصّلة لبعض الأسئلة والتمارين.

رابعًا: أساليب التقويم:

تقدّم السلسلة أساليب متنوعة لتقويم الطلاب (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآليات لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلاب.
ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلمين والمعلمات، لنأمل أن يحوذ اهتمامهم، ويلبي متطلباتهم لتدريس هذا المقرر، ويساعدهم في أداء رسالتهم.

والله ولي التوفيق

الفهرس

الفصل 1 التبرير والبرهان

مخطط الفصل 1 .... 10A
التقويم والمعالجة 10C
تنويع التعليم 10D
المحتوى الرياضي 10E
التهيئة للفصل 1 11
1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين 12
1-2 المنطق 19
1-3 العبارات الشرطية 26
توسع 1-3 معمل الرياضيات: العبارات الشرطية الثنائية 36
1-4 التبرير الاستنتاجي 37
1-5 المسلمات والبراهين الحرة 45
اختبار منتصف الفصل 52
1-6 البرهان الجبري 53
1-7 إثبات علاقات بين القطع المستقيمة 60
1-8 إثبات علاقات بين الزوايا 66
دليل الدراسة والمراجعة 74
اختبار الفصل 79
الإعداد للاختبارات 80
اختبار تراكمي 82
ملحق الإجابات 83A

الفصل 2 التوازي والتعامد

مخطط الفصل 2 .... 84A
التقويم والمعالجة 84C
تنويع التعليم 84D
المحتوى الرياضي 84E
التهيئة للفصل 2 85
2-1 المستقيمان والقاطع 86
استكشاف 2-2 معمل الحاسبة البيانية: الزوايا والمستقيمات المتوازية 92
2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية 94
2-3 إثبات توازي مستقيمين 102
اختبار منتصف الفصل 108
2-4 ميل المستقيم 109
2-5 صيغ معادلة المستقيم 117
توسع 2-5 معمل الهندسة: معادلة العمود المنصف 125
2-6 الأعمدة والمسافة 126
دليل الدراسة والمراجعة 135
اختبار الفصل 139
الإعداد للاختبارات 140
اختبار تراكمي 142
ملحق الإجابات 143A

الفهرس

الفصل 3 المثلثات المتطابقة

مخطط الفصل 3 .... 144A
التقويم والمعالجة 144C
تنويع التعليم 144D
المحتوى الرياضي 144E
التهيئة للفصل 3 145
3-1 تصنيف المثلثات 146
استكشاف 3-2 معمل الهندسة: زوايا المثلثات 153
3-2 زوايا المثلثات 154
3-3 المثلثات المتطابقة 162
3-4 إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS 170
اختبار منتصف الفصل 178
3-5 إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS 179
توسع 3-5 معمل الهندسة: تطابق المثلثات القائمة 186
3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع 188
3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي 196
دليل الدراسة والمراجعة 202
اختبار الفصل 207
الإعداد للاختبارات 208
اختبار تراكمي 210
ملحق الإجابات 211A

الفصل 4 العلاقات في المثلث

مخطط الفصل 4 .... 212A
التقويم والمعالجة 212C
تنويع التعليم 212D
المحتوى الرياضي 212E
التهيئة للفصل 4 213
استكشاف 4-1 معمل الهندسة: إنشاء المنصّفات 214
4-1 المنصّفات في المثلث 215
استكشاف 4-2 معمل الهندسة: إنشاء القطع المتوسطة والارتفاعات 224
4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث 225
4-3 المتباينات في المثلث 233
اختبار منتصف الفصل 240
4-4 البرهان غير المباشر 241
استكشاف 4-5 معمل الحاسبة البيانية: متباينة المثلث 248
4-5 متباينة المثلث 250
4-6 المتباينات في مثلثين 255
دليل الدراسة والمراجعة 263
اختبار الفصل 267
الإعداد للاختبارات 268
اختبار تراكمي 270
ملحق الإجابات 271A

أهلًا بك في عالم الرياضيات

دليل المعلم

منهج الرياضيات المترابط رأسيًّا
ابتداءً من الصف الأول الابتدائي وحتى الصف الثالث الثانوي

تقدم لك هذه السلسلة ثلاثة أبعاد للترابط الرأسي:

1 تصميم المحتوى

يعد الترابط الرأسي للمحتوى عملية مهمة تساعد طلابك على التحقق من التسلسل الدقيق للمحتوى وتتابعه من مستوى إلى مستوى آخر. وهذا يمنحك الثقة بأن المحتوى يتم تقديمه وتعزيزه وتقويمه في الأوقات المناسبة، كما يساعد على سد الثغرات وتجنب التكرار غير المبرر، مما يمكنك من توجيه تدريسك وتكييفه ليتلائم حاجات الطلاب.

2 تصميم التدريس

إن الترابط الرأسي القوي بين الأساليب التدريسية بدءًا من الصف الأول يسهل على الطلاب الانتقال من المرحلة الابتدائية إلى المتوسطة، فالثانوية. إذ تعمل المفردات، والتقنيات والوسائل الحسية وخطة الدرس والمعالجة على التقليل من عوامل الصعوبة والتشويش التي يواجهها بعض الطلاب عندما ينتقلون عبر الصفوف المختلفة.

3 التصميم البصري

تشتمل صفحات السلسلة على تصاميم بصرية متسقة من صف لآخر، تساعد الطلاب على الانتقال بسلاسة من مرحلة إلى أخرى، كما تزداد دافعيتهم للتعلم والنجاح عندما تكون طريقة التعامل مع هذه الصفحات مألوفة لديهم.

المرحلة الابتدائية الأولية

المرحلة الابتدائية العليا

المفاتيح الخمسة للنجاح

1 الخرائط المفاهيمية للخبرات السابقة

بينت نتائج البحوث أن ٨٠٪ من الطلبة الذين يظهرون نجاحًا في مجالي الجبر والهندسة في الصف العاشر يلتحقون بالكليات الجامعية ذات العلاقة، وينجحون. وبناءً على ذلك اهتمت السلسلة بالخرائط المفاهيمية للخبرات السابقة وطورتها.

2 المحتوى العميق المتوازن

تم تطوير السلسلة بحيث تركز على المهارات والموضوعات التي يواجه الطلاب صعوبات فيها؛ مثل حل المسألة في كل مستوى صفي.

الصفان 1 و 2	الصفوف 3-5
1) حل المسألة	1) حل المسألة
2) النقود	2) الكسور الاعتيادية
3) الزمن	3) القياس
4) القياس	4) الكسور العشرية
5) الكسور الاعتيادية	5) الزمن
6) الحساب	6) الجبر
الصفوف 6-8	**الصفوف 9-12**
1) الكسور الاعتيادية	1) حل المسألة
2) حل المسألة	2) الكسور الاعتيادية
3) القياس	3) الجبر
4) الجبر	4) الهندسة
5) الحساب	5) الحساب
	6) الاحتمالات

3 التقويم المستمر

تتضمن هذه السلسلة مصادر متعددة للتقويم؛ تشخيصية، وتكوينية، وختامية، إضافة إلى خطط علاجية، وإثرائية.

4 المعالجة وتنويع التعليم

توفر السلسلة مصادر متنوعة تتضمن أنشطة وخططًا علاجية، وأخرى إثرائية وفقًا لنتائج الطلاب في التقويم التشخيصي.

المعالجة 1 **قبل بدء التدريس:** وتتضمن تعرف أخطاء الطلاب ومعالجتها؛ وذلك بمراجعة المفاهيم والمهارات المتعلقة بها، قبل الانتقال إلى تدريس المعرفة الجديدة.

المعالجة 2 **في أثناء التدريس:** وتتضمن استعمال بدائل واستراتيجيات متنوعة تناسب أنماط التعلم المختلفة لدى الطلاب.

5 التطوير المهني

توفر السلسلة فرصًا عديدة للمعلم ليطوّر أداءه مهنيًّا، بطرق تعليم إضافية؛ مثل: الفيديو، والرياضيات المحوسبة، والمواقع الإلكترونية المترابطة ترابطًا رأسيًّا متكاملًا من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثاني عشر.

المرحلة المتوسطة

المرحلة الثانوية

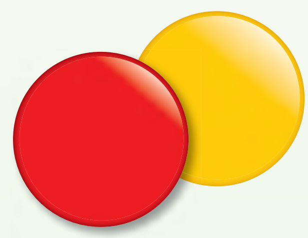
فلسفة السلسلة

تعليم متوازن، ترابط رأسي بين الصفوف من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي

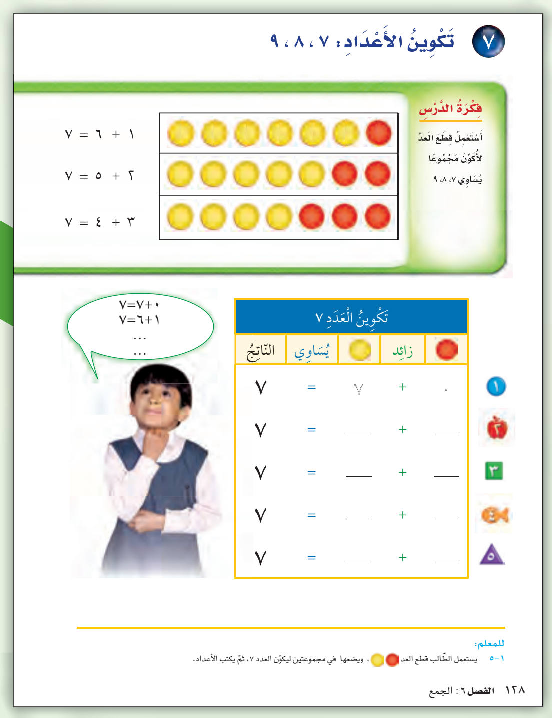
يظهر الترابط الرأسي لهذه السلسلة من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي دمجًا متوازنًا للتعليم. وتوفر هذه السلسلة للطلاب منحنى متوازنًا للرياضيات من خلال:

- استقصاء المفاهيم وبناء فهم إدراكي.
- تطوير مهارات إجرائية وحسابية وتعزيزها وإتقانها.
- تطبيق الرياضيات في حل مسائل من واقع الحياة.

ويوضح تسلسل صفحات كتاب الطالب، تطور الترابط الرأسي للفهم الإدراكي والمهارات الإجرائية والحسابية لموضوع مهم في الجبر.



يستعمل طلاب **المرحلة الابتدائية الأولية** قطع عد بلونين مختلفين لتمثيل جمل الجمع. ويُعدُّ هذا النشاط أساسًا للفهم والنجاح في حل معادلات جبرية.

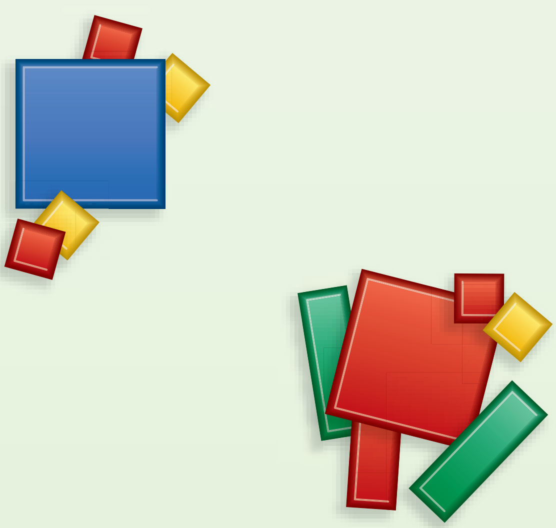


أما طلاب **المرحلة الابتدائية العليا** فيستفيدون من خبراتهم في التعامل مع الأكواب وقطع العد؛ لاستعمالها في تمثيل معادلات الجمع والطرح، وحلها.

وفي المرحلة الثانوية يستمر الطلبة باستعمال البطاقات لاستكشاف حل المعادلات المتعددة الخطوات، ويطبقون الخطوات التي طوروها في معمل الجبر إلى رموز جبرية.


استكشاف ٤-٧ معمل الجبر معادلات تتضمن متغيرات في طرفيها

يتنقل طلاب **المرحلة المتوسطة** خلال التعامل مع الجبر، من استعمال الأكواب وقطع العد إلى استعمال نماذج جبرية أكثر تجريدًا. ويحلّ الطلاب في الدروس اللاحقة، معادلات بسيطة تحتوي على رموز جبرية.



استمرارية التعليم:

يوضّح التسلسل التعليمي الذي تم وصفه قوّة المقابلة بين النتيجة المرغوب فيها والنجاح في الجبر. وتعمل هذه العملية التطويرية على تجنب وجود فجوات أو تداخلات بين مستويات الصفوف، وتؤكّد على أنّ مفاهيم كل صف ومهاراته مبنية على أساس قوي تم تطويره في صفوف سابقة. ويستعمل المنحى نفسه عبر المسارات جميعها ابتداءً من الصف الأول الابتدائي حتى الصف الثالث الثانوي.

فلسفة السلسلة

توازن عملية التدريس

- مفاهيم
- مهارات
- حل مسائل

حل المسألة ذات العلاقة

تزوّد السلسلة الطلاب بخطط ملائمة لحل المسألة، ومهارات وتطبيقات عليها خلال الصفوف؛ إذ يتوافر لهم فرص مستمرة لتطبيق مهارات الرياضيات، وحل المسائل باستعمال التفكير البصري، والاستدلال المنطقي، والحس العددي، والجبر.

استراتيجيات حل المسألة

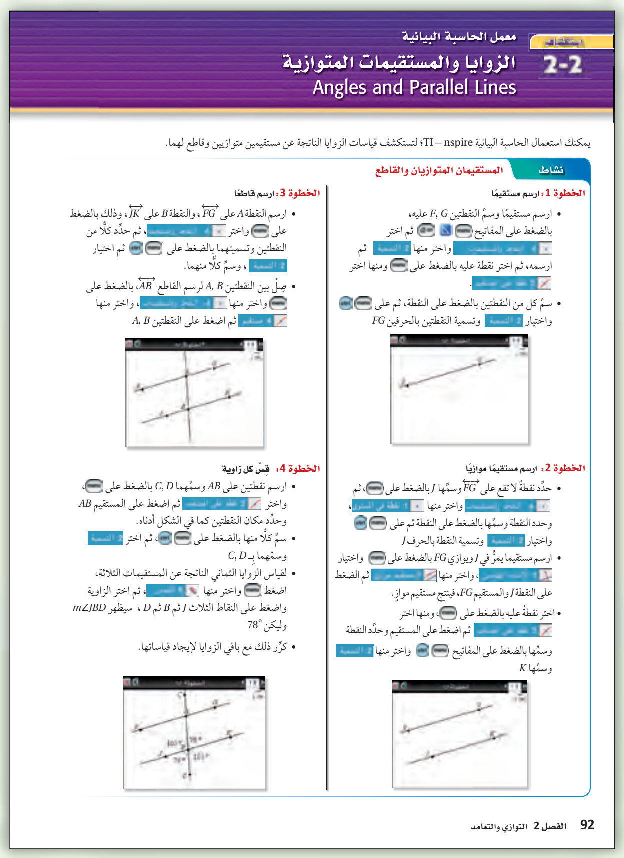
تساعد استراتيجيات حل المسألة الطلاب على تعلم طرائق مختلفة لمواجهة المسائل الكلامية.

مسائل مهارات التفكير العليا

تتطلب هذه المسائل استعمال مهارات التفكير العليا (التحليل، والتركيب، ... ، إلخ).

التمثيلات المتعددة

تساعد مسائل **التمثيلات المتعددة** الطلاب على تصور المفاهيم وتعميق الفهم، وتتضمن: العبارات اللفظية والعددية والجبرية والتمثيل البياني والجداول ... إلخ.



معامل الحاسبة البيانية TI-nspire

توفر هذه المعامل للطلاب فرصة لفهم الرياضيات من خلال التمثيلات البيانية

نظام التقويم الشامل

معالجة الأخطاء

توفر السلسلة تقويمًا صريحًا ذا معنى لمدى تقدم الطلاب في بنية المنهج وفي المواد المساندة التي يستعين بها المعلم.


التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي عند قيمة x المُعطاة.

1) $4x+7,\ x=6$
2) $180\,(x-2),\ x=8$
3) $5x^2-3x,\ x=2$
4) $\frac{x(x-3)}{2},\ x=5$
5) $x+(x+1)+(x+2),\ x=3$

اكتب كل تعبير لفظي مما يأتي على صورة عبارة جبرية:

6) أقل من خمسة أمثال عدد بثمانية.
7) أكثر من مربع عدد بثلاثة.

حل كل معادلة فيما يأتي:

8) $8x-10=6x$
9) $18+7x=10x+39$
10) $3(11x-7)=13x+25$
11) $\frac{3}{2}x+1=5-2x$
12) **قراءة:** اشترت عائشة 4 كتب بقيمة 52 ريالًا؛ لتقرأها في أثناء الإجازة الصيفية. إذا كانت الكتب متساوية السعر، فاكتب معادلة لإيجاد ثمن الكتاب الواحد، ثم حُلَّها.

استعمل الشكل المجاور في مثال 3 للإجابة عما يأتي:

13) عيِّن زاويتين منفرجتين متقابلتين بالرأس.
14) عيِّن زاويتين متتامتين.
15) عيِّن زاويتين متجاورتين متكاملتين في آن واحد.
16) إذا كان: $m\angle DXB = 116°$ و $m\angle EXA = (3x+2)°$، فأوجد قيمة x.
17) إذا كان: $m\angle CXD = (6x-13)°$ و $m\angle DXE = (10x+7)°$، فأوجد قيمة x.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد قيمة $x^2-2x+11$ إذا كانت $x=6$.

$x^2-2x+11$	العبارة المعطاة
$=(6)^2-2(6)+11$	$x=6$
$=36-2(6)+11$	أوجد قيم القوى
$=36-12+11$	اضرب
$=35$	بسّط

مثال 2

حل المعادلة $36x-14=16x+58$.

$36x-14=16x+58$	المعادلة المعطاة
$36x-14-16x=16x+58-16x$	اطرح $16x$ من الطرفين
$20x-14=58$	بسّط
$20x-14+14=58+14$	اجمع 14 للطرفين
$20x=72$	بسّط
$\frac{20x}{20}=\frac{72}{20}$	اقسم الطرفين على 20
$x=3.6$	بسّط

مثال 3

إذا كان: $m\angle BXA=(3x+5)°$، $m\angle DXE=56°$، فأوجد قيمة x.

$m\angle BXA=m\angle DXE$	زاويتان متقابلتان بالرأس
$3x+5=56$	عوّض
$3x=51$	اطرح 5 من الطرفين
$x=17$	اقسم الطرفين على 3

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

11 الفصل 1 التهيئة للفصل 1

1 التقويم التشخيصي

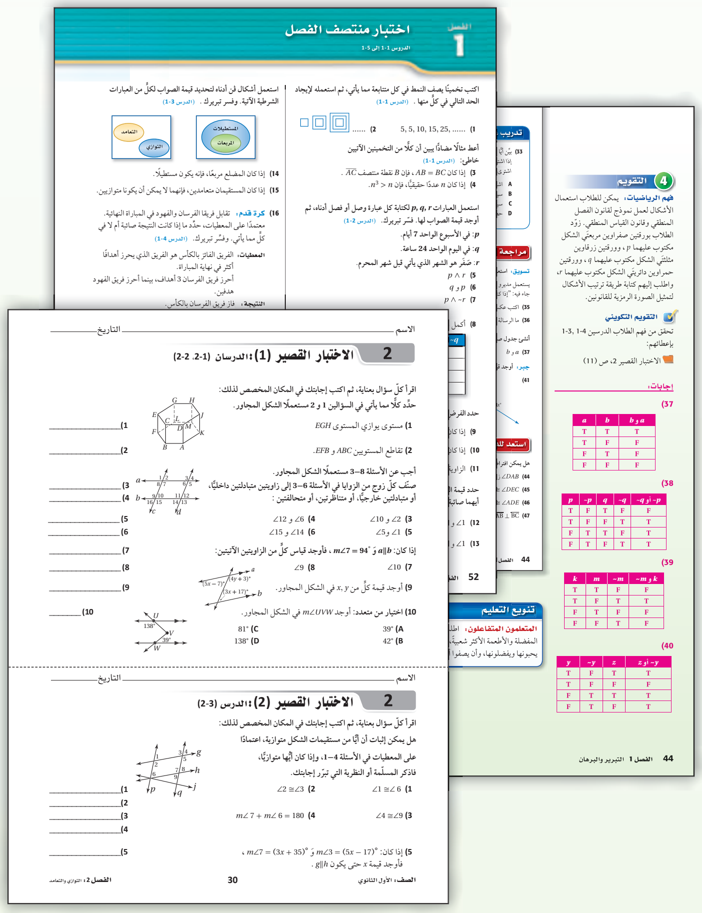
تقويم أوّلي: قوِّم معرفة طلابك في بداية العام الدراسي باستعمال اختبارات تشخيصية واختبارات تحديد المستوى. وسوف يساعدك هذا على تحديد مدى حاجة طلابك لمواد ومصادر تعلم إضافية ليكونوا قادرين على المواءمة مع معايير مستوى الصف.

تقويم مستوى المدخلات الدراسية: قوِّم المعارف السابقة لطلابك في بداية الفصل أو الدرس، من خلال:

كتاب الطالب:
- التهيئة
- فيما سبق، الآن، لماذا.

دليل المعلم:
- بدائل تنويع التعليم

دليل التقويم
- نموذج التوقع



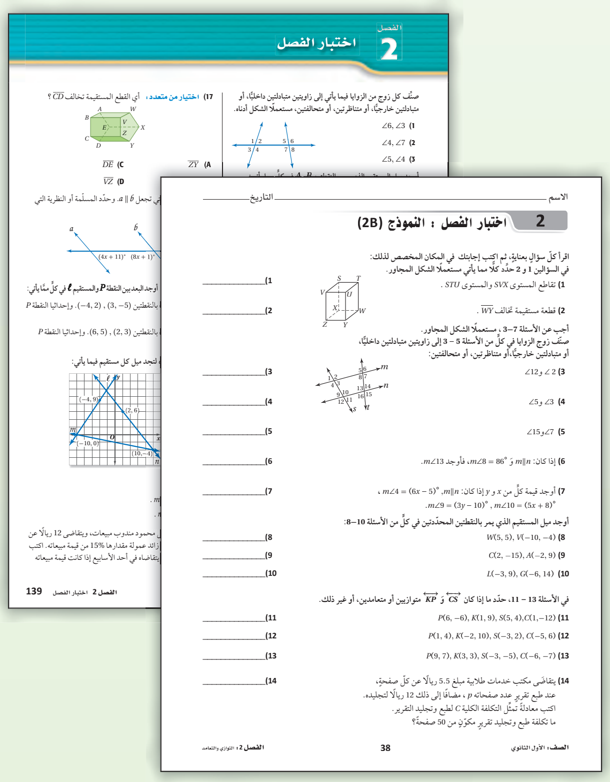
2 التقويم التكويني

مراقبة التقدم: حدِّد إذا كان طلابك يحرزون تقدمًا مناسبًا في أثناء تعلمهم في كل درس أم لا، باستعمال أنواع التقويم الآتية لتنويع التدريس والتدريبات:

كتاب الطالب:
- تحقق من فهمك بعد كل مثال
- تأكد
- مسائل مهارات التفكير العليا (اكتشف الخطأ، اكتب)
- مراجعة تراكمية
- اختبار منتصف الفصل
- دليل الدراسة والمراجعة
- المطويات

دليل المعلم:
- بدائل تنويع التعليم
- الخطوة الرابعة (التقويم) في خطة التدريس
- معالجة الأخطاء

دليل التقويم:
- الاختبارات القصيرة
- اختبار منتصف الفصل



3 التقويم الختامي

التقويم الختامي: قوِّم مدى نجاح طلابك في تعلم مفاهيم كل فصل باستعمال ما يأتي:

كتاب الطالب:
- اختبار الفصل
- اختبار تراكمي
- المطويات

دليل المعلم:
- معالجة الأخطاء

دليل التقويم:
- اختبار المفردات
- اختبار الفصل (نماذج متعددة)
- اختبار الإجابات المطولة
- اختبار تراكمي

تنويع التعليم

تلبية حاجات الطلاب:

توفر السلسلة دعمًا واسعًا يراعي الفروق الفردية بين الطلاب.
حيث يحتوي كل فصل وكل درس على اقتراحات لتحديد احتياجات طلابك وتلبيتها.
كما أن تنويع التعليم يلبي حاجات الفئتين الآتيتين :

- دون الطلاب دون المتوسط
- فوق الطلاب فوق المتوسط

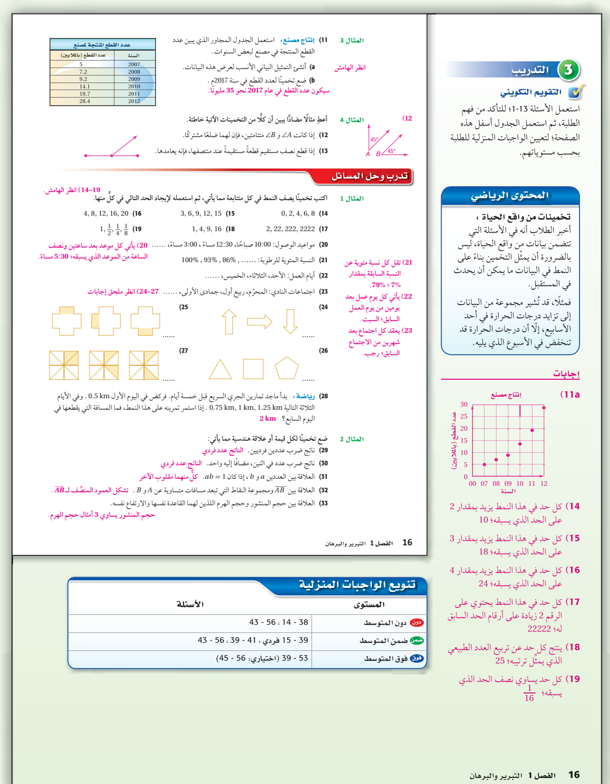
الطلاب من المستوى المتقدم:

التسريع والإثراء: يمكن استعمال المصادر والواجبات المنزلية ، التي تم تصنيفها للطلاب فوق المتوسط، مع الطلاب ذوي المستوى التعليمي المتقدم.

مجموعات أسئلة متعددة المستويات:

تم تنويع الواجبات المنزلية لكل درس حسب مستويات الطلاب:

- دون دون المتوسط
- ضمن ضمن المتوسط
- فوق فوق المتوسط



مصادر متعددة المستويات:

توفر السلسلة مصادر لكل درس حسب مستويات الطلاب:

- دون دون المتوسط
- ضمن ضمن المتوسط
- فوق فوق المتوسط

دليل المعلم

المعالجة

معالجة متعددة المستويات

يُقدَّم في كل فصل من فصول كتاب المعلم لمختلف الصفوف مدخل شامل للمعالجة.

التقويم والمعالجة

يتضمن كل فصل اقتراحات للتشخيص ومستويات المعالجة.

المعالجة 1 استعمال مجموعات أسئلة.

المعالجة 2 استعمال دليل الدراسة والمراجعة، وبدائل تنويع التعليم.

في بداية كل فصل

يقدم مخطط المعالجة اقتراحات لطرائق التعامل مع الطلاب بناءً على نتائج اختبار "التهيئة" في بداية كل فصل. وتساعدك العبارات الشرطية التي يتضمنها المخطط على تحديد مستوى المعالجة الذي تستعمله.

خلال كل درس

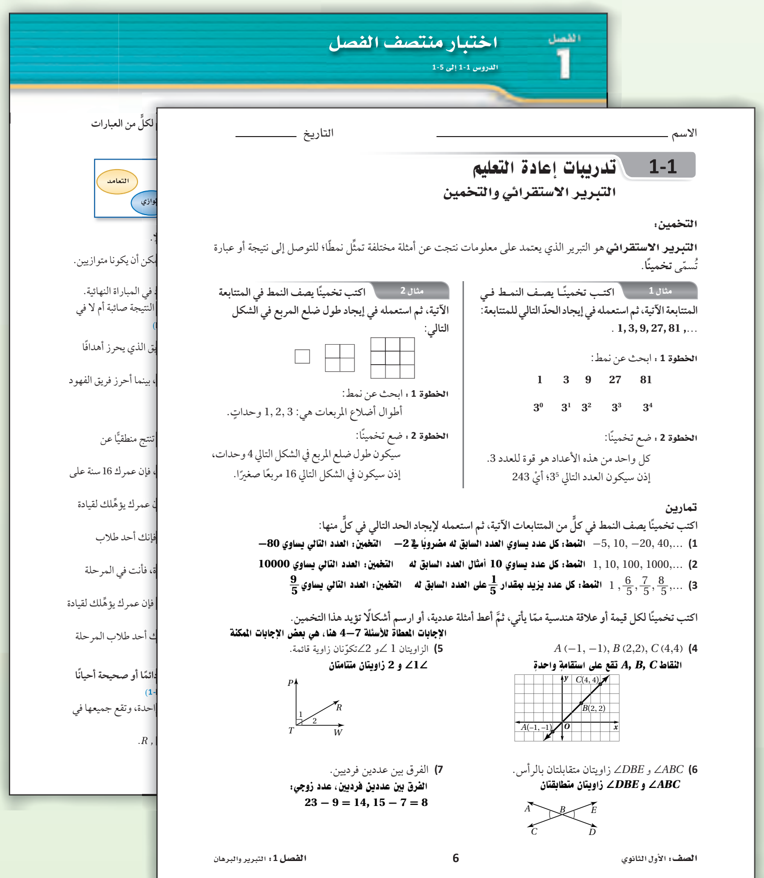
توفر السلسلة فرصًا متعددة للتقويم التكويني في كل فصل ليحدد المعلم إذا كانت هناك ضرورة للمعالجة بناءً على نتائج الطلاب.

ما بعد الفصل

توفر السلسلة بدائل متعددة للطلاب الذين لا يزالون يعانون من صعوبات بعد إنهاء الفصل تساعدهم على تحسين مستوياتهم.

تدريبات إعادة التعليم

عزز المهارات الضرورية من خلال تدريبات إعادة التعليم بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتاب الطالب وكتاب التمارين.



دليل المعلم

التخطيط للنجاح

سهولة الاستعمال:

تتميّز السلسلة بأنها نموذج تعليم قوي يشتمل على بدائل تنويع التعليم، وإعادة التعليم والتعزيز، وبدائل للتوسع، وإرشادات للمعلم تساعده على تعرّف مستويات الطلاب، كما يشتمل على نشاطات قبلية متقدمة، وتقويم مصاحب للتعليم.

تخطيط ملائم للدرس في متناول اليد:

يساعدك مخطط الفصل على التخطيط للتعليم من خلال توضيح الأهداف والخطة الزمنية المقترحة، والتغطية الشاملة للأفكار المحورية.


مخطط الفصل

التبرير والبرهان

الترابط الرأسي (بين الفصول):

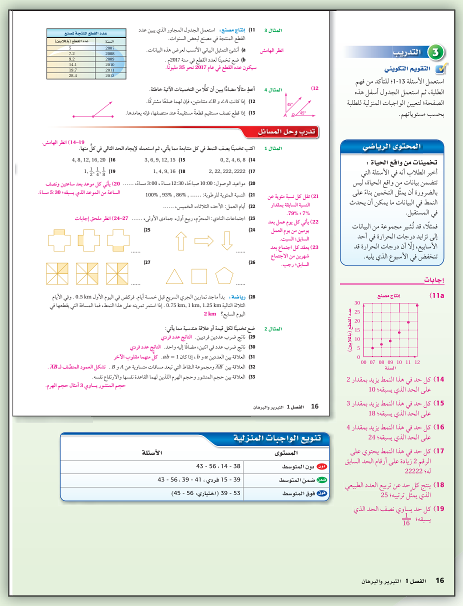
بُنيت المواضيع الدراسية على المفاهيم والمهارات السابقة للصف المعني، وتؤسس لمواضيع مستقبلية.


المحتوى الرياضي

خطة الخطوات الأربع في التعليم:

تنظم خطة الخطوات الأربعة تدريسك وتتضمن:

1 التركيز
2 التدريس
3 التدريب
4 التقويم



الترابط الرأسي (بين الدروس):

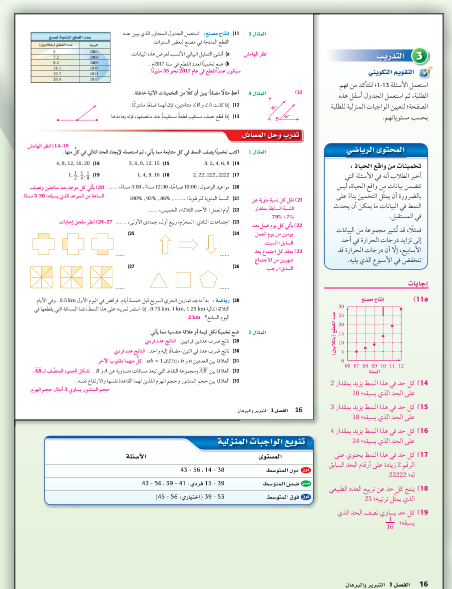
يوضح **الترابط الرأسي** في بداية كل درس الأهداف التي تؤدي إلى محتوى الدرس الحالي والأهداف التي تتبعه، والذي يأتي في إطار وثيقة المدى والتتابع من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي.

أسئلة التعزيز:

يحتوي كل درس على **أسئلة التعزيز** لتستعملها في مساعدة الطلاب على استقصاء الأفكار الرئيسة للدرس وفهمها.

أمثلة إضافية:

يعدُّ كل **مثال إضافي** انعكاسًا لمثال في كتاب الطالب.



بدائل تنويع الواجبات المنزلية:

بما أن معظم الصفوف تشمل طلابًا ذوي قدرات مختلفة، فإن بدائل **تنويع الواجبات المنزلية** يسمح لك بتعديل أسئلة الواجب المنزلي.

نشاطات تقويمية:

توفر نشاطات التقويم التكويني طرائق بديلة لتحديد استيعاب الطلاب في نهاية كل درس؛ مثل:

- **التعلم السابق:** يربط الطلاب ما تعلموه في الدرس الحالي بما تعلموه سابقًا.
- **التعلم اللاحق:** يخمّن الطلاب كيفية ارتباط الدرس الحالي بالدرس التالي.
- **فهم الرياضيات:** يذكر الطلاب الرياضيات المستعملة في المسألة.
- **بطاقة المكافأة:** يجب على الطلاب أن يجيبوا عن السؤال المطلوب، ويسلموا الإجابة للمعلم قبل مغادرة الصف.

إعداد الطلاب للدراسة الجامعية ولسوق العمل

تعمل هذه السلسلة على الربط بين ما يتعلمه الطلاب في المدرسة الثانوية وما يتوقع منهم أن يعرفوه عند بدء دراستهم الجامعية.

كيف يمكن إعداد الطلاب بصورة أفضل للدراسة الجامعية؟

إن المنهج القوي للمدارس الثانوية مؤشر جيد على الاستعداد للدراسة الجامعية (Adelman 2006). فالطلاب الذين يدرسون كتب الرياضيات المعدة للمرحلة الثانوية من هذه السلسلة يكونون أكثر استعدادًا للدراسة الجامعية من الذين لم يدرسوها (Abraham & Crrech 2002).

وفيما يأتي بعض مناحي الاستعداد للدراسة الجامعية التي طورها:
David Conley at the University of Oregon

- **مهارات عقلية:** وهي مهارات ضرورية لتعلم المحتوى على المستوى الجامعي، وتشمل: التفكير الناقد، وحل المسألة، والتبرير، وتتاح في كل يوم للطلاب الذين يدرسون هذه السلسلة فرص لتنمية **مهارات التفكير العليا** من خلال المسائل الخاصة بذلك.

- **المحتوى العلمي:** إن كتب المرحلة الثانوية من هذه السلسلة متسقة مع معايير عالمية دقيقة تشمل معايير NCTM للرياضيات المدرسية، وغيرها.

- **مهارات عامة** تشمل مهارات مثل، الاستيعاب القرائي، وإدارة الوقت، وتسجيل الملاحظات، ... إلخ. وتوفر هذه السلسلة فرصًا لتنمية هذه المهارات من خلال إرشادات **قراءة الرياضيات** و**روابط المفردات**، ودليل التوقع وغيرها.

ماذا عن الطلاب الذين لا يخططون للالتحاق بالجامعات؟

لم تعد الرياضيات في عالم التقنية المعاصر مقتصرة على الطلاب الذين يلتحقون بالجامعات. فقد أظهرت إحدى الدراسات أن البرامج التدريبية التي يخضع لها شخص يريد الحصول على عمل تتطلب أن يكون هذا الشخص على مستوى معين من التعليم في الجبر والهندسة وتحليل البيانات والإحصاء يماثل مستوى الطالب الذي يلتحق بالسنة الأولى في الجامعة؛ حتى ينجح في عمله.

ملحوظات المعلم

الفصل 1

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
التهيئة، ص (11)

	الدرس 1-1 حصتان	الدرس 1-2 حصتان	الدرس 1-3 حصتان	توسع 1-3 حصة واحدة
العنوان	التبرير الاستقرائي والتخمين	المنطق	العبارات الشرطية	معمل الرياضيات: العبارات الشرطية الثنائية
الأهداف	• كتابة تخمينات مبنية على التبرير الاستقرائي. • إيجاد أمثلة مضادة.	• تعيين قيم الصواب لعبارة الوصل ولعبارة الفصل. • تمثيل عبارة الوصل وعبارة الفصل باستعمال أشكال ڤن.	• تحليل العبارة الشرطية (إذا... فإن...). • كتابة العكس، والمعكوس والمعاكس الإيجابي لعبارة (إذا... فإن ...).	• تحديد العبارات الشرطية الثنائية، واستعمالها، وإيجاد قيمة الصواب لها.
المفردات	التبرير الاستقرائي التخمين المثال المضاد	العبارة قيمة الصواب نفي العبارة العبارة المركبة عبارة الوصل عبارة الفَصْل جدول الصواب	العبارة الشرطية الفرض النتيجة العبارة الشرطية المرتبطة العكس المعكوس المعاكس الإيجابي التكافؤ المنطقي	
التمثيلات المتعددة			ص (33)	
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (6) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (7) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (8) دون ضمن فوق	
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية، ص (13)	السبورة التفاعلية، ص (20)	السبورة التفاعلية، ص (28)	
تنويع التعليم	ص (14 , 15 , 18)	ص (23 , 25)	ص (33 , 34)	

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

التبرير والبرهان

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(17) حصة	(4) حصص	(21) حصة

الدرس 1-4 حصتان	الدرس 1-5 حصتان	الدرس 1-6 حصتان	الدرس 1-7 حصتان	الدرس 1-8 حصتان
التبرير الاستنتاجي	**المسلّمات والبراهين الحرة**	**البرهان الجبري**	**إثبات علاقات بين القطع المستقيمة**	**إثبات علاقات بين الزوايا**
• استعمال قانون الفصل المنطقي للتبرير الاستنتاجي. • استعمال قانون القياس المنطقي للتبرير الاستنتاجي.	• تعرُّف المسلّمات الأساسية حول النقاط، والمستقيمات والمستويات واستعمالها. • كتابة برهان حرٍّ.	• استعمال الجبر لكتابة برهان ذي عمودين. • استعمال خصائص المساواة لكتابة برهان هندسي.	• كتابة براهين تتضمن جمع أطوال القطع المستقيمة. • كتابة براهين تتضمن تطابق قطع مستقيمة.	• كتابة براهين تتضمن زوايا متتامة وزوايا متكاملة. • كتابة براهين تتضمن زوايا متطابقة وزوايا قائمة.
التبرير الاستنتاجي قانون الفصل المنطقي قانون القياس المنطقي	المسلَّمة البرهان النظرية البرهان الحر	البرهان الجبري البرهان ذو العمودين		
		ص (58)	ص (64)	ص (73)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (9) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (10) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (11) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (36) دون • تدريبات المهارات، ص (38) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (39) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (40) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (12) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (41) دون • تدريبات المهارات، ص (43) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (44) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (45) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (13) دون ضمن فوق
تسجيلات صوتية، ص (40)	مدونة، ص (46)	تسجيل مرئي، ص (55)	السبورة التفاعلية، ص (62)	تسجيل مرئي، ص (68)
ص (39 , 44)	ص (49 , 51)	ص (58)	ص (61 , 65)	ص (70 , 72)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (52)

التقويم الختامي
• دليل الدراسة والمراجعة، ص (74-78)
• اختبار الفصل، ص (79)

الفصل 1

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 1**	
	التهيئة للفصل 1 ، ص (11) نموذج التوقع، ص (8)	مخطط المعالجة، ص (11)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال تأكد مسائل مهارات التفكير العليا (اكتشف الخطأ، اكتب) مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة ، ص (11, 12) www.obeikaneducation.com	مستوى المعالجة 1 تدريبات المهارات، الفصل 1 www.obeikaneducation.com مستوى المعالجة 2 تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (52) اختبار منتصف الفصل، ص (13) www.obeikaneducation.com	مستوى المعالجة 1 تدريبات المهارات، الفصل 1 www.obeikaneducation.com مستوى المعالجة 2 تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (74-78) اختبار الفصل، ص (79) اختبار تراكمي، ص (82-83) www.obeikaneducation.com	مستوى المعالجة 1 تدريبات المهارات، الفصل 1 www.obeikaneducation.com مستوى المعالجة 2 تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 1**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (15-20) اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (21-22) اختبار المفردات ، ص (14) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (23) اختبار تراكمي ، ص (24-26) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1 www.obeikaneducation.com

كتاب الطالب — دليل المعلم — مصادر المعلم للأنشطة الصفية — دليل التقويم — شبكة الإنترنت

الفصل 1

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون: اطلب إلى الطلاب استكشاف جمع القطع المستقيمة والزوايا، وذلك بقياس بعض الأشياء الموجودة في غرفة الصف، واستعمال المتر لإيجاد نقطة منتصف غرفة الصف، والمنقلة للتحقق من أن زاويتين قائمتين تشكّلان خطًّا مستقيمًا.

المتعلمون الطبيعيُّون: يمكن للطلاب أن يتدرَّبوا على صياغة تخمينات باستعمال العصف الذهني، وإيجاد أمثلة مضادة من الطبيعة. فمثلًا اطلب إليهم قراءة العبارة "إذا لم تُرْوَ النباتات كل يوم فلن تبقى على قيد الحياة". والمثال المضاد لها أن نبتة الصبار يمكن أن تبقى أسابيع من دون ماء.
وموضوعات الطبيعة يمكن أن تشمل النباتات والحيوانات وعلاقات الحيوانات المفترسة والطرائد والحشرات والطقس، وهكذا.

البديل 2 دون المتوسط دون

وضّح للطلاب كيفية الانتقال في البرهان من الفرض إلى النتيجة باستعمال مخطط تسلسلي، بحيث تقود الشروط المعطاة إلى عبارات البرهان مع تبريرٍ لكل خطوة، وتكون النتيجة هي العبارة النهائية في البرهان.

المعطيات/ الفرض
(فروض / بدهيات/ مسلّمات)

↓ **المبررات (الأسباب)**

العبارات (جبرية أو هندسية)

↓ **المبررات (الأسباب)**

النتيجة (العبارة النهائية)

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطرح المسألة الآتية على الطلاب:
إذا علمت أن كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تحدد مستوًى واحدًا، فما عدد المستويات التي تحدِّدها أربع نقاط لا تقع جميعها على مستقيم واحد؟ وما عدد المستويات التي تحددها 5 نقاط ليست على استقامة واحدة؟
تحدد النقاط الأربع مستوى واحدًا على الأقل، و4 مستويات على الأكثر، وتحدد النقاط الخمس مستوى واحدًا على الأقل، و 10 مستويات على الأكثر.

القراءة والكتابة بلغة الرياضيات

مهارة الدراسة

يمكن تمثيل الكثير من المفردات التي قُدِّمت في الفصل 1 بالرموز.

من الطرائق المفيدة في تنظيم المفردات، استعمال جدول ذي أربعة أعمدة لكتابة الملاحظات.

ولتعزيز الفهم، يمكن أن يكتب الطلاب توضيحًا لكل مفردة بكلماتهم الخاصة، ويكتبوا الصيغة الرمزية المناسبة. والجدول أدناه يبين ملاحظات حول الدرس 2-1، ويمكن أن يضيف الطلاب إلى هذه العينة مفردات أخرى من الفصل 1.

المفردة	التوضيح	الرمز	أمثلة
النفي	عكس العبارة المعطاة	$\sim$	لا دوام في المدرسة اليوم.
عبارة الوصل	عبارة مركبة تشكلت باستعمال "و"	$p \wedge q$	اليوم هو الجمعة، ولا دوام في المدرسة هذا اليوم.
عبارة الفَصْل	عبارة مركبة تشكلت باستعمال "أو"	$p \vee q$	اليوم هو الجمعة أو لا دوام في المدرسة هذا اليوم.

يُسهم هذا النشاط وما شابهه في بناء استقلالية الطلاب من خلال استعمالهم الاستراتيجيات الخاصة بهم.

الفصل 1 المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 1

- التعبير عن الأفكار الرياضية لغويًّا وبأدوات فعّالة، ووحدات مناسبة، واستعمال النماذج البيانية أو الرياضية أو العددية أو المادية أو الجبرية.
- إثبات صحة الاستنتاجات باستعمال الخصائص والعلاقات الرياضية.

الفصل 1

- استعمال التبرير الاستقرائي لكتابة تخمين.
- تحديد قيمة الصواب لعبارة شرطية، وعكسها ومعكوسها والمعاكس الإيجابي لها.
- استعمال قانونَي الفصل والقياس المنطقي للتبرير الاستنتاجي.
- استعمال تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات لإثبات صحة عبارات، وإيجاد أمثلة مضادة لتفنيد العبارات الخطأ.

ما بعد الفصل 1

التهيئة للصف الثاني الثانوي

- المقارنة بين الحلول الجبرية والبيانية لمعادلات تربيعية وتفسيرها.
- تحليل مواقف رياضية ممثلة بدوال الجذر التربيعي، وصياغة معادلات أو متباينات واختيار طريقة وحل المسائل.

ملخص الدروس

1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين

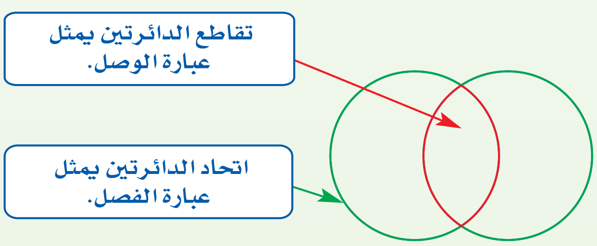
التخمين هو توقُّع مدروس بناءً على معلومات معروفة، والتبرير الاستقرائي هو تفحص لعدة أوضاع خاصة للوصول إلى التخمين. وإذا ناقض مثال واحد التخمين، فإن التخمين خاطئ، ويُدعى المثال في هذه الحالة مثالًا مضادًا.

1-2 المنطق

العبارة هي جملة خبرية إما أن تكون صحيحة أو تكون خاطئة، ولا تحتمل أي حالة أخرى. وتُسمى صحة العبارة أو خطؤها قيمةَ الصواب لها. ولذلك فإن قيمة الصواب لنفي العبارة هو عكس قيمة الصواب للعبارة. وإذا رمزنا لعبارة بالرمز p ، فإن "ليس p" هو نفي العبارة، ويُرمز له بالرمز $\sim p$.

ويمكن ربط عبارتين أو أكثر لتكوين عبارة مركبة. وإذا استعملت أداة الربط "و" ورمزها "$\wedge$"، فإن العبارة المركبة الناتجة تسمى "عبارة الوصل". أما إذا استعملت أداة الربط "أو" ورمزها "$\vee$" ، فإن العبارة المركبة الناتجة تُسمى "عبارة الفصل". ويمكن توضيح عبارتَي الفصل والوصل بأشكال ڤن كما يلي:

- **أشكال ڤن**



وجداول الصواب يمكن أن تساعد على إيجاد قيم الصواب للعبارات.

- **جداول الصواب**

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

تكون عبارة الوصل صحيحة فقط، عندما تكون كلٌّ من p و q صحيحة.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

تكون عبارة الفصل خاطئة فقط، عندما تكون كلٌّ من p و q خاطئة.

p	$\sim p$
T	F
F	T

في حالة النفي، إذا كانت p صحيحة، فإن $\sim p$ خاطئة. وإذا كانت p خاطئة، فإن $\sim p$ صحيحة.

تبين جداول الصواب أن عبارة الوصل تكون صحيحة فقط، عندما تكون العبارتان صحيحتين. أما عبارة الفصل فتكون صحيحة دائمًا إلّا إذا كانت العبارتان خاطئتين.

التبرير والبرهان

1-3 العبارات الشرطية

العبارة الشرطية هي العبارة التي يمكن أن تُكتب على صورة "إذا... فإنّ"، إذا كانت p، فإن q. تسمّى الجملة التي تلي كلمة "إذا" مباشرة الفرض، والتي تلي كلمة "فإن" مباشرة النتيجة. وبالرموز يستعمل سهم متجه من الفرض إلى النتيجة. وتكون العبارة الشرطية صحيحة دائمًا، إلا إذا كان الفرض صحيحًا والنتيجة خاطئة.

وتشتق العبارات الشرطية المرتبطة من العبارة الشرطية المعطاة، فعكس العبارة الشرطية ينتج عن تبديل الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية: إذا كانت q، فإن p . ومعكوس العبارة الشرطية ينتج عن نفي كلٍّ من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية: إذا كانت $\sim p$، فإن $\sim q$، أما المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية فينتج عن نفي كلٍّ من الفرض والنتيجة لعكس العبارة الشرطية: إذا كانت $\sim q$، فإن $\sim p$.

وهناك تكافؤ منطقي بين العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي، وكذلك بين عكس العبارة الشرطية ومعكوسها.

1-4 التبرير الاستنتاجي

التبرير الاستنتاجي يستعمل الحقائق أو القواعد أو التعاريف أو الخصائص للوصول إلى نتائج منطقية. ومن أشكال التبرير الاستنتاجي أن يُستعمل للحصول على نتائج من عبارات شرطية، وهو ما يُسمَّى قانون الفصل المنطقيّ، والذي ينص على أنه إذا كانت العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ صحيحة، وكانت p صحيحة، فإن q تكون صحيحة. ومن قوانين المنطق الأخرى قانون القياس المنطقي الذي ينص على أنه إذا كانت $p \rightarrow q$ صحيحة، وكانت $q \rightarrow r$ صحيحة، فإن $p \rightarrow r$ صحيحة. وهذا القانون يشبه علاقة التعدِّي للمساواة.

1-5 المسلّمات والبراهين الحرة

المسلّمة في الهندسة عبارة تعطي وصفًا لعلاقة أساسية بين المفاهيم الهندسية الأولية، ويُسلّم بصحتها دون برهان. وحالما يتم بيان صحة العبارة أو التخمين، فإنها تُسمّى نظرية. ويمكن استعمال النظرية – مثلها مثل التعريفات أو المسلمات – لتبرير صحة عبارات أخرى.

والبرهان دليل منطقي، حيث تبرر صحة كل عبارة فيه بعبارة تم قبولها على أنها صحيحة. ومن أشكال البرهان: البرهانُ الحر، وهو تبرير كتابي لصحة تخمين، ويبيّن البرهان صحة ما يُراد إثباته ويطوّر نظامًا من التبريرات الاستنتاجية.

1-6 البرهان الجبري

استُعملت خصائص المساواة لحل المعادلات الجبرية والتحقق من صحة العلاقات الجبرية. واستعمال مجموعة من الخطوات الجبرية لحل مسائل يُشكّل برهانًا جبريًا. وهذا البرهان يمكن تنظيمه بكتابة خطوات الحل للمعادلة في عمود، والخصائص التي تبرر كل خطوة في عمود آخر. ويستعمل في الهندسة نموذج مشابه لإثبات صحة التخمينات والنظريات، ويتضمن البرهان ذو العمودين العبارات والمبررات منظمةً في عمودين، تسمى كل خطوة عبارة، وتسمى الخاصية تبريرًا.

1-7 إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

يمكن إيجاد طول القطع المستقيمة، واستعمال هذه الأطوال في الحسابات؛ لأنها أعداد حقيقية. وتنص مسلمة أطوال القطع المستقيمة على أن النقاط الواقعة على مستقيم أو على قطعة مستقيمة يمكن ربطها بأعداد حقيقية، بحيث إذا وقعت نقطتان A و B على مستقيم، وكانت النقطة A تقابل العدد صفرًا، فإن النقطة B تقابل عددًا موجبًا، يمثل طول القطعة $\overline{AB}$. وهناك مسلمة أخرى تنص على أنه إذا وقعت النقطة B بين النقطتين A و C على المستقيم نفسه، فإن $AB + BC = AC$ ، وعكس العبارة صحيح أيضًا.

ويمكن استعمال خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي للمساواة في كتابة براهين حول تطابق القطع المستقيمة. والنظرية الناتجة عن البراهين تنص على أن تطابق القطع المستقيمة هي علاقة انعكاس وتماثل وتعدٍّ.

1-8 إثبات علاقات بين الزوايا

يقدم هذا الدرس مسلّمات ونظريات حول العلاقات بين الزوايا، حيث تنص مسلّمة المنقلة على أنه "تستعمل المنقلة للربط بين قياس زاوية وعدد حقيقي يقع بين $0°$ و $180°$".

وتنص مسلّمة جمع الزوايا على أنه إذا كانت النقطة R داخل $\angle PQS$ فإن: $m\angle PQR + m\angle RQS = m\angle PQS$.

والعكس صحيح أيضًا.

مشروع الفصل

الطريقة العلمية

سابقًا تعلَّم الطلاب الطريقة العلمية، وسوف يضعون تخمينات يربطون من خلالها بين ما تعلموه، وما سيتعلمونه في هذا الفصل.

- اطلب إلى الطلاب البحث عن معنى الطريقة العلمية وعناصرها، وشجعهم على استعمال ملاحظاتهم أو الرجوع إلى الكتب التي درسوها في الصفوف السابقة.
- وزِّع الطلاب مجموعات، بحيث تختار كل مجموعة نظرية علمية، وتحدد فرضياتها، والتجارب الممكنة للتحقق من صحتها، والنتائج التي يمكن التوصل إليها.
- اطلب إلى كل مجموعة شرح تصميم تجربة ممكنة، على أن تتضمن المتغيرات التي ستؤخذ في الحسبان، والطريقة التي ستُجمع بها البيانات، وطريقة تدوينها، وكيفية معالجة نتائج هذه التجربة وتحليلها.
- اطلب إلى الطلاب أن يصفوا كيف يمكن للنظريات العلمية التي اختاروها التنبؤ بسلوك أو عملية معينة، واطلب إليهم أن يقارنوا بين أنواع التبرير المختلفة، وأن يعرفوا أنهم عندما يتوصلون إلى استنتاج من تجربة، فإنهم يكوّنون تعميمًا، وعندما يتنبؤون بسلوك معين، فإنهم يتوصلون إلى استنتاج أكثر تحديدًا.

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملاً النمط الآتي:

التعريف: العبارة الشرطية هي العبارة التي يمكن كتابتها على الصورة "إذا... فإن..."، والفَرض هو الجملة التي تلي كلمة (إذا) مباشرةً. والنتيجة هي الجملة التي تلي كلمة (فإن) مباشرة.

مثال: إذا أنهيت واجباتك المنزلية، فإنه يمكنك متابعة برامج التلفاز.

سؤال: هل هذه العبارة على صورة "إذا... فإن...؟ نعم. ما الفَرض؟ أنهيت واجباتك المنزلية. ما النتيجة؟ يمكنك متابعة برامج التلفاز.

الفصل 1

التبرير والبرهان
Reasoning and Proof

فيما سبق:

درستُ القطع المستقيمة وعلاقات الزوايا.

والآن:

- أكتب تخمينات، وأجد أمثلة مضادة للعبارات.
- أستعمل التبرير الاستنتاجي للتوصل إلى نتيجة صحيحة.
- أكتب براهين تتضمَّن نظريات القطع المستقيمة والزوايا.

لماذا؟

العلوم والطبيعة: يستعمل علماء الأحياء التبريرات الاستنتاجية والاستقرائية لاتخاذ القرارات، ووضع الاستنتاجات المنطقية عن مملكة الحيوانات.

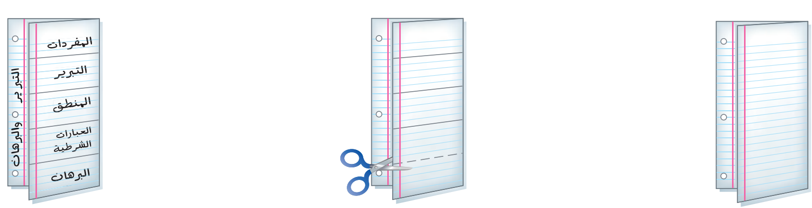
المطويات منظم أفكار

التبرير والبرهان: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 1، مبتدئًا بورقة من دفتر الملاحظات.

1 **اطو** الورقة طوليًّا، بحيث تكون حافتها بمحاذاة الثقوب الجانبية.

2 **قص** خمسة أشرطة كما يظهر في الشكل أدناه.

3 **عنوِن** الأشرطة كما في الشكل أدناه.



المطويات منظم أفكار

غرضها: أن يكتب الطلاب عن التبرير والبرهان.

وظيفتها: اطلب إلى الطلاب أن يدوِّنوا ملاحظاتهم تحت كل شريط في مطوياتهم خلال دراستهم للفصل 1. وجّه الطلاب إلى كتابة الملاحظات في أثناء قراءتهم الدرس أو سماعهم الشرح، على أن تتضمن هذه الملاحظات تعريفات المصطلحات والمفاهيم الأساسية، وشجِّعهم على البحث عن أمثلة على كل نوع من أنواع التبريرات المنطقية، وتدوينها خلف صفحات مطوياتهم.

وقت استعمالها: استعمل الشريط المناسب عند دراسة الطلاب كل درس في هذا الفصل، وعلى الطلاب أن يضيفوا المفردات الجديدة تحت شريط المفردات في أثناء دراسة كل درس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (9).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. والعبارة "إذا ... فقم" في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% أو أقل من الأسئلة،
فعد إلى	تدريبات المهارات، ص (2) مشروع الفصل، ص (10) www.obeikaneducation.com

المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فعد إلى	تدريبات إعادة التعليم. www.obeikaneducation.com

التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

(يستعمل مع الدرس 1-1)

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي عند قيمة x المُعطاة.

1) $4x+7\,,\ x=6$ **31**
2) $180\,(x-2)\,,\ x=8$ **1080**
3) $5x^2-3x\,,\ x=2$ **14**
4) $\frac{x(x-3)}{2}\,,\ x=5$ **5**
5) $x+(x+1)+(x+2)\,,\ x=3$ **12**

اكتب كل تعبير لفظي مما يأتي على صورة عبارة جبرية:

6) أقل من خمسة أمثال عدد بثمانية. **$5x-8$**
7) أكثر من مربع عدد بثلاثة. **x^2+3**

حل كل معادلة فيما يأتي: (يستعمل مع الدروس 6-1 إلى 8-1)

8) $8x-10=6x$ **5**
9) $18+7x=10x+39$ **−7**
10) $3(11x-7)=13x+25$ **2.3**
11) $\frac{3}{2}x+1=5-2x$ **1.1**
12) **قراءة:** اشترت عائشة 4 كتب بقيمة 52 ريالًا؛ لتقرأها في أثناء الإجازة الصيفية. إذا كانت الكتب متساوية السعر، فاكتب معادلة لإيجاد ثمن الكتاب الواحد، ثم حُلَّها. **$4x=52$ ؛ 13 ريالًا**

(يستعمل مع الدرس 8-1)

استعمل الشكل المجاور في مثال 3 للإجابة عما يأتي:

13) عيِّن زاويتين منفرجتين متقابلتين بالرأس. **$\angle BXD, \angle AXE$**
14) عيِّن زاويتين متتامتين. **$\angle CXD, \angle DXE$**
15) عيِّن زاويتين متجاورتين متكاملتين في آن واحد. **$\angle DXE, \angle EXA$**
16) إذا كان: $m\angle DXB=116°$ و $m\angle EXA=(3x+2)°$، فأوجد قيمة x. **38**
17) إذا كان: $m\angle CXD=(6x-13)°$ و $m\angle DXE=(10x+7)°$، فأوجد قيمة x. **6**

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد قيمة $x^2-2x+11$ إذا كانت $x=6$.

$x^2-2x+11$	العبارة المعطاة
$=(6)^2-2(6)+11$	$x=6$
$=36-2(6)+11$	أوجد قيم القوى
$=36-12+11$	اضرب
$=35$	بسِّط

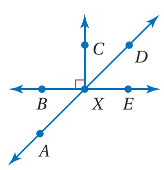
مثال 2

حل المعادلة $36x-14=16x+58$.

$36x-14=16x+58$	المعادلة المعطاة
$36x-14-16x=16x+58-16x$	اطرح $16x$ من الطرفين
$20x-14=58$	بسِّط
$20x-14+14=58+14$	اجمع 14 للطرفين
$20x=72$	بسِّط
$\frac{20x}{20}=\frac{72}{20}$	اقسم الطرفين على 20
$x=3.6$	بسِّط

مثال 3

إذا كان: $m\angle BXA=(3x+5)°$ ، $m\angle DXE=56°$، فأوجد قيمة x.



$m\angle BXA=m\angle DXE$	زاويتان متقابلتان بالرأس
$3x+5=56$	عوِّض
$3x=51$	اطرح 5 من الطرفين
$x=17$	اقسم الطرفين على 3

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

1-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-1

تمثيل العلاقات بين الكميات، باستعمال نماذج حسية وجداول ، وتمثيلات بيانية ومخططات، ووصف لفظي ، ومعادلات.

الدرس 1-1

إيجاد أمثلة مضادة

استعمال التبرير الاستقرائي لكتابة تخمين.

ما بعد الدرس 1-1

استعمال التبرير المنطقي لإثبات صحة عبارات وإيجاد أمثلة مضادة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما الأشياء التي تهم باحث التسويق؟ إجابة ممكنة: مبيعات المنتج، مقارنته بالمنتجات المنافسة.
- لماذا يقوم الباحث بتوجيه الأسئلة إلى مجموعة من الأشخاص فقط؟ إجابة ممكنة: في كثير من الأحيان، يصعب توجيه الأسئلة إلى جميع المستهلكين، ولذلك توجَّه الأسئلة إلى مجموعة ممثلة.

1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين
Inductive Reasoning and Conjection

فيما سبق:

درستُ استعمال البيانات لإيجاد أنماط والتوصل إلى توقعات.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أكتب تخمينات مبنية على التبرير الاستقرائي.
- أجد أمثلة مضادة.

المفردات:

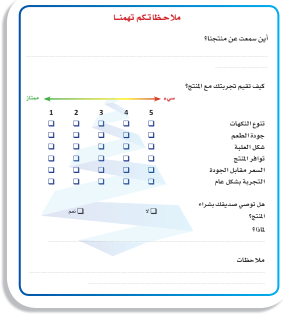
التبرير الاستقرائي
inductive reasoning

التخمين
conjecture

المثال المضاد
counterexample

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



في أبحاث التسويق، يتم تحليل إجابات مجموعة من الأشخاص عن أسئلة محددة حول المنتج، ثم يتم البحث عن نمطية معينة في الإجابات حتى الوصول إلى نتيجة. وتسمى هذه العملية التبرير الاستقرائي.

التخمين: **التبرير الاستقرائي** هو تبرير تُستعمل فيه أمثلة محددة للوصول إلى نتيجة. وعندما تفترض استمرار نمط على نفس الوتيرة، فإنك تستعمل التبرير الاستقرائي، وتُسمّى العبارة النهائية التي توصلت إليها باستعمال التبرير الاستقرائي **تخمينًا**.

مراجعة المفردات

المتتابعة

هي مجموعة من الأعداد أو الأشياء المنظمة بترتيب معين.

تاريخ الرياضيات

أبو علي الحسن بن الهيثم 354 - 430 هـ

عالم موسوعي من أعظم علماء الرياضيات والفيزياء، اعتمد في بحوثه على منهجين هما: الاستقراء، والاستنباط وفي الحالتين كان يعتمد على التجربة والملاحظة.

مثال 1 الأنماط والتخمين

اكتب تخمينًا يصف النمط في كلٍّ من المتتابعات الآتية، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها.

a) مواعيد وصول الحافلات إلى محطة الركوب هي: 8:30 صباحًا، 9:10 صباحًا، 9:50 صباحًا، 10:30 صباحًا، ......

الخطوة 1: ابحث عن نمط.

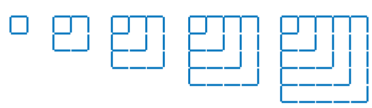
8:30 صباحًا، 9:10 صباحًا، 9:50 صباحًا، 10:30 صباحًا ......

40 دقيقة   40 دقيقة   40 دقيقة

الخطوة 2: ضع تخمينًا.

يزيد موعد وصول الحافلة 40 دقيقة عن موعد وصول الحافلة التي سبقتها. موعد وصول الحافلة التالية سوف يكون 10:30 صباحًا + 40 دقيقة أو 11:10 صباحًا.

b)



4   10   18   28   40   ......

الخطوة 1: ابحث عن نمط

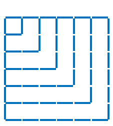
4   10   18   28   40

+6   +8   +10   +12

تزداد أعداد القطع المستقيمة بمقدار
6, 8, 10, 12, ...

الخطوة 2: ضع تخمينًا: تزداد أعداد القطع المستقيمة بمقدار ...6, 8, 10, 12؛ لذا سيزيد عدد القطع المستقيمة في الشكل التالي على سابقه بمقدار 12 + 2 أو 14 قطعة مستقيمة؛ وعليه فإن الشكل التالي سيحتوي على 40 + 14 أو 54 قطعة مستقيمة.

تحقق: ارسم الشكل التالي؛ لكي تتحقق من صحة تخمينك. ✓



54

مصادر الدرس 1-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (14, 15)	• تنويع التعليم، ص (14, 15, 18)	• تنويع التعليم، ص (15, 18)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (6)	• كتاب التمارين، ص (6)	• كتاب التمارين، ص (6)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

التخمين

المثالان 1, 3 يبيِّنان كيفية وضع تخمينات حول أنماط معطاة.

المثال 2 يبين كيفية وضع تخمين حول شكل واحد.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

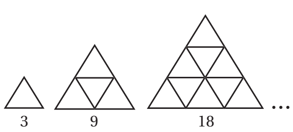
مثالان إضافيان

1 ضع تخمينًا يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها.

a) $2, 4, 12, 48, 240$

التخمين: اضرب الحد n في العدد $n+1$ ؛ للحصول على الحد التالي له؛ 1440

b)



التخمين: اجمع العدد $3n+3$ إلى عدد القطع المستقيمة في الشكل ذي الترتيب n ؛ للحصول على عدد القطع المستقيمة في الشكل التالي؛ 30

2 ضع تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية مما يأتي، وأعط أمثلة عددية أو ارسم أشكالًا تساعد على الوصول إلى هذا التخمين.

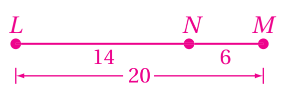
a) مجموع عدد زوجي وعدد فردي.

تخمين: مجموع العدد الزوجي والعدد الفردي يكون فرديًّا؛

$3+4=7, \quad 5+10=15$

b) إذا كانت العلاقة بين L, M, N :

$LM = 20, MN = 6, LN = 14$



التخمين: النقاط L, M, N تقع على استقامة واحدة.

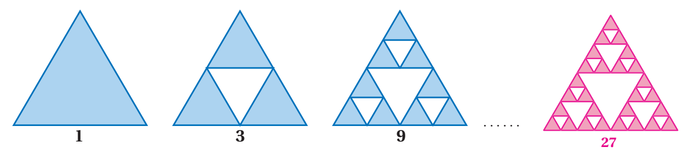
✓ تحقق من فهمك

اكتب تخمينًا يصف النمط في كلٍّ من المتتابعات الآتية، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها.

1A) متتابعة أشهر: صفر، رجب، ذو الحجة، جمادى الأولى، ......

1B) $10, 4, -2, -8, \ldots\ldots$

1C)



1A) الشهر التالي في المتتابعة يأتي بعد خمسة أشهر من الشهر السابق؛ شوال.

1B) العدد التالي في المتتابعة يقل بمقدار 6 عن العدد السابق؛ -14

1C) يقسم كل مثلث مظلل في الشكل السابق إلى أربعة مثلثات متطابقة الأضلاع يتوسطها مثلث أبيض.

لوضع تخمينات جبرية أو هندسية يجب أن تقدم أمثلة.

مثال 2 التخمينات الجبرية والهندسية

ضع تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية لكلٍّ مما يأتي، وأعطِ أمثلة عددية أو ارسم أشكالًا تساعد على الوصول لهذا التخمين.

a) ناتج جمع عددين فرديين.

الخطوة 1: اكتب أمثلة.

$$1+3=4\ ,\ 1+5=6\ ,\ 3+5=8\ ,\ 7+9=16$$

الخطوة 2: ابحث عن نمط.

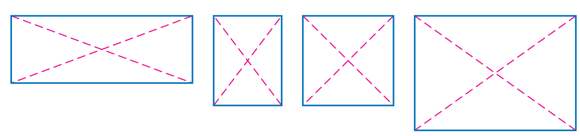
لاحظ أن الأعداد 4, 6, 8, 16 جميعها زوجية.

الخطوة 3: ضع تخمينًا.

ناتج جمع عددين فرديين هو عدد زوجي.

b) القطعتان المستقيمتان الواصلتان بين كل رأسين متقابلين في المستطيل.

الخطوة 1:



الخطوة 2: لاحظ أن أطوال القطع المستقيمة الواصلة بين كل رأسين متقابلين في كل مستطيل تبدو متساوية. استعمل المسطرة أو الفرجار للتحقق من ذلك.

الخطوة 3: التخمين: القطعتان المستقيمتان الواصلتان بين كل رأسين متقابلين في المستطيل متطابقتان.

إرشادات للدراسة

الأمثلة المؤيدة والبراهين

الأمثلة المؤيدة للتخمين ليست كافية لإثبات صحته، ولإثبات صحة تخمين جبري أو هندسي، يجب تقديم مبررات صحيحة في صورة تعريفات أو نظريات أو مسلمات تسمى برهانًا. وسوف تتعلم المزيد عن البرهان في الدرس 1-5.

✓ تحقق من فهمك

2A) ناتج جمع عددين زوجيين.

2B) العلاقة بين AB و EF ، إذا كانت: $AB = CD$ و $CD = EF$ انظر الهامش

2C) مجموع مربعَي عددين كليين متتاليين.

2A) ناتج جمع عددين زوجيين عدد زوجي؛ أمثلة: $2+4=6, 8+10=18, 20+16=36$

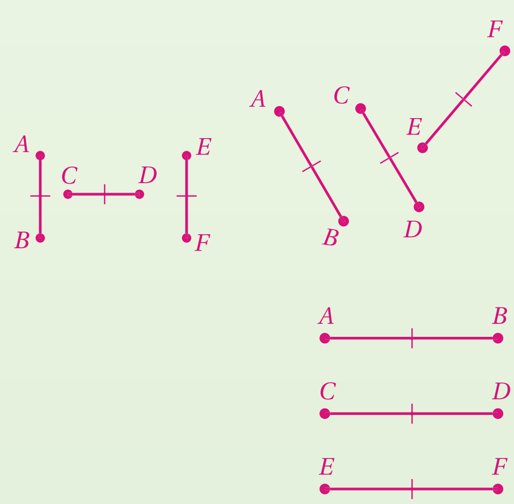
2C) مجموع مربعَي عددين كليين متتاليين عدد فردي؛ أمثلة: $1^2+2^2=5,$ $2^2+3^2=13,$ $5^2+6^2=61$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: أعط الطلاب عدة أنماط، واطلب إليهم تخمين الحد التالي في كلٍّ منها، ثم اختر بعض الطلاب، ودعهم يعرضوا إجاباتهم، ويشرحوا تبريراتهم أمام زملائهم.

إجابة (تحقق من فهمك):

2B) $AB = EF$ ؛ أمثلة:



تعتمد التخمينات في المواقف الحياتية على بيانات يتم جمعها حول موضوع التخمين.

مثال 3 من واقع الحياة — وضع تخمين من مجموعة بيانات

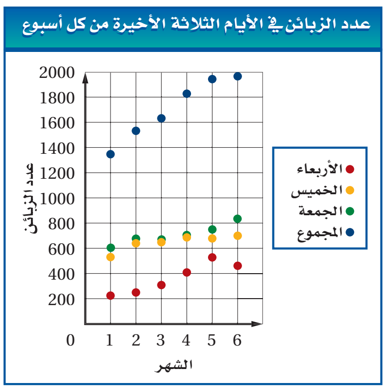
حلاقة: قام صاحب صالون حلاقة بجمع معلومات حول عدد الزبائن الذين يرتادون الصالون أيام الأربعاء والخميس والجمعة مدة ستة أشهر؛ كي يقرر ما إذا كان يجب زيادة عدد الحلاقين العاملين لديه في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع.

عدد الزبائن في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع

اليوم	الشهر 1	الشهر 2	الشهر 3	الشهر 4	الشهر 5	الشهر 6
الأربعاء	225	255	321	406	540	450
الخميس	552	635	642	692	685	705
الجمعة	603	658	652	712	746	832
المجموع	1380	1548	1615	1810	1971	1987

a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

بما أنك تبحث عن نمط له علاقة بالزمن، إذن استعمل شكل الانتشار لعرض هذه البيانات، بجعل المحور الأفقي يمثل الأشهر والمحور الرأسي يمثل عدد الزبائن. ارسم كل مجموعة من البيانات باستعمال لون مختلف، وضع مفتاحًا للتمثيل البياني.



b) ضع تخمينًا يعتمد على هذه البيانات، مفسرًا كيف يؤيد التمثيل البياني هذا التخمين.

ابحث عن نمط في هذه البيانات. لاحظ أن عدد الزبائن لكلٍّ من الأيام الثلاثة يبدو آخذًا في الازدياد بمرور الأشهر، كما أن المجموع الكلي يزداد كل شهر عن الشهر السابق.

بيانات هذا المسح تؤيد تخمين صاحب صالون الحلاقة بأن العمل في الأيام الثلاثة الأخيرة من كل أسبوع يزداد؛ مما يتطلب زيادة عدد الحلاقين العاملين لديه في هذه الأيام.

تحقق من فهمك

3) **أسعار:** يبين الجدول المجاور سعر منتج خلال السنوات من 1402هـ إلى 1427هـ .

السنة	السعر (بالريال)
1402	20
1407	22
1412	29
1417	32
1422	37
1427	41

A) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات. انظر الهامش

B) ضع تخمينًا لسعر المنتج عام 1432هـ. 46 ريالًا تقريبًا

C) هل من المنطقي القول بأن هذا النمط سيستمر بمرور الزمن؟ وإذا لم يكن كذلك، فكيف سيتغير؟ فسر إجابتك. انظر الهامش

الربط مع الحياة

يتطلب العمل في صالونات الحلاقة مراعاة شروط صحية تضمن عدم انتقال الأمراض، ومنها غسل اليدين بعد كل عملية حلاقة، وعدم الاستعمال الخاطئ للأدوات والمستحضرات.

إرشادات للدارس

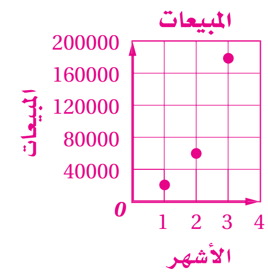
اختبر جميع العمليات الحسابية الأساسية بما فيها الجذور والقوى عند البحث عن قاعدة تحدد النمط، وقد تتضمن القاعدة، استعمال عمليتين حسابيتين.

مثال إضافي

3 **مبيعات:** الجدول أدناه يبيِّن مبيعات محل تجاري للأشهر الثلاثة الأولى من افتتاحه، ويريد صاحبه أن يتوقع مقدار مبيعاته في الشهر الرابع.

الشهر	المبيعات
1	20000 ريال
2	60000 ريال
3	180000 ريال

a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

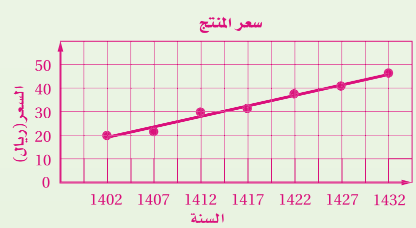


b) ضع تخمينًا لمبيعات الأسبوع الرابع، وبرّر هذا التنبؤ أو الادعاء.

التخمين: المبيعات في كل شهر تساوي ثلاثة أمثال مبيعات الشهر الذي يسبقه؛ لذا فإن المبيعات ستكون 540000 ريال في الشهر الرابع تقريبًا.

إجابات (تحقق من فهمك):

3A)



3C) إجابة ممكنة: نعم، هذا الاتجاه المتزايد معقول؛ لأنه من المحتمل أن يستمر سعر المنتج في الزيادة على مر السنين.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في تمييز الأنماط،

فاطلب إليهم أن يكتبوا المتتابعة العددية التي قد يحويها النمط الهندسي.

14 الفصل 1 التبرير والبرهان

ربط المفردات

المثال المضاد

المعنى اللغوي

المضاد هو المخالف.

المعنى الرياضي

المثال المضاد هو مثال معاكس لمثال مُعطى.

قراءة الرياضيات

يرمز للنقطة بحرف كبير مثل: $A, B, C, \ldots$، ويرمز للقطعة المستقيمة التي طرفاها A, B بالرمز $\overline{BA}$ أو $\overline{AB}$، ويرمز للمسافة بين النقطتين A, B بالرمز AB

إيجاد أمثلة مضادة: إثبات صحة تخمين معين لكل الحالات، يتطلب تقديمَ برهان لذلك التخمين. بينما لإثبات عدم صحة التخمين يكفي تقديم مثال واحد معاكس للتخمين، وقد يكون عددًا أو رسمًا أو عبارة، وهذا المثال المعاكس يُسمى **المثال المضاد**.

مثال 4 إيجاد أمثلة مضادة

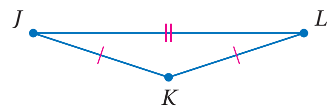
أعط مثالًا مضادًا يبيّن أن كلًّا من التخمينات الآتية خاطئة.

a) إذا كان n عددًا حقيقيًّا، فإن $n^2 > n$.

إذا كان n يساوي 1، فإن التخمين خاطئ؛ لأن $1^2 \not> 1$

b) إذا كان $JK = KL$، فإن K منتصف $\overline{JL}$.

عندما لا تقع J, K, L على استقامة واحدة، يكون التخمين خاطئًا. ففي الشكل المجاور $JK = KL$، ولكن K ليست نقطة منتصف $\overline{JL}$.



تحقق من فهمك

4A) إذا كان n عددًا حقيقيًّا، فإن $-n$ يكون سالبًا. إجابة ممكنة: إذا كان $n = -4$، فإن $-n = -(-4) = 4$، وهذا عدد موجب.

4B) إذا كان: $\angle ABE \cong \angle DBC$، فإن $\angle ABE$ و $\angle DBC$ متقابلتان بالرأس. انظر الهامش

تأكد

المثال 1 **اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها:**

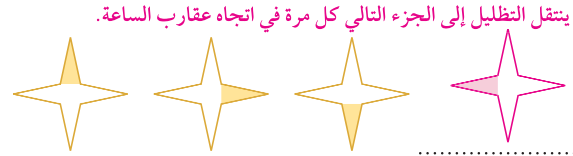
1) التكلفة: 4.50 ريالات، 6.75 ريالاتٍ، 9.00 ريالاتٍ، ......

1) تزيد التكلفة كل مرة بمقدار 2.25 ريال عن المرة السابقة؛ 11.25 ريالًا.

2) مواعيد انطلاق الحافلات: 10:15 صباحًا، 11:00 صباحًا، 11:45 صباحًا، ......

2) يأتي كل موعد بعد 45 دقيقة من الموعد السابق له؛ 12:30 مساءً.

3)



ينتقل التظليل إلى الجزء التالي كل مرة في اتجاه عقارب الساعة.

4)

كل شكل في النمط يحوي دائرة إضافية خارجية زيادة على دوائر الشكل السابق.

5) $3, 3, 6, 9, 15, \ldots\ldots$

5) كل حدٍّ في هذا النمط يساوي مجموع الحدين السابقين له؛ 24

6) $2, 6, 14, 30, 62, \ldots\ldots$ يزيد كل حد بمقدار 2 على مثلَي الحد الذي يسبقه؛ 126

المثال 2 **ضع تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية مما يأتي:**

7) ناتج ضرب عددين زوجيين. ناتج ضرب عددين زوجيين هو عدد زوجي.

8) العلاقة بين العددين a و b إذا كان $a + b = 0$. كل من a و b معكوس للآخر.

9) العلاقة بين مجموعة النقاط في المستوى التي تبعد المسافة نفسها عن النقطة A.

9) مجموعة النقاط في المستوى التي تبعد البعد نفسه عن النقطة A تكوّن دائرة.

10) العلاقة بين $\overline{AP}$ و $\overline{PB}$ إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ والنقطة P نقطة منتصف $\overline{AM}$. طول $\overline{PB}$ يساوي ثلاثة أمثال طول $\overline{AP}$.

إرشادات للمعلم الجديد

التبرير: اطلب إلى الطلاب أن يختبروا جميع العمليات الحسابية الأساسية بما فيها الجذور والقوى، عند البحث عن الأنماط في المتتابعات العددية، وبيِّن لهم أنه قد يتضمن النمط استعمال عمليتين حسابيَّتين.

إيجاد أمثلة مضادة

المثال 4 يبيّن كتابة مثال مضادٍّ بناءً على المعلومات المعطاة.

مثال إضافي

4 **بطالة:** يبيّن الجدول أدناه معدلات البطالة بين النساء السعوديات في بعض المدن السعودية وفق إحصاءات عام 2004م، أوجد مثالًا مضادًّا للعبارة "معدل البطالة أعلى ما يكون في المدن ذات العدد الأكبر من السكان".

المدينة	عدد السكان	المعدل
الرياض	4081152	19.3%
مكة المكرمة	1294168	16.9%
جازان	100694	38%
الدمام	744321	25.6%
بريدة	378422	16.0%
الباحة	85212	40.6%

مدينة الباحة عدد سكانها 85212، ومعدل البطالة فيها أعلى من معدل البطالة في الرياض التي عدد سكانها 4087152

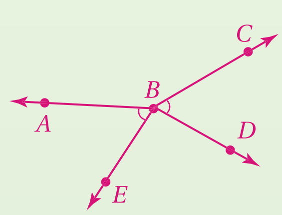
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون: وزِّع الطلاب مجموعات صغيرة، ثم اطلب إلى كل طالب أن يكتب عبارتين غير صحيحتين دائمًا على الأقل، وعلى بقية طلاب مجموعته إيجاد مثال مضاد لكل عبارة.

إجابة (تحقق من فهمك):

4B) إجابة ممكنة: عندما تكون النقاط A, B, D لا تقع على استقامة واحدة، والنقاط E, B, C لا تقع على استقامة واحدة، يكون التخمين خاطئًا. في الشكل الآتي: $\angle ABE \cong \angle DBC$، ولكن $\angle ABE$ و $\angle DBC$ غير متقابلتين بالرأس.



المثال 3 (11 **إنتاج مصنع:** استعمل الجدول المجاور الذي يبين عدد القطع المنتجة في مصنع لبعض السنوات.

عدد القطع المنتجة لمصنع

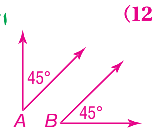
السنة	عدد القطع (بالملايين)
2007	5
2008	7.2
2009	9.2
2010	14.1
2011	19.7
2012	28.4

انظر الهامش a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

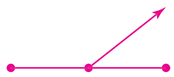
b) ضع تخمينًا لعدد القطع في سنة 2017م . سيكون عدد القطع في عام 2017 نحو 35 مليونًا.

المثال 4 أعطِ مثالًا مضادًا يبين أن كلًّا من التخمينات الآتية خاطئة.

(12 إذا كانت $\angle A$ و $\angle B$ متتامتين، فإن لهما ضلعًا مشتركًا.

(12 

(13 إذا قطع نصف مستقيم قطعةً مستقيمةً عند منتصفها، فإنه يعامدها.



تدرب وحل المسائل

المثال 1 اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها. 14–19) انظر الهامش.

(14 0, 2, 4, 6, 8 (15 3, 6, 9, 12, 15 (16 4, 8, 12, 16, 20

(17 2, 22, 222, 2222 (18 1, 4, 9, 16 (19 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

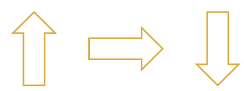
(20 مواعيد الوصول: 10:00 صباحًا، 12:30 مساءً، 3:00 مساءً، …… 20) يأتي كل موعد بعد ساعتين ونصف الساعة من الموعد الذي يسبقه؛ 5:30 مساءً.

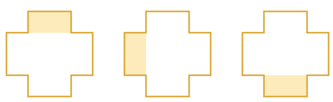
(21 النسبة المئوية للرطوبة: 100% , 93% , 86% , …… 21) تقل كل نسبة مئوية عن النسبة السابقة بمقدار 7% ؛ 79%.

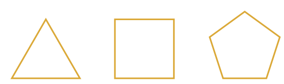
(22 أيام العمل: الأحد، الثلاثاء، الخميس، …… 22) يأتي كل يوم عمل بعد يومين من يوم العمل السابق؛ السبت.

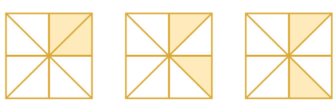
(23 اجتماعات النادي: المحرّم، ربيع أول، جمادى الأولى، …… 23) يعقد كل اجتماع بعد شهرين من الاجتماع السابق؛ رجب.

24–27) انظر ملحق إجابات

(24  ……

(25  ……

(26  ……

(27  ……

(28 **رياضة:** بدأ ماجد تمارين الجري السريع قبل خمسة أيام. فركض في اليوم الأول 0.5 km . وفي الأيام الثلاثة التالية 0.75 km, 1 km, 1.25 km . إذا استمر تمرينه على هذا النمط، فما المسافة التي يقطعها في اليوم السابع؟ 2 km

المثال 2 ضع تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية مما يأتي:

(29 ناتج ضرب عددين فرديين. الناتج عدد فردي

(30 ناتج ضرب عدد في اثنين، مضافًا إليه واحد. الناتج عدد فردي

(31 العلاقة بين العددين a و b ، إذا كان $ab = 1$. كلٌّ منهما مقلوب الآخر

(32 العلاقة بين $\overline{AB}$ ومجموعة النقاط التي تبعد مسافات متساوية عن A و B . تشكل العمود المنصِّف لـ $\overline{AB}$.

(33 العلاقة بين حجم المنشور وحجم الهرم اللذين لهما القاعدة نفسها والارتفاع نفسه. حجم المنشور يساوي 3 أمثال حجم الهرم.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-13؛ للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

المحتوى الرياضي

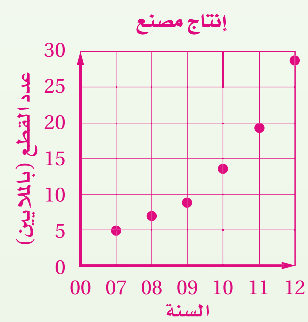
تخمينات من واقع الحياة : أخبر الطلاب أنه في الأسئلة التي تتضمن بيانات من واقع الحياة، ليس بالضرورة أن يمثّل التخمين بناءً على النمط في البيانات ما يمكن أن يحدث في المستقبل.

فمثلًا، قد تُشير مجموعة من البيانات إلى تزايد درجات الحرارة في أحد الأسابيع، إلّا أن درجات الحرارة قد تنخفض في الأسبوع الذي يليه.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	14 - 38 ، 43 - 56
ضمن المتوسط	15 - 39 فردي ، 41 - 39 ، 43 - 56
فوق المتوسط	39 - 53 (اختياري: 45 - 56)

إجابات

(11a 

(14 كل حد في هذا النمط يزيد بمقدار 2 على الحد الذي يسبقه؛ 10

(15 كل حد في هذا النمط يزيد بمقدار 3 على الحد الذي يسبقه؛ 18

(16 كل حد في هذا النمط يزيد بمقدار 4 على الحد الذي يسبقه؛ 24

(17 كل حد في هذا النمط يحتوي على الرقم 2 زيادة على أرقام الحد السابق له؛ 22222

(18 ينتج كل حد عن تربيع العدد الطبيعي الذي يمثِّل ترتيبه؛ 25

(19 كل حد يساوي نصف الحد الذي يسبقه؛ $\frac{1}{16}$

المثال 3 **34)** **مدارس:** استعمل الجدول المجاور الذي يبين عدد الطلاب في مدرسة مدة أربع سنوات متتالية. **(a, b) انظر ملحق الإجابات**

السنة	عدد الطلاب
1425	190
1426	210
1427	240
1428	260

a) أنشئ التمثيل البياني الأنسب لعرض هذه البيانات.

b) ضع تخمينًا معتمدًا على بيانات الجدول، واشرح كيف يؤيِّد تمثيلك البياني هذا التخمين.

المثال 4 **حدد ما إذا كان أيٌّ من التخمينات الآتية صحيحًا أو خاطئًا، وإذا كان التخمين خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًا.**

35) إذا كان n عددًا أوليًّا، فإن $n + 1$ ليس أوليًّا. **خاطئ؛ إجابة ممكنة: إذا كان $n = 2$، فإن $n + 1 = 3$، وهذا عدد أولي.**

36) إذا كان x عددًا صحيحًا، فإن $-x$ عدد موجب. **خاطئ؛ إجابة ممكنة: إذا كان $x = 2$، فإن $-x = -2$**

37) في المثلث ABC إذا كان: $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$، فإن $\triangle ABC$ قائم الزاوية. **صحيح**

38) إذا كانت مساحة مستطيل تساوي $20\ m^2$، فإن طوله يساوي $10\ m$، وعرضه $2\ m$. **خاطئ؛ إجابة ممكنة: يمكن أن يكون الطول $5\ m$، والعرض $4\ m$**

39) **سكان:** استعمل الجدول أدناه لتعطي مثالًا مضادًا لكلٍّ من العبارتين الآتيتين:

المنطقة الإدارية	العدد التقريبي للسكان بالمليون	النسبة المئوية من عدد سكان المملكة
الرياض	6.8	25.0%
مكة المكرمة	6.9	25.5%
المدينة المنورة	1.8	6.6%
الشرقية	4.1	15.1%

المصدر: مصلحة الإحصاءات العامة والمعلومات، التعداد السكاني لعام 1431هـ.

a) النسبة المئوية لمجموع عدد سكان المناطق الإدارية الأربع الواردة في الجدول أقل من 25% من سكان المملكة العربية السعودية. **(a,b انظر الهامش)**

b) يزيد عدد سكان أيٍّ من المناطق الإدارية الأربع على مليونَي نسمةٍ.

الربط مع الحياة

منطقة مكة المكرمة هي أكثر مناطق المملكة تعدادًا للسكان، وتضم 12 محافظة هي: مكة المكرمة وجدة والطائف والقنفذة والليث ورابغ والجموم وخليص والكامل والخرمة ورنية وتربه.

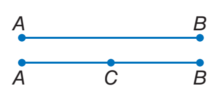
المصدر: مصلحة الإحصاءات العامة والمعلومات.

40) **تخمين جولدباخ:** ينص تخمين جولد باخ على أنه يمكن كتابة أي عدد زوجي أكبر من 2 على صورة مجموع عددين أوليين. فعلى سبيل المثال: $4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5$. **(a,b انظر الهامش)**

a) أثبت أن التخمين صحيح للأعداد الزوجية من 10 إلى 20

b) إذا أُعطيت التخمين الآتي: يمكن كتابة أي عدد فردي أكبر من 2 على صورة مجموع عددين أوليين. فهل التخمين صحيح أم خاطئ؟ إذا كان خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًا.

41) **هندسة:** النقطتان الواقعتان على مستقيم تشكِّلان قطعة مستقيمة، مثل $\overline{AB}$. إذا أُضيفت نقطة أخرى C على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$، فإن النقاط الثلاث تشكِّل ثلاث قطع مستقيمة.



a) ما عدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من أربع نقاط على مستقيم؟ ومن خمس نقاط على مستقيم؟ **6; 10**

b) ضع تخمينًا لعدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من n نقطة على مستقيم.

c) اختبر تخمينك بإيجاد عدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتشكل من 6 نقاط.

41b) عدد القطع المستقيمة يساوي مجموع الأعداد الطبيعية الأقل من n.
41c) تتكون خمس عشرة قطعة مستقيمة. فالتخمين صحيح.

مسائل مهارات التفكير العليا

42) **اكتشف الخطأ:** يتناقش أحمد وعلي في موضوع الأعداد الأولية. فيقول أحمد: إن جميع الأعداد الأولية أعداد فردية. في حين يقول عليٌّ: ليست جميع الأعداد الأولية فردية. هل قول أيٍّ منهما صحيح؟ فسّر إجابتك.
قول علي صحيح؛ لأن العدد 2 عدد أولي زوجي

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 42، يجب أن يتذكر الطلاب أن العدد 2 هو عدد أولي. ومن الملاحظ أن أحمد أهمل العدد 2 عندما عمل تخمينه حول الأعداد الأولية.

إجابات:

39a) النسبة المئوية لعدد السكان في منطقة مكة المكرمة وحده يساوي 25.5% من سكان المملكة العربية السعودية.

39b) عدد سكان منطقة المدينة المنورة 1.8 مليون نسمة.

40a) $10 = 5 + 5, 12 = 5 + 7, 14 = 7 + 7, 16 = 5 + 11, 18 = 7 + 11, 20 = 7+13$

40b) خاطئ؛ لا يمكن كتابة العدد 3 على صورة مجموع عددين أوليَّين.

43) إجابة ممكنة: 2, 4, 16, 256, 65536. يمكن إيجاد كل حد بتربيع الحد السابق له، كما يمكن إيجاد كل حد باستعمال الصيغة $2^{2^{n-1}}$، حيث $n \geq 1$.

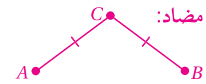
43) مسألة مفتوحة: اكتب متتابعة عددية تتبع حدودها نمطين مختلفين، ووضح النمطين.

44) تبرير: تأمّل التخمين: "إذا كانت نقطتان تبعُدان المسافة نفسها عن نقطة ثالثة معلومة، فإن النقاط الثلاث تقع على استقامة واحدة". هل هذا التخمين صحيح أم خاطئ؟ وإذا كان خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًّا.

45) اكتب: افترض أنك تُجري مسحًا. اختر موضوعًا واكتب ثلاثة أسئلة يتضمنها مسحُك. كيف تستعمل التبرير الاستقرائي مع البيانات التي تحصل عليها من خلال هذا المسح؟ انظر الهامش

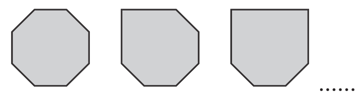
44) إجابة ممكنة: خطأ؛ إذا كوَّنت النقاط زاوية مستقيمة يكون التخمين صحيحًا، أما إذا لم تكن النقاط الثلاث على استقامة واحدة، فيكون التخمين خطأ.

مثال مضاد:

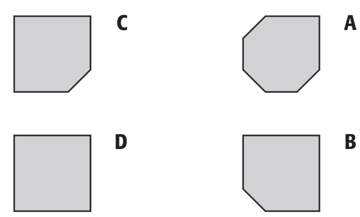


تدريب على اختبار

46) انظر إلى النمط الآتي:



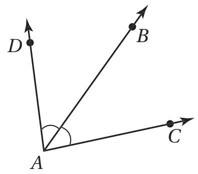
ما الشكل التالي في النمط؟ **B**



47) إذا علمت أن $a = 10$, $b = 1$ ، فما قيمة العبارة الآتية؟ $\frac{32}{11}$

$$2b + ab \div (a + b)$$

48) في الشكل المجاور، $\overleftrightarrow{AB}$ محور تناظر $\angle DAC$. أيُّ الاستنتاجات الآتية ليس صحيحًا بالضرورة؟ **B**



A $\angle DAB \cong \angle BAC$

B $\angle DAC$ زاوية قائمة.

C A و D على استقامة واحدة.

D $2(m\angle BAC) = m\angle DAC$

مراجعة تراكمية

49) أحواض سمك: اشترى باسم حوضَ سمكٍ صغير على شكل أسطوانة دائرية قائمة، طول قطر قاعدتها 25 cm ، وارتفاعها 35 cm، أوجد حجم الماء اللازم لِملءِ الحوض. (مهارة سابقة) $17180.6\ cm^3$

أوجد محيط $\triangle ABC$ إذا أُعطيت إحداثيات رؤوسه في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

50) $A(1, 6), B(1, 2), C(3, 2)$ **10.47**

51) $A(-3, 2), B(2, -9), C(0, -10)$ **26.69**

52) جبر: قياس زاويتين متتامتين يساوي $(16z - 9)°$ و $(4z + 3)°$. أوجد قياس كلٍّ منهما. (مهارة سابقة) **22.2 ;67.8**

53) جبر: إذا علمت أن: $x = 3$ و $y = -4$ و $z = -5$، فأوجد قيمة: $5|x + y| - 3|2 - z|$. (مهارة سابقة) **−16**

استعد للدرس اللاحق

جبر: اكتب كلمة "صح" بجوار العبارة الصحيحة وكلمة "خطأ" بجوار العبارة الخاطئة.

54) كل مربع هو مستطيل **صح**

55) $5 - 2 \times 3 = 9$ **خطأ**

56) العدد 9 عدد أولي **خطأ**

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب كتابة خمسة تخمينات حول نشاطات مدرستهم وأنظمتها، ثم اطلب إليهم أن تبادل الأوراق، ومحاولة إيجاد مثالٍ مضادٍّ لكل تخمين.

مثال: "على الطلاب الذهاب إلى المدرسة من الأحد إلى الخميس". والمثال المضاد لهذه العبارة أن يكون يوم عيد الفطر يوم الإثنين، حيث إجازة المدارس في ذلك اليوم.

اجمع الأوراق من الطلاب عند خروجهم من الفصل.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع: اعمل تخمينًا للعددين التاليين في المتتابعة الآتية: 9, 7, 10, 8, 11, 9, 12, . . .

اطرح 2، ثم أضف 3؛ 10، 13

إجابة:

45) إجابة ممكنة: أود أن أجري مسحًا لأنواع الأنشطة التي يمارسها الناس في عطلة نهاية الأسبوع، وأطرح الأسئلة الآتية: ما عمرك؟ ما نوع النشاط الذي تفضل ممارسته في عطلة نهاية الأسبوع؟

ما مدى مواظبتك على ممارسة هذا النشاط؟ ثم بعد ذلك أستعمل التبرير الاستقرائي لإيجاد أنماطٍ في الإجابات لتحديد ما إذا كان الأشخاص المتساوون في العُمُر يفضلون ممارسة الأنشطة نفسها أم لا.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) دون

الاسم ______________ التاريخ ________

1-1 تدريبات إعادة التعليم

التبرير الاستقرائي والتخمين

التخمين:

التبرير الاستقرائي هو التبرير الذي يعتمد على معلومات نتجت عن أمثلة مختلفة تمثّل نمطًا؛ للتوصل إلى نتيجة أو عبارة تُسمّى تخمينًا.

مثال 1 اكتب تخمينًا يصف النمط في المتابعة الآتية، ثم استعمله في إيجاد الحدّ التالي للمتابعة: $1, 3, 9, 27, 81, \dots$.

الخطوة 1 : ابحث عن نمط:

$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \quad 81$

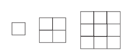
$3^0 \quad 3^1 \quad 3^2 \quad 3^3 \quad 3^4$

الخطوة 2 : ضع تخمينًا:

كل واحد من هذه الأعداد هو قوة للعدد 3.

إذن سيكون العدد التالي 3^5؛ أيْ 243

مثال 2 اكتب تخمينًا يصف النمط في المتابعة الآتية، ثم استعمله في إيجاد طول ضلع المربع في الشكل التالي:



الخطوة 1 : ابحث عن نمط:

أطوال أضلاع المربعات هي: 3 ,2 ,1 وحداتٍ.

الخطوة 2 : ضع تخمينًا:

سيكون طول ضلع المربع في الشكل التالي 4 وحدات،

إذن سيكون في الشكل التالي 16 مربعًا صغيرًا.

تمارين

اكتب تخمينًا يصف النمط في كلٍّ من المتابعات الآتية، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها:

1) $-5, 10, -20, 40, \dots$ **النمط: كل عدد يساوي العدد السابق له مضروبًا في -2 التخمين: العدد التالي يساوي -80**

2) $1, 10, 100, 1000, \dots$ **النمط: كل عدد يساوي 10 أمثال العدد السابق له التخمين: العدد التالي يساوي 10000**

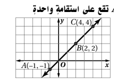
3) $1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \dots$ **النمط: كل عدد يزيد بمقدار $\frac{1}{5}$ على العدد السابق له التخمين: العدد التالي يساوي $\frac{9}{5}$**

اكتب تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية ممّا يأتي، ثمَّ أعطِ أمثلة عددية، أو ارسم أشكالًا تؤيد هذا التخمين.

الإجابات المعطاة للأسئلة 7—4 هنا، هي بعض الإجابات المكنة

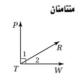
4) $A(-1, -1), B(2,2), C(4,4)$

النقاط A, B, C تقع على استقامةٍ واحدةٍ



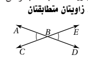
5) الزاويتان 1∠ و 2∠تكوّنان زاوية قائمة.

$\angle 1$ و 2 زاويتان متتامتان



6) $\angle ABC$ و $\angle DBE$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

$\angle ABC$ و $\angle DBE$ زاويتان متطابقتان



7) الفرق بين عددين فرديين.

الفرق بين عددين فرديين، عدد زوجي:

$23 - 9 = 14, 15 - 7 = 8$

الصف: الأول الثانوي 6 الفصل 1: التبرير والبرهان

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (7) دون

الاسم ______________ التاريخ ________

1-1 تدريبات إعادة التعليم **(تتمة)**

التبرير الاستقرائي والتخمين

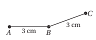
إيجاد أمثلة مضادة:

يكونُ التخمينُ خطأً، إذا وُجدَ مثالٌ واحدٌ يتبيَّنُ أنَ التخمينَ فيه غيرُ صحيحٍ، وهذا المثالُ يُسمَّى **مثالًا مضادًّا**.

مثال أعطِ مثالًا مضادًا يبيّنُ عدمَ صحةِ التخمينِ الآتي.

إذا كانت $\overline{BC} \cong \overline{AB}$، فإنَّ B نقطةُ منتصفِ $\overline{AC}$.

هل يمكِنُك أن ترسمَ شكلًا تكونُ فيه $\overline{BC} \cong \overline{AB}$ ، على ألّا تكون B نقطة منتصفِ $\overline{AC}$ ؟



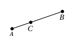
يُعدّ الشكل المجاور مثالًا مضادًّا؛ لأن B ليست واقعةً على $\overline{AC}$؛ إذن التخمين خاطئ.

تمارين

حدِّد ما إذا كان كل تخمين ممّا يأتي صحيحًا أم خاطئًا، وإذا كان خاطئًا، فأعطِ مثالًا مضادًّا:

1) إذا وقعت النقاط A, B, C على استقامةٍ واحدةٍ، فإن $AC=BC+AB$.

خطأ؛ لأنه من المكن أن تكون C بين A وB

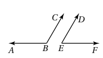


2) إذا كانت $\angle R$ و $\angle S$ متكاملتين، و$\angle T$ و $\angle R$ متكاملتين أيضًا، فإن $\angle S \cong \angle T$

صحيح

3) إذا كانت$\angle ABC$ وَ $\angle DEF$ متكاملتين، فإنهما متجاورتان على خطٍّ مستقيم.

خطأ؛ لأنه من المكن أن تكون الزاويتان غير متجاورتين.



4) إذا كانت$\overline{EF} \perp \overline{DE}$، فإن $\angle DEF$ قائمة.

صحيح

الصف: الأول الثانوي 7 الفصل 1: التبرير والبرهان

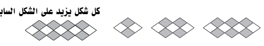
تدريبات المهارات (8) دون ضمن

الاسم ______________ التاريخ ________

1-1 تدريبات المهارات

التبرير الاستقرائي والتخمين

اكتب تخمينًا يصف النمط في كلٍّ من المتابعات الآتية، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في المتابعة:

1) 

كل شكل يزيد على الشكل السابق معينَين مظلَّلين ومعينًا غير مظلل

2) $8, 5, 2, -1, -4$

كل حدّ يزيد على الحدّ السابق بمقدار 3؛ 11

3) $4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, 6$

كل حدّ يقل بمقدار $\frac{1}{2}$ عن الحدّ السابق؛ $\frac{7}{2}$

4) $-32, 16, -8, 4, -2$

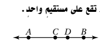
ينتج كل حدّ عن ضرب الحد السابق في -2؛ 64

اكتب تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية ممّا يأتي، ثمَّ أعطِ أمثلة عددية، أو ارسم أشكالًا تؤيد هذا التخمين:

الإجابات المعطاة للأسئلة 8–5 هنا، هي بعض الإجابات المكنة.

5) تقع النقاط A, B, C على استقامةٍ واحدةٍ، وتقع النقطة D بين B, C.

النقاط: A, B, C, D تقع على مستقيمٍ واحدٍ.

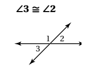


6) النقطة P هي نقطة منتصف $\overline{NQ}$.

$NP = PQ$

7) $\angle 1$ ، $\angle 2$ متكاملتان وَ $\angle 1$ ، $\angle 3$ متكاملتان.

$\angle 3 \cong \angle 2$



8) ناتج ضرب عددين فرديَّين

ناتج ضرب عددين فرديين هو عدد فردي:

$3 \times 5 = 15 \; , \; 9 \times 7 = 63$

حدِّد ما إذا كانت التخمينات الآتية صحيحة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة فأعطِ مثالًا مضادًّا:

9) إذا كانت$\angle ABC$ و$\angle CBD$متجاورتين على خطٍّ مستقيمٍ، فإن $\angle ABC \cong \angle CBD$.

خاطئة؛ قد تكون إحدى الزاويتين حادة والأخرى منفرجة.

10) إذا كانت $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ متطابقة، فإن النقاط A, B, C تقع على خطٍّ مستقيمٍ.

خاطئة؛ قد تشكل $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ مثلثًا.

11) إذا كان $AB + BC = AC$، فإن $AB = BC$.

خاطئة؛ مثال مضادّ :

12) إذا كانت $\angle 1$ متمِّمة لِـ $\angle 2$، وكانت $\angle 1$ متممة لِـ $\angle 3$ أيضًا، فإن $\angle 2 \cong \angle 3$. **صحيحة.**

الصف: الأول الثانوي 8 الفصل 1: التبرير والبرهان

تدريبات حل المسألة (9) دون ضمن فوق

الاسم ______________ التاريخ ________

1-1 تدريبات حل المسألة

التبرير الاستقرائي والتخمين

1) **السطح المائل:** دحرج عليٌّ كرة زجاجية على سطح مائل، وكان يقيس المسافة التي تقطعها الكرة كل ثانية، وسجّل البيانات في الجدول الآتي:

الثانية	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
المسافة (بالسنتمترات)	20	60	100	140

ما المسافة التي يمكن أن تقطعها الكرة في الثانية الخامسة.

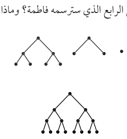
180 cm

2) **الأعداد الأولية:** العدد الأولي هو عدد أكبر من 1، ويقبل القسمة على نفسه وعلى 1 فقط، حاول سعد أن يجد طريقة منهجية لتحديد الأعداد الأولية، وبعد عدة محاولات توصل إلى أن $2^n - 1$ يكون عددًا أوليًّا لأيِّ عددٍ طبيعيٍّ n ، فهل استنتاجه صحيح؟

لا، إجابة ممكنة: إذا كان $n = 4$ ، فإن $2^n - 1 = 15$، و15 ليس عددًا أوليًا؛ لأن $5 \times 3 = 15$

3) **أنسابٌ:** وضعت فاطمة مخططًا لنَسبِها، ممثّلًا بثلاثة رسوم كما هو موضح أدناه، حيث تمثل النقطَة الأولى فاطمة، ويمثل الرسم الثاني فاطمة ووالدَيها، ويمثل الرسم الثالث فاطمة ووالدَيها وجدَّيها وجدَّتيها.

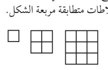
ما الشكل الرابع الذي سترسمه فاطمة؟ وماذا يمثل؟



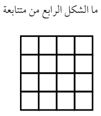
4) **ميداليات:** تم تكليف صالح بتوزيع 31 ميداليةً على أعضاء 6 فِرَق رياضية متنافسة، فاستنتج صالح أن فريقًا واحدًا على الأقل سيحرز أكثر من 5 ميداليات، فهل استنتاجه صحيح؟ برِّر إجابتك.

نعم؛ استنتاجه صحيح؛ لأنه إذا لم يحرز أيُّ فريق أكثر من 5 ميداليات، فلن يكون عدد الميداليات أكثر من 6×5 أيْ 30 ميدالية.

5) **أنماط:** يوضح الشكل الآتي متتابعة مربعات، كلٌّ منها يتكون من بلاطات متطابقة مربعة الشكل.



a) ما الشكل الرابع من متتابعة المربعات؟



b) عبّر عن متتابعة المربعات، بمتتابعة أعداد؟

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$

c) إذا استمر النمط بنفس الطريقة، فكم مربعًا صغيرًا سيكون في الشكل رقم 10؟

10^2 أو 100

الصف: الأول الثانوي 9 الفصل 1: التبرير والبرهان

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10) ضمن فوق

الاسم ____________ التاريخ ________

1-1 التدريبات الإثرائية

الأمثلة المضادة

عندما تتوصل إلى استنتاج بعد اختبارك لعدة حالات معيَّنة، فإنك تستعمل التبرير الاستقرائي. ومع ذلك كن حذرًا أثناء استعمالك هذا النوع من التبرير؛ لأنه في حالة وجود مثال مضادٍّ واحد، سيكون كافيًا لإثبات عدم صحة هذا الاستنتاج.

مثال **هل العبارة $\frac{1}{x} \le 1$ صحيحة عند التعويض عن x بالأعداد 1, 2, 3 ؟ وهل هذه العبارة صحيحة أيضًا لكل الأعداد الحقيقية؟ أوجد مثالًا مضادًّا إذا كان ذلك ممكنًا.**

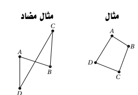
$\frac{1}{1} = 1,\ \frac{1}{2} < 1,\ \frac{1}{3} < 1$، لكن عندما $x = \frac{1}{2}$، فإن $\frac{1}{x} = 2$، وهذا المثال المضاد يثبت أن العبارة ليست صحيحةً دائمًا.

تمارين

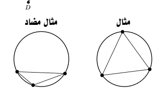
1) هل المعادلة: $\sqrt{k^2} = k$ صحيحة في حالة التعويض عن k بالأعداد 3, 2, 1؟وهل هذه المعادلة صحيحة لكل الأعداد الصحيحة أيضًا؟ هات مثالًا مضادًّا إن أمكن.
العبارة صحيحة للأعداد 3 ,2 , 1، ولكنها غير صحيحة للأعداد السالبة، إجابة ممكنة: $\sqrt{(-2)^2} \ne -2$

2) هل العبارة: $2x = x + x$ صحيحة عند التعويض عن x بالأعداد: $\frac{1}{2}$, 4, 0.7؟ وهل هذه العبارة صحيحة لكل الأعداد الحقيقيَّة أيضًا؟ هات مثالًا مضادًّا إن أمكن. **صحيحة لجميع الأعداد الحقيقية.**

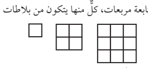
3) افترض أنك عيّنت أربع نقاط: A, B, C, D، ثم رسمت القطع المستقيمة: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$، فهل تُعطي هذه الطريقة شكلًا رباعيًّا دائمًا أم أحيانًا؟ وضح إجابتك بالرسم. **أحيانًا**



4) افترض أنك رسمت دائرة، ووضعت عليها ثلاث نقاط، ثم وصلت بينها، فهل تكون زوايا المثلث الناتج حادة دائمًا أم أحيانًا؟ وضّح إجابتك بالرسم. **أحيانًا**



5) **أنماط:** يوضح الشكل المجاور متتابعة مربعات، كلٌّ منها يتكون من بلاطات متطابقة مربعة الشكل.



a) إذا لم يكن لديك أي بلاطة، فكم بلاطةً ستحتاج لتكوين أول مربع؟ وكم بلاطة تضيف إلى المربع الأول لتكوين المربع الثاني؟ وكم بلاطة تضيف إلى المربع الثاني لتكوين المربع الثالث؟ **1, 3, 5**

b) كوّن تخمينًا حول مجموعة الأعداد التي تحصل عليها من إجابتك للفرع a. **أحصل على الأعداد الفردية جميعها.**

c) كوّن تخمينًا حول مجموع أول n من الأعداد الفردية. **مجموع أول n من الأعداد الفردية يساوي n^2.**

الصف: الأول الثانوي 10 الفصل 1: التبرير والبرهان

كتاب التمارين (6) دون ضمن فوق

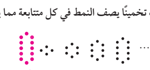
الفصل الأول: التبرير والبرهان

1 - 1 التبرير الاستقرائي والتخمين

الفصل الأول التبرير والبرهان

اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها:

1) ...



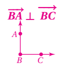
2) $5, -10, 15, -20 ...$ **25**

3) $-2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8} ...$ **$\frac{1}{16}$**

4) $12, 6, 3, 1.5, 0.75 ...$ **0.375**

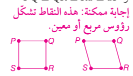
ضع تخمينًا لكل قيمة أو علاقة هندسية مما يأتي، وأعط أمثلة عددية أو ارسم أشكالًا تساعد على الوصول إلى هذا التخمين.

5) $\angle ABC$ قائمة.
إجابة ممكنة: $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$

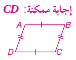


6) النقاط R, S, T على استقامة واحدة، والنقطة S تقع بين R و T.
إجابة ممكنة: $RS + ST = RT$

7) P, Q, R, S ليست على استقامة واحدة، و $\overline{PQ} \cong \overline{QR} \cong \overline{RS} \cong \overline{SP}$
إجابة ممكنة: هذه النقاط تشكّل رؤوس مربع أو معين.



8) $ABCD$ متوازي أضلاع.
إجابة ممكنة: $AB = CD$ و $BC = AD$.



حدد ما إذا كان أيٌّ من التخمينات الآتية صحيحًا أو خاطئًا ، فإذا كان التخمين خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًّا :

9) **المعطيات:** تقع النقاط S, T, U على استقامة واحدة و $ST = TU$
التخمين: النقطة T هي منتصف $\overline{SU}$ **صحيح**

10) **المعطيات:** $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان.
التخمين: $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم. **خاطئ يمكن أن تتجاور زاويتان قياس كلٍّ منهما °60**

11) **المعطيات:** $\overline{GH}$ و $\overline{JK}$ تشكلان زاوية قائمة وتتقاطعان في النقطة P.
التخمين: $\overline{GH} \perp \overline{JK}$ **صحيح**

12) **مرض الحساسيّة:** يبدأ راشد بالعطاس عندما تزهر الأشجار في فصل الربيع، وعندما تمطر السماء، وقد علّل راشد أسباب حساسيته بأنها مرتبطة بفصل الربيع. **يتحسس راشد عندما تمطر السماء، إذن يمكن أن يتحسس في فصل الشتاء وذلك مثال مضاد.**

6

1-2 المنطق
Logic

فيما سبق:
درستُ إيجاد أمثلة مضادة لتخمينات خاطئة.
(الدرس 1-1)

والآن:
- أُعيِّن قيم الصواب لعبارة الوصل وعبارة الفصل.
- أُمثِّل عبارتَي الوصل والفصل باستعمال أشكال ڤن.

المفردات:
العبارة statement
قيمة الصواب truth value
نفي العبارة negation
العبارة المركبة compound statement
عبارة الوصل conjunction
عبارة الفَصل disjunction
جدول الصواب truth table

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عند إجابتك عن «أسئلة من النوع صح أو خطأ» في اختبار، فإنك تستعمل مبدأً أساسيًّا في المنطق.
فمثلًا انظر إلى خريطة المملكة العربية السعودية وأجب عن الخبر التالي بصحيح أو خاطئ: أبها مدينة سعودية.
أنت تعرف أنه يوجد إجابة وحيدة صائبة، إما صحيح أو خاطئ.

تحديد قيم الصواب: **العبارة** هي جملة خبرية لها حالتان فقط إما أن تكون صائبة أو تكون خاطئة، ولا تحتمل أي حالة أخرى. وصواب العبارة (T) أو خطؤها (F) يسمى **قيمة الصواب** لها، ويرمز للعبارة برمز مثل p أو q.

p : المستطيل شكل رباعي — قيمة الصواب: T

نفي العبارة يفيد معنًى مُضادًّا لمعنى العبارة. وقيمة الصواب له هو عكس قيمة الصواب للعبارة الأصلية، فمثلًا: نفي العبارة p أعلاه هو $\sim p$ ، أو " ليس p " ، حيث:

$\sim p$: المستطيل ليس شكلًا رباعيًّا — قيمة الصواب: F

يمكنك ربط عبارتين أو أكثر باستعمال الرابط (و) ، أو الرابط (أو) لتكوين **عبارة مركبة**. والعبارة المركبة التي تحتوي (و) تُسمى **عبارة وصل**. وتكون عبارة الوصل صائبة فقط عندما تكون جميع العبارات المكونة لها صائبة.

p: المستطيل شكل رباعيّ — قيمة الصواب: T

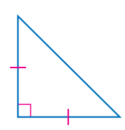
q: المستطيل مضلّع محدّب — قيمة الصواب: T

p و q: المستطيل شكل رباعي والمستطيل مضلع محدّب.

بما أن كلتا العبارتين p و q صائبتان، فإن عبارة الوصل p و q صائبة.
تكتب عبارة الوصل p و q بالرموز على الصورة $p \wedge q$.

مثال 1 قيم الصواب لعبارات الوصل

استعمل العبارات p, q, r والشكل المجاور لكتابة عبارة الوصل في كلٍّ مما يأتي. ثم أوجد قيمة الصواب لها مبررًا إجابتك:



p: الشكل مثلث.
q: في الشكل ضلعان متطابقان.
r: جميع زوايا الشكل حادة.

a) p و r

p و r: الشكل مثلث وجميع زوايا الشكل حادة.
العبارة p صائبة، لكن العبارة r خاطئة، إذن عبارة الوصل p و r خاطئة.

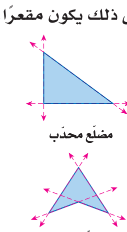
b) $q \wedge \sim r$

$q \wedge \sim r$: في الشكل ضلعان متطابقان، وليس جميع زوايا الشكل حادة.
بما أن كلا العبارتين q و $\sim r$ صائبتان، فإن عبارة الوصل $q \wedge \sim r$ صائبة.

تحقق من فهمك (1A, 1B) انظر ملحق الإجابات

1A) $p \wedge q$ 1B) ليس p و ليس r

إرشادات للدراسة
المضلع المحدَّب أو المقعر:
يكون المضلع محدبًا إذا لم يحوِ امتداد أيٍّ من أضلاعه نقاطًا داخله، وعكس ذلك يكون مقعرًا.



1-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-1
إيجاد أمثلة مضادة للتخمينات الخاطئة.

الدرس 2-1
تعيين قيم الصواب لعبارة الوصل وعبارة الفصل، وتمثيل عبارتَي الوصل والفصل باستعمال أشكال ڤن.

ما بعد الدرس 2-1
استعمال التبرير الاستنتاجي لإثبات صحة عبارة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل:
- اذكر عبارةً صحيحةً حول الدول المجاورة للمملكة العربية السعودية. عبارة ممكنة: تَحُدُّ الجمهوريةُ اليمنية المملكةَ من الجنوب.
- ضع تخمينًا حول ما إذا كان هناك بحيرات أو بحر في مدينة جدة. تخمين ممكن: مدينة جدة تقع على ساحل البحر الأحمر.

مصادر الدرس 2-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (23)	• تنويع التعليم، ص (23, 25)	• تنويع التعليم، ص (25)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (7)	• كتاب التمارين، ص (7)	• كتاب التمارين، ص (7)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

تحديد قيم الصواب

تبين الأمثلة 3-1 كيفية إيجاد قيمة الصواب لعبارات الفَصْل المنطقي والوصل المنطقي.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

1 استعمل العبارات التالية لكتابة عبارة الوصل في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد قيمة الصواب لها، مبررًا إجابتك.

P: القدم تعادل 14 بوصةً.

q: شهر رمضان هو شهر الصيام عند المسلمين.

r: قياس الزاوية القائمة يساوي 90°

a) $p \wedge q$

القدم تعادل 14 بوصةً، وشهر رمضان هو شهر الصيام عند المسلمين. (خاطئة)

بما أن p خاطئة إذن $p \wedge q$ خاطئة.

b) $\sim p \wedge r$

القدم لا تعادل 14 بوصةً، وقياس الزاوية القائمة يساوي 90° (صائبة).

بما أن p خاطئة، إذن $\sim p$ صائبة و r صائبة، وعليه فإن $\sim p \wedge r$ صائبة.

تنبيه!

نفي العبارة

كما أن معكوس العدد الصحيح لا يكون سالبًا دائمًا، فإن نفي العبارة ليس بالضرورة أن يكون خاطئًا، وإنما له عكس قيمة صواب العبارة الأصلية.

تسمى العبارة المركبة التي تحتوي (أو) **عبارة فصل**.

p: درس مالك الهندسة.

q: درس مالك الكيمياء.

p أو q: درس مالك الهندسة أو درس مالك الكيمياء.

تكون عبارة الفَصْل صائبة إذا كانت إحدى العبارات المكونة لها صائبة، وتكون خاطئة إذا كانت جميع العبارات المكونة لها خاطئة. فإذا درس مالك الهندسة أو الكيمياء أو كليهما، فإن عبارة الفصل p أو q صائبة. وإذا لم يدرس مالك أيًّا من الهندسة والكيمياء، فإن عبارة الفصل p أو q خاطئة.

تكتب عبارة الفصل p أو q بالرموز على الصورة $p \vee q$.

مثال 2 قيم الصواب لعبارات الفصل

الربط مع الحياة

فصول السنة بالترتيب:

الشتاء: 21 ديسمبر – 20 مارس من العام التالي.

الربيع: 21 مارس – 20 يونيو

الصيف: 21 يونيو – 20 سبتمبر

الخريف: 21 سبتمبر – 20 ديسمبر

استعمل العبارات p, q, r والصورة المجاورة؛ لكتابة عبارة الفصل في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد قيمة الصواب لها مبررًا إجابتك.

p: يناير من أشهر فصل الربيع.

q: عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط.

r: يناير هو أول أشهر السنة الميلادية.

a) q أو r

q أو r: عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط أو يناير هو أول أشهر السنة الميلادية.

q أو r صائبة لأن العبارة r صائبة. وكون العبارة q خاطئة لا يؤثر.

b) $p \vee q$

$p \vee q$: يناير من أشهر فصل الربيع، أو عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط.

بما أن كلًّا من العبارتين خاطئة، فإن $p \vee q$ خاطئة.

c) $\sim p \vee r$

$\sim p \vee r$: يناير ليس من أشهر فصل الربيع أو يناير هو أول أشهر السنة الميلادية.

$\sim p \vee r$ صائبة؛ لأن $\sim p$ صائبة و r صائبة أيضًا.

تحقق من فهمك

2A) p أو r 2B) $q \vee \sim r$ 2C) $p \vee \sim q$

2A) يناير هو أول شهر في السنة الميلادية أو يناير من أشهر فصل الربيع. بما أن r صائبة فإن p أو r صائبة.

2B) عدد أيام شهر يناير 30 يومًا فقط أو يناير ليس أول شهر في السنة الميلادية. بما أن كلتا العبارتين q، $\sim r$ خاطئة فإن $q \vee \sim r$ خاطئة.

2C) يناير من أشهر فصل الربيع، وعدد أيام شهر يناير ليس 30 يومًا. بما أن $\sim q$ صائبة فإن $p \vee \sim q$ صائبة.

ملخص المفهوم نفي العبارة، عبارة الوصل، عبارة الفَصل

أضف إلى مطويتك

العبارة	التعبير اللفظي	الرموز
نفي العبارة	عبارة تفيد معنًى مضادًا لمعنى العبارة الأصلية، وقيمة الصواب لها عكس قيمة صواب العبارة الأصلية.	$\sim p$، وتُقرأ ليس p
عبارة الوصل	عبارة مركبة ناتجة عن ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (و).	$p \wedge q$، وتُقرأ p و q
عبارة الفَصْل	عبارة مركبة ناتجة عن ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (أو).	$p \vee q$، وتُقرأ p أو q

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اكتب على السبورة عبارتين منطقيتين p و q، واكتب أيضًا الرموز $\vee$، $\wedge$، $\sim$، ثم ضع هذه الرموز بين العبارتين لتكوين عبارة مركبة، ووضح للطلاب كيفية إنشاء جدول الصواب للعبارات الناتجة، ثم بعد ذلك غيّر وضع هذه الرموز لتكوين عبارة منطقية مركبة أخرى، وأنشئ جدول الصواب لها.

إرشادات للدراسة

جداول الصواب: كي يسهل عليك تذكر جداول الصواب لعبارتَي الوصل والفصل، تذكر ما يأتي:

- عبارة الوصل تكون صائبة فقط إذا كانت جميع العبارات المكونة لها صائبة.
- عبارة الفصل تكون خاطئة فقط إذا كانت جميع العبارات المكونة لها خاطئة.

يمكن تنظيم قيم الصواب للعبارات في جداول تسمى **جداول الصواب**. ويمكن استعمال جداول الصواب لتحديد قيم الصواب لنفي العبارة ولعبارتَي الوصل والفصل.

نفي العبارة

p	$\sim p$
T	F
F	T

عبارة الوصل

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

عبارة الفصل

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

وكذلك يمكنك استعمال جداول الصواب أعلاه لإنشاء جداول الصواب للعبارات المركبة الأكثر تعقيدًا.

مثال 3 إنشاء جداول الصواب

أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \vee q$

1 أنشئ عمودًا لكلٍّ من $p, q, \sim p, \sim p \vee q$

2 ضع جميع حالات قيم صواب p, q

3 استعمل قيم صواب العبارة p لتحديد قيم صواب $\sim p$

4 استعمل قيم صواب $\sim p, q$ لتحديد قيم صواب $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

تحقق من فهمك

3) أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \wedge \sim q$. انظر ملحق الإجابات

إرشادات للدراسة

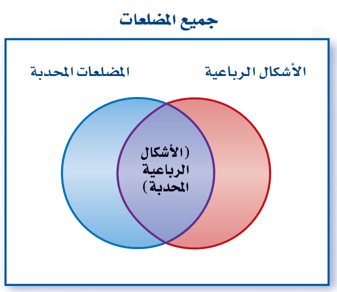
أشكال ڤن

المستطيل الذي يُحيط أشكال ڤن يمثل المجموعة الكلية. شكل ڤن الذي يحوي دائرتين يُقسِّم المجموعة الكلية إلى أربع مناطق على الأكثر. أما الشكل الذي يحوي ثلاث دوائر فيقسِّم المجموعة الكلية إلى 8 مناطق على الأكثر. ويمكن إثبات أن شكل ڤن الذي يحوي من n الدوائر يقسم المجموعة الكلية إلى $2n$ من المناطق على الأكثر.

أشكال ڤن: يمكن تمثيل عبارة الوصل باستعمال أشكال ڤن. عُد إلى عبارة الوصل في بداية الدرس.

p و q: المستطيل شكل رباعي والمستطيل مضلع محدب .

تعلم أن المستطيلات أشكال رباعية، وهي أيضًا مضلعات محدبة، ويبيِّن شكل ڤن أن المستطيلات تقع في منطقة تقاطع مجموعة الأشكال الرباعية ومجموعة المضلعات المحدّبة.



وبمعنى آخر: تقع المستطيلات ضمن مجموعة الأشكال الرباعية، وأيضًا ضمن مجموعة المضلعات المحدبة.

إرشادات للدراسة

تقاطع المجموعات تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بينهما.

مثالان إضافيان

2 استعمل العبارات التالية لكتابة عبارة الفصل في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد قيمة الصواب لها، مبررًا إجابتك.

p: $\overline{AB}$ رمز خاص للقطعة المستقيمة AB.

q: السنتمترات وحدات قياس متريّة.

r: 9 عدد أوليٌّ.

a) p أو q

$\overline{AB}$ رمز خاص للقطعة المستقيمة AB، أو السنتمترات وحدات قياس مترية. (صحيحة)

b) $q \vee r$

السنتمترات وحدات قياس مترية أو العدد 9 عدد أولي. (صحيحة)

c) $\sim p \vee r$

$\overline{AB}$ ليس رمزًا خاصًّا للقطعة المستقيمة AB أو 9 عدد أولي. بما أن كلًّا من $\sim p$ و r خاطئة فإن $\sim p \vee r$ خاطئة أيضًا.

3 أنشئ جدول الصواب لكل عبارة فيما يأتي:

a) $\sim(\sim p \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim(\sim p \wedge q)$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

b) $p \vee (\sim q \wedge r)$

p	q	r	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$p \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F

انتبه!

عبارة الوصل وعبارة الفصل: ذكِّر الطلاب بأن ترتيب العبارات في عبارة الوصل وفي عبارة الفصل غير مهمٍّ.

إرشادات للمعلم الجديد

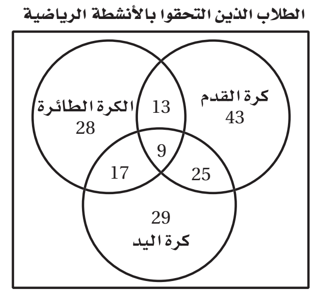
مرونة: أخبر الطلاب بأنه بمقدورهم تبديل أعمدة p, q, r في المثال الإضافي 3b، شريطة أن يُملأ العمودان $\sim q \wedge r$, $p \vee (\sim q \wedge r)$ على النحو الصحيح؛ لأن الناتج النهائي لن يتغير، وستنتهي بخمس إجابات صائبة وثلاث إجابات خاطئة في جميع الحالات، ولكن بترتيب مختلف.

أشكال ڤن

المثال 4 يبيّن كيفية استعمال أشكال ڤن لوضع تخمينات، وعلى الطلاب أن يكونوا قادرين على وضع تخمين، وكتابة عبارة مركبة، وإيجاد قيم الصواب لها.

مثال إضافي

4 **رياضة:** شكل ڤن التالي يبيّن عدد الطلاب الذين التحقوا بالأنشطة الرياضية.



a) ما عدد الطلاب المشاركين في الأنشطة الثلاثة؟ 9

b) ما عدد الطلاب المشاركين في نشاط كرة القدم أو نشاط كرة اليد؟ 136

c) ما عدد الطلاب المشاركين في نشاطَي الكرة الطائرة وكرة اليد، وغير مشاركين في كرة القدم؟ 17

إرشادات للدراسة

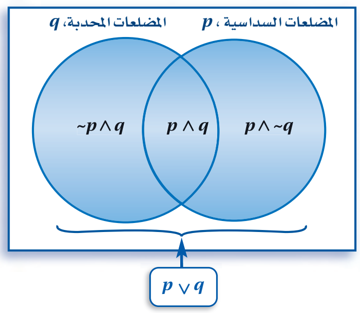
اتحاد المجموعات
اتحاد مجموعتين هو مجموعة عناصرهما كلها.

يمكن أيضًا تمثيل عبارة الفَصل باستعمال أشكال ڤن. إليك العبارات الآتية:

p: الشكل سداسي.

q: الشكل مضلّع محدّب.

p أو q: الشكل سداسي أو مضلّع محدّب.



في شكل ڤن المجاور تمثل عبارة الفَصل باتحاد المجموعتين، ويحوي الاتحاد جميع المضلعات التي هي إما سداسية أو محدبة أو كلاهما.

تتضمن عبارة الفَصل المناطق الثلاث الآتية:

$p \wedge \sim q$ المضلعات السداسية غير المحدّبة.

$\sim p \wedge q$ المضلعات المحدبة غير السداسية.

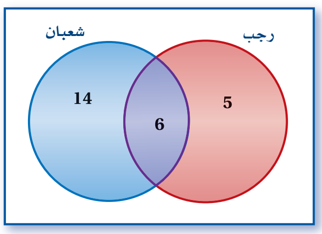
$p \wedge q$ المضلعات السداسية المحدبة.

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال أشكال ڤن

الربط مع الحياة

الورق الذي تستعمله الولايات المتحدة في يوم واحد يمكن أن يحيط الكرة الأرضية 20 مرة، ولك أن تتخيل عدد الأشجار التي تقطع لصنع هذه الكمية من الورق.

بيئة: يُظهر شكل ڤن أدناه عدد الأشخاص الذين شاركوا في حملة بيئية للتوعية بأهمية الاقتصاد في استعمال الورق أقيمت خلال شهرَي رجب وشعبان.



a) كم شخصًا شارك في الحملة لشهر رجب أو شعبان؟

اتحاد المجموعتين يمثل الأشخاص الذين شاركوا في الحملة خلال شهري رجب أو شعبان.

فيكون $14 + 6 + 5$ أو 25 شخصًا شاركوا في الحملة خلال الشهرين.

b) كم شخصًا شارك في الحملة خلال شهرَي رجب وشعبان؟

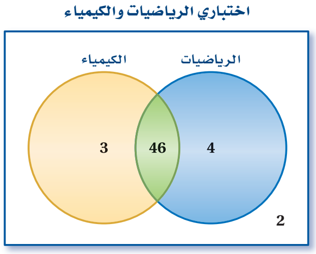
تقاطع المجموعتين يمثل عدد الأشخاص الذين شاركوا في الحملة خلال كلا الشهرين، لذلك هناك 6 أشخاص فقط شاركوا في الحملة خلال كلا الشهرين.

c) ماذا يمثل العدد 14 في الشكل؟

عدد الأشخاص الذين شاركوا في الحملة خلال شهر شعبان، ولم يشاركوا خلال شهر رجب.

تحقق من فهمك

4) **اختبارات:** يبين شكل ڤن المجاور عدد طلاب الصف الأول الثانوي الذين نجحوا والذين لم ينجحوا في اختباري الرياضيات أو الكيمياء.



A) ما عدد الطلاب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات، ولم ينجحوا في اختبار الكيمياء؟ 4 طلاب

B) ما عدد الطلاب الذين نجحوا في اختبار الرياضيات واختبار الكيمياء؟ 46 طالبًا

C) ما عدد الطلاب الذين لم ينجحوا في أيٍّ من الاختبارين؟ طالبان

D) ما عدد طلاب الصف الأول الثانوي؟ 55 طالبًا

المحتوى الرياضي

جداول الصواب: أخبر الطلاب أن جداول الصواب يجب أن تُظهر كل التراتيب الممكنة لقيم الصواب للعبارات كلّها لتشمل جميع النتائج الممكنة. ففي البداية نحدد عدد الأسطر التي نحتاجها، فمثلاً؛ إذا كانت العبارات p, q, r فإن عدد الأسطر $2^3 = 8$، وترتيب الجدول بأن نضع كلمة صواب في نصف أسطر عمود العبارة p، وكلمة خطأ في نصفها الآخر، وفي عمود العبارة q نبادل بين مجموعة من كلمتَي صواب مع مجموعة من كلمتَي خطأ، وعمود العبارة r نبادل بين كلمة الصواب والخطأ سطرًا بسطر حتى نهاية الجدول، كما هو مبين في الجدول المجاور.

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

بيّن للطلاب أنهم عندما يُتقنون التعليمات الأساسية سيصبحون قادرين على إكمال الجدول.

تأكـد

المثالان 1, 2 استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها مفسِّرًا تبريرك:

p: في الأسبوع الواحد سبعة أيام.

q: في اليوم الواحد 20 ساعة.

r: في الساعة الواحدة 60 دقيقة. 1–6) انظر هامش

1) p و r
2) $p \wedge q$
3) $q \vee r$
4) $\sim p$ أو q
5) $p \vee r$
6) $\sim p \wedge \sim r$

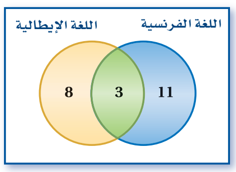
المثال 3 7) أكمل جدول الصواب المجاور.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

8, 9) انظر الهامش. أنشئ جدول صواب لكلٍّ من العبارتين المركبتين الآتيتين:

8) $p \wedge q$
9) $\sim p \vee \sim q$

المثال 4 10) **لغات:** استعمل شكل ڤن المجاور، والذي يمثل عدد الطلاب الذين يدرسون اللغتين الفرنسية والإيطالية في معهد اللغات.



a) ما عدد الطلاب الذين يدرسون الإيطالية فقط؟ 8

b) ما عدد الطلاب الذين يدرسون الإيطالية والفرنسية معًا؟ 3

c) ماذا يمثل العدد 11 في الشكل؟

عدد الطلاب الذين يدرسون الفرنسية ولا يدرسون الإيطالية.

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 استعمل العبارات p, q, r, s والخريطة المجاورة؛ لكتابة كل عبارة وصلٍ أو فصلٍ أدناه. ثم أوجد قيمة الصواب لها مفسِّرًا تبريرك:

p: الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية. 11–16) انظر ملحق الإجابات

q: تقع مكة المكرمة على الخليج العربي.

r: توجد حدود مشتركة للمملكة العربية السعودية مع العراق.

s: المملكة العربية السعودية تقع غربي البحر الأحمر.

11) p و r
12) $p \wedge q$
13) $\sim r$ أو s
14) $r \vee q$
15) $\sim p$ و $\sim r$
16) $\sim p \vee \sim s$

المثال 3 أكمل جدول الصواب الآتي:

17)

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

إجابات:

1) في الأسبوع الواحد سبعة أيام، وفي الساعة الواحدة 60 دقيقة. بما أن كلًّا من p و r صحيحة؛ إذن كلٌّ من p و r صحيحة.

2) في الأسبوع الواحد سبعة أيام وفي اليوم الواحد 20 ساعة. $p \wedge q$ خاطئة؛ لأن p صحيحة؛ و q خاطئة.

3) في اليوم الواحد 20 ساعة، أو في الساعة الواحدة 60 دقيقة. $q \vee r$ صحيحة؛ لأن q خاطئة، و r صحيحة.

4) ليس في الأسبوع الواحد سبعة أيام، أو في اليوم الواحد 20 ساعة. $\sim p$ أو q خاطئة؛ لأن كلًّا من $\sim p$ و q خاطئة.

5) في الأسبوع الواحد سبعة أيام، أو في الساعة الواحدة 60 دقيقة. $p \vee r$ صحيحة؛ لأن كلًّا من p و r صحيحة.

6) ليس في الأسبوع الواحد سبعة أيام، وليس في الساعة الواحدة 60 دقيقة. $\sim p \wedge \sim r$ خاطئة؛ لأن $\sim p$ خاطئة، و $\sim r$ خاطئة.

8)

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

9)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في فهم طريقة تمثيل جداول الصواب لعبارات مختلفة .

فاطلب إليهم إنشاء جداول صواب تمثل عبارات مختلفة لها قيم الصواب نفسها. وعندئذ سيلاحظ الطلاب أن تبديل مواقع أي أعمدة في الجدول لن يؤثر في الناتج النهائي.

أنشئ جدول الصواب لكلٍّ من العبارات المركبة الآتية: 18–20) انظر ملحق الإجابات

18) $\sim(\sim p)$ 19) $\sim(\sim r \wedge q)$ 20) $\sim p \wedge r$

21) **مكافآت:** قرر مدرس الرياضيات مكافأة الطلاب المتفوقين باصطحابهم في رحلة مدرسية، وقرر أن تكون القاعدة أنه "إذا تفوّق الطالب في الاختبار الأول أو الاختبار الثاني فإنه سيذهب في الرحلة".

الطلاب المسموح لهم بالذهاب في الرحلة		يسمح له بالذهاب
الاختبار الأول	الاختبار الثاني	
تفوق	تفوق	T
تفوق	لم يتفوق	T
لم يتفوق	تفوق	T
لم يتفوق	لم يتفوق	F

a) أكمل جدول الصواب المجاور.

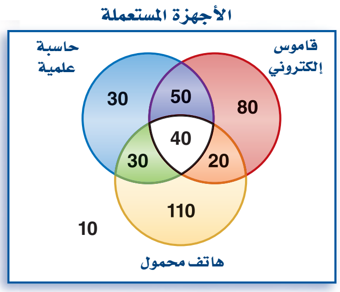
b) إذا تفوق الطالب في الاختبارين، فهل سيذهب في هذه الرحلة؟ نعم

c) إذا تفوق الطالب في الاختبار الأول فقط، فهل سيذهب في هذه الرحلة؟ نعم

المثال 4

22) **إلكترونيات:** سُئل 370 شخصًا من الفئة العمرية بين 13–19 سنة عن الجهاز الذي يستعملونه من بين الهاتف المحمول والقاموس الإلكتروني والحاسبة العلمية، ومُثِّلت نتائج الاستطلاع بشكل فن المجاور.

الأجهزة المستعملة



a) ما عدد الذين يستعملون حاسبة علمية وقاموسًا إلكترونيًّا فقط؟ 50

b) ما عدد الذين يستعملون الأجهزة الثلاثة؟ 40

c) ما عدد الذين يستعملون هاتفًا محمولًا فقط؟ 110

d) ما عدد الذين يستعملون قاموسًا إلكترونيًّا وهاتفًا محمولًا فقط؟ 20

e) ماذا يمثل العدد 10 في الشكل؟ عدد الأشخاص الذين لا يستعملون أيًّا من الأجهزة الثلاثة.

أنشئ جدول الصواب لكلٍّ من العبارات المركبة الآتية. ثم عيِّن قيمة الصواب لكلٍّ منها، إذا علمت أن العبارات المُعطاة بجانب كلٍّ منها صائبة: 23–28) انظر ملحق الإجابات

23) $p \wedge (q \wedge r) ; p, q$ 24) $p \wedge (\sim q \vee r) ; p, r$ 25) $(\sim p \vee q) \wedge r ; q, r$

26) $p \vee (\sim q \wedge \sim r) ; p, q, r$ 27) $\sim p \wedge (\sim q \wedge \sim r) ; p, q, r$ 28) $(\sim p \vee q) \vee \sim r ; p, q$

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: لنفي العبارة التي تحوي كلمة "جميع" أو "كل"، يمكنك استعمال جملة "يوجد واحد على الأقل" أو "هناك واحد على الأقل". ولنفي العبارة التي تحوي كلمة "يوجد"، يمكنك استعمال كلمة "جميع" أو "كل".

p: جميع المضلعات محدبة. $\sim p$: يوجد مضلع واحد على الأقل ليس محدبًا.

q: توجد مسألة ليس لها حل. $\sim q$: جميع المسائل لها حل.

انفِ كلًّا من العبارات الآتية:

29) جميع المربعات مستطيلات.

30) على الأقل يوجد طالب واحد يدرس اللغة الفرنسية.

31) لكل عدد حقيقي جذر تربيعي حقيقي.

32) توجد قطعة مستقيمة ليس لها نقطة منتصف. كل قطعة مستقيمة لها نقطة منتصف.

29) يوجد مربع واحد على الأقل ليس مستطيلًا.

30) جميع الطلاب لا يدرسون اللغة الفرنسية.

31) يوجد على الأقل عدد حقيقي واحد ليس له جذر تربيعي حقيقي.

3 التدريب

التقويم التكويني

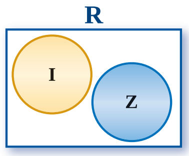
استعمل الأسئلة 1–10؛ لتتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنويع الواجبات المنزلية

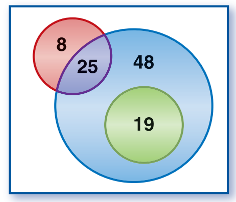
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	11-20 ، 29 ، 34 - 50
ضمن المتوسط	11–20 ، 21 ، 22 ، 24 - 28 زوجي، 33 - 50
فوق المتوسط	20-47 ، (اختياري 48-51)

33) غير صحيح أبدًا. الأعداد الصحيحة هي أعداد نسبية، وليست غير نسبية.

33) **تبرير:** الأعداد غير النسبية (I)، والأعداد الصائبة (Z) تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية (R). معتمدًا على شكل ڤن المجاور، هل صحيح أحيانًا أم دائمًا، أم غير صحيح أبدًا، أن الأعداد الصائبة هي أعداد غير نسبية؟ فسّر تبريرك.



34) **اكتب:** صِفْ موقفًا يمكن تمثيله بشكل ڤن الآتي. انظر الهامش.

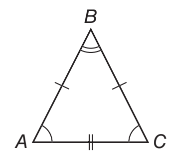


35) إجابة ممكنة: للمثلث ثلاثة أضلاع، وللمربع أربعة أضلاع. كلتا العبارتين صائبة، ولذلك تكون العبارة المركبة صائبة.

35) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة مركبة صائبة تحوي « و » فقط.

تدريب على اختبار

36) أيُّ العبارات الآتية لها نفس قيمة صواب العبارة $AB = BC$؟ **A**



A $m\angle A = m\angle C$ C $AC = BC$

B $m\angle A = m\angle B$ D $AB = AC$

37) خمِّن الحد التالي في النمط ... $3 ,\frac{7}{3} ,\frac{5}{3} ,1 ,\frac{1}{3}$. **C**

A $\frac{8}{3}$ C $\frac{11}{3}$

B 4 D $\frac{9}{3}$

مراجعة تراكمية

38) **طعام:** في كل يوم ثلاثاء من الأسابيع الأربعة الماضية، قدَّم مطعم سلطة فواكه هدية بعد كل وجبة. افترض جميل أنه سيتم تقديم سلطة فواكه يوم الثلاثاء القادم. ما نوع التبرير الذي استعمله جميل؟ فسر إجابتك. (الدرس 1-1) انظر الهامش

خمِّن الحد التالي في كلٍّ من المتتابعات الآتية . (مهارة سابقة)

39) $3, 5, 7, 9$ **11**   40) $1, 3, 9, 27$ **81**   41) $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ **$\frac{3}{8}$**

جبر: حل كلًّا من المعادلات الآتية: (مهارة سابقة)

42) $\frac{y}{2} - 7 = 5$ **24**   43) $3x + 9 = 6$ **-1**   44) $4(m - 5) = 12$ **8**

45) $6(w + 7) = 0$ **-7**   46) $2x - 7 = 11$ **9**   47) $\frac{y}{5} + 4 = 9$ **25**

استعد للدرس اللاحق

جبر: أوجد قيمة كلٍّ من العبارات الجبرية الآتية للقيم المعطاة.

48) $2y + 3x$ إذا كانت $x = -1, y = 3$ **3**

49) $4d - c$ إذا كانت $c = 2 , d = 4$ **14**

50) $m^2 + 7n$ إذا كانت $n = -2, m = 4$ **2**

51) $ab - 2a$ إذا كانت $a = -2 , b = -3$ **10**

4 التقويم

تعلُّم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يبيِّنوا كيف ساعدهم موضوع الدرس السابق حول التبرير الاستقرائي على تعلم المنطق وجداول الصواب في هذا الدرس.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 2-1 ,1-1 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (11)

إجابات:

34) إجابة ممكنة: أُجري استطلاع شمل 100 شخص؛ لمعرفة ما إذا كانوا يفضلون المثلجات بنكهة الفانيليا أو الفراولة أو الشوكولاتة، فوُجد أن 8 أشخاص يفضلون نكهة الفراولة فقط، و25 شخصًا يفضلون نكهتَي الفانيليا والفراولة، و48 شخصًا يفضلون نكهة الفانيليا فقط، و19 يفضلون نكهة الشوكولاتة والفانيليا.

38) إجابة ممكنة: لاحظ جميل تقديم سلطة الفواكه يوم الثلاثاء، وافترض أن هذا النمط سوف يستمر؛ لذا استعمل التبرير الاستقرائي .

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسُّع: استعمل العبارتين p, q لكتابة عبارة مركبة، وبيّن ما إذا كانت "عبارة وصل" أم "عبارة فَصْل" ، ثم أوجد قيمة الصواب لها.

p: $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع.

q: $\triangle ABC$ قائم الزاوية.

p أو q: $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع أو $\triangle ABC$ قائم الزاوية. p أو q عبارة فصل. بما أنه لا توجد صورة معطاة للمثلث ABC، إذن لا يمكن تحديد قيمة الصواب للعبارة المركبة.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 1

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

الاسم ________ التاريخ ________

1-2 تدريبات إعادة التعليم
المنطق

تحديد قيم الصواب:
العبارة هي جملة خبرية تحتمل الصواب أو الخطأ ولا تحتمل غيرهما. ويرمز إلى **قيمة الصواب** بـ (T) إذا كانت العبارة صحيحة، وبالرمز (F) إذا كانت خاطئة، ويمكن أن نرمز إلى أي عبارة بأحد الحروف وليكن p . فمثلًا يمكن أن نرمز إلى العبارة "الرياض مدينة سعودية" بالرمز p، وتكون هذه العبارة صائبة T.
ويمكننا ربط عبارات عدة بعضها ببعض لتكوين **عبارة مركبة**.

العبارة	النفي	الوصل	الفصل
معناها	نفي العبارة p هو ليس p.	هي الربط بين العبارة p والعبارة q بأداة الربط "و".	هي الربط بين العبارة p والعبارة q بأداة الربط "أو".
رمزها	$\sim$	$\wedge$	$\vee$
قيم صوابها	قيم الصواب للعبارتين p و $\sim p$ متعاكسة.	تكون عبارة الوصل $p \wedge q$ صائبةً فقط عندما تكون كلٌّ من p و q صائبة.	تكون عبارة الفَصْل $p \vee q$ صائبةً، إذا كانت إحدى العبارتين صائبة.

مثال 1 استعمل العبارتين الآتيتين لكتابة عبارتَي الوصل الآتيتين، ثم أوجد قيمة صوابها مبررًا إجابتك:
p: الفيل من الثدييات.
q: للمربع أربع زوايا قوائم.

a) $p \wedge q$.
اربط العبارتين بأداة الربط "و":
الفيل من الثدييات، وللمربع أربع زوايا قوائم.
لمّا كانت العبارتان p, q صائبتين، فإن هذه العبارة المركبة صائبة.

b) $\sim p \wedge q$
$\sim p$ هي العبارة "الفيل ليس من الثدييات". اربط العبارتين $\sim p$ و q بالأداة "و" .
الفيل ليس من الثدييات وللمربع أربع زوايا قوائم.
الجزء الأول من العبارة المركبة $\sim p$ خطأ، إذن العبارة المركبة خاطئة.

مثال 2 استعمل العبارتين الآتيتين لكتابة عبارتَي الفصل الآتيتين، ثم أوجد قيمة صوابها مبرِّرًا إجابتك:
p: قطر الدائرة يساوي مثلَي نصف قطرها.
q: للمستطيل أربعة أضلاع متساوية الطول.

a) $p \vee q$
اربط العبارتين بأداة الربط "أو".
قطر الدائرة يساوي مثلَي نصف قطرها، أو للمستطيل أربعة أضلاع متساوية الطول. بما أن العبارة الأولى صائبة، إذن العبارة المركبة صائبة.

b) $\sim p \vee q$
اربط العبارتين بأداة الربط "أو" .
قطر الدائرة لا يساوي مثلَي نصف قطرها، أو للمستطيل أربعة أضلاع متساوية الطول. بما أن العبارتين خاطئتان، إذن العبارة المركبة خاطئة.

تمارين
استعمل العبارات الآتية لكتابة كل " عبارة وصل" أو " عبارة فصل" ممّا يأتي، ثم أوجد قيمة الصواب لها مبررًا إجابتك:
p: $10 + 8 = 18$ q: عدد أيام شهر سبتمبر 30 يومًا. r: للمستطيل أربعة أضلاع.

1) $p \wedge q$ **$10 + 8 = 18$ وعدد أيام شهر سبتمبر 30 يومًا؛ صائبة؛ لأن العبارتين p, q صائبتان.**
2) $p \vee r$ **$10 + 8 = 18$ أو للمستطيل أربعة أضلاع؛ صائبة؛ لأن العبارتين p, r صائبتان .**
3) $q \vee r$ **عدد أيام شهر سبتمبر 30 يومًا أو للمستطيل أربعة أضلاع؛ صائبة؛ لأن العبارتين q, r صائبتان .**
4) $q \wedge \sim r$ **عدد أيام شهر سبتمبر 30 يومًا وليس للمستطيل أربعة أضلاع؛ خاطئة؛ لأن $\sim r$ خاطئة.**

الصف: الأول الثانوي 11 **الفصل 1:** التبرير والبرهان

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (12) دون

الاسم ________ التاريخ ________

1-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)
المنطق

جداول الصواب: إحدى طرق تنظيم قيم الصواب للعبارات هي إنشاء **جدول الصواب**. يظهر جهة اليسار جداول الصواب لكلٍّ من عبارات النفي والوصل والفَصْل.

نفي العبارة

p	$\sim p$
T	F
F	T

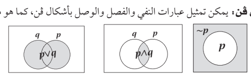
عبارة الفصل

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

عبارة الوصل

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

التمثيل بأشكال ڤن: يمكن تمثيل عبارات النفي والفصل والوصل بأشكال ڤن، كما هو مبين في الأشكال أدناه.

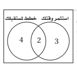


مثال 1 أنشئ جدول الصواب للعبارة المركبة $r \vee q$

استعمل جدول صواب عبارة الفصل.

q	r	$r \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال 2 توعية: شكل ڤن المجاور يبيِّن عدد الطلاب الذين نفذوا التدريبين «استثمر وقتك» وَ«خطط لمستقبلك» لزملائهم.



a) ما عدد الطلاب الذين شاركوا في التدريب على «استثمر وقتك» ولم يشاركوا في البرنامج التدريبي «خطط لمستقبلك»؟ **3**

b) ما عدد الطلاب الذين شاركوا في التدريبين معًا؟ **2**

تمارين
أنشئ جدول صواب لكلٍّ من العبارات المركبة الآتية:

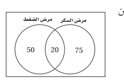
1) $q \wedge \sim r$

q	r	$\sim r$	$q \wedge \sim r$
T	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**

2) $\sim(p \wedge \sim r)$

p	r	$\sim r$	$p \wedge \sim r$	$\sim(p \wedge \sim r)$
T	**T**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**T**

3) الشكل المجاور يبيِّن عدد الأشخاص الذين حضروا الندوتين التوعويَّتين «مرض السكر» وَ «مرض الضغط».



a) ما عدد الأشخاص الذين حضروا الندوتين؟ **20**
b) ما عدد الأشخاص الذين حضروا ندوة «مرض الضغط»؟ **70**
c) ما عدد الأشخاص الذين حضروا ندوة «مرض الضغط» ولم يحضروا ندوة «مرض السكر»؟ **50**

الصف: الأول الثانوي 12 **الفصل 1:** التبرير والبرهان

تدريبات المهارات (13) دون ضمن

الاسم ________ التاريخ ________

1-2 تدريبات المهارات
المنطق

استعمل العبارات الآتية لكتابة كل عبارة وصل أو فصل ممّا يأتي، ثم أوجد قيمة الصواب لها، مبرِّرًا إجابتك:

p: $-3 - 2 = -5$

q: الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

r: $2 + 8 > 10$

s: مجموع قياسَي الزاويتين المتتامتين يساوي $90°$.

1) p و q **$-3 - 2 = -5$ والزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة. صائبة**

2) $p \wedge r$ **$-3 - 2 = -5$ و $2 + 8 > 10$ ؛ خاطئة.**

3) p أو s **$-3 - 2 = -5$ أو مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين يساوي $90°$. صائبة**

4) $r \vee s$ **$2 + 8 > 10$ أو مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين يساوي $90°$؛ صائبة.**

5) $p \wedge \sim q$ **$-3 - 2 = -5$ والزوايا المتقابلة بالرأس ليست متطابقة؛ خاطئة.**

6) $q \vee \sim r$ **الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة أو $2 + 8 \leq 10$؛ صائبة**

أكمل كلًّا من جدولَي الصواب الآتيين:

7)

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim(\sim p \wedge q)$
T	T	**F**	**F**	**T**
T	F	**F**	**F**	**T**
F	T	**T**	**T**	**F**
F	F	**T**	**F**	**T**

8)

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	**F**	**T**
T	F	**T**	**T**
F	T	**F**	**F**
F	F	**T**	**T**

أنشئ جدول صوابٍ لكلٍّ من العبارتين المركبتين الآتيتين:

9) $\sim q \wedge r$

q	r	$\sim q$	$\sim q \wedge r$
T	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**T**	**F**

10) $\sim p \vee \sim r$

p	r	$\sim p$	$\sim r$	$\sim p \vee \sim r$
T	**T**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**T**

الصف: الأول الثانوي 13 **الفصل 1:** التبرير والبرهان

تدريبات حل المسألة (14) دون ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

1-2 تدريبات حل المسألة
المنطق

1) **كرة قدم:** سأل سامي صديقه يوسف إن كان فريق كرة القدم الذي يشارك فيه قد فاز في المباراة ليلة أمس، وهل سجَّل هدفًا، فأجاب يوسف "نعم". ثم سأل سامي لاعبًا آخر في الفريق يُدعى سالمًا، هل سجل هو أو يوسف هدفًا في المباراة؟ فأجاب سالم بـِ"نعم" أيضًا. ما الذي يمكنك استنتاجه حول ما إذا كان سالِم قد سجَّل هدفًا أم لا؟
لا شيء

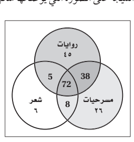
2) **شوكولاتة:** لدى سارة صندوق يحوي نوعين مختلفين من قطع الشوكولاتة الصغيرة هما الأبيض والأسود، وقد تناولت قطعة شوكولاتة من الصندوق، فهل العبارة ($\sim p \wedge \sim q$) صائبة بناءً على المعطيات أدناه:
p: الشوكولاتة من النوع الأسود.
q: الشوكولاتة من النوع الأبيض.
لا

3) **ألعاب فيديو:** يمكن أن يلعب عامر لعبة الفيديو إذا رتّب غرفته أو نقل القُمامة إلى الخارج، ولكن إذا لم يحل واجبه المنزلي فلن يُسمح له بممارسة ألعاب الفيديو مطلقًا. أكمل جدول الصواب أدناه مستعملًا العبارات الآتية:
p: رتّب عامر غرفته.
q: نقل عامر القمامة إلى الخارج.
r: حلّ عامر واجبه المنزلي.
s: يمكن أن يمارس عامر ألعاب الفيديو.

p	q	r	$p \vee q$	s
T	T	T	T	***T***
T	T	F	T	***F***
T	F	T	T	***T***
T	F	F	T	***F***
F	T	T	T	***T***
F	T	F	T	***F***
F	F	T	F	***F***
F	F	F	F	***F***

4) استعمل الجدول في المسألة 3 للإجابة عن الأسئلة الآتية:
a) إذا رتَّب عامر غرفته، ونقل القمامة، ولم يحل واجبه، فهل يمكنه ممارسة ألعاب الفيديو؟ **لا**
b) إذا لم يرتِّب عامر غرفته، ونقل القمامة، وحل واجبه، فهل يمكنه ممارسة ألعاب الفيديو؟ **نعم**
c) إذا لم يرتِّب عامر غرفته، ولم ينقل القمامة، وحلّ واجبه، فهل يمكنه ممارسة ألعاب الفيديو؟ **لا**

5) **مطالعة:** سُئل 200 شخص عن نوع الكتب الأدبية التي يحبون قراءَتها من بين الروايات والشعر والمسرحيات، فكانت النتيجة على الصورة التي يوضحها شكل ڤن الآتي.



a) ما عدد الأشخاص الذين يحِبُّون قراءة الأنواع الثلاثة من الأدب؟ **72**
b) ما عدد الأشخاص الذين يحِبُّون قراءة الشعر؟ **91**
c) ما النسبة المئوية للأشخاص الذين يحِبُّون قراءة الشعر والروايات معًا بالنسبة لأولئك الذين يحبون قراءة المسرحيات؟ **50%**

الصف: الأول الثانوي 14 **الفصل 1:** التبرير والبرهان

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 1

دون دون المتوسط · ضمن ضمن المتوسط · فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (15) ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

1-2 التدريبات الإثرائية

السودوكو

السودوكو "تعني: الرقم الوحيد"، وهي أُحجية، رياضية، يتطلب حلُّها استعمال المنطق. وتتألف عادةً من شبكةٍ مربعةٍ مكونةٍ من 9 شبكات جزئية؛ قُسّمت كل واحدةٍ منها إلى تسعة مربعات صغيرة. تبدأ الأحجية بوضع بضعة أعداد، ويُطلب إلى اللاعب ملء المربعات المتبقية باستعمال القواعد الآتية:

القاعدة الأولى: يجب أن يحوي كل صف وكل عمود الأعداد من 1 إلى 9 من دون تكرار أيٍّ منها.

القاعدة الثانية: يجب أن تحوي كل شبكة جزئية الأعداد من 1 إلى 9، دون تكرار أيٍّ منها.

5	**3**	**9**	**6**	1	**8**	2	**7**	**4**
1	7	**4**	3	**2**	5	9	**6**	8
2	**6**	8	4	7	9	**5**	3	**1**
9	**2**	**5**	1	**3**	6	**4**	**8**	7
4	8	6	9	**5**	7	1	**2**	**3**
7	**1**	3	**8**	**4**	**2**	**6**	5	9
6	**9**	2	7	**8**	**4**	3	1	**5**
3	5	**7**	**2**	**9**	1	**8**	**4**	6
8	**4**	**1**	5	**6**	3	7	**9**	**2**

تمارين

1) ما البداية الجيدة لحل الأحجية؟ ولماذا؟

إجابة ممكنة: يمكن أن تقوم إحدى الاستراتيجيات على النظر إلى الصفوف: 3, 2, 1 أو 6, 5, 4 ، أو 9, 8, 7 ؛ لمعرفة ما إذا ظهر أحد الأعداد أكثر من مرة، ويجب أن يظهر هذا العدد في الصف المتبقّي، وقد يكون له مكان منطقي واحد فقط.

2) وضّح كيف يمكنك استعمال القاعدة الثانية، من أجل استعمال الأعداد كلّها لحل الأحجية الكبيرة.
إجابة ممكنة: يمكن أن تقوم إحدى الاستراتيجيات على النظر إلى الشبكة الصغيرة التي تحوي أرقامًا أكثر، ومحاولة إدراج الأرقام التي لم تظهر في الشبكة الصغيرة، مراعين أنّ هذا الرقم لم يظهر في السطر أو العمود.

3) أكمل هذه الأُحْجية.

انظر إلى الإجابة في الجدول أعلاه.

الصف: الأول الثانوي 15 الفصل 1: التبرير والبرهان

كتاب التمارين (7) دون ضمن فوق

2 - 1 المنطق

الفصل الأول التبرير والبرهان

استعمل العبارات p , q , r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها، مبررًا إجابتك.

p: في الدقيقة الواحدة 60 ثانية.

q: الزاويتان المتكاملتان المتطابقتان قياس كلٍّ منهما °90

r: $-12 + 11 < -1$

1) $p \wedge q$ في الدقيقة الواحدة 60 ثانية، والزاويتان المتكاملتان المتطابقتان قياس كلٍّ منهما °90؛ بما أن كلا العبارتين صحيحة، فإن عبارة الوصل صحيحة.

2) $q \vee r$ الزاويتان المتكاملتان المتطابقتان قياس كلٍّ منهما °90، أو $-12 + 11 < -1$ ؛ بما أن العبارة الأولى صحيحة، إذن عبارة الفصل صحيحة.

3) $\sim p \vee q$ ليس في الدقيقة الواحدة 60 ثانية أو الزاويتان المتكاملتان المتطابقتان قياس كلٍّ منهما °90؛ بما أن العبارة الثانية صحيحة، إذن عبارة الفصل صحيحة.

4) $\sim p \wedge \sim r$ ليس في الدقيقة الواحدة 60 ثانية و $-12 + 11 \geq -1$ ؛ بما أن العبارة الأولى خاطئة، إذن عبارة الوصل خاطئة.

أكمل جدولَي الصواب الآتيين:

5)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F

6)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$q \wedge (\sim p \vee q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

أنشئ جدول صواب لكلٍّ من العبارتين المركبتين الآتيتين :

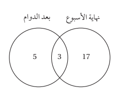
7) $q \vee (p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$q \vee (p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	F

8) $\sim q \wedge (\sim p \vee q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$\sim q \wedge (\sim p \vee q)$
T	T	F	F	T	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T

يبيّن شكل ڤن المجاور عدد الموظفين الذين يعملون في إجازة نهاية الأسبوع أو بعد نهاية الدوام الرسمي في إحدى الشركات.



9) ما عدد الموظفين الذين يعملون بعد الدوام وفي نهاية الأسبوع؟ **3**

10) ما عدد الموظفين الذين يعملون بعد الدوام أو في نهاية الأسبوع؟ **25**

7

1-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-3

استعمال المنطق وأشكال فن لتحديد قيم الصواب لعبارات النفي، والوصل، والفصل. تقديم أمثلة مضادة لتفنيد العبارة الخطأ.

الدرس 1-3

تحليل العبارة الشرطية (إذا... فإن...).

كتابة العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لعبارة (إذا... فإن...).

ما بعد الدرس 1-3

استعمال التبرير الاستنتاجي لإثبات صحة عبارة ما.

1-3 العبارات الشرطية
Conditional Statements

فيما سبق:

درستُ استعمال المنطق وأشكال فن لتحديد قيم الصواب لعبارات النفي والوصل والفصل.

(الدرس 1-2)

والآن:

- أحلل العبارة الشرطية (إذا... فإن...).
- أكتب العكس، والمعكوس، والمعاكس الإيجابي، لعبارات (إذا... فإن...).

المفردات:

العبارة الشرطية
conditional statement

الفرض
hypothesis

النتيجة
conclusion

العبارات الشرطية المرتبطة
related conditionals

العكس
converse

المعكوس
inverse

المعاكس الإيجابي
contrapositive

التكافؤ المنطقي
logically equivalent

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عند إجراء مكالمة هاتفية مع بعض المؤسسات، يحيلك جهاز الرد الآلي إلى قائمة من البدائل تختار منها القسم الذي تريد، ويُسمعك إرشادات بصيغة عبارات شرطية.

عبارة إذا... فإن... : **العبارة الشرطية** هي عبارة يمكن كتابتها على صورة (إذا ... فإن...). والإرشاد المبين في الصورة أعلاه مثال على العبارة الشرطية.

مفهوم أساسي — **العبارة الشرطية** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	الرموز	مثال
العبارة الشرطية (إذا ... فإن...)	$p \to q$ وتُقرأ إذا كان p فإن q، أو p تؤدي إلى q	إذا كان الشكل مربعًا فإنه مستطيل.
في العبارة الشرطية تُسمى الجملة التي تلي كلمة (إذا) مباشرةً **الفرض**.	p	الشكل مربع.
في العبارة الشرطية تُسمى الجملة التي تلي كلمة (فإن) مباشرة **النتيجة** .	q	الشكل مستطيل.

عندما تكتب العبارة الشرطية على صورة (إذا ... فإن ...)، يمكنك تحديد الفَرض والنتيجة فيها بسهولة.

مثال 1 **تحديد الفَرض والنتيجة**

حدِّد الفَرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية:

a) إذا كان الطقس ماطرًا ، فسوف أستعمل المظلة .

الفَرض: الطقس ماطر.

النتيجة: سوف أستعمل المظلة.

b) يقبل العدد القسمة على 10 إذا كان آحاده صفرًا.

الفَرض: آحاد العدد صفر.

النتيجة: يقبل العدد القسمة على 10

تحقق من فهمك (1A, 1B) انظر ملحق إجابات

1A) إذا كان لمضلع ستة أضلاع، فإنه سداسي.

1B) سيتم إنجاز طبعة ثانية من الكتاب، إذا بِيعت نسخ الطبعة الأولى كلّها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل:

- ما الفائدة من قائمة البدائل في نظام الرد الآلي؟ إجابة ممكنة: تمكين المتصل من التحدث إلى القسم الذي يريده بسرعة وسهولة.
- ما قسما الجملة في المثال؟ تريد التحدث إلى قسم خدمة العملاء، اضغط الرقم 2
- ما المشكلة التي يمكن أن تنشأ عن استعمال نظام الرد الآلي؟ إجابة ممكنة: قد لا يمكن حصر جميع الأسباب التي تدعو الشخص إلى الاتصال.

مصادر الدرس 1-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (34)	• تنويع التعليم، ص (33, 34)	• تنويع التعليم، ص (33, 34)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (8)	• كتاب التمارين، ص (8)	• كتاب التمارين، ص (8)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

قراءة الرياضيات

(إذا) و (فإن)

كلمة (إذا) ليست جزءًا من الفَرض، كذلك كلمة (فإن) ليست جزءًا من النتيجة.

تكتب كثير من العبارات الشرطية دون استعمال الكلمتين (إذا، فإن)، ولكتابة تلك العبارات على صورة (إذا ... فإن...) حدد الفَرض والنتيجة.

تحصل على خصم تشجيعي (النتيجة) عند شرائك أيًّا من منتجاتنا قبل يوم الأربعاء (الفرض)

إذا اشتريت أيًّا من منتجاتنا قبل يوم الأربعاء ، فإنك تحصل على خصم تشجيعي.

تذكر أن النتيجة تعتمد على الفرض.

مثال 2 كتابة العبارة الشرطية على الصورة (إذا... فإن...)

حدّد الفَرض والنتيجة في كل عبارة شرطية مما يأتي، ثم اكتبها على صورة (إذا... فإن...):

a) الثدييات حيوانات من ذوات الدم الحار.

الفَرض: الحيوان من الثدييات.

النتيجة: هو من ذوات الدم الحار.

إذا كان الحيوان من الثدييات، فإنه من ذوات الدم الحار.

b) المنشور الذي قاعدتاه مضلعان منتظمان، يكون منتظمًا.

الفَرض: قاعدتا المنشور مضلعان منتظمان.

النتيجة: يكون المنشور منتظمًا.

إذا كانت قاعدتا المنشور مضلعين منتظمين، فإنه يكون منتظمًا.

تحقق من فهمك

2A) يمكن تبديل 5 أوراق نقدية من فئة الريال بورقة نقدية واحدةٍ من فئة 5 ريالات.

2B) مجموع قياسَي الزاويتين المتتامتين يساوي $90°$

2A) الفرض: لديك 5 أوراق نقدية من فئة الريال.
النتيجة: يمكن أن تبدلها بورقة واحدة من فئة 5 ريالات.
إذا كان لديك 5 أوراق نقدية من فئة الريال فإنه يمكنك أن تبدلها بورقة واحدة من فئة 5 ريالات.

2B) الفرض: الزاويتان متتامتان.
النتيجة: مجموع قياسيهما يساوي $90°$
إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما يساوي $90°$

تذكر أن الفرض والنتيجة والعبارة الشرطية نفسها جميعها عبارات قد تكون صائبة وقد تكون خاطئة.

قال عمر لزملائه: إذا أنهيت واجبي المنزلي، فإني سوف ألعب الكرة معكم .

الفرض	النتيجة	العبارة الشرطية	
أنهى عمر الواجب المنزلي	يلعب عمر الكرة مع زملائه	إذا أنهيت واجبي المنزلي ، فإني سوف ألعب الكرة معكم.	
T	T	T	إذا أنهى عمر واجبه المنزلي، ولعب الكرة مع زملائه، فإن العبارة الشرطية تكون صائبة؛ لأنه أوفى بوعده.
T	F	F	إذا أنهى عمر واجبه المنزلي ولم يلعب الكرة مع زملائه، تكون العبارة الشرطية خاطئة؛ لأنه لم يفِ بوعده.
F	T	T	إذا لم يُنهِ عمر واجبه، ولعب الكرة مع زملائه، يكون الفرض خاطئًا ولكن النتيجة صائبة. وبما أن العبارة الشرطية لا تقرر شيئًا في حالة عدم حل عمر واجبه، فإن الأمر راجع إلى عمر، إما أن يلعب الكرة مع زملائه أو لا، وتكون العبارة الشرطية صائبة بغض النظر عما يفعله عمر.
F	F	T	إذا لم يُنهِ عمر واجبه، ولم يلعب الكرة مع زملائه، يكون الفرض خاطئًا، والنتيجة خاطئة. وللسبب نفسه في الحالة السابقة تكون العبارة الشرطية صائبة.

قراءة الرياضيات

ليست خاطئة

إذا كانت العبارة المنطقية ليست خاطئة؛ فإنها تكون صائبة.

لاحظ أن العبارة الشرطية تكون صائبة في جميع الحالات، إلَّا أن يكون الفرض صائبًا والنتيجة خاطئة.

عبارة إذا ... فإن...

المثال 1 يبيِّن كيفية تحديد الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.

المثال 2 يبيِّن كيفية كتابة العبارة الشرطية على صورة "إذا ... فإن...".

المثال 3 يبين كيفية تحديد قيمة الصواب للعبارة الشرطية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حدِّد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات التالية:

a) إذا كانت زوايا الشكل الرباعي قائمة فإنه مستطيل.
الفرض: زوايا الشكل الرباعي قائمة.
النتيجة: الشكل الرباعي مستطيل.

b) سيتقدم محمد إلى المستوى الأعلى في الدورة إذا أكمل المستوى الابتدائي.
الفرض: محمد يكمل المستوى الابتدائي.
النتيجة: محمد يتقدم إلى المستوى الأعلى.

2 حدِّد الفرض والنتيجة في كل عبارة مما يأتي، ثم اكتبها على صورة "إذا ... فإن...".

a) قياس المسافة يكون موجبًا.
الفرض: قِيسَتِ المسافة،
النتيجة: القياس موجب.
إذا قِيسَتِ المسافة، فإن القياس موجب.

b) المضلع ذو الأضلاع الخمسة هو شكل خماسي.
الفرض: المضلع له خمسة أضلاع. النتيجة: إنه شكل خماسي.
إذا كان للمضلع خمسة أضلاع فإنه خماسي.

إرشادات للمعلم الجديد

تحديد أجزاء العبارة الشرطية: عند تحديد قيم الصواب للعبارات الشرطية، أخبر الطلاب أن يستعملوا الأقواس لتحديد كلٍّ من الفرض والنتيجة في كل حالة. ووضّح لهم أنّه إذا تطابق الفرض في الحالة مع الفرض في العبارة الأصلية، فإنه يمكن للطلاب أن يضعوا حرف T فوق الأقواس، وإلّا يمكنهم أن يضعوا حرف F ، ويمكنهم عمل الشيء نفسه للنتيجة.

تنبيه!

تحليل العبارات الشرطية

عند تحديد قيم الصواب للعبارة الشرطية، لا تحاول أن تحدد ما إذا كان للعبارة معنى أم لا، بل اهتم بالسؤال: هل النتيجة تتبع الفرض بالضرورة؟

يمكنك استعمال النتائج السابقة لإنشاء جدول الصواب للعبارات الشرطية.

العبارات الشرطية

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

تكون العبارة الشرطية خاطئة فقط عندما يكون الفرض صائبًا والنتيجة خاطئة.

عندما يكون الفرض خاطئًا، تكون العبارة الشرطية صائبة بغض النظر عن النتيجة.

لإثبات صحة العبارة الشرطية، يجب عليك إثبات أنه عندما يكون الفرض صائبًا، فإن النتيجة صائبة أيضًا. ولإثبات أن العبارة الشرطية خاطئة يكفي أن تعطي مثالًا مضادًا .

مثال 3 قيم الصواب للعبارات الشرطية

حدّد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي، وإذا كانت صائبة، ففسِّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة، فأعطِ مثالًا مضادًا:

a) عند قسمة عدد صائب على عدد صائب آخر، يكون الناتج عددًا صائبًا أيضًا.

مثال مضاد: عند قسمة 1 على 2، يكون الناتج 0.5

بما أن 0.5 ليس عددًا صائبًا، فإن النتيجة خاطئة. وبما أنك استطعت إيجاد مثال مضاد، فالعبارة الشرطية خاطئة.

b) إذا كان الشهر القادم هو رمضان، فإن هذا الشهر هو شهر شعبان.

رمضان هو الشهر الذي يلي شهر شعبان؛ إذن كلما كان الفرض (الشهر القادم رمضان) صائبًا، فإن النتيجة (هذا الشهر هو شهر شعبان) تكون صائبة أيضًا؛ وعليه فإن العبارة الشرطية صائبة.

c) إذا كان للمثلث أربعة أضلاع، فإنه مضلعٌ مقعرٌ.

لا يمكن أن يكون للمثلث أربعة أضلاع؛ إذن الفرض خاطئ وعندما يكون الفرض خاطئًا، فإن العبارة الشرطية تكون صائبة.

تحقق من فهمك

3A) إذا كانت $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A = 35°$

3B) إذا كانت $\sqrt{x} = -1$ ، فإن $(-1)^2 = -1$

3A) خاطئة؛ إذا كان $m\angle A = 55°$، فإن $\angle A$ حادة أيضًا، ولكن قياسها ليس $35°$.
3B) صائبة؛ الفرض $\sqrt{x} = -1$ خاطئ؛ لأن الجذر التربيعي لا يكون سالبًا لأي عدد، وعليه تكون العبارة الشرطية صائبة.

مثال إضافي

3 حدِّد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي، وإذا كانت صحيحة ففسِّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة، فأعطِ مثالًا مضادًا.

a) إذا طرحت عددًا طبيعيًّا من عدد طبيعي، فإن الناتج يكون عددًا طبيعيًّا.
مثال مضاد: $5 - 7 = -2$. العبارة الشرطية خاطئة.

b) إذا كان الشهر الماضي هو شهر رجب، فإن هذا الشهر هو شعبان.
لما كان الفرض "الشهر الماضي شهر رجب" صحيحًا، فإن النتيجة "هذا الشهر هو شهر شعبان" ستكون صحيحة أيضًا؛ لأن شهر شعبان هو الشهر الذي يلي شهر رجب، إذن العبارة الشرطية صحيحة.

c) إذا كانت إحدى زوايا المستطيل منفرجة، فإنه يكون متوازي أضلاع. الفَرض خاطيء؛ لأنه لا يمكن أن تكون إحدى زوايا المستطيل منفرجة، والعبارة الشرطية التي يكون الفَرض فيها خاطئًا، تكون صحيحةً دائمًا.

28 الفصل 1 التبرير والبرهان

العبارات الشرطية المرتبطة: يرتبط بالعبارة الشرطية المعطاة عبارات شرطية أخرى تسمى **العبارات الشرطية المرتبطة**.

مفهوم أساسي — العبارات الشرطية المرتبطة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	الرموز	أمثلة
العبارة الشرطية هي العبارة التي يمكن كتابتها على صورة إذا كان p، فإن q .	$p \to q$	إذا كان $m\angle A = 35°$، فإن $\angle A$ حادة.
ينتج **العكس** من تبديل الفرض مع النتيجة في العبارة الشرطية.	$q \to p$	إذا كانت $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A = 35°$.
ينتج **المعكوس** عن نفي كل من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.	$\sim p \to \sim q$	إذا كان $m\angle A \neq 35°$، فإن $\angle A$ ليست حادة.
ينتج **المعاكس الإيجابي** من نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية.	$\sim q \to \sim p$	إذا لم تكن $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A \neq 35°$.

إذا كانت العبارة الشرطية صائبة، فليس بالضرورة أن يكون عكسها ومعكوسها صائبين، بينما يكون المعاكس الإيجابي صائبًا. ويكون المعاكس الإيجابي خاطئًا إذا كانت العبارة الشرطية خاطئة.

وبالمثل فإن عكس العبارة الشرطية ومعكوسها إما أن يكونا صائبين معًا أو خاطئين معًا. وتسمى العبارات التي لها قيم الصواب نفسها **عبارات متكافئة منطقيًا**.

مثال 4 جداول الصواب والعبارات المتكافئة منطقيًا

أوجد قيم الصواب للعبارة الشرطية وعكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي على نفس الجدول، ثم اكتب عبارتين متكافئتين منطقيًا.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	العبارة الشرطية $p \to q$	عكس العبارة الشرطية $q \to p$	معكوس العبارة الشرطية $\sim p \to \sim q$	المعاكس الإيجابي $\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

من خلال جدول الصواب نلاحظ أنه للعبارتين $p \to q$ وَ $\sim q \to \sim p$ قيم الصواب نفسها لذا فهما متكافئتان منطقيًا.

تحقق من فهمك

4) أوجد قيم الصواب للعبارات: $\sim(p\wedge q)$, $\sim p\vee \sim q$, $\sim(p\vee q)$, $\sim p\wedge \sim q$ على نفس الجدول، ثم اكتب زوجين من العبارات المتكافئة منطقيًا. انظر الهامش.

مما سبق نلاحظ أن:

مفهوم أساسي — العبارات المتكافئة منطقيًا

أضف إلى مطويتك

- العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي متكافئان منطقيًا.
- عكس العبارة الشرطية ومعكوسها متكافئان منطقيًا.
- $\sim(p\wedge q)$ تكافئ منطقيًا $\sim p\vee\sim q$
- $\sim(p\vee q)$ تكافئ منطقيًا $\sim p\wedge\sim p$

إجابة (تحقق من فهمك):

4)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p\vee\sim q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p\wedge\sim q$
T	T	F	F	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F	T	T	T	T

$\sim(p\wedge q)$ تكافئ منطقيًا $\sim p\vee\sim q$

$\sim(p\vee q)$ تكافئ منطقيًا $\sim p\wedge\sim q$

المثال 4 يبيِّن كيفية استعمال جداول الصواب لإثبات أن عبارتين متكافئتان منطقيًا.

مثال إضافي

4 أوجد قيم الصواب للعبارتين $\sim(p\vee q)$, $\sim p\vee q$ على نفس الجدول، ثم قرر هل العبارتان متكافئتان منطقيًا.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p\vee q)$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p\vee\sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T	T

غير متكافئتين منطقيًا.

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي: زوّد كل طالب ببطاقات معنونة بـ "الفرض"، "النتيجة" "يؤدي إلى" (أو إشارة سهم متجه من اليسار إلى اليمين) أعط كل طالب بطاقتين كلٌّ منهما معنونة بـ "ليس" باللون الأحمر، ثم اطلب إلى الطلاب تكوين عبارات شرطية باستعمال البطاقات، وتكوين العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي. على الطلاب أن يستجيبوا للنشاط بوضع البطاقات في الوضع والترتيب الصحيحين، ويمكنهم أيضًا أن يستعملوا البطاقات لحل بعض التدريبات أو الأمثلة في هذا الدرس بكتابة أجزاء العبارة الشرطية على البطاقات المناظرة.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اكتب عبارة شرطية على السبورة، ثم اسحب كلًّا من الفَرض والنتيجة؛ لتساعد على كتابة العكس، والمعكوس، والمعاكس الإيجابي للعبارة الأصلية.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-18؛ للتحقق من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة التالية؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

العبارات الشرطية المرتبطة

المثال 5 يبين كيفية كتابة العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية.

مثال إضافي

5 **طبيعة :** اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطة الآتية، وحدد قيمة الصواب لها، وإذا كانت العبارة خاطئة، فأعطِ مثالًا مضادًّا.

الخفافيش ثدييات تستطيع الطيران.

العبارة الشرطية: إذا كان الحيوان خفاشًا، فإنه ثدييٌّ يستطيع الطيران.

العكس: إذا كان الحيوان من الثدييات التي تستطيع الطيران، فإنه يكون خفاشًا. خاطئة؛ هناك ثدييات أخرى تستطيع الطيران مثل الليمور.

المعكوس: إذا لم يكن الحيوان خفاشًا، فإنه ليس من الثدييات التي تستطيع الطيران. خاطئة؛ الليمور ليس خفاشًا، وهو من الثدييات التي تستطيع الطيران.

المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن الحيوان من الثدييات التي تستطيع الطيران، فإنه ليس خفاشًا. صائبة

يمكنك استعمال التكافؤ المنطقي للتحقق من قيمة الصواب لعبارة ما. في المثال 5 أدناه، لاحظ أن كلًا من العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي صائبان. وأن كلًا من العكس والمعكوس خاطئان.

الربط مع الحياة

تُعد الأسود والنمور من فصيلة القطط، وهي القطط الوحيدة التي تزأر، ولا تموء.

مثال 5 من واقع الحياة — العبارات الشرطية المرتبطة

طبيعة : اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الآتية، ثم استعمل معلومات الربط مع الحياة؛ لتحديد ما إذا كان أيٌّ منها صائبًا أم خاطئًا. وإذا كان خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًّا.

الأسود هي قطط تستطيع أن تزأر.

العبارة الشرطية: أعد كتابة العبارة على صورة (إذا... فإن...) .
إذا كان الحيوان أسدًا، فإنه قطٌّ يستطيع أن يزأر.
اعتمادًا على المعلومات المجاورة عن اليمين، تكون العبارة صائبة.

العكس: إذا كان الحيوان قطًّا يستطيع أن يزأر، فإنه يكون أسدًا.
مثال مضاد: النمر قط يستطيع أن يزأر، لكنه ليس أسدًا.
إذن فالعكس خاطيء.

المعكوس: إذا لم يكن الحيوان أسدًا، فإنه لا يكون قطًّا يستطيع أن يزأر.
مثال مضاد: النمر ليس أسدًا، ولكنه قط يستطيع أن يزأر.
إذن المعكوس خاطيء.

المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن الحيوان قطًّا يستطيع أن يزأر، فإنه لا يكون أسدًا.
اعتمادًا على المعلومات التي في الهامش تكون العبارة صائبة .

تحقق : تحقق من أن للعبارات المتكافئة منطقيًّا قيم الصواب نفسها.
العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي كلاهما صائب. ✓
العكس والمعكوس كلاهما خاطيء. ✓

تحقق من فهمك

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكلٍّ من العبارتين الشرطيتين الآتيتين، ثم حدد ما إذا كان أيٌّ منها صائبًا أم خاطئًا. وإذا كان خاطئًا فأعط مثالًا مضادًّا. (5A, 5B انظر الهامش.)

5A) الزاويتان اللتان لهما القياس نفسه متطابقتان.

5B) الفأر من القوارض.

تأكد

المثال 1 حدِّد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية:

1) يوم غد هو السبت إذا كان اليوم هو الجمعة. الفرض: اليوم هو الجمعة؛ النتيجة: يوم غد هو السبت.

2) إذا كان $2x + 5 > 7$، فإن $x > 1$. الفرض $2x + 5 > 7$؛ النتيجة: $x > 1$

3) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإن مجموع قياسيهما $180°$
3) الفرض: الزاويتان متكاملتان. النتيجة: مجموع قياسي الزاويتين يساوي $180°$.

4) يكون المستقيمان متعامدين إذا نتج عن تقاطعهما زاوية قائمة. الفرض: نتج عن تقاطع مستقيمين زاوية قائمة؛ النتيجة: المستقيمان متعامدان.

المحتوى الرياضي

يمكن أن تكون العبارتان p و q بسيطتين، ولكن ليس بالضرورة أن تكونا مرتبطتين معًا. ولكن في هذا الدرس ستكون إحدى الجمل هي الفرض، والأخرى هي النتيجة للعبارة الشرطية. تأكد من أن الطلاب يعلمون أن هاتين العبارتين المنفصلتين ما زالتا بسيطتين وغير مرتبطتين، ولكنهما في العبارة الشرطية بينهما علاقة ارتباط. وقبل المُضيِّ قُدمًا يجب على الطلاب التعامل بارتياح في تحديد الفرض والنتيجة ومعرفة قيمة الصواب لكل عبارة على حدة، ومعرفة قيمة الصواب في حال الربط بواسطة العبارة الشرطية والصيغ المختلفة لكلٍّ من العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي.

إجابات (تحقق من فهمك):

5A) العبارة الشرطية: إذا كان للزاويتين القياس نفسه فإنهما متطابقتان.
العكس: إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإن لهما القياس نفسه. صائبة.
المعكوس: إذا لم يكن لزاويتين القياس نفسه، فإنهما غير متطابقتين. صائبة.
المعاكس الإيجابي: إذا لم تكن الزاويتان متطابقتين، فإنه لا يكون لهما القياس نفسه. صائبة.

5B) العبارة الشرطية: إذا كان الحيوان فأرًا فإنه من القوارض.
العكس: إذا كان الحيوان من القوارض فإنه فأر. خاطئة، السنجاب من القوارض، لكنة ليس فأرًا.
المعكوس: إذا لم يكن الحيوان فأرًا، فإنه لا يكون من القوارض. خاطئة. السنجاب ليس فأرًا، ولكنه من القوارض.
المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن الحيوان من القوارض، فإنه ليس فأرًا. صائبة.

المثال 2 اكتب كل عبارة شرطية مما يأتي على صورة (إذا... فإن...).

5) الشخص الذي تجاوز عمره 18 عامًا يمكنه استخراج رخصة قيادة.

6) يحتوي الجبن على عنصر الكالسيوم. **إذا كانت هذه جبنة، فإنها تحتوي على عنصر الكالسيوم.**

7) قياس الزاوية الحادة بين $0°$ و $90°$

8) المثلث المتطابق الأضلاع متطابق الزوايا. **إذا كان المثلث متطابق الأضلاع، فإنه يكون متطابق الزوايا.**

9) **مطر:** هناك أنواع مختلفة من هطل المطر، تتشكل في ظروف مختلفة. اكتب العبارات الشرطية الثلاث الآتية على صورة (إذا... فإن...).

a) يتكاثف بخار الماء في الغلاف الجوي فيسقط على شكل مطر.

b) يتجمد بخار الماء الشديد البرودة في الغيوم الركامية فيسقط على شكل بَرَد.

c) يكون الهطل على شكل ثلج، عندما تكون درجة الحرارة متدنيةً جدًّا إلى حدّ التجمد في الغلاف الجوي.

5) إذا تجاوز عمر الشخص 18 عامًا، فإنه يمكنه استخراج رخصة قيادة.

7) إذا كانت الزاوية حادة، فإن قياسها بين $0°$ و $90°$.

9a) إذا تكاثف بخار الماء في الغلاف الجوي، فإنه يسقط على شكل أمطار.

9b) إذا تجمد بخار الماء الشديد البرودة في الغيوم الركامية، فإنه يسقط على شكل برد.

9c) إذا كانت درجة الحرارة متدنية جدًّا إلى حدّ التجمد في الغلاف الجوي، فإن الهطل يكون على شكل ثلج.

المثال 3 **حدِّد قيمة الصواب لكلّ عبارة شرطية فيما يأتي، وإذا كانت العبارة صائبة، ففسِّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًّا.** **10–16) انظر الهامش.**

10) إذا كان $x^2 = 16$، فإن $x = 4$

11) إذا كنت تعيش في الرياض، فإنك تعيش في الكويت.

12) إذا كان يوم غد هو الجمعة، فإن اليوم هو الخميس.

13) إذا كان للحيوان قرنان، فإنه كبش.

14) إذا كان قياس الزاوية القائمة $95°$، فإن النحلة تكون سحلية.

المثال 4 **أوجد قيم الصواب لكل عبارتين فيما يأتي، ثم قرِّر هل هما مكافئتان منطقيًّا أم لا؟**

15) $\sim p \wedge q, \sim(p \wedge q)$

16) $\sim p \vee \sim q, \sim(p \vee q)$

المثال 5 **اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكلٍّ من العبارتين الشرطيتين الآتيتين. ثم حدد ما إذا كان أيٌّ منها صائبًا أم خاطئًا، وإذا كان خاطئًا فأعط مثالًا مضادًّا.** **17, 18) انظر الهامش.**

17) إذا كان العدد يقبل القسمة على 2، فإنه يقبل القسمة على 4

18) جميع الأعداد الكلية أعداد صائبة.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **حدِّد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية:**

19) إذا كانت الزاويتان متجاورتين، فإن لهما ضلعًا مشتركًا.

20) إذا كنت قائد مجموعتنا، فإنني سأتبعك. **الفرض: أنت قائد مجموعتنا؛ النتيجة: سوف أتبعك.**

19) الفرض: الزاويتان متجاورتان؛ النتيجة: للزاويتين ضلع مشترك.

إجابات:

10) خاطئة؛ إذا كانت $x = -4$، فإن $(-4)^2 = 16$. هذا المثال المضاد يثبت أن النتيجة خاطئة، أي أن العبارة الشرطية خاطئة.

11) خاطئة؛ الفرض صحيح، أما النتيجة فهي خاطئة؛ لأن الرياض لا تقع في الكويت؛ إذن العبارة الشرطية خاطئة.
مثال مضاد: أنا أعيش في الرياض لكنني لا أعيش في الكويت.

12) صائبة؛ عندما يكون الفرض صحيحًا، فإن النتيجة تكون صائبة أيضًا؛ لأن يوم الجمعة بعد يوم الخميس؛ لذا فإن العبارة الشرطية صائبة أيضًا.

13) خاطئة؛ الحيوان ثورٌ له قرنان، هذا المثال المضاد يثبت أن النتيجة خاطئة؛ أي أن العبارة الشرطية خاطئة.

14) صائبة؛ الفَرض خاطئ؛ لأن قياس الزاوية القائمة $90°$، والعبارة الشرطية التي يكون فيها الفَرض خاطئًا تكون صائبة دائمًا؛ لذا فهذه العبارة الشرطية صائبة.

15)

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \wedge q$
T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	T	F

غير متكافئتين منطقيًّا.

16)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \vee q)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	T

غير متكافئتين منطقيًّا.

17) العكس: إذا كان العدد يقبل القسمة على 4، فإنه يقبل القسمة على 2، صائبة.

المعكوس: إذا لم يكن العدد يقبل القسمة على 2، فإنه لا يقبل القسمة على 4، صائبة.

المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن العدد يقبل القسمة على 4، فإنه لا يقبل القسمة على 2، خاطئة.

مثال مضاد: العدد 6 لا يقبل القسمة على 4، ولكنه يقبل القسمة على 2

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	19-28 ، 57 ، 60-70
ضمن المتوسط	19-48 فردي ، 53-57 ، 60-70
فوق المتوسط	30-70

18) العكس: إذا كان العدد صحيحًا، فإنه عدد كلي، خاطئة. مثال مضاد: -3

المعكوس: إذا لم يكن العدد كليًّا، فإنه ليس عددًا صحيحًا، خاطئة. مثال مضاد: -3

المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن العدد صحيحًا، فإنه ليس عددًا طبيعيًّا، صائبة.

21) إذا كان $3x - 4 = 11$، فإن $x = 5$ **الفرض $3x - 4 = 11$؛ النتيجة: $x = 5$**

22) إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما متطابقتان. **الفرض: الزاويتان متقابلتان بالرأس. النتيجة: الزاويتان متطابقتان.**

المثال 2 **اكتب كل عبارة شرطية مما يأتي على صورة (إذا ... فإن ...).**

23) احصل على قارورة ماء مجانًا عند شرائك خمس قوارير. **23) إذا اشتريت خمس قوارير ماء، فإنك تحصل على قارورة مجانية.**

24) كل من حضر الحفل سيحصل على هدية. **إذا حضرت الحفل، فإنك ستحصل على هدية.**

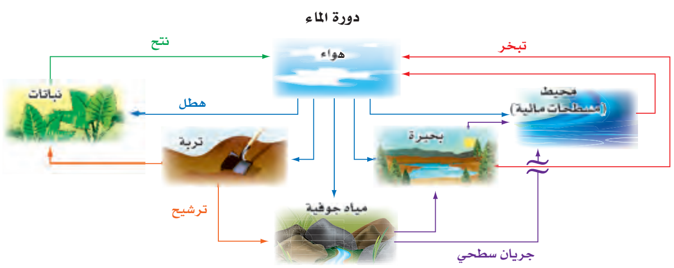
25) تقاطع مستويين يمثل مستقيمًا. **إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما مستقيم.**

26) مساحة الدائرة تساوي πr^2 **إذا كان الشكل دائرة، فإن مساحته تساوي πr^2**

27) قياس الزاوية القائمة $90°$ **إذا كانت الزاوية قائمة، فإن قياسها $90°$**

28) **كيمياء:** اكتب العبارة الآتية على صورة (إذا... فإن...).
ينصهر الفوسفور عند درجة $44°$ سيليزية.
إذا كانت المادة فوسفورًا، فإنها تنصهر عند درجة $44°$ سيليزية.

29) **أحياء:** يتغير الماء على الأرض باستمرار عبر عملية تُسمّى دورة الماء. اكتب العبارات الشرطية الثلاث أدنى الشكل على صورة (إذا... فإن...).



a) جريان الماء السطحي يصب في المسطحات المائية.

b) تعيد النباتات الماء إلى الهواء من خلال عملية النتح.

c) تعيد المسطحات المائية الماء إلى الهواء عن طريق التبخر.

29a) إذا جرى الماء على سطح الأرض، فإنه يصب في المسطحات المائية.

29b) إذا أعادت النباتات الماء إلى الهواء، فإن ذلك يتم عن طريق النتح.

29c) إذا أعادت المسطحات المائية الماء إلى الهواء، فإن ذلك يتم عن طريق التبخر.

المثال 3 حدد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي. وإذا كانت صائبة، ففسّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًّا: **30–36) انظر ملحق الإجابات**

30) إذا كان العدد فرديًّا، فإنه يقبل القسمة على 5

31) إذا كان الأرنب حيوانًا برمائيًّا، فإن هذا الفصل هو فصل الصيف.

32) إذا كانت جدة في اليمن، فإن صنعاء هي عاصمة المملكة العربية السعودية.

33) إذا نتج اللون الأبيض عن مزج اللونين الأزرق والأحمر، فإن $3 - 2 = 0$

34) إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإنهما متقابلتان بالرأس.

35) إذا كان الحيوان طائرًا، فإنه يكون نسرًا.

36) إذا كان الموز أزرق، فإن التفاح من الخضراوات.

32 الفصل 1 التبرير والبرهان

طبيعة: استعمل العبارة أدناه لكتابة كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية، ثم استعمل معلومات الربط مع الحياة لتحديد قيمة الصواب لكلٍّ منها، وإذا كانت أيٌّ منها خاطئة، فأعط مثالًا مضادًا. 37–40) انظر ملحق الإجابات

"الحيوان الذي تظهر على جسمه خطوط هو الحمار الوحشي".

37) عبارة شرطية

38) عكس العبارة الشرطية

39) معكوس العبارة الشرطية

40) المعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية

المثال 4 أوجد قيم الصواب لكل عبارتين فيما يأتي، ثم قرِّر هل هما متكافئتان منطقيًّا أم لا؟ 41–48) انظر ملحق الإجابات

41) $\sim(p \to q)\ ,\ \sim p \to \sim q$

42) $\sim(p \to q)\ ,\ \sim(\sim q \to \sim p)$

43) $(p \wedge q) \vee r\ ,\ p \wedge (q \vee r)$

المثال 5 اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكلٍّ من العبارات الشرطية الآتية، ثم حدِّد ما إذا كان أيٌّ منها صائبًا أم خاطئًا. وإذا كان خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًا. 44–48) انظر ملحق الإجابات

44) إذا كنت تعيش في الدمام، فإنك تعيش في المملكة العربية السعودية.

45) إذا كان الطائر نعامة، فإنه لا يستطيع أن يطير.

46) جميع المربعات مستطيلات.

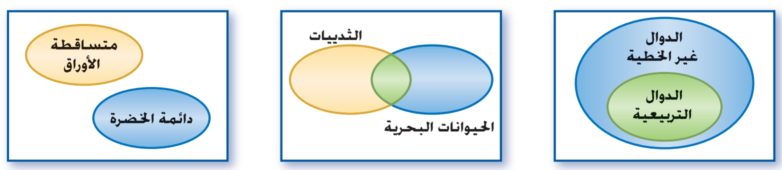
47) جميع القطع المستقيمة المتطابقة لها الطول نفسه.

48) المثلث القائم الزاوية يحوي زاوية قياسها $90°$

الربط مع الحياة

موطن ظباء الدكدك هو أفريقيا، وهي ظباء صغيرة الحجم، يبلغ متوسط طولها من قدم واحدة إلى ما يزيد على قدمين قليلًا، وتتميز أجسامها بخطوط تشبه خطوط الحُمر الوحشية.

استعمل أشكال ڤن أدناه؛ لتحديد قيمة الصواب لكلٍّ من العبارات الشرطية الآتية. وفسِّر تبريرك.



49) إذا كانت الدالة غير خطية، فإنها تكون دالة تربيعية.

50) إذا كان الحيوان من الثدييات، فإنه لا يكون حيوانًا بحريًّا.

51) إذا كانت الشجرة متساقطة الأوراق، فإنها لا تكون دائمة الخضرة.

49) خاطئة؛ المنطقة الزرقاء في شكل ڤن تحتوي الدوال غير الخطية وغير التربيعية.

50) خاطئة؛ تحتوي المنطقة الخضراء في شكل ڤن حيوانات ثديية وبحرية في الوقت نفسه.

51) صائبة؛ لا يوجد منطقة مشتركة بين المنطقتين اللتين تمثلان الأشجار المتساقطة الأوراق والأشجار الدائمة الخضرة.

52) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي أحد قوانين المنطق باستعمال العبارات الشرطية. a–d) انظر الهامش.

a) **منطقيًّا:** اكتب ثلاث عبارات شرطية صائبة، بحيث تكون نتيجة كل عبارة فرضًا للعبارة التي تليها.

b) **بيانيًّا:** ارسم شكل ڤن يوضح هذه السلسلة من العبارات الشرطية.

c) **منطقيًّا:** اكتب عبارةً شرطيةً مستعملًا فرض العبارة الأولى، ونتيجة العبارة الثالثة. إذا كان فرض العبارة الأولى صائبًا. فهل تكون العبارة الشرطية الناتجة صائبةً؟

d) **لفظيًّا:** إذا أُعطيت العبارتين الشرطيتين الصائبتين: إذا كان a، فإن b، وإذا كان b، فإن c، فاكتب تخمينًا حول قيمة الصواب للعبارة c عندما تكون العبارة a صائبة. فسِّر تبريرك.

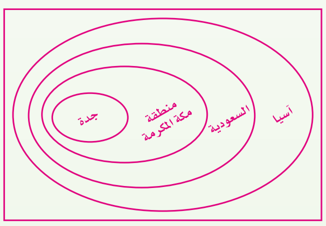
تمثيلات متعددة: في السؤال 52، يستعمل الطلاب العبارات المنطقية واللفظية وأشكال ڤن لاستقصاء خاصية التعدي للعبارات الشرطية.

إجابات:

52a) إجابة ممكنة:

إذا كنت تسكن مدينة جدة، فأنت تسكن منطقة مكة المكرمة، وإذا كنت تسكن منطقة مكة المكرمة فإنك تسكن المملكة العربية السعودية، وإذا كنت تسكن المملكة العربية السعودية، فإنك تسكن قارة آسيا.

52b)



52c) إذا كنت تسكن في مدينة جدة فإنك تسكن في قارة آسيا. نعم صحيحة.

52d) إجابة ممكنة: إذا كانت a صحيحة، فإن c صحيحة. إذا كنا نعلم أن a صحيحة، فإننا نعلم أن b صحيحة، وإذا كنا نعلم أن b صحيحة، فإن c صحيحة أيضًا؛ إذن عندما تكون a صحيحةً، فإن c تكون صحيحةً.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: ناقش مع الطلاب معنى الشكل الرباعي والمعين، ثم اطلب إليهم كتابة عكس العبارة "كل الأشكال الرباعية معينات". وحدِّد ما إذا كانت العبارة صحيحة أم خاطئة؟

العبارة الشرطية: إذا كان الشكل رباعيًّا، فإنه معين (خاطئة).

العكس: إذا كان الشكل معينًا، فإنه شكل رباعي (صحيحة).

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **اكتشف الخطأ:** حدِّد كلٌّ من أحمد وماجد قيمة الصواب للعبارة الشرطية "إذا كان العدد 15 أوليًّا، فإن العدد 20 يقبل القسمة على 4" . كلاهما يعتقد أن هذه العبارة صائبة، ولكنهما برَّرا ذلك بتبريرين مختلفين. أيُّهما كان مصيبًا؟ فسِّر تبريرك. انظر الهامش.

ماجد	أحمد
الفَرض خاطئ؛ لأن 15 ليس عددًا أوليًّا؛ إذن العبارة الشرطية صائبة.	النتيجة صائبة؛ لأن العدد 20 يقبل القسمة على 4؛ إذن العبارة الشرطية صائبة.

54) **تبرير:** عبارة شرطية فرضها صائب، ونتيجتها خاطئة. هل يكون معكوسها صائبًا؟ انظر الهامش.

55) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة شرطية، بحيث يكون العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لها جميعها صائبة. فسّر تبريرك.

56) **تحدٍّ:** تجد أدناه معكوس العبارة الشرطية A. اكتب العبارة الشرطية A وعكسها ومعاكسها الإيجابي. فسّر تبريرك. انظر الهامش.

"إذا لم تدرك تكبيرة الإحرام مع الإمام، فإنك ذهبت إلى المسجد متأخرًا."

57) **اكتب:** صِفِ العلاقة بين العبارة الشرطية وعكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي. انظر ملحق الإجابات.

55) إجابة ممكنة: إذا كان العدد 4 يقبل القسمة على العدد 2 ، فإن للطيور ريشًا. حتى يكون العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي جميعها صائبة يجب أن يكون الفرض والنتيجة صائبين أو خاطئين معًا.

تدريب على اختبار

58) إذا كان مجموع قياسَي زاويتين يساوي °90 فإنهما متتامتان. أيُّ العبارات الآتية هي عكس العبارة الشرطية أعلاه؟ A

A إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما °90

B إذا كانت الزاويتان غير متتامتين، فإن مجموع قياسيهما °90

C إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما لا يساوي °90

D إذا كانت الزاويتان غير متتامتين، فإن مجموع قياسيهما لا يساوي °90

59) **جبر:** ما أبسط صورة للعبارة $\frac{10a^2-15ab}{4a^2-9b^2}$ ؟ B

A $\frac{5a}{2a-3b}$

B $\frac{5a}{2a+3b}$

C $\frac{a}{2a+3b}$

D $\frac{a}{2a-3b}$

تنبيه !

اكتشف الخطأ: في السؤال 53 على الطلاب أن يتذكروا أن العبارة الشرطية تكون صحيحة دائمًا إلا إذا كان الفَرض صحيحًا، والنتيجة خاطئة. لم يذكر أحمد في إجابته أن الفَرض خاطئ.

4 التقويم

تعلم لاحق: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا عن العلاقة بين العبارات الشرطية وما سيتعلمونه في الدرس القادم حول التبرير الاستنتاجي.

إجابات:

53) إجابة ممكنة، ماجد؛ عندما يكون الفَرض خاطئًا في العبارة الشرطية، فإن العبارة تكون صائبة دائمًا.

54) نعم؛ بما أن النتيجة خاطئة، فيجب أن يكون عكس العبارة صائبًا. والعكس والمعكوس متكافئان منطقيًّا، وعليه يكون المعكوس صائبًا.

56) الفرض للمعكوس هو $\sim p$: لم تدرك تكبيرة الإحرام مع الإمام.
النتيجة للمعكوس هي $\sim q$: ذهبت إلى المسجد متأخرًا.
إذن العبارة الشرطية A هي $p \rightarrow q$: إذا كنت قد أدركت تكبيرة الإحرام مع الإمام، فإنك ذهبت إلى المسجد مبكرًا.
وعكس العبارة A هو $q \rightarrow p$: إذا ذهبت إلى المسجد مبكرًا، فإنك ستدرك تكبيرة الإحرام مع الإمام.
والمعاكس الإيجابي للعبارة A هو $\sim q \rightarrow \sim p$: إذا لم تذهب إلى المسجد مبكرًا، فإنك لن تُدرك تكبيرة الإحرام مع الإمام.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

إذا وجد بعض الطلاب صعوبة في فهم قيمة الصواب للعبارة الشرطية،

فقم بالطلب إليهم تحديد نوع العبارة الشرطية التي لا يمكن أن تكون صحيحة أبدًا، ثم اطلب إليهم أيضًا تحليل جداول الصواب للعبارات الشرطية، ووضع أمثلة مادية يكون فيها الفَرض صحيحًا دائمًا، والنتيجة خطأ دائمًا.

مراجعة تراكمية

أنشئ جدول الصواب لكلٍّ من العبارات المركبة الآتية. (الدرس 1-2) 60–63) انظر ملحق الإجابات

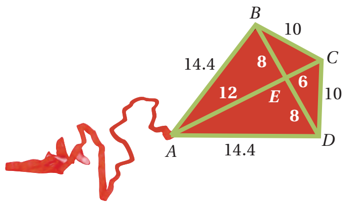
60) $q \wedge p$ 61) $\sim q \vee p$ 62) $\sim p \wedge q$ 63) $\sim p \wedge \sim q$

اكتب تخمينًا معتمدًا على المعلومات المعطاة في كلٍّ مما يأتي. وارسم شكلًا يوضح تخمينك (الدرس 1-1)

64) تقع النقاط J, H, K على أضلاع مختلفة لمثلث. النقاط J, H, K ليست على استقامة واحدة.

65) $R(3, -4), S(-2, -4), T(0, -4)$. R, S, T تقع على استقامة واحدة.

66) $A(-1, -7), B(4, -7), C(4, -3), D(-1, -3)$ $ABCD$ مستطيل.



67) **طائرة ورقية:** تصنع الطائرات الورقية بشكل يشبه الماسة؛ لذلك تسمى الطائرة الماسية.
سمِّ جميع القطع المستقيمة المتطابقة في الشكل المجاور. (مهارة سابقة)
$\overline{BC} \cong \overline{CD}, \overline{BE} \cong \overline{ED}, \overline{BA} \cong \overline{DA}$

استعد للدرس اللاحق

جبر: حدد العملية التي استعملتها لتحويل المعادلة (1) إلى المعادلة (2) في كلٍّ مما يأتي.

68) (1) $8(y-11) = 32$ (2) $y - 11 = 4$ قسمة كلا الطرفين على 8

69) (1) $x + 9 = 4 - 3x$ (2) $4x + 9 = 4$ إضافة $3x$ لكلٍّ من الطرفين.

70) (1) $\frac{1}{3}m = 2$ (2) $m = 6$ ضرب كلا الطرفين في 3

35 الدرس 1-3 العبارات الشرطية

1 التركيز

الهدف: تحديد العبارات الشرطية الثنائية، واستعمالها، وإيجاد قيم الصواب لها.

إرشادات التدريس: هيئ الطلاب بأن تطلب إليهم إعطاء أمثلة على عبارات شرطية وعكسها، ثم اطلب إليهم أن يفكروا في معنى كلٍّ منها، وزوِّد الطلاب بأمثلة تُثبت أن صحة العبارة الشرطية لا تعتمد على صحة عكسها.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزِّع الطلاب مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات، واطلب إليهم قراءة الأمثلة والتحقق منها، وإنشاء جدول صواب للعبارات الشرطية والعبارات الشرطية الثنائية المتضمنة، وبذلك يمكنهم أن يربطوا عبارات الأمثلة 4-1 بقيم الصواب في الجدول.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 5-1 .

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 4-1؛ للتحقق من فهم الطلاب مكونات العبارة الشرطية الثنائية وكيفية تحديد قيمة الصواب لها.

من المحسوس إلى المجرد

استعمل السؤال 4؛ لتحديد ما إذا كان بمقدور الطلاب استعمال العبارة الشرطية الثنائية في سياقٍ جبريٍّ.

توسع 1-3 معمل الرياضيات:

العبارات الشرطية الثنائية
Biconditinal Statments

يُعدُّ سعد أفضل طلاب المدرسة في لعبة كرة القدم. وإذا انتُخب من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي، فإنه سيمثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية. إذا مثّل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية، فإنه يكون قد انتُخب من قِبَل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

p: انتُخب سعدٌ من قِبَل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

q: مثّل سعد المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

$p \to q$: إذا انتُخب سعد من قبل فريق كرة القدم المدرسي، فإنه سيمثل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

$q \to p$: إذا مثَّل سعد المدرسة في فريق المنطقة التعليمية، فإنه قد انتُخب من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي.

في هذه الحالة، العبارة الشرطية $p \to q$ وعكسها $q \to p$ كلاهما صائب. والعبارة المركبة الناتجة عن وصل هاتين العبارتين باستعمال (و) تسمى **عبارة شرطية ثنائية**.

مفهوم أساسي — **العبارات الشرطية الثنائية** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: العبارة الشرطية الثنائية هي عبارة وصل مكونة من العبارة الشرطية وعكسها.

الرموز: $(p \to q) \wedge (q \to p)$ ، ويُرمز لها اختصارًا $(p \leftrightarrow q)$، وتُقرأ p إذا وفقط إذا كان q

إذن تُكتب العبارة الشرطية الثنائية السابقة على النحو التالي:

$p \leftrightarrow q$: يُنتخب سعد من قبل أعضاء فريق كرة القدم المدرسي إذا وفقط إذا مثّل المدرسة في فريق المنطقة التعليمية.

مثال

اكتب كلًا من العبارتين الشرطيتين الثنائيتين الآتيتين على صورة عبارة شرطية وعكسها، ثم حدد ما إذا كانت العبارة الشرطية الثنائية صائبة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأعطِ مثالًا مضادًا.

a) **تكون الزاوية قائمة إذا وفقط إذا كان قياسها 90°**

العبارة الشرطية: إذا كانت الزاوية قائمة، فإن قياسها 90°

العكس: إذا كان قياس الزاوية 90°، فإنها زاوية قائمة.

كلٌّ من العبارة الشرطية وعكسها صائبان؛ إذن العبارة الشرطية الثنائية صائبة.

b) **x عددٌ موجبٌ إذا وفقط إذا كان $x > -2$**

العبارة الشرطية: إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $x > -2$. العبارة الشرطية صائبة.

العكس: إذا كان $x > -2$، فإن x عدد موجب. افترض أن $x = -1$؛ إذن $-1 > -2$، لكن -1 ليس عددًا موجبًا؛ إذن عكس العبارة الشرطية خاطئ، والعبارة الشرطية الثنائية خاطئة.

تمارين: 4–1) انظر الهامش.

اكتب كل عبارة شرطية ثنائية مما يأتي على صورة عبارة شرطية وعكسها. ثم حدد ما إذا كانت العبارة الشرطية الثنائية صائبة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأعطِ مثالًا مضادًا.

1) تكون الزاويتان متتامتين إذا وفقط إذا كان مجموع قياسيهما 90°

2) لا دوام في المدارس إذا وفقط إذا كان اليوم هو الجمعة.

3) يتقاطع المستقيمان إذا وفقط إذا كانا غير أفقيين.

4) $|2x| = 4$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$

إجابات:

1) العبارة الشرطية: إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما 90° صائبة.

العكس: إذا كان مجموع قياسَي زاويتين 90° ، فإنهما متتامتان. صائبة.

العبارة الشرطية الثنائية صائبة.

2) العبارة الشرطية: إذا كان اليوم هو الجمعة، فإنه لا يوجد دوام في المدارس. صائبة.

العكس: إذا لم يكن هناك دوام في المدارس، فإن اليوم هو الجمعة. خاطئة؛ لأنه لا دوام في المدارس يوم السبت أيضًا.

العبارة الشرطية الثنائية خاطئة.

3) العبارة الشرطية: إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما غير أفقيَّين. صائبة.

العكس: إذا لم يكن المستقيمان أفقيَّين، فإنهما يتقاطعان.

خاطئة: المستقيمان الرأسيان المتوازيان لا يتقاطعان.

العبارة الشرطية الثنائية خاطئة.

4) العبارة الشرطية: إذا كان $x = 2$ ، فإن $|2x| = 4$، صائبة.

العكس: إذا كان $|2x| = 4$ ، فإن $x = 2$

خاطئة: إذا كان $x = -2$ ، فإن $|2x| = 4$

العبارة الشرطية الثنائية خاطئة.

الفصل 1

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 1

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16) دون

الاسم ______________ التاريخ ______________

1-3 تدريبات إعادة التعليم

العبارات الشرطية

عبارات إذا... فإن...:

عبارة (إذا...فإن...) هي عبارة مثل "إذا كنت تقرأ هذه الصفحة، فإنك تدرس رياضيات". والعبارة التي يمكن كتابتها على الصورة (إذا ... فإن...) تُسمّى **عبارةً شرطيةً**، والجملة التي تلي كلمة "إذا" مباشرة تُسمّى **الفرض**، والجملة التي تلي كلمة "فإن" مباشرة تُسمّى **النتيجة**.

ويمكن تمثيل العبارة الشرطية بالرموز على النحو الآتي: $p \to q$، وتقرأ "p تؤدي إلى q"، أو "إذا كان p، فإن q".

مثال 1 حدّد الفرض والنتيجة، في العبارة الشرطية الآتية، واكتبها في صورة (إذا... فإن...)

ستحصل على فطيرة مجانية إذا اشتريت 3 فطائر.

الفرض: اشتريت 3 فطائر.

النتيجة: ستحصل على فطيرة مجانية.

العبارة: إذا اشتريت 3 فطائر، فإنك ستحصل على فطيرةٍ مجانية.

مثال 2 حدّد الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية الآتية:

إذا كانت $\angle R \cong \angle X$ ، $\angle S \cong \angle R$، فإن $\angle S \cong \angle X$

الفرض: $\angle R \cong \angle X$ ، $\angle S \cong \angle R$

النتيجة: $\angle S \cong \angle X$.

تمارين

حدّد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية:

1) إذا كان اليوم هو الجمعة، فإنه لا يوجد دوام مدرسي. **الفرض: اليوم هو الجمعة؛ النتيجة: لا يوجد دوام مدرسي.**

2) إذا كان $x-8=32$، فإن $x=40$. **الفرض: $x-8=32$ ؛ النتيجة : $x=40$**

3) إذا كان لمضلع أربع زوايا قائمة، فإن المضلع مستطيل. **الفرض: لمضلع أربع زوايا قائمة؛ النتيجة: المضلع مستطيل.**

اكتب العبارات الآتية على صورة (إذا... فإن..):

4) كل القِردة تُحب الموز. **إذا كان الحيوان قردًا، فإنه يحب الموز.**

5) مجموع قياسَي الزاويتين المتتامتين يساوي $90°$. **إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما يساوي $90°$.**

6) النقاط الواقعة على استقامةٍ واحدةٍ هي النقاط التي تقع على المستقيم نفسه.
إذا كانت النقاط على استقامة واحدة، فإنها تقع على المستقيم نفسه.

حدّد قيمة الصواب لكل عبارةٍ شرطيةٍ فيما يأتي، وإذا كانت صائبة، فوضّح تبريرك، وإن لم تكن كذلك، فأعطِ مثالًا مضادًّا:

7) إذا كان اليوم هو الأربعاء، فإن أمس كان الجمعة.
خاطئة، عندما يكون الفرض صحيحًا، تكون النتيجة خاطئة، فإذا كان اليوم هو الأربعاء فيوم أمس هو الثلاثاء. وهذا المثال المضاد يثبت أن العبارة خاطئة.

8) إذا كان a عددًا موجبًا، فإن $10a$ أكبر من a.
صائبة؛ عندما يكون الفرض صائبًا، تكون النتيجة صائبة أيضًا، فعندما يكون a موجبًا، يكون $10a$ أكبر من a دائمًا.

الصف: الأول الثانوي 16 الفصل 1: التبرير والبرهان

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (17) دون

الاسم ______________ التاريخ ______________

1-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

العبارات الشرطية

العبارات الشرطية المترابطة:

إذا غيّرت الفرض أو النتيجة في العبارة الشرطية، فإنك ستحصل على العبارات الشرطية المترابطة. ويبيّن الجدول أدناه ثلاثة أنواع من العبارات الشرطية المترابطة هي: العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي، وكيفية ارتباطها بالعبارة الشرطية.

العبارة	بالرموز	مكوّنة من	أمثلة
العبارة الشرطية	$p \to q$	فرض مُعطًى ونتيجة	إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما متطابقتان.
العكس	$q \to p$	تبديل الفرض والنتيجة	إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإنهما متقابلتان بالرأس.
المعكوس	$\sim p \to \sim q$	نفي كلٍّ من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.	إذا لم تكن الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما غير متطابقتين.
المعاكس الإيجابي	$\sim q \to \sim p$	نفي كلٍّ من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية، ومن ثم تبديل موقعَيهما.	إذا لم تكن الزاويتان متطابقتين، فإنهما غير متقابلتين بالرأس.

ويمكن تحديد قيم صواب العبارات الشرطية المترابطة (T) أو (F):

العبارات المتكافئة منطقيًّا: العبارات التي لها قيم الصواب نفسها، تُسمَّى عبارات متكافئة منطقيًّا.

أمثلة:

1) العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي متكافئتان منطقيًّا.
2) عكس العبارة الشرطية ومعكوسها متكافئتان منطقيًّا.
3) $\sim(p \wedge q)$ تكافئ منطقيًّا $\sim p \vee \sim q$
4) $\sim(p \vee q)$ تكافئ منطقيًّا $\sim p \wedge \sim q$

تمارين

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لكلٍّ من العبارات الشرطية الآتية، وحدّد ما إذا كانت العبارة الشرطية المرتبطة صائبة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فأعطِ مثالًا مضادًّا.

1) إذا كنت تقيم في الرياض، فإنك تقيم في المملكة العربية السعودية.
العكس: إذا كنت تقيم في السعودية، فإنك تقيم في الرياض. خاطئة؛ فقد تكون مقيمًا في الدمام أو في أيّ مكان في السعودية غير الرياض.
المعكوس: إذا لم تكن مقيمًا في الرياض، فإنك لا تقيم في السعودية. خاطئة؛ فقد تكون مقيمًا في نجران في السعودية.
المعاكس الإيجابي: إذا لم تكن مقيمًا في السعودية، فإنك لا تقيم في الرياض. صائبة.

2) إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسَيهما يساوي $90°$.
العكس: إذا كان مجموع قياسَي زاويتين يساوي $90°$، فإن الزاويتين متتامتان. صائبة.
المعكوس: إذا لم تكن الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسَيهما لا يساوي $90°$. صائبة.
المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن مجموع قياسَي زاويتين يساوي $90°$، فإن الزاويتين غير متتامتين. صائبة.

3) أوجد قيم الصواب للعبارتين $\sim(p \wedge \sim q), \sim p \vee q$،
ثم قرّر هل هما متكافئتان منطقيًّا أم لا؟
متكافئتان منطقيًّا

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$\sim p \vee q$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

الصف: الأول الثانوي 17 الفصل 1: التبرير والبرهان

تدريبات المهارات (18) دون ضمن

الاسم ______________ التاريخ ______________

1-3 تدريبات المهارات

العبارات الشرطية

حدّد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية:

1) إذا اشتريت ثلاجة، فإنك ستحصل على خلاط كهربائي مجاني.
الفرض: اشتريت ثلاجة.
النتيجة: ستحصل على خلاط كهربائي مجاني.

2) إذا كان $x+8=4$ ، فإن $x=-4$.
الفرض: $x+8=4$ ؛ النتيجة: $x=-4$.

3) إذا تفوّق أحمد في الدراسة، فإنه سيُكافأ برحلة سياحية إلى أبها.
الفرض: تفوق أحمد في الدراسة؛ النتيجة: سيكافأ برحلة سياحية إلى أبها.

اكتب العبارات الشرطية الآتية في صورة (إذا... فإن...):

4) المضلع ذو الأضلاع الأربعة شكل رباعي. **إذا كان للمضلع أربعة أضلاع، فإنه شكل رباعي.**

5) قياس الزاوية الحادة أقل من $90°$. **إذا كانت الزاوية حادة، فإن قياسها أقل من $90°$.**

حدّد قيمة الصواب لكلٍّ من العبارات الشرطية الآتية، فإذا كانت صحيحة فوضّح تبريرك. وإذا لم تكن كذلك فأعطِ مثالًا مضادًّا.

6) إذا كان لديك 5 ريالاتٍ، فإن لديك 5 أوراق نقدية من فئة الريال الواحد.
خاطئة؛ قد يكون لديك ورقة واحدة من فئة خمسة ريالات، الفرض صحيح والنتيجة خاطئة. هذا المثال المضاد يبيّن أن العبارة الشرطية خاطئة.

7) إذا رُمي مكعبان عدديان، وكان مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين يساوي 11، فإن أحد هذين العددين يكون 5.
صحيحة؛ عندما يكون الفرض صحيحًا تكون النتيجة صحيحة. فلا يمكن أن يكون المجموع 11، إلا إذا كان أحد العددين 6 والآخر 5، إذن العبارة الشرطية صحيحة.

8) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإن إحداهما تكون زاويةً حادةً.
خاطئة؛ يمكن أن تكون الزاويتان قائمتين. الفرض صحيح ولكن النتيجة خاطئة. هذا المثال المضاد يبيّن أن العبارة الشرطية غير صحيحة.

9) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الآتية، وحدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فاكتب مثالًا مضادًّا. "إذا كان 89 يقبل القسمة على 2، فإن 89 عدد زوجيٌّ".
العكس: إذا كان 89 عددًا زوجيًا، فإن 89 يقبل القسمة على 2؛ صحيحة.
المعكوس: إذا لم يقبل 89 القسمة على 2، فإن 89 ليس عددًا زوجيًا؛ صحيحة.
المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن 89 عددًا زوجيًا، فإن 89 لا يقبل القسمة على 2؛ صحيحة.

الصف: الأول الثانوي 18 الفصل 1: التبرير والبرهان

تدريبات حل المسألة (19) دون ضمن فوق

الاسم ______________ التاريخ ______________

1-3 تدريبات حل المسألة

العبارات الشرطية

1) **أبحاث طبية:** قرأ عليّ في أحد الأبحاث أن الأشخاص الذين يتعرضون لأشعة الشمس فترات طويلة يكُونون أكثر عرضة للإصابة بسرطان الجلد، فهل يمكن أن يستنتج عليٌّ من هذه المعلومة أنه سيقلل احتمال إصابته بسرطان الجلد، إذا امتنع عن التعرض لأشعة الشمس فتراتٍ طويلة؟
لا؛ قد تكون هناك أنشطة أخرى تزيد احتمال الإصابة بسرطان الجلد، وليس لها علاقة بالتعرض لأشعة الشمس.

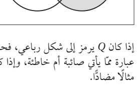
2) **ميراث:** يقول زيد: إن نصيبي من ميراث أبي سيكون مثل نصيب أخي بحسب القواعد الشرعية، اكتب هذه العبارة في صورة (إذا ... فإن...).
إذا اتبعنا القواعد الشرعية، فإن نصيبي من ميراث أبي سيكون مثل نصيب أخي.

3) **الحجز الإلكتروني:** يتضمن موقع إلكتروني لحجز تذاكر الطيران الخيار:
"إذا كنت تريد تحديد مقعدك في الطائرة، فادفع رسومًا إضافيةً مقدارها 20 ريالًا".
اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لهذه العبارة.
العكس: إذا دفعت رسومًا إضافية مقدارها 20 ريالًا، فإنك تستطيع تحديد مقعدك في الطائرة.
المعكوس: إذا كنت لا تريد تحديد مقعدك في الطائرة، فلن تدفع 20 ريالًا رسومًا إضافية.
المعاكس الإيجابي: إذا لم تدفع رسومًا إضافية مقدارها 20 ريالًا، فإنك لن تستطيع تحديد مقعدك في الطائرة.

4) **دواء:** كُتب على قارورة دواء العبارة الآتية "إذا كنت ستقود السيارة، فيجب ألّا تتناول هذا الدواء"، اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لهذه العبارة.
العكس: إذا كان عليك ألّا تتناول هذا الدواء، فإنك ستقود السيارة. المعكوس: إذا لم تكن تريد أن تقود السيارة، فإنه يمكنك أن تتناول هذا الدواء. المعاكس الإيجابي: إذا كان بإمكانك تناول هذا الدواء، فإنك لا تريد أن تقود السيارة.

5) **أشكال ڤن:** رسم عاصم شكل ڤن؛ ليوضح العلاقة بين الأشكال الرباعية والمستطيلات والمربعات والمعيَّنات.
(إرشادٌ: المُعين شكل رباعي له أربعة أضلاع متطابقة).

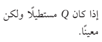
الأشكال الرباعية



إذا كان Q يرمز إلى شكل رباعي، فحدّد ما إذا كانت كل عبارة ممّا يأتي صائبة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فأعطِ مثالًا مضادًّا.

a) إذا كان Q مربعًا، فإن Q مستطيل. **صائبة**

b) إذا لم يكن Q مستطيلًا، فإن Q ليس معيَّنًا. **خاطئة**



c) إذا كان Q مستطيلًا ولكن ليس مربعًا، فإن Q ليس معينًا.
صائبة

d) إذا لم يكن Q معيَّنًا، فإن Q ليس مربعًا.
خاطئة

الصف: الأول الثانوي 19 الفصل 1: التبرير والبرهان

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 1

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (20) ضمن فوق

الاسم ______ التاريخ ______

1-3 التدريبات الإثرائية

إثبات التكافؤ المنطقي:

تكون العبارتان متكافئتين منطقيًّا، إذا كان لهما قيم الصواب نفسها. هناك طريقة أخرى لإثبات التكافؤ المنطقي لبعض العبارات دون اللجوء لجداول الصواب، ولكن بالاعتماد على:

1) $\sim(p \wedge q)$ يكافئ منطقيًّا $\sim p \vee \sim q$

2) $\sim(p \vee q)$ يكافئ منطقيًّا $\sim p \wedge \sim q$

3) p يكافئ منطقيًّا $\sim(\sim p)$

4) خاصية التعدي للتكافؤ المنطقي.

مثال استعمل القواعد أعلاه لإثبات أن: $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ تكافئ منطقيًّا $p \vee q$

الحل:

$\sim(\sim p \wedge \sim q)$ تكافئ منطقيًّا $\sim(\sim p) \vee \sim(\sim q)$ بحسب القاعدة 1

$\sim(\sim p) \vee \sim(\sim q)$ تكافئ منطقيًّا $p \vee q$ بحسب القاعدة 3

إذن:

$\sim(\sim p \wedge \sim q)$ تكافئ منطقيًّا $p \vee q$ بحسب القاعدة 4

تمارين

أثبت أن كلًّا من العبارتين متكافئتان منطقيًّا فيما يأتي:

1) $\sim(\sim p \vee \sim q)$ ، $p \wedge q$

$\sim(\sim p \vee \sim q)$ **تكافئ منطقيًا** $\sim(\sim p) \wedge \sim(\sim q)$ **بحسب القاعدة 2**

$\sim(\sim p) \wedge \sim(\sim q)$ **تكافئ منطقيًا** $p \wedge q$ **بحسب القاعدة 3**

إذن:

$\sim(\sim p \vee \sim q)$ **تكافئ منطقيًا** $p \wedge q$ **بحسب القاعدة 4**

2) $\sim(p \wedge (q \vee \sim r))$ ، $\sim p \vee (\sim q \wedge r)$

$\sim(p \wedge (p \vee \sim r))$ **تكافئ منطقيًا** $\sim p \vee \sim(q \vee \sim r)$ **بحسب القاعدة 1**

$\sim p \vee \sim(q \vee \sim r)$ **تكافئ منطقيًا** $\sim p \vee (\sim q \wedge \sim(\sim r))$ **بحسب القاعدة 2**

$\sim p \vee (\sim q \wedge \sim(\sim r))$ **تكافئ منطقيًا** $\sim p \vee (\sim q \wedge r)$ **بحسب القاعدة 3**

إذن:

$\sim(p \wedge (p \vee \sim r))$ **تكافئ منطقيًا** $\sim p \vee \sim(q \vee \sim r)$ **بحسب القاعدة 4**

الصف: الأول الثانوي　　20　　الفصل 1: التبرير والبرهان

كتاب التمارين (8) دون ضمن فوق

3 - 1 العبارات الشرطية

الفصل الأول التبرير والبرهان

حدد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارتين الشرطيتين الآتيتين:

1) إذا كان $3x + 4 = -5$ ، فإن $x = -3$

الفرض: $3x + 4 = -5$ ؛ النتيجة: $x = -3$

2) إذا التحقت بنادي العلوم، فسوف تشارك في مسابقات عالمية.

الفرض: التحقت بنادي العلوم .

النتيجة: سوف تشارك في مسابقات عالمية .

اكتب كلًّا من العبارتين الشرطيتين الآتيتين على صورة (إذا... فإن...) :

3) لا يُلدغ المؤمن من جحر مرتين.

إذا كان الشخص مؤمنًا ، فإنه لن يلدغ من جحر مرتين.

4) الزاويتان المتجاورتان لهما رأس وضلع مشتركان.

إذا كانت الزاويتان متجاورتين، فإن لهما رأسًا وضلعًا مشتركين.

حدد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية فيما يأتي، وإذا كانت العبارة صحيحة ، ففسِّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًّا :

5) إذا كان a و b عددين سالبين، فإن $a + b$ يكون عددًا سالبًا.

صحيحة؛ عندما يكون الفرض صحيحًا، والنتيجة صحيحة أيضًا، تكون العبارة الشرطية صحيحة أيضًا.

6) إذا كانت قياسات زوايا مثلثين متساوية، فإن المثلثين متطابقان.

خاطئة ؛ يمكن أن تكون قياسات زوايا مثلثين $30°, 60°, 90°$، ولكن أطوال أضلاع أحدهما $1, 2, \sqrt{3}$، وأطوال أضلاع الآخر $3, 6, 3\sqrt{3}$ ؛ أيْ أن الفرض صحيح، لكن النتيجة خاطئة. وهذا المثال المضاد يبين أن العبارة الشرطية خاطئة .

7) إذا كانت الفراشة أثقل وزنًا من الفيل، فإن هذا الشهر هو شهر صفر.

صحيحة؛ الفرض خاطئ ؛ لأن الفراشة ليست أثقل وزنًا من الفيل، وبما أن الفرض خاطئ، فإن العبارة الشرطية صحيحة دائمًا .

هندسة معمارية : استعمل المعلومات الآتية لحل السؤالين 8 و 9.

"يرتدي المهندس المعماري قبعة واقية".

8) اكتب العبارة الشرطية على الصورة (إذا ... فإن ...) **إذا كان الشخص مهندسًا معماريًا، فإنه يرتدي قبعة واقية.**

9) اكتب عكس العبارة الشرطية. **إذا ارتدى الشخص قبعة واقية، فإنه مهندس معماري.**

8

1-4 التبرير الاستنتاجي
Deductive Reasoning

فيما سبق:

درستُ استعمال التبرير الاستقرائي لتحليل الأنماط ووضع تخمينات.

(الدرس 1-1)

والآن:

- أستعمل قانون الفصل المنطقي للتبرير الاستنتاجي.
- أستعمل قانون القياس المنطقي للتبرير الاستنتاجي.

المفردات:

التبرير الاستنتاجي
deductive reasoning

قانون الفَصل المنطقي
Law of Detachment

قانون القياس المنطقي
Law of Syllogism

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عندما يقوم المحققون بتحليل قضية جنائية، فإنهم يجمعون الأدلة مثل بصمات الأصابع، ويستعملونها لتقليص قائمة الاتهام، باستبعاد المتهمين وتحديد الجاني في نهاية الأمر.

التبرير الاستنتاجي: الطريقة التي يستعملها المحققون من أجل تحديد الجاني تُسمى التبرير الاستنتاجي.

وكما ترى فإن **التبرير الاستنتاجي** يستعمل حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص من أجل الوصول إلى نتائج منطقية من عبارات معطاة، على خلاف التبرير الاستقرائي الذي تستعمل فيه أنماط من الأمثلة أو المشاهدات لعمل تخمين.

مثال 1 من واقع الحياة **التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي**

حدِّد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلٍّ مما يأتي:

a) في كل مرة تستخدم هند الخلطة الجاهزة لإعداد قالب كيك، تلاحظ أن قالبها صغير لا يكفي لخبز الكيك، جهزت هند اليوم خلطة الكيك فاستنتجت أنَّ قالبها لن يكفي لخبز الكيك.

اعتمدت هند على المشاهدات للتوصل إلى النتيجة، فهي بذلك استعملت التبرير الاستقرائي.

b) إذا تأخر مشاري عن دفع قسط سيارته، فإنه سيقوم بدفع غرامة تأخير مقدارها 150 ريالًا. تأخر مشاري عن دفع قسط هذا الشهر، فاستنتج أن عليه دفع غرامة مقدارها 150 ريالًا.

اعتمد مشاري على حقائق ينصُّ عليها عقد البيع في الحصول على النتيجة؛ لذا فقد استعمل التبرير الاستنتاجي.

تحقق من فهمك

1A) يُجري طالب مرحلة ابتدائية تجربة دمج الألوان في المختبر، فقام بثلاث محاولات للحصول على درجة معينة من اللون الرمادي، فاكتشف أنه كلما زادت كمية اللون الأسود كانت درجة اللون الرمادي أغمق. التبرير الاستقرائي

1B) دُعي خالدٌ إلى حفل عشاء، وقد حضر جميع المدعوين الحفل؛ إذن فقد حضر خالد الحفل. التبرير الاستنتاجي

قانون الفصل المنطقي: يستعمل المثال المضاد لإثبات عدم صحة التخمين الذي يتم التوصل إليه عن طريق التبرير الاستقرائي، ولا يعد المثال طريقة صائبة لإثبات صحة التخمين. فلإثبات صحة التخمين يجب استعمال التبرير الاستنتاجي، وأحد أشكاله **قانون الفَصل المنطقي**.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-1

تحديد قيمة الصواب للعبارة الشرطية، والعكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي لها.

الدرس 4-1

استعمال قانون الفصل المنطقي للتبرير الاستنتاجي.

استعمال قانون القياس المنطقي للتبرير الاستنتاجي.

ما بعد الدرس 4-1

استعمال التبرير المنطقي لإثبات صحة العبارات، ولإيجاد أمثلة مضادة لتفنيد العبارات الخاطئة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا ؟".

واسأل:

- ما الأدلة الأُخرى التي يمكن أن يجمعها المحقق؟ إجابة ممكنة: عيِّنات من الشعر أو أدوات الجريمة.
- لماذا يُعد تقليص قائمة الاتهام باستبعاد المتهمين أمرًا مفيدًا للمحقق؟ إجابة ممكنة: لكي يتمكن المحقق من التركيز في جمع أدلة أكثر عن مجموعة صغيرة من الأشخاص.
- اذكر بعض سلبيات استعمال بصمات الأصابع بوصفها دليلًا. إجابة ممكنة: أحيانًا قد لا يترك الجاني آثارًا لبصماته.

مصادر الدرس 4-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (44)	• تنويع التعليم، ص (39, 44)	• تنويع التعليم، ص (39)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (9)	• كتاب التمارين، ص (9)	• كتاب التمارين، ص (9)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

مفهوم أساسي — قانون الفَصل المنطقي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ صائبة، والفرض p صائبًا، فإن النتيجة q تكون صائبة أيضًا.

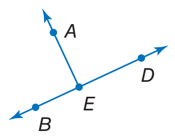
مثال: المعطيات: إذا لم يكن في السيارة وقود، فإنها لن تعمل.
لا يوجد وقود في سيارة عبدالله.

نتيجة صائبة: لن تعمل سيارة عبدالله.

عندما تكون العبارات المعطاة صائبة، فإن النتائج التي تتوصل إليها بتطبيق التبرير الاستنتاجي حتمًا تكون صائبة.

مثال 2 استعمال قانون الفَصل المنطقي

حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا في كلٍّ مما يأتي أم لا اعتمادًا على المعطيات. فسّر تبريرك.



a) المعطيات:
- إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإن ضلعيهما غير المشتركين يكوّنان نصفَي مستقيم متعاكسين.
- $\angle AEB$ و $\angle AED$ متجاورتان علي مستقيم.

الاستنتاج: $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EB}$ نصفا مستقيم متعاكسان.

الخطوة 1: حدّد الفرض p والنتيجة q للعبارة الشرطية الصائبة.
p: زاويتان متجاورتان على مستقيم.
q: ضلعاهما غير المشتركين يكونان نصفَي مستقيم متعاكسين.

الخطوة 2: حلل النتيجة.
العبارة المعطاة $\angle AED$ و $\angle AEB$ متجاورتان على مستقيم تحقق الفرض. إذن p عبارة صائبة. وبتطبيق قانون الفصل المنطقي، تكون العبارة $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EB}$ نصفا مستقيم متعاكسان، التي تمثل q نتيجة صائبة.

b) المعطيات:
- عندما يذهب مالك إلى النادي الرياضي، فإنه يرتدي ملابس رياضية.
- ارتدى مالك ملابس رياضية.

الاستنتاج: ذهب مالك إلى النادي الرياضي.

الخطوة 1: p: ذهب مالك إلى النادي الرياضي.
q: ارتدى مالك ملابس رياضية.

الخطوة 2: العبارة المعطاة "ارتدى مالك ملابس رياضية" تحقق النتيجة q للعبارة الشرطية الصائبة. لكن كون العبارة الشرطية صائبة، ونتيجتها صائبة أيضًا، لا يعني صواب الفرض، فقد يرتدي مالك ملابس رياضية، ولا يذهب إلى النادي الرياضي؛ وبذلك تكون النتيجة خاطئة.

تحقق من فهمك

2A) المعطيات:
- إذا كانت ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة، فإنها تحدد مستوى.
- النقاط A, B, C تقع في المستوى G.

الاستنتاج: النقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة.

2B) المعطيات:
- إذا أحضر الطالب موافقة من ولي أمره، فإنه يمكنه الذهاب في الرحلة المدرسية.
- أحضر سلمان موافقة من ولي أمره. صائبة؛ قانون الفصل المنطقي

الاستنتاج: يمكن أن يذهب سلمان في الرحلة المدرسية.

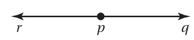
2A) غير صائبة؛ قد تقع النقاط A, B, C في المستوى G وتكون على استقامة واحدة.

إرشادات للدراسة

المعلومات المعطاة من الآن فصاعدًا اعتبر جميع المعطيات في الكتاب صائبة.

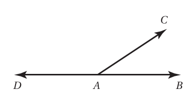
إرشادات للدراسة

نصفا المستقيم المتعاكسان هما نصفا المستقيم نفسه لهما نقطة البداية نفسها، ولكن باتجاهين متعاكسين.



$\overrightarrow{pq}$, $\overrightarrow{pr}$
نصفا مستقيم متعاكسان

الزاويتان المتجاورتان على مستقيم هما زاويتان متجاورتان؛ بحيث يكوّن ضلعاهما غير المشتركين نصفَي مستقيم متعاكسين.



$\angle DAC$, $\angle BAC$
متجاورتان على مستقيم

قانون الفَصل المنطقي

المثال 1 يبيّن كيفية التمييز بين التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي.

المثال 2 يبيّن كيفية استعمال قانون الفَصل المنطقي.

المثال 3 يبيّن كيفية استعمال أشكال ڤن لاختبار صحة النتيجة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

1 طقس: حدِّد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) لاحظ محمد في السنوات السابقة أن أعلى معدل لتساقط الأمطار في بلدته يكون خلال شهر فبراير، فاعتقد أن شهر فبراير من هذه السنة سيشهد أعلى معدل لتساقط الأمطار. التبرير الاستقرائي: النتيجة التي استنتجها محمد قائمة على نمط من المشاهدات.

b) تعلّمت ساجدة أنه في حالة وجود غيوم ليلًا، فإن الجو صباحًا يكون أقل برودةً منه في حالة عدم وجود الغيوم ليلًا. علمت ساجدة أن الجو سيكون غائمًا هذه الليلة، ولذلك اعتقدت أن الجو لن يكون باردًا صباح الغد. التبرير الاستنتاجي؛ استعملت ساجدة الحقائق التي تعلمتها حول الغيوم ودرجة الحرارة.

إرشادات للمعلم الجديد

قانون الفَصل المنطقي: أخبر الطلاب أن قانون الفَصل المنطقي هو نتيجة مباشرة لما تعلموه عن العبارة الشرطية وقيم الصواب لها.

يمكنك استعمال أشكال فن لاختبار صحة الاستنتاج.

مثال 3 من واقع الحياة — الحكم على الاستنتاج باستعمال أشكال فن

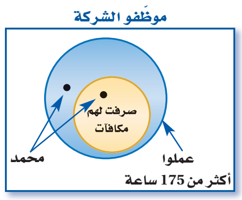
مكافآت وحوافز: صرفت شركة خاصة مكافآت وحوافز لبعض موظفيها؛ بناءً على المعلومات أدناه. حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا، اعتمادًا على المعطيات.

المعطيات:
- إذا صُرف للموظف مكافأة، فإن عدد ساعات عمله تكون قد تجاوزت 175 ساعةً في الشهر.
- تجاوز عدد الساعات التي عملها محمد 175 ساعة في الشهر.

الاستنتاج: صُرف لمحمد مكافأة.

افهم: ارسم شكل فن بناءً على المعطيات، عدد ساعات العمل للموظف الذي صُرفت له المكافأة أكثر من 175 ساعةً؛ لذا ارسم دائرةً تمثل الموظفين الذين تجاوز عدد ساعات عملهم 175 ساعةً.

خطط: بما أن عدد ساعات العمل للموظفين الذين صُرفت لهم مكافآت أكثر من 175 ساعةً؛ إذن هم يمثلون مجموعة جزئية من الموظفين الذين عملوا أكثر من 175 ساعةً.



حل: بما أن عدد ساعات عمل محمد أكثر من 175 ساعةً؛ إذن هذا يضعه داخل دائرة الموظفين الذين تجاوز عدد ساعات عملهم 175 ساعةً، لكن ليس بالضرورة داخل دائرة من صُرفت لهم مكافآت، فربما يكون داخل الدائرة أو خارجها، وعليه فالاستنتاج غير صائب.

تحقق: نعرف انه إذا صرف للموظف مكافأة، فإن عدد ساعات عمله تكون قد تجاوزت 175 ساعةً، لكن لا نعرف أن كل موظف تجاوزت عدد ساعات عمله 175 ساعةً قد صرفت له مكافأة.

تحقق من فهمك

3) **المعطيات:**
- إذا كان الشكل مربعًا، فإنه مضلع.
- الشكل A مربع.

الاستنتاج: الشكل A مضلع.

قانون القياس المنطقي: قانون القياس المنطقي هو طريقة أخرى للتبرير الاستنتاجي، وباستعمال هذا القانون يمكنك الحصول على نتائج من عبارتين شرطيتين صائبتين، وذلك عندما تكون نتيجة العبارة الشرطية الأولى هي الفرض في العبارة الشرطية الثانية.

مفهوم أساسي — قانون القياس المنطقي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت العبارتان الشرطيتان $p \to q$ ، $q \to r$ صائبتين، فإن العبارة الشرطية $p \to r$ صائبة أيضًا.

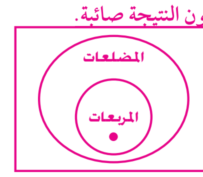
مثال:
المعطيات: إذا حصلت على عمل، فسوف تكسب نقودًا،
إذا كسبت نقودًا، فسوف تتمكن من شراء سيارة.
نتيجة صائبة: إذا حصلت على عمل، فسوف تتمكن من شراء سيارة.

من المهم أن تتذكر أنه إذا لم تكن نتيجة العبارة الأولى هي الفرض في العبارة الثانية، فلا يمكنك استعمال قانون القياس المنطقي للحصول على نتيجة صائبة.

الربط مع الحياة

حوافز: هي وسائل وعوامل من شأنها حثّ الموظفين والعمال على أداء أعمالهم بجدٍّ وإخلاص، وتشجعهم على بذل أكبر جهد في مجال الإنتاج، وهي تتنوع ما بين الحوافز المادية كالتقدير المادي، والحوافز المعنوية كالمشاركة في الأهداف المستقبلية وشهادات التقدير وغيرها.

3) صائبة؛ يقع هذا الشكل في دائرة المربعات التي تقع داخل دائرة المضلعات؛ لذا تكون النتيجة صائبة.



إرشادات للدراسة

الدليل المنطقي يكون مدعومًا بقوانين المنطق، ويختلف عن الدليل الإحصائي المدعوم بالأمثلة أو البيانات.

مثالان إضافيان

2 حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

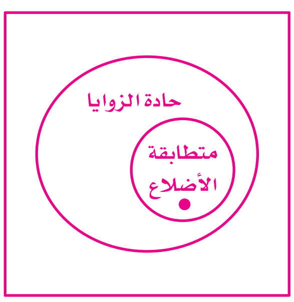
المعطيات: إذا كان الشكل مربعًا فإنه متوازي أضلاع.
الشكل متوازي أضلاع.

النتيجة: الشكل مربع. خاطئة؛ يمكن أن يكون الشكل مستطيلًا.

3 حدِّد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك باستعمال أشكال فن.

المعطيات: إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فإنه حادُّ الزوايا.
المثلث متطابق الأضلاع.

النتيجة: المثلث حادُّ الزوايا.



من المعطيات، جميع المثلثات المتطابقة الأضلاع تكون حادة الزوايا، إذن النتيجة صحيحة.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع: اكتب مثالًا تستعمل فيه قانون القياس المنطقي.

إجابة ممكنة :
1) إذا كنت منظمًا، فإن لديك عادات دراسية جيدة.
2) إذا كانت لديك عادات دراسية جيدة، فإنك ستحصل على درجات مرتفعة.
3) نتيجة صحيحة: إذا كنت منظمًا، فإنك ستحصل على درجات مرتفعة.

مثال 4 من الاختبار المعياري

أي العبارات الآتية تنتج منطقيًا عن العبارتين الآتيتين؟

(1) إذا أمطرت اليوم فسوف تؤجل المباراة.

(2) إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تؤجل المباراة.

A إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تمطر اليوم.

B إذا أمطرت اليوم فسوف يعتذر أحد الفريقين.

C إذا لم تمطر فلن يعتذر أحد الفريقين.

D إذا لم تؤجل المباراة فإن الجو غير ممطر.

اقرأ فقرة الاختبار

افترض أن p, q, r تمثل أجزاء العبارتين الشرطيتين المعلومتين.

p: أمطرت اليوم

q: تأجلت المباراة

r: اعتذر أحد الفريقين

حُل فقرة الاختبار

حلِّل منطقيًّا العبارتين الشرطيتين باستعمال الرموز.

العبارة (1): $p \rightarrow q$ العبارة (2): $r \rightarrow q$

يمكن اعتبار كلٍّ من العبارتين الشرطيتين صائبة، ومع ذلك لا يمكن استعمال قانون القياس المنطقي؛ لأن نتيجة العبارة الشرطية الأولى ليست فرضًا للعبارة الشرطية الثانية. وعلى الرغم من أنه يحتمل أن تكون العبارات A, B, C صائبة إلا أن المنطق الذي استُعمل فيها غير صائب؛ لذلك تكون D هي الإجابة الصائبة.

✓ تحقق من فهمك

4) أيُّ العبارات الآتية تنتج منطقيًا عن العبارتين الآتيتين؟ **B**

(1) إذا لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم، فسوف تكون مرهقًا.

(2) إذا كنت مرهقًا، فلن يكون أداؤك في الاختبار جيدًا.

A إذا كنت مرهقًا، إذن أنت لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم.

B إذا لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم، فلن يكون أداؤك في الاختبار جيدًا.

C إذا لم يكن أداؤك في الاختبار جيدًا، فإنك لم تأخذ قسطًا كافيًا من النوم.

D لا توجد نتيجة صائبة.

مثال 5 تطبيق قوانين التبرير الاستنتاجي

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة فاكتب "لا نتيجة صائبة"، وفسِّر تبريرك.

المعطيات: • إذا كان عمرك 18 عامًا، فإنه يمكنك التقدم للحصول على رخصة قيادة السيارات.

• عُمر سلمان 18 عامًا.

p: عمرك 18 عامًا.

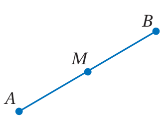
q: يمكنك التقدم للحصول على رخصة قيادة السيارات.

بما أن عمر سلمان 18 عامًا، فذلك يحقق الفرض p. وبتطبيق قانون الفصل المنطقي، تكون العبارة: "يمكن أن يتقدم سلمان للحصول على رخصة القيادة" نتيجة صائبة.

✓ تحقق من فهمك

5) **المعطيات:** • إذا كانت القطعتان المستقيمتان متطابقتين فإن طوليهما متساويان.

• M نقطة منتصف $\overline{AB}$. $AM = MB$؛ قانون الفصل المنطقي



قانون القياس المنطقي

المثالان 4, 5 يبينان كيفية استعمال قانون القياس المنطقي.

مثالان إضافيان

4 **مثال من الاختبار المعياري:** أيُّ العبارات تنتج منطقيًا من العبارتين الآتيتين؟ **B**

1) إذا أنهى جمال واجبه المنزلي، فإنه سيذهب مع زملائه.

2) إذا ذهب جمال مع زملائه، فإنه سيذهب إلى المتنزه.

A إذا ذهب جمال مع زملائه، فإنه يكون قد أنهى واجبه المنزلي.

B إذا أنهى جمال واجبه المنزلي، فسيذهب إلى المتنزّه.

C إذا لم يذهب جمال إلى المتنزه، فإنه لم يذهب مع زملائه.

D إذا لم يُنه جمال واجبه المنزلي، فإنه لن يذهب إلى المتنزّه.

5 استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صحيحة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته، وإذا تعذَّر الحصول على نتيجة صحيحة فاكتب "لا نتيجة صحيحة". وفسِّر تبريرك.

المعطيات: • إذا تغيّب أكثر من 10 أعضاء فلن يُعقد الاجتماع.

• تغيّب 12 عضوًا.

p: تغيب أكثر من 10 أعضاء.

q: لن يُعقد الاجتماع. وبما أن 12 عضوًا تغيبوا؛ إذن P عبارة صحيحة. وباستعمال قانون الفصل تكون النتيجة الصحيحة هي: لن يُعقد الاجتماع.

تنبيه!

ترتيب العبارات: عند استعمال قانون القياس المنطقي، ذكِّر الطلاب بأن ترتيب العبارات مهم، بحيث تكون نتيجة العبارة الشرطية الأولى فرضًا للعبارة الشرطية الثانية، وهكذا.

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيلات صوتية: اطلب إلى الطلاب إعداد تسجيلات صوتية تتضمن شرحًا لقانونَي الفصل والقياس المنطقي بكلماتهم الخاصة، وتقديم مثال على كل قانون.

تأكد

المثال 1 حدد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) جميع الطلاب الذين تم تكريمهم معدلهم العام يزيد على 95% . محمد من الطلاب الذين تم تكريمهم؛ إذن معدل محمد العام يزيد على 95%. التبرير الاستنتاجي

2) لاحظ خالد أن جاره يسقي أشجار حديقته كل يوم جمعة. واليوم هو الجمعة، فاستنتج أن جاره سوف يسقي أشجار حديقته اليوم. التبرير الاستقرائي

المثال 2 حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

3) **المعطيات:** • إذا كان العدد يقبل القسمة على 4، فإنه يقبل القسمة على 2 .
• العدد 12 يقبل القسمة على 4.
الاستنتاج: العدد 12 يقبل القسمة على 2. صائبًا؛ قانون الفصل المنطقي

4) **المعطيات:** • إذا ذهب فيصل إلى النوم متأخرًا، فسوف يكون مرهقًا في اليوم التالي.
• فيصل مرهق.
الاستنتاج: ذهب فيصل إلى النوم متأخرًا. غير صائب؛ قد يكون فيصل مرهقًا بسبب تمرين رياضي شاق.

المثال 3 حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسر تبريرك باستعمال أشكال ڤن. 5, 6 انظر الهامش.

5) **المعطيات:** • إذا كان الشاطئ عامًّا، فإنه لا يوجد فيه منقذون.
• الشاطئ الجنوبي لا يوجد فيه منقذون.
الاستنتاج: الشاطئ الجنوبي عام.

6) **المعطيات:** • إذا اجتاز الطلاب اختبار القبول، فسوف يُقبَلون في الكلية.
• اجتاز عبدالله اختبار القبول.
الاستنتاج: سيُقبَل عبدالله في الكلية.

المثال 4 7) **اختيار من متعدد:** أيُّ العبارات الآتية تنتج منطقيًّا عن العبارتين (1)، (2)؟ C

(1) إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن قياس إحدى زواياه 90°

(2) إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث 90°، فإن زاويتيه الحادتين تكونان متتامتين.

A إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإنه يحوي زاوية قياسها 90°.

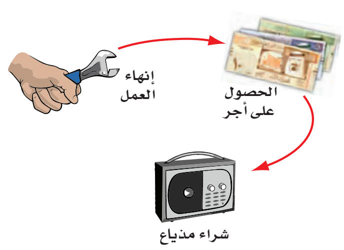
B إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث 90°، فإن زاويتيه الحادتين لا تكونان متتامتين.

C إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن زاويتيه الحادتين متتامتان.

D إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث 90°، فإنه لا يكون مثلثًا قائم الزاوية.

المثال 5 استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسِّر تبريرك.

8) **المعطيات:** • إذا أنهى وليد عمله، فإنه سيحصل على أجر.
• إذا حصل وليد على أجر، فإنه سيشتري مذياعًا.



9) **المعطيات:** الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.
$\angle 1 \cong \angle 2$

8) إذا أنهى وليد عمله، فسوف يشتري مذياعًا؛ قانون القياس المنطقي.
9) لا نتيجة صائبة؛ قد تكون $\angle 1, \angle 2$ متطابقتين، ولكنهما غير متقابلتين بالرأس.

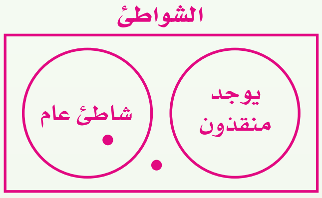
3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-9 للتحقق من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

5) غير صائب؛ يمكن أن يكون الشاطئ الجنوبي داخل الدائرة التي تمثل الشاطئ العام أو خارجها.



6) صائب، يقع عبد الله ضمن مجموعة الطلاب الذين اجتازوا اختبار القبول، وتقع هذه الدائرة داخل الدائرة التي تمثل الطلاب الذين قُبلوا في الكلية؛ لذا سيُقبل عبد الله في الكلية.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	10-27 ، 33 ، 35-54
ضمن ضمن المتوسط	11-23 فردي ، 25-28 ، 30-47
فوق فوق المتوسط	4-25 3 (اختياري 44-47)

تدرب وحل المسائل

المثال 1 حدد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلٍّ ممّا يأتي:

10) تنصُّ التعليمات المدرسية على أنه إذا تأخرت الطالبة عن المدرسة خمس مرات، فسوف تُعطى تنبيهًا. تأخرت فاطمة خمس مرات عن المدرسة؛ لذلك سوف تُعطى تنبيهًا. التبرير الاستنتاجي

11) لاحظ طبيب الأسنان أن فهدًا يأتي في موعده المحدد، إذن سوف يأتي فهد في الموعد المحدد للزيارة القادمة. التبرير الاستقرائي

12) إذا قرّر سعد الذهاب إلى الحفل، فلن يحضر تدريب كرة القدم هذه الليلة. ذهب سعد إلى الحفل. ولذلك لم يحضر سعد تدريب كرة القدم. التبرير الاستنتاجي

13) لاحظت علياء أنه عندما تأخذ دروس تقوية، فإن درجاتها تتحسن. أخذت علياء درس تقوية، ولذلك افترضت أن درجاتها سوف تتحسن. التبرير الاستقرائي

المثال 2 حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا في كلٍّ ممّا يأتي اعتمادًا على المعطيات. وفسِّر تبريرك.

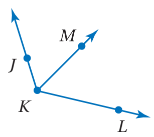
14) **المعطيات:** الزوايا القائمة متطابقة، $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان.

الاستنتاج: $\angle 1 \cong \angle 2$. صائبًا؛ قانون الفصل المنطقي

15) **المعطيات:** إذا كان الشكل مربعًا فإن له أربع زوايا قائمة.
الشكل $ABCD$ له أربع زوايا قائمة . غير صائب؛ قد يكون الشكل مستطيلًا.

الاستنتاج: الشكل $ABCD$ مربع.

16) **المعطيات:** منصف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين.
$\overrightarrow{KM}$ منصف لـ $\angle JKL$.



الاستنتاج: $\angle JKM \cong \angle MKL$. صائب؛ قانون الفصل المنطقي

17) **المعطيات:** إذا بِيعَت 75% من تذاكر الحفل قبل يوم الأربعاء، فسيُقام في قاعة المدينة.
بِيعَت 75% من تذاكر الحفل قبل يوم الأربعاء. صائب؛ قانون الفصل المنطقي

الاستنتاج: سيُقام الحفل في قاعة المدينة.

20–18) انظر الهامش.

المثال 3 حدد ما إذا كان الاستنتاج صائبًا أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. وفسِّر تبريرك باستعمال أشكال فن.

18) **المعطيات:** إذا انخفضت درجة الحرارة إلى أقل من الصفر السيليزية، فمن المحتمل أن يسقط الثلج.
لم تنخفض درجة الحرارة عن الصفر السيليزية في يوم الإثنين.

الاستنتاج: لم يسقط الثلج يوم الإثنين.

19) **المعطيات:** إذا كان الشخص يسكن مدينة الرياض، فإنه لا يسكن بجوار الشاطئ.
لا يسكن حمود بجوار الشاطئ.

الاستنتاج: يسكن حمود في مدينة الرياض.

20) **المعطيات:** يرتدي بعض الممرضين زيًّا موحَّدًا أزرق اللون. يعمل أحمد ممرضًا .

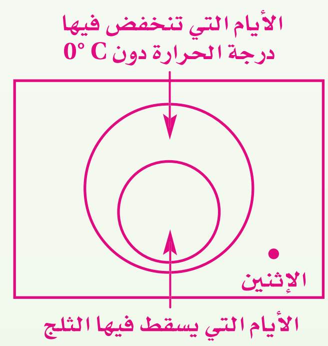
الاستنتاج: يرتدي أحمد الزي الموحَّد الأزرق اللون.

المحتوى الرياضي

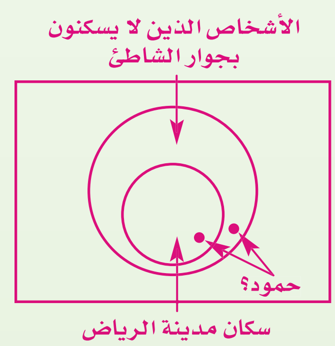
كتابة البراهين: أكّد للطلاب أن قوانين التبرير هي تنظيم للطرائق التي نستخلص بها النتائج بدهيًّا في حياتنا اليومية، وأن أحد أهداف تنظيم الحجج والأدلة هو المساعدة على كتابة البراهين عندما لا يوجد لدينا فكرة بدهية عن السؤال أو المشكلة.

إجابات:

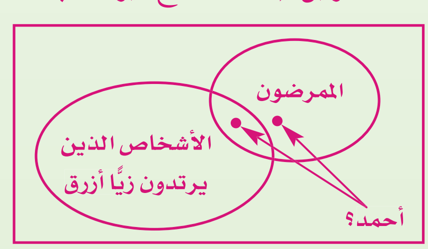
18) صائب؛ يقع يوم الإثنين خارج الأيام التي تنخفض فيها درجة الحرارة عن درجة الصفر السيليزية ، إذن لا يمكن أن يقع ضمن الأيام التي يسقط فيها الثلج؛ لذا فالاستنتاج صائب.



19) غير صائب: يمكن أن يكون حمود ضمن الدائرة التي تمثل سكان مدينة الرياض أو ضمن الدائرة التي تمثل الأشخاص الذين لا يسكنون قرب الشاطئ، وخارج الدائرة التي تمثل سكان مدينة الرياض.



20) غير صائب؛ يمكن أن يقع أحمد ضمن دائرة الممرضين أو ضمن منطقة تقاطع الدائرتين، إذن الاستنتاج غير صائب.



21) أحرز هادي صوعان الميدالية الفضية في دورة الألعاب الأولمبية عام 2000م .

المثال 4, 5

21) **الألعاب الأولمبية:** حقق العداء السعودي هادي صوعان إنجازًا سعوديًّا كبيرًا في دورة الألعاب الأولمبية في سيدني عام 2000م في سباق 400m حواجز، حيث أنهى السباق في زمن قدره 47.53 ثانية.

(1) إذا وصل هادي صوعان خط النهاية بعد صاحب المركز الأول مباشرة فسيحل في المركز الثاني.

(2) إذا حلّ العداء في المركز الثاني، فسيحصل على الميدالية الفضية.

استعمل العبارتين (1)، (2) للحصول على نتيجة صائبة.

الربط مع الحياة

يعتبر هادي صوعان أول رياضي سعودي يحرز ميدالية أولمبية.

استعمل قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية. وإذا تعذَّر ذلك، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسّر تبريرك.

22) إذا حصلت شيماء على معدل 98 فأكثر، فإن اسمها سوف يُكتب في لوحة الشرف هذا العام.
إذا كُتب اسم شيماء في لوحة الشرف هذا العام فإنه سيتم تكريمها. انظر الهامش

23) إذا تعامد مستقيمان في مستوى، فإنهما سيتقاطعان ويكوّنان زوايا قائمة.
المستقيمان r و s في نفس المستوى ويكوّنان زوايا قائمة. لا نتيجة صائبة

24) إذا لم يكن المستقيمان في المستوى متوازيين، فإنهما يتقاطعان.
إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة. انظر الهامش

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته، وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة"، وفسر تبريرك.

25) **المعطيات:** إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما يساوي $90°$
$\angle 1$ و $\angle 2$ متتامتان. انظر الهامش

26) **المعطيات:** المثقفون يحبون المطالعة.
إذا كنت تحب المطالعة، فأنت من زوار المكتبة العامة. انظر الهامش

27) **المعطيات:** إذا كنت رياضيًّا، فإنك تستمتع بالألعاب الرياضية.
إذا كنت تحب المنافسة، فإنك تستمتع بالألعاب الرياضية. لا نتيجة صائبة

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **اكتب:** فسّر لماذا لا يمكن استعمال قانون القياس المنطقي لاستنتاج نتيجة من العبارتين الشرطيتين الآتيتين:
إذا ارتديت قفازات الشتاء، فإنك ستشعر بدفءٍ في يديك. انظر الهامش
إذا لم تكن يداك دافئتين، فإن قفازاتك رقيقة.

29) **تحدٍّ:** استعمل الرمزين $\rightarrow$ ، $\wedge$؛ لتمثيل كلٍّ من قانون الفصل المنطقي وقانون القياس المنطقي بالرموز. انظر الهامش

30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين يمكن تطبيق قانون القياس المنطقي للحصول على نتيجة صائبة منهما، موضحًا تلك النتيجة. انظر الهامش

31) **تحدٍّ:** افترض أن كل المثلثات التي تحقق الخاصية B تُحقق نظرية فيثاغورس، فهل العبارة الآتية صائبة أم خاطئة؟ علّل إجابتك. انظر الهامش
إذا لم يكن المثلث قائم الزاوية، فإنه لا يحقق الخاصية B.

32) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين قانون القياس المنطقي وخاصية التعدي للمساواة. انظر الهامش

إجابات:

22) إجابة ممكنة: إذا حصلت شيماء على معدل 98% أو أكثر فإنه سيتم تكريمها.

24) إذا لم يكن المستقيمان في المستوى متوازيين، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة.

25) مجموع قياسَي $\angle 1$ و $\angle 2$ يساوي $90°$ ؛ قانون الفصل المنطقي.

26) إذا كنت مثقفًا فأنت من زوَّار المكتبة العامة؛ قانون القياس المنطقي.

28) إجابة ممكنة: لا يمكننا استعمال قانون القياس المنطقي؛ لأن الفرض في العبارة الشرطية الثانية هو نفي نتيجة العبارة الشرطية الأولى.
وإذا ما أردنا أن نطبق قانون القياس المنطقي، يجب أن تكون نتيجة العبارة الأولى هي الفَرض في العبارة الشرطية الثانية.

29) قانون الفَصْل المنطقي:
$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
قانون القياس المنطقي:
$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

30) إجابة ممكنة:
(1) إذا حصل طالب الثانوية العامة على معدل 95% فما فوق، فإنه يكون متميِّزًا.
(2) إذا كان الطالب متميزًا في الثانوية العامة، فإنه سيُبتعث للدراسة في الخارج.
النتيجة: إذا حصل طالب الثانوية العامة، على معدل 95% فما فوق، فإنه سيُبتعث للدراسة في الخارج.

31) صحيحة؛ إجابة ممكنة: إذا حقَّق المثلث الخاصية B ، فإنه يحقق نظرية فيثاغورس، وإذا حقق نظرية فيثاغورس فإنه قائم الزاوية.
وباستعمال قانون القياس المنطقي نستنتج العبارة الشرطية الآتية:
إذا حقق المثلث الخاصية B ، يكون قائم الزاوية.
والمعاكس الإيجابي لهذه العبارة هو الجملة المعطاة في السؤال. وله قيمة صواب العبارة الأصلية نفسها، وهي صحيحة.

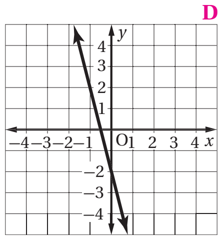
32) إجابة ممكنة: وجه الشبه بين قانون القياس المنطقي وخاصية التعدي للمساواة أن كليهما يعتمدان على الربط بين ثلاث جمل أو قيم أ، ب، جـ، بحيث يرتبط أ وَ ب وكذلك يرتبط ب وَ جـ، وتكون النتيجة ربطًا بين جملتين أو قيمتين هما أ وَ جـ.
الاختلاف بينهما؛ أن الرابط يكون في القياس المنطقي هو العبارة الشرطية أي أ ⟵ ب وَ ب ⟵ جـ يؤدي إلى أ ⟵ جـ
أما الرابط في عبارة التعدي للمساواة فهو علاقة =، أي إذا كانت أ = ب وَ ب = جـ فإن أ = جـ

تدريب على اختبار

33) بيِّن أيًا من العبارات الآتية تنتج منطقيًا عن العبارتين التاليتين.
إذا اشتريت وجبتين، فإنك ستحصل على علبة عصير مجانًا.
اشترى خليل وجبتين. **D**

A اشترى خليل وجبة واحدة فقط.
B سيحصل خليل على وجبة مجانية.
C سيحصل خليل على علبتَي عصير مجانًا.
D حصل خليل على علبة عصير مجانًا.

34) ما ميل المستقيم الممثل بيانيًا؟ **D**



A $\frac{1}{4}$
B $-\frac{1}{4}$
C 4
D -4

مراجعة تراكمية

تسويق: استعمل المعلومات الآتية في حل السؤالين 36 ,35. (الدرس 3-1)

يستعمل مديرو التسويق عبارات مكتوبة على صورة (إذا ... فإن ...) لترويج سلعهم وخدماتهم. يوجد إعلان في إحدى محلات صيانة الحواسيب جاء فيه: "إذا كنت تبحث عن السرعة والأمان في حاسوبك، فعليك بمحل النجوم لصيانة الحواسيب".

35) اكتب عكس العبارة الشرطية. **إذا زرت محل النجوم لصيانة الحواسيب، فإنك تبحث عن السرعة والأمان.**

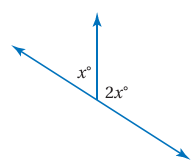
36) ما الرسالة التي يريد الإعلان إيصالها إلى الناس حول محل النجوم؟ **هناك تميز في السرعة والأمان**

أنشئ جدول صواب لكلٍّ من العبارات المركبة الآتية: (الدرس 2-1) **40–37) انظر الهامش.**

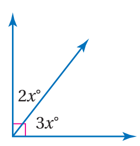
37) a و b
38) $\sim p$ أو $\sim q$
39) k و $\sim m$
40) $\sim y$ أو z

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ من الأشكال الآتية: (مهارة سابقة)

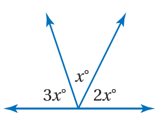
41) **60**



42) **18**

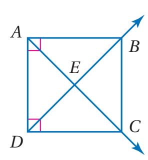


43) **30**



استعد للدرس اللاحق

هل يمكن افتراض صواب أيٍّ من العبارات الآتية اعتمادًا على الشكل المجاور؟ فسِّر إجابتك:



44) $\angle DAB$ زاوية قائمة. **نعم: الرمز ⦜ يشير إلى أن $\angle DAB$ قائمة.**

45) $\angle AEB \cong \angle DEC$ **نعم؛ زاويتان متقابلتان بالرأس.**

46) $\angle DAE \cong \angle ADE$ **لا؛ لا يوجد ما يدل على قياسَي هاتين الزاويتين.**

47) $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ **لا؛ لا نعلم شيئًا عن $m\angle ABC$.**

4 التقويم

فهم الرياضيات: يمكن للطلاب استعمال الأشكال لعمل نموذج لقانون الفصل المنطقي وقانون القياس المنطقي. زوّد الطلاب بورقتين صفراوين مربعتَي الشكل مكتوب عليهما p، وورقتين زرقاوين مثلثتَي الشكل مكتوب عليهما q، وورقتين حمراوين دائريتَي الشكل مكتوب عليهما r، واطلب إليهم كتابة طريقة ترتيب الأشكال لتمثيل الصورة الرمزية للقانونين.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 4-1 ,3-1 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (11)

إجابات:

37)

a	b	a و b
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

38)

p	$\sim p$	q	$\sim q$	$\sim p$ أو $\sim q$
T	F	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	T	F	T	T

39)

k	m	$\sim m$	k و $\sim m$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

40)

y	$\sim y$	z	$\sim y$ أو z
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T

تنويع التعليم

ضمن دون

المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلاب أن يتوزعوا مجموعات صغيرة، ويتناقشوا حول أطعمتهم المفضلة والأطعمة الأكثر شعبيةً، وفي أثناء مناقشتهم اطلب إليهم تبريرًا لاستنتاجاتهم عن أكثر الأطعمة التي يحبونها ويفضلونها، وأن يصفوا أنواع التبرير التي استعملوها للتوصل إلى استنتاجاتهم.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21) دون

الاسم ______________ التاريخ ________

1-4 تدريبات إعادة التعليم

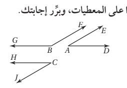
التبرير الاستنتاجي

قانون الفَصْل المنطقي:

التبرير الاستنتاجي: هو عملية استعمال الحقائق أو القواعد أو التعريفات أو الخصائص، للوصول إلى نتائج منطقية من عبارةٍ معطاةٍ، وأحد أشكال التبرير الاستنتاجي الذي يُتوصل بواسطته إلى نتيجة من عبارة شرطية صائبة $p \longrightarrow q$، وعبارة صائبة p، يُدعى قانون الفَصْل المنطقي.

قانون الفَصْل المنطقي	إذا كانت $q \longrightarrow p$ صائبة، وكانت p صائبة، فإن q تكون صائبة.

مثال حدّد ما إذا كان الاستنتاج في كلٍّ ممّا يأتي صحيحًا أم لا، اعتمادًا على المعطيات، وبرِّر إجابتك.



a) • **المعطيات:** الزاويتان المكمّلتان للزاوية نفسها تكونان متطابقتين.
$\angle C$ و$\angle A$ مكمّلتان للزاوية $\angle B$.

• **الاستنتاج:** $\angle C$ و $\angle A$متطابقتان.

العبارة $\angle C$ و$\angle A$ مكمّلتان للزاوية $\angle B$ ، هي الفرض في العبارة الشرطية، إذن النتيجة صحيحة بحسب قانون الفَصْل.

b) • **المعطيات:** إذا أراد أحمد أن يشترك في سباق الدراجات، فإنه يلبس خوذة على رأسه.
لبس أحمد خوذة على رأسه.

• **الاستنتاج:** يريد أحمد أن يشترك في سباق الدراجات.

العبارة المعطاة هي النتيجة في العبارة الشرطية الصائبة، ولكن معرفة صواب العبارة الشرطية وصواب نتيجتها لا تجعل الفرض صائبًا. يُمكن أن يكون أحمد قد لبس الخوذة لسبب آخر غير الاشتراك في سباق الدراجات؛ لذا فالاستنتاج غير صحيح.

تمارين

حدّد ما إذا كان الاستنتاج في كلٍّ مما يأتي صحيحًا أم لا، اعتمادًا على المعطيات، وبرِّر إجابتك.

1) • **المعطيات:** إذا كان العدد يقبل القسمة على 6، فإنه يقبل القسمة على 3.
العدد 18 يقبل القسمة على 6.

• **الاستنتاج:** العدد 18 يقبل القسمة على 3. **صحيح؛ قانون الفصل المنطقي.**

2) • **المعطيات:** إذا كان الحيوان الأليف أرنبًا، فإنه يأكل الجزر.
اشترى هيثم حيوانًا أليفًا يأكل الجزر.

• **الاستنتاج:** الحيوان الأليف الذي اشتراه هيثم هو الأرنب.**غير صحيح، فقد يكون هذا الحيوان حصانًا.**

3) • **المعطيات:** إذا كانت الدجاجة حمراء اللون، فإنها تضع بيضًا بنّي اللون.
دجاجة أسماء حمراء اللون.

• **الاستنتاج:** تضع دجاجة أسماء بيضًا بني اللون. **صحيح، لّما كان الفَرْض في العبارة الشرطية صائبًا، فإن الاستنتاج يكون صحيحًا.**

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22) دون

الاسم ______________ التاريخ ________

1-4 تدريبات إعادة التعليم **(تتمة)**

التبرير الاستنتاجي

قانون القياس المنطقي:

هناك طريقة أخرى لاستنباط النتائج، هي استعمال قانون القياس المنطقي، ويمكّنك هذا القانون من الوصول إلى نتائج من عبارتين شرطيتين صائبتين، إذا كانت نتيجة إحداهما فرضًا للأخرى.

قانون القياس المنطقي	إذا كانت $q \rightarrow p$ صائبة، وكانت $r \rightarrow q$ صائبة، فإن $r \rightarrow p$ صائبة.

مثال كلتا العبارتين الشرطيّتين أدناه صائبتان، استعمل قانون القياس المنطقي للتوصل إلى نتيجة صحيحة، واذكرها.

(1) إذا كان العدد طبيعيًّا، فإنه عدد صحيح.

(2) إذا كان العدد صحيحًا، فإنه عدد نسبيٌّ.

p: العدد طبيعي.

q: العدد صحيح.

r: العدد نسبي.

العبارتان الشرطيتان هما $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow r$ ، بتطبيق قانون القياس المنطقي، نتوصل إلى نتيجة صحيحة هي $p \rightarrow r$، والعبارة التي تمثّل $p \rightarrow r$ هي:"إذا كان العدد طبيعيًّا، فإنه عدد نسبي".

تمارين

استعمل قانون القياس المنطقي، للتوصل إلى نتيجة صحيحة من كل مجموعة من العبارات المعطاة إن أمكن ذلك، وإلّا فاكتب " لا توجد نتيجة صحيحة "، وبرّر ذلك.

1) إذا اتبعت نظام حميةٍ معينٍ، فستفقد 5 كيلوجراماتٍ من وزنك.
فقدت 5 كيلوجراماتٍ من وزنك. **لا توجد نتيجة صحيحة.**

2) إذا كانت الزاوية مكمّلة لزاوية منفرجة، فإنها زاوية حادة.
إذا كانت الزاوية حادة، فإن قياسها أقل من $90°$. **إذا كانت الزاوية مكمّلةً لزاوية منفرجة، فإن قياس هذه الزاوية أقل من $90°$.**

3) إذا كان قياس $\angle A$ أقل من $90°$، فإنها زاوية حادة.
إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة، فإن$\angle A \cong \angle B$. **إذا كان قياس$\angle A$أقل من $90°$، فإن $\angle A \cong \angle B$**

4) إذا كانت الزاوية قائمة، فإن قياسها يساوي $90°$.
إذا تعامد مستقيمان، فإنهما يصنعان زاوية قائمة.**إذا تعامد مستقيمان، فإنهما يصنعان زاوية قياسها $90°$**

5) إذا ذاكرتَ استعدادًا للاختبار، فإنك ستحصل على درجةٍ مرتفعةٍ.
درجتك في الاختبار مرتفعة. **لا توجد نتيجة صحيحة.**

تدريبات المهارات (23) دون ضمن

الاسم ______________ التاريخ ________

1-4 تدريبات المهارات

التبرير الاستنتاجي

حدِّد ما إذا كان الاستنتاج صحيحًا اعتمادًا على المعطيات، وبرِّر إجابتك.

1) • **المعطيات:** إذا كان مجموع قياسَي زاويتين يُساوِي $180°$، فإن الزاويتين متكاملتان.
$m\angle A + m\angle B = 180°$.

• **الاستنتاج:** $\angle A$ و $\angle B$ زاويتان متكاملتان.

صحيح؛ الفرض صحيح والاستنتاج صحيحًا.

2) • **المعطيات:** إذا كان مجموع قياسَي زاويتين يساوي $90°$، فإن الزاويتين متتامتان.
$m\angle ABC = 45°$ و $m\angle DEF = 48°$.

• **الاستنتاج:** $\angle ABC$ و $\angle DEF$ زاويتان متتامتان.

الفرض غير صحيح، لذا لا ندري إن كان الاستنتاج صحيحًا أم لا.

3) • **المعطيات:** إذا كان مجموع قياسَي زاويتين يساوي $180°$، فإن الزاويتين متكاملتان.
$\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متجاورتان على خطٍّ مستقيمٍ.

• **الاستنتاج:** $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متكاملتان.

إذا كانت $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتين على خط مستقيم، فإن مجموع قياسيهما $180°$، وعليه فإن الفرض يكون صحيحًا، والاستنتاج صحيحًا أيضًا.

استعمل قانون القياس المنطقي؛ للحصول على نتيجةٍ صحيحةٍ من العبارات المعطاة إن أمكن ذلك. وإلّا فاكتب "لا توجد نتيجة صحيحة". وبرّر إجابتك.

4) إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسَيهِما يساوي $90°$.
إذا كان مجموع قياسَي الزاويتين يساوي $90°$، فإن الزاويتين حادتان.
إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإنهما زاويتان حادّتان.

5) إذا استمرت موجة الحر، فسيزداد استعمال المكيّفات،
إذا زاد استعمال المكيّفات، فستزداد تكلفة الطاقة.
إذا استمرت موجة الحر، فستزداد تكلفة الطاقة.

6) إذا كان اليوم هو الثلاثاء، فسيأخذ عثمان حصة كيمياء.
إذا أخذ عثمان حصة كيمياء، فإنه سيصل إلى البيت الساعة 2 مساءً.
إذا كان اليوم هو الثلاثاء، فسيصل عثمان إلى البيت عند الساعة 2 مساءً.

7) إذا كان الحيوان البحري (نجم البحر)، فإنه يعيش في منطقة المدّ من المحيط.
منطقة المدّ من المحيط هي المنطقة الأقل استقرارًا من بين مناطق المحيط.
إذا كان الحيوان البحري (نجم البحر)، فإنه يعيش في المنطقة الأقل استقرارًا من بين مناطق المحيط.

تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم ______________ التاريخ ________

1-4 تدريبات حل المسألة

التبرير الاستنتاجي

1) **ألعاب:** وُضع هذان الإعلانان على مدخل مغارة الأشباح في مدينة الألعاب:

لا يُسمح بدخول من هم دون **5** سنوات.	لا يُسمح بدخول من هم دون **8** سنوات إلا بصحبة أحد الوالدين.

وفي داخل المغارة وُجد طفل مع أحد والديه، فماذا يمكن أن تستنتج حول عمر هذا الطفل، اعتمادًا على الإعلانين المعلقين على مدخل المغارة؟

عمر هذا الطفل 5 سنوات على الأقل.

2) **منطق:** عندما ذهب والد محمد إلى عمله أعطى محمدًا بعض التعليمات. "إذا احتجت إلي...، يمكنك محادثتي على هاتفي المحمول...، وإذا لم أُجبك فهذا يعني أنني في اجتماع لن يستمر أكثر من 30 دقيقة، وسأتصل بك مرةً أُخرى عند انتهاء الاجتماع". اتصل محمد بوالده، ولكن والده لم يرد على مكالمته. فاستنتج محمد أن عليه الانتظار 30 دقيقة على الأكثر، قبل أن يحصل على مكالمة من والده. ما القانون المنطقي الذي استعمله محمد للوصول إلى هذه النتيجة؟

قانون الفصل المنطقي.

3) **حجّ:** إذا كان الحاج قادمًا من نجد إلى مكة، فإنه يُحرِم من قرن المنازل، اكتب نتيجةً صحيحةً للفرض الآتي: "إذا لم يُحرَم فايزٌ من قرن المنازل..."

فإن فايزًا ليس من الحجاج القادمين من نجد إلى مكة.

4) **مقابلة:** دخل سلمان عمارةً لمقابلة المدير المالي في الطابق الخامس عشر، فأشار عليه موظف الاستقبال باستعمال المصعد الأحمر، وفي أثناء بحثه عن المصعد الأحمر وجد أنه يقع بجانب خزانة تُعرض فيها عملات قديمة نادرة، فاستقل المصعد الأحمر، وعندما التقى المدير سأله: "هل أعجبتك العملات الموجودة في الخزانة؟"، كيف استنتج المدير أن سلمان رأى خزانة العملات؟

استعمل قانون القياس المنطقي، ليستنتج من العبارتين أن سلمان إذا وصل إلى الطابق الخامس عشر، فإنه قد استعمل المصعد الأحمر، وإذا كان قد استعمل المصعد الأحمر، فإنه بالضرورة قد شاهد خزانة العملات النادرة.

5) **أنظمة:** ينص القانون على أنه لا يحق لمن يقلُّ عُمره عن 21 عامًا أن يتقدم للانتخابات في المجلس البلدي، ومن يقل عمره عن 18 عامًا لا يحق له الحصول على رخصة قيادةٍ،حدّد الأعمار الممكنة التي تصفها كلُّ حالةٍ فيما يأتي:

a) لا يحق لِـ "جابر" أن يتقدم لانتخابات المجلس البلدي، ولكن يحق له الحصول على رخصة قيادةٍ.
18, 19, 20

b) لا يحق لـ "خالدٍ" الحصول على رخصة قيادةٍ، ولكن يحق له أن يتقدم لانتخابات المجلس البلدي.

يستحيل وجود شخص بهذا الوصف.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 1

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (25) ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

1-4 التدريبات الإثرائية

الاستنتاجات الصحيحة والاستنتاجات الخاطئة:

ماذا يمكنك أن تستنتج من العبارات الآتية؟

(1) خالد طالب.　**(2)** خالد متفوق.　**(3)** الطالب يتفوق إذا ركز في دراسته.

من العبارتين (1) و (3) نستطيع أن نستنتج أن خالدًا سيتفوق إذا ركز في دراسته،
لكنه من الخطأ أن نستنتج من العبارتين (2) و (3) أن خالدًا ركز في دراسته.

في مثل هذا الاستنتاج، نكون قد طبقنا منطقًا مغلوطًا مثل عبارة: "خالدٌ ركز في دراسته"، وهو منطق مضلل لا يستند إلى المنطق الرياضي بدقةٍ.

ويمكن كتابة العبارة (3) في صورة (إذا... فإن...) على النحو الآتي: (إذا ركز الطالب في دراسته فإنه سيتفوق).
وعادةً يستعمل صانعو الإعلانات المنطق المغلوط بخفية، من أجل بيع سلعٍ معيَّنةٍ، ادرس الاستنتاجات الآتية لتحدّد أيها صحيح وأيها خاطئ.

حدّد ما إذا كانت الاستنتاجات الآتية صحيحة أم خاطئة:

1)
- إذا اشتريت حقيبة من نوع "الجلدية المبطّنة"، فإنها تعمّر طويلًا.
- اشترى عُمر حقيبة من نوع "الجلدية المبطنة"،

استنتاج: حقيبة عُمر تعمّر طويلًا.
صحيح

2)
- إذا اشتريت حقيبة من نوع "الجلدية المبطنة"، فإنها تعمّر طويلًا.
- حقيبة عُمر عمّرت طويلًا.

استنتاج: حقيبة عُمر من نوع "الجلدية المبطنة".
خاطئ

3)
- إذا استعملت معجون أسنان بالفلورايد، فإنك ستحظى بأسنان بيضاء جميلة.
- أسنان نواف بيضاء جميلة.

استنتاج: استعمل نواف معجون أسنان "بالفلورايد". **خاطئ**

4)
- إذا قرأتِ كتاب "المأكولات الشهية"، فستعدّين طعامًا شهيًّا بسهولةٍ.
- قرأت نعيمة كتاب "المأكولات الشهية".

استنتاج: تستطيع نعيمة أن تعدّ طعامًا شهيًّا.
صحيح

5)
- إذا تدربت على استعمال برمجية مُعالج النصوص، فستستطيع أن تكتب رسائل بسرعة أكبر.
- تدرب أحمد على استعمال برمجية معالج النصوص.

استنتاج: يستطيع أحمد أن يكتب الرسائل بسرعةٍ أكبر. **صحيح**

6)
- الأطباء الجراحون يستعملون القفازات الطبية.
- استعمل قاسم قفازاتٍ طبيةً.

استنتاج: قاسم طبيبٌ جراحٌ.
خاطئ

7) اكتب مثالًا على استنتاج منطقيٍّ مغلوط شاهدته في بعض الإعلانات. **انظر إجابات الطلاب.**

الصف: الأول الثانوي　25　**الفصل 1:** التبرير والبرهان

كتاب التمارين (9) دون ضمن فوق

1 - 4 التبرير الاستنتاجي

الفصل الأول　التبرير والبرهان

حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

1) المعطيات:
- إذا كانت النقطة هي منتصف قطعة مستقيمة، فإنها تقسمها إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين.
- R نقطة منتصف $\overline{QS}$

النتيجة: $\overline{QR} \cong \overline{RS}$

صحيحة؛ R نقطة منتصف $\overline{QS}$؛ إذن الفرض صحيح؛ لذا فإن النتيجة صحيحة، وتكون $\overline{RQ}$ و $\overline{QS}$ متطابقتين.

2) المعطيات:
- إذا قسمت نقطة قطعة مستقيمة إلى قطعتين متطابقتين، فإنها تكون نقطة منتصف القطعة المستقيمة.
- $AB \cong BC$.

النتيجة: B تقسم AC إلى قطعتين متطابقتين.　غير صحيحة؛ فنتيجة العبارة الشرطية صحيحة، لكن هذا لا يعني أن الفرض صحيح، فقد تكون $\overline{AB}$ عمودية على $\overline{BC}$.

حدد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كلٍّ مما يأتي:

3) إذا كانت الزاويتان متجاورتان على مستقيم فإنهما متكاملتان، $\angle A$ ، $\angle B$ متجاورتان على مستقيم واحد، إذن $\angle A$ ، $\angle B$ متكاملتان.　تبرير استنتاجي.

4) لاحظ خالد أن فاتورة الكهرباء تصدر في اليوم الأول من كل شهر، واليوم هو اليوم الأول من شهر شعبان، فاستنتج خالد أن فاتورة الكهرباء ستصدر اليوم.　تبرير استقرائي.

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صحيحة من العبارات الآتية إن أمكن، واذكر القانون الذي استعملته. وإذا تعذّر الحصول على نتيجة صحيحة، فاكتب "لا نتيجة صحيحة". برّر إجابتك.

5) (1) إذا كان العدد الكلي زوجيًّا، فإن مربعه يقبل القسمة على 4

(2) العدد الذي أفكر فيه هو عدد كلي زوجي.　إجابة ممكنة: مربع العدد الذي أفكر فيه يقبل القسمة على 4

6) أحياء: إذا كان المخلوق الحي طفيليًّا، فإنه يعيش على عائل. وإذا عاش الطفيلي على عائل، فإنه يؤذيه. ما النتيجة التي يمكن التوصل إليها إذا كان الفيروس من الطفيليات؟
الفيروس يؤذي العائل الذي يعيش عليه.

9

1-5 المسلمات والبراهين الحرة

Postulates and Paragraph Proofs

فيما سبق:

درستُ استعمال التبرير الاستنتاجي بتطبيق قانون الفَصل المنطقي وقانون القياس المنطقي.

(الدرس 1-4)

والآن:

- أتعرف المسلّمات الأساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات وأستعملها.
- أكتب برهانًا حرًّا.

المفردات:

المسلّمة
axiom or postulate

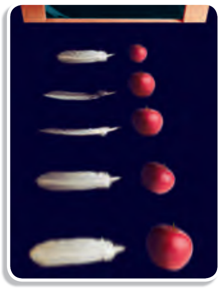
البرهان
proof

النظرية
theorem

البرهان الحر
paragraph proof

www.obeikaneducation.com

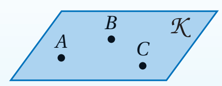
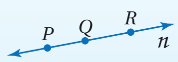
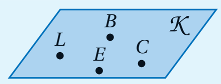
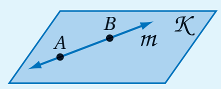
لماذا؟



التجربة في الصورة المجاورة تُظهر سقوط الريشة والتفاحة بالسرعة نفسها في حجرة مفرغة من الهواء، وتوضح هذه التجربة قوانين نيوتن في الجاذبية الأرضية والقصور الذاتي، والتي تُقبل على أنها حقائق أساسية في الفيزياء. وفي الهندسة أيضًا توجد قوانين تقبل على أنها صحيحة دون برهان.

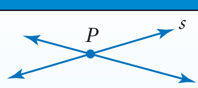
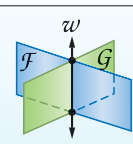
النقاط والمستقيمات والمستويات: **المسلّمة** أو البدهية عبارة تعطي وصفًا لعلاقة أساسية بين المفاهيم الهندسية الأولية وتُقبل على أنها صحيحة دون برهان. درست مبادئ أساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات، ويمكن اعتبار هذه المبادئ الأساسية مسلّمات.

مسلمات — النقاط والمستقيمات والمستويات — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي		مثال
1.1 أيُّ نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.		المستقيم n هو المستقيم الوحيد المار بالنقطتين P و R.
1.2 أيُّ ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.		المستوى $\mathcal{K}$ هو المستوى الوحيد الذي يحوي النقاط A و B و C، والتي لا تقع على استقامة واحدة.
1.3 كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.		المستقيم n يحوي النقاط P و Q و R.
1.4 كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.		يحوي المستوى $\mathcal{K}$ النقاط L و B و C و E، وهي ليست على استقامة واحدة.
1.5 إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع كليًا في ذلك المستوى.		تقع النقطتان A و B في المستوى $\mathcal{K}$، ويمر بهما المستقيم m؛ إذن المستقيم m يقع كليًّا في المستوى $\mathcal{K}$.

تتعلق المسلّمات الآتية بتقاطع المستقيمات والمستويات.

مسلمتان — تقاطع المستقيمات والمستويات — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي		مثال
1.6 إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.		المستقيمان s و t يتقاطعان في النقطة P.
1.7 إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون مستقيمًا.		يتقاطع المستويان $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ في المستقيم w.

قراءة الرياضيات

يرمز للمستقيم بحرف صغير مائل مثل: $n, m, \ell, \ldots$ أو بأي نقطتين واقعتين عليه مثل: $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \ldots$ يرمز للمستوى بحرف كبير مائل مثل: $\mathcal{K}, \mathcal{G}, \mathcal{F}, \ldots$ أو بأي ثلاث نقاط فيه ليست على استقامة واحدة XYZ

1-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-1

استعمال التبرير المنطقي لإثبات العبارات الصحيحة، وإيجاد أمثلة مضادة تُفنِّد العبارات الخاطئة.

الدرس 5-1

تعرف المسلمات الأساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات، واستعمالها في كتابة برهانٍ حرٍّ.

ما بعد الدرس 5-1

استعمال التبرير الاستنتاجي لإثبات بعض العبارات، وكتابة البرهان ذي العمودين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا ؟".

اسأل:

- لماذا لا تسقط التفاحة والريشة بالسرعة نفسها خارج الحجرة المفرغة من الهواء؟ لأن مقاومة الهواء تجعل الريشة تسقط أبطأ من التفاحة.
- في اعتقادك ما الفرق بين القانون والنظرية؟ إجابة ممكنة: القوانين تقبل بوصفها حقائق صحيحة، والنظريات تحتاج إلى برهان.

مصادر الدرس 5-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (51)	• تنويع التعليم، ص (49, 51)	• تنويع التعليم، ص (49)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (10)	• كتاب التمارين، ص (10)	• كتاب التمارين، ص (10)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

النقاط والمستقيمات والمستويات

المثالان 2 ,1 يبيّنان كيفية تعرُّف المسلّمات والمقارنة بينها، وعلى الطلاب أن يكونوا قادرين على إثبات صحة التخمينات باستعمال النظريات والمسلّمات.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة.

مثال إضافي

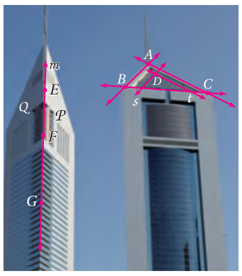
1 **هندسة عمارة:** باستعمال الصورة في المثال 1، اذكر المسلّمة التي تبرر صحة كل عبارة مما يأتي:

a) تقع النقطتان F و G في المستوى Q وعلى المستقيم m. ويقع المستقيم m كله في المستوى Q. المسلّمة 1.5 تنصُّ على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن جميع نقاط المستقيم الذي يحوي هاتين النقطتين تقع في هذا المستوى، وهذا يثبت أن العبارة صحيحة. حيث تقع النقطتان F و G على المستقيم m ولذلك يقع هذا المستقيم بأكمله في المستوى Q

b) تحدد النقطتان A و C مستقيمًا. المسلّمة 1.1، تنصُّ على أنه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطتين معلومتين، وهذا يثبت صحة هذه العبارة. حيث تقع النقطتان على حَرْف البِناية، وهو المستقيم الذي تحدده هاتان النقطتان.

تُعد المسلّمات أساسًا للبراهين والتبريرات المتعلقة بالنقاط والمستقيمات والمستويات.

مثال 1 من واقع الحياة — تحديد المسلّمات



هندسة معمارية: اذكر المسلّمة التي تبرر صحة كل عبارة مما يأتي:

a) يحتوي المستقيم m على النقطتين F و G، ويمكن أن تقع النقطة E أيضًا على المستقيم m.

المسلمة 1.3، التي تنص على أن كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.

حيث إن حافة البِناية عبارة عن المستقيم m. والنقاط E, F, G واقعة على هذه الحافة؛ لذا فهي تقع على المستقيم m.

b) يتقاطع المستويان s و t في النقطة D.

المسلّمة 1.6 التي تنص على أنه إذا تقاطع مستويان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

حيث إن الشبكة المثلثة أعلى واجهة البناية تتشكل من مستويات متقاطعة، والمستويان s و t يتقاطعان في نقطة واحدة فقط هي D

تحقق من فهمك

1A) النقاط A, B, C تحدد مستوى. **1B)** يتقاطع المستويان P و Q في المستقيم m.

يمكنك استعمال المسلّمات لتفسير تبريرك في أثناء تحليل بعض العبارات.

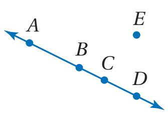
مثال 2 — تحليل العبارات باستعمال المسلّمات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صائبة دائمًا أو صائبة أحيانًا أو غير صائبة أبدًا. فسّر تبريرك.

a) إذا تقاطع مستقيمان واقعان في مستوى واحد، فإن نقطة تقاطعهما تقع أيضًا في المستوى الذي يحويهما.

صائبة دائمًا؛ تنص المسلّمة 1.5 على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع بكامله في ذلك المستوى، وبما أن المستقيمين يقعان في المستوى نفسه، فإن أي نقطة واقعة عليهما بما فيها نقطة التقاطع تقع في المستوى نفسه.

b) أي أربع نقاط لا تقع على استقامة واحدة.



صائبة أحيانًا: تنص المسلّمة 1.3 على أن كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل، وهذا يعني أنه يمكن أن يحوي المستقيم نقطتين أو أكثر؛ إذن يمكن أن تكون أربع نقاط ليست على استقامة واحدة مثل A, E, C, D في الشكل المجاور، أو تكون على استقامةٍ واحدةٍ مثل A, B, C, D .

تحقق من فهمك

2A) المستقيمان المتقاطعان يحددان مستوى. **2B)** تتقاطع ثلاثة مستقيمات في نقطتين. انظر الهامش

البرهان الحر: عند إثباتك نتيجة تخمين ما، فإنك تستعمل التبرير الاستنتاجي للانتقال من الفرض إلى النتيجة التي تريد إثبات صحتها بكتابة **برهان**، وهو دليل منطقي فيه كل عبارة تكتبها تكون مبررة بعبارة سبق إثباتها أو قبول صحتها.

1A) تشكل النقاط A, B, C الرؤوس الثلاثة للسقف. وبحسب المسلّمة 1.2 فإن هناك مستوى واحدًا فقط يمر بها.

1B) يتقاطع وجها البناية في الحافة التي تمثل المستقيم m، فيتقاطع المستويان P و Q اللذان يحويان وجهَي البناية في المستقيم m بحسب المسلّمة 1.7

2A) صائبة دائمًا؛ على المستقيمين المتقاطعين هناك على الأقل ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة تحدد مستوى.

إرشادات للدراسة

نظام المسلمات

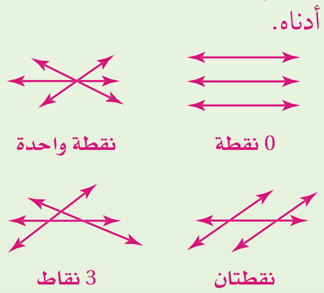
هو مجموعة من المسلمات التي يمكن استعمال بعضها أو كلها لاستنتاج النظريات عن طريق المنطق.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا عدة براهين حرة على مدونة الصف، وأن يعملوا مجتمعين لمراجعة ما كتبوه للتأكد من وضوحه وخلوِّه من الأخطاء.

إجابة (تحقق من فهمك):

2B) صحيحة أحيانًا: يمكن أن يكون لثلاثة مستقيمات تقع في المستوى نفسه عدد من نقاط التقاطع يساوي 0 أو 1 أو 2 أو 3. كما يظهر في الأشكال أدناه.



لاحظ أنه يكون لها نقطتا تقاطع فقط عندما يكون اثنان منها متوازيين.

إرشادات للمعلم الجديد

البرهان ذو العمودين: ذكِّر الطلاب بأنه على الرغم من أن المسلّمات لم تبرهن برهانًا ذا عمودين، إلّا أنها تقبل لكونها بديهيات صحيحة، وتُستعمل لإثبات صحة العبارات والنظريات الأخرى.

في حال إثبات صحة عبارة (أو تخمين) فإنها تُسمى **نظرية**، ويمكن بعد ذلك استعمالها في البراهين لتبرير صحة عبارات أخرى .

مفهوم أساسي — خطوات كتابة البرهان

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اكتب المعطيات، وارسم شكلًا يوضحها إن أمكن.

الخطوة 2: اكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.

الخطوة 3: استعمل التبرير الاستنتاجي لتكوين سلسلة منطقية من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.

الخطوة 4: برّر كل عبارة مستعملًا تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.

الخطوة 5: اكتب العبارة أو التخمين الذي قمت بإثباته.

المعطيات (الفرض) ← العبارات والمبررات ← المطلوب (النتيجة)

البرهان الحر هو أحد أنواع البراهين، وفيه تُكتب فقرة تُفسر أسباب صحة التخمين في موقف مُعطًى.

مثال 3 — كتابة البرهان الحر

المعطيات: M نقطة منتصف $\overline{XY}$ ، اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\overline{XM} \cong \overline{MY}$.

الخطوتان 1 و 2

المعطيات: M نقطة منتصف $\overline{XY}$.

المطلوب: $\overline{XM} \cong \overline{MY}$

الخطوتان 3 و 4

إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{XY}$ ، فإنه بحسب تعريف نقطة منتصف القطعة المستقيمة تكون $\overline{XM}$ و $\overline{MY}$ لهما الطول نفسه. ومن تعريف التطابق، إذا كانت القطعتان المستقيمتان لهما الطول نفسه، فإنهما تكونان متطابقتين.

الخطوة 5

لذا $\overline{XM} \cong \overline{MY}$.

✓ تحقق من فهمك

انظر الهامش

3) إذا علمت أن C تقع على $\overline{AB}$ ، حيث $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ ، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن C هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

إرشادات حل المسألة

العمل عكسيًا

إحدى استراتيجيات كتابة البرهان هي العمل عكسيًا، وذلك بأن تبدأ من المطلوب وتعمل عكسيًا خطوة بخطوة حتى تصل إلى المعطيات.

عند إثبات صحة التخمين يصبح نظرية، ويمكن استعماله في براهين أخرى. ويعرف التخمين في مثال 3 بنظرية نقطة المنتصف.

نظرية 1.1 — نظرية نقطة المنتصف

أضف إلى مطويتك

إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

مثال إضافي

2 حدِّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسّر تبريرك.

a) إذا كان المستوى T يحوي $\overleftrightarrow{EF}$ ، و $\overleftrightarrow{EF}$ يحوي النقطة G ، فإن المستوى T يحوي النقطة G.
صحيحة دائمًا؛ المسلمة 1.5 تنص على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الذي يحويهما يقع بكامله في هذا المستوى.

b) $\overleftrightarrow{GH}$ يحوي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة. غير صحيحة أبدًا؛ لا يمكن أن يحوي مستقيم ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة، وذلك من تعريف المستقيم.

البرهان الحر

المثال 3 يبين كيفية كتابة برهان حرٍّ عندما نُعطي عبارة قبلت على أنها صحيحة.

مثال إضافي

3 ليكن $\overleftrightarrow{AC}$ يقطع $\overleftrightarrow{CD}$. اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن النقاط A, C, D تحدد مستوى.
يجب أن يتقاطع المستقيمان $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ في النقطة C ؛ لأنه إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة؛ وعليه فإن النقطة A لا تقع على المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$. والنقطة D لا تقع على $\overleftrightarrow{AC}$ ؛ إذن فالنقاط الثلاث A, C, D لا تقع على استقامة واحدة؛ وعليه فإن النقاط الثلاث A, C, D تحدد مستوى.

المحتوى الرياضي

المسلمات والبراهين: أكّد الفرق بين المسلمات والبراهين، فالمسلمات عبارات يُسلَّم بصحتها دون برهان، بينما البراهين عبارة عن حجج منطقية مدعومة بالمسلمات.

إجابة (تحقق من فهمك):

3) **المعطيات:** c تقع بين A و B ، $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.
المطلوب: إثبات أن C نقطة منتصف $\overline{AB}$.

البرهان:
من المعطيات $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ ، ومن تعريف القطع المستقيمة المتطابقة، فإن طول $\overline{AC}$ يساوي طول $\overline{CB}$، ومن تعريف نقطة المنتصف، فإن C هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1- 13 للتحقق من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

2) المسلّمة 1.6 تنصّ على أنه إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.
حيث إن أحرف الشكل تمثل مستقيماتٍ. المستقيمان r و n يتقاطعان في نقطة واحدة فقط هي النقطة D .

3) المسلّمة 1.3 تنصّ على أن المستقيم يحوي نقطتين على الأقل.
حيث إن الحَرْف السفلي للشكل من الجهة الأمامية هو المستقيم n ، والذي يحوي النقاط C,D,E .

4) المسلّمة 1.4 تنصّ على أن المستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل لا تقع على استقامة واحدة.
حيث إن الجانب الأيسر من الشكل أو المستوى $\mathcal{P}$ يحوي النقاط A,F,D .

5) المسلّمة 1.5 تنصّ على أنه إذ وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الذي يحويهما يقع بكامله في هذا المستوى.
حيث إن النقطتين E,D واقعتان على المستقيم n، وكذلك في المستوى Q .

6) المسلّمة 1.1 تنصّ على أنه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطتين.
حيث إن المستقيم r يحوي النقطتين A, D.

تأكـد

المثال 1

اذكر المسلّمة التي تبرر صحة كل عبارة من العبارات الآتية: 6–2) انظر الهامش.

1) المستويان $\mathcal{P}$ و Q يتقاطعان في المستقيم r.

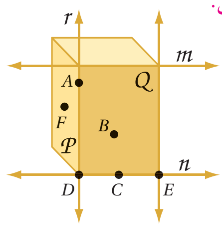
2) المستقيمان r و n يتقاطعان في النقطة D.

3) المستقيم n يحوي النقاط C, D, E .

4) المستوى $\mathcal{P}$ يحوي النقاط A, F, D .

5) المستقيم n يقع في المستوى Q.

6) المستقيم r هو المستقيم الوحيد الذي يمر بالنقطتين A و D.



1) المسلمة 1.7؛ تنص على أنه إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكوّن مستقيمًا، حيث يشترك الوجهان الأمامي Q والأيسر $\mathcal{P}$ في الحرف الذي يمثل المستقيم r .

المثال 2

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وفسِّر تبريرك.

7) تتقاطع ثلاثة مستويات في مستقيم.

8) المستقيم r يحوي النقطة P فقط.

9) يمر مستقيم واحد فقط بنقطتين معلومتين.

7) صائبة أحيانًا؛ إذا تقاطع ثلاثة مستويات، فيمكن أن يكون تقاطعها نقطة أو مستقيمًا.

8) غير صائبة أبدًا. بحسب المسلمة 1.3 المستقيم يحوي نقطتين على الأقل.

9) صائبة دائمًا؛ بحسب المسلّمة 1.1 أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

المثال 3

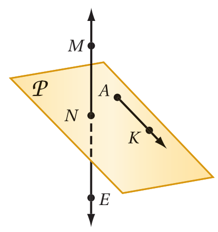
في الشكل المجاور: يقع $\overleftrightarrow{AK}$ في المستوى $\mathcal{P}$ وتقع النقطة M على $\overleftrightarrow{NE}$.

اذكر المسلّمة التي تثبت صحة كلٍّ من العبارات الآتية:

10) M, K, N تقع في مستوى واحد.

11) $\overleftrightarrow{NE}$ يحوي النقطتين N ، M.

12) النقاط N, K, A تقع في المستوى نفسه.

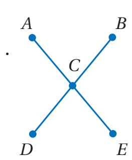


10) المسلمة 1.2؛ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

11) المسلّمة 1.3؛ المستقيم يحوي نقطتين على الأقل.

12) المسلّمة 1.2؛ أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

13) **برهان:** في الشكل المجاور $\overline{AE} \cong \overline{DB}$، والنقطة C نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{AE}$ و $\overline{DB}$
اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $AC = CB$. انظر ملحق الإجابات



تدرب وحل المسائل

20–15) انظر الهامش.

المثال 1

كعك: اذكر المسلّمة التي تبرر صحة كل عبارة من العبارات الآتية:

14) المستقيمان n و ℓ يتقاطعان في النقطة K.

15) المستويان Q , $\mathcal{P}$ يتقاطعان في المستقيم m.

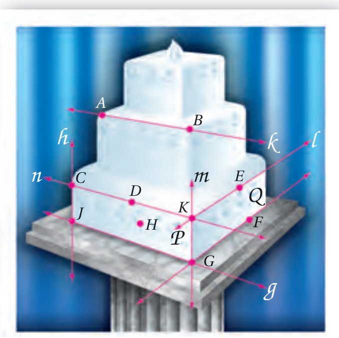
16) النقاط D, K, H تحدِّد مستوى.

17) النقطة D تقع على المستقيم n المار بالنقطتين C , K.

18) النقاط E, F, G تقع في المستوى نفسه.

19) $\overleftrightarrow{EF}$ يقع في المستوى Q.

20) المستقيمان h , g يتقاطعان في النقطة J .



14) المسلّمة 1.6؛ تنص على أنه إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، حيث تشكل الحافتان العلويتان n و l للطبقة السفلية مستقيمين متقاطعين.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	14-27 ، 37 ، 38 ، 40-49
ضمن المتوسط	15-27 فردي ، 28-38 ، 40-49
فوق المتوسط	28-46

المثال 2 حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسّر تبريرك.

21) يوجد مستوى واحد فقط يحوي النقاط الثلاث A, B, C التي لا تقع على استقامة واحدة.

22) ثلاثة مستقيمات على الأقل تمر بالنقطتين J و K. **22–27) انظر ملحق الإجابات**

23) إذا وقعت النقاط M, N, P في المستوى $\mathcal{X}$، فإنها تقع على استقامة واحدة.

24) تقع النقطتان X و Y في المستوى $\mathcal{Z}$. وأي نقطة على استقامة واحدة مع X و Y تقع أيضًا في المستوى $\mathcal{Z}$.

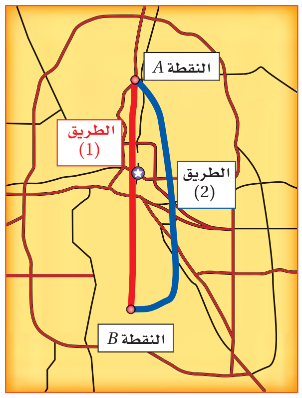
25) النقاط A, B, C تحدد مستوى.

المثال 3

26) **برهان:** إذا علمت أن Y هي نقطة منتصف $\overline{XZ}$، وأن Z هي نقطة منتصف $\overline{YW}$، فأثبت أن $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$.

27) **برهان:** النقطة L هي نقطة منتصف $\overline{JK}$، ويتقاطع $\overline{JK}$ مع $\overline{MK}$ في النقطة K. إذا كان $\overline{MK} \cong \overline{JL}$، فأثبت أن $\overline{LK} \cong \overline{MK}$.

28) **خرائط:** أمام خالد طريقان للانتقال من الموقع A إلى الموقع B كما يظهر في الخريطة المجاورة. إذا كان الحد الأعلى للسرعة المسموح بها على الطريق (1) هو 90km/h، وعلى الطريق (2) هو 110km/h



a) أي الطريقين يبدو أقصر طولًا؟ فسّر تبريرك.

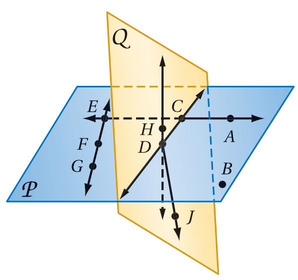
b) إذا كانت المسافة من A إلى B عبر الطريق (1) تساوي 16.8km، والمسافة بينهما عبر الطريق (2) تساوي 17.6km، فأي الطريقين أسرع وصولًا، إذا قاد خالد سيارته بالحد الأعلى للسرعة المسموح بها؟

الطريق (2)

21) صائبة دائمًا. تنص المسلّمة 1.2 على أن أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

28a) الطريق (1). إجابة ممكنة: بما أنه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بأي نقطتين، وأن الطريق (1) يبدو مستقيمًا ويمر بالنقطتين A, B، فإنه أقصر الطريقين.

في الشكل المجاور، $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{CE}$ واقعان في المستوى $\mathcal{P}$، و $\overleftrightarrow{DJ}$ و $\overleftrightarrow{DH}$ واقعان في المستوى $\mathcal{Q}$. اذكر المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات صحة كل عبارة فيما يأتي:



29) النقطتان C و B على استقامة واحدة. **33, 34) انظر الهامش**

30) $\overleftrightarrow{EG}$ يحوي النقاط E, F, G.

31) النقطتان D و F تقعان على استقامة واحدة.

32) النقاط C, D, B تقع في المستوى نفسه.

33) المستوى $\mathcal{Q}$ يحوي النقاط C, H, D, J.

34) المستوى $\mathcal{P}$ يتقاطع مع المستوى $\mathcal{Q}$ في $\overleftrightarrow{CD}$.

29) المسلّمة 1.1؛ أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

30) المسلّمة 1.3؛ كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.

31) المسلمة 1.1؛ أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

32) المسلّمة 1.2؛ أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

إجابات:

15) المسلّمة 1.7؛ التي تنص على أنه إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكوّن مستقيمًا، حيث يشترك الوجهان الأماميان $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ للطبقة السفلى في الحرف الذي يمثل المستقيم m، ولذلك يتقاطع المستويان $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ في المستقيم m.

16) المسلمّة 1.2؛ يمرُّ مستوًى واحد فقط في ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة. حيث إن الوجه الأمامي الأيسر من الطبقة السفلية من الكعكة $\mathcal{P}$ يحوي النقاط H, K, D ويكوّن مستوًى.

17) المسلمة 1.3؛ التي تنص على أن المستقيم يحوي نقطتين على الأقل، حيث إن المستقيم n حرفًا علويًّا للطبقة السفلية. والنقاط K, D, C تقع على هذا الحرف؛ لذا فإنها تقع على المستقيم n.

18) المسلمة 1.2؛ التي تنص على أنه يوجد مستوًى واحد فقط يمر في أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة. حيث إن الوجه الأمامي الأيمن من الطبقة السفلية للكعكة يحوي النقاط G, K, E, F، والتي تمثل مستوى.

19) المسلمة 1.5؛ التي تنص على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع كليًّا في ذلك المستوى، حيث إن الوجه الأمامي الأيمن $\mathcal{Q}$ يحوي النقطتين E وَ F، فالمستقيم الذي يمر بهما يقع في المستوى الذي يمثله هذا الوجه.

20) المسلمة 1.6؛ التي تنص على أنه إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط، حيث إن الوجه الأمامي الأيسر من الطبقة السفلية، فيه الحافة السفلية واليسرى تشكلان مستقيمين متقاطعين.

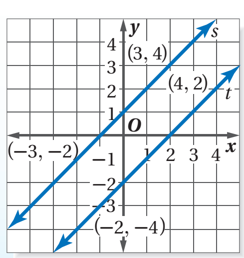
33) المسلّمة 1.4؛ كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.

34) المسلّمة 1.7؛ إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون مستقيمًا.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أوجد ميل كلٍّ من المستقيمين الممثلين بيانيًّا جانبًا:



ميل المستقيم s : $1= \quad m = \dfrac{4-(-2)}{3-(-3)}$ ،

ميل المستقيم t : $1= \quad m = \dfrac{2-(-4)}{4-(-2)}$

اكتب تخمينًا حول العلاقة بين ميلَي المستقيمين المتوازيين.

للمستقيمين المتوازيين الميل نفسه.

الربط مع الحياة

تُصمَّم أسطح المنازل بطرائق هندسية مختلفة لمنع تسرب الماء. من هذه الطرائق استعمال مواد عازلة لا تسمح بنفاذ الماء، أو أن تُبنى مائلة؛ لتسهيل انحدار الماء عنها بتأثير الجاذبية الأرضية.

35) **هندسة عمارة:** يُحسب ميل السطح عادة بقسمة الارتفاع مقيسًا بالبوصة على المسافة الأفقية مقيسة بالقدم. استعمل العبارات أدناه لتكتب برهانًا حرًّا للعبارة الآتية: ميل السطح في تصميم أحمد غير كافٍ. انظر الهامش.

- عند استعمال مواد عازلة للماء، يجب أن يكون الميل $\frac{1}{4}$ بوصة لكل قدم على الأقل.
- حتى ينحدر الماء بتأثير الجاذبية الأرضية، يجب أن يكون ميل السطح 4 بوصات لكل قدم.
- صمَّم أحمد سطح منزله بحيث يكون مائلًا.
- الميل في تصميم أحمد يساوي 2 بوصة لكل قدم.

36) **رياضة:** أُقيمت بطولة شاركت فيها ثماني فرق كرة قدم للناشئين. **a–c)** انظر الهامش.

a) ما عدد المباريات التي ستُجرى في الدور الأول؟

b) ارسم شكلًا يوضح عدد مباريات الدور الأول. أيُّ مسلّمة يمكنك استعمالها لتبرير هذا الشكل؟

c) أوجد طريقة حسابية لإيجاد عدد المباريات التي ستُجرى في الدور الأول، بغض النظر عن عدد الفرق المشاركة في البطولة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

37) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا يحقق خمسًا من المسلمات السبع التي تعلمتها في هذا الدرس. اشرح كيف تحققت كلٌّ منها في الشكل. انظر الهامش.

38) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من عمر وسعيد بكتابة برهان لإثبات أنه إذا كانت $\overline{AB}$ تطابق $\overline{BD}$، وكانت A, B, D على استقامة واحدة، فإن B نقطة منتصف $\overline{AD}$. وقد بدأ كلٌّ منهما برهانه بطريقة مختلفة. أيُّهما بدأ برهانه بطريقة صحيحة؟ فسر إجابتك. انظر الهامش

عمر	سعيد
إذا كانت B نقطة منتصف $\overline{AB}$، فإن B تقسم $\overline{AD}$ إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين.	$\overline{AB}$ تطابق $\overline{BD}$، والنقاط A, B, C تقع على استقامة واحدة.

تبرير: حدِّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. فسِّر تبريرك أو أعط مثالًا مضادًّا: 39) انظر ملحق الإجابات

39) أيُّ ثلاث نقاط يمر بها مستوى واحد فقط.

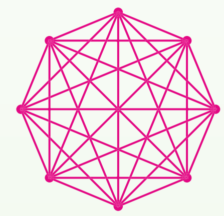
40) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه والاختلاف بين المسلّمات والنظريات. انظر الهامش

إجابات:

35) إجابة ممكنة: صمَّم أحمد سطح منزله بحيث يكون مائلًا، ويجب أن يكون ميل السطح 4 بوصات لكل قدم على الأقل. إلا أن ميل سطح منزل أحمد هو 2 بوصة لكل قدم، وهي أقل من 4 بوصات لكل قدم؛ مما يعني أن الميل في التصميم غير كافٍ.

36a) 28 مباراة.

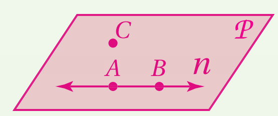
36b)



المسلّمة 1.1

36c) إجابة ممكنة: إذا كان هناك n فريقًا مشاركًا في البطولة، فإن عدد مباريات الدور الأول يساوي $(n-1)+(n-2)+\ldots+1$. أو $\frac{n(n-1)}{2}$

37)



إجابة ممكنة: هذا الشكل يحقق المسلّمات:
1.1؛ لأن النقطتين A, B يمر بهما مستقيم واحد فقط.
والمسلّمة 1.2؛ لأن النقاط A, B, C لا تقع على استقامةٍ واحدةٍ، ويمر بها المستوى $\mathcal{P}$ فقط.
والمسلّمة 1.3؛ المستقيم n يحوي النقطتين A, B
والمسلّمة 1.4؛ لأن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة وتقع في مستوى $\mathcal{P}$.
وكذلك يحقق المسلّمة 1.5 ؛ لأنه توجد نقطتان A, B تقعان في المستوى $\mathcal{P}$، والمستقيم n المار بهما أيضًا يقع في المستوى $\mathcal{P}$.

38) سعيد؛ إجابة ممكنة: يجب أن يبدأ البرهان بالمعطيات، وهي أن $\overline{AB}$ تطابق $\overline{BD}$، والنقاط A,B,D تقع على استقامة واحدة

40) المسلّمات هي العبارات التي تقبل على أنها صحيحة دائمًا، دون إثبات أما النظريات فهي صحيحة أيضًا لكنها تحتاج لإثبات.

تدريب على اختبار

41) أيُّ العبارات الآتية ليست صائبة؟ **H**

A أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تحدد مستوى واحدًا فقط.

B يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة فقط.

C يوجد على الأقل مستقيمان يحويان النقطتين نفسيهما.

D تقسم نقطة المنتصف القطعة المستقيمة إلى قطعتين متطابقتين.

42) ما أكبر عدد من المناطق التي تتشكل عندما تقطع ثلاثة مستقيمات مختلفة دائرة؟ **انظر الهامش**

A 4	**C** 6
B 5	**D** 7

مراجعة تراكمية

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة من العبارات الآتية إن أمكن، واذكر القانون الذي استعملته. وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسر تبريرك. (الدرس 4-1)

43) (1) إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما لا تكونان متجاورتين على مستقيم. **لا نتيجة**

(2) إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم فهما غير متطابقتين.

44) (1) إذا كانت الزاوية حادة، فإن قياسها أقل من $90°$ **$m\angle EFG$ أقل من $90°$؛ قانون الفصل المنطقي.**

(2) $\angle EFG$ حادة.

اكتب العبارتين الشرطيتين الآتيتين على صورة (إذا ... فإن ...). (الدرس 3-1)

45) يُكتب اسم الطالب المتفوق في لوحة الشرف.
إذا كان الطالب متفوقًا، فإن اسمه يكتب في لوحة الشرف.

46) يخشى البطل أن يخسر. **إذا كان الشخص بطلًا، فإنه يخشى أن يخسر.**

استعد للدرس اللاحق

حُلَّ كلًا من المعادلات الآتية:

47) $4x - 3 = 19$ **5.5**

48) $\frac{1}{3}x + 6 = 14$ **24**

49) $5(x^2 + 2) = 30$ **$2, -2$**

4 التقويم

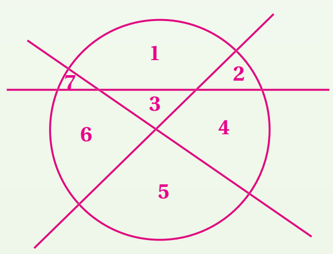
تعلم لاحق: اطلب إلى الطلاب توضيح كيف ستساعدهم كتابة البرهان الحر عند دراسة البرهان الجبري والبرهان ذي العمودين.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 38، وجِّه الطلاب إلى أن عمر لم يخطئ فقط في عدم بدء برهانه بالمعطيات، بل أخطأ أيضًا عندما كتب في برهانه أن B نقطة منتصف $\overline{AB}$، والصحيح هو أن B نقطة منتصف $\overline{AD}$.

إجابة:

42) D



تنويع التعليم

ضمن دون

إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في تذكر المسلّمات التي تعلّموها في هذا الدرس،

فاطلب إليهم رسم عدة أشكال كأمثلة على كل مسلّمةٍ في هذا الدرس.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 1

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) دون

الاسم ______ التاريخ ______

1-5 تدريبات إعادة التعليم

المسلّمات والبراهين الحرة

النقاط والمستقيمات والمستويات:

المسلّمة هي العبارة التي تُقبل على أنها صحيحة دون برهان، والمسلّمات تصف علاقاتٍ أساسيةً في الهندسة.

المسلّمة 1.1:	كل نقطتين يمر بهما مستقيم واحد.
المسلّمة 1.2:	كل ثلاث نقاط لا تقع على مستقيم واحد يمرُّ بها مستوى واحد.
المسلّمة 1.3:	كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.
المسلّمة 1.4:	كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.
المسلّمة 1.5:	إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد الذي يحوي هاتين النقطتين يقع كليًّا في ذلك المستوى.
المسلّمة 1.6:	إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.
المسلّمة 1.7:	إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما يكون مستقيمًا.

مثال حدِّد ما إذا كانت الجمل الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وبرّر إجابتك:

a) **يوجد مستوى واحد فقط يحوي النقاط الثلاث A, B, C.**
صحيحة أحيانًا؛ بحسب المسلمة 1.2 ، إذا كانت النقاط A, B, C على استقامةٍ واحدةٍ، فإنه يوجد عدَّة مستويات تحويها. أما إذا لم تكن هذه النقاط على استقامةٍ واحدةٍ، فإنه يوجد مستوًى واحد فقط يحويها.

b) **النقطتان E و F يمرّ بهما مستقيمٌ واحدٌ.**
صحيحة دائمًا؛ بحسب المسلّمة 1.1 التي تنصّ على أنه يوجد مستقيم واحد فقط يمرّ بأي نقطتين.

c) **يتقاطع مستقيمان في نقطتين مختلفتين M وَ N.**
غير صحيحة أبدًا؛ يتقاطع المستقيمان في نقطةٍ واحدةٍ فقط، بحسب المسلّمة 1.6

تمارين

بيّن ما إذا كانت الجمل الآتية صحيحةً دائمًا، أو صحيحةً أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا، وبرّر إجابتك:

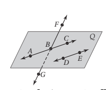
1) يمرّ المستقيم بنقطة واحدة فقط. **غير صحيحة أبدًا، المسلمة 1.3**

2) أيُّ مستقيمين l و m يكونان متقاطعين. **صحيحة أحيانًا.**

3) إذا وقعت النقطتان G و H في المستوى $\mathcal{M}$، فإن $\overline{GH}$ يكون عموديًّا على المستوى $\mathcal{M}$. **غير صحيحة أبدًا. المسلمة 1.5**

4) يتقاطع المستويان $\mathcal{R}$ و S في النقطة T. **غير صحيحة أبدًا. المسلمة 1.7**

5) إذا لم تكن النقاط A, B, C على استقامةٍ واحدةٍ، فإن القطع المستقيمة $\overline{CA}, \overline{BC}, \overline{AB}$ تقع في مستوى واحدٍ فقط. **صحيحة دائمًا. المسلمتان 1.1 ، 1.2**



في الشكل المجاور، $\overline{DE}$, $\overline{AC}$ واقعتان في المستوى Q، اذكر المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات صحة كلٍّ من العبارتين الآتيتين:

6) يوجد مستوى واحد فقط يحتوي على النقاط F, B, E. **المسلّمة 1.2: كل ثلاث نقاط مختلفة ولا تقع على مستقيم واحد يمر بها مستوى واحد.**

7) يقع $\overleftrightarrow{BE}$ في المستوى Q. **المسلّمة 1.5: إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الذي يحويهما يقع كليًا في ذلك المستوى.**

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (27) دون

الاسم ______ التاريخ ______

1-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

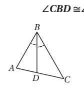
المسلّمات والبراهين الحرة

البراهين الحرة:

الحجة المنطقية التي تستعمل التبرير الاستنتاجي للوصول إلى نتيجة صحيحة تُسمى **برهانًا**، وأحد أنواع البراهين، هو **البرهان الحر** الذي تُكتب فيه فقرة تفسر الأسباب التي تجعل العبارة صحيحة.

العبارة التي يمكن إثبات صحتها تسمَّى **نظرية**. ويمكنك استعمال التعريفات والمسلّمات والنظريات المبرهنة في إثبات صحة عبارات أخرى.

مثال في $\triangle ABC$، $\overline{BD}$ منصّف الزاوية $\angle ABC$ ، اكتب برهانًا حرًّا لإثباتِ أنَّ: $\angle CBD \cong \angle ABD$

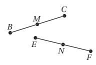


من تعريف منصّف الزاوية، نعلم أنه يقسمها إلى زاويتين متطابقتين، ولما كانت $\overline{BD}$ منصف زاوية، فإنها تقسم $\angle ABC$ إلى زاويتين متطابقتين؛ لذا فإن: $\angle CBD \cong \angle ABD$.

تمارين

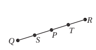
1) إذا علمت أن $\angle A \cong \angle D$، وأن $\angle D \cong \angle E$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\angle A \cong \angle E$.
- **المعطيات:** $\angle A \cong \angle D$، وَ $\angle D \cong \angle E$
- **المطلوب:** $\angle A \cong \angle E$
- **البرهان:**

لما كانت $\angle A \cong \angle D$ و $\angle D \cong \angle E$ ، فإن $m\angle A = m\angle D$ و $m\angle D = m\angle E$ ، وذلك من تعريف التطابق؛ إذن $m\angle A = m\angle E$ بحسب خاصية التعدّي للمساواة، ومن تعريف التطابق ينتج أن $\angle A \cong \angle E$



2) إذا علمت أن $\overline{EF} \cong \overline{BC}$ ، وأن M نقطة منتصف $\overline{BC}$ ، وأن N نقطة منتصف $\overline{EF}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $BM = EN$.
- **المعطيات:** $\overline{EF} \cong \overline{BC}$ ، M نقطة منتصف $\overline{BC}$ ، و N نقطة منتصف $\overline{EF}$.
- **المطلوب:** $BM = EN$
- **البرهان:**

لما كانت M نقطة منتصف $\overline{BC}$ و N نقطة منتصف $\overline{EF}$، فإن $BM = \frac{1}{2}BC$ و $EN = \frac{1}{2}EF$، ولما كانت $\overline{EF} \cong \overline{BC}$ فإن $BC = EF$ بحسب تعريف التطابق، وأن $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}EF$ من خاصية الضرب، وهكذا فإن $BM = EN$ بحسب خاصية التعدّي للمساواة



3) إذا علمت أن S نقطة منتصف $\overline{QP}$، وأن T نقطة منتصف $\overline{PR}$، وأن P نقطة منتصف $\overline{ST}$ ، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $QS = TR$.
- **المعطيات:** S نقطة منتصف $\overline{QP}$ ، و T نقطة منتصف $\overline{PR}$ ، و P نقطة منتصف $\overline{ST}$
- **المطلوب:** $QS = TR$
- **البرهان:**

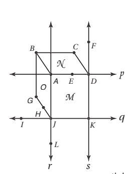
S نقطة منتصف $\overline{QP}$ ، إذن $QS = SP$. ولما كانت P نقطة منتصف $\overline{ST}$ ، فإن $SP = PT$. وهكذا $QS = PT$ بحسب خاصية التعدّي. ولما كانت T نقطة منتصف $\overline{PR}$، فإن $PT = TR$ ؛ إذن $QS = TR$ بحسب خاصية التعدّي للمساواة

تدريبات المهارات (28) دون ضمن

الاسم ______ التاريخ ______

1-5 تدريبات المهارات

المسلّمات والبراهين الحرة



اذكر المسلمة التي تبرّر صحة كل عبارة ممَّا يأتي:

1) المستويان O و $\mathcal{M}$ يتقاطعان في المستقيم r
يلتقي المستويان في الحرف الذي يقع على المستقيم r ، المسلّمة 1.6 : إذا تقاطع مستويان، فإن تقاطعهما خطٌ مستقيم.

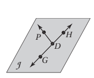
2) المستقيم p يقع في المستوى $\mathcal{N}$.
النقطتان D و A تقعان على المستقيم p في المستوى $\mathcal{N}$، المسلّمة 1.5 : إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الذي يحويهما يقع بكامله في ذلك المستوى.

حدّد ما إذا كانت الجمل الآتية صحيحة دائمًا أوصحيحةً أحيانًا أو غير صحيحةً أبدًا، وبرِّر إجابتك.

3) النقاط الثلاث التي تقع على استقامةٍ واحدةٍ تحدِّد مستوى واحدًا.
غير صحيحة أبدًا؛ النقاط الثلاث التي لا تقع على استقامة واحدة، تحدد مستوى واحدًا.

4) النقطتان A , B تحدِّدان مستقيمًا واحدًا.
صحيحة دائمًا؛ يوجد مستقيم واحد فقط يمر بأي نقطتين معلومتين.

5) يحتوي المستوى على ثلاثة مستقيمات على الأقل.
صحيحة دائمًا؛ يحتوي المستوى على ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة، كل نقطتين منها تُحدّدان مستقيمًا واحدًا.



في الشكل المجاور، يقع كلٌّ من $\overleftrightarrow{DG}$ و $\overrightarrow{DP}$ في المستوى $\mathcal{J}$، وتقع H على $\overleftrightarrow{DG}$.
اذكر المسلّمة التي تبرِّر صحة كلًّا من العبارتين الآتيتين:

6) G و P تقعان على الخط المستقيم نفسه.
المسلّمة 1.1: هناك مستقيم واحد فقط يمرُّ بأي نقطتين معلومتين.

7) النقاط D, H, P تقع في المستوى نفسه.
المسلّمة 1.2: يوجد مستوى واحد فقط يحوي أيَّ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

8) **برهان:** في الشكل المجاور، النقطة B نقطة منتصف $\overline{AC}$ ، والنقطة C نقطة منتصف $\overline{BD}$، اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن: $AB = CD$.

المعطيات: B نقطة منتصف $\overline{AC}$
C نقطة منتصف $\overline{BD}$
المطلوب: إثبات أن $AB = CD$
البرهان: لما كانت B نقطة منتصف $\overline{AC}$ ، و C نقطة منتصف $\overline{BD}$، فإن: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{BC} \cong \overline{CD}$. بحسب نظرية نقطة المنتصف. ولّما كانت القطع المستقيمة المتطابقة لها الطول نفسه، فإن $AB = BC$ ، و $BC = CD$، وبحسب خاصية التعدي للمساواة ينتج أن $AB = CD$.

تدريبات حل المسألة (29) دون ضمن فوق

الاسم ______ التاريخ ______

1-5 تدريبات حل المسألة

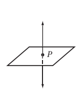
المسلّمات والبراهين الحرة

1) **بناء:** يقوم أحمد وأسعدُ ببناء سطح لمنزلهما، ويريدان أن يتكوّن السطح من مستويين مائلين يلتقيان عند قنطرة منحنية، فهل ذلك ممكن؟
هذا غير ممكن؛ لأن المستويين يتقاطعان في مستقيم.

2) **خطوط جوية:** تريد شركة طيران أن توفر رحلاتٍ جويةً إلى المدن الآتية: حائل، المدينة المنورة، الرياض، جدة، الدمام، جازان. فرسمت الشركة مستقيمات يصل الواحد منهما بين اثنتين من هذه المدن على الخريطة، إذا لم تكن أيُّ ثلاثٍ من هذه المدن على المستقيم نفسه، فكم مستقيمًا رسمت الشركة؟
15

3) **رصد:** حاول بحّار رصْد حوتٍ بواسطة منظاره، ولكن الحوت كان بعيدًا جدًّا، ولم يظهر على شاشة الرادار، لكنَّ البحّار رأى قاربًا بعيدًا فاتصل به من أجل تحديد اتجاه الحوت. فسّر كيف يمكن أن تساعد هذه المعلومة البحّار على تحديد موقع الحوت، ومتى تكون هذه المعلومة غير مُفيدة؟
يشكّل خطّا نظر البحارين مستقيمين يتقاطعان في النقطة التي يوجد عندها الحوت، ولّما كان أي مستقيمين متقاطعين يتقاطعان في نقطة واحدة، فإنه يمكن تحديد موقع الحوت بالضبط، ولكن هذه الفكرة لا تفيد إذا كان القاربان والحوت على استقامةٍ واحدة.

4) **نقاط:** يدّعي خالد أن المستقيم يقطع المستوى في نقطة واحدة فقط، ووضّح ادّعاءَه هذا بالرسم الآتي:



ويعتقد عامر أنه يمكن أن يتقاطع المستقيم مع المستوى في أكثر من نقطة، فأيهما على صواب؟ فسّر إجابتك.
عامر على صواب؛ لأنه قد يقع المستقيم في المستوى، وبذلك يقطعه في عدد لا نهائي من النقاط.

5) ركل سعيدٌ كرةً لأعلى في مسارٍ مستقيم.

a) إذا أراد زياد أن يرسم المسار، فهل يوجد مستوى محدَّد ووحيد للرسم، أم أكثر؟
أكثر من مستوى؛ لأن المستقيم لا يحدد مستوى، بل إنه لتحديد مستوى يلزمنا 3 نقاط ليست على استقامةٍ واحدة.

b) إذا لم تكن حركة الكرة على مستقيم، فهل يستطيع زياد تحديد المستوى الذي يحوي مسار الكرة؟
نعم؛ لأي ثلاث نقاط لا تقع على استقامةٍ واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (30) ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

1-5 التدريبات الإثرائية

زوجيٌّ وفرديٌّ

لتحديد ما إذا كان العدد زوجيًّا، ننظر إذا كان رقم آحاده يقبل القسمة على 2 أم لا. ولكن هناك تعريفًا رياضيًّا آخر للعدد الزوجِيِّ، ينصُّ على أن العدد يكون زوجيًّا إذا استطعنا كتابته في صورة $2k$ لعدد صحيح k.

يوظف البرهان الآتي هذا التعريف؛ لإثبات أن مجموع عددين زوجيَّين يكون عددًا زوجيًّا أيضًا.

- **المعطيات:** m, n عددان زوجيّان.
- **المطلوب:** $m+n$ عدد زوجي.
- **البرهان:** بما أن m و n عددان زوجيَّان، فبحسب تعريف العدد الزوجيِّ، يمكن كتابتهما في صورة $m = 2\ell$ و$n = 2j$، حيث ℓ , j عددان صحيحان. نريد أن نبيّن أنه يمكن كتابة $m + n$ في صورة $2k$، لعدد صحيح k؛ لإثبات أن $m + n$ عدد زوجي. يمكن كتابة $m + n$ في الصورة $2\ell + 2j$ أو $2(\ell + j)$ باستعمال خاصية التوزيع. ولمّا كان ℓ و j عددين صحيحين، فإن $\ell + j$ يساوي عددًا صحيحًا وليكن k؛ أيْ أن $m + n$ يساوي $2k$ حيث k، عدد صحيح، وعليه فإن $m + n$ عدد زوجي.

وتعريف العدد الفردي ينصُّ على أن العدد يكون فرديًّا، إذا أمكن أن نكتبه في صورة $2k + 1$ لعدد صحيح k.

استعمل تعريف العدد الزوجي والعدد الفردي؛ لكتابة برهانٍ حرٍّ لكلٍّ من العبارات الآتية:

1) مجموع عددين فرديين يكون عددًا زوجيًّا.

- **المعطيات:** m، n عددان فرديّان.
- **المطلوب:** $m+n$ عدد زوجي.
- **البرهان:** بما أن m و n عددان فرديان، إذن حسب تعريف العدد الفردي، يمكن كتابتهما في صورة $m = 2\ell + 1$ و $n = 2j + 1$ لعددين صحيحين ℓ و j، ويتعين أن نبين أنه يمكن كتابة $m + n$ في صورة $2k$ لعدد صحيح k؛ لإثبات أن المجموع عدد زوجي. والآن يمكن كتابة $m + n$ في صورة $2\ell + 1 + 2j + 1$ أو $2(\ell + j + 1)$، ولما كان ℓ و j عددين صحيحين، فإن المجموع $\ell + j + 1$ يساوي عددًا صحيحًا، وليكن هذا المجموع يساوي العدد الصحيح k. ولذلك فإنه يمكن كتابة $m + n$ في صورة $2k$ لعدد صحيح k؛ إذن $m + n$ عدد زوجي.

2) ناتج ضرب عددين فرديين يكون عددًا فرديًّا.

- **المعطيات:** m ، n عددان فرديَّان.
- **المطلوب:** mn عدد فردي.
- **البرهان:** بما أن m و n عددان فرديان، فبحسب تعريف العدد الفردي، يمكن كتابتهما في صورة: $m = 2\ell + 1$ و $n = 2j + 1$ لعددين صحيحين ℓ و j، ويتعين أن نبين أنه يمكن كتابة ناتج الضرب mn في صورة $2k + 1$ لعدد صحيح k؛ لإثبات أن ناتج الضرب عدد فردي، والآن يمكن أن نكتب mn في صورة: $(2\ell + 1)(2j + 1)$ ، أو $4\ell j + 2\ell + 2j + 1$، أو $2(2\ell j + \ell + j) + 1$. ولما كان ℓ و j عددين صحيحين، فإن المجموع $2\ell j + \ell + j$ عدد صحيح أيضًا، وليكن هذا المجموع يساوي العدد الصحيح k. ولذلك يمكن كتابة mn في صورة $2k + 1$ لعدد صحيح k؛ أيْ أن mn عدد فردي.

3) ناتج ضرب عددين زوجيين يكون عددًا زوجيًّا.

- **المعطيات:** m ، n عددان زوجيَّان.
- **المطلوب:** mn عدد زوجي.
- **البرهان:** بما أن m و n عددان زوجيان، فبحسب تعريف العدد الزوجي يمكن كتابتهما في صورة $m = 2\ell$ و $n = 2j$ لعددين صحيحين ℓ و j. ويتعين أن نبين أنه يمكن كتابة mn في صورة $2k$ لعدد صحيح k؛ لإثبات أن ناتج الضرب عدد زوجي. والآن يمكن كتابة ناتج الضرب mn في الصورة $(2\ell)(2j)$ أو $4\ell j$ أو $2(2\ell j)$. ولما كان ℓ و j عددين صحيحين؛ فإن ناتج الضرب $2\ell j$ عدد صحيح أيضًا، وليكن هذا الناتج يساوي العدد الصحيح k، ولذلك يمكن كتابة mn في صورة $2k$ لعدد صحيح k؛ أيّ أن mn عدد زوجي.

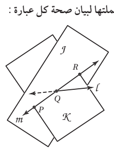
الصف: الأول الثانوي 30 الفصل 1: التبرير والبرهان

كتاب التمارين (10) دون ضمن فوق

1 - 5 المسلّمات والبراهين الحرة

الفصل الأول التبرير والبرهان

اشرح كيف يوضح الشكل صحة كلٍّ من العبارتين الآتيتين ، ثم اذكر المسلّمة التي استعملتها لبيان صحة كل عبارة :



1) المستويان $\mathcal{J}$ و $\mathcal{K}$ يتقاطعان في المستقيم m.

المستويان k, y يتقاطعان في مستقيم واحد هو m وفق المسلمة 1.7

2) المستقيمان l و m يتقاطعان في النقطة Q.

تقع النقطة Q على كلٍّ من المستقيمين l و m. المسلّمة: إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط .

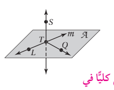
حدد ما إذا كانت كلٌّ من الجملتين الآتيتين صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وبرّر إجابتك.

3) تقاطع مستويين يحوي نقطتين على الأقل.

صحيحة دائمًا، تقاطع مستويين هو مستقيم، والمستقيم يحوي نقطتين على الأقل.

4) إذا اشتركت ثلاثة مستويات في نقطة، فإنها تشترك أيضًا في مستقيم.

صحيحة أحيانًا، قد تتقاطع المستويات الثلاثة في نقطة واحدة فقط.



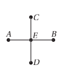
في الشكل المجاور، يقع المستقيم m و $\overrightarrow{TQ}$ في المستوى $\mathcal{A}$. اذكر المسلّمة التي تثبت صحة كل عبارة مما يأتي :

5) تقع كلٌّ من النقطتين $\mathcal{L}$ و $\mathcal{T}$ والمستقيم m في المستوى نفسه .

المسلّمة 1.5: إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع كليًّا في ذلك المستوى.

6) المستقيم m و $\overleftrightarrow{ST}$ يتقاطعان في $\mathcal{T}$.

المسلّمة 1.6: إذا تقاطع مستقيمان ، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.



7) في الشكل المجاور النقطة E هي نقطة المنتصف لكلٍّ من $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ ، $AB = CD$
اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\overline{AE} \cong \overline{ED}$

المعطيات: E هي نقطة المنتصف لكلٍّ من $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ ، $AB = CD$

المطلوب: $\overline{AE} \cong \overline{ED}$.

البرهان: بما أن E نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$؛ إذن من نظرية نقطة المنتصف تكون $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ ، و $\overline{CE} \cong \overline{ED}$، ومن تعريف تطابق القطع المستقيمة، نجدأن $AE = EB = \frac{1}{2}AB$ ، وكذلك $CE = ED = \frac{1}{2}CD$، ولكن $AB = CD$ ؛ لذا فإن $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$، أو $AE = ED$ ، ومن تعريف تطابق القطع المستقيمة نحصل على $\overline{AE} \cong \overline{ED}$

8) **منطق:** النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة، والنقاط B, C, D ليست على استقامة واحدة. والنقاط A, B, C, D لا تقع في المستوى نفسه. صِفْ مستويين يتقاطعان في BC.

المستوى الذي يحوي النقاط A, B, C والمستوى الذي يحوي النقاط B, C, D .

10

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

للأسئلة التي لم يُجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إليهم مراجعة الدروس المُشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (13) .

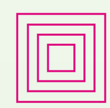
المطويات — متابعة المطويات

قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل، شجِّع الطلاب على مراجعة الملاحظات التي دوّنوها في مطوياتهم حول الدروس 1-1 إلى 1-5 .

إجابات:

1) كل عنصر في هذا النمط ينتج عن جمع العنصرين اللذين يسبقانه 40

2) يُحوَّل الشكل التالي في النمط بمربع آخر.



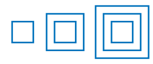
الفصل 1 اختبار منتصف الفصل

الدروس 1-1 إلى 1-5

اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتابعة مما يأتي، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منها . (الدرس 1-1) انظر الهامش (1, 2)

1) 5, 5, 10, 15, 25, ...

2) ......



أعط مثالًا مضادًا يبين أن كلًا من التخمينين الآتيين خاطئ: (الدرس 1-1) انظر ملحق الإجابات (3, 4)

3) إذا كان $AB = BC$ ، فإن B نقطة منتصف $\overline{AC}$.

4) إذا كان n عددًا حقيقيًّا، فإن $n^3 > n$.

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسّر تبريرك. (الدرس 1-2)

p: في الأسبوع الواحد 7 أيام.

q: في اليوم الواحد 24 ساعة.

r: صَفَر هو الشهر الذي يأتي قبل شهر المحرم.

5) $p \wedge r$ انظر ملحق الإجابات (5–7)

6) q و p

7) $p \wedge \sim r$

8) أكمل الجدول الآتي. (الدرس 1-2)

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
T	T	F	T

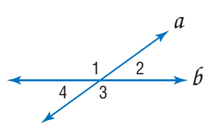
حدد الفرض والنتيجة في كلٍّ من العبارات الشرطية الآتية: (الدرس 1-3) انظر ملحق الإجابات (9–11)

9) إذا كان للمضلع خمسة أضلاع، فإنه خماسي.

10) إذا كان $4x - 6 = 10$ ، فإن $x = 4$.

11) الزاوية التي قياسها أقل من $90°$ تكون حادة.

حدد قيمة الصواب لكلٍّ من العبارتين الشرطيتين الآتيتين. وإذا كانت أيهما صائبة، فبرر إجابتك. (الدرس 1-3)

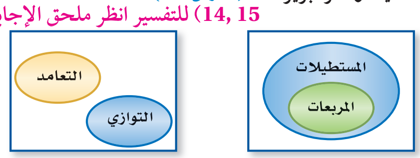


12) $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان.

13) $\angle 1$ و $\angle 4$ متطابقتان.

انظر ملحق الإجابات (12, 13)

استعمل أشكال فن أدناه لتحديد قيمة الصواب لكلٍّ من العبارات الشرطية الآتية. وفسر تبريرك . (الدرس 1-3) (14, 15) للتفسير انظر ملحق الإجابات



14) إذا كان المضلع مربعًا، فإنه يكون مستطيلًا. صحيحة

15) إذا كان المستقيمان متعامدين، فإنهما لا يمكن أن يكونا متوازيين. صحيحة

16) **كرة قدم** تقابل فريقا الفرسان والفهود في المباراة النهائية. معتمدًا على المعطيات، حدِّد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا في كلٍّ مما يأتي. وفسِّر تبريرك. (الدرس 1-4) انظر ملحق الإجابات

المعطيات: الفريق الفائز بالكأس هو الفريق الذي يحرز أهدافًا أكثر في نهاية المباراة.
أحرز فريق الفرسان 3 أهداف، بينما أحرز فريق الفهود هدفين.

النتيجة: فاز فريق الفرسان بالكأس.

17) **اختيار من متعدد:** أي العبارات الآتية تنتج منطقيًّا عن العبارتين (1) و (2)؟ (الدرس 1-4) C

(1) إذا كنت أحد طلاب المرحلة الثانوية، فإن عمرك 16 سنة على الأقل.

(2) إذا كان عمرك 16 سنة على الأقل، فإن عمرك يؤهِّلك لقيادة السيارة.

A إذا كان عمرك يؤهِّلك لقيادة السيارة، فإنك أحد طلاب المرحلة الثانوية.

B إذا كان عمرك لا يؤهِّلك لقيادة السيارة، فأنت في المرحلة المتوسطة.

C إذا كنت أحد طلاب المرحلة الثانوية، فإن عمرك يؤهِّلك لقيادة السيارة .

D إذا كان عمرك 16 سنة على الأقل، فإنك أحد طلاب المرحلة الثانوية.

حدِّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وفسر تبريرك. (الدرس 1-5)

18) النقاط J, K, L, N ليست على استقامة واحدة، وتقع جميعها في المستوى $\mathcal{M}$. انظر ملحق الإجابات (18–20)

19) يوجد مستقيم واحد فقط يمر بالنقطتين R ، S.

20) المستقيم a يحتوي على النقطة Q فقط.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس 1-1 إلى 1-5 .		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26).
	تدريبات المهارات ، ص (8, 13, 18, 23, 28).		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1-6 البرهان الجبري
Algebraic Proof

فيما سبق:

درستُ المسلّمات الأساسية حول النقاط والمستقيمات والمستويات.

(الدرس 1-5)

والآن:

- أستعمل الجبر لكتابة برهان ذي عمودين.
- أستعمل خصائص المساواة لكتابة برهان هندسي.

المفردات:

البرهان الجبري
algebraic proof

البرهان ذو العمودين
two-column proof

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تحتوي بعض السيارات على شاشة لعرض درجة الحرارة الخارجية بالمقياس الفهرنهايتي أو المقياس السيليزي. والمقياس الفهرنهايتي يحدد درجة تجمد الماء عند $32°$، ودرجة غليانه عند $212°$، أما المقياس السيليزي فيحدد درجة تجمد الماء عند $0°$، وغليانه عند $100°$.

يمكنك استعمال البرهان الجبري؛ لإثبات أنه إذا كانت العلاقة التي تربط هذين المقياسين معطاة بالصيغة. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$، فإنها تعطى أيضًا بالصيغة $F = \frac{9}{5}C + 32$

البرهان الجبري: الجبر نظام مكوَّن من مجموعات من الأعداد، وعمليات عليها وخصائص تمكّنك من إجراء هذه العمليات. والجدول الآتي يلخِّص عدة خصائص للأعداد الحقيقية التي ستستعملها في الجبر.

مفهوم أساسي — خصائص الأعداد الحقيقية — أضف إلى مطويتك

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c

خاصية الجمع للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
خاصية الطرح للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
خاصية الضرب للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a \cdot c = b \cdot c$.
خاصية القسمة للمساواة	إذا كان $a = b$ و $c \neq 0$، فإن $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
خاصية الانعكاس للمساواة	$a = a$
خاصية التماثل للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
خاصية التعدي للمساواة	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
خاصية التعويض للمساواة	إذا كان $a = b$، فإنه يمكننا أن نضع b مكان a في أي معادلة أو عبارة جبرية تحتوي على a
خاصية التوزيع	$a(b + c) = ab + ac$

البرهان الجبري هو برهان يتكون من سلسلة عبارات جبرية، وتبرر خصائص المساواة أعلاه كثيرًا من العبارات المُستعملة في البراهين الجبرية.

مثال 1 — تبرير كل خطوة عند حل المعادلة

A) اذكر الخاصية التي تبرر العبارة: إذا كان $x + 1 = 2$، فإن $x + 1 + (-3) = 2 + (-3)$

خاصية الجمع للمساواة

B) أثبت أنه إذا كان $-5(x + 4) = 70$، فإن $x = -18$. اكتب تبريرًا لكل خطوة.

$-5(x + 4) = 70$	المعادلة الأصلية، أو المعطيات
$-5 \cdot x + (-5) \cdot 4 = 70$	استعمل خاصية التوزيع
$-5x - 20 = 70$	بسِّط
$-5x - 20 + 20 = 70 + 20$	استعمل خاصية الجمع للمساواة
$-5x = 90$	بسِّط
$\frac{-5x}{-5} = \frac{90}{-5}$	استعمل خاصية القسمة للمساواة
$x = -18$	بسِّط

1-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-6

استعمال المسلّمات المتعلقة بالنقاط والمستقيمات والمستويات لكتابة البراهين الحرة.

الدرس 1-6

استعمال الجبر لكتابة برهان ذي عمودين.

استعمال خصائص المساواة لكتابة برهان هندسي.

ما بعد الدرس 1-6

صياغة عبارات حول الأشكال الهندسية وتبريرها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة " لماذا ؟"

اسأل:

- لماذا تحتوي بعض السيارات على مؤشرٍ لدرجة الحرارة بالقياس الفهرنهايتي والسيليزي معًا؟
إجابة ممكنة: قد تُباع السيارة في بلدان مختلفة؛ بعضها يستعمل المقياس الفهرنهايتي وبعضها الآخر يستعمل المقياس السيليزي.
- أي المقياسين وحداته أكبر؛ الفهرنهايتي أم السيليزي؟
السيليزي
- كيف يمكن لمعادلتين أن تمثلا العلاقة نفسها؟
إجابة ممكنة: يمكن إعادة كتابتهما بنقل بعض الحدود من طرف إلى آخر.

مصادر الدرس 1-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (58)	• تنويع التعليم، ص (58)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (11)	• كتاب التمارين، ص (11)	• كتاب التمارين، ص (11)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

تحقق من فهمك

اذكر الخاصية التي تبرر كلًّا من العبارتين الآتيتين:

1A) إذا كان $x - 1 = -1$، فإن $x + 4 + (-5) = x - 1 + (-5) + 4$ خاصية الجمع للمساواة

1B) إذا كان $5 = y$، فإن $y = 5$ خاصية التماثل للمساواة

1C) أثبت أنه إذا كان $2x - 13 = -5$، فإن $x = 4$. اكتب تبريرًا لكل خطوة.

1C) $2x - 13 = -5$ (معطيات)
$2x - 13 + 13 = -5 + 13$ (خاصية الجمع للمساواة)
$2x = 8$ (بالتبسيط)
$x = 4$ (خاصية القسمة للمساواة)

يوضح المثال 1 برهان العبارة الشرطية "إذا كان $-5(x + 4) = 70$، فإن $x = -18$". لاحظ في هذا البرهان أن العمود الأيمن يحتوي على تفصيل الطريقة التي تقود إلى الحل خطوة بخطوة، أما العمود الأيسر فيحتوي على مبرر كل خطوة.

وتكتب براهين النظريات والتخمينات الهندسية عادةً على هذا النحو فيما يسمى **البرهان ذا العمودين**، حيث العبارات مرتبة في عمود، والتبريرات في عمود موازٍ.

إرشادات للدراسة

الخوارزميات

الخوارزمية هي سلسلة من الخطوات المتَّبعة لإجراء عملية أو حل مسألة ما. ويمكن اعتبار البرهان من أنواع الخوارزميات؛ لأنه يتم خطوة بخطوة.

مثال 2 من واقع الحياة كتابة البرهان الجبري

علوم: إذا كانت الصيغة التي تحول درجات الحرارة من فهرنهايتية إلى سيليزية هي $C = \frac{5}{9}(F - 32)$، فإن الصيغة التي تحول درجات الحرارة من سيليزية إلى فهرنهايتية هي $F = \frac{9}{5}C + 32$. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة هذا التخمين.

اكتب المعطيات والمطلوب إثباته أولًا.

المعطيات: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

المطلوب: $F = \frac{9}{5}C + 32$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $C = \frac{5}{9}(F - 32)$	**1)** معطيات
2) $\frac{9}{5}C = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9}(F - 32)$	**2)** خاصية الضرب للمساواة
3) $\frac{9}{5}C = F - 32$	**3)** بالتبسيط
4) $\frac{9}{5}C + 32 = F - 32 + 32$	**4)** خاصية الجمع للمساواة
5) $\frac{9}{5}C + 32 = F$	**5)** بالتبسيط
6) $F = \frac{9}{5}C + 32$	**6)** خاصية التماثل للمساواة

إرشادات للدراسة

رياضيات ذهنية

إذا سمح معلمك، يمكنك حذف بعض الخطوات، وذلك لأن بعض الحسابات يمكن إجراؤها ذهنيًا؛ ففي المثال 2 يمكن حذف العبارتين 3 و 4؛ ليصبح مبرر العبارة 3 "خاصية الضرب للمساواة"، والعبارة 5 "خاصية الجمع للمساواة".

تحقق من فهمك

اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كلٍّ من التخمينين الآتيين:

2A) إذا كان $\frac{5x + 1}{2} - 8 = 0$، فإن $x = 3$. انظر الهامش.

2B) **فيزياء:** إذا كانت المسافة d التي يقطعها جسم متحرك بسرعة ابتدائية u وسرعة نهائية v في زمن t تعطى بالعلاقة $d = t \cdot \frac{u + v}{2}$، فإن $u = \frac{2d}{t} - v$. انظر ملحق الإجابات

البرهان الجبري

المثال 1 يبين كيفية حل معادلة جبرية باستعمال خصائص المساواة.

المثال 2 يبين كيفية إثبات تكافؤ معادلتين، وذلك بتبرير كل خطوةٍ باستعمال خصائص الأعداد الحقيقية.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة.

مثالان إضافيان

1 حل المعادلة التالية مع تبرير كل خطوة.

$2(5 - 3a) - 4(a + 7) = 92$

$2(5 - 3a) - 4(a + 7) = 92$ (المعادلة الأصلية)
$10 - 6a - 4a - 28 = 92$ (خاصية التوزيع)
$-18 - 10a = 92$ (بالتبسيط)
$-18 - 10a + 18 = 92 + 18$ (خاصية الجمع للمساواة)
$-10a = 110$ (بالتبسيط)
$\frac{-10a}{-10} = \frac{110}{-10}$ (خاصية القسمة للمساواة)
$a = -11$ (بالتبسيط)

2 اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كان $\frac{7d+3}{4} = 6$، فإن $d = 3$.

المعطيات: $\frac{7d + 3}{4} = 6$

المطلوب: $d = 3$

العبارات	المبررات
1) $\frac{7d+3}{4} = 6$	**1)** معطى
2) $4\left(\frac{7d+3}{4}\right) = 4(6)$	**2)** خاصية الضرب للمساواة
3) $7d + 3 = 24$	**3)** بالتبسيط
4) $7d + 3 - 3 = 24 - 3$	**4)** خاصية الطرح للمساواة
5) $7d = 21$	**5)** بالتبسيط
6) $\frac{7d}{7} = \frac{21}{7}$	**6)** خاصية القسمة للمساواة
7) $d = 3$	**7)** بالتبسيط

إجابات (تحقق من فهمك):

2A) **المعطيات:** $\frac{5x + 1}{2} - 8 = 0$

المطلوب: $x = 3$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\frac{5x + 1}{2} - 8 = 0$	**1)** معطيات
2) $\frac{5x + 1}{2} = 8$	**2)** خاصية الجمع للمساواة
3) $2\left(\frac{5x + 1}{2}\right) = 2(8)$	**3)** خاصية الضرب للمساواة
4) $5x + 1 = 16$	**4)** بالتبسيط
5) $5x = 15$	**5)** خاصية الطرح للمساواة
6) $x = 3$	**6)** خاصية القسمة للمساواة

إرشادات للدراسة

خاصيتا الإبدال والتجميع
الخصائص الآتية صحيحة لأي أعداد حقيقية a, b, c:

خاصية الإبدال للجمع
$a + b = b + a$

خاصية الإبدال للضرب
$a \cdot b = b \cdot a$

خاصية التجميع للجمع
$(a+b)+c=a+(b+c)$

خاصية التجميع للضرب
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

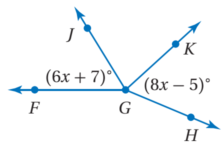
البرهان الهندسي: بما أن في الهندسة أيضًا متغيرات، وأعدادًا وعمليات، فإن معظم خصائص المساواة المُستعملة في الجبر صحيحة أيضًا في الهندسة. فأطوال القطع المستقيمة وقياس الزوايا هي أعداد حقيقية؛ لذا يمكن استعمال خصائص الجبر في إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة والزوايا.

الخاصية	القطع المستقيمة	الزوايا
الانعكاس	$AB = AB$	$m\angle 1 = m\angle 1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$ ، فإن $CD = AB$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ ، فإن $m\angle 2 = m\angle 1$.
التعدي	إذا كانت $AB = CD$ ، و $CD = EF$ ، فإن $AB = EF$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ ، و $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$.

يمكن استعمال هذه الخصائص لكتابة براهين هندسية .

مثال 3 كتابة البرهان الهندسي

اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كانت:
$\angle FGJ \cong \angle JGK$ ، $\angle JGK \cong \angle KGH$، فإن $x = 6$.



المعطيات: $\angle FGJ \cong \angle JGK, \angle JGK \cong \angle KGH,$
$m\angle FGJ = (6x + 7)°, m\angle KGH = (8x - 5)°$

المطلوب: $x = 6$

البرهان:

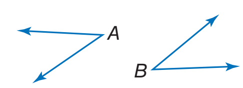
العبارات	المبررات
1) $\angle FGJ \cong \angle JGK; \angle JGK \cong \angle KGH$	1) معطيات
2) $m\angle FGJ = m\angle JGK; m\angle JGK = m\angle KGH$	2) تعريف تطابق الزوايا
3) $m\angle FGJ = m\angle KGH$	3) خاصية التعدي للمساواة
4) $6x + 7 = 8x - 5$	4) خاصية التعويض للمساواة
5) $6x + 7 + 5 = 8x - 5 + 5$	5) خاصية الجمع للمساواة
6) $6x + 12 = 8x$	6) بالتبسيط
7) $6x + 12 - 6x = 8x - 6x$	7) خاصية الطرح للمساواة
8) $12 = 2x$	8) بالتبسيط
9) $\frac{12}{2} = \frac{2x}{2}$	9) خاصية القسمة للمساواة
10) $6 = x$	10) بالتبسيط
11) $x = 6$	11) خاصية التماثل للمساواة

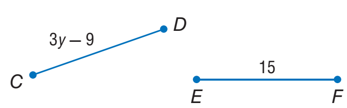
تحقق من فهمك

اكتب برهانًا ذا عمودين؛ لإثبات صحة كلٍّ من التخمينين الآتيين:

3A) إذا كان $\angle A \cong \angle B, m\angle A = 37°$، فإن $m\angle B = 37°$.

3B) إذا كان $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ ، فإن $y = 8$.





3A) المعطيات: $\angle A \cong \angle B$ و $m\angle A = 37°$
المطلوب: $m\angle B = 37°$
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle A \cong \angle B$ و $m\angle A = 37°$	1) معطيات
2) $m\angle A = m\angle B$	2) تعريف تطابق الزوايا
3) $37° = m\angle B$	3) خاصية التعويض للمساواة
4) $m\angle B = 37°$	4) خاصية التماثل

3B) المعطيات : $\overline{CD} \cong \overline{EF}$
$CD = 3y - 9, EF = 15$
المطلوب: $y = 8$
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{CD} \cong \overline{EF}$	1) معطيات
2) $CD = EF$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $3y - 9 = 15$	3) خاصية التعويض للمساواة
4) $3y = 24$	4) خاصية الجمع للمساواة
5) $y = 8$	5) خاصية القسمة للمساواة

البرهان الهندسي

المثال 3 يبين كيفية استعمال خصائص الأعداد الحقيقية لكتابة البراهين الهندسية.

مثال إضافي

3 اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كان $\angle A \cong \angle B$ ، $m\angle B = 2m\angle C, m\angle C = 45°$ ، فإن $m\angle A = 90°$

المعطيات: $\angle A \cong \angle B$ ، $m\angle C = 45°$
$m\angle B = 2m\angle C$

المطلوب: $m\angle A = 90°$

العبارات	المبررات
1) $\angle A \cong \angle B;$ $m\angle B = 2m\angle C;$ $m\angle C = 45$	1) معطيات
2) $m\angle A = m\angle B$	2) تعريف تطابق الزوايا
3) $m\angle A = 2m\angle C$	3) خاصية التعدي للمساواة
4) $m\angle A = 2(45°)$	4) خاصية التعويض للمساواة
5) $m\angle A = 90°$	5) بالتبسيط

تنبيه!

المطلوب: ذكّر الطلاب بأن آخر خطوة في البرهان، يجب أن توافق المطلوب في السؤال. فعلى سبيل المثال، يمكن أن يتضمن البرهان إيجاد قيمة متغير، إلّا أن المطلوب في السؤال هو تعويض قيمة هذا المتغير في عبارة جبرية لإيجاد قيمتها.

إرشادات للمعلم الجديد

البرهان الجبري: ليس بالضرورة أن تنتج العبارة في البرهان ذي العمودين عن العبارة التي تسبقها مباشرة، فقد تنتج عن أيّ عبارة سابقة.

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات؛ لإعداد تسجيل مرئي يبيِّن طريقة كتابة البرهان الجبري ذي العمودين، وتأكد من تضمينه تبريرًا لكل خطوة، ثم اطلب إلى كل مجموعة عرض تسجيلها أمام الصف.

المحتوى الرياضي

كتابة البرهان: ذكِّر الطلاب بأن كتابة تبرير لكل خطوة من خطوات البرهان يجعلها أوضح للقارئ. وإذا واجه الطلاب صعوبة في كتابة البرهان ذي العمودين، فيمكنهم أن يكتبوا خطوات البرهان دون مبررات، ثم يعودوا ويكتبوا تبريرًا لكل خطوة كتبوها، وتساعدهم هذه الطريقة على معرفة ما إذا كانوا قد أهملوا بعض الخطوات، وتزيد من فهمهم الطريقة التي توصَّلوا بها إلى الحل.

تأكد

المثال 1 اذكر الخاصية التي تبرر العبارة:

1) إذا كان $x = 5$، فإن $5 = x$ خاصية التماثل للمساواة

2) أثبت أنه إذا كان $2(x + 5) = 11$، فإن $x = \frac{1}{2}$ اكتب تبريرًا لكل خطوة. انظر الهامش

المثال 2

3) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\frac{y+2}{3} = 3$

المطلوب: $y = 7$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ؟ $\frac{y+2}{3} = 3$	a) معطيات
b) $3\left(\frac{y+2}{3}\right) = 3(3)$	b) ؟ خاصية الضرب للمساواة
c) ؟ $y + 2 = 9$	c) ؟ بالتبسيط
d) $y = 7$	d) خاصية الطرح للمساواة

4) **المعطيات:** $-4(x-3) + 5x = 24$

المطلوب: $x = 12$

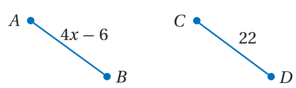
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $-4(x-3) + 5x = 24$	1) معطيات
2) $-4x + 12 + 5x = 24$	2) خاصية التوزيع
3) $x + 12 = 24$	3) بالتبسيط
4) $x = 12$	4) خاصية الطرح للمساواة

المثالان 2, 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كلٍّ من التخمينين الآتيين:

4) إذا كان $-4(x-3) + 5x = 24$، فإن $x = 12$.

5) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، فإن $x = 7$.



5) **المعطيات:** $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

المطلوب: $x = 7$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	1) معطيات
2) $AB = CD$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $4x - 6 = 22$	3) بالتعويض
4) $4x = 28$	4) خاصية الجمع للمساواة
5) $x = 7$	5) خاصية القسمة للمساواة

6) **صحة:** يراقب بدر معدل نبضات قلبه في الدقيقة الواحدة مستعملًا جهاز قياس النبض؛ ليتحقق من أنه يقع ضمن المدى الطبيعي. ويمكن تقدير هذا المعدل باستعمال الصيغة: $T = 0.75(220 - a)$، حيث T معدل نبضات القلب، و a عمر الشخص.

a) أثبت أنه إذا علمت معدل نبضات قلب شخص، فإنه يمكنك حساب عمره مستعملًا الصيغة: $a = 220 - \frac{T}{0.75}$. انظر ملحق الإجابات (a, b

b) إذا كان معدل نبضات قلب بدر يساوي 153، فكم يكون عمره؟ ما الخاصية التي تؤكد صحة حساباتك؟

تدرب وحل المسائل

المثال 1 اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

7) إذا كان $a + 10 = 20$، فإن $a = 10$. خاصية الطرح للمساواة

8) إذا كان $\frac{x}{3} = -15$، فإن $x = -45$. خاصية الضرب للمساواة

9) إذا كان $5(x + 7) = -3$، فإن $5x + 35 = -3$. خاصية التوزيع

10) إذا كان $3\left(x - \frac{2}{3}\right) = 4$، فإن $3x - 2 = 4$. خاصية التوزيع

11) أثبت أنه إذا كان $4(x-5) = x + 2$، فإن $x = \frac{22}{3}$ مبررًا كل خطوة. انظر الهامش

إجابات:

2)

العبارات	المبررات
$2(x + 5) = 11$	المعادلة الأصلية
$2(x) + 2(5) = 11$	خاصية التوزيع
$2x + 10 = 11$	بالتبسيط
$2x+10-10 = 11-10$	خاصية الطرح للمساواة
$2x = 1$	بالتبسيط
$\frac{2x}{2} = \frac{1}{2}$	خاصية القسمة للمساواة
$x = \frac{1}{2}$	بالتبسيط

11)

العبارات	المبررات
$4(x - 5) = x + 2$	المعادلة الأصلية
$4(x) - 4(5) = x+2$	خاصية التوزيع
$4x - 20 = x+2$	بالتبسيط
$-x+4x - 20 = -x+x+2$	خاصية الجمع للمساواة
$3x-20 = 2$	بالتبسيط
$3x-20+20 = 2+20$	خاصية الجمع للمساواة
$3x = 22$	بالتبسيط
$\frac{3x}{3} = \frac{22}{3}$	خاصية القسمة للمساواة
$x = \frac{22}{3}$	بالتبسيط

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

12) إذا كان $m\angle1 = m\angle2$, $m\angle2 = m\angle3$، فإن $m\angle1 = m\angle3$. خاصية التعدي للمساواة

13) $XY = XY$ خاصية الانعكاس للمساواة

14) إذا كان $\frac{1}{5}BC = \frac{1}{5}DE$، فإن $BC = DE$. خاصية الضرب للمساواة

15) إذا كان $m\angle1 = 25°$, $m\angle2 = 25°$، فإن $m\angle1 = m\angle2$. خاصية التعويض للمساواة

16) إذا كان $AB = BC$, $BC = CD$، فإن $AB = CD$. خاصية التعدي للمساواة

المثال 2 أكمل البرهانين الآتيين:

17) **المعطيات:** $\frac{8-3x}{4} = 32$

المطلوب: $x = -40$

البرهان:

المبررات	العبارات
a) معطيات	a) $\frac{8-3x}{4} = 32$
b) ___؟ خاصية الضرب للمساواة	b) $4\left(\frac{8-3x}{4}\right) = 4(32)$
c) ___؟ بالتبسيط	c) $8 - 3x = 128$
d) خاصية الطرح للمساواة	d) ___؟ $-3x = 120$
e) ___؟ خاصية القسمة للمساواة	e) $x = -40$

18) **علوم:** تعطى المسافة d التي يقطعها جسم متحرك بالقدم بالصيغة: $d = vt + \frac{1}{2}at^2$، حيث v سرعة الجسم بالقدم لكل ثانية، و t الزمن بالثانية، و a التسارع بالقدم لكل ثانية تربيع. انظر ملحق الإجابات
اكتب برهانًا ذا عمودين؛ لإثبات أن التسارع يمكن أن يُحسب بالصيغة $a = \frac{2d - 2vt}{t^2}$

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كلٍّ من التخمينين الآتيين: (19, 20) انظر الهامش.

19) إذا كان $-\frac{1}{3}n = 12$، فإن $n = -36$.

20) إذا كان $-3r + \frac{1}{2} = 4$، فإن $r = -\frac{7}{6}$.

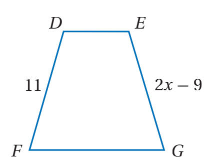
21) **علوم:** يُعطى قانون الغاز المثالي بالصيغة $PV = nRT$، حيث P : الضغط بوحدة الضغط الجوي(atm)، و V : الحجم باللترات ، و n : عدد مولات الغاز ، و R : ثابت الغاز المثالي، حيث $R = 0.0821$، T : درجة الحرارة بالكلفن.

a) أثبت أنه إذا كان ضغط الغاز وحجمه وعدد مولاته جميعها معلومة، فإنه يمكن حساب درجة حرارته باستعمال الصيغة $T = \frac{PV}{nR}$.

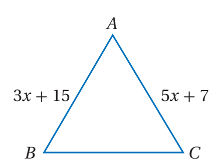
b) ما درجة حرارة 1 مول من الأكسجين موجود في إناء سعته 25 L ، وتحت ضغط مقداره 1 atm ؟ ما الخاصية التي تبرِّر حساباتك؟ 305 درجات كلفن تقريبًا؛ خاصية التعويض للمساواة.

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة كلٍّ من التخمينات الآتية: (22, 23) انظر الهامش.

22) إذا كانت $\overline{DF} \cong \overline{EG}$ ، فإن $x = 10$.



23) إذا كانت $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ، فإن $x = 4$.



21a) **المعطيات:** $PV = nRT$ ، $R = 0.0821$

المطلوب: $T = \frac{PV}{nR}$

البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $PV = nRT$
2) خاصية القسمة للمساواة	2) $\frac{PV}{nR} = \frac{nRT}{nR}$
3) بالتبسيط	3) $\frac{PV}{nR} = T$
4) خاصية التماثل للمساواة	4) $T = \frac{PV}{nR}$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 6-1 للتحقق من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

19) **المعطيات:** $-\frac{1}{3}n = 12$

المطلوب: $n = -36$

البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $-\frac{1}{3}n = 12$
2) خاصية الضرب للمساواة	2) $-3(-\frac{1}{3}n) = -3(12)$
3) بالتبسيط	3) $n = -36$

20) **المعطيات:** $-3r + \frac{1}{2} = 4$

المطلوب: $r = -\frac{7}{6}$

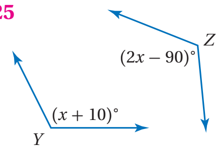
البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $-3r + \frac{1}{2} = 4$
2) خاصية الضرب للمساواة	2) $2\left(-3r + \frac{1}{2}\right) = 2(4)$
3) بالتبسيط	3) $-6r + 1 = 8$
4) خاصية الطرح للمساواة	4) $-6r = 7$
5) خاصية القسمة للمساواة	5) $r = -\frac{7}{6}$

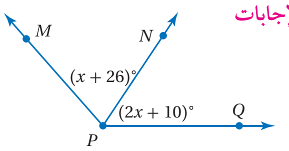
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	9-25 ، 28-30 ، 32-43
ضمن المتوسط	9-25 فردي ، 26-30 ، 32-43
فوق المتوسط	27-41 ، (اختياري: 42-44)

24) إذا كانت $\angle Z \cong \angle Y$، فإن $x = 100$.



25) إذا كانت $\angle MPN \cong \angle QPN$، فإن $x = 16$.



(24, 25 انظر ملحق الإجابات

الربط مع الحياة

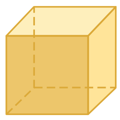
يحدث البرق عند تفريغ الشحنات بين السحب المشحونة كهربائيًا. وتستمر هذه العملية لمدة تقل عن ثانية واحدة، وينتج عنها من 100 مليون إلى 1 بليون فولت. قارن هذه الكمية مع فرق الجهد في المنازل، والذي يبلغ 120 فولت أو 220 فولت فقط.

26) **كهرباء:** يمكن حساب فرق الجهد V للدائرة الكهربائية باستعمال القانون $V = \frac{P}{I}$، حيث: P القدرة الكهربائية، و I شدة التيار الكهربائي المار في الدائرة. (a, b انظر ملحق الإجابات

a) اكتب برهانًا لإثبات أنه عندما تكون القدرة الكهربائية ثابتة، فإن فرق الجهد يصبح نصف ما كان عليه عندما تتضاعف شدة التيار الكهربائي.

b) اكتب برهانًا لإثبات أنه عندما تكون شدة التيار الكهربائي ثابتة، فإن فرق الجهد يتضاعف عندما تتضاعف القدرة الكهربائية.

27) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مكعبًا طول ضلعه s وحدة.



s وحدة

a) **حسيًّا:** ارسم أو اعمل نماذج لمكعبات أطوال أضلاعها 2, 4, 8, 16 وحدة.

b) **جدوليًّا:** أوجد حجم كل مكعب. نظّم نتائجك في جدول مثل المجاور. (a, c, e انظر ملحق الإجابات

طول الضلع (s)	الحجم (V)
2	8
4	64
8	512
16	4096

c) **لفظيًّا:** استعمل الجدول لعمل تخمين حول تغيُّر حجم المكعب عندما يتضاعف طول ضلعه. عبّر عن تخمينك لفظيًّا.

d) **جبريًّا:** اكتب تخمينك على صورة معادلة جبرية. $8V = (2s)^3$

e) **منطقيًّا:** اكتب برهانًا لتخمينك. تأكد من كتابة المعطيات والمطلوب في بداية البرهان.

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **تحدٍّ:** تقع النقطة P على $\overline{AB}$. إذا علمت أن طول $\overline{AP}$ يساوي $2x + 3$، وطول $\overline{PB}$ يساوي $\frac{3x+1}{2}$، وطول $\overline{AB}$ يساوي 10.5 وحدات، فارسم شكلًا يوضح المسألة، وأثبت أن طول $\overline{AP}$ يساوي ثلثَي طول $\overline{AB}$.

تبرير: صنِّف الجمل الآتية إلى صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. فسر تبريرك.

29) إذا كان a و b عددين حقيقيين، وكان $a + b = 0$، فإن $a = -b$.

30) إذا كان a و b عددين حقيقيين، وكان $a^2 = b$، فإن $a = \sqrt{b}$. (28–30 انظر ملحق الإجابات

31) **تحدٍّ:** وضعت آمنة تخمينًا ينصُّ على أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد زوجي.

a) أعطِ أمثلة تؤيد هذا التخمين، ثم فسر لماذا لا تُثبت هذه الأمثلة صحة التخمين. (a–d انظر الهامش.

b) يمكن كتابة العدد الفردي على الصورة $2n - 1$. أعطِ أمثلة تؤيد ذلك.

c) ما العدد الذي تكون الأعداد الزوجية جميعها مضاعفات له؟ فسّر لفظيًّا كيف يمكن استعمال إجابتك عن الفرعين a, b، لإثبات صحة تخمين آمنة.

d) اكتب برهانًا جبريًّا لإثبات أن مجموع أي عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح زوجي.

تمثيلات متعددة: في السؤال 27، يستعمل الطلاب النماذج، والجداول، والوصف اللفظي، والمعادلات الجبرية؛ لاستقصاء حجم المكعب.

إجابات:

22) **المعطيات:** $\overline{DF} \cong \overline{EG}$

المطلوب: $x = 10$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{DF} \cong \overline{EG}$	1) معطيات
2) $DF = EG$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $11 = 2x - 9$	3) خاصية التعويض للمساواة
4) $20 = 2x$	4) خاصية الجمع للمساواة
5) $10 = x$	5) خاصية القسمة للمساواة
6) $x = 10$	6) خاصية التماثل للمساواة

23) **المعطيات:** $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

المطلوب: $x = 4$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	1) معطيات
2) $AB = AC$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $3x + 15 = 5x + 7$	3) خاصية التعويض للمساواة
4) $8 = 2x$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $4 = x$	5) خاصية القسمة للمساواة
6) $x = 4$	6) خاصية التماثل للمساواة

تنويع التعليم

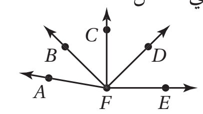
ضمن فوق

المتعلمون الفرديون: زوِّد الطلاب ببراهين جبرية وهندسية لا تحتوي على تبريرات لخطواتها، على أن تتضمَّن إحداها بعض الأخطاء. ثم اطلب إليهم كتابة مبرِّر لكل خطوة، وتحديد الأخطاء وتصحيحها.

32) **اكتب:** ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين البرهان الحر والبرهان ذي العمودين. أيُّ البرهانين تجده أسهل للكتابة؟ برر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**

تدريب على اختبار

33) في الشكل أدناه: $m\angle CFE = 90°$ و $\angle AFB \cong \angle CFD$.



أيٌّ مما يأتي ليس صحيحًا بالضرورة؟ **B**

A $m\angle BFD = m\angle BFD$ **C** $m\angle CFD = m\angle AFB$

B $\overleftrightarrow{FC}$ محور تناظر للشكل **D** $\angle CFE$ قائمة.

34) **مراجعة:** أي علاقة يمكن أن تُستعمل لإيجاد قيم $s(n)$ في الجدول التالي؟ **D**

n	-8	-4	-1	0	1
$s(n)$	1	2	2.75	3	3.25

A $s(n) = -n + 7$ **C** $s(n) = \frac{1}{2}n + 5$

B $s(n) = -2n + 3$ **D** $s(n) = \frac{1}{4}n + 3$

مراجعة تراكمية

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسّر إجابتك. (الدرس 1-5) **35–37) انظر الهامش**

35) أي أربع نقاط تقع في المستوى نفسه.

36) الزاويتان المنفرجتان متكاملتان.

37) المستويان $\mathcal{P}$ و Q يتقاطعان في المستقيم m. والمستقيم m يقع في كلا المستويين $\mathcal{P}$ و Q.

حدد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا في كلٍّ مما يأتي؛ اعتمادًا على العبارة التالية والمعطيات مبررًا إجابتك.

"يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان يقبل القسمة على 6". (الدرس 1-4)

38) **المعطيات:** 24 يقبل القسمة على 6. **النتيجة:** 24 يقبل القسمة على 3. **38–40) انظر الهامش**

39) **المعطيات:** 27 يقبل القسمة على 3. **النتيجة:** 27 يقبل القسمة على 6.

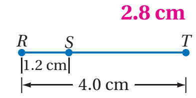
40) **المعطيات:** 85 لا يقبل القسمة على 3. **النتيجة:** 85 لا يقبل القسمة على 6.

41) **مبانٍ:** توجد أربع بنايات في مدرسةٍ، لا يوجد ثلاث منها على استقامة واحدة. ما عدد ممرات المشاة اللازمة لربط كل بنايتين بممرٍّ مشاةٍ واحدٍ؟ (الدرس 1-5) **6**

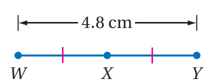
استعد للدرس اللاحق

أوجد طول كل قطعة مستقيمة مما يأتي مستعينًا بالشكل.

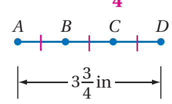
42) $\overline{ST}$ **2.8 cm**



43) $\overline{WX}$ **2.4 cm**



44) $\overline{BC}$ **$1\frac{1}{4}$ in**



4 التقويم

تعلُّم سابق: اطلب إلى الطلاب إعادة كتابة البراهين الواردة في أمثلة الدرس على صورة برهانٍ حرٍّ، ثم اطلب إليهم أن يشرحوا كيف تساعدهم كتابة البرهان الحر على كتابة البرهان ذي العمودين

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 1-6 ,1-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (12)

إجابات:

31a) إجابة ممكنة: $3 + 3 = 6$، $7 + 9 = 16$، $5 + 7 = 12$. هذه أمثلة توضح التخمين، ولكنها لا تثبته؛ وذلك لأن الأعداد الفردية المذكورة لا تمثل جميع الأعداد الفردية، وإنما هي أمثلة فقط.

31b) إجابة ممكنة: $3 = 2(2) - 1$، $5 = 2(3) - 1$، $7 = 2(4) - 1$

31c) 2؛ إجابة ممكنة: سوف أجمع العبارتين $2n-1$ و $2m-1$، اللتين تمثلان أي عددين فرديين، وأثبت أن المجموع من مضاعفات العدد 2.

31d) افترض أن العددين الصحيحين الفرديين هما: $2n - 1$ و $2m - 1$، فيكون المجموع $(2n - 1) + (2m - 1)$ يساوي $2n + 2m - 2$. نلاحظ أن كل حدٍّ يحوي العامل 2؛ لذا يمكن إخراجه عاملًا مشتركًا لينتج $2(n + m - 1)$. وهذه الصيغة هي مضاعف للعدد 2، إذن هي تمثل عددًا زوجيًّا؛ لذا فإن مجموع عددين صحيحين فرديين هو عدد صحيح زوجي.

35) صحيحة أحيانًا؛ لأن المستوى يتضمن ثلاث نقاط على الأقل، أما النقطة الرابعة فإما أن تقع على هذا المستوى وإما أن تقع على مستوى آخر.

36) غير صحيحة أبدًا: مجموع الزاويتين المتكاملتين يساوي °180

إذن الزاويتان المنفرجتان لا يمكن أن تكونا متكاملتين.

37) صحيحة دائمًا: بما أن المستقيم هو خط تقاطع المستويين، فإن هذا المستقيم يقع في كلا المستويين.

38) صحيحة، بما أن 24 تقبل القسمة على 6 ؛ إذن وفق قانون الفصل المنطقي، فإنها تقبل القسمة على 3

39) غير صحيحة، $27 \div 6 = 4.5$ والعدد 4.5 ليس عددًا صحيحًا .

40) صحيحة، بحسب المعاكس الإيجابي للعبارة وقانون الفصل المنطقي، إذا قبلت الـ 85 القسمة على 6 وَ 6 تقبل القسمة على 3، إذن يجب أن تقبل الـ 85 القسمة على 3، وهذا مخالف للمعطى، إذن 85 لا تقبل القسمة على 6

مصادر المعلم للأنشطة الصفّية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 1

دون دون المتوسط   ضمن ضمن المتوسط   فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31) دون

الاسم ________________ التاريخ ________

1-6 تدريبات إعادة التعليم

البرهان الجبري

البرهان الجبري:

سلسلة الخطوات الجبرية المرتبة لحل مسألة مع تبرير كلِّ خُطوة يطلق عليها **البرهان الجبري**.

والجدول الآتي يبيِّن خصائص صحيحة لأيِّ أعداد حقيقية مثل: a, b, c.

خاصيتا الجمع والطرح للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a+c = b+c$ و $a-c = b-c$.
خاصيتا الضرب والقسمة للمساواة	إذا كان $a = b$ و $c \neq 0$ فإن $a \cdot c = b \cdot c$، و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
خاصية الانعكاس للمساواة	$a = a$.
خاصية التماثل للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
خاصية التعدي للمساواة	إذا كان $a = b$ وَ $b = c$، فإن $a = c$.
خاصية التعويض للمساواة	إذا كان $a = b$، فإنه يمكن استبدال a بالعدد b في أيِّ معادلة أو عبارة.
خاصية التوزيع	$a(b+c) = ab + ac$.

ويمكن كتابة البرهان بحيث يكون ترتيب العبارات في عمود، والتبريرات في عمودٍ موازٍ له. ويُسمى عندها **البرهان ذا العمودين**.

مثال أثبت أنه إذا كان: $6x + 2(x-1) = 30$، فإن $x = 4$، ثم اكتب تبريرًا لكلِّ خطوة.

الخطوات الجبرية	الخصائص
$6x + 2(x-1) = 30$	المُعطيات
$6x + 2x - 2 = 30$	خاصية التوزيع
$8x - 2 = 30$	بسّط
$8x - 2 + 2 = 30 + 2$	خاصية الجمع للمساواة
$8x = 32$	بسّط
$\frac{8x}{8} = \frac{32}{8}$	خاصية القسمة للمساواة
$x = 4$	بسّط

تمارين

أكمل البُرهانين الآتيين:

1) **المعطيات:** $\frac{4x+6}{2} = 9$

المطلوب: إثبات أن $x = 3$

البرهان:

العبارات	المبرَّرات
a) $\frac{4x+6}{2} = 9$	a) **معطيات** ؟
b) $2(\frac{4x+6}{2}) = 2(9)$	b) خاصية الضرب للمساواة
c) $4x + 6 = 18$	c) **بالتبسيط** ؟
d) $4x + 6 - 6 = 18 - 6$	d) **خاصية الطرح للمساواة** ؟
e) $4x = \mathbf{12}$	e) بالتبسيط
f) $\frac{4x}{4} = \mathbf{\frac{12}{4}}$	f) خاصية القسمة للمساواة
g) $\mathbf{x = 3}$ ؟	g) بالتبسيط

2) **المعطيات:** $4x + 8 = x + 2$

المطلوب: إثبات أن $x = -2$

البرهان:

العبارات	المبرَّرات
a) $4x+8 = x+2$	a) **معطيات** ؟
b) $4x+8-x = x+2-x$	b) **خاصية الطرح للمساواة** ؟
c) $3x + 8 = 2$	c) بالتبسيط
d) $\mathbf{3x + 8 - 8 = 2 - 8}$ ؟	d) خاصية الطرح للمساواة
e) $\mathbf{3x = -6}$ ؟	e) بالتبسيط
f) $\frac{3x}{3} = -\frac{6}{3}$	f) **خاصية القسمة للمساواة** ؟
g) $\mathbf{x = -2}$ ؟	g) بالتبسيط

الصف: الأول الثانوي   31   **الفصل 1:** التبرير والبرهان

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (32) دون

الاسم ________________ التاريخ ________

1-6 تدريبات إعادة التعليم **(تتمة)**

البرهان الجبري

البرهان الهندسي:

تُعبِّر الأعداد في الهندسة عن قياسات، ولذلك يمكن استعمال خصائص الأعداد الحقيقية في **البرهان الهندسي**، والجدول الآتي يوضح بعض الخصائص الجبرية التي تُستعمل في البراهين.

الخاصية	القطع المستقيمة	الزوايا
الانعكاس	$AB = AB$	$m\angle 1 = m\angle 1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$، فإن $CD = AB$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$، فإن $m\angle 2 = m\angle 1$.
التعدّي	إذا كان $AB = CD$ و $CD = EF$ فإن $AB = EF$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كان: $m\angle 1 = m\angle 2, m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$

المعطيات: $m\angle 1 = m\angle 2, m\angle 2 = m\angle 3$

المطلوب: إثبات أن: $m\angle 1 = m\angle 3$

البرهان:

العبارات	المبرَّرات
1) $m\angle 1 = m\angle 2$	1) معطيات
2) $m\angle 2 = m\angle 3$	2) معطيات
3) $m\angle 1 = m\angle 3$	4) خاصية التعدّي للمساواة

تمارين

اذكر الخاصية التي تبرّر كل عبارةٍ ممّا يأتي:

1) إذا كان: $m\angle 2 = m\angle 1$، فإن: $m\angle 1 = m\angle 2$. **خاصية التماثل للمساواة.**

2) إذا كان: $m\angle 1 = 90°$ و $m\angle 2 = m\angle 1$، فإن: $m\angle 2 = 90°$. **خاصية التعويض للمساواة.**

3) إذا كان: $AB = RS$ و $RS = WY$، فإن: $AB = WY$. **خاصية التعدّي للمساواة.**

4) إذا كان: $AB = CD$، فإن: $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$. **خاصية الضرب للمساواة.**

5) إذا كان: $m\angle 1 + m\angle 2 = 110°$ و $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن: $m\angle 1 + m\angle 3 = 110°$. **خاصية التعويض للمساواة.**

6) $RS = RS$ **خاصية الانعكاس.**

7) إذا كان: $AB = RS$ و $TU = WY$، فإن: $AB + TU = RS + WY$. **خاصية الجمع للمساواة**

8) إذا كان: $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن: $m\angle 1 = m\angle 3$. **خاصية التعدّي للمساواة**

9) إذا كان قانون مساحة المثلث $A = \frac{1}{2}bh$، فإن bh تساوي مِثْلَي مساحة المثلث. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة هذا التخمين.

المعطيات: $A = \frac{1}{2}bh$

المطلوب: إثبات أن $2A = bh$

البرهان:

العبارات	المبرَّرات
1) $A = \frac{1}{2}bh$	1) **معطيات**
2) $2A = 2(\frac{1}{2}bh)$	2) **خاصية الضرب للمساواة**
3) $2A = bh$	3) **بالتبسيط**

الصف: الأول الثانوي   32   **الفصل 1:** التبرير والبرهان

تدريبات المهارات (33) دون ضمن

الاسم ________________ التاريخ ________

1-6 تدريبات المهارات

البرهان الجبري

اذكر الخاصية التي تبرِّر كل عبارة ممّا يأتي:

1) إذا كان: $80° = m\angle A$، فإن: $m\angle A = 80°$. **خاصية التماثل للمساواة.**

2) إذا كان: $RS = TU$ و $TU = YP$، فإن: $RS = YP$. **خاصية التعدي للمساواة.**

3) إذا كان: $7x = 28$، فإن: $x = 4$. **خاصية القسمة للمساواة.**

4) إذا كان: $VR + TY = EN + TY$، فإن: $VR = EN$. **خاصية الطرح للمساواة.**

5) إذا كان: $m\angle 1 = 30°$ و $m\angle 1 = m\angle 2$، فإن: $m\angle 2 = 30°$. **خاصية التعويض للمساواة.**

أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $8x - 5 = 2x + 1$

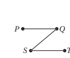
المطلوب: إثبات أن $x = 1$

البرهان:

العبارات	المبرَّرات
a) $8x - 5 = 2x + 1$	a) **معطيات** ؟
b) $8x - 5 - 2x = 2x + 1 - 2x$	b) **خاصية الطرح للمساواة**
c) $\mathbf{6x - 5 = 1}$ ؟	c) بالتبسيط
d) $\mathbf{6x - 5 + 5 = 1 + 5}$	d) خاصية الجمع للمساواة
e) $6x = 6$	e) **بالتبسيط** ؟
f) $\frac{6x}{6} = \frac{6}{6}$	f) **خاصية القسمة للمساواة**
g) $\mathbf{x = 1}$ ؟	g) **بالتبسيط** ؟

اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة التخمين الآتي:

6) إذا كان: $\overline{PQ} \cong \overline{QS}$ وَ $\overline{QS} \cong \overline{ST}$، فإن: $PQ = ST$.



المعطيات: $\overline{PQ} \cong \overline{QS}$ و $\overline{QS} \cong \overline{ST}$

المطلوب: إثبات أن $PQ = ST$

البرهان:

العبارات	المبرَّرات
1) $\overline{PQ} \cong \overline{QS}, \overline{QS} \cong \overline{ST}$	1) **معطيات**
2) $PQ = QS, QS = ST$	2) **تعريف القطع المستقيمة المتطابقة**
3) $PQ = ST$	3) **خاصية التعدي**

الصف: الأول الثانوي   33   **الفصل 1:** التبرير والبرهان

تدريبات حل المسألة (34) دون ضمن فوق

الاسم ________________ التاريخ ________

1-6 تدريبات حل المسألة

البرهان الجبري

1) **ماعز:** لدى كلٍّ من قاسمٍ وفوازٍ العدد نفسه من الماعز، وكذلك لدى كلٍّ من فوازٍ وفهد العدد نفسه من الماعز. فهل لدى كلٍّ من قاسم وفهد العدد نفسه من الماعز؟ برِّر إجابتك.

خاصية التعدي

2) **نقود:** لدى كلٍّ من عثمان وسلمان المبلغ نفسه من النقود. ويريدان أن يتشاركا في شراء حلوى، بحيث يقتسمان ثمنها بالتساوي، فهل يبقى مع كلٍّ منهما المبلغ نفسه بعد شراء الحلوى؟ برِّر إجابتك.

نعم؛ خاصية الطرح.

3) **تصنيع:** تنتج شركة قطعًا إلكترونيةً صغيرةً، قيمة كل قطعة 6.50 ريالاتٍ، ويُنتِجُ خط الإنتاج الأول 4443 قطعةً، وينتج خط الإنتاج الثاني 5557 قطعة، ولمَّا سُئل المُشرف على الإنتاج عن القيمة الكلية للقطع، أجاب على الفور أنها "65000 ريالٍ". فسّر كيف استطاع المشرف إعطاء النتيجة بهذه السرعة دون إجراء العمليات الحسابية.

لقد استعمل خاصية التوزيع، فجمع 4443 إلى 5557؛ للحصول على 10000 أولًا، ثم ضرب هذا العدد في 6.50 ريالات، للحصول على النتيجة وهي 65000 ريالٍ.

4) **آنيةٌ فخَارِيةٌ:** تقوم كلٌّ من آمنة وفاطمة بطلاء آنيةٍ فخارية. وبإمكان كلٍّ منهما طلاء 8 آنيةٍ كلَّ ساعة. وفي أحد الأيام عملت فاطمة 6 ساعاتٍ، في حين عملت آمنة 9 ساعاتٍ. فما عدد الآنية التي قامتا بطلائها في ذلك اليوم؟

$$(9 + 6) \times 8 = 9 \times 8 + 6 \times 8$$
$$= 72 + 48 = 120$$

5) **أعمار:** يزيد عُمر والد حسن ثماني سنواتٍ على 4 أمثال عُمر حسن، وعُمر والد حسن يساوي 36 سنةً.

a) عبّر عن هذه المعطيات بمعادلة جبرية بالمتغير x مفترضًا أن عمر حسن يساوي x.

$$4x + 8 = 36$$

b) املأ الفراغات في الجدول أدناه، والذي يبيِّن الخطوات المستعملة لمعرفة عمر حسن مع الخاصية التي تبرِّر كلَّ خطوةٍ.

الخطوات الجبرية	الخصائص
1) $\mathbf{4x + 8 = 36}$	1) المعادلة الأصلية
2) $\mathbf{4x + 8 - 8 = 36 - 8}$	2) خاصية الطرح للمساواة
3) $4x = 28$	3) **بالتبسيط** ؟
4) $\frac{4x}{4} = \frac{28}{4}$	4) **خاصية القسمة للمساواة**
5) $\mathbf{x = 7}$ ؟	5) بالتبسيط

الصف: الأول الثانوي   34   **الفصل 1:** التبرير والبرهان

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (35) ضمن فوق

الاسم ______ التاريخ ______

1-6 التدريبات الإثرائية

خصائص التماثل والانعكاس والتعدي:

تحقق علاقة المساواة ثلاث خصائص مهمة هي:

الانعكاس $a = a$

التماثل إذا كان $a = b$ ، فإن $b = a$.

التعدي إذا كان $a = b$ و $b = c$ ، فإن $a = c$.

وهناك علاقات أُخرى تحقق بعض هذه الخصائص أو كلَّها، خذ العلاقة الآتية "بجانب" لثلاثة طلاب (صالح، سعد، حمد)، أيُّ الخصائص أعلاه تكون صحيحة لهذه العلاقة؟

صالح بجانب صالح . **خاطئة**

إذا كان صالح بجانب سعد، فإن سعدًا بجانب صالح . **صحيحة**

إذا كان صالح بجانب سعد وسعد بجانب حمد؛ فإن صالحًا بجانب حمد؛ **خاطئة**

أيْ أن خاصية التماثل وحدها صحيحة للعلاقة "بجانب".

اذكر أيّ الخصائص (التماثل، الانعكاس، التعدي) تكون صحيحة لكلٍّ من العلاقات الآتية:

1) أطول من
التعدي

2) من ذُرية
التعدي

3) عمودي على
التماثل

4) لايساوي
التماثل

5) أشدُّ دفئًا من
التعدي

6) أقل من أو يساوي
الانعكاس والتعدي

7) شقيقة لِـ
التعدي، التماثل

8) صديق لِـ
التماثل

9) اكتب مثالين لعلاقتين، واذكر أيّ الخصائص الثلاث تحققها هاتان العلاقتان.
انظر إجابات الطلاب.

الصف: الأول الثانوي 35 **الفصل 1:** التبرير والبرهان

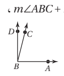
كتاب التمارين (11) دون ضمن فوق

الفصل الأول التبرير والبرهان

1 - 6 البرهان الجبري

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة التخمين الآتي :

1) إذا كان: $m\angle ABC + m\angle CBD = 90°, m\angle ABC = (3x-5)°$ ، $m\angle CBD = (\frac{x+1}{2})°$ ، فإن $x = 27$.



المعطيات: $m\angle ABC + m\angle CBD = 90°$،
$m\angle ABC = (3x-5)°$
$m\angle CBD = (\frac{x+1}{2})°$

المطلوب: $x = 27$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $m\angle ABC + m\angle CBD = 90°$ $m\angle ABC = (3x-5)°$ $m\angle CBD = (\frac{x+1}{2})°$	1) معطيات
2) $3x - 5 + \frac{x+1}{2} = 90$	2) خاصية التعويض للمساواة
3) $2(3x-5) + 2\left(\frac{x+1}{2}\right) = (2)\,90$	3) خاصية الضرب للمساواة
4) $6x - 10 + x + 1 = 180$	4) بالتوزيع ثم التبسيط
5) $7x - 9 = 180$	5) بالتبسيط
6) $7x - 9 + 9 = 180 + 9$	6) خاصية الجمع للمساواة
7) $7x = 189$	7) بالتبسيط
8) $\frac{7x}{7} = \frac{189}{7}$	8) خاصية القسمة للمساواة
9) $x = 27$	9) بالتبسيط

2) **هندسة:** صيغة حساب حجم المنشور الرباعي هي $v = lwh$ ، حيث v هو الحجم ، و l هو طول القاعدة، و w هو عرض القاعدة، و h هو الارتفاع. أثبت أنه إذا كان حجم المنشور وطول قاعدته وارتفاعه جميعها معلومة، فإنه يمكن حساب عرض قاعدته باستعمال الصيغة $w = \frac{v}{lh}$

المعطيات: $v = lwh$

المطلوب: $w = \frac{v}{lh}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $v = lwh$	1) معطيات
2) $\frac{v}{lh} = \frac{lwh}{lh}$	2) خاصية القسمة للمساواة
3) $\frac{v}{lh} = w$	3) خاصية التعويض للمساواة
4) $w = \frac{v}{lh}$	4) خاصية التماثل للمساواة

11

1-7 إثبات علاقات بين القطع المستقيمة
Proving Segments Relationships

فيما سبق:
درستُ كتابة البرهان الجبري والبرهان ذي العمودين.
(الدرس 1-6)

والآن:
- أكتب براهين تتضمن جمع أطوال القطع المستقيمة.
- أكتب براهين تتضمن تطابق قطع مستقيمة.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

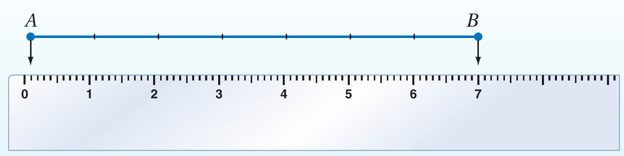
يعمل عبدالله في محل لبيع الأقمشة، ويقيس القماش بوضع حافته عند حافة تدريج المسطرة التي طولها متر واحد. ولكي يقيس أطوالاً مثل 125 cm، يقيس مترًا من القماش ويضع علامة عليه، ثم يقيس من تلك العلامة 25 cm أخرى. فيصبح الطول: $100\text{ cm} + 25\text{ cm} = 125\text{ cm}$

مسلّمة أطوال القطع المستقيمة: علمت كيف تقيس القطع المستقيمة باستعمال المسطرة، وذلك بوضع صفر المسطرة على أحد طرفَي القطعة المستقيمة وقراءة التدريج المقابل للطرف الآخر من القطعة المستقيمة، فيمثل هذا التدريج طول القطعة المستقيمة. وهذا يوضح مسلمة المسطرة.

مسلمة 1.8 — مسلّمة أطوال القطع المستقيمة
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: النقاط التي تقع على مستقيم أو قطعة مستقيمة يمكن ربطها بأعداد حقيقية.

مثال: إذا أُعطيت نقطتين A و B على مستقيم، وكانت A تقابل الصفر، فإن B تقابل عددًا موجبًا.

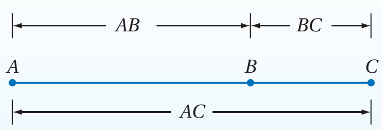


يمكن التعبير عن معنى وقوع نقطة بين نقطتين أخريين بمسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة.

مسلمة 1.9 — مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا علمت أن النقاط A, B, C على استقامة واحدة، فإن النقطة B تقع بين A و C إذا كان $AB + BC = AC$ والعكس.

النموذج:



ومسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة تستعمل تبريرًا في العديد من البراهين الهندسية.

1-7 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-7

كتابة براهين جبرية وهندسية على صورة البرهان الحر والبرهان ذي العمودين.

الدرس 1-7

كتابة براهين تتضمن جمع أطوال القطع المستقيمة وتطابقها.

ما بعد الدرس 1-7

استعمال التبرير الاستنتاجي لإثبات صحة عبارات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا ؟"

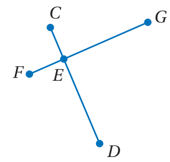
اسأل:

- لماذا يجب على عبد الله قياس القماش بهذه الطريقة؟ إجابة ممكنة: طول قطعة القماش التي يريد قياسها يزيد على طول المسطرة.
- صِفْ كيف أن قياس 100 cm ثم 25 cm يُعطي طول 125 cm. إذا أُضيف الطولان أحدهما إلى الآخر فسينتج عنهما الطول الكلي.
- إذا أراد عبد الله قياس 345 cm، فكم مرةً يضع علامة على القماش؟ 3

مصادر الدرس 1-7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (61)	• تنويع التعليم، ص (61, 65)	• تنويع التعليم، ص (65)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (12)	• كتاب التمارين، ص (12)	• كتاب التمارين، ص (12)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36) • تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36) • تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)	• تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)

مثال 1 استعمال مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة



أثبت أنه إذا كان $\overline{CE} \cong \overline{FE}$, $\overline{ED} \cong \overline{EG}$ ، فإن $\overline{CD} \cong \overline{FG}$.

المعطيات: $\overline{CE} \cong \overline{FE}$, $\overline{ED} \cong \overline{EG}$

المطلوب: $\overline{CD} \cong \overline{FG}$

البرهان:

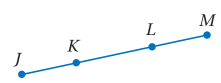
العبارات	المبررات
1) $\overline{CE} \cong \overline{FE}$, $\overline{ED} \cong \overline{EG}$	1) معطيات
2) $CE = FE$; $ED = EG$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $CE + ED = CD$	3) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
4) $FE + EG = CD$	4) بالتعويض من الخطوة 2 في الخطوة 3
5) $FE + EG = FG$	5) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
6) $CD = FG$	6) بالتعويض من الخطوة 4 في الخطوة 5
7) $\overline{CD} \cong \overline{FG}$	7) تعريف تطابق القطع المستقيمة

قراءة الرياضيات

اختصارات: رغبة في الاختصار عند كتابة البراهين نكتب: "بالتعويض" بدلًا من "خاصية التعويض للمساواة" ونكتب "بالطرح" بدلًا من "خاصية الطرح للمساواة" وهكذا.

تحقق من فهمك

1) أكمل البرهان الآتي:



المعطيات: $\overline{JL} \cong \overline{KM}$

المطلوب: $\overline{JK} \cong \overline{LM}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\overline{JL} \cong \overline{KM}$	a) معطيات
b) $JL = KM$	b) ؟ تعريف تطابق القطع المستقيمة
c) $JK + KL =$ ؟ JL ، $KL + LM =$ ؟ KM	c) مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة
d) $JK + KL = KL + LM$	d) ؟ بالتعويض
e) $JK + KL - KL = KL + LM - KL$	e) بالطرح
f) ؟ $JK = LM$	f) بالتبسيط
g) $\overline{JK} \cong \overline{LM}$	g) تعريف تطابق القطع المستقيمة

تطابق القطع المستقيمة: درستَ سابقًا أن تساوي أطوال القطع المستقيمة تحقق خاصية الانعكاس والتماثل والتعدي. وبما أن القطع المستقيمة المتساوية الطول متطابقة، فإن تطابق القطع المستقيمة يحقق أيضًا خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي.

نظرية 1.2 خصائص تطابق القطع المستقيمة

أضف إلى مطويتك

خاصية الانعكاس للتطابق	$\overline{AB} \cong \overline{AB}$
خاصية التماثل للتطابق	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، فإن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$
خاصية التعدي للتطابق	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ ، فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

سوف تبرهن خاصيتي الانعكاس والتماثل في السؤالين 5 و 6

مسلّمة المسطرة

المثال 1 يبيّن كيفية استعمال الخصائص والمسلّمات لإثبات جمع أطوال القطع المستقيمة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة.

مثال إضافي

1 **برهان:** إذا علمت أن $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$، فأثبت أن $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$

المعطيات: $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$

المطلوب: $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$	1) معطى
2) $WX = YZ$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $WX + XY = XY + YZ$	3) خاصية الجمع للمساواة
4) $WY = WX + XY$; $XZ = XY + YZ$	4) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
5) $WY = XZ$	5) بالتعويض
6) $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$	6) تعريف تطابق القطع المستقيمة

تنويع التعليم

ضمن دون

إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في تحديد المعلومات المُعطاة أو المعلومات التي يتضمنها شكل مُعطى،

فقم بتشجيعهم على استعمال مهاراتهم المكانية؛ لتحديد القطع المستقيمة المتطابقة في الشكل، ثم اطلب إليهم أن يضعوا القياسات المعلومة أو رمز التوازي أو التعامد أو التطابق عليه، بحيث يمكنهم ملاحظة العلاقات بوضوح في أثناء كتابة البراهين.

تنبيه!

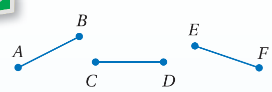
إكمال البرهان: في المثال 1، يتطلّب السؤال أن تثبت أن القطعتين المستقيمتين متطابقتان. بيِّن للطلاب أن العبارة الأخيرة ضرورية لتصف العلاقة بين القطعتين المستقيمتين على نحو صحيح كما هو مطلوب في السؤال.

الدرس 7-1 إثبات علاقات بين القطع المستقيمة 61

برهان

خاصية التعدي للتطابق

أضف إلى مطويتك



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، $\overline{CD} \cong \overline{EF}$

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

برهان حر:

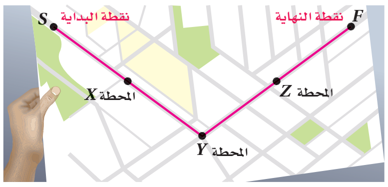
بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ، $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ ، فإن $AB = CD, CD = EF$ ، وذلك من تعريف تطابق القطع المستقيمة. وباستعمال خاصية التعدي للمساواة ينتج أن $AB = EF$ ؛ لذا $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ من تعريف التطابق.

الربط مع الحياة

تقام مسابقات الماراثون في العديد من محافظات المملكة، ويخصص ريع بعضها لدعم أنشطة خيرية.

مثال 2 من واقع الحياة — البرهان باستعمال تطابق القطع المستقيمة

ماراثون: تبين الخريطة أدناه المسار الذي سيسلكه المشاركون في سباق ماراثون. تقع المحطتان X و Z عند نقطتَي المنتصف بين نقطة البداية والمحطة Y ونقطة النهاية والمحطة Y على التوالي. إذا كان بُعدا المحطة Y عن النقطتين X و Z متساويين، فأثبت أن الطريق من المحطة Z إلى نقطة النهاية يتطابق مع الطريق من المحطة X إلى نقطة البداية.



المعطيات: X نقطة منتصف $\overline{SY}$ ، و Z نقطة منتصف $\overline{YF}$ ، $XY = YZ$

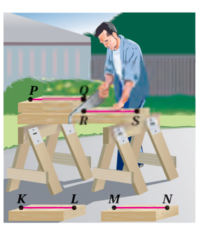
المطلوب: $\overline{ZF} \cong \overline{SX}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) X نقطة منتصف $\overline{SY}$ ، و Z نقطة منتصف $\overline{YF}$ ، $XY = YZ$	1) معطيات
2) $\overline{SX} \cong \overline{XY}$ ، $\overline{YZ} \cong \overline{ZF}$	2) نظرية نقطة المنتصف
3) $\overline{XY} \cong \overline{YZ}$	3) تعريف تطابق القطع المستقيمة
4) $\overline{SX} \cong \overline{YZ}$	4) خاصية التعدي للتطابق
5) $\overline{SX} \cong \overline{ZF}$	5) خاصية التعدي للتطابق
6) $\overline{ZF} \cong \overline{SX}$	6) خاصية التماثل للتطابق

تحقق من فهمك انظر ملحق الإجابات

2) **نجارة:** قص نجار قطعة خشبية $\overline{RS}$ طولها 22 in . ثم استعملها نموذجًا ليقص قطعة أخرى $\overline{PQ}$ مطابقة لها. وهكذا استعمل $\overline{PQ}$ ليقص قطعة ثالثة $\overline{MN}$. ثم استعمل القطعة الثالثة $\overline{MN}$ ليقص قطعة رابعة $\overline{KL}$. أثبت أن $RS = KL$.



إرشادات للمعلم الجديد

البناء المعرفي: بيِّن للطلاب أنه مع كل درس جديد، يصبح لديهم معارف متراكمة من مسلّمات ونظريات، يمكنهم استعمالها في أثناء كتابة البراهين المختلفة، لذا شجّعهم على التدرُّب على استعمال المفاهيم التي تعلّموها قبل الانتقال إلى الدرس التالي؛ لتعزيز مقدرتهم على تذكر الحقائق المهمة عند كتابة البراهين.

تطابق القطع المستقيمة

المثال 2 يبيِّن كيفية استعمال الخصائص والمسلّمات لإثبات تطابق القطع المستقيمة.

مثال إضافي

2 **بطاقات:** صمَّم حمزة بطاقة تهنئة ليرسلها إلى صديقه خالد، فكان طول حافتها العليا يساوي طول حافتها اليسرى، وحافتها العليا تطابق حافتها اليمنى، وحافتها اليمنى تطابق حافتها السفلى.

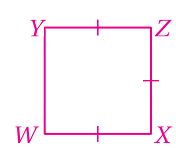
أثبت أن الحافة السفلى للبطاقة تطابق حافتها اليسرى.

المعطيات: $YZ = WY$

$\overline{YZ} \cong \overline{XZ}$

$\overline{XZ} \cong \overline{WX}$

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{WY}$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $YZ = WY$	1) معطيات
2) $WY = YZ$	2) خاصية التماثل للمساواة
3) $\overline{WY} \cong \overline{YZ}$	3) تعريف تطابق القطع المستقيمة
4) $\overline{YZ} \cong \overline{XZ}$; $\overline{XZ} \cong \overline{WX}$	4) معطيات
5) $\overline{WY} \cong \overline{WX}$	5) خاصية التعدي للتطابق
6) $\overline{WX} \cong \overline{WY}$	6) خاصية التماثل للتطابق

المحتوى الرياضي

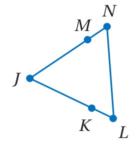
القطع المستقيمة: من المهم معرفة أن الأشكال والرسوم التي تقوم برسمها، والتي ترافق مسألة معينة قد لا تكون مرسومةً وفق مقياس رسم، إذ يمكن افتراض تطابق قطعتين، ولكنهما قد لا تكونان متساويتين في الطول إذا ما قِيستا بالمسطرة.

وفي المقابل، تكوّن بعض القطع المستقيمة خداعًا بصريًا، فتبدو متساوية الطول، في حين أنها ليستا كذلك.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اكتب عدة براهين على السبورة، واحفظها في ملفٍ، وحمّله على الموقع الإلكتروني للصف؛ لتكون مرجعًا إضافيًا للطلاب خارج غرفة الصف.

تأكد



المثال 1 (1 أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\overline{LK} \cong \overline{NM}$, $\overline{KJ} \cong \overline{MJ}$

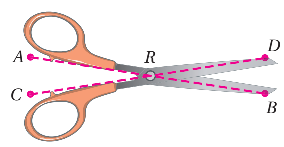
المطلوب: $\overline{LJ} \cong \overline{NJ}$

البرهان:

المبررات	العبارات
(a ؟ معطيات	(a $\overline{LK} \cong \overline{NM}, \overline{KJ} \cong \overline{MJ}$
(b تعريف تطابق القطع المستقيمة	(b ؟
(c ؟ خاصية الجمع للمساواة	(c $LK + KJ = NM + KJ$
(d بالتعويض	(d $LK + KJ = NM + MJ$
(e مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة	(e ؟
(f ؟ بالتعويض	(f $LJ = NJ$
(g ؟ تعريف تطابق القطع المستقيمة	(g $\overline{LJ} \cong \overline{NJ}$

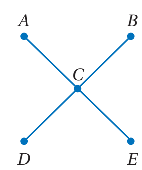
1b) $LK = NM, KJ = MJ$

1e) $LJ = LK + KJ;$ $NJ = NM + MJ$



المثال 2 (2 **مقص:** في الشكل المجاور، $\overline{AR} \cong \overline{CR}$, $\overline{DR} \cong \overline{BR}$، أثبت أن: $AR + DR = CR + BR$. انظر الهامش.

تدرب وحل المسائل



المثال 1 (3 أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: C نقطة منتصف $\overline{AE}$.

C نقطة منتصف $\overline{BD}$.

$\overline{AE} \cong \overline{BD}$

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{CD}$

البرهان:

المبررات	العبارات
(a معطيات	(a ؟
(b ؟ تعريف نقطة المنتصف	(b $AC = CE, BC = CD$
(c ؟ تعريف تطابق القطع المستقيمة	(c $AE = BD$
(d مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة	(d ؟
(e ؟ بالتعويض	(e $AC + CE = BC + CD$
(f ؟ بالتعويض	(f $AC + AC = CD + CD$
(g بالتبسيط	(g ؟ $2AC = 2CD$
(h بالقسمة	(h ؟ $AC = CD$
(i ؟ تعريف تطابق القطع المستقيمة	(i $\overline{AC} \cong \overline{CD}$

3a) C نقطة منتصف $\overline{AE}$، C نقطة منتصف $\overline{BD}$، $\overline{AE} \cong \overline{BD}$

3d) $AE = AC + CE$, $BD = BC + CD$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 2-1 للتحقق من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

2) **المعطيات:** $\overline{AR} \cong \overline{CR}; \overline{DR} \cong \overline{BR}$

المطلوب: $AR + DR = CR + BR$

البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\overline{AR} \cong \overline{CR}; \overline{DR} \cong \overline{BR}$
2) تعريف تطابق القطع المستقيمة	2) $AR = CR, DR = BR$
3) خاصية الجمع للمساواة	3) $AR + DR = CR + DR$
4) بالتعويض	4) $AR + DR = CR + BR$

تنويع الواجبات المنزلية

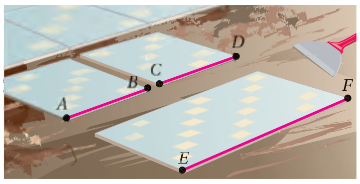
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	3-9 ، 11 ، 13-22
ضمن المتوسط	5-9 فردي ، 11 ، 13-22
فوق المتوسط	10-19 ، (اختياري: 21-23)

المثال 2

الربط مع الحياة

المبلّط: هو الشخص الذي يقوم بتركيب بلاط الأرضيات أو الجدران. ويستعمل في أثناء عمله أدوات قياس الطول والميل؛ من أجل وضع البلاط بشكل دقيق وترتيبه بأنماط جميلة. وعادة يلتحق المبلّط بمركز تدريب مهني ليتلقى تدريبًا خاصًا.

4) تبليط: قص مبلّط قطعة بلاط بطول معين، ثم استعملها نموذجًا ليقص بلاطة ثانية تطابق الأولى، ثم استعمل هاتين البلاطتين لقص بلاطة ثالثة طولها يساوي مجموع طولَي البلاطتين. أثبت أن طول البلاطة الثالثة يساوي مثلَي طول البلاطة الأولى. انظر ملحق الإجابات



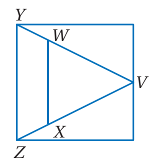
أثبت الخاصيتين الآتيتين في النظرية (1.2). **5, 6) انظر ملحق الإجابات**

5) خاصية التماثل للتطابق.

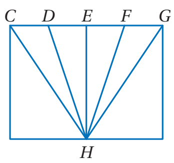
6) خاصية الانعكاس للتطابق.

برهان: أثبت كلًّا مما يأتي: **7, 8) انظر ملحق الإجابات**

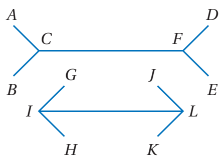
7) إذا كان $\overline{VZ} \cong \overline{VY}$, $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ ، فإن $\overline{VW} \cong \overline{VX}$.



8) إذا كانت E نقطة منتصف $\overline{DF}$ ، $\overline{CD} \cong \overline{FG}$ ، فإن $\overline{CE} \cong \overline{EG}$.



9) إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{GI}$ ، $\overline{FE} \cong \overline{LK}$ ، $AC + CF + FE = GI + IL + LK$.



a) فأثبت أن $\overline{CF} \cong \overline{IL}$. **a-b) انظر ملحق الإجابات**

b) برِّر برهانك بقياس أطوال القطع المستقيمة. فسِّر إجابتك.

10) تمثيلات متعددة: A نقطة منتصف $\overline{PQ}$ ، و B نقطة منتصف $\overline{PA}$ ، و C نقطة منتصف $\overline{PB}$. **a–d) انظر ملحق الإجابات**

a) هندسيًّا: ارسم شكلًا يوضح هذه المعطيات.

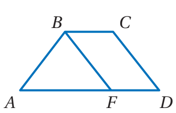
b) جبريًّا: ضع تخمينًا للعلاقة الجبرية بين PC و PQ.

c) حسيًّا: استعمل مسطرة لرسم قطعة مستقيمة تطابق $\overline{PQ}$ ، ولتعيين النقطتين B و C على $\overline{PQ}$، استعمل هذا الرسم لتؤيد التخمين الذي وضعته.

d) منطقيًّا: أثبت صحة تخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا

11) اكتشف الخطأ: في الشكل المجاور: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ ، اختبر النتائج التي حصل عليها أحمد وسعد، وهل وصل أيٌّ منهما إلى نتيجة صحيحة؟ انظر الهامش



أحمد	سعد
بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ ، إذن $\overline{AB} \cong \overline{AF}$ وذلك بتطبيق خاصية التعدي للتطابق.	بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{CD} \cong \overline{BF}$ ، إذن $\overline{AB} \cong \overline{BF}$ وذلك بتطبيق خاصية الانعكاس للتطابق.

تنبيه لحل سؤال

مسطرة: يتطلب السؤال 10 استعمال الطلاب لـ§مسطرة.

تمثيلات متعددة: في السؤال 10 يستعمل الطلاب رسومًا وتخمينات جبرية؛ لاستقصاء نقطة منتصف القطعة المستقيمة.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: طبق أحمد الخاصية بشكل صحيح، إلَّا أنه أخطأ عندما استنتج أن $\overline{AB} \cong \overline{AF}$، في حين طبق سعد الخاصية تطبيقًا صحيحًا، ولكنه أخطأ في كتابة اسم الخاصية.

إجابات:

11) كلاهما أخطأ: الإجابة الصحيحة هي: بما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{BF}$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BF}$ باستعمال خاصية التعدي للتطابق.

12) **تحدٍ:** $ABCD$ مربع. أثبت أن $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. **انظر ملحق الإجابات**

13) **اكتب:** هل توجد خاصية في التطابق تشبه خاصية الجمع في المساواة؟ فسّر إجابتك. **انظر الهامش**

14) **تبرير:** صنِّف العبارة الآتية إلى صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فأعط مثالًا مضادًّا .

إذا كانت النقاط A, B, C, D, E تقع على استقامة واحدة، بحيث تقع B بين A و C ، وتقع C بين B و D ، وتقع D بين C و E ، وكان $AC = BD = CE$ ، فإن $AB = BC = DE$. **انظر ملحق الإجابات**

15) **مسألة مفتوحة :** ارسم شكلًا يمثل تعميمًا لمسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة، (جمع 3 قطع مستقيمة) واكتب النتيجة. **انظر ملحق الإجابات**

تدريب على اختبار

16) النقاط A, B, C, D تقع على استقامة واحدة، بحيث تقع النقطة B بين A و C والنقطة C بين B و D. أي عبارة مما يلي ليست بالضرورة صحيحة؟ **B**

A $AB + BD = AD$
B $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
C $\overline{BC} \cong \overline{BC}$
D $BC + CD = BD$

17) **أي العبارات الآتية يعطي وصفًا أفضل للمسلمة؟** **C**

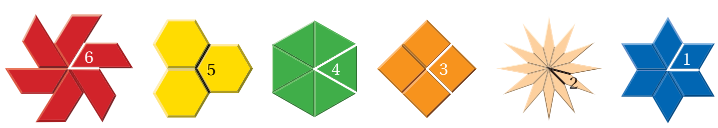
A تخمين ينشأ عن أمثلة.
B تخمين ينشأ عن حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص.
C عبارة تقبل على أنها صحيحة.
D عبارة تم إثبات صحتها.

مراجعة تراكمية

18) **برهان:** أثبت أنه إذا كان $-3(2x+1) = 57$، فإن $x = -10$ ، واكتب تبريرًا لكل خطوة. (الدرس 1-6) **انظر الهامش**

19) **نماذج:** استعمل حاتم ستة مربعات من الورق المقوى لعمل منشور رباعي. ما الجزء من الفراغ الذي يمثله كل وجه من المنشور، وكم مستقيمًا ينتج عن تقاطعها؟ (الدرس 1-5) **مستويات؛ 12**

20) **أنماط:** يمكن ترتيب مجموعة من قطع النماذج لتكوين نمط دوراني دون ترك فراغات بين هذه القطع، وكما تعلم أن قياس الدورة الكاملة يساوي $360°$، أوجد قياس الزوايا المرقمة في كلٍّ من الأشكال الآتية بالدرجات. (الدرس 1-1)

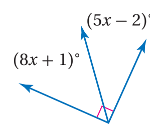


60° **120°** **60°** **90°** **30°** **60°**

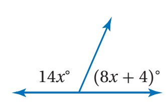
استعد للدرس اللاحق

جبر: أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي:

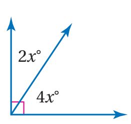
21) **7**



22) **8**



23) **15**



4 التقويم

فهم الرياضيات: أعطِ كل طالب مسطرة كي يقيس طول أحد أصابعه من طرفه حتى أول مفصل فيه، ثم يقيس الطول من أول مفصل حتى ثاني مفصل، واطلب إليهم إيجاد الطول من طرف الإصبع إلى المفصل الثاني، وتحديد ما إذا كانت هذه القياسات تطابق القياسات التي تناظرها في الإصبع المناظر من اليد الأُخرى أم لا، ثم اطلب إليهم كتابة المسلّمات والنظريات التي استعملوها.

إجابات:

13) لا ؛ لأن التطابق صفة للقطع المستقيمة، والقطع المستقيمة لا يمكن جمعها، في حين أن أطوال القطع المستقيمة هي أعداد يمكننا جمعها.

18) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $-3(2x+1) = 57$	1) معطيات
2) $-3(2x) -3(+1) = 57$	2) خاصية التوزيع
3) $-6x-3 = 57$	3) بالتبسيط
4) $-6x-3+3 = 57+3$	4) بالجمع
5) $-6x = 60$	5) بالتبسيط
6) $\frac{-6x}{-6} = \frac{60}{-6}$	6) بالقسمة
7) $x = -10$	7) بالتبسيط

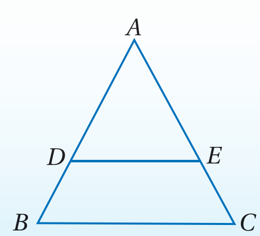
تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون الفرديون: اطلب إلى كل طالب حل المسألة:

المعطيات: $BD = EC$
$DA = AE$

المطلوب: $BA = AC$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $DA = AE$, $BD = EC$	1) معطيات
2) $BD + DA = DA + EC$	2) خاصية الجمع للمساواة
3) $BD + DA = AE + EC$	3) خاصية التعويض للمساواة
4) $BD + DA = BA$, $AE + EC = AC$	4) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
5) $BA = AC$	5) بالتعويض

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر الدرس 7 - 1

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (36) دون

الاسم ______ التاريخ ______

1-7 تدريبات إعادة التعليم

إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

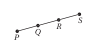
جمع أطوال القطع المستقيمة:

هناك مسلّمتان أساسيتان في التعامل مع القطع المستقيمة وأطوالها هما: مسلّمة أطوال القطع المستقيمة التي يقوم عليها خط الأعداد، ومسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة، التي توضح معنى أن تقع نقطة بين نقطتين أخريين.

مسلّمة أطوال القطع المستقيمة	النقاط التي تقع على مستقيم أو قطعةٍ مستقيمةٍ، يمكن ربطها بأعداد حقيقية. وكلّ عدد حقيقي يقابل نقطة واحدة على المستقيم أو القطعة المستقيمة.
مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة	إذا كانت $A، B، C$ ثلاث نقاط على استقامة واحدة، فإن النقطة B تقع بين A و C، إذا وإذا فقط كان: $AB + BC = AC$.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين

أثبت أنه إذا كانت Q نقطة منتصف $\overline{PR}$ وَ R نقطة منتصف $\overline{QS}$، فإن $QS = PR$



المعطيات: Q نقطة منتصف $\overline{PR}$ وَ R نقطة منتصف $\overline{QS}$

المطلوب: إثبات أن $QS = PR$

البرهان:

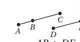
العبارات	المبرّرات
1) Q نقطة منتصف $\overline{PR}$ وَ R نقطة منتصف $\overline{QS}$	1) معطيات
2) $PQ = QR$, $QR = RS$	2) تعريف نقطة المنتصف
3) $PQ = RS$	3) خاصية التعدّي للمساواة
4) $PQ + QR = QR + RS$	4) خاصية الجمع للمساواة
5) $PQ + QR = PR,\ QR + RS = QS$	5) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
6) $PR = QS$	6) خاصية التعويض للمساواة

تمارين

أكمل كلًّا من البرهانين الآتيين:

1) **المعطيات:** $BC = DE$

المطلوب: إثبات أن: $AB + DE = AC$

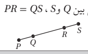


البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $BC = DE$	1) **معطيات** ؟
2) **$AB + BC = AC$** ؟	2) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
3) $AB + DE = AC$	3) **خاصية التعويض للمساواة**

2) **المعطيات:** Q تقع بين P و R، R تقع بين Q و S، $PR = QS$

المطلوب: إثبات أن $PQ = RS$



البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) Q تقع بين P و R	1) معطيات
2) $PQ + QR = PR$	2) **مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة** ؟
3) R تقع بين Q و S	3) **معطيات** ؟
4) **$QR + RS = QS$** ؟	4) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
5) $PR = QS$	5) **معطيات** ؟
6) $PQ + QR = QR + RS$	6) **خاصية التعويض للمساواة**
7) $PQ + QR - QR = QR + RS - QR$	7) **خاصية الطرح للمساواة**
8) **$PQ = RS$** ؟	8) بالتبسيط

الصف: الأول الثانوي　36　الفصل 1: التبرير والبرهان

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (37) دون

الاسم ______ التاريخ ______

1-7 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

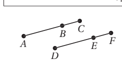
تطابق القطع المستقيمة:

تذكّر أن أطوال القطع المستقيمة أعداد تحقّق خصائص الانعكاس والتماثل والتعدّي للمساواة. ولمّا كانت القطع المستقيمة التي لها الطول نفسه متطابقة، فإن تطابق القطع المستقيمة يحقّق خصائص الانعكاس والتماثل والتعدّي أيضًا.

خاصية الانعكاس للتطابق	$\overline{AB} \cong \overline{AB}$
خاصية التماثل للتطابق	إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، فإن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$
خاصية التعدّي للتطابق	إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{EF}$، فإن: $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين

أثبت أنه إذا كانت: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ وَ $\overline{BC} \cong \overline{EF}$، فإن: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$، و $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	1) معطيات
2) $AB = DE$, $BC = EF$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $AB + BC = DE + EF$	3) خاصية الجمع للمساواة
4) $AB + BC = AC,\ DE + EF = DF$	4) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
5) $AC = DF$	5) خاصية التعويض للمساواة
6) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	6) تعريف تطابق القطع المستقيمة

تمارين

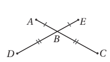
برّر كلًّا من العبارات الآتية بإحدى خصائص التطابق:

1) إذا كان: $\overline{GH} \cong \overline{DE}$، فإن: $\overline{DE} \cong \overline{GH}$. **خاصية التماثل**

2) إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{RS}$، وَ $\overline{RS} \cong \overline{WY}$ فإن: $\overline{AB} \cong \overline{WY}$. **خاصية التعدي**

3) $\overline{RS} \cong \overline{RS}$ **خاصية الانعكاس**

4) في الشكل المقابل، إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{BE}$, $\overline{AC} \cong \overline{ED}$، أثبت أن $\overline{DB} \cong \overline{BC}$



المعطيات: $\overline{AC} \cong \overline{ED}, \overline{AB} \cong \overline{BE}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{DB} \cong \overline{BC}$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AC} \cong \overline{ED}, \overline{AB} \cong \overline{BE}$	1) **معطيات** ؟
2) **$AC = ED, AB = BE$**	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $AC = AB + BC$	3) **مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة** ؟
4) **$AC - AB = BC$** ؟	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $DE - BE = BC$	5) **بالتعويض** ؟
6) $DE = DB + BE$	6) **مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة** ؟
7) **$DE - BE = DB$** ؟	7) خاصية الطرح للمساواة
8) $DB = BC$	8) **بالتعويض** ؟
9) **$\overline{DB} \cong \overline{BC}$** ؟	9) تعريف تطابق القطع المستقيمة

الصف: الأول الثانوي　37　الفصل 1: التبرير والبرهان

تدريبات المهارات (38) دون ضمن

الاسم ______ التاريخ ______

1-7 تدريبات المهارات

إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

برّر كل عبارة ممّا يأتي مستعملًا إحدى خصائص المساواة أو التطابق أو إحدى المسلّمات:

1) $QA = QA$ **خاصية الانعكاس للمساواة**

2) إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ وَ $\overline{BC} \cong \overline{CE}$، فإن: $\overline{AB} \cong \overline{CE}$. **خاصية التعدي للتطابق**

3) إذا كانت: Q بين P وَ R، فإن: $PR = PQ + QR$. **مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة**

4) إذا كان: $AB + BC = EF + FG$ وَ $AB + BC = AC$، فإن: $EF + FG = AC$. **خاصية التعويض للمساواة**

برهان: أكمل كلًّا من البرهانين الآتيين:

5) **المعطيات:** $\overline{SU} \cong \overline{LR}$

$\overline{TU} \cong \overline{LN}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{ST} \cong \overline{NR}$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
a) $\overline{SU} \cong \overline{LR}, \overline{TU} \cong \overline{LN}$	a) **معطيات** ؟
b) **$SU = LR, TU = LN$** ؟	b) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة
c) $SU = ST + TU$ $LR = LN + NR$	c) **مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة** ؟
d) $ST + TU = LN + NR$	d) **خاصية التعويض للمساواة**
e) $ST + LN = LN + NR$	e) **خاصية التعويض للمساواة**
f) $ST + LN - LN = LN + NR - LN$	f) **خاصية الطرح للمساواة**
g) **$ST = NR$** ؟	g) خاصية التعويض للمساواة
h) $\overline{ST} \cong \overline{NR}$	h) **تعريف القطع المستقيمة المتطابقة**

6) **المعطيات:** $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
a) **$\overline{AB} \cong \overline{CD}$** ؟	a) معطيات
b) $AB = CD$	b) **تعريف القطع المستقيمة المتطابقة**
c) $CD = AB$	c) **خاصية التماثل للمساواة**
d) **$\overline{CD} \cong \overline{AB}$** ؟	d) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة

الصف: الأول الثانوي　38　الفصل 1: التبرير والبرهان

تدريبات حل المسألة (39) دون ضمن فوق

الاسم ______ التاريخ ______

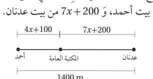
1-7 تدريبات حل المسألة

إثبات علاقات بين القطع المستقيمة

1) **أطوال:** خالد أقصر من أخيه سالم بـ 11cm، وبندر أقصر من أخيه سلطان بـ 11cm، إذا كان خالد أقصر من بندر، فقارن بين طولَي سالم وسلطان، وقارن بين طولَيهما إذا كان طول خالد يساوي طول بندر.

يكون سالم أقصر من سلطان، عندما يكون خالد أقصر من بندر، أما إذا كان طول خالد يساوي طول بندر؛ فإن طول سالم يساوي طول سلطان.

2) **مسافة:** يسكن أحمد على بُعد 1400 m من بيت عدنان، وتقع مكتبة عامة بين بيتَيهما، وهي على بُعد $4x + 100$ من بيت أحمد، وَ $7x + 200$ من بيت عدنان.



ما المسافة بين المكتبة العامة وبين بيت عدنان؟

900 m

3) **أخشاب:** يعمل سعيد في ورشة خشب، فطلب صاحب الورشة من سعيد أن يتحقق مِمَّا إذا كان لمجموعةٍ من قطع الخشب الطول نفسه أم لا، وقد كانت القطع مرقّمة من 1 إلى 12، فاختار سعيد قطعة الخشب رقم 1، وقارنها ببقية القطع فوجدها جميعًا تساويها في الطول، فسّر كيف عرف سعيد أن القطعتين 7, 10 لهما الطول نفسه، على الرغم من أنه لم يقارن بين طولَيهِمَا مباشرةً؟

طول القطعة رقم 7 يساوي طول القطعة رقم1، وطول القطعة رقم 1 يساوي طول القطعة رقم 10. وحسب خاصية التعدي نستنتج أن طول القطعة رقم 7 يساوي طول القطعة رقم 10.

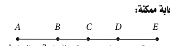
4) **بيوت:** يقيم زيد وجعفر ومحمد في ثلاثة بيوتٍ تقع كُلُّها على المستقيم نفسه، في حين يقع بيت جعفر بين بيتَي زيد ومحمد، والمسافة بين بيت زيد وبيت محمد ميلٌ واحدٌ، فهل يمكن أن يبعُد بيت جعفر ميلًا واحدًا عن كلٍّ من بيت زيد وبيت محمد؟

لا؛ لا يمكن. يجب أن يبعد بيت جعفر أقل من ميل واحد عن كلٍّ منهما لأنه يقع بينهما.

5) **إضاءة:** وُضعت المصابيح A, B, C, D, E في صفٍّ واحد. وكان المِصباح الأوسط: هو نقطة منتصف المسافة بين المصباحين الثاني والرابع، وهو أيضًا نقطة منتصف المسافة بين المِصباحين الأول والأخير.

a) ارسم شكلًا يوضح هذا الوضع.

إجابة ممكنة:



b) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: C نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{BD}$ و $\overline{AE}$.

المطلوب: إثبات أن $AB = DE$.

العبارات	المبرّرات
1) C نقطة منتصف $\overline{BD}$ و $\overline{AE}$	1) معطيات
2) $BC = CD$ و **$AC = CE$**	2) **تعريف نقطة المنتصف**
3) $AC = AB + BC$، $CE = CD + DE$	3) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
4) $AB = AC - BC$	4) **خاصية الطرح للمساواة**
5) **$AB = CE - CD$**	5) خاصية التعويض للمساواة
6) $DE = CE - CD$	6) خاصية الطرح للمساواة
7) **$AB = DE$**	7) **خاصية التعدي للمساواة**

الصف: الأول الثانوي　39　الفصل 1: التبرير والبرهان

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 1

دون دون المتوسط — ضمن ضمن المتوسط — فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (40) ضمن فوق

الاسم ______________ التاريخ ________

1-7 التدريبات الإثرائية

نقطة المنتصف:

سبق لك أن درست صيغة منتصف $\overline{AB}$:

$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$، حيث إحداثيًّا A هما (x_1, y_1) وإحداثيًّا B هما (x_2, y_2)

افترض أن النقطة P تقع على $\overline{AB}$، وبُعدها عن A يساوي $\frac{1}{4}$ المسافة من A إلى B.

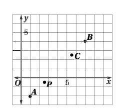
يقول صالح: إنه يمكن إيجاد إحداثيات P باستعمال الصيغة التالية:

$P=\left(\frac{x_1+x_2}{4},\frac{y_1+y_2}{4}\right)$.

1) هل صيغة صالح لإيجاد P صحيحة أم لا؟ فسّر إجابتك.
الصيغة غير صحيحة؛ لأنه إذا كانت: $A(4, -4)$ و $B(6, 6)$ ، فإن نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي $M=(5, 1)$.
وستكون P نقطة المنتصف بين A و M؛ أيّ أن إحداثيات P هي $(4.5, -1.5)$
بينما تكون $P=(2.5, 0.5)$، وفق قانون صالح.

2) اقترح طريقة لإيجاد إحداثيات النقطة P
إجابة ممكنة: استخدم صيغة نقطة المنتصف مرتين؛ بحيث نطبّق الصيغة في المرة الأولى لإيجاد M نقطة منتصف $\overline{AB}$، ثم يطبق مرة أخرى على $\overline{AM}$؛ لإيجاد إحداثيَي P .

استعمل المستوى الإحداثي المجاور للإجابة عن الأسئلة 5-3.



3) عيّن النقطتين $A(1, -2)$ وَ $B(7, 4)$.

4) عيّن النقطة P بين A وَ B، على أن يكون $AP=\frac{1}{4}(AB)$ ، وأوجد إحداثيات P.
(2.5, −0.5)

5) عيّن النقطة C بين A و B، على أن يكون $CB=\frac{1}{4}(AB)$. وأوجد إحداثيات C.
(5.5 , 2.5)

الصف: الأول الثانوي 40 الفصل 1: التبرير والبرهان

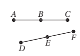
كتاب التمارين (12) دون ضمن فوق

1 - 7 إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة

الفصل الأول التبرير والبرهان

أكمل البرهان الآتي:

1) **المعطيات:** $\overline{AB}\cong\overline{DE}$
B نقطة منتصف $\overline{AC}$
E نقطة منتصف $\overline{DF}$



المطلوب: $\overline{BC}\cong\overline{EF}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB}\cong\overline{DE}$ B نقطة منتصف $\overline{AC}$ E نقطة منتصف $\overline{DF}$	1) معطيات
2) $AB=DE$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $AB=BC$ $DE=EF$	3) تعريف نقطة المنتصف
4) $BC=DE$	4) خاصية التعويض للمساواة
5) $BC=EF$	5) خاصية التعدي للمساواة
6) $\overline{BC}\cong\overline{EF}$	6) تعريف تطابق القطع المستقيمة

2) **طرق:** يقع كلٌّ من منزل أحمد ومنزل ماجد ومنزل سلمان والمسجد على طريق مستقيم كما هو مبين في الشكل المجاور. إذا كانت المسافة من منزل أحمد إلى منزل ماجد تساوي المسافة من منزل سلمان إلى المسجد، فأثبت أن المسافة من منزل أحمد إلى منزل سلمان تساوي المسافة من منزل ماجد إلى المسجد.

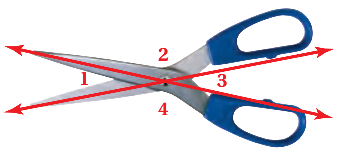
المعطيات: $\overline{DW}\cong\overline{YA}$
المطلوب: $\overline{DA}\cong\overline{YW}$
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{DW}\cong\overline{AY}$	1) معطيات
2) $DW=AY$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $DW+WA=WA+AY$	3) خاصية الجمع للمساواة
4) $DA=DW+WA,\ WY=WA+AY$	4) مسلمة جمع القطع المستقيمة
5) $DA=WY$	5) خاصية التعويض للمساواة
6) $\overline{DA}\cong\overline{WY}$	6) تعريف تطابق القطع المستقيمة

12

1-8 إثبات علاقات بين الزوايا
Proving Angles Relationships

لماذا؟



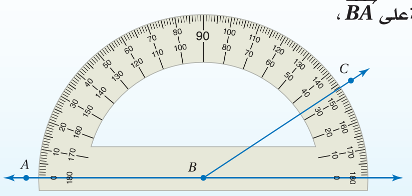
تلاحظ أن $\angle 1$ بين شفرتَي المقص، و $\angle 2$ بين الشفرة ومقبض المقص تشكلان زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيم.
وبالمثل فإن $\angle 2$ و $\angle 3$ بين مقبضَي المقص تشكلان أيضا زوجًا من الزوايا المتجاورة على مستقيم.

الزوايا المتتامة والمتكاملة: توضّح مسلّمة المنقلة العلاقة بين قياس الزوايا والأعداد الحقيقية.

مسلمة 1.10 مسلّمة المنقلة — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تستعمل المنقلة للربط بين قياس زاوية وعدد حقيقي يقع بين $0°$ و $180°$.

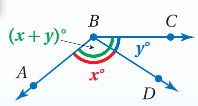
مثال: في $\angle ABC$، إذا انطبق صفر المنقلة على $\overrightarrow{BA}$، فإن العدد الذي ينطبق على $\overrightarrow{BC}$ يمثل قياس $\angle ABC$.



درست سابقًا مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة، وتوجد علاقة مشابهة لها بين قياسات الزوايا.

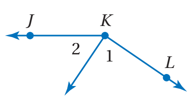
مسلمة 1.11 مسلمة جمع قياسات الزوايا — أضف إلى مطويتك

تقع النقطة D داخل $\angle ABC$ إذا وفقط إذا كان
$m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$



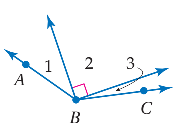
مثال 1 استعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا

إذا كان $m\angle 2 = 56°$, $m\angle JKL = 145°$ فأوجد $m\angle 1$. برّر خطوات حلّك.



$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle JKL$	مسلّمة جمع قياسات الزوايا
$m\angle 1 + 56° = 145°$	عوِّض $m\angle 2 = 56°$, $m\angle JKL = 145°$
$m\angle 1 + 56° - 56° = 145° - 56°$	اطرح 56 من الطرفين
$m\angle 1 = 89°$	بسِّط

تحقق من فهمك



1) إذا كان $m\angle 1 = 23°$, $m\angle ABC = 131°$، فأوجد $m\angle 3$. برِّر خطوات حلّك. انظر ملحق الإجابات

فيما سبق:
درستُ تعيين أزواج خاصة من الزوايا واستعملتها.
(مهارة سابقة)

والآن:
- أكتب براهين تتضمن زوايا متتامة وزوايا متكاملة.
- أكتب براهين تتضمن زوايا متطابقة وزوايا قائمة.

www.obeikaneducation.com

1-8 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-8
استعمال التبرير المنطقي لإثبات صحة عباراتٍ.
تعيين أزواج خاصة من الزوايا واستعمالها.

الدرس 1-8
كتابة براهين تتضمن زوايا متتامة ومتكاملة.
كتابة براهين تتضمن زوايا متطابقة وزوايا قائمة.

ما بعد الدرس 1-8
استعمال التبرير الاستنتاجي لإثبات صحة عباراتٍ.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟" .

اسأل:
- في الشكل اذكر جميع أزواج الزوايا المتكاملة. $\angle 1$ و $\angle 2$، $\angle 2$ و $\angle 3$، $\angle 3$ و $\angle 4$، $\angle 4$ و $\angle 1$
- استعمل المنقلة لقياس $\angle 1$ و $\angle 2$، ثم أوجد مجموع قياسيهما؟ $25°$، $155°$، $180°$
- إذا تم فتح المقص أكثر، فهل تبقى أزواج الزوايا متكاملة؟ نعم

مصادر الدرس 1-8

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (70)	• تنويع التعليم، ص (70)	• تنويع التعليم، ص (72)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (13)	• كتاب التمارين، ص (13)	• كتاب التمارين، ص (13)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (41) • تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (41) • تدريبات المهارات، ص (43) • تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)	• تدريبات حل المسألة، ص (44) • التدريبات الإثرائية، ص (45)

مراجعة المفردات

الزاويتان المتكاملتان هما زاويتان مجموع قياسيهما يساوي $180°$

الزاويتان المتتامتان هما زاويتان مجموع قياسيهما يساوي $90°$

الزاويتان المتجاورتان على مستقيم هما زاويتان متجاورتان، بحيث يكون ضلعاهما غير المشتركين نصفَي مستقيم متعاكسين.

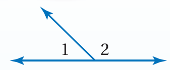
يمكن استعمال مسلّمة جمع قياسات الزوايا مع علاقات أخرى على الزوايا؛ لإثبات نظريات تتعلق بالزوايا.

نظريتان

أضف إلى مطويتك

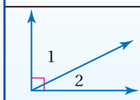
1.3 نظرية الزاويتين المتكاملتين: إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإنهما متكاملتان.

مثال: $\angle 1, \angle 2$ متجاورتان على مستقيم، إذن $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$



1.4 نظرية الزاويتين المتتامتين: إذا شكّل الضلعان غير المشتركين لزاويتين متجاورتين زاوية قائمة، فإن الزاويتين تكونان متتامتين.

مثال: ضلعا الزاويتين المتجاورتين $\angle 2, \angle 1$ غير المشتركين يشكلان زاويةً قائمةً، إذن $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$

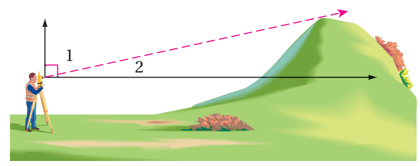


سوف تبرهن النظريتين 1.3 و 1.4 في السؤالين 14 و 15

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال خصائص الزوايا المتكاملة أو المتتامة

مَسْح الأراضي: قام مسّاح بقياس الزاوية بين خط نظره إلى قمة تلة، والمستقيم الرأسي فكانت $73°$ تقريبًا. ما قياس الزاوية بين خط نظره والخط الأفقي؟ برّر خطوات الحل.

افهم: ارسم شكلًا يوضح المسألة. قاس المسّاح الزاوية بين خط نظره والخط الرأسي؛ لذا ارسم نصف المستقيم الرأسي والأفقي من النقطة التي يشاهد منها المسّاح التلة، ثم سمّ الزوايا الناتجة. وكما تعلم فإن نصفَي المستقيمين (الأفقي والرأسي) يكوّنان زاويةً قائمةً.



خطط: استعمل نظرية الزاويتين المتتامتين.

حُل: بما أن $\angle 1$ و $\angle 2$ تكوّنان زاوية قائمة فإنهما متتامتان. تعريف الزاويتين المتتامتين

$m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$	تعريف الزاويتين المتتامتين
$73° + m\angle 2 = 90°$	$m\angle 1 = 73°$
$73° + m\angle 2 - 73° = 90° - 73°$	اطرح 73 من الطرفين
$m\angle 2 = 17°$	بسّط

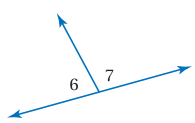
قياس الزاوية بين خط نظر المساح وخط الأفق $17°$

تحقق: تعلم أنه يجب أن يكون ناتج جمع قياسَي $\angle 1$ و $\angle 2$ يساوي $90°$

$17° + 73° = 90°$ ✓

تحقق من فهمك

2) في الشكل المجاور، $\angle 6$ و $\angle 7$ متجاورتان على مستقيم. إذا كان: $m\angle 6 = (3x + 32)°$ و $m\angle 7 = (5x + 12)°$، فأوجد قيمة x ، $m\angle 6$ ، $m\angle 7$. برّر خطوات الحل. انظر الهامش.



الزوايا المتتامة والمتكاملة

المثالان 1, 2 يبيِّنان كيفية استعمال نظرية "الزاويتان المتتامتان" ونظرية "الزاويتان المتكاملتان" لإيجاد قياسات زوايا مجهولة.

التقويم التكويني

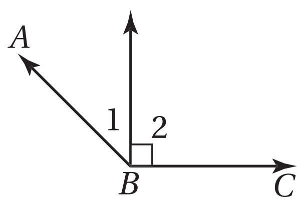
استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة.

تنبيه!

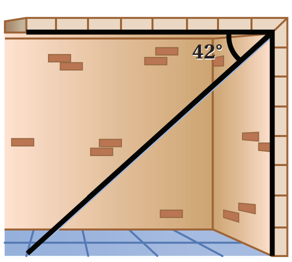
الإجابة عن السؤال: وجِّه الطلاب إلى القراءة بتمعّن حتى يتمكّنوا من معرفة المطلوب. في تمارين "تحقق من فهمك" التي تلي المثالين 2, 3، وجِّه الطلاب إلى أن المطلوب هو إيجاد قياس الزاوية، وليس إيجاد قيمة المتغير فقط، إذ يجب عليهم استعمال قيمة المتغير لإيجاد قياس الزاوية وهو المطلوب.

مثالان إضافيان

1 إذا كان: $m\angle ABC = 130°$، فأوجد $m\angle 1$؟ $40°$



2 هندسة: قاس مهندسٌ الزاوية التي تصنعها دعامة مع السقف باستعمال المنقلة، فوجدها $42°$، ما قياس الزاوية التي تصنعها الدعامة مع الجدار؟ $48°$



إرشادات للمعلم الجديد

تطابق الزوايا: ذكّر الطلاب بأن تطابق الزوايا يعني تساوي قياساتها، والعكس صحيح. وعندما نقول إن الزاويتين متساويتان فهذا يعني تطابقهما أو تساوي قياسيهما.

إجابة (تحقق من فهمك):

2)

المبررات	المبررات
1) $m\angle 6 + m\angle 7 = 180°$	1) نظرية "الزاويتان المتكاملتان"
2) $3x + 32 + 5x + 12 = 180°$	2) بالتعويض
3) $8x + 44 = 180°$	3) بالتبسيط
4) $8x + 44 - 44 = 180 - 44$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $8x = 136$	5) بالتبسيط
6) $\frac{8x}{8} = \frac{136}{8}$	6) خاصية القسمة للمساواة
7) $x = 17$	7) بالتبسيط
8) $m\angle 6 = 3x + 32$	8) معطيات
9) $m\angle 6 = 3\,(17) + 32 = 83°$	9) بالتعويض
10) $m\angle 7 = 5x + 12$	10) معطيات
11) $m\angle 7 = 5(17) + 12$	11) بالتعويض
12) $m\angle 7 = 97°$	12) بالتبسيط

تطابق الزوايا: إن الخصائص الجبرية التي تنطبق على تطابق القطع المستقيمة وتساوي قياساتها، تنطبق أيضًا على تطابق الزوايا وتساوي قياساتها.

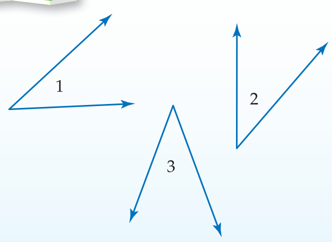
نظرية 1.5 خصائص تطابق الزوايا

أضف إلى مطويتك

خاصية الانعكاس للتطابق
$\angle 1 \cong \angle 1$

خاصية التماثل للتطابق
إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$، فإن $\angle 1 \cong \angle 2$.

خاصية التعدي للتطابق
إذا كانت $\angle 2 \cong \angle 1$ ، وكانت $\angle 3 \cong \angle 2$، فإن $\angle 3 \cong \angle 1$.



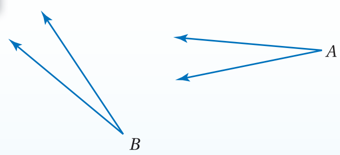
ستُبرهن خاصيتَي الانعكاس والتعدي للتطابق في السؤالين 16 و 17

برهان خاصية التماثل للتطابق

أضف إلى مطويتك

المعطيات: $\angle A \cong \angle B$

المطلوب: $\angle B \cong \angle A$



برهان حر:
تعلم من المعطيات أن $\angle A \cong \angle B$. ومن تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle A = m\angle B$، وباستعمال خاصية التماثل للمساواة يكون $m\angle B = m\angle A$، وعليه فإن $\angle B \cong \angle A$ من تعريف تطابق الزوايا.

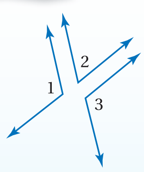
يمكنك تطبيق الخصائص الجبرية لإثبات نظريات على تطابق الزوايا تتضمن زوايا متتامة وزوايا متكاملة.

نظريتان

أضف إلى مطويتك

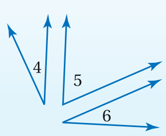
1.6 نظرية تطابق المكمِّلات:
الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

مثال: إذا كان $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ ،
وكان $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 3$



1.7 نظرية تطابق المتممات:
الزاويتان المتممتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.

مثال: إذا كان $m\angle 4 + m\angle 5 = 90°$
و $m\angle 5 + m\angle 6 = 90°$ ، فإن $\angle 4 \cong \angle 6$.



ستُبرهن حالة من النظرية 1.7 في السؤال 4

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي: اعمل تسجيلًا مرئيًّا للأمثلة التي عرضتها في غرفة الفصل، وحمِّله على موقع المدرسة الإلكتروني ليشاهده الطلاب من خارج الفصل.

المحتوى الرياضي

كتابة البراهين: في العادة لا تُذكر خاصية التماثل في البراهين؛ وذلك لتقليل عدد خطوات البرهان. والأمر هنا متروك للمعلم، فإما أن يكتبها أو لا. ضمن هذا الكتاب سنفترض من الآن فصاعدًا تحقق خاصية التماثل ضمنيًّا، ولا داعي لذكرها في البراهين.

تطابق الزوايا

المثالان 3, 4 يبيِّنان كيفية إثبات التطابق، وإيجاد قياسات زوايا مجهولة.

68 الفصل 1 التبرير والبرهان

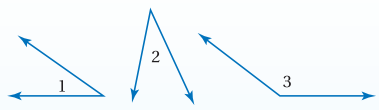
برهان — إحدى حالات نظرية تطابق المكملات

أضف إلى مطويتك

المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان.
$\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.

المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

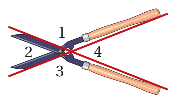
البرهان:



العبارات	المبررات
1) $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.	1) معطيات
2) $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°, m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	2) تعريف الزاويتين المتكاملتين
3) $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	3) بالتعويض
4) $m\angle 1 = m\angle 2$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $\angle 1 \cong \angle 2$	5) تعريف تطابق الزوايا

مثال 3 — براهين تستعمل فيها نظريتا تطابق المكملات أو المتممات

أثبت أن الزاويتين المتقابلتين بالرأس 2 و 4 في الشكل المجاور متطابقتان.



المعطيات: $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس.

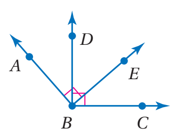
المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 4$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس.	1) معطيات
2) $\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم. $\angle 3$ و $\angle 4$ متجاورتان على مستقيم.	2) تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
3) $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.	3) نظرية الزاويتين المتكاملتين
4) $\angle 2 \cong \angle 4$	4) نظرية تطابق المكملات

تحقق من فهمك

3) في الشكل المجاور $\angle ABE$ و $\angle DBC$ قائمتان.
أثبت أن $\angle ABD \cong \angle EBC$. انظر الهامش.



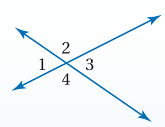
في المثال 3، لاحظ أن $\angle 2$ و $\angle 4$ متقابلتان بالرأس. ونتيجة هذا المثال تُثبت نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس الآتية:

نظرية 1.8 — نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

أضف إلى مطويتك

الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.

مثال: $\angle 1 \cong \angle 3$
$\angle 2 \cong \angle 4$

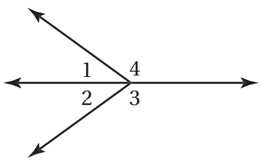


مراجعة المفردات

الزاويتان المتقابلتان بالرأس
هما زاويتان غير متجاورتين تتكونان من تقاطع مستقيمين.

مثال إضافي

3 في الشكل الآتي $\angle 1$، $\angle 4$ متجاورتان على مستقيم، $m\angle 3 + m\angle 1 = 180°$، أثبت أن $\angle 3$ و $\angle 4$ متطابقتان.



العبارات (المبررات):

1) $m\angle 3 + m\angle 1 = 180°$، $\angle 1$ و $\angle 4$ متجاورتان على مستقيم (معطيات).

2) $\angle 1$ و $\angle 4$ متكاملتان (نظرية الزاويتين المتكاملتين)

3) $\angle 3$ و $\angle 1$ متكاملتان (تعريف الزاويتين المتكاملتين)

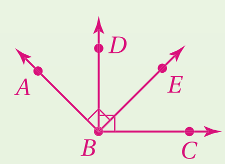
4) $\angle 3 \cong \angle 4$ (نظرية تطابق المكملات)

إرشادات للمعلم الجديد

الأمثلة: قبل شرح برهان إحدى حالات نظرية تطابق المكملات أعلى الصفحة، اطلب إلى الطلاب التفكير في قياسات ممكنة لزوايا يمكن استعمالها بوصفها أمثلة تدعم فَهْم نظرية تطابق المكملات.

إجابة (تحقق من فهمك):

3) **المعطيات:** $\angle ABE$ و $\angle DBC$ قائمتان.

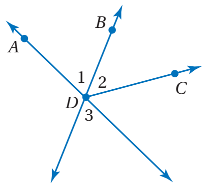


المطلوب: $\angle ABD \cong \angle EBC$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle ABE$ و $\angle DBC$ قائمتان	1) معطيات
2) $\angle ABD$ و $\angle DBE$ متتامتان، $\angle DBE$ و $\angle EBC$ متتامتان	2) نظرية الزاويتين المتتامتين
3) $\angle ABD \cong \angle EBC$	3) نظرية تطابق المتمِّمات

مثال 4 استعمال الزوايا المتقابلة بالرأس



أثبت أنه إذا كان $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$ ، فإن $\angle 2 \cong \angle 3$

المعطيات: $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$

المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 3$

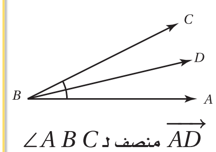
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overrightarrow{DB}$ ينصف $\angle ADC$.	1) معطيات
2) $\angle 1 \cong \angle 2$	2) تعريف منصف الزاوية
3) $\angle 1$ و $\angle 3$ زاويتان متقابلتان بالرأس.	3) تعريف الزاويتين المتقابلتين بالرأس
4) $\angle 3 \cong \angle 1$	4) نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
5) $\angle 3 \cong \angle 2$	5) خاصية التعدي للتطابق
6) $\angle 2 \cong \angle 3$	6) خاصية التماثل للتطابق

إرشادات للدراسة

منصف الزاوية

هو نصف مستقيم يقع داخل الزاوية ويقسم الزاوية قسمين متطابقين، وتكون بدايته عند رأس الزاوية.



$\overrightarrow{AD}$ منصف لـ $\angle A B C$

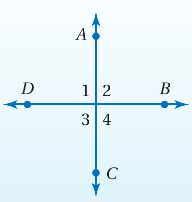
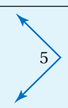
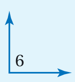
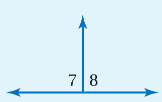
✓ تحقق من فهمك

4) إذا كانت $\angle 3$ و $\angle 4$ متقابلتين بالرأس، وكان $m\angle 3 = (6x + 2)°$ و $m\angle 4 = (8x - 14)°$، فأوجد $m\angle 3$ و $m\angle 4$. برِّر خطوات حلّك. انظر الهامش

يمكن استعمال النظريات الواردة في هذا الدرس لإثبات نظريات الزاوية القائمة الآتية:

نظريات — نظريات الزاوية القائمة

أضف إلى مطويتك

	النظرية	مثال
1.9	يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكونان أربع زوايا قائمة. **مثال:** إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$، فإن $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ جميعها قائمة	
1.10	جميع الزوايا القائمة متطابقة. **مثال:** إذا كانت $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$، جميعها قائمة، فإن $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$.	
1.11	المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا متجاورة متطابقة. **مثال:** إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$ ، فإن $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 2 \cong \angle 4,$ $\angle 4 \cong \angle 3, \angle 3 \cong \angle 1$	
1.12	إذا كانت الزاويتان متكاملتين ومتطابقتين، فإنهما قائمتان. **مثال:** إذا كانت $\angle 6 \cong \angle 5$ ، وكانت $\angle 5$ و $\angle 6$ متكاملتين، فإن $\angle 5$ و $\angle 6$ قائمتان.	
1.13	إذا تجاورت زاويتان على مستقيم، وكانتا متطابقتين، فإنهما قائمتان. **مثال:** إذا كانت $\angle 7$ و $\angle 8$ متجاورتين على مستقيم، وكانت $\angle 8 \cong \angle 7$ فإن $\angle 7$ و $\angle 8$ قائمتان.	

ستُبرهن هذه النظريات في الأسئلة 20–24

قراءة الرياضيات

رمز التعامد

تذكر أن الرمز $\perp$ يقرأ يعامد.

مثال إضافي

4 إذا كانت $\angle 1$ و $\angle 2$ متقابلتين بالرأس، و $m\angle 1 = (d - 32)°$ ، $m\angle 2 = (175 - 2d)°$، فأوجد $m\angle 1$ و $m\angle 2$. برِّر خطوات حلّك.

37; 37

العبارات (المبررات) :

1) $\angle 1$ و $\angle 2$ متقابلتان بالرأس (معطيات).

2) $\angle 1 \cong \angle 2$ (نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس)

3) $m\angle 1 = m\angle 2$ (تعريف تطابق الزوايا)

4) $d - 32 = 175 - 2d$ (بالتعويض)

5) $3d = 207$ (خاصية الجمع للمساواة)

6) $d = 69$ (خاصية القسمة للمساواة)

7) $m\angle 1 = 37°$ (بالتعويض)

8) $m\angle 2 = 37°$ (بالتعويض)

إجابة:

4) $\angle 3 \cong \angle 4$ (نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس)

$m\angle 3 = m\angle 4$ (تعريف تطابق الزوايا)

$6x + 2 = 8x - 14$ (بالتعويض)

$6x + 2 + 14 = 8x - 14 + 14$ (خاصية الجمع للمساواة)

$6x + 16 = 8x$ (بالتبسيط)

$6x + 16 - 6x = 8x - 6x$ (خاصية الطرح للمساواة)

$16 = 2x$ (بالتبسيط)

$8 = x$ (خاصية القسمة للمساواة)

$m\angle 3 = 6x + 2$ (معطًى)

$m\angle 3 = 6(8) + 2$ (بالتعويض)

$m\angle 3 = 50°$ (بالتبسيط)

$m\angle 3 = m\angle 4$ (نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس)

$m\angle 4 = 50°$ (بالتعويض)

تنويع التعليم

دون ضمن

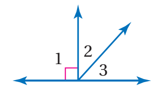
إذا واجه بعض الطلاب صعوبة في تذكر الفرق بين الزوايا المتكاملة والمتتامة،

فاطلب إليهم نَظْم كلٍّ من التعريفين في بيت شعر.

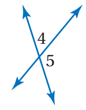
تأكـد

المثال 1 أوجد قياس الزوايا المرقّمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك. **1, 2) انظر الهامش.**

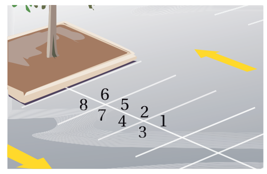
1) $m\angle 2 = x°, m\angle 3 = (x - 16)°$



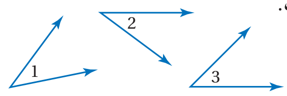
2) $m\angle 4 = (3(x-1))°, m\angle 5 = (x + 7)°$



المثال 2 3) **موقف:** استعمل مخطط موقف السيارات المجاور.
إذا علمت أن $\angle 6 \cong \angle 2$، فأثبت أن $\angle 8 \cong \angle 4$ **انظر الهامش.**



المثال 3 4) **برهان:** فيما يأتي أكمل برهان إحدى حالات نظرية تطابق المتممات.



المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 3$ متتامتان.
$\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان.

المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

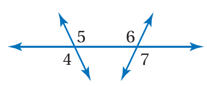
البرهان:

العبارات	المبررات
a) $\angle 1$ و $\angle 3$ متتامتان. $\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان.	a) ؟ **معطيات**
b) $m\angle 1 + m\angle 3 = 90°$ $m\angle 2 + m\angle 3 = 90°$	b) ؟ **تعريف الزاويتين المتتامتين**
c) $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 2 + m\angle 3$	c) ؟ **بالتعويض**
d) $m\angle 1 = m\angle 2$	d) ؟ **خاصية الطرح للمساواة**
e) $\angle 1 \cong \angle 2$	e) ؟ **تعريف تطابق الزوايا**

المثال 4 5) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي:

المعطيات: $\angle 4 \cong \angle 7$

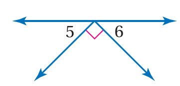
المطلوب: $\angle 5 \cong \angle 6$ **انظر الهامش.**



تدرب وحل المسائل

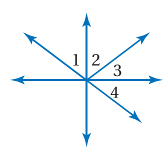
الأمثلة 1-3 أوجد قياس الزوايا المرقّمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

6) $m\angle 5 = m\angle 6$



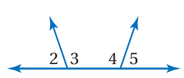
$m\angle 5 = m\angle 6 = 45°$
(مسلمة جمع قياسات الزوايا ونظرية الزاويتين المتكاملتين)

7) $\angle 2$ و $\angle 3$ متتامتان، $\angle 1 \cong \angle 4$، $m\angle 2 = 28°$



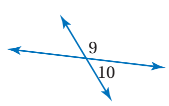
7) $m\angle 3 = 62°$ ،
$m\angle 1 = m\angle 4 = 45°$
(نظرية الزاويتين المتتامتين ومسلمة جمع قياسات الزوايا)

8) $\angle 2$ و $\angle 4$ متكاملتان، $\angle 4$ و $\angle 5$ متكاملتان، $m\angle 4 = 105°$



8) $m\angle 2 = 75°$ ،
$m\angle 3 = 105°$ ،
$m\angle 5 = 75°$
(نظرية تطابق المكملات ونظرية الزاويتين المتكاملتين)

9) $m\angle 9 = (3x + 12)°$، $m\angle 10 = (x - 24)°$



$m\angle 9 = 156°$ ،
$m\angle 10 = 24°$
(نظرية الزاويتين المتكاملتين)

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 5-1 للتحقق من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

1) $m\angle 3 = 37°$, $m\angle 2 = 53°$ ؛ نظرية الزاويتين المتتامتين.

2) $m\angle 5 = 51°$, $m\angle 4 = 129°$ ؛ نظرية الزاويتين المتكاملتين

3) المعطيات: $\angle 2 \cong \angle 6$

المطلوب: $\angle 4 \cong \angle 8$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 2 \cong \angle 6$	معطيات
2) $\angle 6, \angle 8$ متكاملتان $\angle 2, \angle 4$ متكاملتان	متجاورتان على مستقيم متجاورتان على مستقيم
3) $m\angle 6 + m\angle 8 = 180,$ $m\angle 2 + m\angle 4 = 180$	نظرية الزاويتين المتكاملتين
4) $m\angle 2 + m\angle 8 = 180$	بالتعويض
5) $m\angle 2 - m\angle 2 + m\angle 4 = 180 - m\angle 2$ $m\angle 2 - m\angle 2 + m\angle 8 = 180 - m\angle 2$,	خاصية الطرح للمساواة
6) $m\angle 4 = 180 - m\angle 2$ $m\angle 8 = 180 - m\angle 2$	بالتبسيط
7) $m\angle 4 = m\angle 8$	بالتعويض
8) $\angle 4 \cong \angle 8$	تعريف تطابق الزوايا

5) المعطيات: $\angle 4 \cong \angle 7$

المطلوب: $\angle 5 \cong \angle 6$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 4 \cong \angle 7$	معطيات
2) $\angle 4 \cong \angle 5$ وَ $\angle 6 \cong \angle 7$	نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
3) $\angle 4 \cong \angle 6$	خاصية التعدي للتطابق
4) $\angle 5 \cong \angle 6$	خاصية التعدي للتطابق

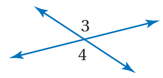
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون: دون المتوسط	6-13 ، 27 ، 28 ، 30-41
ضمن: ضمن المتوسط	7-13 فردي، 14-28 ، 30-41
فوق: فوق المتوسط	14-39 ، (اختياري: 37-41)

المثال 4 أوجد قياس الزوايا المرقمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك.

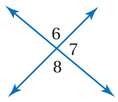
10) $m\angle 3 = (2x + 23)^\circ$

$m\angle 4 = (5x - 112)^\circ$



11) $m\angle 6 = (2x - 21)^\circ$

$m\angle 7 = (3x - 34)^\circ$



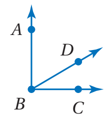
10) $m\angle 3 = 113^\circ$ ، $m\angle 4 = 113^\circ$ (نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس)

11) $m\angle 6 = 73^\circ$ ، $m\angle 7 = 107^\circ$ ، $m\angle 8 = 73^\circ$ (نظرية الزاويتين المتكاملتين ونظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس)

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ مما يأتي: 12, 13) انظر ملحق الإجابات

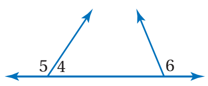
12) **المعطيات:** $\angle ABC$ زاوية قائمة.

المطلوب: $\angle ABD, \angle CBD$ متتامتان.



13) **المعطيات:** $\angle 5 \cong \angle 6$

المطلوب: $\angle 4, \angle 6$ متكاملتان.



اكتب برهانًا لكلٍّ من النظريات الآتية: 14–17) انظر ملحق الإجابات

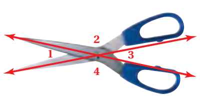
14) نظرية الزاويتين المتكاملتين.

15) نظرية الزاويتين المتتامتين.

16) خاصية الانعكاس للتطابق.

17) خاصية التعدي للتطابق.

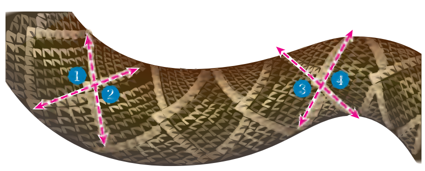
18) **برهان:** أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الأربع الناتجة عند فتح المقص يساوي 360° انظر ملحق الإجابات



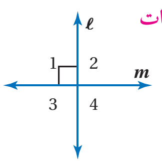
19) **طبيعة:** الأفعى المجلجلة أفعى سامّة، ويوجد على جلدها زركشة تأخذ أشكالًا نمطية. انظر إلى الشكل أدناه، والذي يمثِّل صورة مكبرة لجلد الأفعى المبيَّنة جهة اليمين. إذا كان $\angle 4 \cong \angle 1$ ، فأثبت أن $\angle 3 \cong \angle 2$. انظر ملحق الإجابات

الربط مع الحياة

يصل طول أنياب الأفعى المجلجلة إلى 6 in ، ويمكنها طيُّ أنيابها داخل فمها لتكون موازية لسقف الفم عندما يكون مغلقًا.



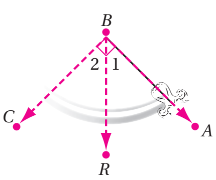
برهان: استعمل الشكل المجاور لكتابة برهان لكلٍّ من النظريات الآتية. 20–24) انظر ملحق الإجابات



20) نظرية 1.9　**21)** نظرية 1.10　**22)** نظرية 1.11

23) نظرية 1.12　**24)** نظرية 1.13

25) **بندول:** يظهر في الشكل المجاور وضع بندول ساعة تقليدية. إذا علمت أن $\angle ABC$ قائمة. وأن $m\angle 1 = 45^\circ$ ، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\overrightarrow{BR}$ ينصف $\angle ABC$ انظر الهامش.



إجابات:

25) بما أن $\angle ABC$ قائمة، فإن قياسها يساوي 90، $\overrightarrow{BR}$ يقسم $\angle ABC$ إلى $\angle ABR$ و $\angle CBR$

وباستعمال مسلّمة جمع الزوايا

$m\angle ABR + m\angle CBR = m\angle ABC$

وبالتعويض

$m\angle ABR + m\angle CBR = 90^\circ$

وبالتعويض مرة ثانية

$m\angle 1 + m\angle 2 = 90^\circ$

وبما أن $m\angle 1 = 45^\circ$

إذن $45 + m\angle 2 = 90^\circ$ وباستعمال خاصية الطرح للمساواة

$45 - 45 + m\angle 2 = 90 - 45$

فإن $m\angle 2 = 45^\circ$. وبما أن $m\angle 1$ و $m\angle 2$ متساو، فإن $\overrightarrow{BR}$ يكون منصفًا للزاوية $\angle ABC$ بتعريف منصف الزاوية.

تنويع التعليم

فوق

توسّع: إذا علمت أن $\angle A$ و $\angle B$ متكاملتان، وأن $\angle C \cong \angle A$، $m\angle A = (3x)^\circ$ ، $m\angle B = (x + 20)^\circ$ فأوجد $m\angle C$.

1) $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$ (تعريف الزاويتين المتكاملتين)

2) $3x + x + 20 = 180^\circ$ (بالتعويض)

3) $x = 40^\circ$ (بالتبسيط)

4) $m\angle A = m\angle C$ (تعريف تطابق الزوايا)

5) $m\angle C = 3x$ (بالتعويض)

6) $m\angle C = 3(40)$ (بالتعويض)

7) $m\angle C = 120^\circ$ (بالتبسيط)

26) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستكشف علاقات الزوايا.

a) **هندسيًا:** استعمل المنقلة لرسم زاوية قائمة ABC، وحدد نقطة داخلها، وسمّها D. ارسم $\overrightarrow{BD}$. ثم ارسم $\overleftrightarrow{KL}$ ، وارسم $\angle JKL$ التي تطابق $\angle ABD$.

b) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين $\angle JKL$ و $\angle DBC$.

c) **منطقيًا:** أثبت صحة التخمين الذي وضعته. a–c) انظر ملحق الإجابات

28) غير صحيحة أبدًا؛ لأن كل زاويتين متجاورتين ناشئتان من تقاطع مستقيمين، تكونان متجاورتين على مستقيم. وإذا كانت إحدى هاتين الزاويتين حادة فسيكون قياسها أقل من °90، وسيكون قياس مكمِّلتها أكثر من °90؛ لأن ناتج طرح عدد أقل من °90؛ من العدد °180 سيكون عددًا أكبر من °90 دائمًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

انظر ملحق الإجابات

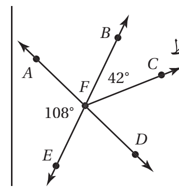
27) **تحدٍّ:** لقد تم إثبات حالة واحدة من نظرية تطابق المكملات، وفي السؤال 4 برهنت الحالة المشابهة من نظرية تطابق المتممات. فسّر لماذا توجد حالتان لكلٍّ من هاتين النظريتين، واكتب برهانًا للحالة الثانية لكلٍّ منهما.

28) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائما أو غير صحيحة أبدًا. فسّر تبريرك.
إذا كانت إحدى الزوايا المتكونة من مستقيمين متقاطعين حادة، فإن الزوايا الثلاث الأخرى المتكونة من هذا التقاطع حادة أيضًا.

29) **اكتب:** فسّر كيف يمكن استعمال المنقلة لإيجاد قياس الزاوية المتممة لزاويةٍ أخرى بطريقةٍ سريعة.
انظر الهامش.

تدريب على اختبار

30) في الشكل المجاور إذا كانت النقاط F ،E، B تقع على استقامة واحدة، وكذلك النقاط A ،F ،D، فأوجد قياس $\angle CFD$ A



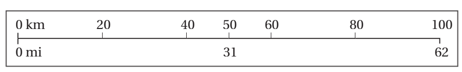
A	66°	C	108°
B	72°	D	138°

31) إذا كانت النسبة بين قياسَي زاويتين متتامتين هي 4:1 فما قياس الزاوية الصغرى؟ B

A	15°	C	24°
B	18°	D	36°

مراجعة تراكمية

32) **خرائط:** يُظهر الشكل المجاور مقياس رسم خريطة تدريجين أحدهما بالكيلومترات، والآخر بالأميال. إذا كانت $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ قطعتين مستقيمتين على الخريطة، حيث $AB = 100\,km$ ، و $CD = 62\,mi$. فهل $\overline{AB} \cong \overline{CD}$؟ فسّر إجابتك. (الدرس 1-7) انظر الهامش



اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1-6)

33) إذا كان $y + 7 = 5$، فإن $y = -2$ خاصية الطرح للمساواة

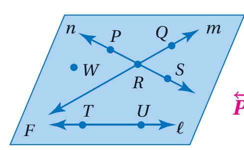
34) إذا كان $MN = PQ$، فإن $PQ = MN$ خاصية التماثل للمساواة

35) إذا كان $a - b = x$ و $b = 3$، فإن $a - 3 = x$ خاصية التعويض للمساواة

36) إذا كان $x(y + z) = 4$، فإن $xy + xz = 4$ خاصية التوزيع

استعد للدرس اللاحق

استعمل الشكل المجاور للإجابة عما يأتي:



37) سمّ مستقيمًا يحوي النقطة P. المستقيم n

38) سمّ تقاطع المستقيمين n و m. النقطة R

39) سمّ نقطة لا تقع على أيٍّ من المستقيمات ℓ, m, n . النقطة W

40) اذكر اسمًا آخر للمستقيم n. إجابة ممكنة: $\overleftrightarrow{PR}$

41) هل يتقاطع المستقيم ℓ مع المستقيم m أو المستقيم n؟ فسر إجابتك. انظر الهامش.

تمثيلات متعددة: في السؤال 26 يستعمل الطلاب رسومًا هندسيةً، ووصفًا لغويًّا، وبراهين لاستقصاء زوايا في المثلث.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: أعطِ الطلاب قائمة من نظريات هذا الفصل، واطلب إلى كل طالب اختيار نظرية معينة وكتابة ملخص لها دون الرجوع إلى الكتاب، ثم اطلب إليهم تسليم ملخصاتهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 8-1 ,7-1 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (12)

إجابات:

29) إجابة ممكنة: بما أن المنقلة تتضمن تدريجًا للزوايا الحادة وآخر للزوايا المنفرجة، فإن قياس المكمّلة هو القياس المقابل لقياس الزاوية المعلومة على التدريج الآخر من المنقلة.

32) نعم؛ بحسب مقياس الرسم المُعطى $100\,km = 62\,mi$ ، إذن $AB = CD$، وبتعريف تطابق القطع المستقيمة فإن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

41) نعم، يتقاطع المستقيم l مع كلٍّ من المستقيمين m و n، وذلك عند مدّ المستقيمات الثلاثة.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 8 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (41) دون

الاسم ________ التاريخ ________

1-8 تدريبات إعادة التعليم

إثبات علاقات بين الزوايا

الزوايا المتتامة والمتكاملة:

هناك مسلّمتان أساسيتان للتعامل مع الزوايا هما: مسلّمة المنقلة والتي تربط قياسات الزوايا بالأعداد. ومسلّمة جمع الزوايا، والتي تبيِّن العلاقة بين أجزاء الزاوية مع الزاوية نفسها.

مسلّمة المنقلة	يرتبط قياس أيّ زاوية بعددٍ حقيقيٍّ واحدٍ يقع بين $0°$ وَ $180°$	P, R, Q, S
مسلّمة جمع قياسات الزوايا	تقع النقطة R داخل $\angle PQS$، إذا وفقط إذا كان: $m\angle PQR + m\angle RQS = m\angle PQS$.	

يمكن استعمال هاتين المسلّمتين لإثبات النظريتين الآتيتين:

نظرية الزاويتين المتكاملتين	إذا كانت زاويتان متجاورتين على مستقيم ، فإنهما متكاملتان. مثال: $\angle 2$ و $\angle 1$ زاويتان متجاورتان على مستقيم؛ لذا فإن: $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$.	D, A, B, C, 1, 2
نظرية الزاويتين المتتامتين	إذا كوّن الضلعان غير المشتركين في زاويتين متجاورتين زاوية قائمة، فإن الزاويتين تكونان متتامّتين. مثال: في الشكل المجاور $\overrightarrow{GH} \perp \overrightarrow{GF}$، لذا فإن: $m\angle 3 + m\angle 4 = 90°$.	F, J, G, H, 3, 4

مثال 1 إذا كانت $\angle 2$ و $\angle 1$ زاويتين متجاورتين على مستقيمٍ، وكان $m\angle 2 = 115°$، فأوجد $m\angle 1$.

$m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ نظرية الزوايتين المتكاملتين

$m\angle 1 + 115° = 180°$ بالتعويض

$m\angle 1 = 65°$ خاصية الطرح للمساواة

مثال 2 إذا كوّنت $\angle 1$ و $\angle 2$ زاوية قائمة، وكان $m\angle 2 = 20°$، فأوجد $m\angle 1$.

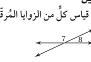
$m\angle 2 + m\angle 1 = 90°$ نظرية الزاويتين المتتامتين

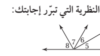
$m\angle 1 + 20° = 90°$ بالتعويض

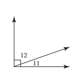
$m\angle 1 = 70°$ خاصية الطرح للمساواة

تمارين

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المُرقّمة، ثم اذكر النظرية التي تبرّر إجابتك:

1) 
$m\angle 7 = (5x + 5)°$
$m\angle 8 = (x - 5)°$
$m\angle 7 = 155°$, $m\angle 8 = 25°$
نظرية الزوايتين المتكاملتين

2) 
$m\angle 5 = (5x)°$, $m\angle 6 = (4x + 6)°$
$m\angle 7 = (10x)°$
$m\angle 8 = (12x - 12)°$
$m\angle 5 = 30°$, $m\angle 6 = 30°$, $m\angle 7 = 60°$, $m\angle 8 = 60°$
نظرية الزوايتين المتكاملتين

3) 
$m\angle 11 = (x + 10)°$
$m\angle 12 = (9x - 20)°$
$m\angle 11 = 20°$, $m\angle 12 = 70°$
نظرية الزوايتين المتتامتين

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (42) دون

الاسم ________ التاريخ ________

1-8 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

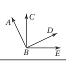
إثبات علاقات بين الزوايا

تطابق الزوايا:

تتحقّق خصائص الانعكاس والتماثل والتعدّي جميعها في علاقة تطابق الزوايا. كما تنطبق النظريات الآتية على الزوايا أيضًا.

نظرية تطابق المكمِّلات 1.6	الزاويتان المكمّلتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.
نظرية تطابق المتمِّمات 1.7	الزاويتان المتمّمتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين.
نظرية الزوايتين المتقابلتين بالرأس 1.8	الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.
النظرية 1.9	يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكوّنان أربع زوايا قوائم.
النظرية 1.10	جميع الزوايا القائمة متطابقة.
النظرية 1.11	المستقيمان المتعامدان يكوّنان زوايا متجاورة متطابقة.
النظرية 1.12	إذا كانت الزاويتان متطابقتين ومتكاملتين، فإنهما قائمتان.
النظرية 1.13	إذا كانت الزاويتان المتطابقتان متجاورتين على مستقيم، فإنهما قائمتان.

مثال أثبت أنه إذا كانت $\angle ABC$ وَ $\angle CBD$ زاويتان متتامّتان، $\angle DBE$ وَ $\angle CBD$ تكوّنان زاوية قائمة، فإن $\angle DBE \cong \angle ABC$



المعطيات: $\angle ABC$ و $\angle CBD$ زاويتان متتامّتان، $\angle DBE$ و $\angle CBD$ تكوّنان زاوية قائمة.

المطلوب: إثبات أن $\angle DBE \cong \angle ABC$

البرهان:

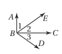
العبارات	المبرَرات
1) $\angle ABC$ و $\angle CBD$ متتامّتان. $\angle DBE$ و $\angle CBD$ تكوّنان زاوية قائمة.	1) معطيات
2) $\angle DBE$ و $\angle CBD$ متتامّتان.	2) نظرية الزاويتين المتتامتين.
3) $\angle ABC \cong \angle DBE$	3) نظرية تطابق المُتمِّمات.

تمارين

أكمل البرهانين الآتيين:

1) **المعطيات:** $\overline{AB} \perp \overline{BC}$، $\angle 1$ و $\angle 3$ متتامّتان

المطلوب: إثبات أن $\angle 2 \cong \angle 3$



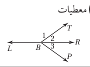
البرهان:

العبارات	المبرَرات
a) $\overline{AB} \perp \overline{BC}$	a) **معطيات** ؟
b) **$\angle ABC$ زاوية قائمة**	b) تعريف التعامد
c) $m\angle ABC = 90°$	c) تعريف الزاوية القائمة.
d) $m\angle ABC = m\angle 1 + m\angle 2$	d) **مسلّمة جمع قياسات الزوايا**
e) $90° = m\angle 1 + m\angle 2$	e) بالتعويض
f) $\angle 1$ و $\angle 2$ متتامّتان	f) **تعريف الزاويتين المتتامتين**
g) **$\angle 1$ و $\angle 3$ متتامّتان**	g) معطيات
h) $\angle 3 \cong \angle 2$	h) **نظرية تطابق المتممات**

2) **المعطيات:** الزاويتان $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم. $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$

المطلوب: إثبات أن $\angle 2 \cong \angle 3$

البرهان:

العبارات	المبرَرات
a) $\angle 1$, $\angle 2$ زاويتان متجاورتان على مستقيم. $m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$	a) معطيات 
b) **$\angle 1$ مكمّلة لـ $\angle 2$**	b) نظرية الزاويتين المتكاملتين.
c) $\angle 1$ مكمّلة لـ $\angle 3$	c) **تعريف الزاويتين المتكاملتين.**
d) **$\angle 2 \cong \angle 3$** ؟	d) نظرية تطابق المكملات.

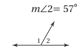
تدريبات المهارات (43) دون ضمن

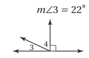
الاسم ________ التاريخ ________

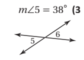
1-8 تدريبات المهارات

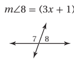
إثبات علاقات بين الزوايا

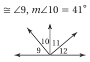
أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة مع ذكر النظرية التي تبرِّر حلَّك:

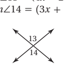
1) $m\angle 2 = 57°$

$m\angle 1 = 123°$
نظرية الزاويتين المتكاملتين

2) $m\angle 3 = 22°$

$m\angle 4 = 68°$
نظرية الزاويتين المتكاملتين ومسلّمة جمع قياسات الزوايا

3) $m\angle 5 = 38°$

$m\angle 6 = 38°$
نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس.

4) $m\angle 7 = (4x + 11)°$
$m\angle 8 = (3x + 1)°$

$m\angle 7 = 107°$, $m\angle 8 = 73°$
نظرية الزاويتين المتكاملتين

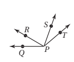
5) $\angle 11$ و $\angle 12$ متتامتان، $\angle 11 \cong \angle 9$, $m\angle 10 = 41°$

$m\angle 9 = 49°$, $m\angle 11 = 49°$, $m\angle 12 = 41°$
نظرية تطابق المتممات

6) $m\angle 13 = (4x - 26)°$
$m\angle 14 = (3x + 4)°$

$m\angle 13 = 94°$, $m\angle 14 = 94°$
نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس.

7) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\angle QPS \cong \angle TPR$

المطلوب: إثبات أن: $\angle QPR \cong \angle TPS$



البرهان:

العبارات	المبرَرات
a) **$\angle QPS \cong \angle TPR$**	a) **معطيات.** ؟
b) $m\angle QPS = m\angle TPR$	b) **تعريف الزوايا المتطابقة.**
c) $m\angle QPS = m\angle QPR + m\angle RPS$ $m\angle TPR = m\angle TPS + m\angle RPS$	c) **مسلّمة جمع قياسات الزوايا.**
d) **$m\angle QPR + m\angle RPS = m\angle TPS + m\angle RPS$**	d) خاصية التعويض
e) **$m\angle QPR = m\angle TPS$**	e) **خاصية الطرح.**
f) **$\angle QPR \cong \angle TPS$**	f) **تعريف الزوايا المتطابقة.**

تدريبات حل المسألة (44) دون ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

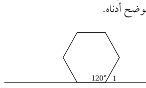
1-8 تدريبات حل المسألة

إثبات علاقات بين الزوايا

1) **مجسّمات:** أرادت مجموعة من الطلاب تصميم مجسّم كبير، له عشرون وجهًا كلُّها عبارة عن مثلثات متطابقة. وعُهد إلى الطالب جابر مسؤولية ضبط جودة عَمل الطلاب، ويتعين عليه أن يتأكد من أنه لجميع المثلثات قياسات الزوايا نفسها. فقام جابر بقصِّ نموذج مثلث، وقارن زواياه بزوايا كلِّ مثلث من المثلثات التي يصممها الطلاب، فكيف تضمن الطريقةُ التي استعملها أن جميع المثلثات لها قياسات الزوايا نفسها؟ **بحسب خاصية التعدي، إذا كان قياسا زاويتين مساويين لقياس زاوية النموذج، فإن لهما القياس نفسه.**

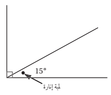
2) **استعراض رياضي:** في تصميم لاستعراض رياضي تصطف ثلاث فرق على 3 قطع مستقيمة جميعها لها نفس البداية، فإذا كان قياس الزاوية التي تصنعها الفرقة الأولى مع الثالثة $60°$، والزاوية التي تصنعها الفرقة الثانية مع الثالثة $35°$. فما قياس الزاوية التي تصنعها الفرقة الأولى مع الثانية؟ **$95°$ أو $25°$**

3) **قطع ألعاب:** وضع خالد قطعة الألعاب السداسية الشكل، كما هو موضح أدناه.



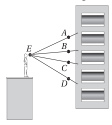
ما قياس $\angle 1$ في الشكل المُعطى، إذا علمت أن قياس كل واحدة من زوايا السداسي المنتظم يساوي $120°$؟ **$60°$**

4) **طلاء:** يقوم دهّان بطلاء سقف غرفة، وأراد أن يرسم مستقيمًا في السقف، بحيث يتقاطع مع أحد الأركان كما في الشكل أدناه، ويصنع زاويةً قياسها $15°$ مع إحدى حوافِّ السقف.



إلا أنه لم يتمكن من قياس تلك الزاوية لوجود لمبة إنارة بين المستقيم وحافة السقف؛ فهل قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الحافة الأُخرى للسقف يفيد الدهّان في إيجاد القياس المطلوب؟ ولماذا؟ إذا علمت أن الزاوية بين حافّتَي السقف قائمة. **نعم؛ لأن مجموع قياسي الزاويتين $90°$**

5) **بنايات:** ينظرعبد الله إلى بناية من النقطة E.وكان قياس $\angle AEC$ مساويًا لقياس $\angle BED$.



a) ما الزاوية التي يُضاف قياسها إلى قياس $\angle AEB$ ؛ لتكون النتيجة قياس $\angle AEC$؟ **$\angle BEC$**

b) ما الزاوية التي يُضاف قياسها إلى قياس $\angle CED$ ؛ لتكون النتيجة قياس $\angle BED$؟ **$\angle BEC$**

c) قارن بين $m\angle AEB$ وَ $m\angle CED$، وبرِّر إجابتك **متساويان؛ لأن $m\angle BED = m\angle AEC$ مُعطى، وباستعمال خاصية الطرح للمساواة:**
$m\angle BED - m\angle BEC = m\angle AEC - m\angle BEC$ ؛ أي $m\angle AEB = m\angle CED$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 8 - 1

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (45) ضمن فوق

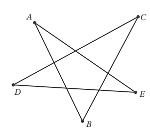
الاسم ________ التاريخ ________

1-8 التدريبات الإثرائية

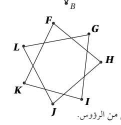
نجوم:
هناك أنواع عديدة من النجوم، بعضها له 5 رؤوس أو 6 رؤوس أو 7 رؤوس أو أكثر، ويعتمد مجموع قياسات زوايا النجوم على عدد رؤوسها.

ويمكن إيجاد مجموع قياسات زوايا النجوم بتطبيق:

A) قاعدة مجموع قياس الزوايا الخارجية للمضلع (المضلع داخل النجمة) يساوي $360°$ وتطبيقها مرتين.
B) قاعدة مجموع زوايا المثلث $180°$



1) أوجد مجموع قياسات زوايا رؤوس النجمة الخماسية. **$180°$**



2) أوجد مجموع قياسات زوايا رؤوس النجمة السُّباعية. **$540°$**

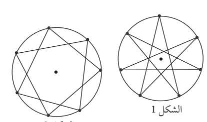
3) أكمل الجدول الذي يُعطي مجموع قياسات زوايا رؤوس النجمة ذات العدد المُعطى من الرؤوس.

عدد الرؤوس	5	7	9
مجموع قياسات الزوايا	$180°$	$540°$	$900°$

4) كوّن تخميناً لصيغة حساب مجموع قياسات زوايا رؤوس النجمة ذات n من الرؤوس، وأوجد هذه الصيغة مستعملاً مجموع قياسات زوايا رؤوس نجمة ذات 12 رأسًا.

مجموع قياسات الزوايا $= 180°(n-4)$؛ $1440°$

5) استعمل الشكلين المُجاورين والقياس؛
لتحديد ما إذا كان القانون صحيحًا دائمًا. برّر إجابتك.
ليس دائمًا. إجابة ممكنة: تكون الصيغة صحيحة فقط إذا كان كل رأس من رؤوس النجمة رأسًا لمثلث واحد فقط من الرسم.



الشكل 1　الشكل 2

الصف: الأول الثانوي　45　الفصل 1: التبرير والبرهان

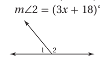
كتاب التمارين (13) دون ضمن فوق

الفصل الأول　التبرير والبرهان

8 - 1 إثبات علاقات بين الزوايا

أوجد قياس الزوايا المرقّمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرِّر حلَّك :

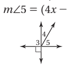
1) $m\angle 1 = (x + 10)°$
$m\angle 2 = (3x + 18)°$



$m\angle 1 = 48°$, $m\angle 2 = 132°$

نظرية الزاويتين المتكاملتين

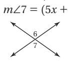
2) $m\angle 4 = (2x - 5)°$
$m\angle 5 = (4x - 13)°$



$m\angle 3 = 90°$, $m\angle 4 = 31°$, $m\angle 5 = 59°$

نظرية الزاويتين المتتامتين ونظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

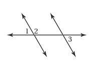
3) $m\angle 6 = (7x - 24)°$
$m\angle 7 = (5x + 14)°$



$m\angle 6 = 109°$, $m\angle 7 = 109°$

نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

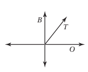
4) اكتب برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم.
$\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان .



المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 3$

العبارات	المبررات
1) $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان.	1) معطيات
2) $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان.	2) نظرية الزاويتين المتكاملتين
3) $\angle 1 \cong \angle 3$	3) نظرية تطابق المكملات.

5) طرق: بالرجوع إلى الشكل المجاور. يشكِّل الطريقان O و B زاوية قائمة.
ويشكل الطريق T مع طريق O زاوية قياسها $57°$.
ما قياس الزاوية التي يشكلها الطريق T مع الطريق B ؟ **$33°$**



13

التقويم التكويني

المفردات الأساسية: يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرة. فإذا واجه بعض الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 10-1، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (14) .

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

التبرير الاستقرائي والمنطق (الدرسان 1-1 و 1-2)

- التبرير الاستقرائي: تبرير تُستعمل فيه أمثلة وأنماط محددة للوصول إلى نتيجة.
- المثال المضاد: هو المثال الذي يُثبت عدم صحة التخمين.
- نفي العبارة p: ليس p أو $\sim p$
- عبارة الوصل: عبارة مركبة تحوي (و)
- عبارة الفَصل: عبارة مركبة تحوي (أو)

العبارات الشرطية (الدرس 1-3)

- يمكن كتابة العبارة الشرطية على الصورة (إذا... فإن...) أو على الصورة إذا كان p، فإن q، حيث p الفرض، و q النتيجة.

العبارة الشرطية	$p \to q$
العكس	$q \to p$
المعكوس	$\sim p \to \sim q$
المعاكس الإيجابي	$\sim q \to \sim p$

التبرير الاستنتاجي (الدرس 1-4)

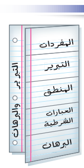
- قانون الفَصل المنطقي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \to q$ صائبة، وكانت p صائبة أيضًا ، فإن q صائبة.
- قانون القياس المنطقي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \to q$ صائبة، وكانت $q \to r$ صائبة، فإن $p \to r$ صائبة أيضًا.

البرهان (الدروس من 1-5 إلى 1-8)

- الخطوة 1: اكتب المعطيات، وارسم شكلًا يوضحها إن أمكن.
- الخطوة 2: اكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.
- الخطوة 3: استعمل التبرير الاستنتاجي لتكوين سلسلة منطقية من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.
- الخطوة 4: برّر كل عبارة مستعملًا تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.
- الخطوة 5: اكتب العبارة أو التخمين الذي قمت بإثباته.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.



المفردات الأساسية

التخمين (ص. 12)
التبرير الاستقرائي (ص. 12)
المثال المضاد (ص. 15)
قيمة الصواب (ص. 19)
العبارة المركبة (ص. 19)
نفي العبارة (ص. 19)
العبارة (ص. 19)
عبارة الوصل (ص. 19)
عبارة الفَصل (ص. 20)
جدول الصواب (ص. 21)
النتيجة (ص. 26)
العبارة الشرطية (ص. 26)
الفَرض (ص. 26)
المعاكس الإيجابي (ص. 29)
العكس (ص. 29)
المعكوس (ص. 29)
العبارات الشرطية المرتبطة (ص. 29)
التكافؤ المنطقي (ص. 29)
التبرير الاستنتاجي (ص. 37)
قانون الفصل المنطقي (ص.37)
قانون القياس المنطقي (ص.39)
المسلّمة (ص.45)
البرهان (ص. 46)
البرهان الحر (ص. 47)
النظرية (ص. 47)
البرهان الجبري (ص. 53)
البرهان ذو العمودين (ص. 54)

اختبار المفردات

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) المسلّمة هي العبارة التي تحتاج إلى برهان. خاطئة؛ النظرية
2) الجزء الأول في العبارة الشرطية يسمى تخمينًا. خاطئة؛ الفرض
3) يستعمل التبرير الاستنتاجي قوانين ونظريات للوصول إلى نتائج منطقية من العبارات المعطاة. صحيحة
4) ينتج المعاكس الإيجابي عن نفي الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية. خاطئة؛ المعكوس
5) تتكون عبارة الوصل المنطقي من ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (و). صحيحة
6) النظرية يُسلّم بصحتها دائمًا. خاطئة؛ المسلّمة
7) ينتج العكس بتبديل الفرض مع النتيجة في العبارة الشرطية. صحيحة
8) لإثبات أن التخمين خاطئ، يجب أن يُعطي برهان. خاطئة؛ مثال مضاد
9) يمكن أن يكتب معكوس العبارة p ، على صورة ليس p. خاطئة؛ نفي
10) في البرهان ذي العمودين الخصائص التي تبرر كل خطوة تسمى المبررات. صحيحة

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يُبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

1-1 التبرير الاستقرائي والتخمين (ص 18-12)

حدد ما إذا كان أيٌّ من التخمينين الآتيين صحيحًا أو خاطئًا، وإذا كان التخمين خاطئًا، فأعطِ مثالًا مضادًّا.

11) إذا كانت $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتين، فإنهما متجاورتان على مستقيم.
خاطئة؛ قد تكون الزاويتان المتكاملتان غير متجاورتين على مستقيم.

12) إذا أعطيت النقاط $W(-3, 2), X(-3, 7), Y(6, 7), Z(6, 2)$، فإن الشكل الرباعي $WXYZ$ مستطيل. صحيحة

13) **منازل:** معظم أسطح المنازل في البلدان القريبة من القطب الشمالي تكون مائلة، بينما تكون مستوية في المناطق الحارة. أعط تخمينًا عن سبب اختلاف الأسطح. انظر الهامش.

مثال 1

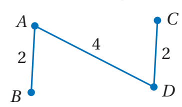
حدد ما إذا كان أيٌّ من التخمينين الآتيين صحيحًا أو خاطئًا، وإذا كان خاطئًا، فأعطِ مثالًا مضادًّا.

a) $c = d, d = c$ هو مثال على خاصية من خصائص الأعداد الحقيقية.

$c = d, d = c$ هو مثال على خاصية التماثل في الأعداد الحقيقية. وهذا التخمين صحيح.

b) إذا كان $AB + CD = AD$، فإن B و C تقعان بين A و D

هذا التخمين خاطئ. في الشكل أدناه $AB + CD = AD$، ولكن B و C لا تقعان بين A و D



1-2 المنطق (ص 25-19)

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسّر تبريرك. 14–16) انظر الهامش.

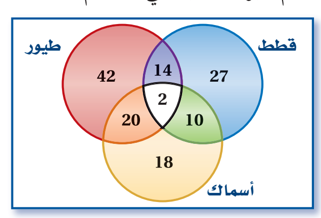
p: يحوي المستوى ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

q: الياردة المربعة تكافئ ثلاث أقدام مربعة.

r: مجموع قياسَي الزاويتين المتتامتين يساوي $180°$.

14) $\sim q \vee r$ 15) $p \wedge \sim r$ 16) $\sim p \vee q$

17) **حيوانات أليفة:** شكل ڤن الآتي يُظهر عدد الأشخاص الذين لديهم حيوانات أليفة في منازلهم.



a) ما عدد الأشخاص الذين لديهم أسماك فقط؟ 18

b) ما عدد الأشخاص الذين لديهم قطط وطيور فقط؟ 14

c) ما عدد الأشخاص الذين لديهم طيور وأسماك؟ 22

مثال 2

استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسّر تبريرك.

p: x^2 عدد غير سالب.

q: الزوايا المتجاورة لها ضلع مشترك.

r: العدد السالب ليس عددًا حقيقيًّا.

a) $\sim q \wedge r$

$\sim q \wedge r$: الزوايا المتجاورة لها ضلع مشترك، والعدد السالب ليس عددًا حقيقيًّا.

بما أن كلًّا من $\sim q$ و r خاطئتان، فإن $\sim q \wedge r$ خاطئة أيضًا.

b) p أو r

p أو r: x^2 عدد غير سالب، أو العدد السالب ليس عددًا حقيقيًّا.

p أو r صائبة؛ لأن p صائبة، وليس لكون r خاطئة تأثير.

مراجعة الدروس

مراجعة: إذا لم تكن الأمثلة المعطاة كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلُّهم على أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات:

13) إجابة ممكنة: حتى لا تتراكم عليها الثلوج.

14) الياردة المربعة لا تكافئ ثلاث أقدام مربعة، أو مجموع قياسَي الزاويتين المتتامتين يساوي $180°$؛ صحيحة.

15) يحوي المستوى ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة، ومجموع قياسَي الزاويتين المتتامتين لا يساوي $180°$؛ صحيحة.

16) لا يحوي المستوى أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة، أو الياردة المربعة تكافئ ثلاث أقدام مربعة؛ خاطئة.

1-3 العبارات الشرطية (ص 35-26)

حدد قيمة الصواب للعبارتين الشرطيتين الآتيتين، وإذا كانت العبارة صائبة، ففسّر تبريرك، أما إذا كانت خاطئة فأعطِ مثالًا مضادًا.

18) إذا ربَّعت العدد الصحيح، فإن الناتج يكون عددًا صحيحًا موجبًا. صائبة

19) إذا كان للشكل السداسي ثمانية أضلاع، فإن جميع زواياه تكون منفرجة. صائبة

20) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الصائبة الآتية. ثم حدد ما إذا كانت أيٌّ منها صائبة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًا. انظر الهامش.

إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإن لهما القياس نفسه.

مثال 3

اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الصائبة الآتية:

إذا كان الشكل مربعًا فإنه متوازي أضلاع.

العكس: إذا كان الشكل متوازي أضلاع، فإنه مربع.

المعكوس: إذا لم يكن الشكل مربعًا، فإنه ليس متوازي أضلاع.

المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن الشكل متوازي أضلاع، فإنه ليس مربعًا.

1-4 التبرير الاستنتاجي (ص 44-37)

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسر تبريرك. 23–21) انظر الهامش.

21) **المعطيات:** إذا نصّف قطرا الشكل الرباعي كلٌّ منهما الآخر، فإن الشكل متوازي أضلاع.

ينصف قطرا الشكل الرباعي $PQRS$ كلٌّ منهما الآخر.

22) **المعطيات:** إذا واجهت عائشة صعوبة في مادة العلوم، فإنها ستخصص وقتًا إضافيًّا لدراسة المادة.

إذا لم تذهب عائشة للسوق، فإنها ستخصص وقتًا إضافيًّا لدراسة مادة العلوم.

23) **زلازل:** حدد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا فيما يأتي، اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

المعطيات: إذا كانت قوة الزلزال 7.0 درجات فأكثر على مقياس ريختر، فإنه يُعتبر زلزالًا مدمرًا، ويحدث دمارًا وخرابًا كبيرين.

كانت قوة زلزال سان فرانسيسكو عام 1906م 8.0 درجات على مقياس ريختر.

نتيجة: كان زلزال سان فرانسيسكو عام 1906م زلزالًا مدمرًا، وأحدث دمارًا وخرابًا كبيرين.

مثال 4

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. وإذا تعذر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". فسر تبريرك.

(1) إذا كان قياس الزاوية أكبر من °90، فإنها منفرجة.

(2) إذا كانت الزاوية منفرجة، فإنها ليست قائمة.

p: قياس الزاوية أكبر من °90

q: الزاوية منفرجة

r: الزاوية ليست قائمة

العبارة (1): $p \rightarrow q$

العبارة (2): $q \rightarrow r$

بما أن العبارتين الشرطيتين (1)، (2) صائبتان، فإنه يمكن استنتاج أن $p \rightarrow r$؛ باستعمال قانون القياس المنطقي؛ أي أنه إذا كان قياس الزاوية أكبر من °90، فإنها ليست قائمة.

إجابات:

20) العكس: إذا كان لزاويتين القياس نفسه، فإنهما تكونان متطابقتين؛ صحيحة.
المعكوس: إذا لم تكن الزاويتان متطابقتين، فلا يكون لهما القياس نفسه؛ صحيحة.
المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن للزاويتين القياس نفسه، فإنهما لا تكونان متطابقتين؛ صحيحة.

21) الشكل $PQRS$ متوازي أضلاع، قانون الفَصْل المنطقي.

22) لا نتيجة؛ لأن قانون القياس المنطقي لا ينطبق، فنتيجة العبارة الأولى ليست فَرضًا للعبارة الثانية.

23) صحيحة؛ قانون الفَصْل المنطقي.

1-5 المسلّمات والبراهين الحرة (ص 51-45)

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسر تبريرك. **27–24) انظر الهامش.**

24) يتقاطع المستويان في نقطة.

25) تقع ثلاث نقاط في أكثر من مستوى.

26) إذا وقع المستقيم m في المستوى X، ومرّ المستقيم m بالنقطة Q، فإن النقطة Q تقع في المستوى X.

27) إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإنهما تكوّنان زاوية قائمة.

28) **عمل:** دُعي ستة أشخاص لحضور اجتماع عمل. إذا صافَح كل شخص بقية الأشخاص، فما عدد المصافحات التي تبادلها هؤلاء الأشخاص جميعًا؟ ارسم نموذجًا يؤيد تخمينك. **انظر الهامش.**

مثال 5

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. فسر تبريرك.

a) **إذا وقعت النقاط X, Y, Z في المستوى $\mathcal{R}$ فإن هذه النقاط لا تقع على استقامة واحدة.**

صحيحة أحيانًا؛ الحقيقة المعطاة هي أن X, Y, Z تقع في المستوى $\mathcal{R}$ لا تضمن وقوعها على استقامة واحدة أو لا.

b) **يمر مستقيم واحد فقط بالنقطتين A و B.**

صحيحة دائمًا؛ بتطبيق المسلمة 1.1، يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطتين معلومتين.

1-6 البرهان الجبري (ص 59-53)

اذكر الخاصية التي تبرر كل عبارة مما يأتي:

29) إذا كان $35 = 7(x-3)$، فإن $7(x-3) = 35$ **خاصية التماثل للمساواة**

30) إذا كان $2x + 19 = 27$، فإن $2x = 8$ **خاصية الطرح للمساواة**

31) $5(3x+1) = 15x + 5$ **خاصية التوزيع**

32) إذا كان $2x + 8 = 12$ و $3y = 2x + 8$، فإن $3y = 12$. **خاصية التعدي للمساواة**

33) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $6(x-4) = 42$

المطلوب: $x = 11$

العبارات	المبررات
a) $6(x-4) = 42$	a) ؟ **معطيات**
b) $6x - 24 = 42$	b) ؟ **خاصية التوزيع**
c) $6x = 66$	c) ؟ **خاصية الجمع للمساواة**
d) $x = 11$	d) ؟ **خاصية القسمة للمساواة**

34) اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كان $PQ = RS$ و $PQ = 5x + 9$ ، $RS = x - 31$، فإن $x = -10$. **انظر الهامش.**

35) **اختبارات:** حصل أحمد على درجة مساوية لدرجة عمر في اختبار الرياضيات، وحصل عمر على درجة مساوية لدرجة سعد. ما الخاصية التي تثبت أن أحمد وسعدًا حصلا على الدرجة نفسها؟ **خاصية التعدي**

مثال 6

أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $\frac{5x-3}{6} = 2x + 1$

المطلوب: $x = -\frac{9}{7}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\frac{5x-3}{6} = 2x + 1$	1) معطيات
2) $5x - 3 = 6(2x+1)$	2) خاصية الضرب للمساواة
3) $5x - 3 = 12x + 6$	3) خاصية التوزيع
4) $-3 = 7x + 6$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $-9 = 7x$	5) خاصية الطرح للمساواة
6) $-\frac{9}{7} = x$	6) خاصية القسمة للمساواة
7) $x = -\frac{9}{7}$	7) خاصية التماثل للمساواة

إجابات:

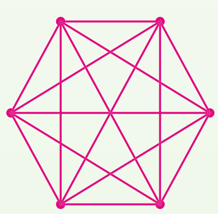
24) غير صحيحة أبدًا، إذا تقاطع مستويان فإن تقاطعهما يكون مستقيمًا.

25) صحيحة أحيانًا، إذا كانت النقاط الثلاث تقع على استقامة واحدة، فإنها ستقع في عدة مستويات، ولكن إذا لم تكن على استقامة واحدة، فستقع في مستوىً واحدٍ فقط.

26) صحيحة دائمًا، إذا احتوى المستوى على مستقيم، فإن جميع نقاط المستقيم تقع في هذا المستوى.

27) صحيحة أحيانًا، إذا كانت الزاويتان متجاورتين، فإنهما تكوّنان زاوية قائمة، أما إذا لم تكونا متجاورتين، فلا تكونان زاوية قائمة.

28) 15 مصافحة.



34) **المعطيات:** $PQ = RS,$
$PQ = 5x+9$
$RS = x - 31,$

المطلوب: $x = -10$

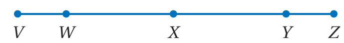
العبارات	المبررات
1) $PQ = RS,$ $PQ = 5x + 9,$ $RS = x - 31$	1) معطيات
2) $5x + 9 = x - 31$	2) بالتعويض
3) $4x + 9 = -31$	3) خاصية الطرح للمساواة
4) $4x = -40$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $x = -10$	5) خاصية القسمة للمساواة

1-7 إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة (ص 60-65)

اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ من المسألتين الآتيتين:

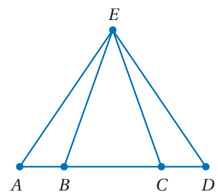
36) **المعطيات:** X نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{WY}$ و $\overline{VZ}$

المطلوب: $VW = ZY$ انظر الهامش (36, 37



37) **المعطيات:** $AB = DC$

المطلوب: $AC = DB$



38) **جغرافيا:** أراد طارق السفر من مدينة جدة إلى الطائف، مرورًا بمكة المكرمة لاصطحاب أخيه. ويعلم أن المسافة من جدة إلى مكة المكرمة تساوي 79 km، والمسافة من مكة المكرمة إلى الطائف تساوي 88 km، استنتج أنه سيقطع 167 km في هذه الرحلة. فسر كيف استنتج ذلك؟ افترض أن الطريق الذي يربط هذه المدن الثلاث يشكل مستقيمًا. استعمل مسلمة جمع قياسات القطع المستقيمة.

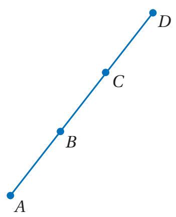
مثال 7

اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: B نقطة منتصف $\overline{AC}$

C نقطة منتصف $\overline{BD}$

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

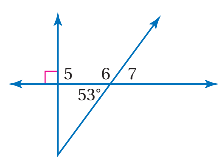


البرهان:

العبارات	المبررات
1) B نقطة منتصف $\overline{AC}$	1) معطيات
2) $AB \cong BC$	2) نظرية نقطة المنتصف
3) C نقطة منتصف $\overline{BD}$	3) معطيات
4) $\overline{BC} \cong \overline{CD}$	4) نظرية نقطة المنتصف
5) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	5) خاصية التعدي للتطابق

1-8 إثبات علاقات بين الزوايا (ص 66-73)

أوجد قياس كل زاوية فيما يأتي:



39) $\angle 5$ $90°$

40) $\angle 6$ $127°$

41) $\angle 7$ $53°$

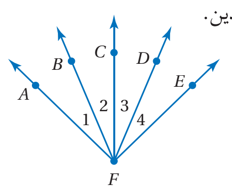
42) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 4,$

$\angle 2 \cong \angle 3$

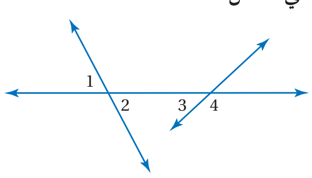
المطلوب: $\angle AFC \cong \angle EFC$

انظر الهامش.



مثال 8

إذا علمت أن: $m\angle 1 = 72°$ ، $m\angle 3 = 26°$ ، فأوجد قياس كل زاوية مرقمة في الشكل أدناه.



$m\angle 2 = 72°$؛ لأن $\angle 1, \angle 2$ متقابلتان بالرأس.

$\angle 3, \angle 4$ متجاورتان على مستقيم؛ إذن فهما متكاملتان.

$26° + m\angle 4 = 180°$ تعريف الزاويتين المتكاملتين

$m\angle 4 = 154°$ بطرح 26 من كلا الطرفين

دليل التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 1 ص(8)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

36)

العبارات	المبررات
1) X نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{WY}$ و $\overline{VZ}$	معطيات
2) $\overline{VX} \cong \overline{ZX}$ و $\overline{WX} \cong \overline{YX}$	تعريف نقطة المنتصف
3) $WX = YX, VX = ZX$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
4) $VX = VW + WX,$ $ZX = ZY + YX$	مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
5) $VW + WX = ZY + YX$	بالتعويض
6) $VW + WX = ZY + WX$	بالتعويض
7) $VW = ZY$	خاصية الطرح للمساواة

37)

العبارات	المبررات
1) $AB = DC$	معطيات
2) $AB + BC = DC + BC$	خاصية الجمع للمساواة
3) $AB + BC = AC,$ $DC + BC = DB$	مسلّمة جمع القطع المستقيمة
4) $AC = DB$	بالتعويض

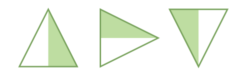
42)

العبارات	المبررات
1) $\angle 1 \cong \angle 4, \angle 2 \cong \angle 3$	معطيات
2) $m\angle 1 = m\angle 4, m\angle 2 = m\angle 3$	تعريف تطابق الزوايا
3) $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4 + m\angle 2$	خاصية الجمع للمساواة
4) $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4 + m\angle 3$	خاصية التعويض للمساواة
5) $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle AFC$ $m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle EFC$	مسلمة جميع قياسات الزوايا
6) $m\angle AFC = m\angle EFC$	بالتعويض
7) $\angle AFC \cong \angle EFC$	تعريف تطابق الزوايا

اكتب تخمينًا يصف النمط في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين، ثم استعمله لإيجاد الحد التالي في كلٍّ منهما. **1, 2)** انظر الهامش.

1) 15, 30, 45, 60, ...

2) ......



استعمل العبارات p, q, r لكتابة كل عبارة وصل أو فصل أدناه، ثم أوجد قيمة الصواب لها. فسِّر إجابتك.

p: $5 < -3$

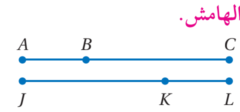
q: جميع الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

r: إذا كان $4x = 36$، فإن $x = 9$.

3) p و q **3, 4)** انظر الهامش.

4) $(p \vee q) \wedge r$

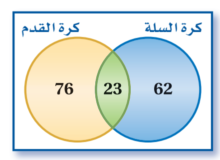
5) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا. انظر الهامش.



المعطيات: $\overline{JK} \cong \overline{CB}$, $\overline{KL} \cong \overline{AB}$

المطلوب: $\overline{JL} \cong \overline{AC}$

6) **رياضة:** استعمل شكل ڤن الآتي الذي يبين نوع الرياضة التي اختارها الطلاب للإجابة عن السؤالين أدناه.



a) صف اختيار الطلاب الذين هم خارج منطقة التقاطع وداخل دائرة كرة السلة. اختار هؤلاء الطلاب كرة السلة فقط.

b) ما عدد الطلاب الذين اختاروا كرة السلة وكرة القدم؟ 23

7) حدّد ما إذا كانت النتيجة صائبة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

المعطيات: • إذا اجتاز الطبيب اختبار المجلس الطبي، فإنه يستطيع مزاولة مهنة الطب.

• اجتاز فهد اختبار المجلس الطبي.

النتيجة: يمكن أن يزاول فهد مهنة الطب.

صحيحة؛ قانون الفصل المنطقي

8) **برهان:** أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $3(x-4) = 2x + 7$

المطلوب: $x = 19$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) $3(x-4) = 2x + 7$	a) معطيات
b) $3x - 12 = 2x + 7$	b) ؟ خاصية التوزيع
c) ؟ $x - 12 = 7$	c) خاصية الطرح للمساواة
d) $x = 19$	d) ؟ خاصية الجمع للمساواة

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا.

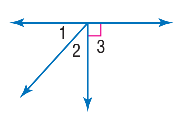
9) الزاويتان المتكاملتان تكونان متجاورتين على مستقيم. صحيحة أحيانًا

10) إذا وقعت B بين A و C، فإن $AC + AB = BC$. غير صحيحة أبدًا

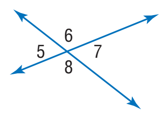
11) إذا تقاطع مستقيمان وكوَّنا زاويتين متطابقتين متجاورتين، فإنهما متعامدان. صحيحة دائمًا

أوجد قياس جميع الزوايا المرقّمة في كلٍّ مما يأتي، واذكر النظريات التي تبرر حلك. **12, 13)** انظر الهامش.

12) $m\angle 1 = x°$, $m\angle 2 = (x-6)°$



13) $m\angle 7 = (2x + 15)°$, $m\angle 8 = (3x)°$



اكتب كلًّا من العبارتين الشرطيتين الآتيتين على صورة (إذا... فإن...). **14, 15)** انظر الهامش.

14) قياس الزاوية الحادة أقل من $90°$

15) يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكوِّنا زوايا قائمة.

16) **اختيار من متعدد:** أيُّ العبارات الآتية هي المعاكس الإيجابي للعبارة الآتية؟ C

إذا احتوى المثلث على زاوية منفرجة واحدة، فإنه مثلث منفرج الزاوية.

A إذا لم يكن المثلث منفرج الزاوية، فإنه يحتوي على زاوية منفرجة واحدة.

B إذا لم يكن في المثلث زاوية منفرجة واحدة، فإنه ليس مثلثًا منفرج الزاوية.

C إذا لم يكن المثلث منفرج الزاوية، فإنه لا يحتوي على زاوية منفرجة واحدة.

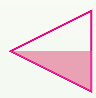
D إذا كان المثلث منفرج الزاوية، فإنه يحتوي على زاوية منفرجة واحدة.

المعالجة: استعمل نتائج اختبار الفصل ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. العبارة "إذا... فاختر..." في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصدر لكل مستوى.

إجابات:

1) الحد التالي هو المضاعف التالي للعدد 15؛ 75.

2) يدوّر المثلث $90°$ في اتجاه عقارب الساعة في كل مرةٍ. وتتبدل المنطقة المظللة بين نصفَي المثلث كل مرةٍ.



3) جميع الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة وَ $5 < -3$

بما أن $5 < -3$ خاطئة إذن عبارة الوصل خاطئة.

4) $-3 < 5$ أو جميع الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

وإذا كان $4x = 36$ فإن $x = 9$؛ بما أن q صائبة، إذن عبارة الفصل $p \vee q$ صائبة وَ r صحيحة إذن عبارة الوصل $(p \vee q) \wedge r$ صائبة.

5) البرهان: بما أن $\overline{JK} \cong \overline{CB}$ و $\overline{KL} \cong \overline{AB}$، فإن $JK = CB$ و $KL = AB$، وذلك بتعريف تطابق القطع المستقيمة. وبتطبيق خاصية الجمع للمساواة $JK + KL = CB + KL$. وبتطبيق خاصية التعويض للمساواة يكون: $JK+KL=CB+AB$ وباستعمال مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة، ينتج أن $JL = JK + KL$ و $AC = AB + BC$. وبالتعويض $JL = AC$. ومن تعريف تطابق القطع المستقيمة فإن $\overline{JL} \cong \overline{AC}$.

12) $m\angle 1 = 48°$, $m\angle 2 = 42°$؛ نظرية الزاويتين المتتامتين، $m\angle 3 = 90°$؛ معطيات.

13) $m\angle 7 = 81°$, $m\angle 8 = 99°$؛ نظرية الزاويتين المتكاملتين؛ $m\angle 5 = 81°$، $m\angle 6 = 99°$ نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس.

14) إذا كانت الزاوية حادة، فإن قياسها أقل من $90°$

15) إذا تعامد مستقيمان، فإنهما يكوِّنان زوايا قائمة.

مخطط المعالجة

	المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	أحد المصدرين الآتيين:
	الدروس: 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 1-7, 1-8	تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41)
	تدريبات المهارات، ص (8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43)	www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com	

الفصل 1 الإعداد للاختبارات

1 التركيز

الهدف: فهم الأدوات الأساسية للتبرير المنطقي، واستعمالها لحل المسائل.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- كيف يمكن استعمال المثال المضاد لحل المسألة؟
- ما الطرائق المختلفة التي يمكننا بواسطتها تمثيل المعلومات المعطاة في السؤال؟
- ما نوعا التبرير المُستعمَلان في كتابة البراهين؟

التبرير المنطقي

أحيانًا كثيرة يتطلب حل مسائل الهندسة استعمال التبريرات المنطقية؛ لذا يمكنك استعمال أساسيات التبرير المنطقي في حل مسائل الاختبارات المعيارية.

استراتيجيات استعمال التبرير المنطقي

الخطوة 1

اقرأ المسألة لتحدد المعطيات، وما يجب أن تجده للإجابة عن السؤال.

الخطوة 2

حدّد هل بإمكانك تطبيق أحد مبادئ التبرير المنطقي في هذه المسألة.

- **المثال المضاد:** المثال المضاد هو المثال الذي يناقض عبارة يُفترض أنها صائبة. حدّد بدائل الإجابة التي تراها مناقضةً لنص المسألة واحذفها.
- **المسلّمات:** المسلّمة هي عبارة تصف علاقة أساسية في الهندسة. حدّد هل بإمكانك تطبيق مسلّمة للتوصل إلى نتيجةٍ منطقيةٍ.

الخطوة 3

إذا لم تصل إلى أي نتيجة من مبادئ الخطوة 2،

فحدد ما إذا كانت الأدوات الآتية تساعدك على الحل أم لا.

- **الأنماط:** ابحث عن نمط لعمل تخمينٍ مناسبٍ.
- **جداول الصواب:** استعمل جدول صواب لتنظيم قيم الصواب للعبارات المعطاة في المسألة.
- **أشكال ڤن:** استعمل أشكال ڤن لتمثيل العلاقات بين عناصر المجموعات بوضوح.
- **البراهين:** استعمل التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي للوصول إلى نتيجةٍ على شكل برهانٍ.

الخطوة 4

إذا لم يكن بإمكانك الوصول إلى نتيجة حتى باستعمال مبادئ الخطوة 3، فخمِّن بديل الإجابة الأنسب، ثم ضع علامة على السؤال حتى ترجع إليه إذا بقي متسعٌ من الوقت في نهاية الاختبار.

مثال

اقرأ المسألة جيدًا، وحدد المطلوب فيها. ثم استعمل المعطيات لحلها.

عدد طلاب مدرسة 292 طالبًا، شارك 94 منهم في الألعاب الرياضية، و 122 في النوادي الثقافية، و 31 في كليهما. كم طالبًا لم يشارك في الألعاب الرياضية أو في النوادي الثقافية؟

A 95 **C** 122

B 107 **D** 138

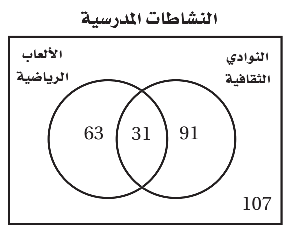
اقرأ المسألة جيدًا. من الواضح أنه ليس هناك أمثلة مضادة واضحة، ولا يمكن استعمال المسلمات للوصول إلى نتيجة منطقية؛ إذن علينا استعمال أدوات لتنظيم المعلومات المعطاة؛ لنراها بوضوح.

يمكننا رسم شكل ڤن لنرى التقاطع بين المجموعتين، وتحديد معطيات السؤال على هذا الشكل.

حدد عدد الطلاب الذين شاركوا في الألعاب الرياضية أو في النوادي الثقافية فقط.

الألعاب الرياضية فقط: $94 - 31 = 63$

النوادي الثقافية فقط: $122 - 31 = 91$



استعمل هذه المعلومات لحساب عدد الطلاب الذين لم يشاركوا في الألعاب الرياضية ولا في النوادي الثقافية.

$292 - 63 - 91 - 31 = 107$

إذن عدد الطلاب الذين لم يشاركوا في الألعاب الرياضية ولا في النوادي الثقافية يساوي107 طلابٍ. وعليه فالإجابة الصحيحة هي B.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال مما يأتي. ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة.

1) حدد قيمة الصواب للعبارة الآتية. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًّا. D

ناتج ضرب عددين زوجيين هو عدد زوجي.

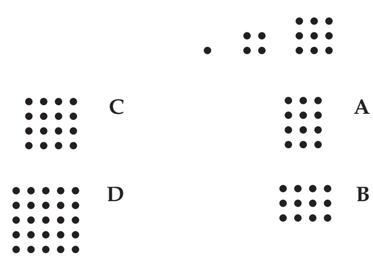
A خاطئة؛ $8 \times 4 = 32$

B خاطئة؛ $7 \times 6 = 42$

C خاطئة؛ $3 \times 10 = 30$

D صحيحة

2) أوجد الحد التالي في النمط أدناه. C



مثال إضافي

مدرسة عدد طلابها 367 طالبًا، يمتلك 185 طالبًا منهم جهاز حاسوب، ويمتلك 163 طالبًا منهم درّاجة، ويمتلك 97 منهم حاسوبًا ودراجة. ما عدد الذين لا يمتلكون حاسوبًا أو دراجةً من بين طلاب المدرسة؟ B

A 8

B 116

C 270

D 348

3 التقويم

استعمل التمرينين 1 و 2؛ للتحقق من فهم الطلاب.

81 الفصل 1 الإعداد للاختبارات

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصائبة.

1) أيُّ عبارات الوصل الآتية صائبة اعتمادًا على p و q أدناه؟ C

p: يوجد أربعة حروف في كلمة ربيع.

q: يوجد حرفا علّة في كلمة ربيع.

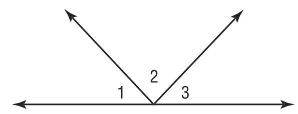
A $\sim p \wedge \sim q$

B $p \wedge q$

C $p \wedge \sim q$

D $\sim p \wedge q$

2) في الشكل الآتي $\angle 3 \cong \angle 1$. A



أيُّ الاستنتاجات الآتية صحته ليست مؤكدة؟

A $m\angle 1 - m\angle 2 + m\angle 3 = 90°$

B $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

C $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$

D $m\angle 2 - m\angle 1 = m\angle 2 - m\angle 3$

3) الزاويتان المتكاملتان تكونان متجاورتين على مستقيم دائمًا. C
أيُّ مما يأتي يعدّ مثالًا مضادًا للعبارة السابقة؟

A زاويتان غير متجاورتين

B زاويتان منفرجتان غير متجاورتين

C زاويتان قائمتان غير متجاورتين

D زاويتان متكاملتان ومتجاورتان على مستقيم

إرشادات للاختبار

السؤال 3: المثال المضاد هو المثال الذي يُعطي لإثبات أن الجملة المعطاة ليست صحيحة دائمًا.

4) أيّ العبارات أدناه تعدّ نتيجةً منطقيةً للعبارتين الآتيتين؟ B

إذا نزل المطر اليوم، فستؤجل المباراة.

ستُقام المباريات المؤجلة أيام الجمعة.

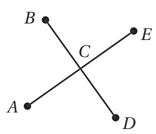
A إذا أُجّلت المباراة، فإنها تُؤجَّل بسبب المطر.

B إذا نزل المطر اليوم، فستُقام المباراة يوم الجمعة.

C لا تقام بعض المباريات المؤجلة أيام الجمعة.

D إذا لم ينزل المطر اليوم، فلن تُقام المباراة يوم الجمعة.

5) في الشكل أدناه تتقاطع $\overline{BD}$ و $\overline{AE}$ في C. أيُّ النتائج الآتية ليست صائبة؟ D



A $\angle ACB \cong \angle ECD$

B $\angle ACB$ و $\angle ACD$ متجاورتان على مستقيم.

C $\angle BCE$ و $\angle ACD$ متقابلتان بالرأس.

D $\angle BCE$ و $\angle ECD$ متتامتان.

6) **أرجوحة:** في حديقة بيت صغير ست شجرات مزروعة على شكل رؤوس سداسيٍّ منتظم. بكم طريقة يمكنك تعليق الأرجوحة وتثبيتها على شجرتين من الشجرات الستِّ؟ C

A 22 طريقة

B 12 طريقة

C 15 طريقة

D 36 طريقة

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة في كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية، مثل:

1) A $\sim p$ خاطئة.
B q خاطئة.
C صحيحة.
D $\sim p$ خاطئة.

2) A صحيحة.
B المجموع يساوي 180
C هذه خاصية التعويض.
D هذه خاصية التعويض.

3) A إذا كانت الزاويتان حادتين، فإنهما غير متكاملتين.
B إذا كانت الزاويتان منفرجتين، فإنهما غير متكاملتين.
C قد تكون الزاويتان قائمتين ومتجاورتين على مستقيم.
D صحيحة.

4) A يمكن أن تؤجل المباراة لأسباب أخرى.
B صحيحة
C تناقض العبارة الثانية.
D يمكن أن تؤجل المباراة لأسباب أخرى.

5) A تعريف الزاويتين المتقابلتين بالرأس.
B تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم.
C تعريف الزاويتين المتقابلتين بالرأس.
D صحيحة.

6) A تتضمن هذه الإجابة تكرارًا.
B ليست الإجابة 6×2 أو 12
C صحيحة.
D ليست الإجابة 6^2 أو 36

أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجاباتك في ورقة الإجابة.

7) تقع النقاط A, B, C, D على استقامة واحدة، وتقع النقطة B بين A و C وتقع النقطة C بين B و D. أكمل العبارة الآتية:

$AB + \_\_؟\_\_ = AD$ **BD**

8) يحتوي المستقيم m على النقاط D, E, F، إذا كان $DE = 12\text{ cm}$، و $EF = 15\text{ cm}$، والنقطة D بين E و F، فما طول $\overline{DF}$؟ **3cm**

9) استعمل البرهان الآتي للإجابة عن السؤال أدناه .

المعطيات: $\angle A$ هي متمِّمة $\angle B$ ، $m\angle B = 46°$

المطلوب: $m\angle A = 44°$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle A$ هي متممة $\angle B$. $m\angle B = 46°$	1) معطيات
2) $m\angle A + m\angle B = 90°$	2) تعريف الزاويتين المتتامتين
3) $m\angle A + 46° = 90°$	3) بالتعويض
4) $m\angle A + 46° - 46° = 90° - 46°$	4) __؟__
5) $m\angle A = 44°$	5) بالتبسيط.

ما التبرير الذي يفسر الخطوة 4؟ **خاصية الطرح للمساواة**

10) اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة الآتية:

إذا كان قياس الزاوية أكبر من $90°$، فإنها منفرجة.

إذا لم تكن الزاوية منفرجة، فلن يكون قياسها أكبر من $90°$

11) النقطة E منتصف $\overline{DF}$ ، إذا كانت $DE = 8x - 3$, $EF = 3x + 7$ ، فأوجد قيمة x؟ **2**

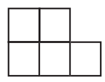
أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

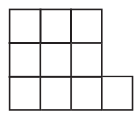
12) إليك النمط الآتي:

الشكل (1)

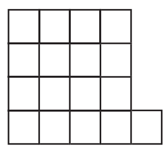
الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)



a) ضع تخمينًا لعدد المربعات في أيٍّ من أشكال النمط.

b) اكتب عبارةً جبريةً يمكن استعمالها لإيجاد عدد المربعات في الشكل رقم n من هذا النمط. **$n^2 + 1$**

c) ما عدد المربعات في الشكل السادس من هذا النمط؟ **37**

a) إجابة ممكنة: عدد مربعات كل شكل يساوي مربع رقم الشكل مضافًا إليه 1.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟												
إذا لم تستطع الإجابة عن ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
فعد إلى الدرس...	1-2	1-8	1-1	1-4	1-8	1-5	1-7	1-7	1-6	1-3	1-7	1-1

التقويم التكويني

يمكنك تحديد مدى تقدُّم الطلاب في الفصل 1 من خلال:

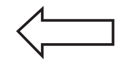
- اختبار تراكمي: ص (83–82)
- اختبار تراكمي: ص (26–24)

بديل الواجب المنزلي

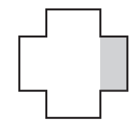
التهيئة للفصل 2: حدِّد الأسئلة ص (85) واجبًا منزليًّا؛ لتقويم مهارات الطلاب في المتطلبات السابقة للفصل القادم.

الدرس 1-1، ص (16, 17) :

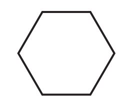
24) اتجاه السهم في النمط يدور في اتجاه حركة عقارب الساعة من الشكل إلى الشكل الذي يليه.



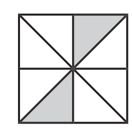
25) يتحرك الجزء المظلل في كل شكل إلى المنطقة التالية من الشكل عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.



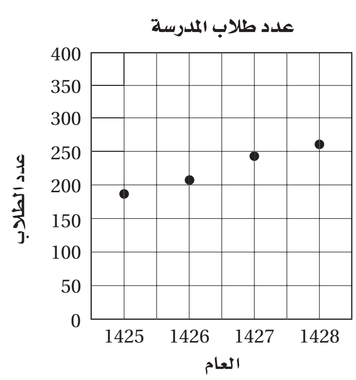
26) كل شكل في النمط مضلع منتظم، ويزداد عدد أضلاعه ضلعًا واحدًا عمّا قبله.



27) المثلث السُّفلي المظلل يتحرك في الجهة العليا اليمنى من الشكل الأول في اتجاه حركة عقارب الساعة، ويمر خلال كل مجموعة من المثلثات من شكل إلى الذي يليه.



34a)



34b) إجابة ممكنة: سيزداد عدد طلاب المدرسة في السنوات اللاحقة، ويظهر ذلك بوضوح من تزايد ارتفاع النقاط الذي يمثل عدد الطلاب في التمثيل البياني.

الدرس 1-2 (تحقق من فهمك)، ص (19-21) :

1A) الشكل مثلث، وفيه ضلعان متطابقان. كلٌّ من P و q صائب، إذن العبارة المركبة $p \wedge q$ صائبة.

1B) الشكل ليس مثلثًا، وليست جميع زوايا الشكل حادة.
نفي p عبارة خاطئة، ونفي r عبارة صائبة؛
إذن العبارة المركبة $\sim p$ ، و $\sim r$ عبارة خاطئة.

3)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

الدرس 1-2، ص (23, 24) :

11) الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية، وتوجد حدود مشتركة للمملكة العربية السعودية مع العراق. r و p صائبة؛ لأن P صائبة، و r صائبة.

12) الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية، ومكة المكرمة تقع على الخليج العربي. $p \wedge q$ خاطئة؛ لأن p صائبة، و q خاطئة.

13) المملكة العربية السعودية ليس لها حدود مشتركة مع العراق، أو المملكة العربية السعودية تقع غربي البحر الأحمر.
$\sim r \vee s$ خاطئة؛ لأن $\sim r$ خاطئة، و s خاطئة.

14) المملكة العربية السعودية لها حدود مشتركة مع العراق، أو مكة المكرمة تقع على الخليج العربي.
$r \vee q$ صائبة؛ لأن r صائبة، و q خاطئة.

15) الرياض ليست عاصمة المملكة العربية السعودية، والمملكة العربية السعودية ليس لها حدود مشتركة مع العراق.
$\sim p$ و $\sim r$ خاطئة؛ لأن $\sim p$ خاطئة، و $\sim r$ خاطئة.

16) المملكة العربية السعودية لا تقع غربي البحر الأحمر، أو الرياض ليست عاصمة المملكة العربية السعودية.
$\sim s \vee \sim p$ صائبة؛ لأن $\sim s$ صائبة، و $\sim p$ خاطئة.

18)

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F

19)

r	q	$\sim r$	$\sim r \wedge q$	$\sim(\sim r \wedge q)$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

الفصل 1 ملحق الإجابات

(20

p	r	$\sim p$	$\sim p \wedge r$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

23) إذا كانت p, q صائبتين، فإن $p \wedge (q \wedge r)$ صائبة، عندما تكون r صائبة، وخاطئة عندما تكون r خاطئة.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

24) إذا كانت p ،r صائبتين، فإن$p \wedge (\sim q \vee r)$ صائبة بغض النظر عن كون q صائبة أم خاطئة.

p	q	$\sim q$	r	$\sim q \vee r$	$p \wedge (\sim q \vee r)$
T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	F
F	F	T	F	T	F

25) إذا كانت q و r صائبتين، فإن $(\sim p \vee q) \wedge r$ صائبة بغض النظر عن كون p صائبة أم خاطئة.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	r	$(\sim p \vee q) \wedge r$
T	T	F	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F

26) صائبة

p	q	$\sim q$	r	$\sim r$	$\sim q \wedge \sim r$	$p \vee (\sim q \wedge \sim r)$
T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F
F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T

27) خاطئة

p	$\sim p$	q	$\sim q$	r	$\sim r$	$\sim q \wedge \sim r$	$\sim p \wedge (\sim q \wedge \sim r)$
T	F	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F	F	F
F	T	F	T	F	T	T	T

28) إذا كانت q و p صائبتين، فإن $(\sim p \vee q) \vee \sim r$ صائبة بغض النظر عن كون r صائبة أم خاطئة.

p	$\sim p$	q	r	$\sim r$	$(\sim p \vee q)$	$(\sim p \vee q) \vee \sim r)$
T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	T

الدرس 1-3 (تحقق من فهمك)، ص (26) :

1A) الفَرض: للمضلع ستة أضلاع، النتيجة: المضلع سداسي.

1B) الفَرض: بِيعَت الطبعة الأولى كلها، النتيجة: ستُنجز طبعة ثانية من الكتاب.

الدرس 1-3، ص (32, 33) :

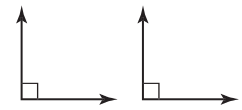
30) خاطئة؛ العدد 9 فردي، ولكنه لا يقبل القسمة على 5. وهذا المثال المضاد يُثبت أن النتيجة خاطئة، أي أن العبارة الشرطية خاطئة.

31) صائبة، الفَرض خاطئ؛ لأن الأرنب ليس حيوانًا برمائيًا، والعبارة الشرطية التي يكون فيها الفَرض خاطئًا تكون صائبةً دائمًا؛ إذن هذه العبارة الشرطية صائبة.

32) صائبة؛ الفَرض خاطئ؛ لأن جدة لا تقع في اليمن، والعبارة الشرطية التي يكون فيها الفرض خاطئًا، تكون صائبة دائمًا؛ لذا فهذه العبارة الشرطية صائبة.

33) صائبة؛ الفَرض خاطئ؛ لأن مزج اللونين الأحمر بالأزرق ينتج اللون البنفسجي. العبارة الشرطية التي يكون فيها الفرض خاطئًا، تكون صائبة دائمًا؛ لذا فالعبارة الشرطية صائبة.

34) خاطئة؛



الزاويتان متطابقتان، إلَّا أنهما غير متقابلتين بالرأس، وهذا المثال المضاد يُثبت أن النتيجة خاطئة؛ أي أن العبارة الشرطية خاطئة.

35) خاطئة؛ يمكن أن يكون الحيوان صقرًا، وهذا المثال المضاد يثبت أن النتيجة خاطئة؛ أي أن العبارة الشرطية خاطئة.

36) صائبة؛ الفَرض خاطئ؛ لأن لون الموز لا يمكن أن يكون أزرق. العبارة الشرطية التي يكون فيها الفرض خاطئًا تكون صائبة دائمًا؛ لذا فالعبارة الشرطية صائبة.

37) إذا ظهرت على جسم الحيوان خطوط، فإنه يكون حمارًا وحشيًّا. خاطئة؛ ظباء الدكدك على أجسامها خطوط.

38) إذا كان الحيوان حمارًا وحشيًّا، فإنه تظهر على جسمه خطوط؛ صائبة.

39) إذا لم تظهر على جسم الحيوان خطوط، فإنه ليس حمارًا وحشيًّا. صائبة.

40) إذا لم يكن الحيوان حمارًا وحشيًّا، فلا تظهر على جسمه خطوط؛ خاطئة. مثال مضاد. ظباء الدكدك تظهر عليها خطوط، وهي ليست حمارًا وحشيًّا.

41)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim (q \to p)$	$\sim p \to \sim q$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	T

غير متكافئتين منطقيًّا.

42)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$	$\sim (p \to q)$	$\sim (\sim q \to \sim p)$
T	T	F	F	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	F	F

التقريران متكافئان منطقيًّا.

43)

p	q	r	$p \wedge q$	$q \vee r$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	F	F	F

غير متكافئتين منطقيًّا.

44) العكس: إذا كنت تعيش في السعودية، فإنك تعيش في الدمام؛ خاطئ؛ يمكن أن تكون في جدة.
المعكوس: إذا لم تكن تعيش في الدمام، فإنك لا تعيش في السعودية؛ خاطئ: يمكن أن تعيش في الرياض.
المعاكس الإيجابي: إذا لم تكن تعيش في السعودية، فإنك لا تعيش في الدمام. صائب.

45) العكس: إذا كان الطائر لا يستطيع الطيران، فإنه نعامة. خاطئ، يمكن أن يكون الطائر بطريقًا. المعكوس: إذا لم يكن الطائر نعامة، فإنه يستطيع الطيران؛ خاطئ؛ يمكن أن يكون الطائر بطريقًا.
المعاكس الإيجابي: إذا استطاع الطائر الطيران، فإنه لا يكون نعامةً؛ صائب.

46) العكس: إذا كان الشكل مستطيلًا فإنه مربع. خاطئة، فالمستطيل قد لا تكون جميع أضلاعه متطابقة.
المعكوس: إذا لم يكن الشكل مربعًا، فإنه لا يكون مستطيلًا؛ خاطئ: يمكن أن يكون الشكل مستطيلًا حتى لو لم يكن مربعًا.
المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن الشكل مستطيلًا، فلا يمكن أن يكون مربعًا؛ صائب.

47) العكس: إذا كان للقطع المستقيمة الطول نفسه، فإنها تكون متطابقة؛ صائب. المعكوس: إذا لم تكن القطع المستقيمة متطابقة فإنه لا يكون لها الطول نفسه، صائبة. المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن للقطع المستقيمة الطول نفسه، فإن هذه القطع لا تكون متطابقة؛ صائب.

48) العكس: إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث 90 ، فإن المثلث قائم الزاوية؛ صائب. المعكوس: إذا لم يكن المثلث قائم الزاوية، فإنه لا يحوي زاوية قياسها 90؛ صائب. المعاكس الإيجابي: إذا كان المثلث لا يحوي زاوية قياسها 90 ، فإنه لا يكون مثلثًا قائم الزاوية؛ صائب.

57) إجابة ممكنة: العبارة الشرطية والمعاكس الإيجابي لأي عبارة شرطية متكافئين منطقيًّا، أي لهما قيم الصواب نفسها.

وكذلك العكس والمعكوس للعبارة الشرطية متكافئان منطقيًّا، أي لهما قيم الصواب نفسها.

60)

p	q	p و q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

61)

p	q	$\sim q$	p أو $\sim q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

62)

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

63)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

الدرس 5-1، ص (50-48) :

13) بما أن C نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{AE}$, $\overline{DB}$, فإن $AC = CE = \frac{1}{2}AE$ ، وأيضًا $DC = CB = \frac{1}{2}DB$
وذلك من تعريف نقطة المنتصف.
من المعطيات $\overline{AE} \cong \overline{DB}$ ، ومن تعريف تطابق القطع المستقيمة
$AE = DB$، ومن خاصية الضرب للمساواة $\frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}DB$
وبالتعويض ينتج أن $AC = CB$.

22) غير صائبة أبدًا؛ المسلّمة 1.1 تنص على أن أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

23) صائبة أحيانًا؛ لا يشترط أن تكون النقاط على استقامة واحدة حتى تقع في المستوى نفسه.

24) صائبة دائمًا؛ المسلّمة 1.5 تنص على أنه إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن جميع نقاط المستقيم المار بهما تقع في هذا المستوى.

25) صائبة أحيانًا: يجب أن تكون النقاط ليست على استقامة واحدة.

26) **المعطيات:** Y نقطة منتصف $\overline{XZ}$

Z نقطة منتصف $\overline{YW}$

المطلوب: $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$

البرهان: تعلم أن Y نقطة منتصف $\overline{XZ}$ و Z نقطة منتصف $\overline{YW}$ ، ومن تعريف نقطة المنتصف $XY = YZ$ و $YZ = ZW$ ، وباستعمال خاصية التعدي للمساواة $XY = ZW$ ؛ إذن $\overline{XY} \cong \overline{ZW}$ بتعريف تطابق القطع المستقيمة.

27) **المعطيات:** L نقطة منتصف $\overline{JK}$

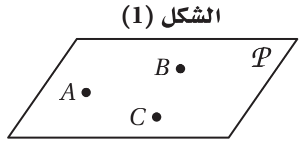
$\overline{JK}$ تتقاطع مع $\overline{MK}$ في K و $\overline{MK} \cong \overline{JL}$

المطلوب: $\overline{LK} \cong \overline{MK}$

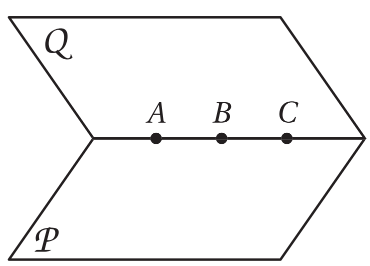
البرهان: نعلم أن L نقطة منتصف $\overline{JK}$
من نظرية نقطة المنتصف ينتج أن $\overline{JL} \cong \overline{LK}$، وبتطبيق خاصية التعدي للتطابق $\overline{MK} \cong \overline{JL}, \overline{JL} \cong \overline{LK}$
نحصل على $\overline{MK} \cong \overline{LK}$
ومن خاصية التماثل للتطابق نجد أن $\overline{LK} \cong \overline{MK}$

39) صائبة أحيانًا: إذا كانت النقاط لا تقع على استقامة واحدة، فهناك مستوًى واحدٌ فقط يمر في هذه النقاط بحسب المسلّمة 1.2 ، والشكل (1) يوضح ذلك. أما إذا كانت النقاط تقع على استقامة واحدة، فإنه يوجد عدد لا نهائي من المستويات التي تمر بها. الشكل (2) يوضح مستويين يمرَّان بثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة. ويمكن رسم مستويات أُخرى من الدوران حول هذه النقاط الثلاث.

الشكل (1)



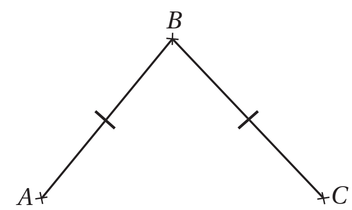
الشكل (2)



اختبار منتصف الفصل، ص (52) :

3) إذا لم تكن A, B, C على استقامة واحدة، فلن يكون ذلك صائبًا.

مثال مضاد:



في الشكل السابق $AB = BC$ ، ولكن B ليست نقطة منتصف $\overline{AC}$

4) عندما $n = 1$، يكون التخمين خاطئًا؛ لأن $1^3 < 1$ خاطئة.

5) في الأسبوع الواحد 7 أيام، وصفر هو الشهر الذي يأتي قبل شهر المحرم؛ خاطئة؛ لأن صفر ليس الشهر الذي يأتي قبل المحرم.

6) في الأسبوع الواحد 7 أيام، وفي اليوم الواحد 24 ساعة؛ صائبة؛ لأن كلًّا من p و q صائبة.

7) في الأسبوع الواحد 7 أيام، وصفر ليس هو الشهر الذي يأتي قبل شهر المحرم؛ صائبة؛ لأن كلًّا من p و $\sim r$ صائبة.

9) الفَرض: المضلع له خمسة أضلاع. النتيجة: المضلع شكل خماسي.

10) الفَرض: $4x - 6 = 10$ النتيجة: $x = 4$

11) الفَرض: قياس الزاوية أقل من $90°$

النتيجة: الزاوية حادة.

12) صائبة؛ $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$.

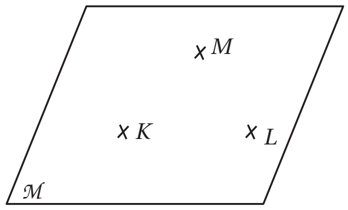
13) خاطئة؛ $\angle 1$ منفرجة بينما $\angle 4$ حادة.

14) صائبة؛ فجميع المربعات مستطيلات؛ لأن مجموعة المربعات مجموعة جزئية من مجموعة المستطيلات.

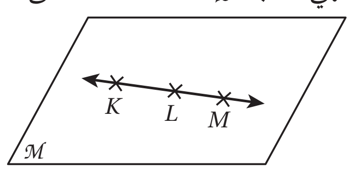
15) صائبة؛ لأن مجموعتي التوازي والتعامد مجموعتان منفصلتان.

16) صائبة؛ أحرز فريق الفرسان أهدافًا أكثر في المباراة النهائية، فهو الفريق الفائز؛ إذن فريق الفرسان هو الذي فاز بالكأس.

18) صائبة أحيانًا: عندما تكون النقاط بالشكل التالي:



فهي صائبة، وإذا كانت النقاط على الشكل التالي:



فهي خاطئة.

19) صائبة دائمًا؛ تنص المسلّمة 1.1 على أن كل نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.

20) غير صائبة أبدًا؛ المسلّمة 1.3 تنصُّ على أن كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.

الدرس 6-1 (تحقق من فهمك)، ص (54) :

2B) **المعطيات:** $d = t\dfrac{u+v}{2}$

المطلوب: $u\dfrac{2d}{t} - v$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $d = t \cdot \dfrac{u+v}{2}$	1) معطيات
2) $\dfrac{d}{t} = \dfrac{u+v}{2}$	2) خاصية القسمة للمساواة
3) $2\left(\dfrac{d}{t}\right) = 2\left(\dfrac{u+v}{2}\right)$	3) خاصية الضرب للمساواة
4) $\dfrac{2d}{t} = u + v$	4) بالتبسيط
5) $\dfrac{2d}{t} - v = u$	5) خاصية الطرح للمساواة
6) $u = \dfrac{2d}{t} - v$	6) خاصية التماثل للمساواة

الدرس 6-1، ص (56-59):

6a) البرهان:

العبارات	المبررات
$T = 0.75(220 - a)$ (1	1) معطيات
$\frac{T}{0.75} = 220 - a$ (2	2) خاصية القسمة للمساواة
$\frac{T}{0.75} - 220 = -a$ (3	3) خاصية الطرح للمساواة
$-\frac{T}{0.75} + 220 = a$ (4	4) خاصية الضرب للمساواة
$a = -\frac{T}{0.75} + 220$ (5	5) خاصية التماثل للمساواة
$a = 220 - \frac{T}{0.75}$ (6	6) خاصية الإبدال للجمع

6b) عمره 16 سنة؛ إجابة ممكنة: خاصية التعويض للمساواة.

18)

العبارات	المبررات
$d = vt + \frac{1}{2}at^2$ (1	1) معطى
$d - vt = \frac{1}{2}at^2$ (2	2) خاصية الطرح للمساواة
$2d - 2vt = at^2$ (3	3) خاصية الضرب للمساواة
$\frac{2d - 2vt}{t^2} = a$ (4	4) خاصية القسمة للمساواة

24) المعطيات: $\angle Y \cong \angle Z$

المطلوب: $x = 100$

البرهان:

العبارات	المبررات
$\angle Y \cong \angle Z$ (1	1) معطيات
$m\angle Y = m\angle Z$ (2	2) تعريف تطابق الزوايا
$x + 10 = 2x - 90$ (3	3) خاصية التعويض للمساواة
$10 = x - 90$ (4	4) خاصية الطرح للمساواة
$100 = x$ (5	5) خاصية الجمع للمساواة
$x = 100$ (6	6) خاصية التماثل للمساواة

25) المعطيات: $\angle MPN \cong \angle QPN$

المطلوب: $x = 16$

البرهان:

العبارات	المبررات
$\angle MPN \cong \angle QPN$ (1	1) معطيات
$m\angle MPN = m\angle QPN$ (2	2) تعريف تطابق الزوايا
$x + 26 = 2x + 10$ (3	3) خاصية التعويض للمساواة
$16 = x$ (4	4) خاصية الطرح للمساواة
$x = 16$ (5	5) خاصية التماثل للمساواة

26a) المعطيات: $V = \frac{P}{I}$

المطلوب: $\frac{V}{2} = \frac{P}{2I}$

البرهان:

العبارات	المبررات
$V = \frac{P}{I}$ (1	1) معطيات
$\frac{1}{2} \cdot V = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{I}$ (2	2) خاصية الضرب للمساواة
$\frac{V}{2} = \frac{P}{2I}$ (3	3) بالتبسيط

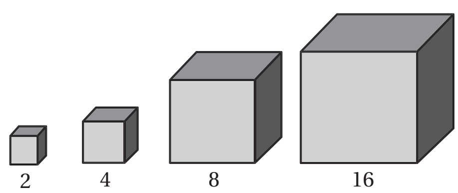
26b) المعطيات: $V = \frac{P}{I}$

المطلوب: $2V = \frac{2P}{I}$

البرهان:

العبارات	المبررات
$V = \frac{P}{I}$ (1	1) معطيات
$2 \cdot V = \frac{P}{I}$ (2	2) خاصية الضرب للمساواة
$2V = \frac{2P}{I}$ (3	3) بالتبسيط

27a)



27c) إجابة ممكنة: إذا تضاعف طول ضلع المكعب، فإن حجمه يصبح 8 أمثال الحجم الأصلي.

27e) المعطيات: مكعب طول ضلعه s وحدة، وحجمه V وحدة مكعبة.

المطلوب: $8V = (2s)^3$

البرهان:

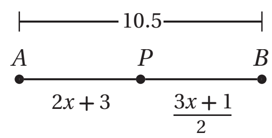
العبارات	المبررات
1) طول ضلع المكعب s وحدة	1) معطيات
2) حجم المكعب V وحدة مكعبة	2) معطيات
$V = s^3$ (3	3) صيغة حجم المكعب
$V = s \cdot s \cdot s$ (4	4) تعريف الأس
$2 \cdot 2 \cdot 2\ V = 2 \cdot s \cdot 2 \cdot s \cdot 2 \cdot s$ (5	5) خاصية الضرب للمساواة
$8V = (2s)(2s)(2s)$ (6	6) بالتبسيط
$8V = (2s)^3$ (7	7) تعريف الأس

28) المعطيات: $AP = 2x + 3$

$$PB = \frac{3x+1}{2}$$

$$AB = 10.5$$

المطلوب: $AP = \frac{2}{3} AB$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $AP = 2x + 3, PB = \frac{3x+1}{2}, AB = 10.5$	1) معطيات
2) AP + PB = AB	2) مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة
3) $2x + 3 + \frac{3x+1}{2} = 10.5$	3) خاصية التعويض للمساواة
4) $2 \cdot \left(2x + 3 + \frac{3x+1}{2}\right) = 2 \cdot 10.5$	4) خاصية الضرب للمساواة
5) $2 \cdot \left(2x + 3 + \frac{3x+1}{2}\right) = 21$	5) بالتبسيط
6) $2 \cdot 2x + 2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{3x+1}{2} = 21$	6) خاصية التوزيع
7) $4x + 6 + 3x + 1 = 21$	7) بالتبسيط
8) $7x + 7 = 21$	8) بالتبسيط
9) $7x + 7 - 7 = 21 - 7$	9) خاصية الطرح للمساواة
10) $7x = 14$	10) بالتبسيط
11) $x = 2$	11) خاصية القسمة للمساواة
12) $AP = 2(2) + 3$	12) خاصية التعويض للمساواة
13) $AP = 4 + 3$	13) بالتبسيط
14) $AP = 7$	14) بالتبسيط
15) $\frac{AP}{AB} = \frac{7}{10.5}$	15) خاصية التعويض للمساواة
16) $\frac{AP}{AB} = \frac{2}{3}$	16) بالتبسيط

29) صائبة دائمًا؛ إجابة ممكنة: إذا كان $a+b=0$

فإن $a+b-b=0-b$ (خاصية الطرح للمساواة)

إذن $a=-b$ (بالتبسيط)، ولذا تكون هذه العبارة صائبة دائمًا.

30) صائبة أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كانت $a=1$ فإن $a^2 = 1 = b$

إذن $\sqrt{b} = \sqrt{1} = 1 = a$ فتكون الجملة صائبة.

أما إذا كانت $a=-1$، فإن $a^2 = (-1)^2 = 1 = b$

ويكون $\sqrt{b} = \sqrt{1} = 1 \neq a$

وبذلك تكون الجملة غير صائبة.

32) إجابة ممكنة: البرهان الحر هو نوع من البراهين الذي تُكتب فيه الخطوات جُملًا كاملة على شكل فقرة. وهذا النوع من البرهان يُماثل في محتواه البرهان ذا العمودين، لكنه يختلف عنه شكلًا، ففي البرهان ذي العمودين تُكتب العبارات في عمود، وتُكتب المبررات في عمود آخر بجانب العمود الأول.

الدرس 1-7 ، (تحقق من فهمك)، ص (62) :

2) المعطيات: $\overline{KL} \cong \overline{MN}, \overline{MN} \cong \overline{PQ}, \overline{PQ} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $RS = KL$

البرهان: إذا كان: $\overline{KL} = \overline{MN}, \overline{MN} = \overline{PQ}$، فإن $\overline{KL} = \overline{PQ}$ باستعمال خاصية التعدي للتطابق.

إذا كان $\overline{PQ} = \overline{RS}$، فإن $\overline{KL} = \overline{RS}$ باستعمال خاصية التعدي للتطابق.

$\overline{RS} = \overline{KL}$ باستعمال خاصية التماثل للتطابق.

$RS = KL$ باستعمال تعريف تطابق القطع المستقيمة.

ومن ذلك يكون طول القطعة الخشبية الأولى مساويًا طول القطعة الخشبية الرابعة.

الدرس 1-7، ص (64-65) :

4) المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}, AB + CD = EF$

المطلوب: $2AB = EF$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}, AB + CD = EF$	1) معطيات
2) $AB = CD$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $AB + AB = EF$	3) بالتعويض
4) $2AB = EF$	4) بالتعويض

5) المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

المطلوب: $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	1) معطيات
2) $AB = CD$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $CD = AB$	3) خاصية التماثل للمساواة
4) $\overline{CD} \cong \overline{AB}$	4) تعريف تطابق القطع المستقيمة

6) المعطيات: $\overline{AB}$

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB}$	1) معطيات
2) $AB = AB$	2) خاصية الانعكاس للمساواة
3) $\overline{AB} \cong \overline{AB}$	3) تعريف تطابق القطع المستقيمة

7) المعطيات: $\overline{VZ} \cong \overline{VY}$, $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$.

المطلوب: $\overline{VW} \cong \overline{VX}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{VZ} \cong \overline{VY}$, $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$	1) معطيات
2) $VZ = VY$, $WY = XZ$	2) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
3) $VZ = VX + XZ$, $VY = VW + WY$	3) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
4) $VX + XZ = VW + WY$	4) بالتعويض
5) $VX + WY = VW + WY$	5) بالتعويض
6) $VX = VW$	6) خاصية الطرح للمساواة
7) $VW = VX$	7) خاصية التماثل للمساواة
8) $\overline{VW} \cong \overline{VX}$	8) تعريف تطابق القطع المستقيمة

8) المعطيات: E نقطة منتصف $\overline{DF}$, $\overline{CD} \cong \overline{FG}$

المطلوب: $\overline{CE} \cong \overline{EG}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) E نقطة منتصف $\overline{DF}$, $\overline{CD} \cong \overline{FG}$	1) معطيات
2) $DE = EF$	2) تعريف نقطة المنتصف
3) $CD = FG$	3) تعريف تطابق القطع المستقيمة
4) $CD + DE = DE + FG$	4) خاصية الجمع للمساواة
5) $CD + DE = EF + FG$	5) خاصية التعويض للمساواة
6) $CE = CD + DE$, $EG = EF + FG$	6) مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
7) $CE = EG$	7) بالتعويض
8) $\overline{CE} \cong \overline{EG}$	8) تعريف تطابق القطع المستقيمة

9a) المعطيات:

$\overline{AC} \cong \overline{GI}$, $\overline{FE} \cong \overline{LK}$, $AC + CF + FE = GI + IL + LK$

المطلوب: $\overline{CF} \cong \overline{IL}$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AC} \cong \overline{GI}$, $\overline{FE} \cong \overline{LK}$, $AC + CF + FE = GI + IL + LK$	1) معطيات
2) $FE = LK$, $AC = GI$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $AC + CF + FE = AC + IL + LK$	3) بالتعويض
4) $AC - AC + CF + FE = AC - AC + IL + LK$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $CF + FE = IL + LK$	5) بالتبسيط
6) $CF + FE = IL + FE$	6) بالتعويض
7) $CF + FE - FE = IL + FE - FE$	7) خاصية الطرح للمساواة
8) $CF = IL$	8) بالتبسيط
9) $\overline{CF} \cong \overline{IL}$	9) تعريف تطابق القطع المستقيمة

9b) إجابة ممكنة: لقد قستَ $\overline{CF}$ و $\overline{IL}$، وهما متساويتا الطول، إذن هما متطابقتان.

10a)

10b) $8PC = PQ$

10c)

يمكنك قياس طول $\overline{PC}$، ووضع علامات على $\overline{PQ}$ لقطع طول كلٍّ منها يساوي طول $\overline{PC}$ ، ثم عد القطع الناتجة.

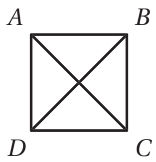
10d) المعطيات: A نقطة منتصف $\overline{PQ}$ ، و B نقطة منتصف $\overline{PA}$ و C نقطة منتصف $\overline{PB}$.

المطلوب: $8PC = PQ$

العبارات	المبررات
1) A نقطة منتصف $\overline{PQ}$ ، و B نقطة منتصف $\overline{PA}$ ، و C نقطة منتصف $\overline{PB}$	1)
2) $PA = AQ, PB = BA, PC = CB$	2) تعريف نقطة المنتصف
3) $PC + CB = PB$	3) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
4) $PC + PC = PB$	4) بالتعويض
5) $2PC = PB$	5) بالتبسيط
6) $PB + BA = PA$	6) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
7) $PB + PB = PA$	7) بالتعويض
8) $2PB = PA$	8) بالتبسيط
9) $2\,(2PC) = PA$	9) بالتعويض
10) $4\,PC = PA$	10) بالتعويض
11) $PA + AQ = PQ$	11) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
12) $PA + PA = PQ$	12) بالتعويض
13) $2PA = PQ$	13) بالتبسيط
14) $2(4PC) = PQ$	14) بالتعويض
15) $8PC = PQ$	15) بالتبسيط

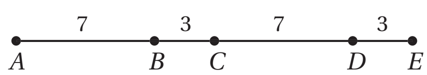
12) المعطيات: $ABCD$ مربع.

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

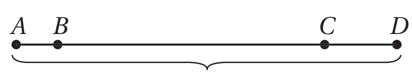


العبارات	المبررات
1) $ABCD$ مربع.	1) معطيات
2) $AB = BC = CD = DA$	2) تعريف المربع
3) $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ ، $(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$	3) نظرية فيثاغورس
4) $(BD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$	4) بالتعويض
5) $(AC)^2 = (BD)^2$	5) خاصية التعدي للمساواة
6) $AC = \pm\sqrt{(BD)^2}$	6) خاصية الجذر التربيعي
7) $AC = \sqrt{(BD)^2}$	7) بالتعريف يجب أن يكون الطول موجبًا
8) $AC = BD$	8) تعريف الجذر التربيعي
9) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	9) تعريف تطابق القطع المستقيمة

14) خاطئة؛ مثال مضاد: في الشكل التالي: $AC = BD = CE = 10$، ولكن $AB = 7$ ،$BC = 3$ ،$CD = 7$ ، $DE = 3$



15)



$AB + BC + CD = AD$

الدرس 1-8 ، (تحقق من فهمك)، ص (66) :

1)

العبارات	المبررات
1) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle ABC$	1) مسلمة جمع قياسات الزوايا
2) $23^\circ + 90^\circ + m\angle 3 = 131^\circ$	2) $m\angle 2 = 90^\circ$
3) $113^\circ + m\angle 3 = 131^\circ$	3) بالتبسيط
4) $113^\circ + m\angle 3 - 113^\circ = 131^\circ - 113^\circ$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $m\angle 3 = 18^\circ$	5) بالتبسيط

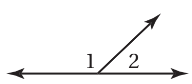
الدرس 8-1، ص (72, 73) :

12) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle ABC$ قائمة	1) معطيات
2) $m\angle ABC = 90°$	2) تعريف الزاوية القائمة
3) $m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle CBD$	3) مسلّمة جمع الزوايا
4) $m\angle ABD + m\angle CBD = 90°$	4) بالتعويض
5) $\angle ABD$ و $\angle CBD$ متتامتان	5) تعريف الزاويتين المتتامتين

13) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 5 \cong \angle 6$	1) معطيات
2) $m\angle 5 = m\angle 6$	2) تعريف تطابق الزوايا
3) $\angle 4$ و $\angle 5$ متكاملتان	3) زاويتان متجاورتان على مستقيم
4) $m\angle 4 + m\angle 5 = 180°$	4) تعريف الزاويتين المتكاملتين
5) $m\angle 4 + m\angle 6 = 180°$	5) بالتعويض
6) $\angle 4$ و $\angle 6$ متكاملتان	6) تعريف الزاويتين المتكاملتين

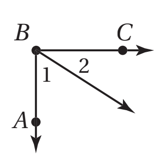


14) المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم

المطلوب: $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان.

برهان حر:

عندما تكون الزاويتان متجاورتين على مستقيم، فإن الزاوية الناتجة عنهما تكون زاوية مستقيمة قياسها $180°$، وبالتعريف تكون الزاويتان متكاملتين، إذا كان مجموع قياسيهما $180°$، وباستعمال مسلّمة جمع الزوايا $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$. ومن ذلك تكون الزاويتان متكاملتين، إذا كانتا متجاورتين على مستقيم.

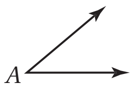


15) المعطيات: $\angle ABC$ قائمة.

المطلوب: $\angle 1$ و $\angle 2$ متتامتان.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle ABC$ قائمة	1) معطيات
2) $m\angle ABC = 90°$	2) تعريف الزاوية القائمة
3) $m\angle ABC = m\angle 1 + m\angle 2$	3) مسلّمة جمع الزوايا
4) $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$	4) بالتعويض
5) $\angle 1$ و $\angle 2$ متتامتان	5) تعريف الزاويتين المتتامتين



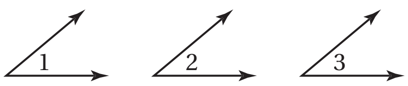
16) المعطيات: $\angle A$

المطلوب: $\angle A \cong \angle A$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle A$	1) معطاة
2) $m\angle A = m\angle A$	2) خاصية الانعكاس للمساواة
3) $\angle A \cong \angle A$	3) تعريف تطابق الزوايا

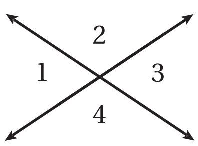
17) المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$، $\angle 2 \cong \angle 3$



المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 3$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 2 \cong \angle 3$	1) معطيات
2) $m\angle 1 = m\angle 2, m\angle 2 = m\angle 3$	2) تعريف تطابق الزوايا
3) $m\angle 1 = m\angle 3$	3) خاصية التعدي للمساواة
4) $\angle 1 \cong \angle 3$	4) تعريف تطابق الزوايا



18) المعطيات:

$\angle 1 , \angle 2, \angle 3, \angle 4$ ناتجة عن تقاطع مستقيمين

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 360°$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 1 , \angle 2, \angle 3, \angle 4$ ناتجة عن تقاطع مستقيمين	1) معطيات
2) $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$, $m\angle 3 + m\angle 4 = 180°$	2) نظرية الزاويتين المتكاملتين
3) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180° + m\angle 3$	3) خاصية الجمع للمساواة
4) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 180 + m\angle 3 + m\angle 4$	4) خاصية الجمع للمساواة
5) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 180° + 180°$	5) بالتعويض
6) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 360°$	6) بالتبسيط

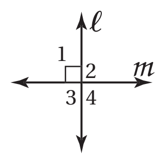
19) **المعطيات:** $\angle 1 \cong \angle 4$

المطلوب: $\angle 2 \cong \angle 3$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 1 \cong \angle 4$	1) معطيات
2) $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4$	2) نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
3) $\angle 1 \cong \angle 3$	3) خاصية التعدي للتطابق
4) $\angle 2 \cong \angle 3$	4) خاصية التعدي للتطابق

20) **المعطيات:** $\ell \perp m$

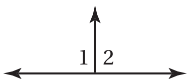


المطلوب: $\angle 2, \angle 3, \angle 4$ قوائم.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\ell \perp m$	1) معطيات
2) $\angle 1$ قائمة	2) تعريف التعامد
3) $m\angle 1 = 90°$	3) تعريف الزاوية القائمة
4) $\angle 1 \cong \angle 4$	4) نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
5) $m\angle 1 = m\angle 4$	5) تعريف الزوايا المتطابقة
6) $m\angle 4 = 90°$	6) بالتعويض
7) $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم $\angle 3$ و $\angle 4$ متجاورتان على مستقيم	7) تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
8) $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$, $\angle 4 + m\angle 3 = 180°$	8) نظرية الزاويتين المتكاملتين
9) $90° + m\angle 2 = 180°$, $90° + m\angle 3 = 180°$	9) بالتعويض
10) $m\angle 2 = 90°, m\angle 3 = 90°$	10) خاصية الطرح للمساواة
11) $\angle 2, \angle 3, \angle 4$ قوائم	11) تعريف الزاوية القائمة

21) **المعطيات:** $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان

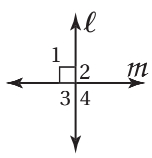


المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان	1) معطيات
2) $m\angle 1 = 90°, m\angle 2 = 90°$	2) تعريف الزاوية القائمة
3) $m\angle 1 = m\angle 2$	3) بالتعويض
4) $\angle 1 \cong \angle 2$	4) تعريف تطابق الزوايا

22) **المعطيات:** $\ell \perp m$

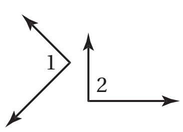


المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 2$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\ell \perp m$	1) معطيات
2) $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان	2) يتقاطع المستقيمان المتعامدان ويكوِّنان 4 زوايا قائمة
3) $\angle 1 \cong \angle 2$	3) الزوايا القائمة جميعها متطابقة

23) **المعطيات:** $\angle 1$و $\angle 2$ متكاملتان، $\angle 1 \cong \angle 2$



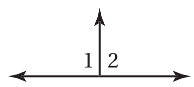
المطلوب: $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان، $\angle 1 \cong \angle 2$	1) معطيات
2) $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$	2) تعريف الزوايا المتكاملة
3) $m\angle 1 = m\angle 2$	3) تعريف الزوايا المتطابقة
4) $m\angle 1 + m\angle 1 = 180°$	4) بالتعويض
5) $2(m\angle 1) = 180°$	5) بالتعويض
6) $m\angle 1 = 90°$	6) خاصية القسمة
7) $m\angle 2 = 90°$	7) بالتعويض
8) $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان	8) تعريف الزاوية القائمة

24) المعطيات: $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم، $\angle 2 \cong \angle 1$

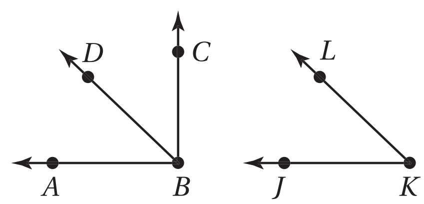
المطلوب: $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان



البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم، $\angle 1 \cong \angle 2$
2) نظرية الزاويتين المتكاملتين	2) $\angle 1$ و$\angle 2$ زاويتان متكاملتان
3) إذا كانت الزاويتان متكاملتين ومتطابقتين، فإنهما قائمتان	3) $\angle 1$ و $\angle 2$ قائمتان

26a)



26b) إجابة ممكنة: $\angle DBC$ و $\angle JKL$ متتامتان.

26c) المعطيات: $\angle ABD$ و $\angle DBC$ متتامتان.
$\angle ABD \cong \angle JKL$

المطلوب: $\angle DBC$ و $\angle JKL$ متتامتان.

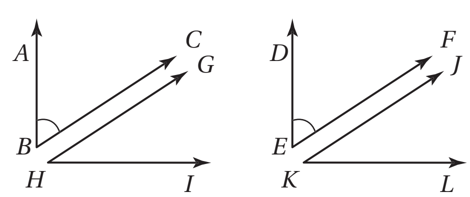
البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\angle ABD$ و $\angle DBC$ متتامتان، $\angle ABD \cong \angle JKL$
2) تعريف الزاويتين المتتامتين	2) $m\angle DBC + m\angle ABD = 90°$
3) تعريف تطابق الزوايا	3) $m\angle ABD = m\angle JKL$
4) بالتعويض	4) $m\angle DBC + m\angle JKL = 90°$
5) تعريف الزاويتين المتتامتين	5) $\angle DBC$ و $\angle JKL$ متتامتان

27) وردت العبارة: "أو لزاويتين متطابقتين" في نصّي النظريتين، وهذا يعني أن علينا إثبات النظريتين في هذه الحالة أيضًا.

المعطيات: $\angle ABC \cong \angle DEF$، $\angle GHI$ متممة $\angle ABC$،
$\angle JKL$ متممة $\angle DEF$.

المطلوب: $\angle GHI \cong \angle JKL$

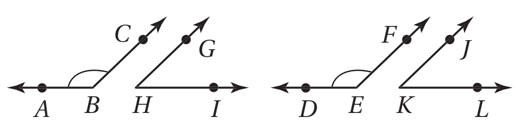


البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\angle ABC \cong \angle DEF$ ، $\angle GHI$ متممة $\angle ABC$ ، $\angle JKL$ متممة $\angle DEF$
2) تعريف تطابق الزوايا	2) $m\angle ABC = m\angle DEF$
3) تعريف الزاويتين المتتامتين	3) $m\angle ABC + m\angle GHI = 90°,$ $m\angle DEF + m\angle JKL = 90°$
4) بالتعويض	4) $m\angle ABC + m\angle JKL = 90°$
5) خاصية التماثل للمساواة	5) $90° = m\angle ABC + m\angle JKL$
6) خاصية التعدي للمساواة	6) $m\angle ABC + m\angle GHI = m\angle ABC + m\angle JKL$
7) خاصية الطرح للمساواة	7) $m\angle ABC - m\angle ABC + m\angle GHI = m\angle ABC - m\angle ABC + m\angle JKL$
8) بالتبسيط	8) $m\angle GHI = m\angle JKL$
9) تعريف تطابق الزوايا	9) $\angle GHI \cong \angle JKL$

المعطيات: $\angle ABC \cong \angle DEF$، $\angle GHI$ مكملة $\angle ABC$،
$\angle JKL$ مكملة $\angle DEF$.

المطلوب: $\angle GHI \cong \angle JKL$



البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\angle ABC \cong \angle DEF$، $\angle GHI$ مكمّلة $\angle ABC$، $\angle JKL$ مكمّلة $\angle DEF$
2) تعريف تطابق الزوايا	2) $m\angle ABC = m\angle DEF$
3) تعريف الزاويتين المتكاملتين	3) $m\angle ABC + m\angle GHI = 180°,$ $m\angle DEF + m\angle JKL = 180°$
4) بالتعويض	4) $m\angle ABC + m\angle JKL = 180°$
5) خاصية التماثل للمساواة	5) $180° = m\angle ABC + m\angle JKL$
6) خاصية التعدي للمساواة	6) $m\angle ABC + m\angle GHI = m\angle ABC + m\angle JKL$
7) خاصية الطرح للمساواة	7) $m\angle ABC - m\angle ABC + m\angle GHI = m\angle ABC - m\angle ABC + m\angle JKL$
8) بالتعويض	8) $m\angle GHI = m\angle JKL$
9) (تعريف تطابق الزوايا) ملاحظات	9) $\angle GHI \cong \angle JKL$

الفصل 2

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
التهيئة، ص (85)

	الدرس 2-1 حصتان	استكشاف 2-2 حصة واحدة	الدرس 2-2 حصتان	الدرس 2-3 حصتان
العنوان	المستقيمان والقاطع	معمل الحاسبة البيانية: الزوايا والمستقيمات المتوازية	الزوايا والمستقيمات المتوازية	إثبات توازي مستقيمين
الأهداف	• تعرُّف العلاقات بين مستقيمين أو مستويين. • تسمية أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع لهما.	• استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire؛ لاستكشاف قياسات الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.	• استعمال نظريات المستقيمين المتوازيين؛ لتحديد العلاقات بين أزواج محددة من الزوايا. • استعمال الجبر لإيجاد قياسات الزوايا.	• تمييز المستقيمات المتوازية، بناءً على علاقات بين أزواج من الزوايا الناتجة عن مستقيم قاطع. • برهنة توازي مستقيمين باستعمال العلاقات بين الزوايا.
المفردات	المستقيمان المتوازيان المستقيمان المتخالفان المستويان المتوازيان القاطع الزوايا الداخلية الزوايا الخارجية الزاويتان المتحالفتان الزاويتان المتبادلتان داخليًا الزاويتان المتبادلتان خارجيًا الزاويتان المتناظرتان			
التمثيلات المتعددة			ص (100)	ص (106)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (14) دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • الحاسبة البيانية TI-nspire	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (15) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (16) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	السبورة التفاعلية، ص (87)		نظام إجابات الطلاب، ص (95)	الكاميرا التوثيقية، ص (104)
تنويع التعليم	ص (88 , 91)		ص (95 , 100)	ص (103 , 104)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (108)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

التوازي والتعامد

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(14) حصة	(4) حصص	(18) حصة

الدرس 2-4 حصتان	الدرس 2-5 حصتان	توسع 2-5 حصة واحدة	الدرس 2-6 حصتان
ميل المستقيم	**صيغ معادلة المستقيم**	**معمل الهندسة : معادلة العمود المنصف**	**الأعمدة والمسافة**
• إيجاد ميل المستقيم. • استعمال الميل، لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.	• كتابة معادلة مستقيم، إذا عُرفت معلومات حول تمثيله البياني. • حل مسألة بكتابة معادلة مستقيم.	• إيجاد معادلة العمود المنصف.	• إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم. • إيجاد البعد بين مستقيمين متوازيين.
الميل معدل التغير	صيغة الميل والمقطع صيغة الميل ونقطة		متساوي البعد المحل الهندسي
	ص (110)		ص (127)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (17) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (18) دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • أوراق الرسم البياني.	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (19) دون ضمن فوق
مدونة، ص (111)	السبورة التفاعلية، ص (119)		تسجيل صوتي، ص (128)
ص (113 , 116)	ص (119 , 124)		ص (127 , 133)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة، ص (135-138)
- اختبار الفصل، ص (139)

الفصل 2

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 2**	
	التهيئة للفصل 2 ، ص (85)) نموذج التوقع، ص (27)	مخطط المعالجة، ص (85)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك كل مثال تأكد مسائل مهارات التفكير العليا (اكتشف الخطأ، اكتب) مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة ، ص (30, 31) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصلان 1, 2 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصلان 1, 2
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (108) اختبار منتصف الفصل، ص (32) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصلان 1, 2 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصلان 1, 2
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (135-138) اختبار الفصل، ص (139) اختبار تراكمي، ص (142, 143) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصلان 1, 2 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصلان 1, 2
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 2**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (34-39) اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (40-41) اختبار المفردات ، ص (33) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (42) اختبار تراكمي: ص (43-45) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصلان 1, 2 www.obeikaneducation.com

كتاب الطالب — دليل المعلم — مصادر المعلم للأنشطة الصفية — دليل التقويم — شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى كل طالب أن يكتب في بطاقة كسرًا يُمثل ميل مستقيم، وأن يتبادلها مع زميله ليكتب ميل المستقيم الذي يوازيه أو يعامده، ثم يُعيد كل طالب البطاقة التي أخذها إلى زميله، والذي سيسمي العلاقة بين المستقيمين متوازيين أو متعامدين.

البديل 2 دون المتوسط دون

ارسم مستقيمين متوازيين وقاطعًا لهما على أرض غرفة الصف، واطلب إلى كل طالبين أن يقفا في زاويتين متطابقتين أو متكاملتين، وأن يبيِّنا ما إذا كانت الزاويتان متبادلتين داخليًّا أو متبادلتين خارجيًّا، وهكذا.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

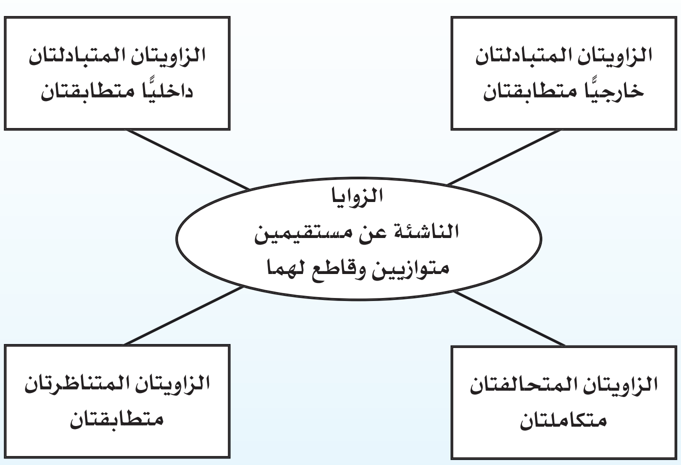
في هذا الفصل يبحث الطلاب عن أمثلة من واقع الحياة لكلٍّ من: الميل، والزوايا، والقاطع، والمستقيمات المتوازية مثل: (الجسور، المباني، أسلاك الكهرباء، .... وهكذا). اطلب إلى الطلاب اختيار معلم معماري بارز ليكتبوا عنه بحثًا يتضمن: الموقع وتاريخ البناء والهدف منه، وأن يستعمل الطلاب هذه المعلومات لعمل ملصقات وإحضارها إلى الصف، على أن يحتوي الملصق على: ورقة البحث، وصورة البناء ومخططٍ له، مع تسمية علاقات المستقيمات (التوازي، والتعامد، والقاطع، والتحالف)، وميل كل مستقيم وعلاقات الزوايا (متبادلة داخليًّا، ومتبادلة خارجيًّا، ومتناظرة، ومتحالفة).

قراءة الرياضيات

الدراسة مهارة

مهارة الدراسة

يمكن تطوير خرائط المفهوم بوصفها جزءًا من النقاش الصفِّيّ لمساعدة الطلاب على فهم العلاقات الرياضية، فبعد أن يدرس الطلاب الدرس 2-2، اكتب على السبورة: "الزوايا الناشئة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما"، وأعط الطلاب فرصة لإكمال خريطة المفاهيم، وشجعهم على استعمال الرسم عند وصفهم المفاهيم. ويمكن أن يطوِّر الطلاب خرائط مفاهيم مشابهة بوصفها جزءًا من النقاش الصفِّيّ حول ميل المستقيم (الدرس 2-4)، ومعادلة المستقيم (الدرس 2-5)، ومواضيع أخرى في الفصل 2.



يُسهم هذا النشاط وماشابهه في بناء استقلالية الطلاب من خلال استعمالهم الاستراتيجيات الخاصة بهم.

الفصل 2 المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 2

- مقارنة العلاقات الخطية المتناسبة وغير المتناسبة.
- ربط الرياضيات بالنشاطات اليومية وتطبيقها، وربطها بنشاطات أخرى داخل المدرسة وخارجها، وربطها بالمجالات المعرفية المختلفة وربط فروع الرياضيات المختلفة بعضها ببعض.
- تمثيل المستقيمات بيانيًّا، وكتابة معادلاتها.

الفصل 2

- تسمية أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع لهما.
- استعمال نظريات المستقيمين المتوازيين؛ لتحديد العلاقات بين أزواج زوايا محددة.
- إيجاد الميل واستعماله؛ لتحديد المستقيمات المتوازية والمتعامدة.
- كتابة معادلة مستقيم بمعرفة معلومات حول تمثيله البياني.
- إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم وبين مستقيمين متوازيين.

ما بعد الفصل 2

متابعة الهندسة

- وضع التخمينات واختبارها.

التهيئة للصف الثاني الثانوي

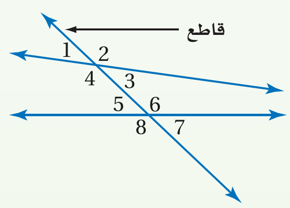
- تحديد الصيغة العامة لبعض أنواع الدوال متضمنة الدالة الخطية وتمثيلها بيانيًّا.

ملخص الدروس

2-1 المستقيمان والقاطع

تسمى المستقيمات التي تقع في المستوى نفسه والتي لا تتقاطع مستقيمات متوازية. والمستويات التي لا تتقاطع تسمَّى مستويات متوازية، وتستعمل الإشارة || لتدل على التوازي. أما المستقيمات التي لا تقع في المستوى نفسه فتسمى مستقيمات متخالفة.

المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في مستوى وفي نقاط مختلفة يسمى قاطعًا، وتقاطع هذه المستقيمات يُكوّن علاقات متنوعة بين الزوايا. وكل تقاطع يُكوّن أربع زوايا، وكل زاوية لها زاوية مناظرة في التقاطع الآخر.



- الزوايا الداخلية تقع بين المستقيمين مثل: $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
- الزوايا الخارجية لا تقع بين المستقيمين مثل: $\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
- الزاويتان المتبادلتان داخليًّا تقعان في جهتين مختلفتين من القاطع، وبين المستقيمين مثل: $\angle 4, \angle 6$ و $\angle 3, \angle 5$
- الزاويتان المتبادلتان خارجيًّا زاويتان خارجيتان تقعان في جهتين مختلفتين من القاطع مثل: $\angle 2, \angle 8$ و $\angle 1, \angle 7$
- الزاويتان المتناظرتان تقعان في جهة واحدة من القاطع وفي الجهة نفسها من المستقيمين: $\angle 4, \angle 8$ و $\angle 3, \angle 7$ و $\angle 2, \angle 6$ و $\angle 1, \angle 5$

2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية

عندما يقطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتان، وهذه المسلمة تسمى مسلمة الزاويتين المتناظرتين. وكذلك تكون كل زاويتين متبادلتين داخليًّا متطابقتين، وكل زاويتين متبادلتين خارجيًّا تكونان متطابقتين أيضًا. بالإضافة إلى أن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.

ونظرية المستقيم القاطع العمودي تنصُّ على أنه في المستوى، إذا كان القاطع عموديًّا على أحد المستقيمين المتوازيين، فإنه يكون عموديًّا على المستقيم الآخر أيضًا، ويستعمل الطلاب معلوماتهم عن الطريقة التي يكوّن بها القاطع زوايا متطابقة أو متكاملة لإيجاد قياسات الزوايا.

التوازي والتعامد

2-3 إثبات توازي مستقيمين

يمكن إثبات توازي مستقيمين إذا توافرت شروط لبعض الزوايا، فإذا قطع قاطع مستقيمين في المستوى نفسه، ونتج عن التقاطع زاويتان متناظرتان متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.

وهذه المسلمة تبرِّر إنشاء مستقيمين متوازيين، وذلك برسم قاطع يمرُّ بنقطة معلومة ويقطع مستقيمًا معلومًا.

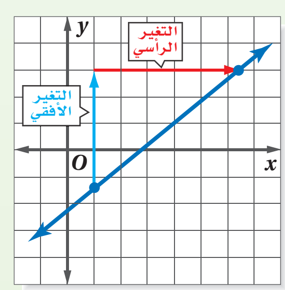
ثم بإنشاء زاوية رأسها النقطة المعلومة، وتطابق الزاوية المتكونة من المستقيم والقاطع باستعمال الفرجار، فنحصل على زوج من المستقيمات المتوازية وقاطع لهما. وهذا الإنشاء يقود إلى مسلمة التوازي التي تنصُّ على أنه: إذا عُلم مستقيم ونقطة لا تقع عليه، فإنه يوجد مستقيم واحد فقط يمرُّ بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

وبما أن المستقيمين المتوازيين يُكوّنان أزواجًا من الزوايا المرتبطة بعلاقات خاصة، فإن أزواج الزوايا هذه يمكن استعمالها لإثبات توازي المستقيمين. وفيما يلي بعض الشروط التي تحقق توازي مستقيمين.

- زاويتان متناظرتان متطابقتان.
- زاويتان متبادلتان داخليًّا متطابقتان.
- زاويتان متبادلتان خارجيًّا متطابقتان.
- زاويتان متحالفتان متكاملتان.
- مستقيمان عموديان على مستقيمٍ واحدٍ.

2-4 ميل المستقيم

ميل المستقيم هو نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي.



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{4}{5}$$

وميل المستقيم الرأسي غير معرّف، وميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا. ويكون للمستقيمين غير الرأسيين الميل نفسه إذا وفقط إذا كانا متوازيين. ويكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميلَيهما يساوي (-1). وهذا يعني أنك تستطيع استعمال الميل لمعرفة المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة. ويمكنك استعمال الميل لرسم مستقيمين متوازيين ومستقيمين متعامدين. ففي المثال أعلاه، المستقيم غير الرأسي والعمودي على المستقيم المرسوم يجب أن يكون ميله $-\frac{5}{4}$ ؛ لأن $\frac{4}{5}\left(-\frac{5}{4}\right) = -1$

2-5 صيغ معادلة المستقيم

يقدم في هذا الدرس صيغتين لمعادلة المستقيم؛ الأولى تُسمَّى صيغة الميل والمقطع، وتكتب في الصورة $y = mx + b$ ، حيث m الميل وb هو مقطع المحور y، والثانية صيغة الميل ونقطة، وتكتب في الصورة $y - y_1 = m(x - x_1)$ ، حيث (x_1, y_1) إحداثيا أي نقطة تقع على المستقيم.

ويمكنك كتابة معادلات خطية لحل مسائل حياتية، حيث يمثل الميل غالبًا معدل التغير، ويستعمل هذا المعدل لتحديد التكلفة أو أية معلومات أخرى.

2-6 الأعمدة والمسافة

البعد بين نقطة ومستقيم لا تقع عليه، يساوي طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة. وهذه هي أقصر مسافة من نقطة إلى مستقيم. ويمكنك استعمال الفرجار والمسطرة لإنشاء قطعة عمودية، كما يمكنك استعمال البُعد لتحديد المستقيمين المتوازيين. ويكون المستقيمان في المستوى نفسه متوازيين، إذا كان البُعد بينهما ثابتًا. والبُعد بين مستقيمين متوازيين يساوي طول القطعة العمودية على كلٍّ منهما وطرفاها على المستقيمين. ولذلك فأنت تحتاج إلى إيجاد البُعد بين المستقيمين المتوازيين من مكان واحد لأن البُعد لا يتغير، وهذا أيضًا يعني أنه إذا كان مستقيمان متساويي البعد عن مستقيم ثالث فإنهما متوازيان.

الفصل 2 ملاحظات

مشروع الفصل

استعمال المستقيمات في البناء

يستعمل الطلاب ما تعلموه عن المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة لربطها بتقنيات البناء.

يبحث الطلاب في تصميم أحد المباني ليتعرفوا الدور المهم الذي تؤديه المستقيمات المتوازية أو المستقيمات المتعامدة في بنيته وتصميمه.

أسئلة للبحث والمناقشة:

- ما عدد المواقع المختلفة في المبنى التي تمثّل مستقيمات متوازية أو مستقيمات متعامدة؟ احتفظ بقائمة لهذه المواقع لمناقشات لاحقة.
- كيف تثبت أن أعمدة البناء الرأسية متوازية؟ وكيف تثبت أنها عمودية على المستوى الأفقي؟
- هل يمكن أن تجد دعامات أو حوافّ قُطرية تقطع الأعمدة المتوازية التي يتكون منها البناء؟ وهل هي متوازية؟
- اكتب تقريرًا عن البحث والاستنتاجات لعرضه على الصف.

المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا النمط الآتي:

التعريف: المستقيمان المتوازيان: مستقيمان في المستوى نفسه ولا يتقاطعان أبدًا.

مثال: السطور على صفحات دفتر الملاحظات متوازية.

سؤال: أجب بنعم أو لا.
إذا كانت المستقيمات على صفحات دفتر الملاحظات متوازية، فإنه يجب أن تكون في المستوى نفسه. نعم

إذا كانت المستقيمات على صفحات دفتر الملاحظات في المستوى نفسه ، فإنه يجب أن تكون متوازية. لا

أعط مثالًا على مستقيمات في المستوى نفسه ولكنها غير متوازية. انظر إجابات الطلاب

الفصل 2

التوازي والتعامد
Parallel And Perpendicular

فيما سبق:

درست المستقيمات والزوايا واستعمال التبرير الاستنتاجي لكتابة براهين هندسية.

والآن:

- أحدد علاقات بين زوايا ناتجة عن قطع مستقيم لمستقيمين متوازيين. وأبرهن توازي مستقيمين من خلال علاقات الزوايا المعطاة.
- أستعمل الميل لتحليل المستقيم وكتابة معادلته.
- أجد البعد بين نقطة ومستقيم، والبعد بين مستقيمين متوازيين.

لماذا؟

هندسة: في تصاميم المباني يعتمد المهندسون على خصائص هندسية مختلفة منها التوازي والتعامد.

المطويات منظم أفكار

التوازي والتعامد: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات بين المستقيمات، مبتدئًا بورقة A4 واحدة وست بطاقات.

1. **اطوِ** جانب الورقة الأطول بعرض 4 cm لعمل جيب كما في الشكل.
2. **اطوِ** الورقة طوليًّا مرتين كما في الشكل.
3. **افتح** الورقة وثبت الحواف عند الجانبين؛ لتكوّن ثلاثة جيوب.
4. **اكتب** عنوانًا لكل جيب كما هو موضّح. وضع بطاقتين في كل جيب.

المطويات منظم أفكار

غرضها: يدوِّن الطلاب ملاحظاتهم حول المستقيمات المتوازية والمتعامدة.

وظيفتها: يحتاج الطلاب إلى بطاقات أو إلى قطع من ورق بمقاس ربع ورقة دفتر الملاحظات. وعند تعلُّمهم المستقيمات المتوازية والقواطع، اطلب إليهم أن يرسموا شكلًا على إحدى جهتَي البطاقة، وأن يصفوا ما رسموه على الجهة الأخرى كتابةً. احتفظ ببطاقات المستقيمات المتوازية في جيب مناسب في المطوية، واستمر أيضًا في عمل بطاقات للمستقيمات المتعامدة خلال هذا الفصل.

وقت استعمالها: يستعمل الجيب المناسب عندما ينهي الطلاب كل درس في الفصل، ويمكن للطلاب أن يضيفوا المفردات الجديدة في كل درس إلى بطاقات المفردات حال تعلمها، ويجب على الطلاب عمل غلاف من الورق المقوّى لمطوياتهم للمحافظة عليها مدة أطول.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (28) .
يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

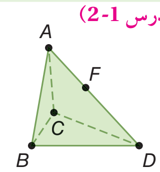
التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من فهمك المهارات السابقة الضرورية.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي. انظر إلى المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

استعمل الشكل المجاور. (تستعمل مع الدرس 1-2)



1) كم مستوى يظهر في الشكل؟ اذكرها. **انظر الهامش**

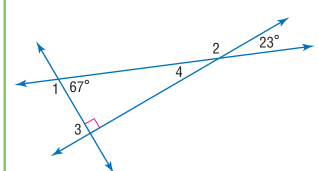
2) سمِّ ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة. **A, F, D**

3) هل تقع النقاط B, C, D في المستوى نفسه؟ وضِّح إجابتك. **انظر الهامش**

4) **أجهزة:** يوضع جهاز مساحة الأراضي على حامل ثلاثي القوائم. هل تقع الرؤوس السفلية للقوائم الثلاثة في المستوى نفسه؟ **نعم**

(تستعمل مع الدرسين 2-2، 3-2)

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية:



5) $\angle 1$ **113°**

6) $\angle 2$ **157°**

7) $\angle 3$ **90°**

8) $\angle 4$ **23°**

(تستعمل مع الدروس 4-2 إلى 6-2)

أوجد قيمة x لقيم a, b المعطاة في كل معادلة مما يأتي:

9) $a+8=-4(x-b),\ a=8,\ b=3$ **-1**

10) $b=3x+4a,\ a=-9,\ b=12$ **16**

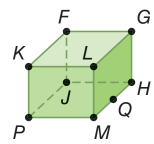
11) $\frac{a+2}{b+13}=5x,\ a=18,\ b=-1$ **$\frac{1}{3}$**

12) **معارض:** يقدم معرض هدية بسعر تشجيعي قدره 15 ريالًا عند شراء بطاقتَي دخول. إذا دفع أحمد وأخوه 95 ريالًا، فاكتب معادلة تمثل ما دفعه أحمد وأخوه، ثم حُلَّها لإيجاد ثمن بطاقة الدخول الواحدة. **$15+2x=95$ ؛ 40 ريالًا**

مراجعة سريعة

مثال 1

استعمل الشكل المجاور .



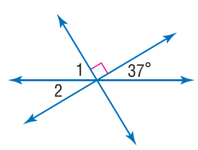
a) كم مستوى يظهر في الشكل؟ اذكرها.
ستة مستويات هي:
$FGL, JHM, FKP, GLM, FGH, KLM$.

b) سمِّ ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.
النقاط M, Q, H تقع على استقامة واحدة.

c) هل تقع النقاط F, K, J في المستوى نفسه؟ وضِّح إجابتك.
نعم. النقاط F, K, J تقع جميعها في المستوى $FKPJ$.

مثال 2

أوجد $m\angle 1$.



$m\angle 1+37^\circ+90^\circ=180^\circ$ اجمع

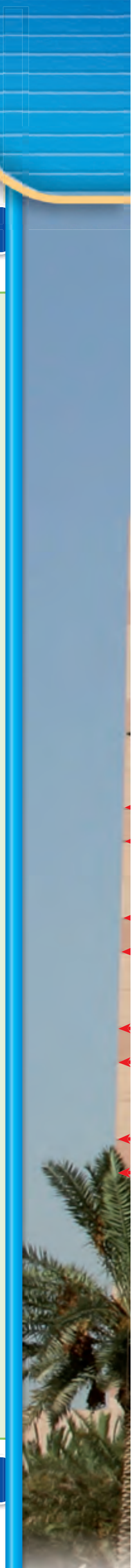
$m\angle 1=53^\circ$ بسِّط

مثال 3

أوجد قيمة x في المعادلة $a+8=b(x-7)$، إذا كان $a=12, b=10$.

$a+8=b(x-7)$	المعادلة المعطاة
$12+8=10(x-7)$	$a=12, b=10$
$20=10x-70$	بسِّط
$90=10x$	اجمع 70 للطرفين
$x=9$	اقسم الطرفين على 10

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com



المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب، والعبارة "إذا، فقم" في الجدول ستساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في حلِّ 25% أو أقل من الأسئلة،

فقم بمراجعة تحديد النقاط والمستقيمات والمستويات ونمذجتها ومراجعة تعريف المستقيمات المتعامدة وتحديدها.

www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلبة في حلِّ 50% تقريبًا من الأسئلة،

فقم بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

تدريبات إعادة التعليم

www.obeikaneducation.com

إجابات:

1) 4، ABD, ABC, CDA, BCD

3) نعم، النقاط الثلاث تقع في القاعدة للشكل التي تمثل المستوى BCD.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-1

استعمال علاقات الزوايا والقطع المستقيمة لإثبات نظريات.

الدرس 2-1

تعرّف العلاقات بين مستقيمين أو مستويين.

تسمية أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع لهما.

ما بعد الدرس 2-1

استعمال ميل المستقيم؛ لاستقصاء العلاقات الهندسية التي تتضمن المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا ؟"

واسأل:

- أي الشخصين داخل الغرفة يبدو أكبر حجمًا للناظر؛ الذي في الأمام أم الذي في الخلف؟ الذي في الأمام.
- لماذا تبدو الأجسام كأنها أكبر أو أصغر مما هي عليه في الحقيقة باستعمال المستقيمات غير المتوازية؟ إجابة ممكنة: لأن المسافة بين المستقيمين تتغير؛ فعندما يقترب المستقيمان أحدهما من الآخر يظهر الجسم بينهما أكبر، وعندما يتباعدان يظهر الجسم بينهما أصغر.

2-1 المستقيمان والقاطع
Lines and Transeversal

فيما سبق:

استعملتُ علاقات الزوايا والقطع المستقيمة لأبرهن نظريات.

(الدروس من 1-5 إلى 1-8)

والآن:

- أتعرّف العلاقات بين مستقيمين أو مستويين.
- أسمّي أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع لهما.

المفردات:

المستقيمان المتوازيان parallel lines

المستقيمان المتخالفان skew lines

المستويان المتوازيان parallel planes

القاطع transversal

الزوايا الداخلية interior angles

الزوايا الخارجية exterior angles

الزاويتان المتحالفتان consecutive angles

الزاويتان المتبادلتان داخليًا alternate interior angles

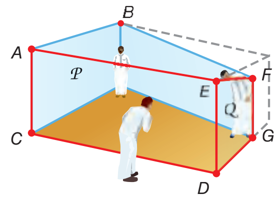
الزاويتان المتبادلتان خارجيًا alternate exterior angles

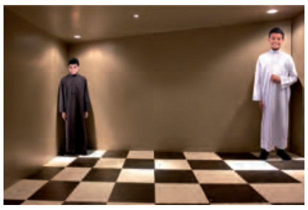
الزاويتان المتناظرتان corresponding angles

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تُظهر غُرفة الخداع البصري أن الشخص الواقف في الزاوية اليمنى أكبر من الشخص الواقف في الزاوية اليسرى. وفي المنظر الأمامي، يبدو الحائطان الأمامي والخلفي متوازيين في حين أنهما ليسا كذلك.





ويبدو السقف والأرضية أفقيين، ولكنهما في الحقيقة ليسا أفقيين.

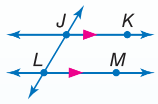
العلاقات بين المستقيمات والمستويات: استُعملتْ مستقيمات متوازية ومتقاطعة ومتخالفة بالإضافة إلى مستويات متقاطعة وأخرى متوازية؛ لتصميم غرفة الخداع كما يتضح في الرسم السابق.

مفاهيم أساسية — التوازي والتخالف

أضف إلى مطويتك

المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان لا يتقاطعان أبدًا ويقعان في المستوى نفسه.

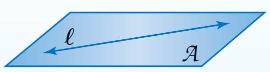
مثال: $\overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{LM}$



تستعمل رؤوس الأسهم لتدل على توازي مستقيمين.

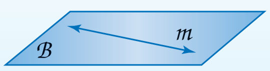
المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان لا يتقاطعان، ولا يقعان في المستوى نفسه.

مثال: المستقيمان ℓ, m متخالفان.



المستويان المتوازيان هما مستويان غير متقاطعين.

مثال: المستويان $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ متوازيان.

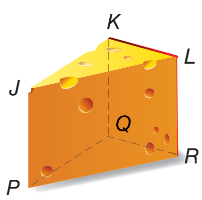


تُقرأ $\overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{LM}$: المستقيم JK يوازي المستقيم LM

إذا كانت القطع المستقيمة أو أنصاف المستقيمات أجزاءً من مستقيمات متوازية أو متخالفة، فإنها تكون متوازية أو متخالفة أيضًا.

مثال 1 من واقع الحياة — تحديد علاقات التوازي والتخالف

حدِّد كلًّا مما يأتي مستعملًا قطعة الجبن في الشكل المجاور :



a) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{JP}$.

$\overline{KQ}$, $\overline{LR}$

b) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{KL}$.

$\overline{JP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$

c) مستوى يوازي المستوى PQR .

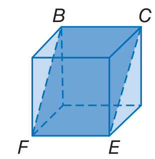
المستوى JKL هو المستوى الوحيد الموازي للمستوى PQR.

مصادر الدرس 2-1

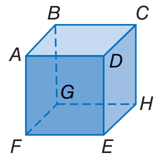
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (88)	• تنويع التعليم، ص (88, 91)	• تنويع التعليم، ص (88, 91)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (14)	• كتاب التمارين، ص (14)	• كتاب التمارين، ص (14)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

تنبيه!

التوازي والتخالف في تمرين تحقق من فهمك 1A: $\overleftrightarrow{FE}$ لا يخالف $\overleftrightarrow{BC}$ بل يوازيه، وذلك لأنهما لا يتقاطعان ويقعان في المستوى BCF.



✓ تحقق من فهمك



حدد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور :

1A) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overleftrightarrow{BC}$. **$\overline{EH}$, $\overline{GF}$, $\overline{ED}$, $\overline{FA}$**

1B) قطعة مستقيمة توازي $\overline{EH}$. **إجابة ممكنة: $\overline{AB}$**

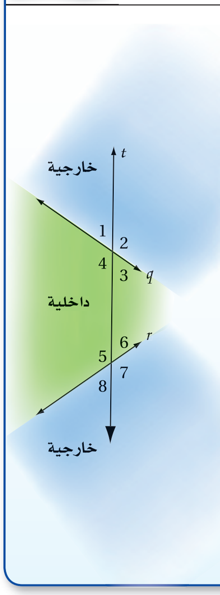
1C) جميع المستويات التي توازي المستوى DCH . **المستوى ABG**

علاقات أزواج الزوايا الناتجة عن القاطع: **القاطع** هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في المستوى نفسه وفي نقاط مختلفة. ففي الشكل أدناه، المستقيم t قاطع للمستقيمين q, r. لاحظ أن المستقيم t يشكّل ثماني زوايا مع المستقيمين q, r . وأزواج محددة من هذه الزوايا لها أسماء خاصة.

مفاهيم أساسية — علاقات أزواج الزوايا الناتجة عن القاطع

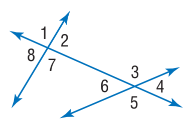
أضف إلى مطويتك

توجد أربع **زوايا داخلية** في المنطقة بين المستقيمين q, r.	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
توجد أربع **زوايا خارجية** في منطقتين ليستا بين q, r.	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
الزاويتان المتحالفتان هما زاويتان داخليتان واقعتان في جهة واحدة من القاطع t.	$\angle 4$ و $\angle 5$ ، $\angle 3$ و $\angle 6$
الزاويتان المتبادلتان داخليًّا هما زاويتان داخليتان غير متجاورتين تقعان في جهتين مختلفتين من القاطع t.	$\angle 3$ و $\angle 5$ ، $\angle 4$ و $\angle 6$
الزاويتان المتبادلتان خارجيًّا هما زاويتان خارجيتان غير متجاورتين تقعان في جهتين مختلفتين من القاطع t.	$\angle 1$ و $\angle 7$ ، $\angle 2$ و $\angle 8$
الزاويتان المتناظرتان هما زاويتان تقعان في جهة واحدة من القاطع t وفي الجهة نفسها من المستقيمين q, r.	$\angle 1$ و $\angle 5$ ، $\angle 2$ و $\angle 6$ $\angle 3$ و $\angle 7$ ، $\angle 4$ و $\angle 8$



مثال 2 تصنيف علاقات أزواج الزوايا

مستعملًا الشكل المجاور، صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين:



a) $\angle 1$ و $\angle 5$
متبادلتان خارجيًّا

b) $\angle 7$ و $\angle 6$
متحالفتان

c) $\angle 2$ و $\angle 4$
متناظرتان

d) $\angle 6$ و $\angle 2$
متبادلتان داخليًّا

✓ تحقق من فهمك

2A) $\angle 3$ و $\angle 7$ **2B)** $\angle 5$ و $\angle 7$ **2C)** $\angle 4$ و $\angle 8$ **2D)** $\angle 2$ و $\angle 3$

2A) متبادلتان داخليًّا
2B) متناظرتان
2C) متبادلتان خارجيًّا
2D) متحالفتان

العلاقات بين المستقيمات والمستويات

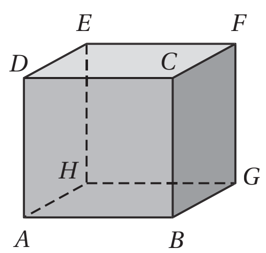
المثال 1 يبيّن كيفية تحديد العلاقات بين المستويات المتوازية، وعلى الطلاب أن يكونوا قادرين على تحديد مستوى في الشكل، وتحديد جميع المستويات التي توازيه.

✓ التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

1 حدّد كلًّا مما يأتي باستعمال الصندوق أدناه:



a) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{BC}$. $\overline{AD}, \overline{EH}, \overline{FG}$

b) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{EH}$. $\overline{AB}$ أو $\overline{CD}$ أو $\overline{BG}$ أو $\overline{CF}$

c) مستوى يوازي المستوى ABG. المستوى CDE

تنبيه!

القطع المستقيمة عندما تحتاج إلى أن تقرر ما إذا كانت القطع المستقيمة متقاطعة، فلا تمدّها لترى إن كانت تتقاطع إذا مُدتْ أكثر؛ لأن للقطع المستقيمة طولًا محددًا.

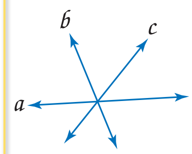
التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: ارسم شكلًا ثلاثي الأبعاد على السبورة (منشور رباعي أو هرم رباعي)، واختر طلابًا ليحدِّدوا الأحرف التي يوازي بعضها بعضًا.

عندما يوجد في الشكل أكثر من قاطع واحد، عيّن أولًا القاطع الذي ينتج عنه زوج الزوايا المعطاة، بتعيين المستقيم الذي يصل بين رأسيهما.

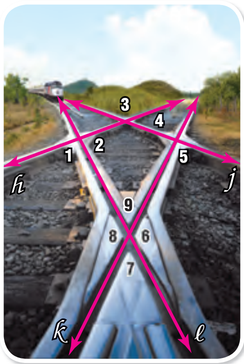
إرشادات للدراسة

القاطع
في الشكل أدناه، المستقيم c ليس قاطعًا للمستقيمين a, b لأن المستقيم c يقطع المستقيمين a, b في نقطة واحدة فقط.



مثال 3 تحديد القاطع وتصنيف أزواج الزوايا

استعمل صورة تقاطع سكك القطار المجاورة؛ لتحدد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف الأزواج إلى زاويتين متبادلتين داخليًا، أو متبادلتين خارجيًا، أو متناظرتين، أو متحالفتين.



a) $\angle 1$ و $\angle 3$
القاطع الذي يصل بين $\angle 1$ و $\angle 3$ هو المستقيم h.
وهما زاويتان متبادلتان خارجيًا.

b) $\angle 5$ و $\angle 6$
القاطع الذي يصل بين $\angle 5$ و $\angle 6$ هو المستقيم k.
وهما زاويتان متحالفتان.

c) $\angle 2$ و $\angle 6$
القاطع الذي يصل بين $\angle 2$ و $\angle 6$ هو المستقيم ℓ. وهما زاويتان متناظرتان.

تحقق من فهمك

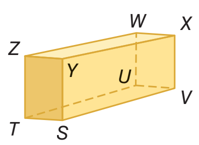
3A) $\angle 3$ و $\angle 5$ 3B) $\angle 2$ و $\angle 8$ 3C) $\angle 5$ و $\angle 7$ 3D) $\angle 2$ و $\angle 9$

3A) المستقيم j؛ متبادلتان خارجيًا
3B) المستقيم ℓ؛ متبادلتان داخليًا
3C) المستقيم k؛ متناظرتان
3D) المستقيم ℓ؛ متحالفتان

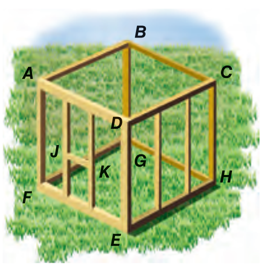
تأكد

المثال 1

حدد كلًّا مما يأتي مستعملًا متوازي المستطيلات في الشكل المجاور:



1) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{SV}$. $\overline{YX}$, $\overline{TU}$, $\overline{ZW}$
2) مستوى يوازي المستوى ZWX. TUV
3) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{TS}$ وتحتوي على النقطة W. $\overline{WZ}$, $\overline{WU}$
4) **إنشاءات:** استعمل الشكل المجاور لتحديد كلٍّ مما يأتي:

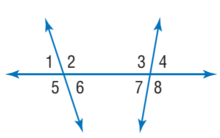


a) ثلاثة أزواج من المستويات المتوازية.
b) ثلاث قطع مستقيمة توازي $\overline{DE}$.
c) قطعتين مستقيمتين توازيان $\overline{FE}$.
d) زوجين من القطع المستقيمة المتخالفة.

4a) المستوى $ABCD$ يوازي المستوى $FGHE$؛ المستوى $ADEF$ يوازي المستوى $BCHG$؛ المستوى $DCHE$ يوازي المستوى $ABGF$
4b) $\overline{CH}$, $\overline{BG}$, $\overline{AF}$
4c) إجابة ممكنة: $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$
4d) إجابة ممكنة: $\overline{CH}$ و $\overline{JK}$؛ $\overline{BG}$ و $\overline{JK}$

المثال 2

مستعملًا الشكل المجاور، صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين.



5) $\angle 1$ و $\angle 8$ متبادلتان خارجيًّا
6) $\angle 2$ و $\angle 4$ متناظرتان
7) $\angle 3$ و $\angle 6$ متبادلتان داخليًّا
8) $\angle 6$ و $\angle 7$ متحالفتان

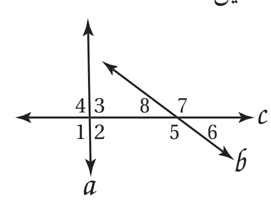
علاقات أزواج الزوايا

المثال 2 يبيّن كيفية تحديد العلاقات بين الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع.

المثال 3 يبيّن كيفية تحديد القاطع الذي يصل بين أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمات تقطعها قواطع.

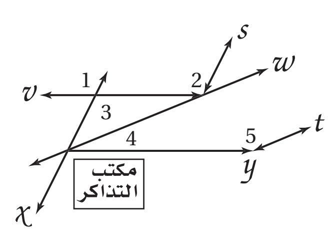
مثالان إضافيان

2 انظر إلى الشكل أدناه، وصنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا،أو متناظرتين أو متحالفتين.



a) $\angle 2$ و $\angle 6$ متناظرتان
b) $\angle 1$ و $\angle 7$ متبادلتان خارجيًّا
c) $\angle 3$ و $\angle 8$ متحالفتان
d) $\angle 3$ و $\angle 5$ متبادلتان داخليًّا

3 **محطة الحافلات:** يبين الشكل أدناه مسارات الحافلات في محطة. حدّد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف الأزواج إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا أو متبادلتين خارجيًّا أو متناظرتين أو متحالفتين.



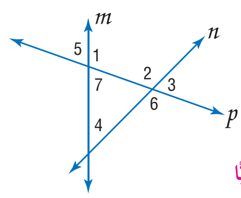
a) $\angle 1$ و $\angle 2$ ؛ v ؛ متناظرتان
b) $\angle 2$ و $\angle 3$ ؛ v ؛ متبادلتان داخليًّا
c) $\angle 4$ و $\angle 5$ ؛ y ؛ متحالفتان

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون: وزّع الطلاب مجموعات صغيرة، وزوِّدهم بأشكال من المستقيمات والقواطع للقيام بلعبة تخمين. يفكر أحد الطلاب في زاوية، ويصف لزملائه علاقات هذه الزاوية بزوايا أخرى مستعملًا مفردات هذا الدرس، فيتعرفون هذه الزاوية من خلال الوصف.

المثال 3 استعمل الشكل المجاور لتحدد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين:



9) $\angle 2$ و $\angle 4$

10) $\angle 5$ و $\angle 6$

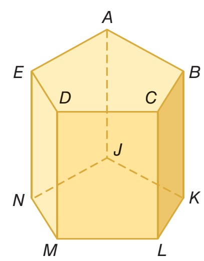
11) $\angle 4$ و $\angle 7$ المستقيم m ؛ متحالفتان

12) $\angle 2$ و $\angle 7$ المستقيم p؛ متبادلتان داخليًّا

9) المستقيم n؛ متناظرتان
10) المستقيم p؛ متبادلتان خارجيًّا

تدرب وحل المسائل

المثال 1 حدد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور :



13) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{DM}$. $\overline{CL}$, $\overline{EN}$, $\overline{BK}$, $\overline{AJ}$

14) مستوى يوازي المستوى ACD. JLM

15) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{BC}$. إجابة ممكنة: $\overline{EN}$

16) مستوى يتقاطع مع المستوى EDM . إجابة ممكنة: AEN

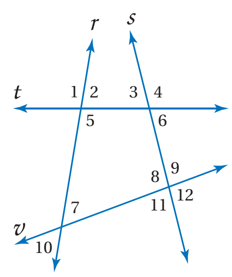
17) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{AE}$. إجابة ممكنة: AEN

18) قطعة مستقيمة توازي $\overline{EN}$. إجابة ممكنة: $\overline{AJ}$

19) قطعة مستقيمة توازي $\overline{AB}$ وتمر بالنقطة J . $\overline{JK}$

20) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{CL}$ وتمر بالنقطة E . إجابة ممكنة: $\overline{AE}$

المثال 2 مستعملًا الشكل المجاور، صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين.



21) $\angle 4$ و $\angle 9$ متناظرتان

22) $\angle 5$ و $\angle 7$ متحالفتان

23) $\angle 3$ و $\angle 5$ متبادلتان داخليًّا

24) $\angle 10$ و $\angle 11$ متناظرتان

25) $\angle 1$ و $\angle 6$ متبادلتان خارجيًّا

26) $\angle 6$ و $\angle 8$ متبادلتان داخليًّا

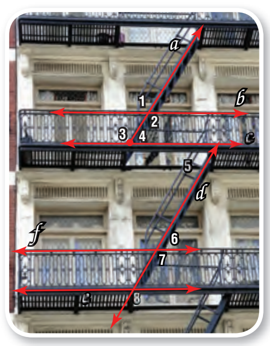
27) $\angle 2$ و $\angle 3$ متحالفتان

28) $\angle 9$ و $\angle 10$ متبادلتان خارجيًّا

29) $\angle 4$ و $\angle 11$ متبادلتان خارجيًّا

30) $\angle 7$ و $\angle 11$ متبادلتان داخليًّا

المثال 3 **سلّم طوارئ:** استعمل صورة سلّم الطوارئ المجاورة؛ لتحدد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين:



(31–36) انظر الهامش

31) $\angle 1$ و $\angle 3$

32) $\angle 2$ و $\angle 4$

33) $\angle 4$ و $\angle 5$

34) $\angle 5$ و $\angle 6$

35) $\angle 7$ و $\angle 8$

36) $\angle 2$ و $\angle 3$

الربط مع الحياة

لا يسمح بتقاطع خطوط التوصيل بين أبراج الكهرباء، لتجنب حدوث تماس كهربائي يؤدي إلى انقطاع التيار الكهربائي أو إشعال الحرائق.

37) **كهرباء:** استعمل الصورة المجاورة في فقرة الربط مع الحياة والمعلومات أدناها للإجابة عما يأتي:

a) ماذا يجب أن تكون عليه العلاقة بين خطَّي التوصيل الكهربائي p و m؟ وضح إجابتك. انظر الهامش

b) ما العلاقة بين ذراع الحمل q وخطَّي التوصيل الكهربائي p و m؟
الخط q يخالف كلًّا من p و m.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–12 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

المحتوى الرياضي

القاطع عند تصنيف الزوايا، من المهم جدًّا أن تحدد المستقيم الذي يعدّ قاطعًا؛ لأن العلاقة بين زاوية وأخرى تعتمد على القاطع الذي يصل بينهما.

إجابات:

31) المستقيم a ؛ متناظرتان.

32) المستقيم a ؛ متحالفتان.

33) المستقيم c ؛ متبادلتان داخليًّا.

34) المستقيم d ؛ متبادلتان داخليًّا.

35) المستقيم d ؛ متناظرتان.

36) المستقيم a ؛ متبادلتان داخليًّا.

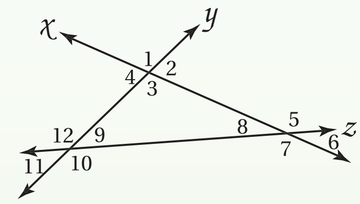
37a) إجابة ممكنة: بما أن المستقيمين يقعان في المستوى نفسه وغير متلاقيين فإنهما متوازيان.

تنويع الواجبات المنزلية

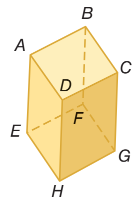
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	13-37 ، 46 ، 48-62
ضمن المتوسط	13-43 فردي ، 45 ، 46 ، 48-62
فوق المتوسط	38-59

إرشادات للمعلم الجديد

القاطع: لمساعدة الطلاب على تحديد القاطع، ارسم الشكل المبيّن أدناه، وجِّه الطلاب إلى أن أي مستقيم من المستقيمات الثلاثة، يمكن اعتباره قاطعًا؛ لأن كل واحد منها يقطع الاثنين الآخرين. وضّح المفهوم بتحديد علاقات متنوعة بين الزوايا.



استعمل الشكل المجاور لتصف العلاقة بين كل زوج من القطع المستقيمة الآتية بكتابة: متوازيتان، أو متخالفتان، أو متقاطعتان:



38) $\overline{FG}$ و $\overline{BC}$ متوازيتان

39) $\overline{AB}$ و $\overline{CG}$ متخالفتان

40) $\overline{DH}$ و $\overline{HG}$ متقاطعتان

41) $\overline{DH}$ و $\overline{BF}$ متوازيتان

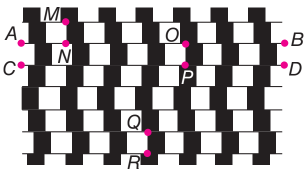
42) $\overline{EF}$ و $\overline{BC}$ متخالفتان

43) $\overline{CD}$ و $\overline{AD}$ متقاطعتان

الربط مع الحياة

السلالم الكهربائية أكثر فعالية من المصاعد في الارتفاعات القصيرة، وذلك بسبب قدرتها الاستيعابية الكبيرة، إذ يمكن لبعض السلالم الكهربائية نقل 6000 شخص خلال ساعة واحدة.

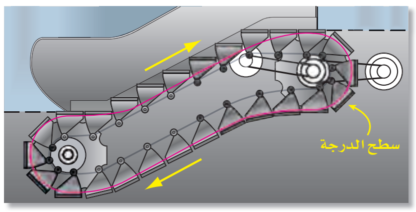
44) **خداع بصري:** صُمِّم نموذج الخداع البصري المجاور باستعمال مربعات متطابقة ومستقيمات فقط.



a) ما العلاقة بين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$؟ فسِّر تبريرك. **a, b) انظر الهامش.**

b) ما العلاقة بين $\overline{MN}$ و $\overline{QR}$؟ وما العلاقة بين القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ والقطعة المستقيمة $\overline{OP}$؟

45) **سلّم كهربائي:** يتكون السلّم الكهربائي من درجات مثبتة على مسار متصل بمحرّك، حيث تُطوى درجات أعلى السلم وأسفله؛ ليتكون سطح مستوٍ عند الدخول والخروج كما في الشكل التالي.



a) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الصاعدة؟ **أجزاء من مستويات متوازية.**

b) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الثلاث أعلى السلم؟ **تقع جميعها في المستوى نفسه.**

c) ما العلاقة بين أسطح الدرجات الصاعدة وأسطح الدرجات الهابطة في مسار السلم؟ **أي مستوى يحوي سطح درجة صاعدة، يتقاطع مع أي مستوى يحوي سطح درجة هابطة.**

مسائل مهارات التفكير العليا

46) **مسألة مفتوحة:** يحوي المستوى $\mathcal{P}$ المستقيمين المتوازيين a, b. ويقطع المستقيم c المستوى $\mathcal{P}$ عند النقطة J. إذا كان المستقيمان a, c متخالفين، والمستقيمان b, c غير متخالفين، فارسم شكلًا يمثل هذا الوصف. **انظر ملحق الإجابات**

47) **تحدٍّ:** افترض أن النقاط A, B, C تقع في المستوى $\mathcal{P}$، وأن النقاط D, E, F تقع في المستوى Q. وأن المستقيم m يحوي النقطتين D, F ولا يقطع المستوى $\mathcal{P}$. وأن المستقيم n يحوي النقطتين A, E.

a) ارسم شكلًا يمثل هذا الوصف. **انظر ملحق الإجابات**

b) ما العلاقة بين المستويين $\mathcal{P}$ و Q؟ **متوازيان**

c) ما العلاقة بين المستقيمين m و n؟ **متخالفان**

تبرير: المستويان $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ متوازيان، والمستوى $\mathcal{Z}$ يقطع المستوى $\mathcal{X}$. والمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ يقع في المستوى $\mathcal{X}$، والمستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ يقع في المستوى $\mathcal{Y}$، والمستقيم $\overleftrightarrow{EF}$ يقع في المستوى $\mathcal{Z}$. حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك: **48–50) انظر الهامش**

48) $\overleftrightarrow{AB}$ يخالف $\overleftrightarrow{CD}$.

49) $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع $\overleftrightarrow{EF}$.

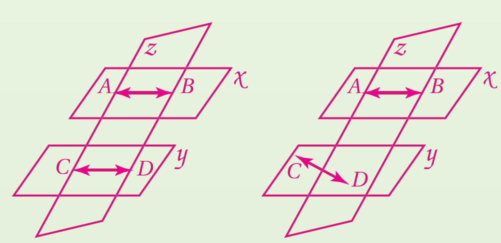
50) **اكتب:** وضّح لماذا لا يكون المستويان متخالفين أبدًا.

إجابات:

44a) $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$؛ المسافة بين القطعتين المستقيمتين هي نفسها من أي موقع على القطعة المستقيمة.

44b) $\overline{QR} \parallel \overline{MN}$؛ $\overline{OP}$ قاطع لكلٍّ من $\overline{CD}$ و $\overline{AB}$

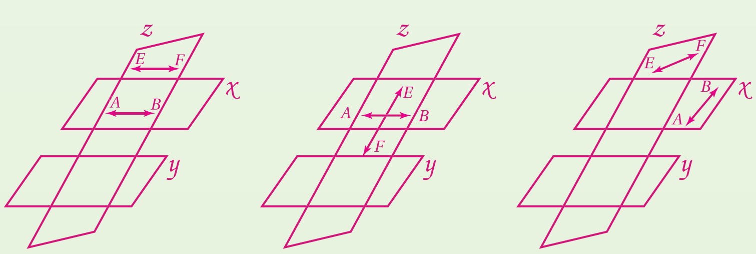
48) صحيحة أحيانًا؛ إما أن يكون $\overleftrightarrow{AB}$ موازيًّا لِـ $\overleftrightarrow{CD}$ أو يخالفه؛ لأنهما لا يتقاطعان أبدًا، ولا يقعان في المستوى نفسه.



$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان

$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيان

49) صحيحة أحيانًا؛ لأن المستقيمين يمكن أن يكونا متقاطعين أو متخالفين أو متوازيين.



$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{EF}$ متخالفان

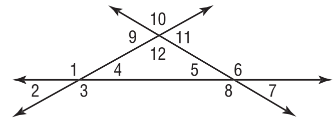
$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{EF}$ متقاطعان

$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{EF}$ متوازيان

50) لا يكون المستويان متخالفين؛ لأن تعريف المستقيمين المتخالفين ينصُّ على أن المستقيمين لا يتقاطعان ولا يقعان في المستوى نفسه. أما في المستويات فلا توجد إلا حالتان للمستويين؛ إما متوازيين أو متقاطعين.

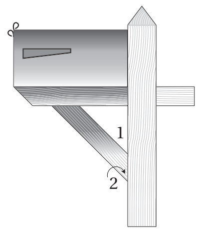
تدريب على اختبار

51) أي مما يأتي يمثل زاويتين متبادلتين خارجيًا؟ **B**



A $\angle 1$ و $\angle 5$
B $\angle 2$ و $\angle 6$
C $\angle 2$ و $\angle 10$
D $\angle 5$ و $\angle 9$

52) يمثل الشكل المجاور صندوق بريد. أيٌّ مما يأتي يصف $\angle 1$ و $\angle 2$؟ **D**

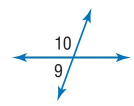


A زاويتان متبادلتان خارجيًا
B زاويتان متبادلتان داخليًا
C زاويتان متحالفتان
D زاويتان متناظرتان

مراجعة تراكمية

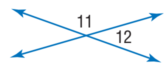
أوجد قياسات الزوايا المرقمة في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-8)

53) $m\angle 9 = (2x-4)^\circ$، $m\angle 10 = (2x+4)^\circ$



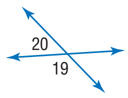
$m\angle 9 = 86^\circ$, $m\angle 10 = 94^\circ$

54) $m\angle 11 = (4x)^\circ$، $m\angle 12 = (2x-6)^\circ$



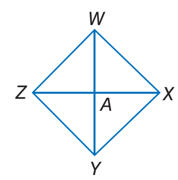
$m\angle 11 = 124^\circ$, $m\angle 12 = 56^\circ$

55) $m\angle 19 = (100+20x)^\circ$، $m\angle 20 = (20x)^\circ$



$m\angle 19 = 140^\circ$, $m\angle 20 = 40^\circ$

56) **برهان:** أكمل البرهان الآتي: (الدرس 1-7)



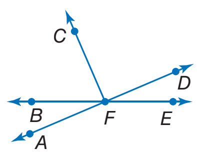
المعطيات: $\overline{WY} \cong \overline{ZX}$
A نقطة منتصف $\overline{WY}$ و $\overline{ZX}$.

المطلوب: $\overline{WA} \cong \overline{ZA}$ انظر الهامش

57) استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي؛ لتحصل على نتيجة صائبة إن أمكن من العبارتين الآتيتين، واذكر القانون الذي استعملته، وإذا تعذَّر الحصول على نتيجة صائبة، فاكتب "لا نتيجة صائبة". (الدرس 1-4)

A إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما ليستا متجاورتين على مستقيم.
B إذا تجاورت زاويتان على مستقيم، فإنهما غير متطابقتين. لا نتيجة صحيحة

جبر: في الشكل المجاور: $\overline{FC} \perp \overline{AD}$. (مهارة سابقة)



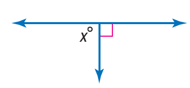
58) إذا كان $m\angle CFD = (12a+45)^\circ$، فأوجد قيمة a . **3.75**

59) إذا كان $m\angle AFB = (8x-6)^\circ$ و $m\angle BFC = (14x+8)^\circ$، فأوجد قيمة x . **4**

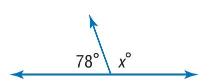
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

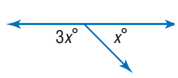
60) **90**



61) **102**



62) **45**



4 التقويم

بطاقة مكافأة: قبل مغادرتك غرفة الصف، اطلب إلى الطلاب أن يحدِّدوا مستقيمات متقاطعة في غرفة الصف، وأن يصنِّفوا أزواج الزوايا المتكونة، عندما يقطع قاطع مستقيمين آخرين.

إجابة:

56) **المعطيات:** $\overline{WY} \cong \overline{ZX}$
A منتصف $\overline{WY}$
A منتصف $\overline{ZX}$
المطلوب: $\overline{WA} \cong \overline{ZA}$
البرهان:
العبارات (المبررات)

1) $\overline{WY} \cong \overline{ZX}$ ، A منتصف $\overline{WY}$
A منتصف $\overline{ZX}$. (معطيات)

2) $WY = ZX$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

3) $WA = AY$ ، $ZA = AX$ (تعريف نقطة المنتصف)

4) $WY = WA + AY$ ، $ZX = ZA + AX$ (مسلّمة جمع القطع المستقيمة)

5) $WA + AY = ZA + AX$ (بالتعويض)

6) $WA + WA = ZA + ZA$ (بالتعويض)

7) $2WA = 2ZA$ (بالتعويض)

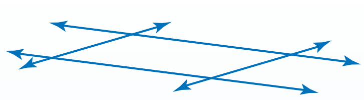
8) $WA = ZA$ (خاصية القسمة)

9) $\overline{WA} \cong \overline{ZA}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: زوّد الطلاب برسم مثل الشكل المجاور، واطلب إليهم أن يسمُّوا كل زاوية ويحدِّدوا أزواج الزوايا المتبادلة داخليًا، والزوايا المتناظرة وهكذا، وأخبرهم بضرورة استيعاب المفاهيم الأساسية في هذا الدرس على نحو تامٍّ، وذلك لأهميتها في دراسة البراهين وكتابتها.



مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 2

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

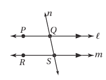
تدريبات إعادة التعليم (6) دون

الاسم ______________ التاريخ ______________

2-1 تدريبات إعادة التعليم

المستقيمان والقاطع

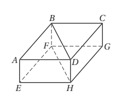
العلاقات بين المستقيمات والمستويات:



عندما يقع مستقيمان غير متقاطعين في المستوى نفسه، فإنهما يكونان **متوازيين**، والمستقيمان غير المتقاطعين اللذان لا يقعان في مستوى واحد يُسمَّيان **مستقيمين متخالفين**، ويدل السهمان في الشكل المجاور على أن المستقيم ℓ يوازي المستقيم m، وتُكتب بالرموز $\ell \parallel m$.

ويمكنك أن تكتب $\overline{RS} \parallel \overline{PQ}$؛ لأن أجزاء المستقيمين المتوازيين تكون متوازية، وبالمثل إذا لم يتقاطع مستويان، فإنهما **مستويان متوازيان**.

مثال حدِّد كلًّا ممَّا يأتي مستعملًا الشكل المجاور:



a) جميع المستويات التي توازي المستوى ABD.

المستوى EFH

b) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{CG}$.

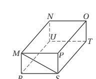
$\overline{BF}, \overline{DH}, \overline{AE}$.

c) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{EH}$.

$\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{BD}, \overline{CG}, \overline{BF}$.

تمارين

حدِّد كلًّا ممَّا يأتي مستعملًا الشكل المجاور:



1) جميع المستويات التي تتقاطع مع المستوى OPT.

MNO, MPS, NOT, RST

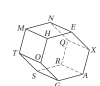
2) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{NU}$.

$\overline{OT}, \overline{PS}, \overline{MR}$

3) جميع القطع المستقيمة التي تتقاطع مع $\overline{MP}$.

$\overline{MR}, \overline{MN}, \overline{MS}, \overline{PS}, \overline{PO}$

حدِّد كلًّا ممَّا يأتي مستعملًا الشكل المجاور:



4) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{QX}$.

$\overline{RA}, \overline{SG}, \overline{TO}, \overline{MH}, \overline{NE}$

5) جميع المستويات التي تتقاطع مع المستوى MHE.

MHO, NEX, HEX, MNQ, SGO, RAX

6) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{QR}$.

$\overline{AX}, \overline{HO}, \overline{MT}$

7) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{AG}$. $\overline{ST}, \overline{TM}, \overline{NQ}, \overline{QR}, \overline{TO}, \overline{MH}, \overline{NE}, \overline{QX}$.

الصف: الأول الثانوي | 6 | الفصل 2: التوازي والتعامد

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (7) دون

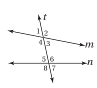
الاسم ______________ التاريخ ______________

2-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المستقيمان والقاطع

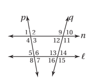
علاقات أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع:

المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في نقاط مختلفة في المستوى نفسه يُسمَّى **قاطعًا**، وفي الشكل أدناه المستقيم t قاطع للمستقيمين m, n، ويكوّن المستقيمان والقاطع ثماني زوايا. وبعض أزواج هذه الزوايا لها أسماء خاصّة. والجدول أدناه يبيّن أزواج الزوايا وأسماءها.



الاسم	أزواج الزوايا
زوايا داخلية	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
زاويتان متبادلتان داخليًّا	$\angle 3$ و $\angle 5$; $\angle 4$ و $\angle 6$
زاويتان متحالفتان	$\angle 3$ و $\angle 6$; $\angle 4$ و $\angle 5$
زوايا خارجية	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
زاويتان متبادلتان خارجيًّا	$\angle 1$ و $\angle 7$; $\angle 2$ و $\angle 8$
زاويتان متناظرتان	$\angle 3$ و $\angle 7$; $\angle 4$ و $\angle 8$ $\angle 1$ و $\angle 5$; $\angle 2$ و $\angle 6$

مثال مستعملًا الشكل المجاور، صنّف كلّ زوج من الزوايا التالية إلى: زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين:



a) $\angle 10$ و $\angle 16$ — زاويتان متبادلتان خارجيًّا

b) $\angle 4$ و $\angle 12$ — زاويتان متناظرتان

c) $\angle 12$ و $\angle 13$ — زاويتان متحالفتان

d) $\angle 3$ و $\angle 9$ — زاويتان متبادلتان داخليًّا

تمارين:

استعمل الشّكل في المثال أعلاه للإجابة عن الأسئلة 12 – 1.

عيّن القاطع الذي يصل بين كلّ زوج من الزوايا.

1) $\angle 9$ و $\angle 13$ q 2) $\angle 5$ و $\angle 14$ l 3) $\angle 4$ و $\angle 6$ p

صنّف كلّ زوج من الزوايا التالية إلى: زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين:

4) $\angle 1$ و $\angle 5$ **متناظرتان** 5) $\angle 6$ و $\angle 14$ **متناظرتان** 6) $\angle 2$ و $\angle 8$ **متبادلتان خارجيًّا**

7) $\angle 3$ و $\angle 11$ **متناظرتان** 8) $\angle 12$ و $\angle 3$ **متحالفتان** 9) $\angle 4$ و $\angle 6$ **متبادلتان داخليًّا**

10) $\angle 6$ و $\angle 16$ **متبادلتان داخليًّا** 11) $\angle 11$ و $\angle 14$ **متحالفتان**

الصف: الأول الثانوي | 7 | الفصل 2: التوازي والتعامد

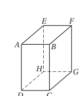
تدريبات المهارات (8) دون ضمن

الاسم ______________ التاريخ ______________

2-1 تدريبات المهارات

المستقيمان والقاطع

حدِّد كلًّا ممَّا يأتي مستعملًا الشكل المجاور:



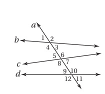
1) جميع المستويات التي توازي المستوى DEH. المستوى **CFG**

2) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{AB}$. $\overline{HG}, \overline{EF}, \overline{CD}$

3) جميع القطع المستقيمة التي تقطع $\overline{GH}$. $\overline{HD}, \overline{EH}, \overline{GC}, \overline{FG}$

4) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{CD}$. $\overline{EA}, \overline{FB}, \overline{EH}, \overline{FG}$

مستعملًا الشكل المجاور، صنّفْ كلّ زوج من الزوايا التالية إلى: زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين:



5) $\angle 4$ و $\angle 5$ **متحالفتان** 6) $\angle 5$ و $\angle 11$ **متبادلتان خارجيًّا**

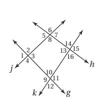
7) $\angle 4$ و $\angle 6$ **متبادلتان داخليًّا** 8) $\angle 7$ و $\angle 9$ **متبادلتان داخليًّا**

9) $\angle 2$ و $\angle 8$ **متبادلتان خارجيًّا** 10) $\angle 3$ و $\angle 6$ **متحالفتان**

11) $\angle 1$ و $\angle 9$ **متناظرتان** 12) $\angle 3$ و $\angle 9$ **متبادلتان داخليًّا**

13) $\angle 6$ و $\angle 12$ **متبادلتان خارجيًّا** 14) $\angle 7$ و $\angle 11$ **متناظرتان**

استفد من الشكل المجاور لتحدد القاطع الذي يصل بين كلّ زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف زوج الزوايا إلى: زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين:



15) $\angle 4$ و $\angle 10$ **متبادلتان داخليًّا ؛ g** 16) $\angle 2$ و $\angle 12$ **متبادلتان خارجيًّا ؛ g**

17) $\angle 7$ و $\angle 3$ **متناظرتان؛ j** 18) $\angle 13$ و $\angle 10$ **متحالفتان؛ k**

19) $\angle 8$ و $\angle 14$ **متبادلتان داخليًّا ؛ h** 20) $\angle 6$ و $\angle 14$ **متناظرتان؛ h**

الصف: الأول الثانوي | 8 | الفصل 2: التوازي والتعامد

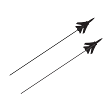
تدريبات حل المسألة (9) دون ضمن فوق

الاسم ______________ التاريخ ______________

2-1 تدريبات حلّ المسألة

المستقيمان والقاطع

1) **الطائرات المقاتلة:** تطير طائرتان مقاتلتان بالسرعة نفسها وفي الاتجاه نفسه تاركتين أثرًا خلفَهُما. ارسم أثر الطائرة الثانية موضحًا الخطوات:

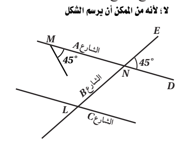


انظر إجابات الطلاب

2) **خرائط:** إذا أراد مهندس أن يشقَّ طريقًا من النقطة M، موازيًا للشارع B، وطُلب منه توضيح طريقة الرسم. فأجاب: أرسم زاويةً رأسها M وأحد ضلعَيها $\overline{MD}$، وتطابق $\angle END$

a) هل كان شرح المهندس كافيًا لرسم الشارع بالشكل الصحيح؟ وضح إجابتك.

لا؛ لأنه من الممكن أن يرسم الشكل



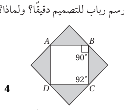
b) ارسم المستقيم الذي يمثل الشارع المطلوب، مستفيدًا من فكرة المهندس.

انظر رسومات الطلاب

c) هل يوجد على الرسم زاوية رأسها M وقياسها $35°$؟ ولماذا؟

انظر إجابات الطلاب

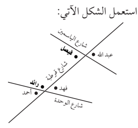
3) **تصميم:** صمّمت رباب رسمًا لإطار الصورة المبيّن أدناه، فهل كان رسم رباب للتصميم دقيقًا؟ ولماذا؟



4

لا؛ إجابة ممكنة: حتى يكون الرسم دقيقًا، يجب أن يكون $\angle DCB = 90°$

4) **خرائط:** استعمل الشكل الآتي:



a) يسكن فيصل في الزاوية التي تشكّل زاويةً متبادلةً داخليًّا مع مكان سكن فهدٍ، عيّن مكان سكن فيصلٍ على الخريطة.

انظر الخريطة

b) يسكن رائد عند الزاوية التي تشكّل زاويةً متحالفةً مع مكان سكن فيصل، عيّن مكان سكن رائد على الخريطة.

انظر الخريطة

الصف: الأول الثانوي | 9 | الفصل 2: التوازي والتعامد

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 2

دون دون المتوسط　　ضمن ضمن المتوسط　　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10)　ضمن فوق

الاسم ________________ التاريخ ________

2-1 التدريبات الإثرائيّة

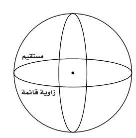
الهندسة الكرويّة

تظهر خطوط الطول والعرض في الخريطة على شكل مستقيمات، ومع ذلك فإن خطوط الطول والعرض موجودة على كرة وليست على مستوى، ولكي يكون تطبيق الهندسة على خطوط الطول والعرض صحيحًا، يتعيّن أن تعتمد الهندسة الكرويّة.

ولكن معاني الخطوط والزوايا في الهندسة الكرويّة تختلف عنها في الهندسة المستوية.

فمثلًا:

1) المستقيم في الهندسة **الكرويّة**: عبارة عن دائرة عُظمى؛ أيْ دائرة تقع على الكرة وقُطرُها قُطر الكرة.



2) الخط ذو الطول اللانهائي في الهندسة الكرويّة عبارة عن دائرةٍ عُظمى تلفّ حول نفسها عددًا لانهائيًّا من المرّات؛ لذا فإنه في الهندسة الكرويّة تكون الدائرة العظمى خطًّا ودائرةً.

3) الزاوية القائمة: تقاطع خطوط العرض والطول يكوِّن زاويةً قائمةً.

تمارين

1) أحضر كرة. ثمّ لُفَّ حلقتَي مطاط حول الكرة، بحيث تمثّلان خطّين (دوائر عُظمى) على الكرة، ما عدد نقاط التقاطع بينهما؟ **2**

2) حاول أن ترسم خطّين (دائرتين عظميين)، أو أن تلُفّ حلقتين من المطاط حول الكرة دون أن يتقاطعا، هل هذا ممكن؟ **لا**

3) خمّن عدد نقاط تقاطع خطين (دائرتين عُظمَيين) في الهندسة الكرويّة. **يتقاطع خطّان (دائرتان عُظميان) دائمًا في نقطتين.**

4) مسلمة التوازي في الهندسة الإقليدية تنصُّ على أنه لأيّ مستقيم ونقطةٍ لا تقع عليه، يمكن رسم مستقيمٍ واحدٍ فقط يمر بالنقطة المعلومة ولا يقطع المستقيم الأول، فهل تتحقّق هذه المسلّمة في الهندسة الكرويّة؟ وضّح ذلك.

لا؛ لأن مسلّمة التوازي تنصُّ على أن المستقيمين لا يتقاطعان، وهذا غير ممكن في الهندسة الكرويّة؛ لأن الخطين في الهندسة الكروية (الدائرتين العُظميين) يتقاطعان في نقطتين دائمًا.

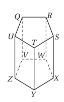
الصف: الأول الثانوي　10　الفصل 2: التوازي والتعامد

كتاب التمارين (14)　دون ضمن فوق

الفصل الثاني: التوازي والتعامد

2-1 المستقيمان والقاطع

حدّد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور:



1) جميع المستويات التي تتقاطع مع المستوى STX. $TUY, RSW, STU, VWX, QUV, QVW$

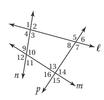
2) جميع القطع المستقيمة التي تتقاطع مع $\overline{QU}$. $\overline{QR}, \overline{QV}, \overline{TU}, \overline{UZ}$

3) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{XY}$. $\overline{ST}$

4) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{VW}$. $\overline{QU}, \overline{RS}, \overline{ST}, \overline{SX}, \overline{TU}, \overline{TY}, \overline{UZ}$

الفصل الثاني التوازي والتعامد

مستعملًا الشكل المجاور، صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا أو متبادلتين خارجيًّا أو متناظرتين أو متحالفتين:



5) $\angle 2, \angle 10$ متناظرتان

6) $\angle 7, \angle 13$ متبادلتان داخليًّا

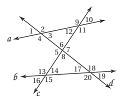
7) $\angle 9, \angle 13$ متناظرتان

8) $\angle 6, \angle 16$ متبادلتان خارجيًّا

9) $\angle 3, \angle 10$ متحالفتان

10) $\angle 8, \angle 14$ متبادلتان داخليًّا

استعمل بالشكل المجاور لتحدد القاطع الذي يصل بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثمّ صنف كل زوج من الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا أو متبادلتين خارجيًّا أو متناظرتين أو متحالفتين:



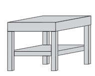
11) $\angle 2, \angle 12$　a؛ متبادلتان داخليًّا

12) $\angle 6, \angle 18$　d؛ متناظرتان

13) $\angle 13, \angle 19$　b؛ متبادلتان خارجيًّا

14) $\angle 11, \angle 7$　c؛ متحالفتان

أثاث: استعمل صورة الطاولة المجاورة للإجابة عن السؤالين الآتيين:



15) سمّ مستويين متوازيين.

إجابة ممكنة: سطح الطاولة العلوي والرف السفلي.

16) سمّ مستقيمين متوازيين.

إجابة ممكنة: أي زوج من أرجل الطاولة.

14

1 التركيز

الهدف:
استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لاستكشاف قياسات الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

المواد اللازمة:
- الحاسبة البيانية TI–nspire

إرشادات للتعليم
وضِّح للطلاب كيف تسحب المستقيمات وتحرّكها، بحيث يقطع القاطع المستقيمين المتوازيين.

2 التدريس

العمل فرديًّا أو ثنائيًّا
اطلب إلى الطلاب أن يعملوا فرادى أو في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات لتنفيذ النشاط وحل السؤالين 2–1.

ناقش مع الطلاب ما إذا كانت العلاقة بين الزوايا ستتغير عند تدوير القاطع.

ناقش أيضًا العلاقة بين الزوايا المتكوّنة عندما يكون القاطع عموديًّا على أحد المستقيمين، وأن يحلّوا الأسئلة ليختبروا تخميناتهم.

التدريب: اطلب إلى الطلاب أن يحلُّوا السؤالين 3 و 4.

3 التقويم

التقويم التكويني
استعمل الأسئلة 4–1؛ لتقويم استيعاب الطلاب العلاقات بين الزوايا الناشئة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

استكشاف
معمل الحاسبة البيانية

2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية
Angles and Parallel Lines

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI – nspire؛ لتستكشف قياسات الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

نشاط **المستقيمان المتوازيان والقاطع**

الخطوة 1: ارسم مستقيمًا

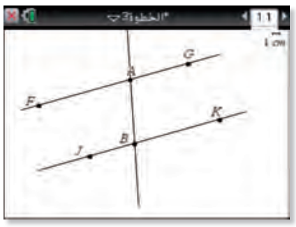
- ارسم مستقيمًا وسمِّ النقطتين F, G عليه، بالضغط على المفاتيح menu ثم اختر on واختر منها 4: النقاط والمستقيمات ثم 2: التسمية ارسمه، ثم اختر نقطة عليه بالضغط على menu ومنها اختر 2: نقطة على المستقيم.
- سمِّ كل من النقطتين بالضغط على النقطة، ثم على menu ctrl واختيار 2: التسمية وتسمية النقطتين بالحرفين FG

الخطوة 2: ارسم مستقيمًا موازيًا

- حدِّد نقطةً لا تقع على $\overleftrightarrow{FG}$ وسمِّها J بالضغط على menu، ثم 4: النقاط والمستقيمات واختر منها 1: نقطة في المستوى، وحدد النقطة وسمِّها بالضغط على النقطة ثم على menu ctrl واختيار 2: التسمية وتسمية النقطة بالحرف J
- ارسم مستقيما يمرُّ في J ويوازي FG بالضغط على menu واختيار 7: الإنشاء الهندسي، واختر منها 2: مستقيم موازٍ ثم الضغط على النقطة J والمستقيم FG، فينتج مستقيم موازٍ.
- اختر نقطةً عليه بالضغط على menu، ومنها اختر 2: نقطة على المستقيم ثم اضغط على المستقيم وحدِّد النقطة وسمِّها بالضغط على المفاتيح menu ctrl واختر منها 2: التسمية وسمِّها K

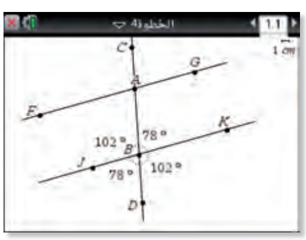
الخطوة 3: ارسم قاطعًا

- ارسم النقطة A على $\overleftrightarrow{FG}$، والنقطة B على $\overleftrightarrow{JK}$، وذلك بالضغط على menu واختر 4: النقاط والمستقيمات، ثم حدِّد كلًّا من النقطتين وتسميتهما بالضغط على menu ctrl ثم اختيار 2: التسمية، وسمِّ كلًّا منهما.
- صِلْ بين النقطتين A, B لرسم القاطع $\overleftrightarrow{AB}$، بالضغط على menu واختر منها 4: النقاط والمستقيمات، واختر منها 4: مستقيم ثم اضغط على النقطتين A, B



الخطوة 4: قِسْ كل زاوية

- ارسم نقطتين على AB وسمِّهما C, D بالضغط على menu، واختر 2: نقطة على المستقيم ثم اضغط على المستقيم AB وحدِّد مكان النقطتين كما في الشكل أدناه.
- سمِّ كلًّا منها بالضغط على menu ctrl، ثم اختر 2: التسمية وسمّهما بِـ C, D
- لقياس الزوايا الثماني الناتجة عن المستقيمات الثلاثة، اضغط menu واختر منها 6: القياس، ثم اختر الزاوية واضغط على النقاط الثلاث J ثم B ثم D، سيظهر $m\angle JBD$ وليكن $78°$
- كرِّر ذلك مع باقي الزوايا لإيجاد قياساتها.



من المحسوس إلى المجرد
قدّم إلى الطلاب نموذجًا من مستقيمين يقطعهما قاطع كُتبت عليه قياسات الزوايا، واطلب إليهم أن يبيِّنوا إن كان المستقيمان متوازيين أم لا.

استكشاف

2-2 ملاحظات الدرس

حلّل النتائج: 1,2) انظر ملحق الإجابات

1) سجّلِ القياسات من الخطوة 4 في جدول يشبه الجدول المجاور. أي الزوايا لها القياس نفسه؟

الزاوية	$\angle FAC$	$\angle CAG$	$\angle GAB$	$\angle FAB$	$\angle JBA$	$\angle ABK$	$\angle KBD$	$\angle JBD$
القياس الأول	107°	73°	107°	73°	107°	73°	107°	73°

2) اسحب النقطة C أو D لتحرك القاطع $\overleftrightarrow{AB}$، بحيث يقطع المستقيمين المتوازيين بزاوية مختلفة.
أضفْ صفًّا بعنوان القياس الثاني إلى جدولك، ثم سجّل القياسات الجديدة.
كرّر هذه الخطوات، بإضافة صفوف أخرى عناوينها: القياس الثالث، القياس الرابع، ...

3) باستعمال الزوايا المدوّنة في الجدول، عيّن أزواج الزوايا التي لها الأسماء الخاصة الآتية، وصِفِ العلاقة بين قياساتها. a-d) انظر ملحق الإجابات
ثم اكتب تخمينًا على صورة (إذا... فإن...) حول قياس كل زوج من الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

a) متناظرتان
b) متبادلتان داخليًّا
c) متبادلتان خارجيًّا
d) متحالفتان

4) اسحب النقطة C أو D، بحيث يكون قياس أيٍّ من الزوايا 90° a-b) انظر ملحق الإجابات

a) ماذا تلاحظ حول قياسات الزوايا الأخرى؟

b) كوّن تخمينًا حول القاطع الذي يكون عموديًّا على أحد المستقيمين المتوازيين.

2-2 ملاحظات الدرس

2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية
Angles and Parallel Lines

فيما سبق:

درستُ تسمية أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع لهما.

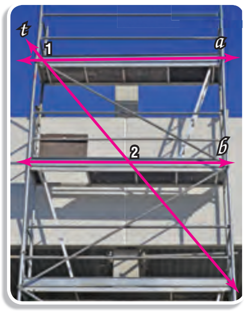
(الدرس 2-1)

والآن:

- أستعمل نظريات المستقيمين المتوازيين لتحديد العلاقات بين أزواج محددة من الزوايا.
- أستعمل الجبر لأجد قياسات الزوايا.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



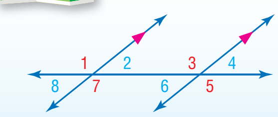
تستعمل طريقة السقالات كثيرًا في أعمال البناء، وتتكون من أذرع معدنية موصولة بطريقة هندسية توفر مساحات عمل أفقية عند ارتفاعات مختلفة وبطريقة آمنة. فالقاطع t المبين في الصورة يوفر دعامة لمساحتَي العمل المتوازيتين.

المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا: في الصورة أعلاه: المستقيم t قاطع للمستقيمين a, b؛ إذن $\angle 1$ و $\angle 2$ متناظرتان. وبما أن a, b متوازيان؛ لذا فإن هناك علاقة خاصة بين $\angle 1$ و $\angle 2$.

مسلمة 2.1 مسلّمة الزاويتين المتناظرتين

أضف إلى مطويتك

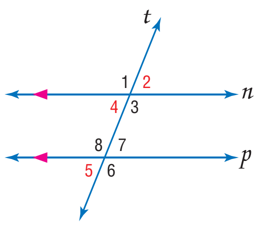
إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.



أمثلة: $\angle 1 \cong \angle 3$, $\angle 2 \cong \angle 4$, $\angle 5 \cong \angle 7$, $\angle 6 \cong \angle 8$

مثال 1 استعمال مسلّمة الزاويتين المتناظرتين

في الشكل المجاور: $m\angle 5 = 72^\circ$. أوجد قياس كلٍّ من الزاويتين الآتيتين، واذكر المسلّمات أو النظريات التي استعملتها.



a) $\angle 4$

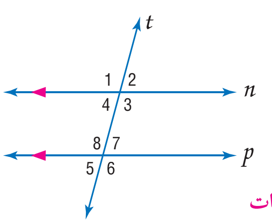
$\angle 4 \cong \angle 5$	مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
$m\angle 4 = m\angle 5$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 4 = 72^\circ$	بالتعويض

b) $\angle 2$

$\angle 2 \cong \angle 4$	نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
$\angle 4 \cong \angle 5$	مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
$\angle 2 \cong \angle 5$	خاصية التعدي للتطابق
$m\angle 2 = m\angle 5$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 2 = 72^\circ$	بالتعويض

تحقق من فهمك

في الشكل المجاور: $m\angle 8 = 105^\circ$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.



A1) $\angle 1$ B1) $\angle 2$ C1) $\angle 3$

(1A–1C) انظر ملحق الإجابات

في المثال 1، الزاويتان المتبادلتان خارجيًّا 5, 2 متطابقتان، ويقود هذا المثال إلى النظريات الآتية حول العلاقة بين أزواج أخرى من الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-2

تحديد العلاقات بين مستقيمين أو مستويين. تسمية أزواج الزوايا المتكونة من مستقيمين وقاطع لهما.

الدرس 2-2

استعمال نظريات المستقيمين المتوازيين؛ لتحديد العلاقات بين أزواج محددة من الزوايا.

استعمال الجبر لإيجاد قياسات الزوايا.

ما بعد الدرس 2-2

تمييز وبرهنة توازي مستقيمين باستعمال العلاقات بين أزواج الزوايا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا ؟"

واسأل:

- ما الأشكال المتكوّنة من السقالات؟ مثلثات ومستطيلات
- هل مساحتا العمل متوازيتان أم متعامدتان؟ متوازيتان

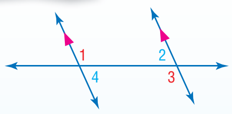
مصادر الدرس 2-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (95)	• تنويع التعليم، ص (95, 100)	• تنويع التعليم، ص (95, 100)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (15)	• كتاب التمارين، ص (15)	• كتاب التمارين، ص (15)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

نظريات — المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا

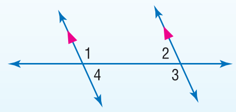
أضف إلى مطويتك

2.1 نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا: إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متبادلتين داخليًا متطابقتان.



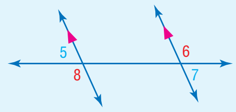
أمثلة: $\angle 1 \cong \angle 3$ و $\angle 2 \cong \angle 4$

2.2 نظرية الزاويتين المتحالفتين: إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.



أمثلة: $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان.
$\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.

2.3 نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا: إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متبادلتين خارجيًا متطابقتان.



أمثلة: $\angle 5 \cong \angle 7$ و $\angle 6 \cong \angle 8$

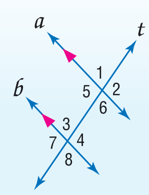
ستبرهن النظريتان 2.2 و 2.3 في السؤالين 28 و 33 على الترتيب

بما أن المسلّمات تُقبل دون برهان ، فيمكنك استعمال مسلّمة الزاويتين المتناظرتين لإثبات كلٍّ من النظريات السابقة.

برهان — نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا

المعطيات: $a \parallel b$
t قاطع للمستقيمين a ، b.

المطلوب: $\angle 4 \cong \angle 5$ ، $\angle 3 \cong \angle 6$



برهان حر:
لدينا من المعطيات $a \parallel b$ ، والمستقيم t قاطع لهما. ومن مسلّمة الزاويتين المتناظرتين $\angle 4 \cong \angle 8$ ، $\angle 2 \cong \angle 6$. وكذلك $\angle 5 \cong \angle 8$ ، $\angle 3 \cong \angle 2$ ؛ لأن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان؛ لذا فإن $\angle 5 \cong \angle 4$ و $\angle 3 \cong \angle 6$ بحسب خاصية التعدي للتطابق.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال نظريات المستقيمين المتوازيين وأزواج الزوايا

تخطيط المدن: شارع A وشارع B متوازيان ويقطعهما شارع C.
فإذا كان $m\angle 1 = 118°$، فأوجد $m\angle 2$، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.

$\angle 2 \cong \angle 1$	نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
$m\angle 2 = m\angle 1$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 2 = 118°$	بالتعويض

تحقق من فهمك

تخطيط المدن: استعمل الشكل أعلاه للإجابة عن السؤالين الآتيين، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها :

2A) إذا كان $m\angle 1 = 100°$، فأوجد $m\angle 4$.
2B) إذا كان $m\angle 3 = 70°$، فأوجد $m\angle 4$.

الربط مع الحياة
عند تخطيط الأحياء الجديدة في بعض المدن، يُشترط ألا يقل قياس زوايا تقاطعات شوارعها عن 60°.

2A) 80° ؛ نظرية الزاويتين المتكاملتين ومسلمة الزاويتين المتناظرتين.
2B) 70° ؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا.

المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا

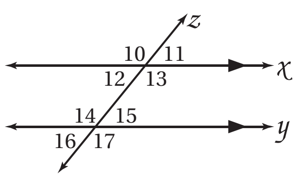
المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية تحديد قياسات الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما إذا عُلم قياس إحدى الزوايا.

التقويم التكويني

استعمل أسئلة "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

1 في الشكل أدناه $m\angle 11 = 51$، أوجد قياس كلٍّ من الزاويتين الآتيتين، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.



a) $m\angle 15$ ؛ 51° ؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

b) $m\angle 16$ ؛ 51° ؛ نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس، ومسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

التعليم باستعمال التقنيات

نظام إجابات الطلاب: اعرض على الطلاب شكلًا لمستقيمين متوازيين وقاطعًا لهما، ورقّم الزوايا من 1 إلى 8.
اختر زاوية، واطلب إلى الطلاب أن يذكروا رقم الزاوية المتبادلة داخليًا معها. كرر هذا النشاط ليعيّن الطلاب الزوايا المتبادلة خارجيًا، أو المتقابلة بالرأس، والمتكاملة.

تنويع التعليم

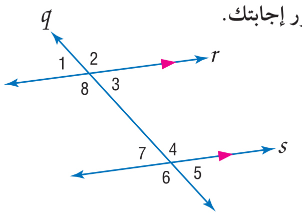
دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون: استعمل أشرطة لاصقة لتشكيل مستقيمين متوازيين وقاطع لهما على أرضية الفصل، واطلب إلى مجموعات ثنائية من الطلاب الوقوف عند زاويتين متطابقتين أو متكاملتين، وأن يوضِّحا ما إذا كانت الزوايا متبادلة داخليًا أو متبادلة خارجيًا أو متناظرة أو متحالفة.

الجبر وقياسات الزوايا: يمكنك استعمال العلاقات الخاصة بين الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين وقاطع لهما لإيجاد القيم المجهولة.

مثال 3 إيجاد قيم المتغيرات

جبر: استعمل الشكل المجاور لإيجاد المتغير في كلٍّ مما يأتي. برّر إجابتك.



a) إذا كان $m\angle 1 = 85°$, $m\angle 4 = (2x - 17)°$، فأوجد قيمة x.

$\angle 3 \cong \angle 1$	نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
$m\angle 3 = m\angle 1$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 3 = 85°$	عوّض

بما أن المستقيمين r, s متوازيان، فإن الزاويتين $\angle 3$, $\angle 4$ متكاملتان بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين.

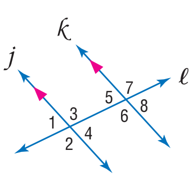
$m\angle 3 + m\angle 4 = 180$	تعريف الزاويتين المتكاملتين
$85 + 2x - 17 = 180$	عوّض
$2x + 68 = 180$	بسّط
$2x = 112$	اطرح 68 من كلا الطرفين
$x = 56$	اقسم كلا الطرفين على 2

b) إذا كان $m\angle 3 = (4y + 30)°$, $m\angle 7 = (7y + 6)°$، فأوجد قيمة y.

$\angle 3 \cong \angle 7$	نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
$m\angle 3 = m\angle 7$	تعريف تطابق الزوايا
$4y + 30 = 7y + 6$	عوّض
$30 = 3y + 6$	اطرح $4y$ من كلا الطرفين
$24 = 3y$	اطرح 6 من كلا الطرفين
$8 = y$	اقسم كلا الطرفين على 3

✓ تحقق من فهمك

انظر الهامش. (3A, 3B)



3A) إذا كان $m\angle 2 = (4x + 7)°$, $m\angle 7 = (5x - 13)°$، فأوجد قيمة x.

3B) إذا كان $m\angle 5 = 68°$, $m\angle 3 = (3y - 2)°$، فأوجد قيمة y.

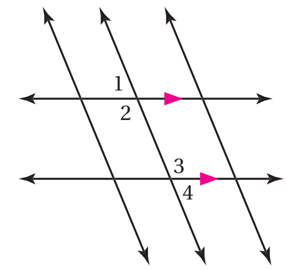
إرشادات للدراسة

تطبيق المسلّمات والنظريات

طبِّق مسلّمات ونظريات هذا الدرس على المستقيمات المتوازية التي يقطعها قاطع فقط؛ لذا لا تفترض توازي مستقيمين إلا إذا ورد ذلك في النص، أو وُجِدت أسهمٌ على المستقيمات تُشير إلى توازيها.

مثال إضافي

2 تبليط: يمثّل الشكل أدناه بلاط أرضية بيت فيصل. إذا كان $m\angle 2 = 125°$، فأوجد $m\angle 3$.



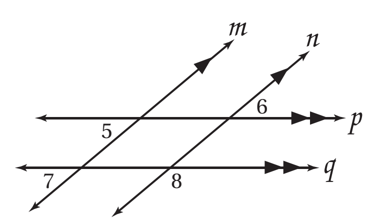
$m\angle 3 = 125°$

الجبر وقياسات الزوايا

المثالان 3, 4 يستخدمان العبارة الجبرية لتمثيل قياسات زوايا. يجب أن يكون لدى الطلاب القدرة على حل المعادلة جبريًّا؛ لإيجاد قيمة المتغير ثم تعويض قيمة المتغير في العبارة الجبرية لإيجاد قياس الزاوية.

مثال إضافي

3 الجبر: استعمل الشكل أدناه لإيجاد المتغير في كلٍّ مما يأتي، مبررًا إجابتك.



a) إذا كان $m\angle 5 = 2x - 10$ و $m\angle 7 = x + 15$، فأوجد قيمة x. 25؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

b) إذا كان $m\angle 6 = 4(y - 25)$ و $m\angle 8 = 4y$ فأوجد قيمة y. 35؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا، ونظرية الزاويتين المتكاملتين.

تنبيه!

قياسات الزوايا: دقق في معطيات السؤال؛ لتحدد ما إذا كانت الزوايا متطابقة أو متكاملة.

إجابات (تحقق من فهمك):

3A) بما أن المستقيمين j و k متوازيان، إذن $\angle 2$ و $\angle 7$ متطابقتان بحسب نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

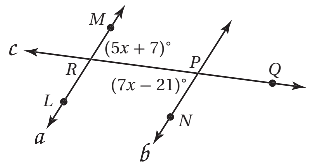
$m\angle 2 = m\angle 7$	تعريف التطابق
$4x + 7 = 5x - 13$	بالتعويض
$4x + 20 = 5x$	بإضافة 13 لكلا الطرفين
$20 = x$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين

3B) بما أن المستقيمين j و k متوازيان، إذن $\angle 3$ و $\angle 5$ متكاملتان بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين.

$m\angle 5 + m\angle 3 = 180°$	تعريف الزاويتين المتكاملتين
$68 + 3y - 2 = 180°$	بالتعويض
$3y + 66 = 180$	بالتبسيط
$3y = 114$	بطرح 66 من الطرفين
$y = 38$	بقسمة الطرفين على 3

مثال 4 من الاختبار المعياري

مسألة مفتوحة: إذا كان $a \parallel b$
فأوجد $m\angle MRQ$. وبيّن خطوات الحل.



اقرأ سؤال الاختبار

تعلم من الشكل أن $m\angle MRQ = (5x+7)^\circ,\ m\angle RPN = (7x-21)^\circ$، والمطلوب أن تجد $m\angle MRQ$.

حُلَّ سؤال الاختبار

$\angle MRQ, \angle RPN$ متبادلتان داخليًّا. وبما أن المستقيمين a، b متوازيان، إذن يجب أن تكون الزاويتان المتبادلتان داخليًّا متطابقتين؛ لذا $\angle MRQ \cong \angle RPN$. وبحسب تعريف التطابق يكون $m\angle MRQ = m\angle RPN$. عوِّض بقياسات الزوايا المُعطاة في هذه المعادلة وحلها لإيجاد قيمة x.

$m\angle MRQ = m\angle RPN$	زاويتان متبادلتان داخليًّا
$5x + 7 = 7x - 21$	عوّض
$7 = 2x - 21$	اطرح $5x$ من كلا الطرفين
$28 = 2x$	اجمع 21 إلى كلا الطرفين
$14 = x$	اقسم كلا الطرفين على 2

الآن، استعمل قيمة x لإيجاد $m\angle MRQ$.

$m\angle MRQ = (5x + 7)^\circ$	عوّض
$= (5(14) + 7)^\circ$	$x = 14$
$= 77^\circ$	بسّط

تحقق: تحقق من إجابتك باستعمال قيمة x لتجد $m\angle RPN$.

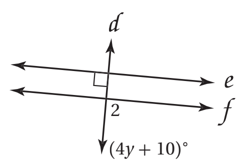
$$m\angle RPN = (7x - 21)^\circ$$
$$= (7(14) - 21)^\circ$$
$$= 77^\circ \quad ✓$$

بما أن $a \parallel b$ فإن $m\angle MRQ = m\angle RPN$، فإن $\angle MRQ \cong \angle RPN$، و $a \parallel b$. ✓

تحقق من فهمك

4) إذا كان $e \parallel f$، فأوجد قيمة y مبينًا خطوات الحل.

$4y + 10 = 90$
$4y = 80$
$y = 20$



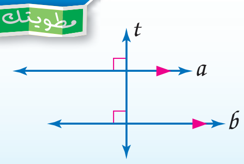
تنتج علاقة خاصة عندما يكون القاطع لمستقيمين متوازيين عموديًّا عليهما.

نظرية 2.4 نظرية القاطع العمودي

أضف إلى مطويتك

إذا كان مستقيم عموديًا على أحد مستقيمين متوازيين في مستوى، فإنه يكون عموديًا على المستقيم الآخر.

مثال: إذا كان $a \parallel b$، و $t \perp a$، فإن $t \perp b$.



ستبرهن النظرية 2.4 في السؤال 34

إرشادات للاختبار

تحديد المطلوب أعد قراءة سؤال الاختبار بدقة لتحدد المطلوب. ففي المثال 2: يقع بعض الطلاب في خطأ شائع هو التوقف بعد إيجاد قيمة x، والقول إن إجابة هذا السؤال هي 14.

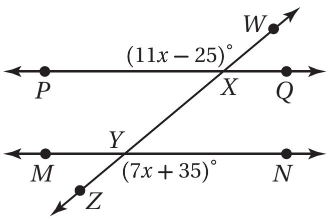
قراءة الرياضيات

العمودي تذكّر أن الرمز $b \perp t$ يقرأ على النحو الآتي: المستقيم b عمودي على المستقيم t.

مثال إضافي

4 تدريب على الاختبار المعياري:

أوجد $m\angle ZYN$ بحيث يكون $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{MN}$. بيّن خطوات الحل.



$11x - 25 = 7x + 35$

$4x = 60$

$x = 15$

$m\angle ZYN = 140^\circ$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 11–1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

1) $94°$؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

2) $94°$؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

3) $86°$؛ إجابة ممكنة: مسلّمة الزاويتين المتناظرتين، ونظرية الزاويتين المتكاملتين.

4) $101°$؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.

5) $79°$؛ إجابة ممكنة: نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس، ونظرية الزاويتين المتحالفتين.

6) $79°$؛ نظرية الزاويتين المتحالفتين.

8) $x = 125$ نظرية الزاويتين المتكاملتين $y = 125$ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.

9) $x = 114$ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

10) $x = 70$ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.

12) 22؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

13) 22؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

14) 140؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا ونظرية الزاويتين المتكاملتين.

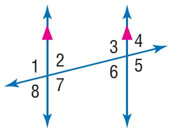
15) 162؛ نظرية الزاويتين المتكاملتين.

16) 140؛ نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس.

17) 18؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

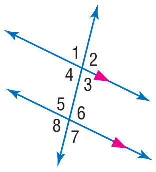
تأكد

المثال 1 في الشكل المجاور: $m\angle 1 = 94°$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها: (1–3) انظر الهامش



1) $\angle 3$ 2) $\angle 5$ 3) $\angle 4$

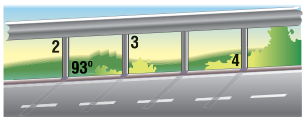
المثال 2 في الشكل المجاور: $m\angle 4 = 101°$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها: (4–6) انظر الهامش



4) $\angle 6$ 5) $\angle 7$ 6) $\angle 5$

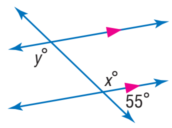
7) **طرق:** حاجز الحماية في الشكل المجاور يوازي سطح الطريق، والدعامات الرأسية يوازي بعضها بعضًا. أوجد قياسات الزوايا 2, 3, 4 .

$m\angle 2 = 93°, m\angle 3 = 87°, m\angle 4 = 87°$

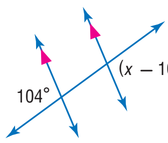


المثال 3 أوجد قيمة كل متغير في الأشكال الآتية. برّر إجابتك. (8–10) انظر الهامش

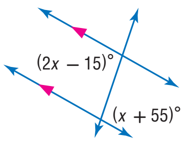
8)



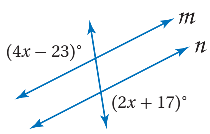
9)



10)



المثال 4 11) **إجابة قصيرة:** إذا كان $m \parallel n$، فأوجد قيمة x . بيِّن خطوات حلك.



$4x - 23 = 2x + 17$

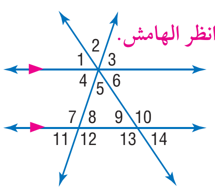
$4x - 2x = 23 + 17$

$2x = 40$

$x = 20$

تدرب وحل المسائل

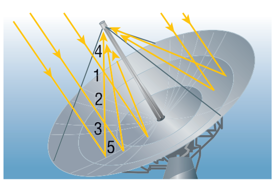
المثالان 1, 2 في الشكل المجاور: $m\angle 11 = 22°$ ، و $m\angle 14 = 18°$ ، أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها : (12–17) انظر الهامش.



12) $\angle 4$ 13) $\angle 3$ 14) $\angle 2$

15) $\angle 10$ 16) $\angle 5$ 17) $\angle 1$

طاقة شمسية : يجمع الطبق الشمسي الطاقة بتوجيه أشعة الشمس نحو مُستقبِل يقع في بؤرة الطبق. مفترضًا أن أشعة الشمس متوازية، حدّد العلاقة بين أزواج الزوايا الآتية. برّر إجابتك:



18) $\angle 1$ و $\angle 2$ 19) $\angle 1$ و $\angle 3$

20) $\angle 4$ و $\angle 5$ 21) $\angle 3$ و $\angle 4$

18) متكاملتان ؛ لأنهما زاويتان متحالفتان.

19) متطابقتان ؛ لأنهما زاويتان متناظرتان

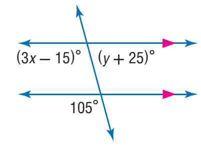
20) متطابقتان ؛ لأنهما زاويتان متبادلتان خارجيًا

تنويع الواجبات المنزلية

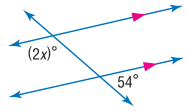
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	39-40, 42-55, 12-27
ضمن المتوسط	13-27 فردي، 28-39 ، 40 ، 45-55
فوق المتوسط	28-51 ، (52-55 اختياري)

21) متكاملتان؛ بما أن $\angle 3$ و $\angle 5$ متجاورتان على مستقيم فإنهما متكاملتان. $\angle 4$ و $\angle 5$ متطابقتان لأنهما زاويتان متبادلتان خارجيًا، لذا فإن $\angle 3$ تكمل $\angle 4$.

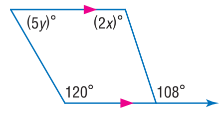
المثال 3 أوجد قيمة كل متغيّر في الأشكال الآتية. برّر إجابتك: 22–24) انظر ملحق الإجابات للتبرير

22)


$x = 40, y = 50$

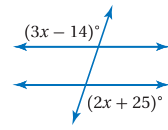
23)


$x = 63$

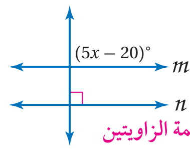
24)


$x = 54, y = 12$

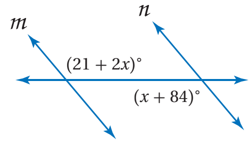
المثال 4 إذا كان $m \parallel n$، فأوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي، وحدّد المسلّمة أو النظرية التي استعملتها :

25)


39؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا

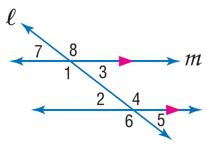
26)


22؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

27)


63؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.

28) **برهان:** أكمل برهان النظرية 2.2 .



المعطيات: $m \parallel n$ ، ℓ قاطع للمستقيمين m, n.

المطلوب: $\angle 1$ ، $\angle 2$ متكاملتان، $\angle 3, \angle 4$ متكاملتان.

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ___؟___ $m \parallel n$ ، ℓ قاطع للمستقيمين m, n.	a) مُعطى
b) $\angle 1, \angle 3$ متجاورتان على مستقيم $\angle 2, \angle 4$ متجاورتان على مستقيم	b) ___؟___ تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
c) ___؟___	c) نظرية الزاويتين المتكاملتين.
d) $\angle 1 \cong \angle 4, \angle 2 \cong \angle 3$	d) ___؟___ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
e) $m\angle 1 = m\angle 4, m\angle 2 = m\angle 3$	e) تعريف تطابق الزوايا.
f) ___؟___ $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان. $\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.	f) ___؟___ بالتعويض

28c) $\angle 1$ و $\angle 3$ متكاملتان. $\angle 2$ و $\angle 4$ متكاملتان.

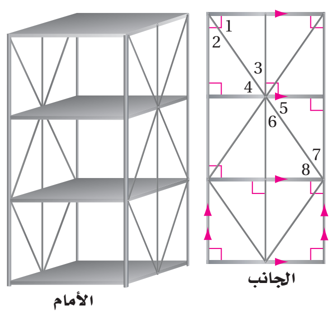
29) متطابقتان؛ زاويتان متبادلتان داخليًّا

30) متطابقتان؛ زاويتان متناظرتان

31) متطابقتان؛ زاويتان متقابلتان بالرأس

32) متتامتان؛ لأن المستقيمين الرأسي والأفقي متعامدان ويشكلان زوايا قائمة.

تخزين: عند تركيب الرفوف، تُضاف دعامات جانبية متقاطعة. حدّد العلاقة بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي. برّر إجابتك:



29) $\angle 1$ و $\angle 8$

30) $\angle 1$ و $\angle 5$

31) $\angle 3$ و $\angle 6$

32) $\angle 1$ و $\angle 2$

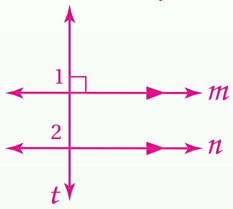
33) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لنظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا. (نظرية 2.3). انظر ملحق الإجابات

34) **برهان:** أثبت أنه إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستقيمين متوازيين في مستوًى، فإنه يكون عموديًّا على الآخر. (نظرية 2.4). انظر الهامش.

إجابات:

34) **المعطيات:** $m \parallel n$ ، $t \perp m$

المطلوب: $t \perp n$



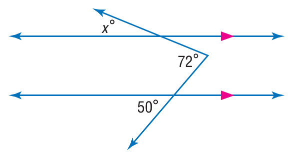
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $m \parallel n$ ، $t \perp m$	1) معطيات
2) $\angle 1$ قائمة	2) تعريف التعامد
3) $m\angle 1 = 90°$	3) تعريف الزاوية القائمة
4) $\angle 1 \cong \angle 2$	4) مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
5) $m\angle 1 = m\angle 2$	5) تعريف تطابق الزوايا
6) $m\angle 2 = 90°$	6) بالتعويض
7) $\angle 2$ زاوية قائمة	7) تعريف الزاوية القائمة
8) $t \perp n$	8) تعريف المستقيمين المتعامدين

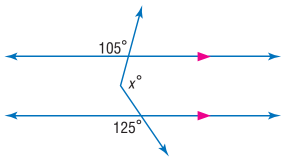
99 الدرس 2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية

أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين: (إرشاد: ارسم مستقيمًا مساعدًا)

(35 22



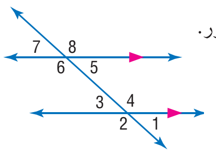
(36 130



مراجعة المفردات

الاحتمال
تذكر أن الاحتمال هو نسبة عدد نواتج الحادثة إلى العدد الكلي للنواتج.

(37 **احتمالات:** افترض أنك اخترت عشوائيًّا زوجًا من الزوايا في الشكل المجاور.



a) ما عدد الطرق الممكنة لاختيار زوج الزوايا؟ برّر إجابتك.

b) صِف العلاقات الممكنة بين زاويتي كل زوج. برّر إجابتك.

c) أوجد احتمال اختيار زوج من الزوايا المتطابقة. برّر إجابتك.
(a–c انظر الهامش.

(38 **تمثيلات متعددة:** ستبحث في هذه المسألة العلاقة بين الزوايا الخارجية الواقعة في الجهة نفسها.

a) **هندسيًا:** ارسم خمسة أزواج من المستقيمات المتوازية m و n، a و b، r و s، j و k، x و y يقطع كلًّا منها قاطع t، ثم قِسْ جميع الزوايا الناتجة. (يمكنك استخدام الآلة البيانية في هذا التمرين)

(a–e انظر ملحق الإجابات

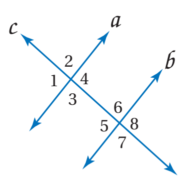
b) **جدوليًا:** دوّن بياناتك في جدول.

c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول العلاقة بين الزاويتين الخارجيتين الواقعتين في جهة واحدة من القاطع.

d) **منطقيًّا:** ما نوع التبرير الذي استعملته لوضع تخمينك؟ برّر إجابتك.

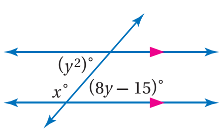
e) **برهان:** برهن تخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا



(39 **اكتب:** إذا كان المستقيم a يوازي المستقيم b، و $\angle 1 \cong \angle 2$.
صِف العلاقة بين المستقيمين b و c. وبرّر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

(40 **اكتب:** حدد أوجه الشبه والاختلاف بين نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا، ونظرية الزاويتين المتحالفتين. انظر ملحق الإجابات



(41 **تحدٍ:** أوجد جميع قيم x, y في الشكل المجاور.
$x = 155$ أو $x = 171$ ؛ $y = 3$ أو $y = 5$

(42 **تبرير:** ما أقل عدد من قياسات الزوايا التي يجب معرفتها حتى يكون بمقدورك تحديد قياسات جميع الزوايا الناتجة عن مستقيمين متوازيين يقطعهما قاطع؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش

تمثيلات متعددة: في السؤال 38، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسية والجداول والوصف اللفظي؛ لتوضيح العلاقة بين الزاويتين الخارجيتين الواقعتين في جهة واحدة من القاطع.

4 التقويم

تعلم سابق: وزِّع الطلاب مجموعات صغيرة، واطلب إلى كل مجموعة أن يتناوب أفرادها على شرح الطريقة التي ساعدهم فيها درس المستقيمات المتوازية والقاطع على تعلم العلاقات بين الزوايا.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 1–2, 2–2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (30) .

إجابات:

37a) إجابة ممكنة: يوجد 28 زوجًا من الزوايا، حيث يمكن تشكيل سبعة أزواج من الزوايا مع الزاوية الأولى، وستة أزواج من الزوايا مع الزاوية الثانية؛ لأنها شكلت زوجًا مع الزاوية الأولى، وهكذا فإن عدد أزواج الزوايا يساوي $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ أو 28 زوجًا.

37b) إجابة ممكنة: توجد علاقتان ممكنتان بين أزواج الزوايا، فإذا اخترنا زاويتين، فإنهما إما متطابقتان أو متكاملتان.

37c) 12 زوجًا من الزوايا متطابقة، وَ 16 زوجًا منها متكاملة؛ لذا فاحتمال أن تكون الزاويتان في زوج الزوايا متطابقتين هو $\frac{12}{28}$ أي $\frac{3}{7}$. بينما احتمال كونهما متكاملتين هو $\frac{16}{28}$ أي $\frac{4}{7}$

42) يكفي معرفة قياس زاوية واحدة؛ لأن الزوايا الباقية إما مطابقة لها أو مكملة.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: تعلمت سابقًا أنَّ ميل مستقيم يعرّف بأنه نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي.

أو: $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$.

مثّل بيانيًّا المستقيمين المتوازيين $y = 6$ و $y = 1$، ثم ارسم قاطعًا يميل بزاوية ليقطع هذين المستقيمين، ثم أوجد ميل القاطع. تختلف إجابات الطلبة

ما ميل كلٍّ من المستقيمين المتوازيين؟ صفر

إجابة:

44) 1) صحيحة؛ لأن ∠6 , ∠3 داخليتان وغير متجاورتين وتقعان في جهتين مختلفتين من القاطع ℓ

2) صحيحة؛ لأن ∠6 , ∠4 داخليتان وواقعتان في جهة واحدة من القاطع ℓ

3) خاطئة؛ لأن ∠7 , ∠1 تقعان على الجهة نفسها من القاطع ℓ

تدريب على اختبار

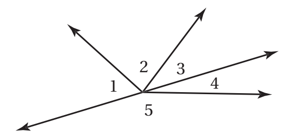
43) افترض أن ∠5, ∠4 متجاورتان على مستقيم، إذا كان $m\angle 1 = (2x)^\circ,\ m\angle 2 = (3x-20)^\circ,\ m\angle 3 = (x-4)^\circ$، فما قيمة $m\angle 3$؟ **C**

A 26°

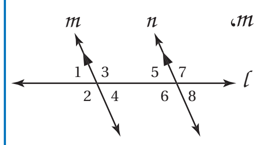
B 28°

C 30°

D 32°



44) إجابة قصيرة: إذا كان $m \parallel n$، حدّد أي العبارات الآتية صحيحة، وأيها خاطئة. وبرّر إجابتك؟ انظر الهامش



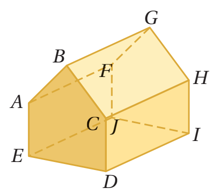
1) ∠6, ∠3 متبادلتان داخليًّا.

2) ∠6, ∠4 متحالفتان.

3) ∠1, ∠7 متبادلتان خارجيًّا.

مراجعة تراكمية

حدّد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور: (الدرس 1-2)

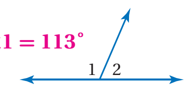


45) جميع القطع المستقيمة التي توازي AB. $\overline{FG}$

46) جميع القطع المستقيمة التي تخالف CH. $\overline{AB}, \overline{DE}, \overline{FG}, \overline{IJ}, \overline{AE}, \overline{FJ}$

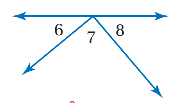
47) جميع المستويات التي توازي AEF. DCH

48) إذا كانت ∠2, ∠1 متجاورتين على مستقيم، و $m\angle 2 = 67^\circ$، فأوجد $m\angle 1$.



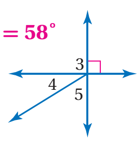
$m\angle 1 = 113^\circ$

49) إذا كانت ∠8, ∠6 متتامتين، و $m\angle 8 = 47^\circ$، فأوجد $m\angle 6, m\angle 7$.



$m\angle 6 = 43^\circ,\ m\angle 7 = 90^\circ$

50) إذا كان $m\angle 4 = 32^\circ$، فأوجد $m\angle 5, m\angle 3$.

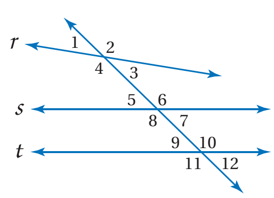


$m\angle 3 = 90^\circ,\ m\angle 5 = 58^\circ$

51) قطارات: وضع مهندس مخططًا لشبكة سكك حديدية تصل بين المدن A, B, C, D, E, F، فرسم قطعة مستقيمة بين كل مدينتين على الخريطة، ولاحظ أن أي ثلاث مدن منها لا تقع على استقامة واحدة. ما عدد القطع المستقيمة التي رسمها المهندس؟ (الدرس 1-5) **15**

استعد للدرس اللاحق

حدّد العلاقة بين كل زوج من الزوايا فيما يأتي:



52) ∠1, ∠12 متبادلتان خارجيًّا

53) ∠7, ∠10 متحالفتان

54) ∠4, ∠8 متناظرتان

55) ∠2, ∠11 متبادلتان خارجيًّا

101 الدرس 2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية

الفصل 2

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 2

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

الاسم ______ التاريخ ______

2-2 تدريبات إعادة التعليم

الزوايا والمستقيمات المتوازية

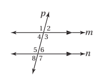
المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا:

عندما يقطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن أزواج الزوايا الآتية تكون متطابقة:

- الزاويتان المتناظرتان.
- الزاويتان المتبادلتان داخليًّا.
- الزاويتان المتبادلتان خارجيًّا.

الزاويتان المتحالفتان متكاملتان أيضًا.

مثال في الشكل المجاور، إذا كان $m\angle 2 = 75°$، فأوجد قياسات الزوايا الباقية.



$m\angle 1 = 105°$ $\angle 1$ و $\angle 2$ زاويتان متجاورتان متكاملتان على مستقيم.

$m\angle 3 = 105°$ $\angle 2$ و $\angle 3$ زاويتان متجاورتان متكاملتان على مستقيم.

$m\angle 4 = 75°$ $\angle 4$ و $\angle 2$ متقابلتان بالرأس.

$m\angle 5 = 105°$ $\angle 5$ و $\angle 3$ زاويتان متبادلتان داخليًّا.

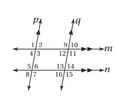
$m\angle 6 = 75°$ $\angle 6$ و $\angle 2$ زاويتان متناظرتان.

$m\angle 7 = 105°$ $\angle 7$ و $\angle 3$ زاويتان متناظرتان.

$m\angle 8 = 75°$ $\angle 8$ و $\angle 6$ متقابلتان بالرأس.

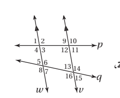
تمارين

في الشكل المجاور، إذا كان $m\angle 3 = 102°$، فأوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلّمة أو النظريّة التي استعملتها:



1) $\angle 5$ **102°؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا**
2) $\angle 6$ **78°؛ نظرية الزاويتين المتحالفتين**
3) $\angle 11$ **102°؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين**
4) $\angle 7$ **102°؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين**
5) $\angle 15$ **102°؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين**
6) $\angle 14$ **78°؛ نظرية الزاويتين المتحالفتين، ومسلّمة الزاويتين المتناظرتين**

في الشكل المجاور، إذا كان: $m\angle 9 = 80°$ وَ $m\angle 5 = 68°$، فأوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلّمات أو النظريات التي استعملتها:



7) $\angle 12$ **100°؛ نظرية الزاويتين المتكاملتين**
8) $\angle 1$ **80°؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين**
9) $\angle 4$ **100°؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين**
10) $\angle 3$ **80°؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا**
11) $\angle 7$ **68°؛ نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس**
12) $\angle 16$ **112°؛ نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس، ونظرية الزاويتين المتحالفتين.**

الصف: الأول الثانوي | 11 | الفصل 2: التوازي والتعامد

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (12) دون

الاسم ______ التاريخ ______

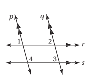
2-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الزوايا والمستقيمات المتوازية

الجبر وقياسات الزوايا:

يمكنك استعمال الجبر؛ لإيجاد القياسات المجهولة للزوايا المتكوّنة من مستقيمين متوازيين وقاطعٍ لهما.

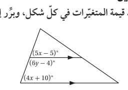
مثال إذا كان: $m\angle 1 = (3x + 15)°$ و $m\angle 3 = 5y°$ و $m\angle 2 = (4x - 5)°$، فأوجد قيمة كلٍّ من x وَ y.



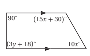
العبارات	المبَررات
$m\angle 1 = m\angle 2$	مسلمة الزاويتين المتناظرتين.
$3x + 15 = 4x - 5$	خاصية التعويض للمساواة.
$3x + 15 - 3x = 4x - 5 - 3x$	اطرح $3x$ من الطرفين.
$15 = x - 5$	بسّط
$15 + 5 = x$	اجمع 5 للطرفين.
$20 = x$	بسّط
$m\angle 2 = m\angle 3$	مسلمة الزاويتين المتناظرتين.
$4x - 5 = 5y$	خاصية التعويض للمساواة.
$75 = 5y$	عوّض عن x بـ 20 وبسّط.
$15 = x$	اقسم الطرفين على 5

تمارين

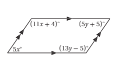
أوجد قيمة المتغيّرات في كلّ شكل، وبرِّر إجابتك.

1) 

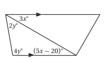
$y = 19; x = 15$ **: باستعمال الزوايا المتناظرة والمتكاملة**

2) 

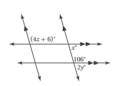
$y = 24; x = 6$ **: باستعمال الزوايا المتحالفة.**

3) 

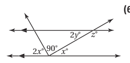
$y = 10; x = 11$ **: باستعمال الزوايا المتحالفة.**

4) 

$y = 25; x = 10$ **: باستعمال الزوايا المتحالفة والمتبادلة داخليًا.**

5) 

$z = 25; y = 37; x = 74$ **؛ باستعمال الزوايا المتكاملة، والمتبادلة داخليًا والمتحالفة.**

6) 

$z = 150; y = 15; x = 30$ **؛ باستعمال الزوايا المتكاملة، والمتبادلة داخليًا والمتحالفة.**

الصف: الأول الثانوي | 12 | الفصل 2: التوازي والتعامد

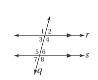
تدريبات المهارات (13) دون ضمن

الاسم ______ التاريخ ______

2-2 تدريبات المهارات

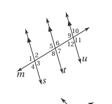
الزوايا والمستقيمات المتوازية

في الشكل المجاور، إذا كان $m\angle 2 = 70°$، فأوجد قياس كلِّ زاويةٍ ممّا يأتي واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:



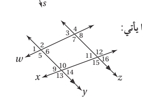
1) $\angle 3$ **70°**
2) $\angle 5$ **110°**
3) $\angle 8$ **110°**
4) $\angle 1$ **110°**
5) $\angle 4$ **110°**
6) $\angle 6$ **70°**

في الشكل المجاور، إذا كان $m\angle 7 = 100°$، فأوجد قياس كلّ زاويةٍ ممّا يأتي واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها:



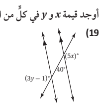
7) $\angle 9$ **100°**
8) $\angle 6$ **80°**
9) $\angle 8$ **80°**
10) $\angle 2$ **80°**
11) $\angle 5$ **100°**
12) $\angle 11$ **100°**

في الشكل المجاور، إذا كان: $m\angle 3 = 75°$ وَ $m\angle 10 = 105°$، فأوجد قياس كلّ زاويةٍ ممّا يأتي:

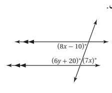


13) $\angle 2$ **105°**
14) $\angle 5$ **105°**
15) $\angle 7$ **105°**
16) $\angle 15$ **105°**
17) $\angle 14$ **75°**
18) $\angle 9$ **75°**

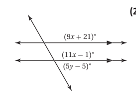
أوجد قيمة x و y في كلٍّ من الأشكال الآتية، وبرّر إجابتك.

19) 

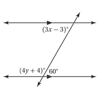
$x = 28, y = 47$ **؛ استعمل الزوايا المتكاملة لإيجاد قيمة x، ثم استعمل الزوايا المتبادلة خارجيًا لإيجاد قيمة y.**

20) 

$x = 10, y = 15$ **؛ استعمل الزوايا المتبادلة داخليًا لإيجاد قيمة x، ثم استعمل الزوايا المتكاملة لإيجاد قيمة y.**

21) 

$x = 11, y = 13$ **؛ استعمل الزوايا المتناظرة لإيجاد قيمة x، ثم استعمل الزوايا المتكاملة لإيجاد قيمة y.**

22) 

$x = 21, y = 29$ **؛ استعمل الزوايا الداخلية المتبادلة داخليًا لإيجاد قيمة x، ثم استعمل الزوايا المتكاملة لإيجاد قيمة y.**

الصف: الأول الثانوي | 13 | الفصل 2: التوازي والتعامد

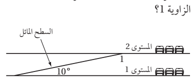
تدريبات حل المسألة (14) دون ضمن فوق

الاسم ______ التاريخ ______

2-2 تدريبات حلّ المسألة

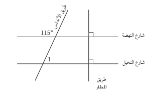
الزوايا والمستقيمات المتوازية

1) **سطح مائل:** يرتفع سطح مائل ليربط بين المستويين الأُفقيين 1 , 2 في مواقف للسيارات كما في الشكل أدناه، فما قياس الزاوية 1؟



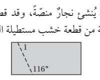
170°

2) **تخطيط المُدن:** يقطع طريق المطار عموديًّا شارعَي النهضة والنخيل المتوازيين، ويشكل طريق الأندلس زاويةً قياسها 115° مع شارع النهضة، فما قياس الزاوية 1؟



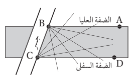
65°

3) **نجارة:** يُنشئ نجارٌ منصّةً، وقد قطع اللوح الجانبيّ من المنصّة من قطعة خشب مستطيلة الشكل.



يتعيّن أن يقصّ المستطيل بالمنشار على طول الخطّ المتقطع في الشكل، ما قياس الزاوية 1؟ **64°**

4) **مراقبة:** أُقيم جسرٌ فوق نهرٍ في مكان استراتيجي، ونظرًا لأهميّة الجسر وُضعت كاميرات مراقبة آليّة عند النقطتين المبيَّنتين في الشكل، بحيث تُغطّي كلٌّ منها زاوية قياسها x درجة، ولتغطية الزاويتين بين ضِفَّتَي النهر والجسر كاملتين، يلزم وجود 4 كاميراتٍ على الضفّة السُّفلى، و5 كاميراتٍ آليّة على الضفة العُليا.



a) ما العلاقة بين الزاويتين اللتين تغطّيهما الكاميرات الآليّة جميعها ($\angle ABC$، $\angle BCD$) الموضوعة على الضفّتين العُليا والسفلى للنهر؟ اشتقّ معادلة؛ لإيجاد x، بناءً على هذه العلاقة.

إنهما زاويتان متحالفتان ومتكاملتان؛ $4x° + 5x° = 180°$

b) ما قياس زاوية التغطية (x) لكلّ كاميرا آليّة؟ أوجد قياس الزاويتين اللتين يصنعهما الجسر مع الضفّتين العليا والسفلى للنهر.

$x = 20°$ **؛ وقياس الزاوية عند الضفة العليا** $= 100°$ **، وعند الضفة السفلى** $= 80°$

الصف: الأول الثانوي | 14 | الفصل 2: التوازي والتعامد

مصادر المعلم للأنشطة الصفّيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 2

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (15) ضمن فوق

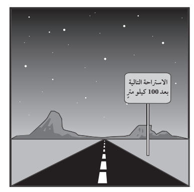
الاسم ______________ التاريخ ________

2-2 التدريبات الإثرائيّة

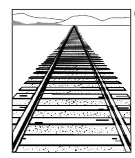
نقطة التلاشي

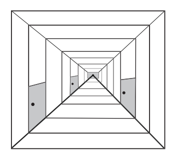
إذا نظرت إلى طريقٍ مستقيمٍ ليس فيه انحناءات أو انعطافات إلى مسافة بعيدة، يُخيّل إليك أنّ حافَّتَي الطريق المتوازيتين تلتقيان في نقطة واحدة، وهذه النقطة تسمى نقطة التلاشي، وهي مستعملة في الأعمال الفنيّة منذ سنة 1400.

تبيّن الصورة أدناه طريقًا مستقيمًا طويلًا، ولقد رسم المستقيمان على الجانبين (الأيسر والأيمن) للطريق ليشكّلا نقطة التلاشي.



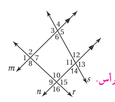
حدِّد المستقيمين اللَّذين يعيِّنان نقطة أو نقاط التلاشي في الصُّورتين الآتيتين:

1) 

2) 

كتاب التمارين (15) دون ضمن فوق

2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية



في الشكل المجاور: $m\angle 2 = 92$ و $m\angle 12 = 74$، أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلّمات أو النظريات التي استعملتها :

1) $\angle 10$ ‎°92؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

2) $\angle 8$ ‎°92؛ نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس.

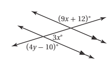
3) $\angle 9$ ‎°88؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين ونظرية الزاويتين المتكاملتين.

4) $\angle 5$ ‎°106؛ نظرية الزاويتين المتحالفتين.

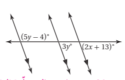
5) $\angle 11$ ‎°106؛ نظرية الزاويتين المتكاملتين

6) $\angle 13$ ‎°106؛ نظرية الزاويتين المتكاملتين.

أوجد قيمة x , y في كلٍّ من الشكلين الآتيين، وبرّر إجابتك:

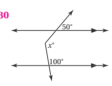
7) 

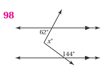
$x = 14, y = 37$ ؛ باستعمال نظرية الزاويتين المتكاملتين ونظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

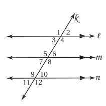
8) 

$x = 28, y = 23$ ؛ باستعمال مسلّمة الزاويتين المتناظرتين ونظرية الزاويتين المتكاملتين.

أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين (إرشاد: ارسم مستقيمًا مساعدًا) :

9) 
130

10) 
98

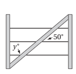


11) **البرهان** اكتب برهانًا حرًّا .

المعطيات: $\ell \parallel m , m \parallel n$

المطلوب : $\angle 1 \cong \angle 12$

برهان ممكن: نعلم أن $m \parallel \ell$، لذا فإن $\angle 8 \cong \angle 1$ بحسب نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا . وبما أن $m \parallel n$ أيضًا، فإن $\angle 12 \cong \angle 8$ بحسب مسلّمة الزاويتين المتناظرتين . وعليه فإن $\angle 12 \cong \angle 1$؛ لأن تطابق الزوايا يحقق خاصية التعدي .



12) **سياج:** أُضيفت دعامة قطرية لتقوية سياج ومنع أسلاكه من الارتخاء، فشكّلت هذه الدعامة مع السلك الأوسط زاوية قياسها 50° كما في الشكل المجاور. أوجد قيمة y. 130

2-3 ملاحظات الدرس

2-3 إثبات توازي مستقيمين
Proving Lines Parallel

فيما سبق:

درستُ استعمال خصائص المستقيمات المتوازية لتحديد الزوايا المتطابقة.

(الدرس 2-2)

والآن:

- أميّز المستقيمات المتوازية بناءً على علاقات بين أزواج من الزوايا الناتجة عن مستقيم قاطع.
- أبرهن توازي مستقيمين باستعمال العلاقات بين أزواج الزوايا.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

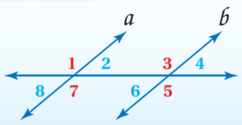
عندما تنظر إلى سكة القطار، تجد أن البعد بين خطَّيها ثابت دائمًا حتى عند المنحنيات والمنعطفات. فقد صُممت السكك بدقة، بحيث يكون خطَّاها متوازيين عند جميع النقاط ليسير عليها القطار بأمان.

تحديد المستقيمين المتوازيين: خطَّا سكة القطار متوازيان، وكذلك جميع الخطوط العرضية في السكة متوازية أيضًا، والزوايا المتكوّنة بين خطَّي السكة والخطوط العرضية للسكة المتوازيةِ متناظرة. درست سابقًا أن الزوايا المتناظرة تكون متطابقة عندما يكون المستقيمان متوازيين. وعكس هذه العلاقة صحيح أيضًا.

مسلمة 2.2 **عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين**

أضف إلى مطويتك

إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، ونتج عن التقاطع زاويتان متناظرتان متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.

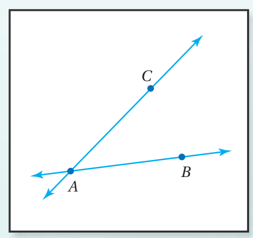


أمثلة: إذا كانت: $\angle 8 \cong \angle 6$ أو $\angle 7 \cong \angle 5$ أو $\angle 4 \cong \angle 2$ أو $\angle 3 \cong \angle 1$، فإن $a \parallel b$.

يمكنك استعمال عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين لرسم مستقيمين متوازيين.

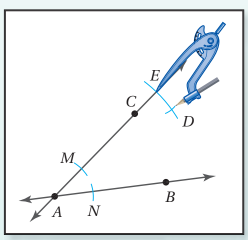
إنشاءات هندسية **رسم مستقيم موازٍ لمستقيم معلوم ويمر بنقطة لا تقع عليه**

الخطوة 1: استعمل مسطرة لرسم $\overleftrightarrow{AB}$، وعيّن نقطة C لا تقع على $\overleftrightarrow{AB}$، وارسم $\overleftrightarrow{CA}$.

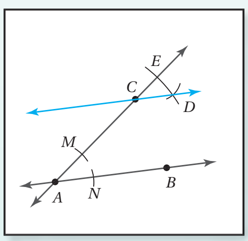


الخطوة 2: استعمل فرجارًا لنقل $\angle CAB$، بحيث تكون النقطة C رأس الزاوية الجديدة، وذلك من خلال الخطوات الآتية:

- ضع رأس الفرجار عند النقطة A ، وارسم قوسين يقطعان $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ في النقطتين M, N.
- بفتحة الفرجار نفسها، ارسم قوسًا مركزه C يقطع $\overleftrightarrow{AC}$ في النقطة E
- ارجع للنقطة M وافتح الفرجار بنفس طول $\overline{MN}$.
- بفتحة الفرجار نفسها، ارسم قوسًا مركزه E، ويقطع القوس السابق في D كما في الشكل.



الخطوة 3: ارسم $\overleftrightarrow{CD}$. بما أن $\angle ECD \cong \angle CAB$ من الإنشاء، وهما متناظرتان، فإن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.



1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-3

استعمال خصائص المستقيمات المتوازية لتحديد الزوايا المتطابقة.

الدرس 2-3

تمييز المستقيمات المتوازية بناءً على علاقات بين أزواج من الزوايا الناتجة عن مستقيم قاطع.

إثبات توازي مستقيمين باستعمال العلاقات بين أزواج الزوايا.

ما بعد الدرس 2-3

استعمال ميل المستقيمات؛ لتوضيح علاقات هندسية تشمل المستقيمات المتوازية والمتعامدة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا ؟".

واسأل:

- هل يبدو للزوايا المتكونة بين خطَّي السكة والخطوط العرضية للسكة القياس نفسه؟ لا، فقياسات الزوايا المتكونة بين خطي السكة والخطوط العرضية للسكة تبدو متساوية في بعض الحالات، ومختلفة كثيرًا في حالات أخرى.

افترض مقطعًا مستقيمًا من السكة للإجابة عن الأسئلة الآتية:

- ما العلاقة بين الزاويتين المتحالفتين المتكونتين في خطَّي السكة وخط عرضي السكة؟ الزاويتان متكاملتان.
- ما العلاقة بين الزاويتين المتبادلتين داخليًّا المتكونتين من خطَّي السكة وخط عرضي للسكة؟ الزاويتان متطابقتان.

مصادر الدرس 2-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (103)	• تنويع التعليم، ص (103, 104)	• تنويع التعليم، ص (103, 104)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (16)	• كتاب التمارين، ص (16)	• كتاب التمارين، ص (16)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

إرشادات للدراسة

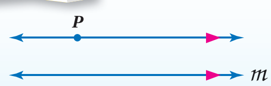
مسلّمات إقليدس
أدرك مؤسس الهندسة الحديثة إقليدس أن عددًا قليلًا من المسلّمات ضروري لبرهنة النظريات في زمانه. المسلّمة **2.3** هي واحدة من مسلّمات إقليدس الخمس الأساسية. وكذلك المسلّمة **1.1** والنظرية **1.10** التي عدها مسلمة.

يبيّن الإنشاء السابق أنه يوجد على الأقل مستقيم واحد يمر بالنقطة C ويوازي $\overleftrightarrow{AB}$. والمسلمة الآتية تؤكد أن هذا المستقيم وحيد.

مسلّمة 2.3 مسلّمة التوازي

أضف إلى مطويتك

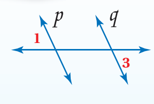
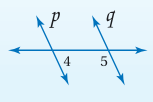
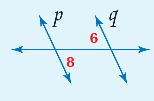
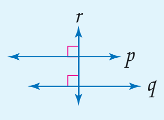
إذا عُلِمَ مستقيم ونقطة لا تقع عليه، فإنه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم.



ينتج عن المستقيمين المتوازيين وقاطع لهما أزواج من الزوايا المتطابقة. ويمكن أن تحدد أزواج الزوايا هذه ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم لا.

نظريات

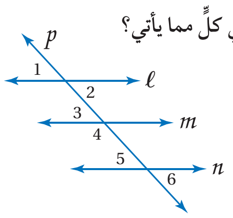
أضف إلى مطويتك

2.5 عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، ونتج عن التقاطع زاويتان متبادلتان خارجيًا متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.	 إذا كان $\angle 1 \cong \angle 3$ فإن $p \parallel q$
2.6 عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى ونتج عن التقاطع زاويتان متحالفتان متكاملتان، فإن المستقيمين متوازيان.	 إذا كان $m\angle 4 + m\angle 5 = 180$ ، فإن $p \parallel q$
2.7 عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، ونتج عن التقاطع زاويتان متبادلتان داخليًا متطابقتان، فإن المستقيمين متوازيان.	 إذا كان $\angle 6 \cong \angle 8$ ، فإن $p \parallel q$
2.8 عكس نظرية القاطع العمودي: إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، وكان عموديًا على كل منهما، فإن المستقيمين متوازيان.	 إذا كان $r \perp p$ و $r \perp q$ ، فإن $p \parallel q$

ستبرهن النظريات **2.5, 2.6, 2.7, 2.8** في المسائل **5, 14, 17, 18**

مثال 1 تعيين المستقيمات المتوازية

هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية، اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإذا كان أيٌّ منها متوازيًا ، فاذكر المسلّمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



a) $\angle 1 \cong \angle 6$

$\angle 1, \angle 6$ متبادلتان خارجيًّا بالنسبة للمستقيمين ℓ, n .

وبما أن $\angle 1 \cong \angle 6$، فإن $\ell \parallel n$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

b. $\angle 2 \cong \angle 3$

$\angle 2$ ، $\angle 3$ متبادلتان داخليًّا بالنسبة للمستقيمين ℓ, m.

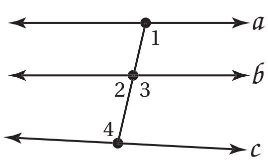
وبما أن $\angle 3 \cong \angle 2$، فإن $\ell \parallel m$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.

تحديد المستقيمات المتوازية

المثال 1 يبين كيفية تحديد توازي مستقيمين. وعلى الطلاب أن يكونوا قادرين على استعمال النظريات والمسلمات المعروفة لتعيين المستقيمات المتوازية.

مثال إضافي

1 هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية، اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإن كان أيٌّ منها متوازيًا، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرِّر إجابتك.



a) $\angle 1 \cong \angle 3$ $a \parallel b$ بحسب عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين

b) $m\angle 1 = 103$ و $m\angle 4 = 100$

a لا يوازي c بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون: اطلب إلى الطلاب أن يرسموا مستقيمين يقطعهما قاطع، مع إعطاء قياس زاوية معيَّنة. يمكن أن يعمل الطلاب في مجموعات صغيرة مكونة من 3 أو 4 ، ليناقشوا ما إذا كان المستقيمان متوازيين. دع المناقشات تستمر حتى يتبيّن للطلاب بوضوح أنه يمكن إيجاد قياسات أكثر من زاوية على نحو مؤكد، عندما تكون المستقيمات متوازية، أكثر ممَّا لو كانت غير متوازية.

إرشادات للمعلم الجديد

التبرير: شجِّع الطلاب على الربط بالمفاهيم السابقة، وذلك بمقارنة النظريات والمسلمات الخاصة بهذا الدرس بتلك الموجودة في الدرس 2–2. واطلب إلى الطلاب أن يفسروا أي علاقات منطقية وجدوها.

إثبات توازي مستقيمين

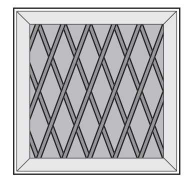
مثال 2 يبيّن كيفية إثبات توازي مستقيمين باستعمال مثال من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل أسئلة "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

2 **إنشاءات:** أنشِئت الشبكة في النافذة المبيّنة أدناه يدويًّا. فهل يمكن التأكد من أن قطع الخشب المثبتة في الاتجاه نفسه متوازية؟ فسّر ذلك وإلا فاذكر السبب.



قِس زاويتين متناظرتين مكتونتين من مستقيمين متتاليين في الشبكة ومستقيم الشبكة القاطع لهما، إذا كانت هذه الزوايا متطابقة، فإن المستقيمات الشبكة ذات الاتجاه الواحد تكون متوازية، بحسب عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

المحتوى الرياضي

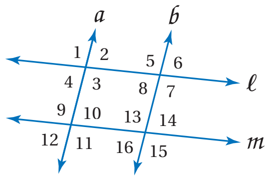
التبرير: يعتقد كثير من الطلاب أن المسلّمات والنظريات في هذا الدرس هي نفسها الموجودة في الدرس 2–2. ساعدهم على إدراك الفرق بين أنهم في هذا الدرس يستنتجون أن المستقيمات متوازية (النتيجة)، بينما في الدرس 2–2 يبدؤون من توازي المستقيمات (الفرض).

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية: اعرض متوازي أضلاع على المستوى الإحداثي، بحيث لا تكون أضلاعه أفقية أو رأسية، واطلب إلى الطلاب أن يُثبتوا أن الأضلاع المتقابلة في الشكل متوازية. اختر أربعة طلاب ليجد كلٌّ منهم ميل أحد أضلاع الشكل، ثم اختر طالبًا آخر ليفسر كيف يثبت أن كل ضلعين متقابلين متوازيان من معرفة ميلَيهما.

1A) $a \parallel b$ ؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.
1B) $\ell \parallel m$ ؛ عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين.
1C) $a \parallel b$ ؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.
1D) لا يمكن إثبات التوازي اعتمادًا على هذا المعطى فقط.
1E) $\ell \parallel m$ ؛ عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين.
1F) لا يمكن.

✓ تحقق من فهمك



(1A) $\angle 2 \cong \angle 8$ (1B) $\angle 3 \cong \angle 11$

(1C) $\angle 12 \cong \angle 14$ (1D) $\angle 1 \cong \angle 15$

(1E) $m\angle 8 + m\angle 13 = 180^\circ$ (1F) $\angle 8 \cong \angle 6$

إثبات توازي مستقيمين: يمكن استعمال العلاقة بين أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين وقاطع لهما لإثبات أن المستقيمين متوازيان.

مثال 2 من واقع الحياة — إثبات توازي مستقيمين

سلالم: كل درجة من درجات السلّم في الشكل المجاور عموديّة على دعامتيه الرئيسيتين، وهل يمكن إثبات أن الدعامتين الرئيسيتين متوازيتان، وأن جميع الدرجات متوازية؟ وضح ذلك إن كان صحيحًا، وإلا فاذكر السبب.

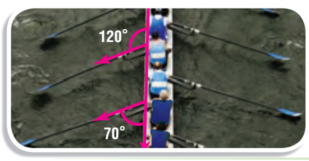
بما أن الدعامتين الرئيسيتين عموديتان على كل درجة فهما متوازيتان بحسب عكس نظرية القاطع العمودي. وبما أن أي درجتين في السلم عموديتان على أيٍّ من الدعامتين الرئيسيتين فهما متوازيتان أيضًا.

إرشادات للدراسة

إثبات توازي مستقيمين
عندما يقطع قاطع مستقيمين متوازيين، إما أن تكون أزواج الزوايا الناتجة متطابقة أو متكاملة. وإذا نتج عن مستقيمين وقاطع لهما زوايا لا تحقق هذا الشرط، فلا يمكن أن يكون المستقيمان متوازيين.

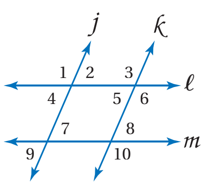
✓ تحقق من فهمك

2) **تجديف:** حتى يتحرك قارب التجديف في مسار مستقيم، يجب أن تكون مجاديف كل جانب متوازية. هل يمكن أن تبرهن أن مجاديف الجانب الأيسر في الصورة المجاورة متوازية؟ وضح ذلك إن كان صحيحًا، وإلا فاذكر السبب. انظر الهامش.



✓ تأكـــد

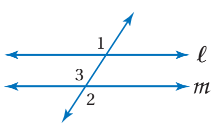
المثال 1 هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية، اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي؟ وإذا كان أيها متوازيًا ، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



(1) $\angle 1 \cong \angle 3$ (2) $\angle 2 \cong \angle 5$ (1–4) انظر ملحق الإجابات

(3) $\angle 3 \cong \angle 10$ (4) $m\angle 6 + m\angle 8 = 180^\circ$

المثال 2 (5) **برهان:** أكمل برهان النظرية 2.5 .



المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$

المطلوب: $\ell \parallel m$

البرهان:

العبارات	المبررات
(a $\angle 1 \cong \angle 2$	(a مُعطى
(b $\angle 2 \cong \angle 3$	(b ؟ الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان
(c $\angle 1 \cong \angle 3$	(c خاصية التعدي للتطابق
(d $\ell \parallel m$	(d ؟ عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين.

تنويع التعليم

ضمن فوق

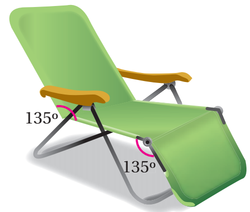
توسّع: اطلب إلى الطلاب إعادة كتابة بعض البراهين في هذا الدرس بطرائق مختلفة، فعلى سبيل المثال يمكنهم كتابة البرهان في المثال 3 في صورة برهان حرٍّ أو برهان تسلسُليٍّ.

إجابة (تحقق من فهمك):

2) غير ممكن؛ الزاويتان المتبادلتان خارجيًّا، أو الزاويتان المتبادلتان داخليًّا أو الزاويتان المتناظرتان ليستا متطابقتين. وكذلك الزاويتان المتحالفتان غير متكاملتين؛ لذا فالمستقيمان غير متوازيين.

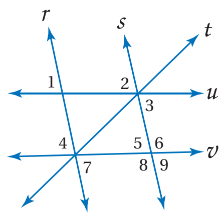
6) إجابة ممكنة: نعم؛ بما أن الزاويتين المتبادلتين داخليًّا متطابقتان، إذن مَسْندَي الظهر والقدمين متوازيان.

6) **كراسي:** هل يمكن إثبات أن مسند الظهر ومسند القدمين لكرسي الاسترخاء في الشكل المجاور متوازيان؟ وضح ذلك إذا كان صحيحًا، وإلا فاذكر السبب.



تدرب وحل المسائل

المثال 1 هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية، اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإذا كان أيها متوازيًا ، فاذكر المسلمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك. 7–12) انظر الهامش.



7) $\angle 1 \cong \angle 2$

8) $\angle 2 \cong \angle 9$

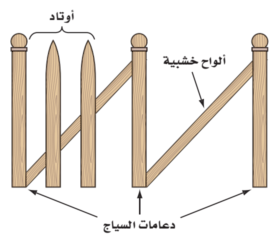
9) $m\angle 7 + m\angle 8 = 180^\circ$

10) $m\angle 3 + m\angle 6 = 180^\circ$

11) $\angle 3 \cong \angle 7$

12) $\angle 4 \cong \angle 5$

المثال 2 13) **حدائق:** لبناء سياج حول حديقة المنزل، ثبّت سعود دعامات السياج، ووضع ألواحًا خشبية تميل بزاوية مع كلٍّ من دعامتَي السياج. وعند تثبيته أوتاد السياج، حرص على أن تكون الزوايا بين الألواح الخشبية والأوتاد متساوية القياس. لماذا يجعل هذا الأوتاد متوازية؟ انظر الهامش



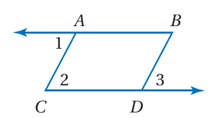
14) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.6 . 14–18) انظر ملحق الإجابات

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلٍّ مما يأتي:

15) **المعطيات:** $\angle 1 \cong \angle 3$

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

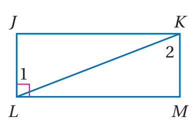
المطلوب: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



16) **المعطيات:** $\angle 1 \cong \angle 2$

$\overline{LJ} \perp \overline{ML}$

المطلوب: $\overline{KM} \perp \overline{ML}$



برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

17) النظرية 2.7

18) النظرية 2.8

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–6 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

7) $s \parallel r$ ؛ عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

8) $v \parallel u$ ؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

9) $s \parallel r$ ؛ عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين.

10) $v \parallel u$ ؛ عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين.

11) لا يمكن إثبات التوازي اعتمادًا على هذا المعطى.

12) $s \parallel r$ ؛ عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

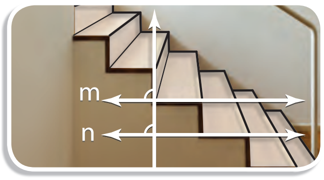
13) عندما يقيس سعود الزاوية الحادة التي يصنعها كل وتد في السياج مع لوح الخشب، فإنه يقيس زوايا متناظرة، وعندما تكون جميع الزوايا المتناظرة متطابقة، فإن الأوتاد يجب أن تكون متوازية.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	7-18 ، 24 ، 25 ، 28-35
ضمن المتوسط	7–21 فردي ، 28-35
فوق المتوسط	17-32 ، (اختياري: 33-35)

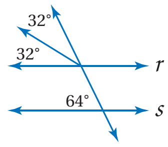
19) **درج:** ما العلاقة بين حوافِّ أسطح الدرجات في الشكل المجاور؟ برر إجابتك.

حواف أسطح الدرجات متوازية؛ لأن الزاويتين المتناظرتين متطابقتان.

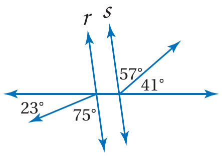


حدّد ما إذا كان المستقيمان r, s متوازيين أم لا في كلٍّ مما يأتي. برّر إجابتك. 20–22) انظر ملحق الإجابات

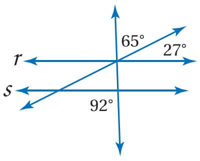
20)



21)

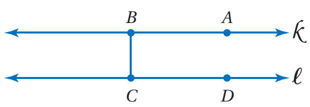


22)



23) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة أقصر مسافة بين مستقيمين متوازيين.

a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة أزواج من المستقيمات المتوازية χ و y، s و t، k و ℓ، وارسم أقصر قطعة مستقيمة $\overline{BC}$ بين كل مستقيمين متوازيين، وعيِّن النقطتين A, D كما في الشكل أدناه. انظر الهامش.



b) **جدوليًا:** قِس $\angle ABC$ و $\angle BCD$ في كل زوج، ثم أكمل الجدول.

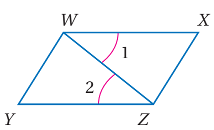
زوج المستقيمات المتوازية	$m\angle ABC$	$m\angle BCD$
ℓ و k	90°	90°
t و s	90°	90°
y و χ	90°	90°

c) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول الزاوية بين أقصر قطعة مستقيمة وكلٍّ من المستقيمين المتوازيين.
إجابة ممكنة: قياس الزاوية التي تكوّنها القطعة المستقيمة مع المستقيمين المتوازيين °90

مسائل مهارات التفكير العليا

24) **اكتشف الخطأ:** يحاول كلٌّ من سامي ومنصور تحديد المستقيمات المتوازية في الشكل المجاور. فقال سامي: بما أن $\angle 2 \cong \angle 1$، إذن $\overline{XZ} \parallel \overline{WY}$. أما منصور فلم يوافقه وقال: بما أن $\angle 2 \cong \angle 1$، إذن $\overline{YZ} \parallel \overline{WX}$. أيٌّ منهما على صواب؟ وضّح إجابتك.

24) منصور؛ بما أن $\angle 1$، $\angle 2$ متبادلتان داخليًّا، فإن $\overline{WX} \parallel \overline{YZ}$.



25) **تبرير:** هل تبقى النظرية 2.8 صحيحة إذا كان المستقيمان لا يقعان في المستوى نفسه؟ ارسم شكلًا يبرر إجابتك. انظر الهامش

26) **مسألة مفتوحة:** ارسم المثلث ABC. (a–c) انظر الهامش

a) أنشئ مستقيمًا يوازي $\overline{BC}$ ويمر بالنقطة A.

b) استعمل القياس؛ لتتحقق من أن المستقيم الذي رسمته يوازي $\overline{BC}$.

c) أثبت صحة الإنشاء رياضيًّا.

تمثيلات متعددة: في السؤال 23، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسية، والجداول، والوصف اللفظي لاستقصاء أقصر مسافةٍ بين مستقيمين متوازيين.

تنبيه!

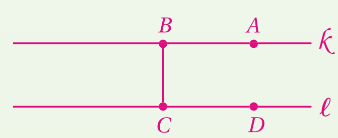
اكتشف الخطأ: في السؤال 24، يجب أن يُدرك الطلاب أن $\overline{WZ}$ يمكن أن تكون قاطعًا لـِ $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$، وكذلك لـِ $\overline{WX}$ و $\overline{YZ}$. وفي جميع الحالات تكون $\angle 1$ و $\angle 2$ متبادلتين داخليًّا ومتطابقتين بالنسبة لـ $\overline{WX}$ و $\overline{YZ}$ والقاطع $\overline{WZ}$ فقط، ولا تكونان متبادلتين داخليًّا بالنسبة لـ $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$ والقاطع $\overline{WZ}$؛ لذلك يكون $\overline{YZ} \parallel \overline{WX}$. وبذلك تكون إجابة منصور صحيحة.

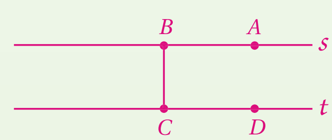
تنبيه لحل سؤال

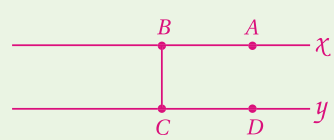
الفرجار والمسطرة: السؤال 26 يتطلب استعمال الفرجار والمسطرة.

إجابات:

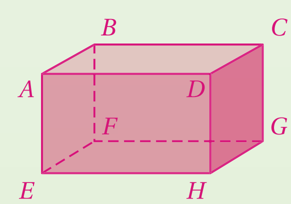
23a)



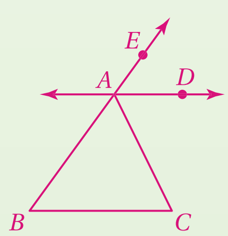




25) لا؛ إجابة ممكنة: في الشكل أدناه، $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{GC} \perp \overline{BC}$، لكن $\overline{AB}$ ليس عموديًّا على $\overline{GC}$



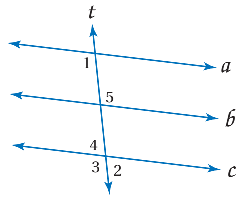
26a)



26b) إجابة ممكنة: باستعمال المسطرة، نجد أن البعد بين المستقيمين ثابت؛ لذا فهما متوازيان.

26c) إجابة ممكنة: $\overleftrightarrow{AB}$ قاطع لكلٍّ من $\overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{AD}$ ونُسخت $\angle ABC$ لإنشاء $\angle EAD$؛ لذا فإن $\angle ABC \cong \angle EAD$، $\angle ABC$ و $\angle EAD$ متناظرتان، بحسب عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين فإن $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

27) تحدَّ: استعمل الشكل المجاور. **(a, b انظر ملحق الإجابات)**



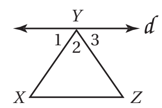
a) إذا كان: $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$، فبرهن أن $a \parallel c$.

b) إذا كان: $a \parallel c$ و $m\angle 1 + m\angle 3 = 180^\circ$،
فبرهن أن $t \perp c$.

28) اكتب: لخّص الطرائق الخمس التي استُعملت في هذا الدرس لإثبات توازي مستقيمين. **انظر ملحق الإجابات**

تدريب على اختبار

29) أي الحقائق الآتية كافية لإثبات أن المستقيم d يوازي $\overline{XZ}$؟ **B**



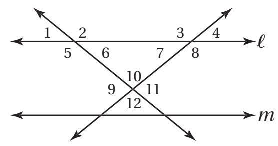
A $\angle 1 \cong \angle 3$

B $\angle 3 \cong \angle Z$

C $\angle 1 \cong \angle Z$

D $\angle 2 \cong \angle X$

30) استعمل الشكل المجاور لتحديد أن صحة أيٍّ مما يأتي ليست مؤكدة: **C**



A $\angle 4 \cong \angle 7$

B $\angle 4$ و $\angle 8$ متكاملتان

C $\ell \parallel m$

D $\angle 5$ و $\angle 6$ متكاملتان

مراجعة تراكمية

أعط مثالًا مضادًّا لتبيّن خطأ كل تخمين في السؤالين الآتيين: (الدرس 1-1)

31) المُعطيات: $\angle 1, \angle 2$ متتامتان. **(31, 32 انظر الهامش.)**

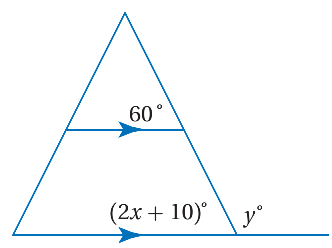
التخمين: $\angle 1, \angle 2$ تكوّنان زاوية قائمة.

32) المُعطيات: W, X, Y, Z أربع نقاط.

التخمين: النقاط W, X, Y, Z لا تقع على استقامة واحدة.

احسب قيمة **x, y** على الشكل التالي: (الدرس 2-2)

$x = 25, y = 120$



استعد للدرس اللاحق

بسّط كلًّا من العبارات الآتية :

33) $\frac{6-5}{4-2}$ **$\frac{1}{2}$**

34) $\frac{-11-4}{12-(-9)}$ **$-\frac{5}{7}$**

35) $\frac{16-12}{15-11}$ **1**

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا في بطاقة خطوات إنشاء مستقيم يوازي مستقيمًا معلومًا، ويمرُّ بنقطة معلومة لا تقع على المستقيم المعلوم، وأن يسلِّموك بطاقاتهم قبل مغادرتك الفصل.

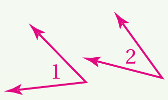
التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 3–2 بإعطائهم:

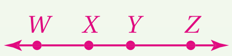
الاختبار القصير 2 ، ص (30) .

إجابات:

31) إجابة ممكنة:



32) إجابة ممكنة:



107 الدرس 3-2 إثبات توازي مستقيمين

مصادر المعلم للأنشطة الصفّية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 2

دون دون المتوسط — ضمن ضمن المتوسط — فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16) دون

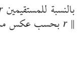
الاسم ________ التاريخ ________

2-3 تدريبات إعادة التعليم
إثبات توازي مستقيمين

تحديد المستقيمين المتوازيين:
إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، وتحقق أحد الشروط الآتية، فإن المستقيمين يكونان متوازيين.

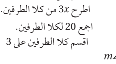
إذا	فإن	اسم النظرية أو المسلّمة ورقمها
• كانت زاويتان متناظرتان متطابقتين،	المستقيمين متوازيان.	• عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين (2.2)
• كانت زاويتان متبادلتان خارجيًّا متطابقتين،		• عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا (2.5)
• كانت زاويتان متحالفتان متكاملتين،		• عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين (2.6)
• كانت زاويتان متبادلتان داخليًّا متطابقتين،		• عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا (2.7)
• كان القاطع عموديًّا على كلٍّ من المستقيمين،		• عكس نظرية القاطع العمودي (2.8)

مثال 1 إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$، فحدّد المستقيمات المتوازية إن وُجدت، واذكر المسلّمة أو النظريّة التي تبرّر إجابتك.



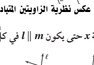
$\angle 1$ ، $\angle 2$ زاويتان متناظرتان بالنسبة للمستقيمين r, s، ولمّا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$، فإن $r \parallel s$ بحسب عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

مثال 2 أوجد $m\angle ABC$ حتى يكون $m \parallel n$.

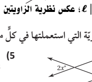


مبيِّنًا خطوات الحل.
يمكننا استنتاج أن $m \parallel n$ إذا تطابقت زاويتان متبادلتان داخليًّا.
أي إذا تحقق
$m\angle BAD = m\angle ABC$
$3x + 10 = 6x - 20$ بالتعويض.
$10 = 3x - 20$ اطرح $3x$ من كلا الطرفين.
$30 = 3x$ اجمع 20 لكلا الطرفين.
$10 = x$ اقسم كلا الطرفين على 3
إذن: $m\angle ABC = (6x - 20)°$
$= (6(10) - 20)°$
$= 40°$

تمارين
إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$، فحدّد المستقيمات المتوازية إن وُجدت، واذكر المسلّمة أو النظريّة التي تبرّر إجابتك في كلٍّ ممّا يأتي:

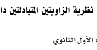
1)


$\ell \parallel m$؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا

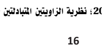
2)


$\ell \parallel m$؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا

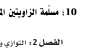
أوجد قيمة x حتى يكون $l \parallel m$ في كلٍّ ممّا يأتي، وحدّد المسلّمة أو النظريّة التي استعملتها في كلٍّ ممّا يأتي:

3)


7؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا

4)


20؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا

5)


10؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين

الصف: الأول الثانوي — 16 — الفصل 2: التوازي والتعامد

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (17) دون

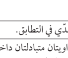
الاسم ________ التاريخ ________

2-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)
إثبات توازي مستقيمين

إثبات توازي مستقيمين:
يمكنك إثبات توازي مستقيمين باستعمال العلاقة بين أزواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين يقطعهما قاطع.

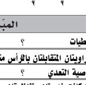
مثال اكتب برهانًا ذا عمودين

المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 3, \angle 1 \cong \angle 2$
المطلوب: إثبات أنّ $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$
البرهان:



العبارات	المبرِّرات
1) $\angle 1 \cong \angle 2$ $\angle 1 \cong \angle 3$	1) معطيات.
2) $\angle 2 \cong \angle 3$	2) خاصيّة التعدّي في التطابق.
3) $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$	3) إذا كانت زاويتان متبادلتان داخليًّا متطابقتين، فإن المستقيمين متوازيان.

تمارين
1) أكمل البرهان الآتي:
المعطيات: $\angle 15 \cong \angle 5, \angle 1 \cong \angle 5$
المطلوب: إثبات أن $l \parallel m$ و $r \parallel s$
البرهان:



العبارات	المبرِّرات
1) $\angle 15 \cong \angle 5$	1) معطيات ؟
2) $\angle 13 \cong \angle 15$	2) الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان
3) $\angle 5 \cong \angle 13$	3) خاصية التعدي ؟
4) $r \parallel s$	4) إذا كانت زاويتان متناظرتان متطابقتين، فإن المستقيمين متوازيان.
5) $\angle 1 \cong \angle 5$	5) معطيات.
6) $k \parallel m$	6) إذا كانت زاويتان متناظرتان متطابقتين، فإن المستقيمين متوازيان.

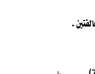
الصف: الأول الثانوي — 17 — الفصل 2: التوازي والتعامد

تدريبات المهارات (18) دون ضمن

الاسم ________ التاريخ ________

2-3 تدريبات المهارات
إثبات توازي مستقيمين

هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية، اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ ممّا يأتي، وإذا كان أيها متوازيًا، فاذكر المسلّمة أو النظريّة التي تبرّر إجابتك.



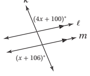
1) $\angle 3 \cong \angle 7$
$a \parallel b$؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا.

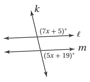
2) $\angle 9 \cong \angle 11$
$a \parallel b$؛ عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

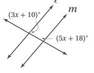
3) $\angle 2 \cong \angle 16$
$\ell \parallel m$؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا.

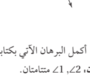
4) $m\angle 5 + m\angle 12 = 180$
$\ell \parallel m$؛ عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين.

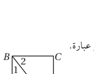
أوجد قيمة x، حتى يكون $\ell \parallel m$ في كلٍّ ممّا يأتي، ووضّح خطوات الحلّ.

5) 22


6) 20


7) 6


8) 2


9) 13


10) 19

11) **برهان:** أكمل البرهان الآتي بكتابة المبرّر لكلّ عبارة.
المعطيات: $\angle 1, \angle 2$ متتامتان.
$\overline{BC} \perp \overline{CD}$
المطلوب: إثبات أن $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$
البرهان:

العبارات	المبرَّرات
1) $\overline{BC} \perp \overline{CD}$	1) معطيات ؟
2) $m\angle ABC = m\angle 1 + m\angle 2$	2) مسلّمة جمع الزوايا ؟
3) $\angle 1$, $\angle 2$ متتامتان.	3) معطيات ؟
4) $m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$	4) تعريف الزاويتين المتتامتين
5) $m\angle ABC = 90°$	5) خاصية التعويض للمساواة
6) $\overline{BA} \perp \overline{BC}$	6) تعريف التعامد ؟
7) $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$	7) إذا قطع قاطع مستقيمين في مستوى، وكان عموديًا على كلٍّ منهما، فإن المستقيمين متوازيان

الصف: الأول الثانوي — 18 — الفصل 2: التوازي والتعامد

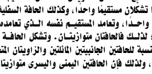
تدريبات حل المسألة (19) دون ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

2-3 تدريبات حلّ المسألة
إثبات توازي مستقيمين

1) **لوحات:** صنع عمار إطارًا للوحة، ويرغب في التحقّق من كون الأضلاع المتقابلة متوازية أم لا، وذلك بقياس الزوايا عند الأركان؛ ليرى ما إذا كانت الزوايا قائمة أم لا، فما عدد الزوايا التي يتعيّن أن يتحقّق منها؛ ليتأكّد من أن الأضلاع المتقابلة متوازية؟ **3**

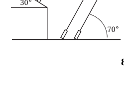
2) **أشكال:** قُطع مستطيل على طول الخط المائل المتقطّع المبيّن في الشكل. ورُتّبت القطعتان لتشكّلا شكلًا آخر. حدِّد نوع الشكل الجديد، وبرِّر إجابتك.



متوازي أضلاع؛ الحافتان العلويتان تعامدان المستقيم الرأسي؛ لذا فهما تشكّلان مستقيمًا واحدًا، وكذلك الحافة السفلية تشكل مستقيمًا واحدًا، وتعامد المستقيم نفسه الذي تعامده الحافة العلوية؛ لذلك فالحافتان متوازيتان. وتشكل الحافة العلوية قاطعًا بالنسبة للحافتين الجانبيتين المائلتين والزاويتان المتحالفتان متكاملتان، ولذلك فإن الحافتين اليمنى واليسرى متوازيتان.

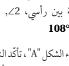
3) **ألعاب ناريّة:** في عرض للألعاب الناريّة، قرر المصمِّمون أن يضعوا أربع منصّاتٍ تطلق الألعاب النارية في مسارات متوازية، فوضعوا منصَّتَين على الرصيف ومنصتين على سطح عمارةٍ كما في الشكل أدناه.

لإنجاز هذه العرض، ماذا يتعيّن أن يكون قياس الزاوية 1؟



80°

4) **إشارات:** يقوم نجّار بعمل نموذج كبير للحرف "A"؛ لوضعه على سطح محلٍ تجاريٍّ. والشكل الآتي يوضّح هذا التصميم.



a) كم يكون قياسا الزاويتين 1 وَ 2، حتى تكون القطعة الواصلة بين رأسي، $\angle 2, \angle 1$، في الشكل "A" أفقيةً تمامًا؟ **108°**

b) عند إنشاء الشكل "A"، تأكّد النجار من صحة قياس الزاوية 1. ولكن عند قياس زاوية 2، وُجد أنها غير صحيحة، فعلام يدلّ هذا بالنسبة للحرف "A"؟

إجابة ممكنة: أحد ساقَي الحرف "A" أطول من الأخرى.

الصف: الأول الثانوي — 19 — الفصل 2: التوازي والتعامد

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 2

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

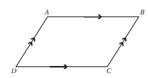
التدريبات الإثرائية (20) ضمن فوق

الاسم ______________ التاريخ ______

2-3 التدريبات الإثرائيّة

أشكال وتعريفات:

إذا عرّفنا متوازي الأضلاع بأنه شكل رباعي، فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان؛ أي يكون الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع إذا كان:
$AB \parallel DC, AD \parallel BC$



هل يمكن تقديم تعريفات أخرى لمتوازي الأضلاع؟

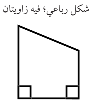
في السؤالين 1, 2 وُضع تعريفان، قرّر ما إذا كان كلٌّ منهما تعريفًا صحيحًا لمتوازي الأضلاع أم لا. وبرّر إجابتك.

1) متوازي الأضلاع شكل رباعي؛ فيه كل زاويتين متتاليتين متكاملتان.

صحيح، بحسب عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين.

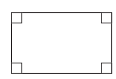
2) متوازي الأضلاع شكل رباعي؛ فيه زاويتان متتاليتان متكاملتان.

خطأ، مثال مضادٌ



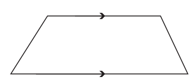
3) إذا عرّفنا المستطيل على أنه شكل رباعي جميع زواياه قائمة، فهل يمكن تعريف المستطيل بأنه متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة؟

نعم، بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين.



4) إذا عرّفنا شبه المنحرف على أنه شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان فقط، فهل يمكن تعريفه بأنه شكل رباعي فيه زاويتان متتاليتان متكاملتان؟

نعم



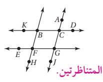
الصف: الأول الثانوي 20 **الفصل 2:** التوازي والتعامد

كتاب التمارين (16) دون ضمن فوق

2-3 إثبات توازي مستقيمين

الفصل الثاني التوازي والتعامد

هل يمكن إثبات أن أيًا من مستقيمات الشكل متوازية اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإذا كان أيها متوازيًا ، فاذكر المسلّمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك:



1) $m\angle BCG + m\angle FGC = 180^\circ$

$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{EG}$؛ عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين

2) $\angle CBF \cong \angle GFH$

$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{EG}$؛ عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

3) $\angle EFB \cong \angle FBC$

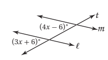
$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{EG}$؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا

4) $\angle ACD \cong \angle KBF$

$\overleftrightarrow{AJ} \parallel \overleftrightarrow{BH}$؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجًا

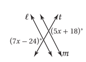
إذا كان $m \parallel l$ ، فأوجد قيمة x في كل مما يأتي، وحدّد المسلّمة أو النظرية التي استعملتها :

5)



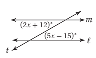
$x=12$ ؛ مسلمة الزاويتين المتناظرتين

6)



$x=21$ ؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

7)

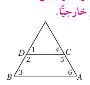


$x=9$ ؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.

8) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان .

المطلوب: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 2$ و$\angle 3$ متكاملتان	1) معطيات
2) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	2) عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين.
3) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	3) القطع المستقيمة المحتواة في مستقيمين متوازيين تكون متوازية.

9) **زراعة:** أراد مزارع غرس أشجار نخيل في صفوف موازية لممرٍّ مستقيم في مزرعته، فكيف يمكن له أن يتأكد من أن هذه الصفوف متوازيةٌ؟

إجابة ممكنة: يمكن أن يختار مستقيمًا عموديًّا على الممر، ويجعل كلَّ صفٍّ من صفوف أشجار النخيل عموديًّا على ذلك المستقيم.

16

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

للأسئلة التي لم يُجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلبة مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (32)

المطويات متابعة المطويات

شجع الطلاب قبل حلِّ أسئلة اختبار منتصف الفصل على مراجعة الملاحظات التي دوَّنوها في مطوياتهم حول الدروس 2-1 إلى 2-3 .

إجابات:

9) 104؛ $\angle 4 \cong \angle 2$ حسب مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

10) 62؛ $\angle 14$ مكملة $\angle 15$ بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين، و $\angle 9 \cong \angle 15$ بحسب نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس.

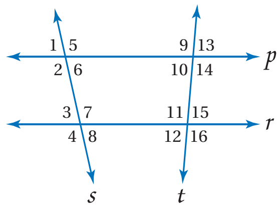
11) 118؛ $\angle 10 \cong \angle 14$ بحسب نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.

12) 76؛ $\angle 6 \cong \angle 4$ بحسب نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس، و$\angle 7$مكملة لـ$\angle 6$ بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين.

الفصل 2 اختبار منتصف الفصل

الدروس 2-1 إلى 2-3

استعمل الشكل أدناه لتحدد القاطع الذي يصل كل زوج من الزوايا فيما يأتي، ثم صنِّف زوج الزوايا إلى زاويتين متبادلتين داخليًا أو خارجيًا أو متناظرتين أو متحالفتين: (الدرس 2-1)



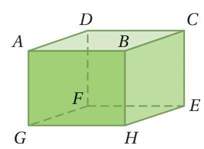
1) $\angle 6$ و $\angle 3$ المستقيم s؛ متبادلتان داخليًّا

2) $\angle 1$ و $\angle 14$ المستقيم p؛ متبادلتان خارجيًّا

3) $\angle 10$ و $\angle 11$ المستقيم t؛ متحالفتان

4) $\angle 5$ و $\angle 7$ المستقيم s؛ متناظرتان

حدّد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور: (الدرس 2-1)

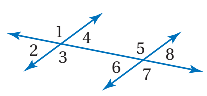


5) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{HE}$. $\overline{GF}, \overline{AD}, \overline{BC}$

6) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{GH}$، وتحوي النقطة D . $\overline{AD}, \overline{DF}$

7) مستوى يوازي المستوى ABC. FGH

8) **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يصف $\angle 4, \angle 8$؟ (الدرس 2-1) A



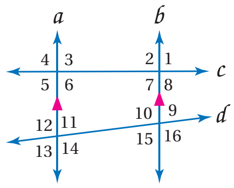
A متناظرتان

B متبادلتان خارجيًّا

C متبادلتان داخليًّا

D متحالفتان

في الشكل المجاور: $m\angle 4 = 104°, m\angle 14 = 118°$.
أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها: (الدرس 2-2)



12–9) انظر الهامش.

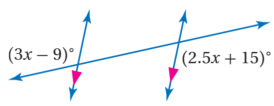
9) $\angle 2$

10) $\angle 9$

11) $\angle 10$

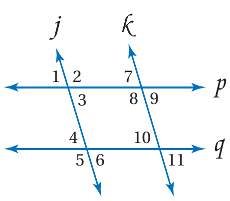
12) $\angle 7$

13) أوجد قيمة x في الشكل الآتي: (الدرس 2-2) 48



14) **نجارة:** صنع عامر طاولة خشبية لحديقته. فقصَّ طرف أحد رجليها بزاوية 40°، بأي زاوية قصَّ الطرف الآخر بحيث كان سطح الطاولة موازيًا للأرض؟ وضّح إجابتك. (الدرس 2-2) 140°

هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل الآتي متوازية اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإن كانت متوازية ، فاذكر المسلّمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك. (الدرس 2-3)



15) $\angle 4 \cong \angle 10$

16) $\angle 9 \cong \angle 6$

17) $\angle 7 \cong \angle 11$

15) $j \parallel k$؛ عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين.

16) لا يمكن إثبات التوازي، اعتمادًا على هذا المُعطَى.

17) $p \parallel q$؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

108 الفصل 2 التوازي والتعامد

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس 2-1 إلى 2-3		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16)
	تدريبات المهارات ، ص (8, 13, 18)		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

2-4 ميل المستقيم
Slope of Line

فيما سبق:

درستُ برهنة توازي مستقيمين باستعمال علاقات الزوايا.

(الدرس 3-2)

والآن:

- أجد ميل المستقيم.
- أستعمل الميل لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

المفردات:

الميل
slope

معدل التغير
rate of change

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تستعمل لوحات مرورية لتنبه السائقين إلى حالة الطريق. فاللوحة المجاورة تشير إلى انحدار الطريق بنسبة 6% ، وهذا يعني أن الطريق ترتفع أو تهبط بمقدار 6m رأسيًّا لكل 100m أفقيًّا.

ميل المستقيم: درست سابقًا حساب ميل المستقيم في المستوى الإحداثي باستعمال أي نقطتين عليه، وعرفت أنه نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي.

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

يمكنك استعمال إحداثيات النقاط على المستقيم لتشتق صيغة للميل.

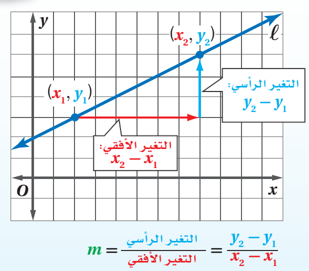
مفهوم أساسي — ميل المستقيم

أضف إلى مطويتك

في المستوى الإحداثي، **ميل** المستقيم هو نسبة التغير في الإحداثي y إلى التغير في الإحداثي x بين أي نقطتين عليه.

ويعطى الميل m لمستقيم يحوي نقطتين إحداثياهما (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بالصيغة:

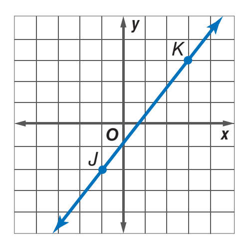
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، حيث $x_1 \neq x_2$.



مثال 1 إيجاد ميل المستقيم

أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

a)



عوِّض عن (x_1, y_1) بـ $(-1, -2)$،

وعن (x_2, y_2) بـ $(3, 3)$.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	صيغة الميل
$= \frac{3 - (-2)}{3 - (-1)}$	عوّض
$= \frac{5}{4}$	بسّط

2-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-2

تمييز وبرهنة توازي مستقيمين باستعمال العلاقات بين أزواج الزوايا.

الدرس 4-2

إيجاد ميل المستقيم.

استعمال الميل؛ لتحديد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة.

ما بعد الدرس 4-2

وضع تخمينات حول خصائص المضلعات وصفاتها وعناصرها، واختبار هذه التخمينات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا ؟"

واسأل:

- كيف يمكن لسائق شاحنة أن يستجيب لإشارة المرور؟ يجب على السائق أن يخفف السرعة.
- كيف يمكن لأصحاب الاحتياجات الخاصة الصعود إلى المباني؟ تُبنى سطوحٌ مائلة، بحيث يتمكن الكرسي المتحرك من التحرك إلى أعلى السطح المائل أو إلى أسفله في مدخل المبنى.
- أيُّهما أسهل في الوصول إلى الارتفاع نفسه، أن تدفع الكرسي المتحرك إلى أعلى سطح مائل طويل أم سطح مائل قصير حادِّ الانحدار؟ سطح مائل طويل؛ لأنه أقل انحدارًا.

مصادر الدرس 4-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (113)	• تنويع التعليم، ص (113, 116)	• تنويع التعليم، ص (116)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (17)	• كتاب التمارين، ص (17)	• كتاب التمارين، ص (17)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

ميل المستقيم

المثال 1 يبيّن كيفية استعمال نسبة المسافة الرأسية إلى المسافة الأفقية لإيجاد ميل مستقيم، ويعرض الجزءان c و d مستقيمًا ميله صفر ومستقيمًا ميله غير معرّف.

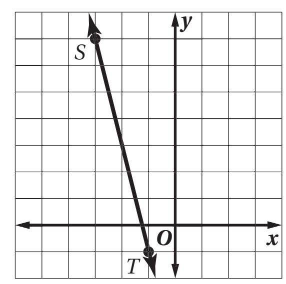
التقويم التكويني

استعمل أسئلة "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

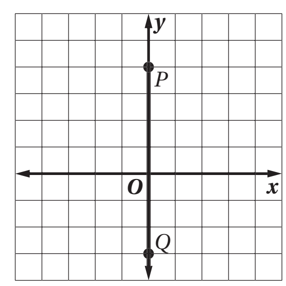
1 أوجد ميل كلٍّ مستقيم مما يأتي:

a)



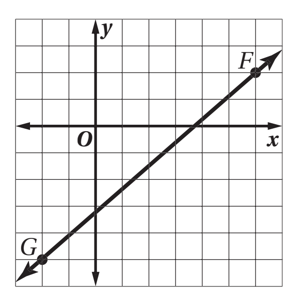
$-\frac{8}{2}$ أو -4

b)



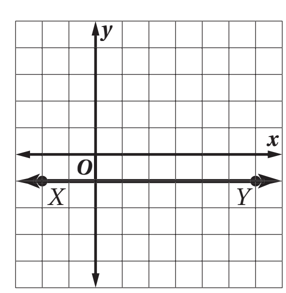
$-\frac{7}{0}$ أو غير معرّف

c)



$\frac{7}{8}$

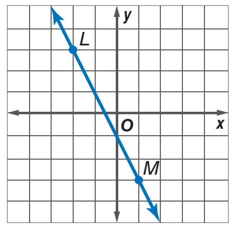
d)



$\frac{0}{8}$ أو 0

---

b)



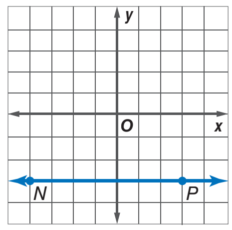
$(x_1, y_1) = (-2, 3), (x_2, y_2) = (1, -3)$

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

عوّض $= \frac{-3 - 3}{1 - (-2)}$

بسّط $= -2$

c)



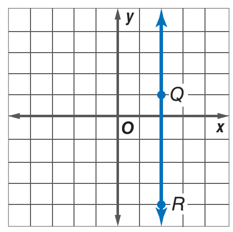
$(x_1, y_1) = (-4, -3), (x_2, y_2) = (3, -3)$

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

عوّض $= \frac{-3 - (-3)}{3 - (-4)}$

بسّط $= \frac{0}{7} = 0$

d)



$(x_1, y_1) = (2, 1), (x_2, y_2) = (2, -4)$

صيغة الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

عوّض $= \frac{-4 - 1}{2 - 2}$

بسّط $= \frac{-5}{0}$

ميل هذا المستقيم غير معرّف.

إرشادات للدراسة

القسمة على 0

ميل المستقيم في المثال 1d غير معرّف؛ لأنه لا يوجد عدد تضربه في 0 يُعطي −5. وبما أن هذا صحيح لأي عدد، فإن أي عدد مقسوم على 0 يمثل كمية غير معرّفة. ومن ذلك يكون ميل أي مستقيم رأسي غير معرّف.

تحقق من فهمك

1A) المستقيم الذي يحتوي على $(6, -2), (-3, -5)$ $\frac{1}{3}$

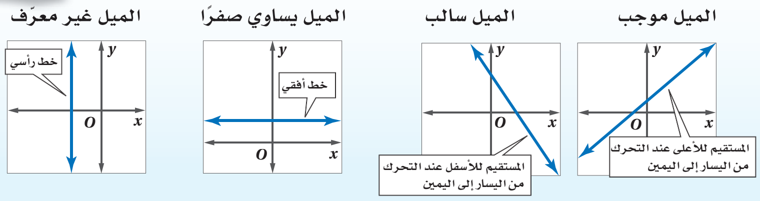
1B) المستقيم الذي يحتوي على $(8, -3), (-6, -2)$ $-\frac{1}{14}$

1C) المستقيم الذي يحتوي على $(4, 2), (4, -3)$. غير معرّف

1D) المستقيم الذي يحتوي على $(-3, 3), (4, 3)$. 0

يوضّح المثال 1 أربع حالات مختلفة للميل وهي:

ملخص المفهوم حالات الميل — أضف إلى مطويتك



يمكن تفسير الميل على أنه **معدّل التغير** في الكمية y بالنسبة إلى الكمية x، ويمكن استعمال ميل المستقيم أيضًا لتعيين إحداثيّي أي نقطة على المستقيم.

المحتوى الرياضي

صيغة ميل المستقيم: لا يتغير ميل المستقيم، طالما وُضعت إحداثيات كلِّ زوج مرتب في صيغة ميل المستقيم بالترتيب نفسه. اطلب إلى الطلاب التأكد من أن ميل $\overleftrightarrow{LM}$ في المثال 1b لا يتغير إذا تمَّ عكس وضع الأزواج المرتبة في الصيغة.

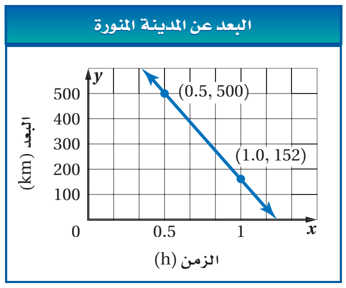
ميل $\overleftrightarrow{LM}$: $m = \frac{3 - (-3)}{-2 - 1} = -\frac{6}{3} = -2$

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال الميل معدلًا للتغير

طائرات: تحلِّق طائرة في مسارٍ جويٍّ مستقيم يمر بمدينة الرياض ثم بالمدينة المنورة. إذا كانت الطائرة على بُعد 500 km من المدينة المنورة بعد 0.5 h من مرورها فوق الرياض، ثم أصبحت على بُعد 152 km من المدينة المنورة بعد نصف ساعة أخرى. كم كان بُعدها عن المدينة المنورة بعد 0.75 h من مرورها فوق الرياض إذا كانت سرعتها ثابتةً.

افهم: استعمل البيانات المعطاة لترسم المستقيم الذي يمثل البعد y بالكيلومترات كدالة في الزمن x بالساعات.

عيِّن النقطتين $(0.5, 500)$, $(1, 152)$ في المستوى الإحداثي، ثم ارسم مستقيمًا يمر بهما.



المطلوب هو إيجاد البعد عن المدينة المنورة بعد 0.75 h

خطط: أوجد ميل المستقيم في الشكل المجاور، واستعمله معدّل تغيّر المسافة بالكيلومتر بالنسبة للزمن بالساعة لإيجاد بُعد الطائرة عن المدينة المنورة بعد 0.75 h

حل: استعمل صيغة الميل لإيجاد ميل المستقيم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(152 - 500)\text{ km}}{(1.0 - 0.5)\text{ h}} = \frac{-348\text{ km}}{0.5\text{ h}} = \frac{-696\text{ km}}{1\text{ h}}$$

تحلِّق الطائرة بسرعة 696 km/h

والإشارة السالبة تشير إلى تناقص المسافة مع مرور الزمن.

استعمل ميل المستقيم وإحدى النقطتين عليه؛ لتجد البعد y عندما يكون الزمن $x = 0.75$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	صيغة الميل
$-696 = \frac{y_2 - 500}{0.75 - 0.5}$	$m = -696, x_1 = 0.5, y_1 = 500, x_2 = 0.75$
$-696 = \frac{y_2 - 500}{0.25}$	بسّط
$-174 = y_2 - 500$	اضرب كلا الطرفين في 0.25
$326 = y_2$	اجمع 500 إلى كل طرف

إذن كان بعد الطائرة عن المدينة المنورة بعد 0.75 h يساوي 326 km

تحقق يمكننا من الشكل تقدير البعد عن المدينة المنورة بعد 0.75 h بأكثر من 300 km قليلًا. وبما أن 326 قريبة من هذا التقدير فإن الإجابة معقولة. ✓

✓ تحقق من فهمك

2) **مبيعات:** كانت مبيعات مصنع معلبات غذائية 20 مليون علبة عام 2003م، و200 مليون علبة عام 2008م، إذا حافظ المصنع على المعدل نفسه من الزيادة، فكم تكون مبيعاته من العلب عام 2012م ؟

344 مليون تقريبًا

الربط مع الحياة

المسارات الجوية

توجد خرائط جوية تضبط مسارات الطائرات وارتفاعاتها وتضمن عدم تصادمها.

مثال إضافي

2 **نموٌّ اقتصادي:** بلغت المبيعات السنوية لمصنع أدوات منزلية 48.9 مليون ريال عام 2000م، و 85.9 مليون ريال عام 2005م، إذا استمرت زيادة المبيعات بالمعدل نفسه، فكم ستكون مبيعات المصنع عام 2015 م؟

159.9 مليون ريال تقريبًا

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة في مدونة الفصل يوضحون فيها طريقة إيجاد ميل مستقيم، وأن يوضحوا كيف يصف الميل شكل المستقيم.

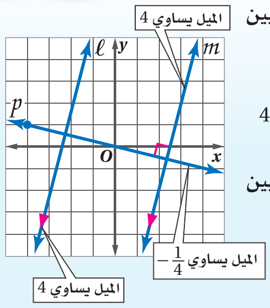
تنبيه!

الإحداثيات السالبة: وجِّه الطلاب إلى أن يكونوا يقظين عند حساب الميل باستعمال نقاط تحتوي على إحداثيات سالبة، وذلك بأن يكتب الطلاب صيغة الميل، ثم يعوّضوا الإحداثيات ثم يبسّطوا المقدار.

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة: يمكنك استعمال ميلَي مستقيمين لتحدد ما إذا كانا متوازيين أو متعامدين. فالمستقيمات التي لها الميل نفسه تكون متوازية.

مسلمات — **المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة**

أضف إلى مطويتك



2.4 **ميلا المستقيمين المتوازيين:** يكون للمستقيمين غير الرأسيين الميل نفسه إذا وفقط إذا كانا متوازيين. وجميع المستقيمات الرأسية متوازية.

مثال: المستقيمان المتوازيان ℓ, m لهما الميل نفسه ويساوي 4

2.5 **ميلا المستقيمين المتعامدين:** يكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي -1 والمستقيمات الأفقية والرأسية متعامدة.

مثال: المستقيم m عمودي على المستقيم p، أو $m \perp p$

ناتج ضرب الميلين هو $4 \cdot -\frac{1}{4} = -1$

مثال 3 — تحديد علاقات المستقيمات

حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك إذا كانت $A(1, 1), B(-1, -5), C(3, 2), D(6, 1)$، ومثّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

الخطوة 1: أوجد ميل كل مستقيم.

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{-5-1}{-1-1} = \frac{-6}{-2} = 3$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{1-2}{6-3} = -\frac{1}{3}$

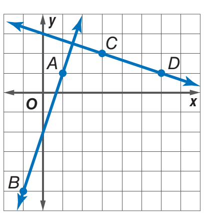
الخطوة 2: حدّد العلاقة إن وجدت بين المستقيمين.

بما أن ميلَي المستقيمين غير متساويين فهما غير متوازيين. ولتحدد ما إذا كانا متعامدين أم لا، أوجد ناتج ضرب ميليهما.

$3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$ ناتج ضرب ميلَي $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$

بما أن حاصل ضرب ميلَي $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ يساوي -1 إذن هما متعامدان.

تحقق: من تمثيل المستقيمين بيانيًّا يبدو أنهما يشكّلان زاوية قائمة عند نقطة تقاطعهما. ✓



إرشادات للدراسة

ميلا المستقيمين المتعامدين

إذا كان ميل المستقيم ℓ يساوي $\frac{a}{b}$، فإن ميل المستقيم العمودي على ℓ هو معكوس مقلوب ميله، أي $-\frac{b}{a}$؛ لأن $\frac{a}{b}\left(-\frac{b}{a}\right) = -1$

✓ **تحقق من فهمك** (3A, 3B) انظر الهامش.

حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

3A) $A(14, 13), B(-11, 0), C(-3, 7), D(-4, -5)$

3B) $A(3, 6), B(-9, 2), C(5, 4), D(2, 3)$

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

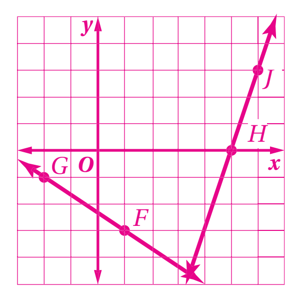
المثال 3 يبيّن كيفية تحديد ما إذا كان مستقيمان متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

المثال 4 يبيّن طريقة استعمال الميل لتمثيل مستقيمٍ بيانيًّا.

مثال إضافي

3 حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{FG}$ و $\overleftrightarrow{HJ}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك، إذا كانت: $F(1, -3), G(-2, -1)$، $H(5, 0), J(6, 3)$، ومثّل كلّ مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

غير ذلك

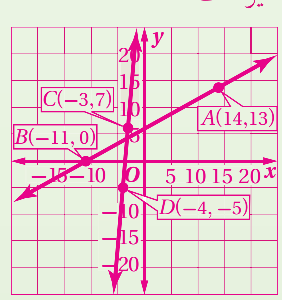


إرشادات للمعلم الجديد

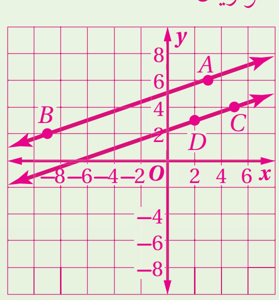
الحس الرياضي: اطلب إلى الطلاب أن يمثّلوا بيانيًّا مستقيمًا يمر في نقطتين، بحيث يكون ميله موجبًا، ومستقيمًا آخر ميله سالب، وثالثًا ميله صفر ورابعًا ميله غير معرف. ثم اطلب إليهم أن يجدوا ميل كل مستقيم، وأن يبيِّنوا كيف يمكن تحديد ما إذا كان ميل المستقيم موجبًا أو سالبًا أو صفرًا أو غير معرف بمجرد النظر إليه.

إجابات (تحقق من فهمك):

3A) غير ذلك

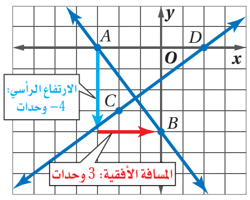


3B) متوازيان



مثال 4 استعمال الميل لتمثيل المستقيم بيانيًّا

مثل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $A(-3, 0)$ ويعامد $\overleftrightarrow{CD}$ ، حيث $C(-2, -3), D(2, 0)$.



لإيجاد ميل $\overleftrightarrow{CD}$ عوّض عن (x_1, y_1) بـ $(-2, -3)$، وعن (x_2, y_2) بـ $(2, 0)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-3)}{2-(-2)} = \frac{3}{4}$$

إذن ميل المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{CD}$ والمار بالنقطة A

يساوي $-\frac{4}{3}$ ، لأن $\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right) = -1$.

لتمثيل المستقيم بيانيًّا، ابدأ من النقطة A، وتحرك 4 وحدات إلى أسفل، ثم 3 وحدات نحو اليمين، وسمِّ النقطة B ، ثم ارسم $\overleftrightarrow{AB}$.

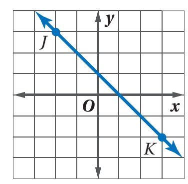
تحقق من فهمك

4) مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $P(0, 1)$ ويعامد $\overleftrightarrow{QR}$ ، حيث $Q(-6, -2), R(0, -6)$. انظر الهامش.

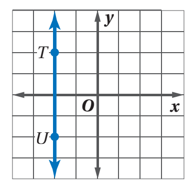
تأكـد

المثال 1 أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

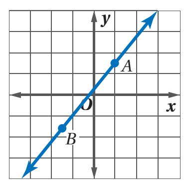
1) -1



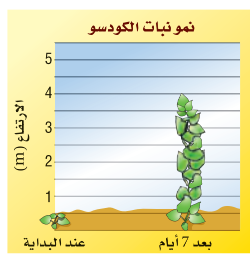
2) غير معروف



3) $\frac{6}{5}$



المثال 2 4) **علم النبات:** الكودسو (Kudzu) هو نبات متسلّق سريع النمو. قيس ارتفاع نبتة عند يوم البداية فكان 0.5 m، وبعد سبعة أيام أصبح ارتفاعها 4 m



a) مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يمثل ارتفاع النبتة مع مرور الزمن. انظر ملحق الإجابات

b) ما ميل هذا المستقيم؟ وماذا يُمثّل؟ $\frac{1}{2}$؛ يزيد طول النبتة 0.5 m كل يوم.

c) افترض أن هذه النبتة استمرت في النمو وفق هذا المعدل، فكم يكون ارتفاعها بعد 15 يومًا؟ 8 m

المثال 3 حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{WX}, \overleftrightarrow{YZ}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك. انظر ملحق الإجابات للتمثيل البياني

5) $W(2, 4), X(4, 5), Y(4, 1), Z(8, -7)$ متعامدان

6) $W(1, 3), X(-2, -5), Y(-6, -2), Z(8, 3)$ غير ذلك

7) $W(-7, 6), X(-6, 9), Y(6, 3), Z(3, -6)$ متوازيان

8) $W(1, -3), X(0, 2), Y(-2, 0), Z(8, 2)$ متعامدان

المثال 4 مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي: 9–11) انظر ملحق الإجابات

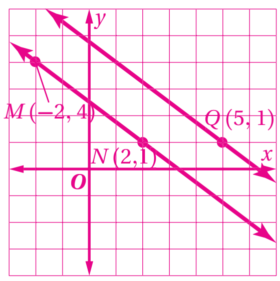
9) يمر بالنقطة $A(3, -4)$، ويوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ، حيث $B(2, 4), C(5, 6)$.

10) ميله يساوي 3 ، ويمر بالنقطة $A(-1, 4)$.

11) يمر بالنقطة $P(7, 3)$، ويعامد $\overleftrightarrow{LM}$ ، حيث $L(-2, -3), M(-1, 5)$.

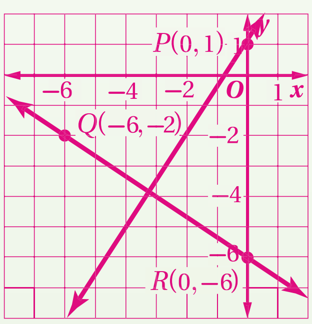
مثال إضافي

4 مثِّل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $Q(5, 1)$ ويوازي $\overleftrightarrow{MN}$ ، حيث $M(-2, 4), N(2, 1)$.



إجابة (تحقق من فهمك):

4)



تنويع التعليم

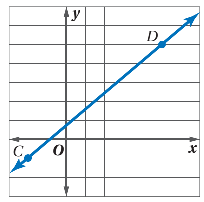
دون ضمن

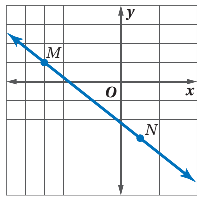
إذا وجد بعض الطلاب صعوبة في تذكُّر معاني قيم ميل كل مستقيم،

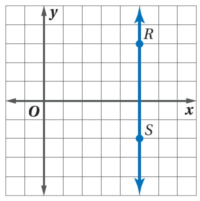
فقم بالطلب إليهم أن ينشدوا أنشودة عن الميل الموجب أو السالب أو الذي يساوي صفرًا، أو غير المعرّف.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:

12)  $\frac{6}{7}$

13)  $-\frac{4}{5}$

14)  غير معرّف

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين المحددتين في كلٍّ مما يأتي:

15) $C(3, 1), D(-2, 1)$ **0**

16) $E(5, -1), F(2, -4)$ **1**

17) $G(-4, 3), H(-4, 7)$ **غير معرف**

18) $J(7, -3), K(-8, -3)$ **0**

19) $P(-3, -5), Q(-3, -1)$ **غير معرف**

20) $R(2, -6), S(-6, 5)$ $-\frac{11}{8}$

المثال 2

21) **حواسيب:** في عام 1423هـ كان ثمن حاسوب محمول 3000 ريال ، وأصبح 1800 ريال في عام 1427هـ .

a) ارسم مستقيمًا يمثل توقعًا لسعر الحاسوب للسنوات من 1423هـ إلى 1427هـ . **انظر الهامش**

b) كم ينخفض ثمن الحاسوب في كل سنة؟ **300 ريال**

c) إذا استمر انخفاض السعر بالمعدل نفسه، فكم يكون ثمن الحاسوب عام 1430هـ؟ **900 ريال**

المثال 3 حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك. **22–27) انظر ملحق الإجابات**

22) $A(1, 5), B(4, 4), C(9, -10), D(-6, -5)$

23) $A(-6, -9), B(8, 19), C(0, -4), D(2, 0)$

24) $A(4, 2), B(-3, 1), C(6, 0), D(-10, 8)$

25) $A(8, -2), B(4, -1), C(3, 11), D(-2, -9)$

26) $A(8, 4), B(4, 3), C(4, -9), D(2, -1)$

27) $A(4, -2), B(-2, -8), C(4, 6), D(8, 5)$

المثال 4 مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي: **28–31) انظر ملحق الإجابات**

28) يمر بالنقطة $A(2, -5)$ ، ويوازي $\overleftrightarrow{BC}$ ، حيث $B(1, 3), C(4, 5)$.

29) ميله يساوي -2 ، ويمر بالنقطة $H(-2, -4)$.

30) يمر بالنقطة $X(1, -4)$ ويوازي $\overleftrightarrow{YZ}$ ، حيث $Y(5, 2), Z(-3, -5)$.

31) يمر بالنقطة $D(-5, -6)$ ويعامد $\overleftrightarrow{FG}$ ، حيث $F(-2, -9), G(1, -5)$.

32) **سكان:** في عام 1412هـ كان عدد سكان مدينة الطائف 416121 نسمة ، وفي عام 1424هـ بلغ عدد سكانها 521273 نسمة.

a) ما المعدّل التقريبي لتغيُّر عدد سكان مدينة الطائف من عام 1412هـ إلى 1424هـ ؟ **8763**

b) إذا استمر ازدياد عدد السكان بالمعدّل نفسه، فكم نسمةً تتوقع أن يبلغ عدد سكان مدينة الطائف عام 1432هـ؟ **591377**

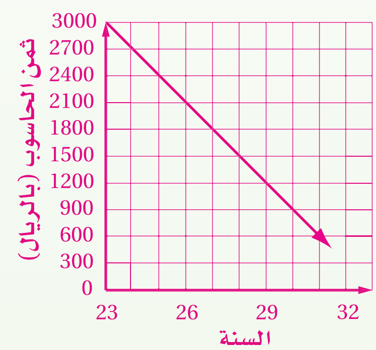
3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–11 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابة:

21a)



تنويع الواجبات المنزلية

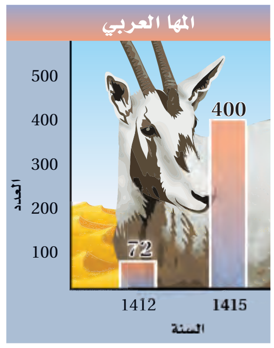
المستوى	الأسئلة
دون — دون المتوسط	12-31 ، 40-42 ، 43-57
ضمن — ضمن المتوسط	13–31 فردي، 33-37 فردي، 39-42 ، 43-57
فوق — فوق المتوسط	32-54 ، (اختياري: 55-57)

حدد أي المستقيمين في السؤالين الآتيين له أكبر ميل :

33) المستقيم 1: $(0, 5)$ و $(6, 1)$ **المستقيم 2**
المستقيم 2: $(10, 4)$ و $(-5, -8)$

34) المستقيم 1: $(0, -4)$ و $(2, 2)$ **المستقيم 1**
المستقيم 2: $(0, -4)$ و $(4, 5)$

35) **محمية طبيعية :** تؤوي محمية طبيعية حيوانًا مهددًا بالانقراض هو: المها العربي. ويوضح الشكل المجاور عدد المها العربي في المحمية عامَي 1412 هـ وَ 1415 هـ .



موقع الهيئة الوطنية لحماية الحياة الفطرية

a) أوجد معدل التغيُّر لعدد حيوانات المها العربي في المحمية. **109 تقريبًا لكل عام**

b) مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يمثّل الزيادة في العدد. **انظر ملحق الإجابات**

c) إذا استمر النمو وفق هذا المعدل، فكم يكون عدد حيوانات المها العربي عام 1436هـ ؟ **2696**

الربط مع الحياة

تبذل المملكة جهودًا حثيثة للحفاظ على البيئة بعناصرها المختلفة، حيث أسست الهيئة الوطنية لحماية الحياة الفطرية وإنمائها.

أوجد قيمة x أو y اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي، ثم مثِّل المستقيم بيانيًّا: **36–38) انظر ملحق الإجابات**

36) مستقيم يمر بالنقطتين $(-6, x)$، $(-1, 4)$ ، وميله يساوي $-\frac{5}{2}$

37) مستقيم يمر بالنقطتين $(4, 3)$، $(-4, 9)$ ، ويوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-8, 1)$، $(4, y)$

38) مستقيم يمر بالنقطتين $(1, -3)$، $(3, y)$ ، ويوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5, -6)$، $(9, y)$

39) **مدارس:** في عام 1421هـ كان عدد طلاب مدرسة الفتح 1125 طالبًا . وفي عام 1427هـ ازداد عدد الطلاب حتى بلغ 1425 طالبًا. وعندما أُنشئت مدرسة الأندلس عام 1422هـ كان عدد طلابها 1275 طالبًا. إذا ازداد عدد طلاب مدرسة الأندلس بنفس معدّل زيادة عدد طلاب مدرسة الفتح، فكم يصبح عدد طلاب مدرسة الأندلس عام 1427هـ ؟ **1525 طالبًا تقريبًا.**

مسائل مهارات التفكير العليا

40) **اكتشف الخطأ:** حسب كلٌّ من خالد وطارق ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $Q(3, 5), R(-2, 2)$ هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح تبريرك. **انظر الهامش**

خالد	طارق
$m = \frac{5-2}{-2-3}$	$m = \frac{5-2}{3-(-2)}$
$= -\frac{3}{5}$	$= \frac{3}{5}$

41) **تبرير:** في المربع $ABCD$ إذا كان $A(2, -4), C(10, 4)$. **a–c) انظر الهامش.**

a) أوجد الرأسين الآخرين B, D للمربع.

b) أثبت أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

c) أثبت أن قياس كل زاوية من زوايا المربع يساوي $90°$

إجابات:

40) إجابة طارق صحيحة. فقد طرح خالد إحداثيَّي x بالترتيب الخاطئ .

41a) $B(2, 4), D(10, -4)$

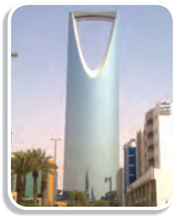
41b) إجابة ممكنة: كلٌّ من ميلَي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ غير معرَّف، لذا فهما متوازيان. وميل كلٍّ من $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ يساوي صفرًا، لذا فهما متوازيان.

41c) إجابة ممكنة: بما أن ميل $\overline{AB}$ غير معرّف، وميل $\overline{BC}$ يساوي صفرًا، فإن القطعتين متعامدتان وتشكّلان زاوية قياسها $90°$، وهكذا لبقية الزوايا.

تنبيه!

اكتشف الخطأ : في السؤال 40 يجب أن يتحقق الطلاب من ترتيب الأزواج المرتبة ومواقع إحداثيات كلٍّ من x و y في البسط والمقام وإشارات العمليات في صيغة الميل، فقد عكس خالد ترتيب إحداثيات x في المقام.

42) اكتب: يميل برج بيزا في إيطاليا عن الخط الرأسي بزاوية $3.97°$. صف ميل كلٍّ من برج المملكة وبرج بيزا.



42) بما أن برج المملكة رأسي فإن ميله غير معرّف، أمّا ميل برج بيزا فميله إما أن يكون سالبًا أو موجبًا؛ بحسب موقع النظر إليه.

43) تحدٍّ: تعلّمت في هذا الدرس أن $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. اكتب برهانًا جبريًّا لتبيّن أنه يمكن أيضًا حساب الميل باستعمال المعادلة $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. انظر ملحق الإجابات

تدريب على اختبار

44) أي المعادلات الآتية تمثل مستقيمًا يعامد المستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{4}x + 8$؟ **A**

A $y = -\frac{4}{3}x - 6$ **C** $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

B $y = \frac{4}{3}x + 5$ **D** $y = -\frac{3}{4}x - 5$

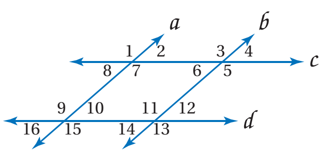
45) أي القيم الآتية تمثل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2, 4), (0, -2)$؟ **D**

A $-\frac{1}{3}$ **C** $\frac{1}{3}$

B -3 **D** 3

مراجعة تراكمية

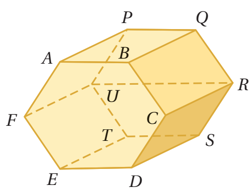
في الشكل المجاور: $a \parallel b$ ، $c \parallel d$ ، و $m\angle 4 = 57°$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية: (الدرس 2-2)



46) $\angle 5$ $123°$ **47)** $\angle 1$ $123°$

48) $\angle 8$ $57°$ **49)** $\angle 10$ $57°$

حدد كلًّا مما يأتي مستعملًا الشكل المجاور. (الدرس 2-1)



50) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{TU}$. $\overline{BC}, \overline{EF}, \overline{QR}$

51) جميع المستويات التي تتقاطع مع المستوى BCR. $ABC, ABQ, PQR, CDS, APU, DET$

52) جميع القطع المستقيمة التي تخالف $\overline{DE}$. $\overline{AP}, \overline{BQ}, \overline{CR}, \overline{FU}, \overline{PU}, \overline{QR}, \overline{RS}, \overline{TU}$

معتمدًا على المعطيات، حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا في كلٍّ مما يأتي. فسّر تبريرك. (الدرس 1-4)

53) المعطيات: $\angle B, \angle C$ متقابلتان بالرأس.
النتيجة: $\angle B \cong \angle C$ صحيحة

54) المعطيات: $\angle W \cong \angle Y$
النتيجة: $\angle W, \angle Y$ زاويتان متقابلتان بالرأس. غير صحيحة؛ ليس بالضرورة أن تكون الزاويتان المتطابقتان متقابلتين بالرأس.

استعد للدرس اللاحق

حُل كل معادلة مما يأتي بالنسبة لـ y:

55) $3x + y = 5$ $y = -3x + 5$

56) $4x + 2y = 6$ $y = -2x + 3$

57) $4y - 3x = 5$ $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

4 التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة يوضحون من خلالها كيف يمكن استعمال ميلَي مستقيمين لتحديد ما إذا كانا متعامدين.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يمثلوا الدالة $y = x^2$ بيانيًّا، ويمكنهم استعمال الحاسبة البيانية في ذلك. وضّح لهم أن مماس المنحنى يقطعه في موقع واحد فقط، واطلب إليهم أن يتوقعوا موقع المماس لهذا المنحنى، وأن يرسموا المستقيم ويتوقعوا ميله. وضّح للطلاب أنهم سيتعلّمون المزيد عن مماسات المنحنيات عند دراسة التفاضل والتكامل.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 2

دون دون المتوسط   ضمن ضمن المتوسط   فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21) دون

الاسم ________ التاريخ ________

2-4 تدريبات إعادة التعليم

ميل المستقيم

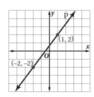
ميل المستقيم:

يُعرَّف **ميل المستقيم** m، بأنه نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي لإحداثيّي أي نقطتين $(x_1, y_1),(x_2, y_2)$ تقعان عليه ويعطَى بالصيغة:

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = m$، حيث $x_1 \neq x_2$،

ويمكن تفسير الميل على أنه **معدل التغير** في الكمية y بالنسبة إلى الكمية x

مثال 1 أوجد ميل المستقيم p في الشكل المجاور.



عند حساب ميل المستقيم p:

1) عوّض بـ $(1, 2)$ عن (x_1, y_1) و بـ $(-2, -2)$ عن (x_2, y_2)

2) $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ صيغة الميل

3) $= \frac{-2-2}{-2-1}$ عوّض

$\frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ بسّط

مثال 2

إذا بلغ إنتاج مصنع ملابس في عامه الأول 45000 قطعةٍ، وَ 55000 قطعةٍ في عامه السادس، فما المعدل التقريبي لتغير عدد القطع المنتَجَة سنويًّا؟

معدل تغير عدد القطع المنتجة، يساوي ميل المستقيم المار بالنقطتين $(6, 55000)$ ، $(1, 45000)$. استعمل صيغة الميل:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{55000-45000}{6-1} = \frac{10000}{5} = 2000$$

إذن المعدل التقريبي لتغير عدد القطع هو 2000 قطعةٍ في السنة.

تمارين

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين المحدّدتين في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

1) $J(0, 0), K(-2, 8)$ **−4**

2) $R(-2, -3), S(3, -5)$ $\mathbf{-\frac{2}{5}}$

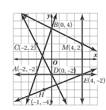
3) $L(1, -2), N(-6, 3)$ $\mathbf{-\frac{5}{7}}$

4) $P(-1, 2), Q(-9, 6)$ $\mathbf{-\frac{1}{2}}$

5) $T(1, -2), U(6, -2)$ **0**

6) $V(-2, 10), W(-4, -3)$ $\mathbf{\frac{13}{2}}$

أوجد ميل كلِّ مستقيم فيما يأتي:



7) $\overleftrightarrow{AB}$ **3**

8) $\overleftrightarrow{CD}$ **−2**

9) $\overleftrightarrow{EM}$ **غير معرّف**

10) $\overleftrightarrow{AE}$ **0**

11) $\overleftrightarrow{EH}$ $\mathbf{\frac{2}{5}}$

12) $\overleftrightarrow{BM}$ $\mathbf{-\frac{1}{2}}$

13) إذا كان عدد طلاب مدرسةٍ في عامها الأول 500 طالبٍ، وَ 800 في عامها السابع، فما معدل زيادة الطلاب السنوي في المدرسة. **50 طالبًا**

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22) دون

الاسم ________ التاريخ ________

2-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

ميل المستقيم

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة:

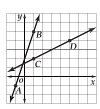
إذا تفحّصت ميلَي مستقيمين متوازيين وميلَي مستقيمين متعامدين، على ألّا يكون أيٌّ منها رأسيًّا؛ ستكتشف الخاصيّتين الآتيتين:

يكون للمستقيمين غير الرأسيّين الميل نفسه، إذا وفقط إذا كانا متوازيين.

يكون المستقيمان غير الرأسيّين متعامدين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميلَيهما يساوي -1 .

مثال 1 حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك إذا كانت:

$A(-1, -1), B(1, 5), C(1, 2), D(5, 4)$، ثم مثِّل كلّ مستقيم بيانيًّا لتتحقّق من إجابتك.



الخطوة 1 : أوجد ميل كلٍّ مستقيم.

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{5-(-1)}{1-(-1)} = 3$ ، وميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{1}{2} = \frac{4-2}{5-1}$.

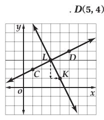
الخطوة 2 : حدِّد العلاقة بين المستقيمين إن وُجدت.

ليس للمستقيمين الميل نفسه؛ لذا فهما غير متوازيين، ولتحديد ما إذا كانا متعامدين.

أوجد حاصل ضرب الميلين. حاصل ضرب ميلَي $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$: $3\left(\frac{1}{2}\right) = 1.5$ ، بما أن حاصل ضرب ميليهما لا يساوي -1، فإنهما غير متعامدين .

لذلك لا توجد علاقة بين $\overleftrightarrow{AB}$ وَ $\overleftrightarrow{CD}$، وعند تمثيلهما في المستوى الإحداثي، تلاحظ أنهما يتقاطعان، ولا يكوّنان زاوية قائمةً.

مثال 2 مثِّل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $L(3, 3)$ ويعامد $\overleftrightarrow{CD}$، حيث $C(1, 2)$ ، $D(5, 4)$.



الخطوة 1 : في المثال السابق، أوجدنا ميل $\overleftrightarrow{CD}$ ويساوي $\frac{1}{2}$.

الخطوة 2 : ميل المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{CD}$، والمار بالنقطة L، يساوي $-\frac{2}{1}$ ؛ لأن $\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{1}\right) = -1$

الخطوة 3 : لتمثيل المستقيم بيانيًّا، ابدأ من النقطة A ، وتحرك وحدتين إلى أسفل، ثم وحدةً إلى اليمين، وسمّ النقطة K، ثم ارسم $\overleftrightarrow{KL}$

تمارين

حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{RS}$ متوازيين، أو متعامدين، أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ثم مثِّل كلّ مستقيم بيانيًّا لتتحقّق من إجابتك.

1) $M(0, 3), N(2, 4), R(2, 1), S(8, 4)$ **متوازيان**

2) $M(-1, 3), N(0, 5), R(2, 1), S(6, -1)$ **متعامدان**

3) $M(-1, 3), N(4, 4), R(3, 1), S(-2, 2)$ **غير ذلك**

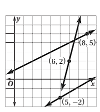
4) $M(0, -3), N(-2, -7), R(2, 1), S(0, -3)$ **متوازيان**

مثل بيانيًّا المستقيم الذي يحقّق الشروط في كلٍّ ممّا يأتي:

5) الميل = 4، ويمرّ بالنقطة $(6, 2)$.

6) يمرّ بالنقطة $H(8, 5)$ ويعامد $\overleftrightarrow{AG}$ ، حيث: $A(-5, 6)$، $G(-1, -2)$.

7) يمرّ بالنقطة $C(5, -2)$ ويوازي $\overleftrightarrow{LB}$ ، حيث: $B(7, 4), L(2, 1)$.



تدريبات المهارات (23) دون ضمن

الاسم ________ التاريخ ________

2-4 تدريبات المهارات

ميل المستقيم

أوجد ميل المستقيم المارّ بالنقطتين المحدَّدتين في كلٍّ ممّا يأتي :

1) $S(-1, 2), W(0, 4)$ **2**

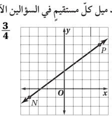
2) $G(-2, 5), H(1, -7)$ **−4**

3) $C(0, 1), D(3, 3)$ $\mathbf{\frac{2}{3}}$

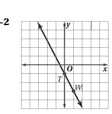
4) $J(-5, -2), K(5, -4)$ $\mathbf{-\frac{1}{5}}$

أوجد ميل كلّ مستقيمٍ في السؤالين الآتيين:

5) $\mathbf{\frac{3}{4}}$



6) **−2**



حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{MN}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ متوازيين، أو متعامدين، أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثّل كلّ مستقيم بيانيًّا لتتحقّق من إجابتك.

انظر رسوم الطلاب.

7) $A(0, 3), B(5, -7), M(-6, 7), N(-2, -1)$ **متوازيان**

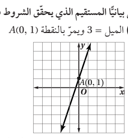
8) $A(-1, 4), B(2, -5), M(-3, 2), N(3, 0)$ **غير ذلك**

9) $A(-2, -7), B(4, 2), M(-2, 0), N(2, 6)$ **متوازيان**

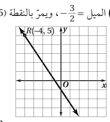
10) $A(-4, -8), B(4, -6), M(-3, 5), N(-1, -3)$ **متعامدان**

مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يحقّق الشروط في كلٍّ ممّا يأتي:

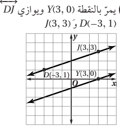
11) الميل = 3 ويمرّ بالنقطة $A(0, 1)$



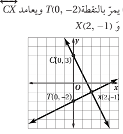
12) الميل = $-\frac{3}{2}$، ويمرّ بالنقطة $R(-4, 5)$



13) يمرّ بالنقطة $Y(3, 0)$ ويوازي $\overleftrightarrow{DJ}$ ، حيث: $D(-3, 1)$ وَ $J(3, 3)$



14) يمرّ بالنقطة $T(0, -2)$ ويعامد $\overleftrightarrow{CX}$ ، حيث: $C(0, 3)$ وَ $X(2, -1)$



تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

2-4 تدريبات حلّ المسألة

ميل المستقيم

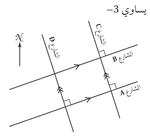
1) **طرق:** يرتفع طريق منحدر 15 ft لكلّ 100 ft أفقيّة، فما ميل الطريق؟ $\mathbf{\frac{3}{20}}$

2) **هبوط:** تهبط طائرة بمعدّل 300 ft لكلّ 5000 ft تقطعها الطائرة أفقيًّا، ما ميل مسار هبوط الطائرة؟ $\mathbf{-\frac{3}{50}}$

3) **رحلات:** يقطع هشام 770 km لزيارة عمّه، وقد خطّط أن يقطع أوّل 220 km من رحلته في ساعتين. إذا استمرّ بنفس المعدّل، فكم ساعةً يستغرق لقطع المسافة المتبقّية؟ **5 ساعاتٍ**

4) **بحيرات:** كان عمق المياه في بحيرة قبل هطل المطر 268 in، وبعد 4 ساعاتٍ من استمرار الهطل أصبح عمق المياه في البحيرة 274 in، ثم استمر مدّة ساعةٍ أخرى بالكثافة نفسها، فكم أصبح عمق المياه في البحيرة عند توقُّف نزول المطر؟ **275.5 in.**

5) **تخطيط المدن:** يبيّن الشكل أدناه خريطةً لجزءٍ من مدينة، إذا وضعت شبكة إحداثيّة على الخريطة، فإن ميل الشارع D يساوي -3



a) يبعد تقاطع الشارع A مع الشارع D 150 m شرق تقاطع الشارع B مع الشارع D، فكم مترًا يبعُد عنه جنوبًا؟ **450 m**

b) ما ميل الشارع C؟ وضّح إجابتك.

−3 ؛ الشارع D والشارع C متوازيان، ولذلك لهما الميل نفسه.

c) ما ميل كلٍّ من الشارع B والشارع A؟ وضّح إجابتك.

ميل كلٍّ منهما $\frac{1}{3}$ ؛ لأنهما عموديان على الشارع D والشارع C، وميل المستقيم العمودي يساوي سالب مقلوب ميل المستقيم الآخر.

d) يبعُد تقاطع الشارع A مع الشارع C 600 m شرقًا عن تقاطع الشارع A والشارع D، فكم مترًا يبعُد عنه شمالًا؟ **200 m**

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 2

دون دون المتوسط — ضمن ضمن المتوسط — فوق فوق المتوسط

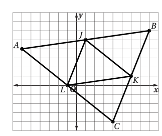
التدريبات الإثرائية (25) ضمن فوق

الاسم ______________ التاريخ ________

2-4 التدريبات الإثرائيّة

الميل والمضلّعات

في الهندسة الإحداثيّة مَيْلا أيِّ مستقيمين يحدِّدان ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين، وهذه المعرفة تفيد كثيرًا في حل مسائل تتعلق بالمضلّعات، وإثبات حقائق أو نظرياتٍ في الهندسة:



1) مثِّل بيانيًّا ΔABC الذي إحداثيّات رؤوسه هي:
. $A(-6, 4), B(8, 6), C(4, -4)$

2) J, K, L منتصفات الأضلاع $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ على الترتيب.
أوجد إحداثيّات J, K, L، ثم ارسم ΔJKL.
$\boldsymbol{J(1,5), K(6,1), L(-1,0)}$

3) أيُّ القطع تبدو متوازية؟
$\overline{AB}$ و $\overline{KL}$؛ $\overline{AC}$ و $\overline{JK}$؛ $\overline{BC}$ و $\overline{LJ}$

4) أثبت أن القِطَع المذكورة في السؤال 3 متوازية فعلًا.
ميل $\overline{AB}$ = ميل $\overline{LK}$ = $\frac{1}{7}$ ميل $\overline{BC}$ = ميل $\overline{JL}$ = $\frac{5}{2}$ ميل $\overline{JK}$ = ميل $\overline{AC}$ = $-\frac{4}{5}$

5) خمِّن العلاقة بين أضلاع المثلث والقطع الواصلة بين منتصفات الأضلاع.
القطعة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث.

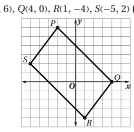
في كلٍّ من السؤالين الآتيين، أعطيت إحداثيّات رؤوس ΔPQR القائم الزاوية، أوجد ميل كلّ ضلع في المثلث، ثم استعمل العلاقة بين المستقيمين المتعامدين؛ لتحديد الوتر (الضلع الأطول في المثلث القائم).

6) $P(5, 1), Q(1, -1), R(-2, 5)$
ميل $\overline{PQ} = \frac{1}{2}$
ميل $\overline{QR} = -2$
ميل $\overline{PR} = -\frac{4}{7}$
الوتر: $\overline{PR}$

7) $P(-2, -3), Q(5, 1), R(2, 3)$
ميل $\overline{PQ} = \frac{4}{7}$
ميل $\overline{QR} = -\frac{2}{3}$
ميل $\overline{PR} = \frac{3}{2}$
الوتر: $\overline{PQ}$

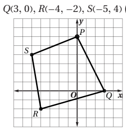
مثِّل بيانيًّا الشكل الرباعيَّ $PQRS$ الذي أُعطيت إحداثيّات رؤوسه في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ثم أوجد ميل قُطريه، وحدِّد ما إذا كان قُطراه متعامدين أم لا.

8) $P(-2, 6), Q(4, 0), R(1, -4), S(-5, 2)$



ميل $\overline{SQ} = -\frac{2}{9}$; ميل $\overline{PR} = -\frac{10}{3}$، لا.

9) $P(0, 6), Q(3, 0), R(-4, -2), S(-5, 4)$



ميل $\overline{SQ} = -\frac{1}{2}$; ميل $\overline{PR} = 2$، نعم.

الصف: الأول الثانوي 25 الفصل 2: التوازي والتعامد

كتاب التمارين (17) دون ضمن فوق

2-4 ميل المستقيم

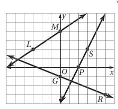
الفصل الثاني التوازي والتعامد

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين المحددتين في كلٍّ مما يأتي:

1) $B(-4, 4), R(0, 2)$ $-\frac{1}{2}$

2) $I(-2, -9), P(2, 4)$ $\frac{13}{4}$

أوجد ميل كلٍّ من المستقيمات الآتية:



3) $\overleftrightarrow{LM}$ $\frac{2}{3}$

4) $\overleftrightarrow{GR}$ $-\frac{2}{5}$

5) مستقيم يوازي $\overleftrightarrow{GR}$ $-\frac{2}{5}$

6) مستقيم يعامد $\overleftrightarrow{PS}$ $-\frac{1}{2}$

حدد ما إذا كان $\overleftrightarrow{KM}$ و $\overleftrightarrow{ST}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثِّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك: انظر التمثيلات البيانية للطلاب.

7) $K(-1, -8), M(1, 6), S(-2, -6), T(2, 10)$
غير ذلك

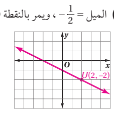
8) $K(-5, -2), M(5, 4), S(-3, 6), T(3, -4)$
متعامدان

9) $K(-4, 10), M(2, -8), S(1, 2), T(4, -7)$
متوازيان

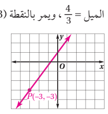
10) $K(-3, -7), M(3, -3), S(0, 4), T(6, -5)$
متعامدان

مثِّل بيانيًّا المستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

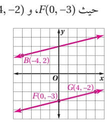
11) الميل = $-\frac{1}{2}$، ويمر بالنقطة $U(2, -2)$.



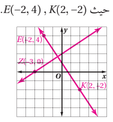
12) الميل = $\frac{4}{3}$، ويمر بالنقطة $P(-3, -3)$.



13) يمر بالنقطة $B(-4, 2)$، ويوازي $\overleftrightarrow{FG}$، حيث $F(0, -3)$، و $G(4, -2)$.



14) يمر بالنقطة $Z(-3, 0)$، ويعامد $\overleftrightarrow{EK}$، حيث $K(2, -2)$, $E(-2, 4)$.



15) **أرباح:** ارتفعت أرباح متجر أدوات كهربائية بين عامَي 1420هـ و 1425هـ بمعدل 9000 ريالٍ في السنة، وفي عام 1425هـ كانت أرباحه 45000 ريالٍ. إذا استمرت أرباح المتجر بالمعدل نفسه، فكم ستكون أرباحه عام 1429؟ **81000 ريالٍ**

17

2-5 صيغ معادلة المستقيم
Equations of Line

فيما سبق:
درستُ إيجاد ميل المستقيم.
(الدرس 4-2)

والآن:
- أكتب معادلة مستقيم إذا عرفتُ معلومات حول تمثيله البياني.
- أحل مسألة بكتابة معادلة مستقيم.

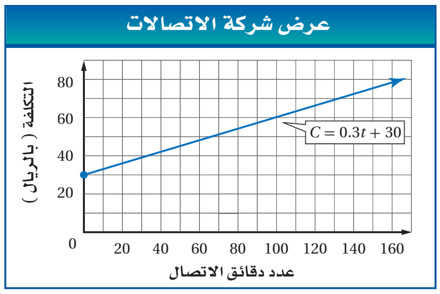
المفردات:
صيغة الميل والمقطع
slope-intercept form
صيغة الميل ونقطة
slope-point form

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

قدَّمت إحدى شركات الاتصالات عرضًا يدفع بموجبه المشترك 30 ريالًا شهريًّا بالإضافة إلى 0.30 ريال عن كل دقيقة اتصال. فإذا رمزنا للتكلفة الشهرية بالرمز C، ولعدد دقائق الاتصال بالرمز t، فإن:

$$C = 0.3t + 30$$



كتابة معادلة المستقيم: تذكر أنه يمكن كتابة معادلة المستقيم بصيغ مختلفة، ولكنها متكافئة.

مفهوم أساسي معادلة المستقيم غير الرأسي — أضف إلى مطويتك

صيغة الميل والمقطع لمعادلة المستقيم هي $y = mx + b$، حيث m ميل المستقيم، و b مقطع المحور y.

$y = mx + b$ $y = 3x + 8$ (الميل، مقطع المحور y)

صيغة الميل ونقطة لمعادلة المستقيم هي $y - y_1 = m(x - x_1)$، حيث (x_1, y_1) إحداثيًّا أيّ نقطة على المستقيم، m ميل المستقيم.

نقطة على المستقيم $(3, 5)$

$y - 5 = -2\,(x - 3)$ (الميل)

إذا علمت الميل ومقطع المحور y أو نقطة على المستقيم، فإنه يمكنك استعمال هاتين الصيغتين لتكتب معادلة المستقيم.

مثال 1 معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع

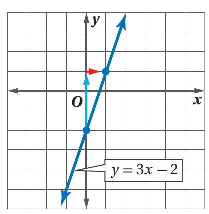
اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي ميله 3، ومقطع المحور y له -2، ثم مثّله بيانيًّا.

$y = mx + b$ صيغة الميل والمقطع

$y = 3x + (-2)$ $m = 3, b = -2$

$y = 3x - 2$ بسِّط

على المستوى الإحداثي، عيِّن نقطة مقطع المحور y عند $y = -2$، واستعمل قيمة الميل $3 = \frac{3}{1}$ لتحدد نقطة أخرى، وذلك بالانتقال 3 وحدات أعلى مقطع المحور y، ثم وحدة واحدة إلى يمينه. ارسم المستقيم الذي يمر بهاتين النقطتين.



تحقق من فهمك انظر ملحق الإجابات

1) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{2}$، ومقطع المحور y له 8، ثم مثّله بيانيًّا.

2-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-2
إيجاد ميل المستقيم.

الدرس 5-2
كتابة معادلة المستقيم إذا عرفت معلومات حول تمثيله البياني.
حل مسائل بكتابة معادلة مستقيم.

ما بعد الدرس 5-2
تحديد الدوال الرئيسة (الأم) وتمثيلها بيانيًّا ومنها الدوالّ الخطية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- ماذا تعني نقطة تقاطع منحنى معادلة التكلفة مع محور y؟ التكلفة الشهرية عندما يكون عدد دقائق الاتصال صفرًا.
- سمِّ نقطتين تقعان على التمثيل البياني لمعادلة التكلفة. إجابة ممكنة: $(0, 30), (100, 60)$
- ما ميل المستقيم؟ 0.3

مصادر الدرس 5-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (119)	• تنويع التعليم، ص (119, 124)	• تنويع التعليم، ص (119, 124)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (18)	• كتاب التمارين، ص (18)	• كتاب التمارين، ص (18)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

كتابة معادلة المستقيم

الأمثلة 1-4 تبيّن كيفية كتابة معادلة المستقيم باستعمال صيغة الميل والمقطع أو صيغة الميل ونقطة. يجب أن يتمكن الطلاب من استعمال القيم المعطاة لكتابة معادلة المستقيم إما بصيغة الميل والمقطع وإما بصيغة الميل ونقطة.

المثال 5 يبيّن كيفية كتابة معادلة مستقيم يعامد مستقيمًا معلومًا ويمر بنقطة معطاة.

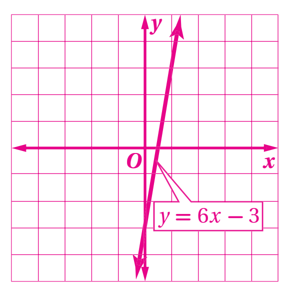
التقويم التكويني

استعمل أسئلة "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثالان إضافيان

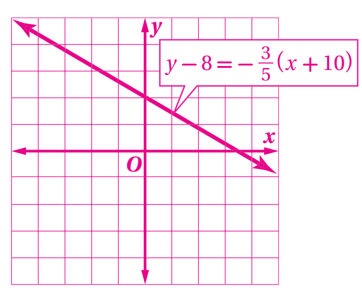
1 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي ميله 6 ومقطع المحور y له -3، ثم مثِّله بيانيًّا.

$y = 6x - 3$



2 اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الذي ميله $-\frac{3}{5}$، ويمرُّ بالنقطة $(-10, 8)$، ثم مثِّله بيانيًّا.

$y - 8 = -\frac{3}{5}(x + 10)$



تنبيه !

التعويض بإحداثيات سالبة

عند التعويض بإحداثيات سالبة، استعمل الأقواس؛ لتتجنب الوقوع في أخطاء الإشارات.

مثال 2 معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الذي ميله $-\frac{3}{4}$، ويمر بالنقطة $(-2, 5)$، ثم مثّله بيانيًّا.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

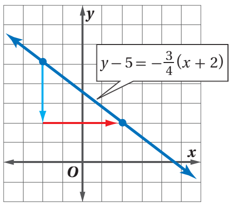
$y - 5 = -\frac{3}{4}[x - (-2)]$ $m = -\frac{3}{4}, (x_1, y_1) = (-2, 5)$

$y - 5 = -\frac{3}{4}(x + 2)$ بسّط

عيّن النقطة $(-2, 5)$ في المستوى الإحداثي.

واستعمل قيمة الميل $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$ لتحدد نقطة أخرى؛ وذلك بالانتقال 3 وحدات أسفل النقطة $(-2, 5)$، ثم 4 وحدات إلى يمينها.

ارسم المستقيم المار بهاتين النقطتين.



تحقق من فهمك

2) اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الذي ميله 4، ويمر بالنقطة $(-3, -6)$، ثم مثّله بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

عندما لا يُعطى ميل المستقيم، استعمل أي نقطتين عليه لحساب ميله، ثم استعمل صيغة الميل ونقطة، أو الميل والمقطع لتكتب معادلته.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

في المثال 3b، يمكنك تعويض إحداثيَّي إحدى النقطتين في صيغة الميل والمقطع لإيجاد مقطع المحور y، ثم كتابة المعادلة.

$y = mx + b$

$4 = -\frac{1}{2}(-7) + b$

$4 = \frac{7}{2} + b$

$4 - \frac{7}{2} = b$

$b = \frac{1}{2}$

لذا $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

مثال 3 معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بكل زوج نقاط فيما يأتي:

a) $(0, 3), (-2, -1)$

الخطوة 1: أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 3}{-2 - 0} = \frac{-4}{-2} = 2$ استعمل صيغة الميل

الخطوة 2: اكتب معادلة المستقيم.

$y = mx + b$ صيغة الميل والمقطع

$y = 2x + 3$ $m = 2$ ،$b = 3$

b) $(-7, 4), (9, -4)$

الخطوة 1: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 4}{9 - (-7)} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$ استعمل صيغة الميل

الخطوة 2: $y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-7)]$ $m = -\frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (-7, 4)$

$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 7)$ بسّط

$y - 4 = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ بالتوزيع

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ اجمع 4 لكلا الطرفين

تحقق من فهمك

3A) $(-2, 4), (8, 10)$ $y = \frac{3}{5}x + \frac{26}{5}$

3B) $(0, 0), (2, 6)$ $y = 3x$

إرشاد للمعلم الجديد

استعمال التمثيلات البيانية: يجد بعض الطلاب صعوبة في كتابة معادلة خطية باستعمال صيغة الميل ونقطة في المسائل اللفظية؛ لذا عليهم في هذه الحالة أن يرسموا الشكل، ويمثلوا القيم المعطاة على المحورين، مما يسمح لهم بتعويض قيمتَي الميل ومقطع المحور y.

مثال 4 معادلة المستقيم الأفقي

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-2, 6), (5, 6)$.

الخطوة 1: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-6}{5-(-2)} = \frac{0}{7} = 0$

الخطوة 2:

$y - y_1 = m(x - x_1)$	صيغة الميل ونقطة
$y - 6 = 0\,[x - (-2)]$	$m = 0, (x_1, y_1) = (-2, 6)$
$y - 6 = 0$	بسِّط
$y = 6$	اجمع 6 لكلا الطرفين

تحقق من فهمك

4) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3, 0), (5, 0)$. $y = 0$

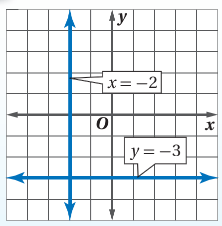
تحتوي معادلات المستقيمات الأفقية أو الرأسية متغيرًا واحدًا فقط.

مفهوم أساسي معادلات المستقيمات الأفقية أو الرأسية

أضف إلى مطويتك

معادلة المستقيم الأفقي هي $y = b$ ،
حيث b مقطع المحور y له.
مثال: $y = -3$

معادلة المستقيم الرأسي هي $x = a$ ،
حيث a مقطع المحور x له.
مثال: $x = -2$



المستقيمات المتوازية غير الرأسية لها الميل نفسه. ويكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي -1. والمستقيم الرأسي والمستقيم الأفقي دائمًا متعامدان.

مثال 5 معادلات المستقيمات المتوازية أو المتعامدة

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم العمودي على $y = -3x + 2$ ، والمار بالنقطة $(4, 0)$.

ميل المستقيم $y = -3x + 2$ يساوي -3 ؛ لذا فإن ميل المستقيم العمودي عليه يساوي $\frac{1}{3}$.

$y = mx + b$	صيغة الميل والمقطع
$0 = \frac{1}{3}(4) + b$	$m = \frac{1}{3}, (x, y) = (4, 0)$
$0 = \frac{4}{3} + b$	بسِّط
$-\frac{4}{3} = b$	اطرح $\frac{4}{3}$ من كلا الطرفين

لذا فمعادلة المستقيم العمودي هي $y = \frac{1}{3}x + \left(-\frac{4}{3}\right)$ ، أو $y = \frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3}$.

تحقق من فهمك

5) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يوازي $y = -\frac{3}{4}x + 3$ ويمر بالنقطة $(-3, 6)$. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$

أمثلة إضافية

3 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المارِّ بكل زوج نقاط فيما يأتي:

a) $(4, 9)$ و $(-2, 0)$
$y = \frac{3}{2}x + 3$

b) $(-3, -7)$ و $(-1, 3)$
$y = 5x + 8$

4 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمرُّ بالنقطتين $(5, -2)$ و $(0, -2)$. $y = -2$

5 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يعامد المستقيم $y = \frac{1}{5}x + 2$ والمار بالنقطة $(2, 0)$. $y = -5x + 10$

تنبيه!

معادلة المستقيم: عند تحويل معادلة المستقيم من صيغة الميل ونقطة إلى صيغة الميل والمقطع، تذكّر أن توزِّع عملية ضرب الميل على الحدين المكتوبين داخل الأقواس عند تبسيط المعادلة.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون: وضِّح للطلاب أنه يجب عليهم أن يتحققوا دائمًا من حلِّهم عندما يجدون معادلة مستقيم باستعمال تمثيله البياني، واطلب إليهم أن يعملوا فرادى وأن يتفحصوا أمثلة هذا الدرس، ويعوِّضوا إحداثيات نقاط على المستقيم في المعادلة النهائية، وأن يلاحظوا أن التعويض يؤدي إلى معادلة صحيحة.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اسحب شبكة إحداثية على السبورة التفاعلية وارسم مستقيمًا عليها، واطلب إلى الطلاب أن يكتبوا معادلته بصيغة الميل والمقطع، ثم اسحب المستقيم إلى مكان آخر على السبورة وكرِّر العملية، وناقش أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المعادلتين.

كتابة معادلات لحل المسائل: يمكن تمثيل كثير من المواقف الحياتية باستعمال معادلة خطية.

مثال 6 من واقع الحياة — كتابة معادلة خطيّة

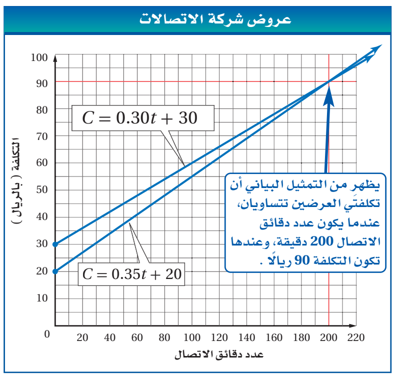
هواتف: يقارن علي بين عرضين مقدمين من شركة اتصالات. يدفع بموجب العرض X مبلغ 20 ريالًا شهريًّا بالإضافة إلى 0.35 ريال عن كل دقيقة اتصال. أما العرض Y فتفاصيله موضحة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. أي العرضين أفضل لعلي؟

افهم: العرض X : 20 ريالًا شهريًّا زائد 0.35 ريال عن كل دقيقة اتصال.
العرض Y : 30 ريالًا شهريًّا زائد 0.30 ريال عن كل دقيقة اتصال.
قارن بين العرضين لتحدد متى تكون التكلفة الشهرية لأحدهما أقل من التكلفة الشهرية للآخر.

خطط: اكتب معادلة تمثل التكلفة الشهرية C لكلٍّ من العرضين لعدد t من دقائق الاتصال، ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا وقارن.

حل: معدَّلا التزايد أو مَيلا معادلتَي التكلفة الشهرية هما 0.35 للعرض X، و 0.30 للعرض Y، وعندما يكون عدد دقائق الاتصال صفرًا، تكون التكلفة الشهرية هي الرسوم فقط؛ لذا فإن مقطع المحور y هو 20 للعرض X، و 30 للعرض Y.

العرض Y		العرض X
$C = mt + b$	صيغة الميل والمقطع	$C = mt + b$
$C = 0.30t + 30$	بالتعويض عن m و b	$C = 0.35t + 20$



ويظهر أيضًا من التمثيل البياني أنه إذا كان عدد دقائق الاتصال أقل من 200 دقيقة في الشهر ، فإن تكلفة العرض X أقل، بينما تكون تكلفة العرض Y أقل إذا كان عدد دقائق الاتصال أكثر من 200 دقيقة في الشهر.

تحقق: تحقق من تقديرك. إذا كان عدد دقائق الاتصال يساوي 200 دقيقة ، فإن تكلفة العرض X هي $0.35(200) + 20 = 90$ ، وتكلفة العرض Y هي $0.30(200) + 30 = 90$ ✓

✓ تحقق من فهمك

6) وضع نادي عرضين مختلفين لروّاده.
العرض x: رسوم اشتراك شهرية مقدارها 75 ريالًا زائد 20 ريالًا عن كل زيارة للنادي.
العرض Y: 35 ريالًا عن كل زيارة للنادي من دون رسوم اشتراك.
فأيُّ العرضين أفضل؟

قراءة الرياضيات

خطي: كلمة منسوبة إلى خط، وتتضمن معنى الاستقامة. وسميت المعادلات الخطية بهذا الاسم؛ لأن تمثيلها البياني خط مستقيم.

إرشادات حل المسألة

التمثيل البياني في المثال 6 ، مع أن الرسوم الشهرية في العرض X أقل، إلا أن سعر دقيقة الاتصال الواحدة أعلى. وهذا يجعل المقارنة بين العرضين صعبة. إلّا أن التمثيل البياني يُسهّل المقارنة بين موقفين خطيَّين في كثير من الأحيان.

كتابة معادلات لحل المسائل

المثال 6 يبيّن كيفية حل مسألة من واقع الحياة باستعمال معادلة خطيّة.

مثال إضافي

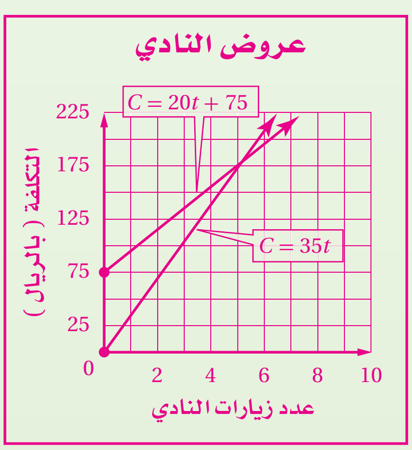
6 كلفة الاستئجار: الإيجار الشهري لشقة في مجمّع سكني هو 1525 ريالًا مضافًا إليها 750 ريالًا سنويًّا للصيانة.

a) اكتب معادلة تمثّل التكلفة الكلية A لاستئجار الشقة مدة r شهرًا في السنة الأولى.
$A = 1525r + 750$

b) إذا كان الإيجار الشهري لشقة في مجمع سكني آخر هو 1600 ريال مضافًا إليها 200 ريال سنويًّا للصيانة، فأيُّ المجمعين السكنيين يقدم عرضًا أفضل لشخص يريد السكن مدة سنة واحدة؟ المجمع السكني الأول يقدّم عرضًا أفضل؛ حيث تكلّف السنة الأولى 19050 ريالًا بدلًا من 19400 ريال في المجمع الثاني.

إجابة (تحقق من فهمك):

6) $C = 35t$ و $C = 20t + 75$ ؛ للعرضين التكلفة نفسها إذا كان عدد زيارات النادي 5، بينما يكون العرض Y أفضل إذا كانت الزيارات أقل من 5 مرات، ويكون العرض X أفضل إذا كانت الزيارات أكثر من 5 مرات.



المحتوى الرياضي

معادلة المستقيم: يمكن كتابة معادلة المستقيم بطرائق عديدة مختلفة، حيث يمكن استعمال صيغة الميل ونقطة، أو استعمال صيغة الميل والمقطع، إلّا أن جميع هذه المعادلات متكافئة، ويمكن التحقق من ذلك باستعمال الخصائص الجبرية للمساواة.

تأكـد

1–3) انظر الهامش.

المثال 1 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المُعطى ميله ومقطع المحور y له في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّله بيانيًّا:

1) $m = 4, b = -3$ 2) $m = \frac{1}{2}, b = -1$ 3) $m = -\frac{3}{2}, b = 5$

4–6) انظر ملحق الإجابات للتمثيل البياني

المثال 2 اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّله بيانيًّا:

4) $m = 5, (3, -2)$ $y + 2 = 5(x - 3)$
5) $m = \frac{1}{4}, (-2, -3)$ $y + 3 = \frac{1}{4}(x + 2)$
6) $m = -4.25, (-4, 6)$ $y - 6 = -4.25\,(x + 4)$

المثالان 3, 4 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي أُعطيت نقطتان يمر بهما في كلٍّ مما يأتي: 7–9) انظر الهامش.

7) $(0, -1), (4, 4)$ 8) $(4, 3), (1, -6)$ 9) $(6, 5), (-1, -4)$

المثال 5

10) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم العمودي على $y = -2x + 6$، والمار بالنقطة $(3, 2)$.
$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

11) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-1, 5)$، ويوازي المستقيم الذي معادلته $y = 4x - 5$. $y = 4x + 9$

المثال 6

12) **عروض:** يقارن سلمان بين عرضين مقدمين من نادٍ رياضي. يدفع بموجب العرض الأول اشتراكًا شهريًّا قدره 100 ريال، بالإضافة إلى 10 ريالاتٍ عن كل زيارة. ويدفع بموجب العرض الثاني اشتراكًا شهريًّا قدره 150 ريالًا، ويسمح له بعشر زيارات شهريًّا.

a) اكتب معادلة تمثل التكلفة الشهرية لكلٍّ من العرضين. $y = 150, y = 10x + 100$

b) مثّل كلتا المعادلتين بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

c) إذا كان سلمان يريد الذهاب إلى النادي 7 مراتٍ شهريًّا، فهل يشترك في العرض الأول أم الثاني؟ فسّر إجابتك. العرض الثاني، حيث التكلفة 150 ريالًا، على حين أن تكلفة العرض الأول 170 ريالًا.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المُعطى ميله ومقطع المحور y له في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّله بيانيًّا:

13–18) انظر ملحق الاجابات

13) $m = -5, b = -2$ 14) $m = -7, b = -4$ 15) $m = 9, b = 2$
16) $m = 12, b = \frac{4}{5}$ 17) $m = -\frac{3}{4}, (0, 4)$ 18) $m = \frac{5}{11}, (0, -3)$

المثال 2 اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّله بيانيًّا:

19–24) انظر ملحق الاجابات

19) $m = 2, (3, 11)$ 20) $m = 4, (-4, 8)$ 21) $m = -7, (1, 9)$
22) $m = \frac{5}{7}, (-2, -5)$ 23) $m = -\frac{4}{5}, (-3, -6)$ 24) $m = -2.4, (14, -12)$

المثالان 3, 4 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي أعطيت نقطتان يمر بهما في كلٍّ مما يأتي:

25) $(-1, -4), (3, -4)$ $y = -4$
26) $(2, -1), (2, 6)$ $x = 2$
27) $(-3, -2), (-3, 4)$ $x = -3$
28) $(0, 5), (3, 3)$ $y = -\frac{2}{3}x + 5$
29) $(-12, -6), (8, 9)$ $y = \frac{3}{4}x + 3$
30) $(2, 4), (-4, -11)$ $y = \frac{5}{2}x - 1$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	13–42 ، 56–71
ضمن المتوسط	13–41 فردي ، 52 ، 55-72
فوق المتوسط	43–71 ، (72 اختياري)

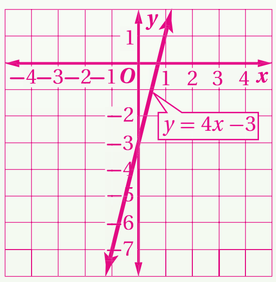
3 التدريب

التقويم التكويني

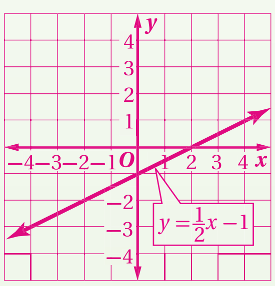
استعمل الأسئلة 1–12 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

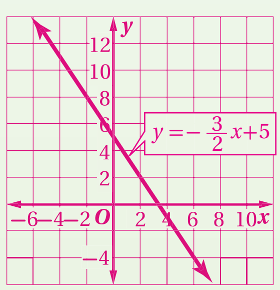
1) $y = 4x - 3$



2) $y = \frac{1}{2}x - 1$



3) $y = -\frac{3}{2}x + 5$



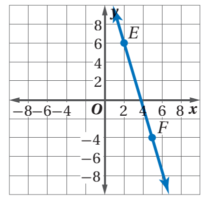
7) $y = \frac{5}{4}x - 1$

8) $y = 3x - 9$

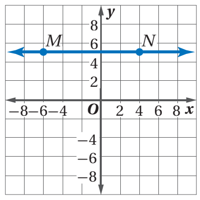
9) $y = \frac{9}{7}x - \frac{19}{7}$

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الممثل بيانيًا، أو المعطى وصفه في كلٍّ مما يأتي:

31) $\overleftrightarrow{EF}$ $y=-\frac{10}{3}x+\frac{38}{3}$



32) $\overleftrightarrow{MN}$ $y=5$



33) يحوي النقطتين $(3, 4)$, $(-1, -2)$

34) يحوي النقطتين $(-8, -13)$, $(-4, -5)$

35) مقطع المحور x يساوي 3، ومقطع المحور y يساوي -2

36) مقطع المحور x يساوي $\frac{1}{2}-$، ومقطع المحور y يساوي 4

المثال 5 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يحقق المعطيات في كلٍّ مما يأتي:

37) يمر بالنقطة $(-7, -4)$، ويعامد المستقيم $y=\frac{1}{2}x+9$. $y=-2x-18$

38) يمر بالنقطة $(-1, -10)$، ويوازي المستقيم $y=7$. $y=-10$

39) يمر بالنقطة $(6, 2)$، ويوازي المستقيم $y=-\frac{2}{3}x+1$. $y=-\frac{2}{3}x+6$

40) يمر بالنقطة $(-2, 2)$، ويعامد المستقيم $y=-5x-8$. $y=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$

المثال 6

41) **جمعية خيرية:** نظَّمت جمعية خيرية حفلًا لتكريم مجموعة من حفظة القرآن الكريم، فاستأجرت قاعة لتقيم فيها الحفل. إذا كانت أجرة القاعة 1500 ريال بالإضافة إلى 15.5 ريالًا عن كل شخص يحضر الحفل.

a) اكتب معادلة تمثل تكلفة استئجار القاعة y إذا حضر x شخصًا. $y=15.5x+1500$

b) مثِّل المعادلة بيانيًا. انظر الهامش.

c) إذا حضر الحفل 285 شخصًا، فكم تكون تكلفة استئجار القاعة؟ 5917.5 ريالًا

d) إذا رصدت الجمعية 6000 ريال لاستئجار القاعة، فما عدد الأشخاص الذين يمكن أن يحضروا الحفل؟ 290

42) **توفير:** يوفر عبد الله نقودًا ليشتري مذياعًا مرتبطًا بالأقمار الاصطناعية، ويدفع رسوم الاشتراك السنوي بخدمة الأقمار الاصطناعية . فبدأ بتوفير 200 ريال أُهديت إليه في عيد الأضحى ، وبعد ذلك كان يضيف 40 ريالًا كل أسبوع .

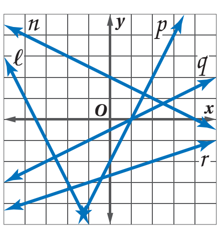
a) اكتب معادلة تمثل ما وفّره عبد الله y بعد x أسبوعًا. $y=40x+200$

b) مثِّل المعادلة بيانيًا. انظر ملحق الإجابات

c) متى يوفر 500 ريال؟ بعد 8 أسابيع

d) إذا بدأ التوفير منذ أسبوعين، وكان ثمن المذياع 700 ريال ، ورسم الاشتراك السنوي بخدمة الأقمار الاصطناعية 420 ريالًا ، فمتى يوفر مبلغًا يكفي لذلك ؟ فسر إجابتك. انظر ملحق الإجابات

استعمل الشكل المجاور لتسمي أي مستقيم يحقق الوصف في كلٍّ مما يأتي:



43) يوازي المستقيم $y=2x-3$. p

44) يعامد المستقيم $y=\frac{1}{2}x+7$. ℓ

45) يتقاطع مع المستقيم $y=\frac{1}{2}x-5$ ، ولكنه لا يعامده. n أو p أو r

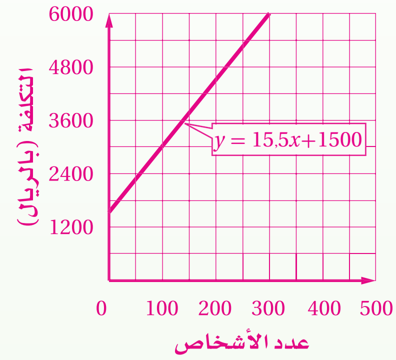
الربط مع الحياة

تصل إشارات بث إذاعة FM إلى (48 – 64) km تقريبًا. أما إشارات البث الإذاعي بواسطة الأقمار الاصطناعية فتصل إلى أكثر من 35200 km

إجابة :

41b)

تكلفة استئجار القاعة



33) $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

34) $y=2x+3$

35) $y=\frac{2}{3}x-2$

36) $y=8x+4$

122 الفصل 2 التوازي والتعامد

حدّد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين، أو غير ذلك في كلٍّ ممّا يأتي:

46) $y = 2x + 4,\ y = 2x - 10$ **متوازيان**

47) $y = -\frac{1}{2}x - 12,\ y = 2x + 7$ **متعامدان**

48) $y - 4 = 3(x + 5),\ y + 3 = -\frac{1}{3}(x + 1)$ **متعامدان**

49) $y - 3 = 6(x + 2),\ y + 3 = -\frac{1}{3}(x - 4)$ **غير ذلك**

50) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(4, 2)$ ويوازي المستقيم $y - 2 = 3(x + 7)$. **$y = 3x - 10$**

51) اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-8, 12)$ ويعامد المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-7, 2)$، $(3, 2)$. **$x = -8$**

الربط مع الحياة

بعد تشكيل الآنية من الصلصال، يتم إدخالها في أفران خاصة عند درجة حرارة تفوق 500°C .

52) **صناعة الفخار:** نظّمت جمعية حِرَف يدوية دورة في صناعة الفخار، وكان رسم الاشتراك 150 ريالًا، بحيث يغطي اللوازم والمواد وكيسًا واحدًا من طين الصلصال. وكل كيس إضافي يكلف 40 ريالًا. اكتب معادلة تمثل تكلفة الاشتراك وعدد x من الأكياس المستعملة. **انظر الهامش.**

53) **تمثيلات متعددة:** طلب مدير قصر أفراح من بسام أن ينظِّم وقوف السيارات في أثناء حفل. وقدّم له عرضين للأجر؛ أحدهما أن يدفع له 4 ريالاتٍ عن كل سيارة، والآخر أن يعطيه أجرًا مقداره 150 ريالًا بالإضافة إلى ريالين عن كل سيارة.

a) **جدوليًا:** أنشئ جدولًا يبيّن ما يتقاضاه بسام عن 20، 50، 100 سيارة في كلا العرضين. **انظر الهامش.**

b) **عدديًا:** اكتب معادلة تمثّل ما يكسبه بسام من كل عرض. **$y = 4x;\ y = 2x + 150$**

c) **بيانيًا:** مثل بيانيًا كلًّا من معادلتَي العرضين. **انظر الهامش. (c–f)**

d) **تحليليًا:** أيُّ العرضين أكثر كسبًا لبسام، إذا كان عدد السيارات 35 سيارةً؟ وأيُّهما أكثر كسبًا لبسام، إذا كان عدد السيارات 80 سيارةً؟ وضح إجابتك.

e) **لفظيًا:** اكتب عبارة تصف العرض الأكثر كسبًا لبسام تبعًا لعدد السيارات.

f) **منطقيًا:** إذا كان عدد السيارات 75 سيارةً، فأي العرضين أكثر كسبًا لبسام؟ وضّح تبريرك.

مسائل مهارات التفكير العليا

54) **تحدٍّ:** أوجد قيمة n، بحيث يمر المستقيم العمودي على المستقيم $-2y + 4 = 6x + 8$ بالنقطتين $(n, -4)$، $(2, -8)$. **14**

55) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت النقاط $(-2, 2)$، $(2, 5)$، $(6, 8)$ تقع على استقامة واحدة. برّر إجابتك. **انظر الهامش.**

56) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلات زوجين مختلفين من المستقيمات المتعامدة التي تتقاطع في النقطة $(-3, -7)$. **انظر الهامش.**

57) **اكتشف الخطأ:** كتب كلٌّ من راكان وفيصل معادلة مستقيم ميله -5 ، ويمر بالنقطة $(-2, 4)$، أيُّهما إجابته صحيحة؟ وضّح تبريرك.

راكان	فيصل
$y - 4 = -5(x - (-2))$	$y - 4 = -5(x - (-2))$
$y - 4 = -5(x + 2)$	$y - 4 = -5(x + 2)$
	$y - 4 = -5x - 10$
	$y = -5x - 6$

58) **اكتب:** أيهما أسهل كتابة: معادلة مستقيم بصيغة الميل ونقطة، أم بصيغة الميل والمقطع؟

57) الحلان صحيحان ، كتب فيصل المعادلة بصيغة الميل والمقطع، في حين كتبها راكان بصيغة الميل ونقطة.

58) إجابة ممكنة: إذا أعطيت الميل ومقطع المحور y، فإن استعمال صيغة الميل والمقطع يكون أسهل، وعندما تُعطى نقطتان أو الميل ونقطة، يكون استعمال صيغة الميل ونقطة أسهل.

تمثيلات متعددة: في السؤال 53، يستعمل الطلاب جدولًا ومعادلة جبرية والتمثيل البياني ووصفًا لفظيًّا لاستقصاء مسألة من واقع الحياة ممثلة بمعادلة خطية.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 57، يجب أن يعرف الطلاب أنه إذا بسّط راكان معادلته ، فإنها ستكون مطابقة لإجابة فيصل. ذكِّر الطلاب بأن صيغة الميل والمقطع وصيغة الميل ونقطة تؤديان إلى صيغتين متكافئتين لمعادلة المستقيم.

إجابات:

52) إذا كان رسم الاشتراك 150 ريالًا، وَعدد الأكياس المستعملة للمشترك x فإن عدد الأكياس التي يدفع ثمنها $x-1$ وبالتالي سيكون ثمن الأكياس الإضافية $40\ (x-1)$ إذن تكلفة الاشتراك $40\ (x-1) + 150$ إذن $c = 40(x-1) + 150$ أو $c = 40x + 110$

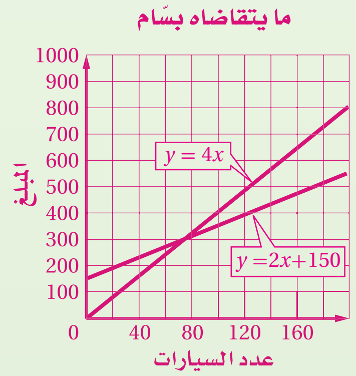
53a)

العرض 1	
عدد السيارات	المبلغ
20	80
50	200
100	400

العرض 2	
عدد السيارات	المبلغ
20	190
50	250
100	350

53c)

ما يتقاضاه بسّام



53d) إذا كان عدد السيارات 35، فإنه يكسب 140 ريالًا من العرض الأول و $2(35) + 150$ أو 220 ريالًا من العرض الثاني، إذن العرض الثاني أفضل. إذا كان عدد السيارات 80 سيارة، فإنه يكسب 320 ريالًا مع العرض الأول، ويكسب 310 ريالاتٍ من العرض الثاني، إذن العرض الأول أفضل.

53e) إجابة ممكنة: إذا كان عدد السيارات أقل من 75 سيارةً، فإن العرض الثاني أكثر كسبًا، وإذا كان عدد السيارات أكثر من 75 سيارة، فإن العرض الأول أكثر كسبًا.

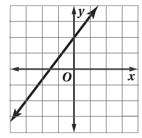
53f) إجابة ممكنة: إذا كان عدد السيارات 75 سيارةً، فإن الكسب يتساوى في كلا العرضين؛
$4(75) = 300$
$2(75) + 150 = 300$

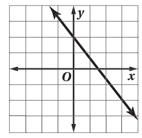
55) نعم؛ ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-2, 2)$ و $(2, 5)$ يساوي $\frac{3}{4}$، وميل المستقيم المار بالنقطتين $(2, 5)$ و $(6, 8)$ يساوي $\frac{3}{4}$، وبما أن للمستقيمين الميل نفسه، ولهما نقطة مشتركة، فإن لهما المعادلة نفسها؛ لذا فإن جميع النقاط تقع على استقامة واحدة.

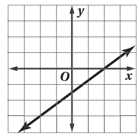
56) إجابة ممكنة: $x = -3,\ y = -7$؛
$y = 2x - 1,\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{17}{2}$

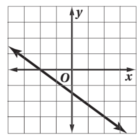
تدريب على اختبار

59) أيٌّ مما يأتي هو التمثيل البياني للمستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, -3)$؟ C

A


B


C


D


60) أيٌّ مما يأتي هي معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, 1)$، ويعامد المستقيم $y = \frac{1}{3}x + 5$؟ C

A $y = 3x + 7$

B $y = \frac{1}{3}x + 7$

C $y = -3x - 5$

D $y = -\frac{1}{3}x - 5$

مراجعة تراكمية

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين A, B في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 4-2)

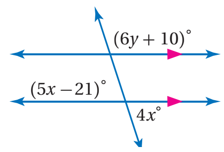
61) $A(4, 3), B(5, -2)$ -5

62) $A(0, 2), B(-3, -4)$ 2

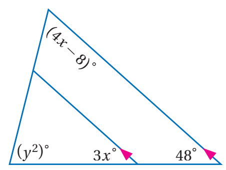
63) $A(2, 5), B(5, 1)$ $-\frac{4}{3} \approx -1.3$

أوجد قيمة x, y في كلٍّ من الشكلين الآتيين: (الدرس 2-2)

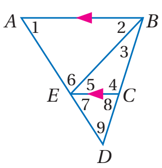
64) $x = 21, y \approx 14.33$



65) $x = 16, y = \sqrt{76} \approx 8.7$



في الشكل المجاور: $m\angle 1 = 58^\circ$, $m\angle 2 = 47^\circ$, $m\angle 3 = 26^\circ$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية: (الدرس 2-2)



66) $\angle 7$ 58°

67) $\angle 5$ 47°

68) $\angle 6$ 75°

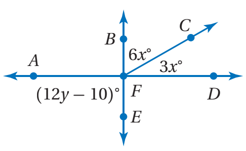
69) $\angle 4$ 107°

70) $\angle 8$ 73°

71) $\angle 9$ 49°

استعد للدرس اللاحق

72) إذا كان $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ متعامدتين، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y $x = 10, y \approx 8.3$



4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا فقرة توضح كيف ساعدهم الدرس السابق حول ميل المستقيم على تعلّم كتابة معادلة المستقيم، وأن يقدموا مثالين على الأقل يدعمان مبرراتهم.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرسين 4−2 ، و 5−2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (31) .

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يصفوا موقفًا حياتيًّا يتضمن معادلة للربح ومعادلة للنفقات، ثم اطلب إليهم تمثيل كلٍّ من المعادلتين بيانيًّا في ورقة الرسم البياني نفسها. تسمّى نقطة التقاطع "نقطة التعادل". فمثلًا في محل بيع العصائر يكسب زيد 0.25 ريال عن كل كأس عصير مبيعة. وتكلفة إبريق العصير الواحد 2.50 ريال، وثمن الكأس الفارغة 0.05 ريال . مثّل بيانيًّا المعادلتين $y = 0.25x$ و $y = 0.05x + 2.5$. نقطة التقاطع (12.5, 3.125) تُشير إلى أن زيدًا يجب أن يبيع 13 كأسًا على الأقل من العصير حتى يحقق ربحًا.

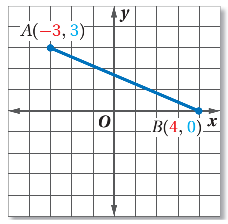
توسع 2-5 معمل الهندسة

2-5 معادلة العمود المنصف
Equations of Perpendicular Bisectors

يمكنك تطبيق ما تعلمته عن الميل ومعادلة المستقيم لإيجاد معادلة العمود المنصف لقطعة مستقيمة.

نشاط

أوجد معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ إذا كان طرفاها هما النقطتين $A(-3, 3), B(4, 0)$ ، ثم مثّله بيانيًّا.



الخطوة 1: منصّف القطعة المستقيمة يمر بنقطة منتصفها.
استعمل صيغة نقطة المنتصف لتجد نقطة منتصف $\overline{AB}$.

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = M\left(\frac{-3+4}{2}, \frac{3+0}{2}\right)$$
$$= M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

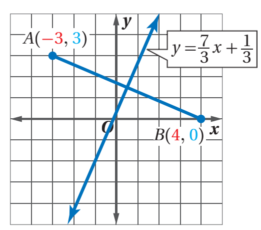
الخطوة 2: يكون العمود المنصّف عموديًّا على القطعة المستقيمة، ويمر بنقطة منتصفها.
ولتجد ميل العمود المنصّف أوجد أولًا ميل $\overline{AB}$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$
$$= \frac{0-3}{4-(-3)} \quad x_1=-3, x_2=4, y_1=3, y_2=0$$
$$= -\frac{3}{7} \quad \text{بسّط}$$

الخطوة 3: استعمل صيغة الميل ونقطة لكتابة معادلة المستقيم.
ميل العمود المنصّف يساوي $\frac{7}{3}$؛ لأن $-\frac{3}{7}\left(\frac{7}{3}\right) = -1$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل ونقطة}$$
$$y - \frac{3}{2} = \frac{7}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad m = \frac{7}{3}, (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$
$$y - \frac{3}{2} = \frac{7}{3}x - \frac{7}{6} \quad \text{خاصية التوزيع}$$
$$y = \frac{7}{3}x + \frac{1}{3} \quad \text{اجمع } \frac{3}{2} \text{ لكلا الطرفين}$$

الخطوة 4: **للتحقق:** مثّل المستقيم $y = \frac{7}{3}x + 3$ للتمثيل انظر إجابات الطلاب



تمارين:

أوجد معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ ، ومثله بيانيًّا في كلٍّ مما يأتي:

1) $P(5, 2), Q(7, 4)$ $y = -x + 9$
2) $P(-3, 9), Q(-1, 5)$ $y = \frac{1}{2}x + 8$
3) $P(-2, 1), Q(0, -3)$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
4) $P(0, 1.6), Q(0.5, 2.1)$ $y = -x + 2.1$

توسع 2-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف:
إيجاد معادلة العمود المنصف.

المواد اللازمة:
- أوراق الرسم البياني

2 التدريس

العمل فرديًّا:
يمكن أن ينفذ الطلاب هذا النشاط فُرادى أو في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات. اطلب إلى الطلاب قراءة النشاط، ثم ناقش الخطوات اللازمة لإنشاء العمود المنصف. واسألهم عن أهمية إيجاد نقطة منتصف القطعة المستقيمة وميلها، وأن يقرروا ما إذا كان ترتيب تنفيذ الخطوتين 1 و 2 ضروريًّا أم لا.

التدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 4–1.

3 التقويم

التقويم التكويني
استعمل الأسئلة 4–1؛ لتقويم فهم الطلاب طريقة كتابة معادلة المنصف العمودي لقطعة مستقيمة معطاة وتمثيله بيانيًّا.

من المحسوس إلى المجرد
اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا عن هذا النشاط باستعمال عباراتهم الخاصة وبعض الأمثلة، ثم اطلب إليهم أن يعرفوا العمود المنصف، وأن يوضحوا باستعمال مخطط خطوات كتابة معادلته وتمثيله بيانيًّا.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر الدرس 5 - 2

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) دون

الاسم ________________ التاريخ ________

2-5 تدريبات إعادة التعليم

صيغ معادلة المستقيم

كتابة معادلة المستقيم:

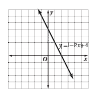
يمكنك كتابة معادلة المستقيم إذا علمت أيًّا ممّا يأتي:

- الميل ومقطع المحور y.
- الميل وإحداثيّات نقطةٍ على المستقيم.
- إحداثيات نقطتين على المستقيم.

إذا كان m ميل المستقيم، و b مقطع المحور y، و (x_1, y_1) نقطة على المستقيم فإن:

- المعادلة **بصيغة الميل والمقطع** هي: $y = mx + b$
- المعادلة **بصيغة النقطة والميل** هي: $y - y_1 = m(x - x_1)$.
- لإيجاد معادلة المستقيم بمعرفة إحداثيات نقطتين عليه، نحسب ميلَه، ثم نطبق صيغة الميل ونقطة (أيّ من النقطتين).

مثال 1 اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم، الذي ميله -2، ومقطع المحور y له يساوي 4، ثم مثِّله بيانيًّا.

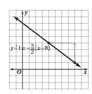


صيغة الميل والمقطع $y = mx + b$

$m = -2, b = 4$ $\quad y = -2x + 4$

إذن معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع هي: $y = -2x + 4$

مثال 2 اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم الذي ميله $-\frac{3}{4}$، ويمرّ بالنقطة $(8, 1)$، ثم مثِّله بيانيًّا.



صيغة النقطة والميل $y - y_1 = m(x - x_1)$

$m = -\frac{3}{4}, (x_1, y_1) = (8, 1)$ $\quad y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 8)$

إذن معادلة المستقيم بصيغة النقطة والميل هي: $y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 8)$

مثال 3 اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(2, 3)$، $(1, -5)$.

الخطوة 1: أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين $(1, -5), (2, 3)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-5)}{2 - 1} = \frac{3 + 5}{1} = 8$$

الخطوة 2: اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة، وعوّض عن (x_1, y_1) بأيٍّ من النقطتين ولتكن $(2, 3)$:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 8(x - 2)$

تمارين

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المعطى ميلُه ومقطع المحور y في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم مثّله بيانيًّا. **انظر رسومات الطلاب.**

1) $m = 2, b = -3$ **$y = 2x - 3$**

2) $m = -\frac{1}{2}, b = 4$ **$y = -\frac{1}{2}x + 4$**

3) $m = 0; b = -2$ **$y = -2$**

اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم إذا عُلم ميلُه ونقطة عليه، ثم مثّله بيانيًّا. **انظر رسومات الطلاب.**

4) $m = -2, (4, -2)$ **$y + 2 = -2(x - 4)$**

5) $m = \frac{1}{4}, (-3, -2)$ **$y + 2 = \frac{1}{4}(x + 3)$**

6) $m = 0, (-2, 5)$ **$y - 5 = 0$**

اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المار بكل زوج نقاطٍ فيما يلي: **انظر رسومات الطلاب.**

7) $(0, 1), (2, 3)$ **$y - 1 = x$**

8) $(-2, 2), (1, 4)$ **$(y - 4) = \frac{2}{3}(x - 1)$**

9) $(9, 3), (0, 5)$ **$y - 5 = -2x$**

الصف: الأول الثانوي — 26 — الفصل 2: التوازي والتعامد

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (27) دون

الاسم ________________ التاريخ ________

2-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

صيغ معادلة المستقيم

كتابة معادلة المستقيم لحلّ المسائل:

يمكنك تمثيل مواقف عديدة من واقع الحياة مستعملًا المعادلات الخطيّة.

مثال يقدّم خالد خدمات حاسوبيّة إلى شركات صغيرة في مدينته، فتدفع له الشركة 220 ريالًا شهريًّا مقابل متابعة وصيانة موقعها الإلكترونيّ، ويُضاف إلى ذلك 180 ريالًا مقابل كلّ ساعةٍ في أيِّ زيارة عمل إلى الشركة.

a) اكتب معادلة تمثّل التكلفة الشهريّة C، لصيانة الموقع الإلكترونيّ، بالإضافة إلى زيارات عملٍ إلى الشركة مدّتها h ساعة.

تزداد التكلفة 180 ريالًا عن كلّ ساعة عمل؛ لذا فإن معدّل التغيّر أو الميل يساوي 180. ومقطع المحور y يساوي التكلفة عندما يكون عدد ساعات زيارات العمل صفرًا؛ أي 220 ريالًا.

$C = mh + b$

$C = 180h + 220$

b) يمكن أن يغير خالد التكلفة بتمثيلها بالمعادلة: **$C = 100h + 500$**، حيث إن 500 ريالٍ هي الرسم الشهري الثابت مقابل متابعة وصيانة الموقع الإلكتروني، وتكلفة كلّ ساعة عمل في الشركة هي 100 ريالٍ، إذا طلبت شركة $5\frac{1}{2}$ ساعات زيارات عمل، فاحسب التكلفة وفق الخطتين الأولى والثانية، وفي أي خطّة منهما يحصل خالد على أجرٍ أكبر؟

الخطة الأولى:

ما يكسبه خالد في $5\frac{1}{2}$ ساعات عمل هو:

$C = 180h + 220 = 180(5\frac{1}{2}) + 220$

$= 990 + 200$

$= 1210$

الخطة الثانية:

ما يكسبه خالد في $5\frac{1}{2}$ ساعات عمل هو:

$C = 100h + 500 = 100(5.5) + 500$

$= 550 + 500$

$= 1050$

لذا فإن خالدًا يكسب أكثر مع الخطة الأولى.

تمارين

حلّ التمارين 3 – 1 مستعملًا المعلومات الآتية:

أراد خالد أن يشترك في تأمين صحيٍّ، فقدمت له شركتان عرضين مختلفين:

الشركة الأولى: اشتراك سنويّ مقداره 3000 ريالٍ و 100 ريالٍ عن كل مراجعةٍ لأي مركز صحيٍّ.

الشركة الثانية: اشتراك سنويّ مقداره 4000 ريالٍ وَ 50 ريالًا عن كل مراجعةٍ لأي مركز صحيٍّ.

1) اكتب بصيغة الميل والمقطع المعادلة التي تمثّل التكلفة السنوية الكليّة لكلٍّ من الشركتين، حيث تمثّل p عدد مرات المراجعة.
الشركة الأولى: $C = 100p + 3000$ الشركة الثانية: $C = 50p + 4000$

2) إذا تعدّى عدد مراجعات خالد 22 مرةً في العام، فأيّ الشركتين أقل تكلفةً؟ **الشركة الثانية**

3) إذا قُدّم لخالد عرضٌ ثالثٌ يتضمن اشتراكًا سنويًّا مقداره 5000 ريال، من دون دفع أي مبالغ إضافية، وكان من المتوقع أن يراجع خالد 30 مرةً في العام، فأيّ الشركات أفضل؟ **الشركة الثالثة**

الصف: الأول الثانوي — 27 — الفصل 2: التوازي والتعامد

تدريبات المهارات (28) دون ضمن

الاسم ________________ التاريخ ________

2-5 تدريبات المهارات

صيغ معادلة المستقيم

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم، المُعطَى ميلُه ومقطع المحور y له في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم مثِّله بيانيًّا:
انظر رسومات الطلاب

1) $m = -3, b = 2$ **$y = -3x + 2$**

2) $m = 3, b = -8$ **$y = 3x - 8$**

3) $m = \frac{3}{7}, b = 1$ **$y = \frac{3}{7}x + 1$**

4) $m = -\frac{2}{5}, b = -6$ **$y = -\frac{2}{5}x - 6$**

اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المعطى ميله ونقطة تقع عليه في كلٍّ ممّا يأتي، ثم مثّله بيانيًّا: **انظر رسومات الطلاب**

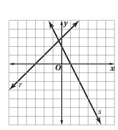
5) $m = 2, (5, 2)$ **$y - 2 = 2(x - 5)$**

6) $m = -3, (2, -4)$ **$y + 4 = -3(x - 2)$**

7) $m = -\frac{1}{2}, (-2, 5)$ **$y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 2)$**

8) $m = \frac{1}{3}, (-3, -8)$ **$y + 8 = \frac{1}{3}(x + 3)$**

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الممثل بيانيًّا أو المُعطَى وصفُه في كلٍّ ممَّا يأتي:



9) r **$y = x + 3$**

10) s **$y = -2x + 2$**

11) المستقيم الذي يوازي المستقيم r ويمرّ بالنقطة $(1, -1)$. **$y = x - 2$**

12) المستقيم العمودي على المستقيم s ويمرّ بالنقطة $(0, 0)$. **$y = \frac{1}{2}x$**

13) $m = 6, b = -2$. **$y = 6x - 2$**

14) $m = -\frac{5}{3}, b = 0$. **$y = -\frac{5}{3}x$**

15) $m = -1$، ويحوي $(0, -6)$. **$y = -x - 6$**

16) $m = 4$، ويحوي $(2, 5)$. **$y = 4x - 3$**

17) يحوي $(2, 0)$ وَ $(0, 10)$. **$y = -5x + 10$**

18) مقطع المحور x له يساوي -2، ومقطع المحور y له يساوي -1. **$y = -\frac{1}{2}x - 1$**

الصف: الأول الثانوي — 28 — الفصل 2: التوازي والتعامد

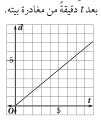
تدريبات حل المسألة (29) دون ضمن فوق

الاسم ________________ التاريخ ________

2-5 تدريبات حلّ المسألة

صيغ معادلة المستقيم

1) **قيادة:** يقود ياسر سيارته متجهًا لبيت صديقه، والتمثيل البياني أدناه يمثّل المسافة d (بالأميال) التي قطعها ياسر بعد t دقيقةً من مغادرة بيته.



اكتب معادلةً تربط d بـ t.
$d = 0.8t$

2) **تكاليف:** يعمل فِراس في فحص أجهزة التبريد، وقد اشترى أدوات بـ 750 ريالًا للبدء في العمل، ويتقاضى 50 ريالًا عن إجراء الفحص الواحد، إذا مثّل P صافي ربح من إجراء الفحص n مرةً، فاكتب معادلةً تربط P بـ n، وكم مرّةً يلزمه إجراء الفحص حتى يكسب 750 ريالًا؟
$P = 50n - 750;\ n = 30$

3) **دهانات:** قرّرت شركة دهانات اختبار جودة الدهان الأبيض الذي تنتجه، فدهنت مربّعًا بدهان أبيض من إنتاجها، ثم بدأت تقيس درجة نقاء لون المربّع كلّ عام، وبعد سبع سنوات كانت درجة نقاء اللون 85%، وبعد عشر سنوات من الدهان انخفضت النسبة إلى 82.9%، افترض أن نسبة النقاء تتناقص بمعدل ثابتٍ مع الزمن، واكتب معادلةً تُعطِي نسبة النقاء R في صورة دالّة للزمن t بالسنوات، وما نسبة نقاء وجهٍ جديدٍ من الدهان الأبيض لهذه الشركة؟
$R = -0.7t + 89.9$؛
ونسبة نقاء وجه دهان جديد 89.9%

4) **رسم فنّي:** ترسم منيرة بالألوان الزيتيّة على قطع من قماش الكتّان، وقبل أن تبدأ الرسم على الكتان تدهنه بدهان تأسيس أبيض؛ حتى لا يمتصّ القماش الزيت الموجود في الألوان التي تستعملها، ويمكنها شراء قماش مدهون بدهان التأسيس بمبلغ 21 ريالًا لكلّ مترٍ، أو يمكنُها شراء قماش غير مدهون بمبلغ 15 ريالًا لكلّ مترٍ، ولكن يتعيّن عليها أن تشتري عُلبة دهان التأسيس بمبلغ 30 ريالًا.

a) إذا كانت P تساوي تكاليف Y مترًا من قماش الكتّان المؤسّس، فاكتب معادلةً تربط P مع Y.
$P = 21Y$

b) إذا كانت U تكلفة شراء Y مترًا من قماش الكتّان غير المؤسّس، بالإضافة إلى علبة دهان التأسيس، فاكتب معادلةً تربط U بـ Y.
$U = 15Y + 30$

c) ما عدد أمتار القماش الذي يكون عنده شراء القماش المؤسّس أقل تكلفةً؟

نلاحظ أن التكلفتين تكونان متساويتين عندما:

$21Y = 15Y + 30$	
$21Y - 15Y = 30$	**اطرح $15Y$ من الطرفين**
$6Y = 30$	**بسّط**
$Y = 5$	**اقسم الطرفين على 6**

أي عندما يكون عدد الأمتار 5،

أما إذا كان عدد الأمتار أقل من 5، فإن شراء القماش المؤسس يكون أقل تكلفةً.

الصف: الأول الثانوي — 29 — الفصل 2: التوازي والتعامد

مصادر الدرس 5 - 2

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (30) ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

2-5 التدريبات الإثرائيّة

المضلّعات على الشبكة الإحداثيّة

عند تمثيل المعادلات بيانيًّا على الشبكة الإحداثيّة، يمكن أن تتقاطع مستقيماتها، بحيث تشكّل القطع المستقيمة المتكوّنة من نقاط تقاطعها أضلاع مضلّع.

ويمكن الحكم على نوع المضلع هذا، بالاستفادة من شروط التوازي والتعامد للمستقيمات من خلال الميل.

1) عند تمثيل المعادلات الآتية بيانيًّا، ستجد أنها تحتوي على أضلاع مضلّعٍ، خمّن نوع الشكل الرباعي الذي تشكّله المستقيمات الآتية من دون تمثيلها بيانيًّا:

$y = \frac{1}{2}x + 3$

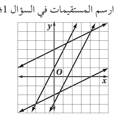
$y = \frac{1}{2}x - 2$

$y = 2x + 1$

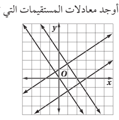
$y = 2x - 3$

تشكل متوازي أضلاع؛ لأن هناك زوجين من المستقيمات المتوازية، وبما أن المستقيمات غير متعامدة إذن لن تشكل مستطيلًا.

2) ارسم المستقيمات في السؤال 1؛ لتحدِّد ما إذا كان توقُّعك صحيحًا.



3) أوجد معادلات المستقيمات التي تكوّن أضلاع الشكل الرباعي المبيّن أدناه، ثم حدّد نوعه، وبرّر إجابتك.



$\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x + 1}$

$\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x - 2}$

$\boldsymbol{y = -\frac{3}{2}x}$

$\boldsymbol{y = -\frac{3}{2}x + 3}$

مستطيل؛ لأن كل مستقيمين متتاليين متعامدان.

الصف: الأول الثانوي 30 **الفصل 2:** التوازي والتعامد

كتاب التمارين (18) دون ضمن فوق

الفصل الثاني التوازي والتعامد

2-5 صيغ معادلة المستقيم

بصيغة الميل والمقطع، اكتب معادلة المستقيم المُعطَى ميله ومقطع المحور y له في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّله بيانيًّا: انظر التمثيلات البيانية للطلاب

1) $m = \frac{2}{3}, b = -10$ $\quad y = \frac{2}{3}x - 10$

2) $m - \frac{7}{9}, \left(0, -\frac{1}{2}\right)$ $\quad y = -\frac{7}{9}x - \frac{1}{2}$

3) $m = 4.5, (0, 0.25)$ $\quad y = 4.5x + 0.25$

بصيغة الميل ونقطة، اكتب معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّله بيانيًّا: انظر التمثيلات البيانية للطلاب.

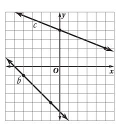
4) $m = \frac{3}{2}, (4, 6)$ $\quad y - 6 = \frac{3}{2}(x - 4)$

5) $m = -\frac{6}{5}, (-5, -2)$ $\quad y + 2 = -\frac{6}{5}(x + 5)$

6) $m = 0.5, (7, -3)$ $\quad y + 3 = 0.5(x - 7)$

7) $m = -1.3, (-4, 4)$ $\quad y - 4 = -1.3(x + 4)$

بصيغة الميل والمقطع، اكتب معادلة المستقيم الممثل بيانيًّا أو المعطى وصفه في كلٍّ مما يأتي:



8) المستقيم b $\quad y = -x - 5$

9) المستقيم c $\quad y = -\frac{2}{5}x + 4$

10) مستقيم يوازي المستقيم b ، ويمر بالنقطة $(3, -2)$ $\quad y = -x + 1$

11) مستقيم يعامد المستقيم c ، ويمر بالنقطة $(-2, -4)$ $\quad y = \frac{5}{2}x + 1$

12) $m = -\frac{4}{9}, b = 2$ $\quad y = -\frac{4}{9}x + 2$

13) $m = 3$ ، ويمر بالنقطة $(2, -3)$ $\quad y = 3x - 9$

14) مقطع المحور x يساوي -6، ومقطع المحور y يساوي 2 $\quad y = \frac{1}{3}x + 2$

15) مقطع المحور x يساوي 2 ، ومقطع المحور y يساوي -5 $\quad y = \frac{5}{2}x - 5$

16) يمر بالنقطتين $(2, -4), (5, 8)$ $\quad y = 4x - 12$

17) يمر بالنقطتين $(-4, 2), (8, -1)$ $\quad y = -\frac{1}{4}x + 1$

18) **إسعافات أولية:** تقدم جمعية خيرية دورة في الإسعافات الأولية، ويدفع المشترك 200 ريال رسم التحاق بالدورة، بالإضافة إلى 15 ريالًا عن كل جلسة تدريبية. اكتب معادلة تمثل التكلفة الكلية لحضور x جلسة تدريبية. $\quad C = 15x + 200$

18

2-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-6

استعمال علاقات الزوايا لإثبات توازي مستقيمين.

الدرس 2-6

إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم.

إيجاد البعد بين مستقيمين متوازيين.

ما بعد الدرس 2-6

وضع تخمينات حول المستقيمات وتحديد صحتها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا ؟"

واسأل:

- ما المهن الأخرى التي يمكن أن يُستخدم فيها الخيط الشاقولي؟ يستعمل الخيط الشاقولي من قبل النجارين والمساحين.
- لماذا كان استعمال أداة للتأكد من دقة الاستقامة الرأسية الحقيقية للبناء مهمًّا جدًّا؟ لأن الإنشاءات تكون أكثر استقرارًا وسليمةً إنشائيًّا عندما تُضبط رأسيًّا وأفقيًّا.

2-6 الأعمدة والمسافة
Perpendiculars and Distance

فيما سبق:

درستُ كتابة معادلة مستقيم عُرفت معلومات حول تمثيله البياني.

(الدرس 2-5)

والآن:

- أجد البعد بين نقطة ومستقيم.
- أجد البعد بين مستقيمين متوازيين.

المفردات:

المسافة العمودية
perpendicular distance

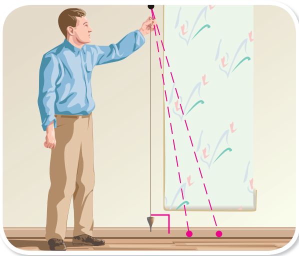
البعد بين نقطة ومستقيم
distance from a point to a line

المحل الهندسي
locus

متساوي البعد
equidistant

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



الخيط الشاقولي عبارة عن خيط مربوط في أحد طرفيه ثقل معدني يسمى الشاقول، وعندما يُعلق الخيط من طرفه الآخر يتأرجح الشاقول تأرجحًا حرًّا، ثم يسكن بحيث يكون تحت نقطة التعليق مباشرة.

يُستعمل الخيط الشاقولي؛ لإنشاء خط رأسي عند البناء أو عند لصق ورق الجدران.

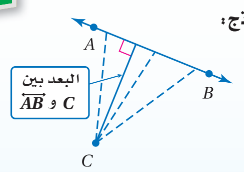
البعد بين نقطة ومستقيم: يمثل طول الخيط الشاقولي أقصر مسافة بين نقطة التعليق ومستوى الأرض أسفله. **فالمسافة العمودية** بين نقطة ومستقيم هي أقصر مسافة في جميع الحالات، وهي تمثل **البعد بين النقطة والمستقيم**.

مفهوم أساسي — البُعد بين نقطة ومستقيم

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.

النموذج:



إن إنشاء مستقيم عمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تقع عليه، يبين أنه يوجد مستقيم واحد على الأقل يمر بتلك النقطة ويكون عموديًّا على المستقيم.

إنشاءات هندسية — إنشاء عمودي على مستقيم من نقطة لا تقع عليه

الخطوة 1: ضع الفرجار عند النقطة P. وارسم قوسًا يقطع k في موقعين مختلفين. سم نقطتَي التقاطع C, D

الخطوة 2: ضع الفرجار عند النقطة C، وارسم قوسًا تحت المستقيم k باستعمال فتحة فرجار أكبر من $\frac{1}{2}CD$ وباستعمال فتحة الفرجار نفسها، ارسم من D قوسًا آخر يقطع القوس السابق. وسم نقطة التقاطع Q.

الخطوة 3: استعمل مسطرة لرسم $\overleftrightarrow{PQ}$

مصادر الدرس 2-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (127)	• تنويع التعليم، ص (127)	• تنويع التعليم، ص (133)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (19)	• كتاب التمارين، ص (19)	• كتاب التمارين، ص (19)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

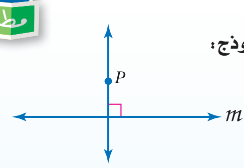
تنص المسلمة الآتية على أن المستقيم العمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تقع عليه هو مستقيم وحيد.

مسلّمة 2.6 **مسلمة التعامد**

أضف إلى مطويتك

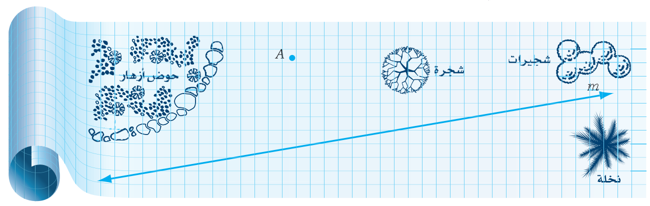
التعبير اللفظي: لأي مستقيم ونقطة لا تقع عليه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بالنقطة، ويكون عموديًا على المستقيم المعلوم.

النموذج:



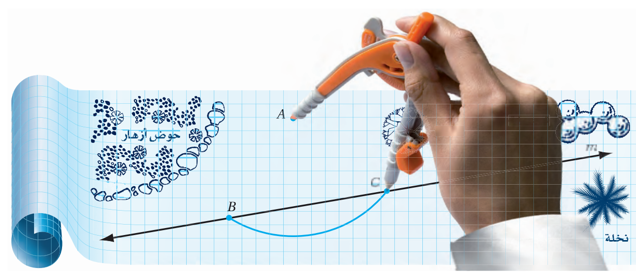
مثال 1 من واقع الحياة **إنشاء أقصر قطعة مستقيمة بين نقطة ومستقيم**

هندسة مدنية: لاحظ مهندس مدني أن جزءًا من ساحة حديقة عامة تتجمع عنده المياه. ويريد أن يضع أنبوب تصريف أرضيًّا من النقطة A وسط هذه المنطقة إلى خط التصريف الرئيس الممثل بالمستقيم m. أنشئ القطعة المستقيمة التي يُمثِّل طولها أقصر أنبوب يربط خط التصريف الرئيس بالنقطة A.

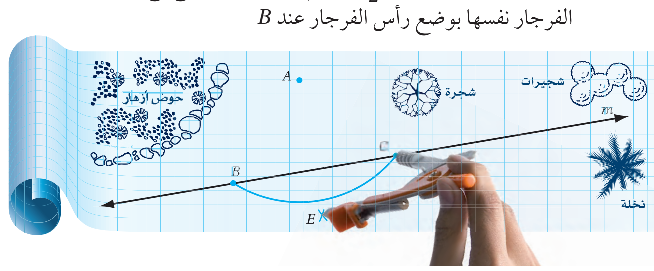


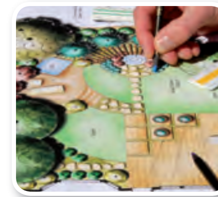
القطعة المستقيمة التي يمثل طولها أقصر أنبوب، هي القطعة المستقيمة العمودية من النقطة إلى المستقيم. لإنشاء القطعة المستقيمة اتبع الخطوات التالية:

الخطوة 1: استعمل الفرجار لتعيّن النقطتين B, C على المستقيم m، بحيث تكونا على البعد نفسه من النقطة A، وذلك بوضع رأس الفرجار عند النقطة A ورسم قوس يقطع m في النقطتين B, C



الخطوة 2: استعمل الفرجار لتعيِّن نقطة أخرى مثل E لا تقع على المستقيم m ، وتكون على البعد نفسه من B, C ، وذلك بوضع رأس الفرجار عند النقطة C، ورسم قوس تحت المستقيم m باستعمال فتحة فرجار أكبر من $\frac{1}{2}BC$، ورسم قوس آخر يتقاطع مع القوس السابق عند E باستعمال فتحة الفرجار نفسها بوضع رأس الفرجار عند B





الربط مع الحياة

تقسم الهندسة المدنية إلى تخصصات منها: هندسة الإنشاءات، وهندسة الطرق، وهندسة الخرسانة، وهندسة المساحة، وهندسة التربة، وهندسة المياه.

إرشادات للدراسة

رسم أقصر مسافة
الأداة الأساسية لرسم قطعة مستقيمة عمودية على مستقيم من نقطة لا تقع عليه هو المثلث القائم الزاوية كما يمكنك استعمال أدوات مثل ركن ورقة، ولكن إنشاء هذه القطعة غير ممكن إلا باستعمال فرجار ومسطرة.

البعد بين نقطة ومستقيم

المثال 1 يبيّن كيفية تعيين البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه بإنشاء قطعة مستقيمة عمودية على المستقيم.

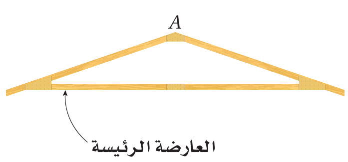
المثال 2 يبيّن كيفية استعمال الهندسة الإحداثية؛ لإيجاد البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه.

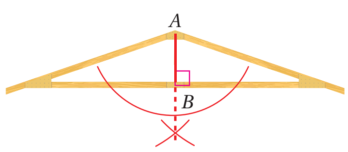
التقويم التكويني

استعمل أسئلة "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

1 **إنشاءات:** صُمِّمت دعامة سقف بحيث يمتد العمود المركزي من قمة السقف (النقطة A) إلى العارضة الرئيسة. أنشئ القطعة المستقيمة التي طولها يمثل البعد بين قِمَّة السقف والعارضة الرئيسة

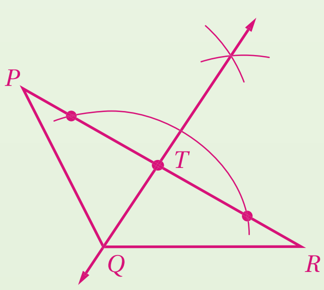




$\overline{AB}$ تمثل البعد بين قمة السقف والعارضة الرئيسة.

إجابة (تحقق من فهمك):

1) $\overline{QT}$ تمثل البعد بين Q و $\overleftrightarrow{PR}$.

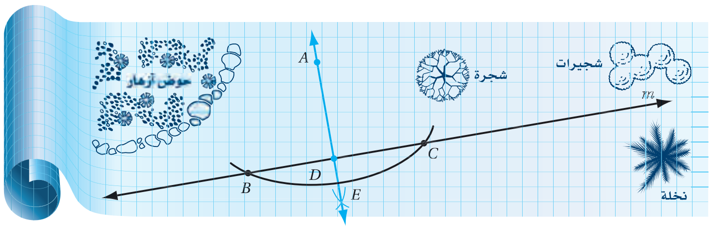


تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيّون: حدّد أمثلة لمستقيمات متوازية في غرفة الصف، مثل خطوط بلاط الأرضية أو إطار السبورة، ثم اطلب إلى الطلاب العمل مثنى مثنى لقياس المسافة من نقاط مختلفة تقع على أحد المستقيمين إلى نقطة معينة تقع على المستقيم الآخر، وأن يناقش الطلاب ما توصَّلوا إليه، ويسّر النقاش حتى يتمكن الطلاب من ملاحظة علاقات القطع المستقيمة والمسافات بين المستقيمات المتوازية.

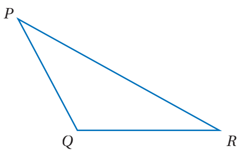
الخطوة 3: ارسم العمود $\overleftrightarrow{AE}$، وارمز لنقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AE}$ مع $\overleftrightarrow{BC}$ بالرمز D



يمثّل AD طول أقصر أنبوب يحتاجه المهندس لربط النقطة A بخط التصريف الرئيس.

تحقق من فهمك

1) أنشئ القطعة المستقيمة التي يمثل طولها المسافة بين Q و $\overleftrightarrow{PR}$ وسمّها.



انظر الهامش.

مثال 2 البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي

الهندسة الإحداثية: يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-5, 3), (4, -6)$. أوجد البعد بين المستقيم ℓ والنقطة $P(2, 4)$.

الخطوة 1: أوجد معادلة المستقيم ℓ. ابدأ بإيجاد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-5, 3), (4, -6)$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6 - 3}{4 - (-5)} = \frac{-9}{9} = -1$$

استعمل ميل المستقيم ℓ، والنقطة $(4, -6)$ الواقعة عليه لتجد مقطع المحور y له.

$y = mx + b$	صيغة الميل والمقطع
$-6 = -1(4) + b$	$m = -1, (x, y) = (4, -6)$
$-6 = -4 + b$	بسّط
$-2 = b$	اجمع 4 لكلا الطرفين

معادلة المستقيم ℓ هي: $y = -x + (-2)$، أو $y = -x - 2$.

الخطوة 2: اكتب معادلة المستقيم w العمودي على المستقيم ℓ والمار بالنقطة $P(2, 4)$.

بما أن ميل المستقيم ℓ يساوي -1، فإن ميل المستقيم w يساوي 1.

$y = mx + b$	صيغة الميل والمقطع
$4 = 1(2) + b$	$m = 1, (x, y) = (2, 4)$
$4 = 2 + b$	بسّط
$2 = b$	اطرح 2 من كلا الطرفين

معادلة المستقيم w هي $y = x + 2$.

الخطوة 3: حل نظام المعادلات لتجد نقطة التقاطع.

المستقيم ℓ: $y = -x - 2$

المستقيم w: $(+)\ y = x + 2$

$2y = 0$	اجمع المعادلتين
$y = 0$	اقسم كلا الطرفين على 2

إرشادات للدراسة

المسافة بين نقطة والمحورين x, y

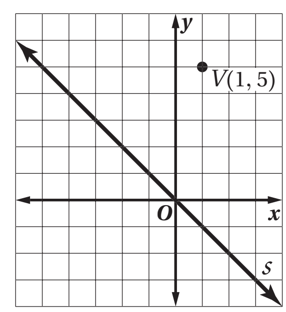
لاحظ أن المسافة بين نقطة والمحور x يمكن إيجادها بتحديد الإحداثي الصادي للنقطة، أما المسافة بينها وبين المحور y فيمكن إيجادها بتحديد الإحداثي السيني لها.

المحتوى الرياضي

الزوايا الناتجة عن المستقيمات المتعامدة: تشكل المستقيمات المتعامدة بحسب التعريف زوايا قائمة، وبما أن الزوايا القائمة متطابقة، فإن الزوايا الناتجة عن المستقيمات المتعامدة متطابقة ومتجاورة. وفي المقابل إذا شكّل مستقيمان زاويتين متجاورتين متطابقتين فإنهما متعامدان.

مثال إضافي

2 الهندسة الإحداثية: يحتوي المستقيم s على النقطتين $(0, 0)$ و $(-5, 5)$. أوجد البعد بين المستقيم s والنقطة $V(1, 5)$.



إجابة ممكنة:

$d = \sqrt{18}$ أو 4.24 وحدات تقريبًا

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل صوتي: اطلب إلى الطلاب أن يوضحوا بكلماتهم الخاصة لماذا يكون البعد بين نقطة ومستقيم هو طول القطعة المستقيمة العمودية من تلك النقطة على المستقيم، ثم حمّل هذه التسجيلات على الموقع الإلكتروني للصف.

إرشادات للمعلم الجديد

من الممكن إيجاد نقطة التقاطع في **مثال 2** بيانيًّا عوضًا عن الخطوات 1–3، إلا أن الرسم قد لا يعطي إجابات دقيقة، لذا يمكن التحقق من معقولية الإجابة بيانيًّا.

إرشادات للدراسة

طريقة الحذف
عند حل نظام معادلات باستعمال طريقة الحذف، قد تحتاج إلى ضرب إحدى المعادلات في عدد لتتمكن من الحذف عند جمع الحدود المتشابهة.

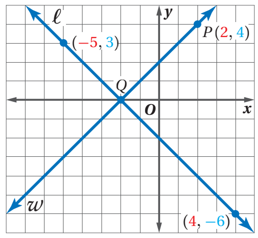
أوجد قيمة x.

$0 = x + 2$ عوِّض 0 بدل y في معادلة المستقيم w

$-2 = x$ اطرح 2 من كلا الطرفين

إذن نقطة التقاطع هي $Q(-2, 0)$

للتحقق من نقطة التقاطع، ارسم المستقيمين ℓ, w في المستوى الإحداثي، وأوجد نقطة التقاطع بيانيًّا.



الخطوة 4: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين؛ لتجد المسافة بين $P(2, 4)$, $Q(-2, 0)$.

d

$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (0 - 4)^2}$ $x_2 = -2, x_1 = 2, y_2 = 0, y_1 = 4$

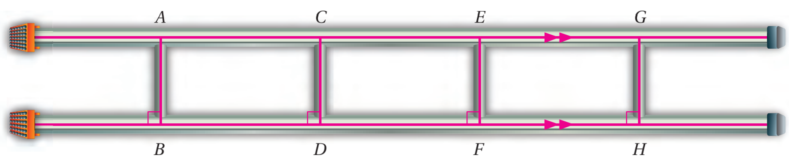
$= \sqrt{32}$ بسِّط

البعد بين النقطة والمستقيم هو $\sqrt{32}$ أو 5.66 وحدات تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) المستقيم ℓ يمر بالنقطتين $(5, 4)$, $(1, 2)$. أنشئ مستقيمًا عموديًّا على ℓ من النقطة $P(1, 7)$، ثم أوجد البعد بين P و ℓ. $\sqrt{20} \approx 4.47$

البُعد بين مستقيمين متوازيين: يُعرَّف المستقيمان المتوازيان على أنهما مستقيمان يقعان في المستوى نفسه ولا يتقاطعان. وهناك تعريف آخر ينص على أنهما مستقيمان يقعان في المستوى نفسه، بحيث يكون البعد بينهما ثابتًا، وهذا يعني أن البعد بين أي نقطة على أحدهما والآخر ثابتة.



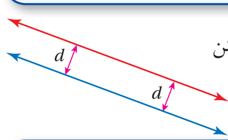
$AB = CD = EF = GH$

يقودنا ذلك إلى تعريف البعد بين مستقيمين متوازيين.

مفهوم أساسي — البعد بين مستقيمين متوازيين

أضف إلى مطويتك

البعد بين مستقيمين متوازيين، هو البعد بين أحد المستقيمين وأي نقطة على المستقيم الآخر.



الشكل الذي تمثله مجموعة النقاط التي تحقق شرطًا ما يسمى **محلًا هندسيًّا**. ويمكن وصف المستقيم الموازي لمستقيم معلوم بالمحل الهندسي لجميع النقاط **المتساوية البعد** عن المستقيم في المستوى نفسه.

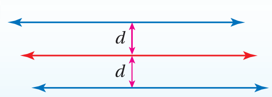
إرشادات للدراسة

متساوي البعد
سوف تستعمل مفهوم متساوي البعد لتصف نقاطًا خاصة ومستقيمات مرتبطة بأضلاع المثلث وزواياه في الدرس 1–4.

نظرية 2.9 — المستقيمان المتساويا البعد عن مستقيم ثالث

أضف إلى مطويتك

إذا كان المستقيمان في المستوى متساويَي البعد عن مستقيم ثالث فإنهما متوازيان.



ستبرهن نظرية 2.9 في السؤال 21

البعد بين مستقيمين متوازيين

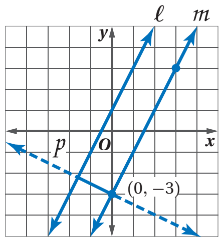
البعد بين أي نقطة على أحد المستقيمين المتوازيين والمستقيم الآخر يظل ثابتًا، مهما تغير موضع النقطة على المستقيم الأول. وفي **المثال 3** سيجد الطلاب البعد بين مستقيمين متوازيين جبريًّا.

مثال إضافي

3 أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين a و b، إذا كانت معادلتاهما $y = 2x + 3$، و $y = 2x - 1$ على الترتيب.

1.79 وحدة تقريبًا

مثال 3 المسافة بين مستقيمين متوازيين



أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين ℓ, m اللذين معادلتاهما $y = 2x + 1, y = 2x - 3$ على الترتيب.

يتعين عليك حل نظام من المعادلات لإيجاد نقطتَي نهايتَي القطعة المستقيمة العمودية على كلٍّ من ℓ, m.

ميل المستقيم ℓ يساوي ميل المستقيم m ويساوي 2.

ارسم المستقيم p على أن يمر بنقطة مقطع المحور y للمستقيم m وهي $(0, -3)$، ويكون عموديًّا على كلا المستقيمين.

الخطوة 1: لاحظ أن ميل المستقيم p هو معكوس مقلوب العدد 2، ويساوي $-\frac{1}{2}$ ، وأن المستقيم p يمر بالنقطة $(0, -3)$ ، وهي مقطع المحور y للمستقيم m. والآن: اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم p .

$y = mx + b$ صيغة الميل والمقطع

$y = -\frac{1}{2}x - 3$ $m = -\frac{1}{2}, b = -3$

الخطوة 2: حدد نقطة تقاطع المستقيمين ℓ و p بحل نظام المعادلات الآتي:

المستقيم ℓ: $y = 2x + 1$

المستقيم p: $y = -\frac{1}{2}x - 3$

$2x + 1 = -\frac{1}{2}x - 3$ عوّض $2x + 1$ بدلًا من y في معادلة المستقيم p

$2x + \frac{1}{2}x = -3 - 1$ جمّع الحدود المتشابهة في كل طرف

$\frac{5}{2}x = -4$ بسّط

$x = -\frac{8}{5}$ اضرب كلا الطرفين في $\frac{2}{5}$

$y = -\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{5}\right) - 3$ عوّض $-\frac{8}{5}$ بدلًا من x في معادلة المستقيم p

$= -\frac{11}{5}$ بسّط

نقطة التقاطع هي $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{11}{5}\right)$ أو $(-1.6, -2.2)$.

الخطوة 3: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين؛ لتجد المسافة بين النقطتين $(0, -3)$ و $(-1.6, -2.2)$.

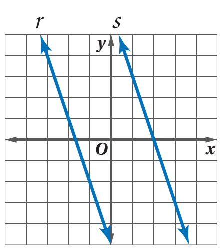
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(-1.6 - 0)^2 + [-2.2 - (-3)]^2}$ $x_2 = -1.6, x_1 = 0, y_2 = -2.2, y_1 = -3$

≈ 1.8 بسّط

البُعد بين المستقيمين 1.8 وحدة تقريبًا.

تحقق من فهمك



3A) أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين r, s اللذين معادلتاهما $y = -3x - 5, y = -3x + 6$ على الترتيب. $\sqrt{12.1} \approx 3.48$

3B) أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين a, b اللذين معادلتاهما $x + 3y = 6, x + 3y = -14$، على الترتيب. $\sqrt{40} \approx 6.32$

إرشادات للدراسة

طريقة التعويض

عند حل نظام مكون من معادلتين خطيتين باستعمال التعويض، عوّض قيمة أحد متغيرات المعادلة الأولى في المعادلة الثانية لتحصل على معادلة في متغير واحد.

إرشادات للمعلم الجديد

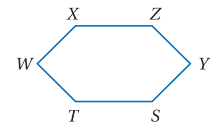
الربط مع واقع الحياة: اطلب إلى الطلاب أن يحدّدوا طريقًا مستقيمًا في متنزه، أو ملعب أو حقل وأن يتخيّلوا أي نقطة لا تقع عليه، وأن يتحركوا من النقطة مباشرة إلى الطريق، وعندئذ يجب أن يتأكدوا من أن حركتهم نحو الطريق كانت في اتجاهٍ عموديٍّ على الطريق.

130 الفصل 2 التوازي والتعامد

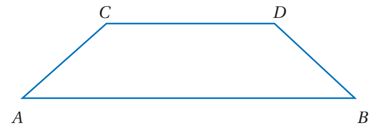
تأكـد

المثال 1 أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثّل البُعد في كلٍّ مما يأتي: **(1, 2 انظر الهامش.)**

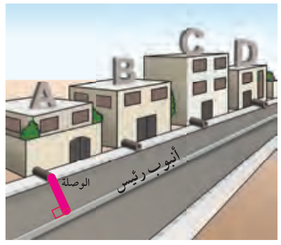
1) البعد بين Y و $\overleftrightarrow{TS}$



2) البعد بين C و $\overleftrightarrow{AB}$



3) **أنابيب:** تزوِّد مؤسسة المياه المنازل بالمياه من خلال أنابيب تربطها بالأنبوب الرئيس في الشارع. في الشكل المجاور: ارسم القطعة المستقيمة التي تمثل أقصر أنبوب توصيل بين الوصلة في المنزل A والأنبوب الرئيس في الشارع.



المثال 2 **هندسة إحداثية:** أوجد البعد بين النقطة P والمستقيم ℓ في كلٍّ مما يأتي:

4) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(0 ,2-)$، $(4, 3)$، وإحداثيا النقطة P هما $(3, 10)$. **$3\sqrt{5}$ وحدات**

5) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(4- ,9)$، $(1 ,6-)$، وإحداثيا النقطة P هما $(4, 1)$. **$\sqrt{10}$ وحدة**

6) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(9 ,2-)$، $(4, 18)$، وإحداثيا النقطة P هما $(-9, 5)$. **$\sqrt{13}$ وحدة**

المثال 3 أوجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين فيما يأتي:

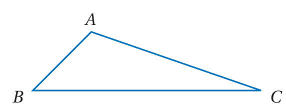
7) $y = -2x + 4$ **$2\sqrt{5}$ وحدات**
$y = -2x + 14$

8) $y = 7$ **10 وحدات**
$y = -3$

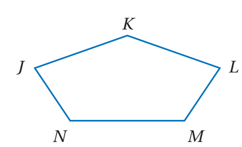
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثل البعد في كل مما يأتي: **(9, 10 انظر ملحق الإجابات)**

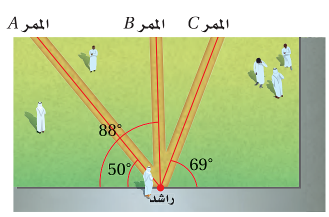
9) البعد بين A و $\overleftrightarrow{BC}$



10) البعد بين K و $\overleftrightarrow{LM}$



11) **مدرسة:** يعبر راشد الساحة الأمامية لمدرسته، حيث يوجد ثلاثة ممرات ممكنة مبينة في الشكل المجاور. أي الممرات الثلاثة هو الأقصر؟ وضّح تبريرك.



11) الممر B هو أقصر هذه الممرات الثلاثة، إذ إن المسافة العمودية هي أقصر مسافة من أحد جانبَي الساحة إلى الجانب الآخر. وبما أن الزاوية التي يصنعها الممر B هي الأقرب إلى $90°$، فإن الممر B هو أقصرها.

3 التدريب

التقويم التكويني

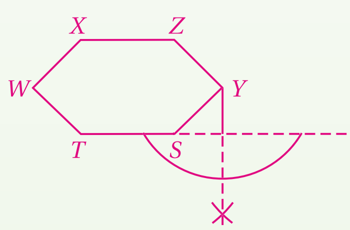
استعمل الأسئلة 8–1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تنبيه لحل سؤال

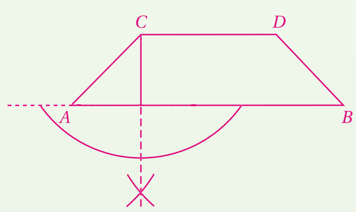
الفرجار والمسطرة: السؤالان 9, 10 يتطلّبان استعمال الفرجار والمسطرة.

إجابات:

1)



2)



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	9-20 ، 23 ، 30 ، 46–33
ضمن المتوسط	9–19 فردي ، 22 ، 24 ، 31–25 ، 33-46
فوق المتوسط	43–21 ، (اختياري: 44-46)

المثال 2 **هندسة إحداثية:** أوجد البعد بين النقطة P والمستقيم ℓ في كلٍّ مما يأتي:

12) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(7, 4)$, $(0, -3)$. وإحداثيا النقطة P هما $(4, 3)$. **$\sqrt{2}$ وحدة**

13) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(4, 1)$, $(-2, 1)$. وإحداثيا النقطة P هما $(5, 7)$. **6 وحدات**

14) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(3, 1)$, $(-8, 1)$. وإحداثيا النقطة P هما $(-2, 4)$. **3 وحدات**

المثال 3 أوجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين فيما يأتي:

15) $y = -2$, $y = 4$ **6 وحدات**

16) $x = 3$, $x = 7$ **4 وحدات**

17) $y = \frac{1}{3}x - 3$, $y = \frac{1}{3}x + 2$ **$\frac{3\sqrt{10}}{2} \simeq 4.74$ وحدة**

18) $y = 15$, $y = -4$ **19 وحدة**

19) $3x + y = 3$, $y + 17 = -3x$ **$2\sqrt{3}$ وحدة**

20) $y = -\frac{5}{4}x + 3.5$, $4y + 10.6 = -5x$ **$\frac{3\sqrt{41}}{5} \simeq 3.84$ وحدة**

21) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 2.9 . **انظر ملحق الإجابات**

أوجد البعد بين المستقيم و النقطة في كلٍّ مما يأتي:

22) $y = -3, (5, 2)$ **5 وحدات**

23) $y = \frac{1}{6}x + 6, (-6, 5)$ **0 وحدة**

24) $x = 4, (-2, 5)$ **6 وحدات**

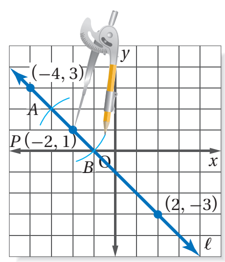
25) **ملصقات:** يعلق شاكر مُلصقين على حائط غرفته كما هو مبين في الشكل. كيف يمكن له أن يستعمل البعد بين مستقيمين؛ ليتأكد أن حافتَي الملصقين متوازيتان؟ **انظر الهامش**

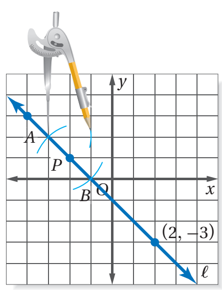
إنشاءات هندسية: يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-4, 3)$, $(2, -3)$. والنقطة $P(-2, 1)$ تقع على المستقيم ℓ. تتبّع الخطوات أدناه وأجب عما يأتي:

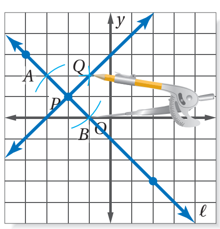
الخطوة 1: ارسم المستقيم ℓ وعيِّن النقطة P عليه، ثم ضع الفرجار عند النقطة P. وباستعمال فتحة الفرجار نفسها، ارسم قوسين عن يسار ويمين النقطة P. سمِّ نقطتَي التقاطع A و B.

الخطوة 2: افتح الفرجار فتحة أكبر من AP. وضعه عند النقطة A، وارسم قوسًا أعلى المستقيم ℓ.

الخطوة 3: باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع الفرجار عند النقطة B، وارسم قوسًا يقطع القوس السابق، سمِّ نقطة التقاطع Q. ثم ارسم $\overleftrightarrow{PQ}$.







26) ضع تخمينًا للعلاقة بين المستقيمين ℓ و $\overleftrightarrow{PQ}$ ؟ أثبت تخمينك باستعمال ميلَي المستقيمين. **انظر الهامش.**

27) كرر النشاط أعلاه باستعمال مستقيم آخر ونقطة عليه. **انظر أعمال الطلاب**

إجابات:

25) يمكن أن يقيس شاكر المسافة العمودية بين المُلصقين في مكانين مختلفين. ويكون المُلصقان متوازيين، إذا كانت المسافات بينهما متساوية.

26) المستقيمان متعامدان، وميل ℓ يساوي -1 وميل $\overleftrightarrow{PQ}$ يساوي 1، وبما أن ناتج ضرب الميلين يساوي -1 ؛ إذن المستقيمان متعامدان.

28) هندسة إحداثية: ميل $\overline{AB}$ يساوي 2، ونقطة منتصفها $M(3, 2)$. ونقطة منتصف قطعة مستقيمة أخرى عمودية على $\overline{AB}$ هي $P(4, -1)$، ولها نقطة الطرف B نفسها.

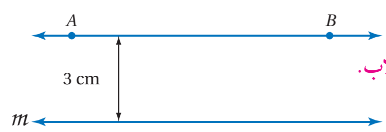
a) مثّل القطعتين المستقيمتين بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

b) أوجد إحداثيات A و B. $A(4, 4), B(2, 0)$

29b) ضع النقطة C عند أي مكان على المستقيم m. مساحة المثلث تساوي نصف طول القاعدة مضروبًا في الارتفاع. ويبقى هذان العددان ثابتين أينما كان موقع النقطة C.

29) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة، سوف تستكشف مساحات مثلثات متكوّنة من نقاط على مستقيمين متوازيين.

a) هندسيًّا: ارسم مستقيمين متوازيين، وسمّهما كما في الشكل المجاور. انظر إنشاءات الطلاب.

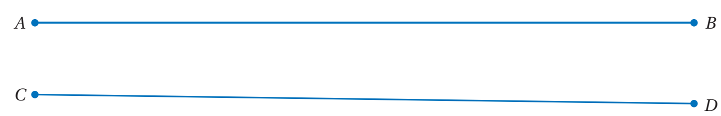


b) لفظيًّا: أين تضع النقطة C على المستقيم m، حتى يكون للمثلث ABC أكبر مساحة؟ وضّح تبريرك.

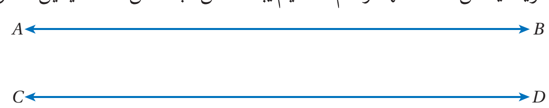
c) تحليليًّا: إذا كان $AB = 11$ cm، فما القيمة العظمى لمساحة $\triangle ABC$؟ $16.5\ cm^2$

مسائل مهارات التفكير العليا

30) اكتشف الخطأ: رسم ماجد القطعتين المستقيمتين $\overline{CD}$ ، $\overline{AB}$ أدناه باستعمال حافة مستقيمة، ويدّعي أنه إذا مدّ هاتين القطعتين المستقيمتين فإنهما لن تتقاطعا أبدًا. خالفه زيد الرأي وقال: إنهما تتقاطعان. أيٌّ منهما على صواب؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش



31) اكتب: صفْ طريقة يمكن استعمالها لرسم مستقيم يبعد نفس البعد عن المستقيمين المتوازيين $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$



32) تحدٍّ: افترض أن مستقيمًا عموديًّا على مستقيمين متوازيين ويقطعهما في النقطتين $(0, 6)$، $(a, 4)$. إذا كانت المسافة بين المستقيمين المتوازيين $\sqrt{5}$ وحدات، فأوجد قيمة a ومعادلتَي المستقيمين المتوازيين. انظر الهامش

33) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا. وضّح تبريرك.

يمكن إيجاد البُعد بين مستقيم ومستوى. صحيحة أحيانًا؛ إذ يمكن إيجاد هذا البعد عندما يكون المستقيم يوازي المستوى فقط

34) مسألة مفتوحة: ارسم مضلعًا محدبًا غير منتظم باستعمال مسطرة. a–b) انظر ملحق الإجابات

a) أنشئ قطعة مستقيمة تمثل البُعد بين أحد الرؤوس وضلع غير مجاور له.

b) استعمل القياس لتتحقق من أن القطعة المستقيمة التي رسمتها عمودية على الضلع الذي اخترته.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 30، يجب أن يعرف الطلاب أن المستقيمين لا يكونان متوازيين إلا إذا كان البعد بينهما ثابتًا. اطلب إلى الطلاب أن يختاروا نقطتين مختلفتين على أحد المستقيمين ويقيسوا البعد بين كل نقطة منهما والمستقيم الآخر. ستكون هذه القياسات مختلفة قليلًا، وعليه فإن المستقيمين غير متوازيين. إذن ما قاله زيد صحيح.

تمثيلات متعددة: في السؤال 29، يستعمل الطلاب الرسم الهندسي والوصف اللفظي لاستقصاء مساحات مثلثات متكونة من نقاط على مستقيمين متوازيين.

إجابات:

30) ادّعاء زيد صحيح؛ إذ إن البعد بين النقطتين A و C يساوي 1.2 cm تقريبًا. في حين أن البعد بين B و D يساوي 1.35 cm تقريبًا. وبما أن البعد بين المستقيمين غير ثابتٍ، إذن سيلتقيان عندما يمدان على استقامتَيهما.

31) إجابة ممكنة: نرسم أي قطعة مستقيمة تمثل البعد بين المستقيمين، ثم نحدد نقطة منتصفها ونرسم من هذه النقطة مستقيمًا موازيًّا للمستقيمين.

32) $a = \pm 1$؛ إذا كانت $a = 1$، فإنَّ المعادلتين هما:

$$y = \frac{1}{2}x + 6$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

وإذا كانت $a = -1$، فإن المعادلتين هما:

$$y = -\frac{1}{2}x + 6 ، y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

تنويع التعليم

فوق

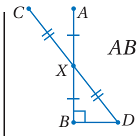
المتعلّمون المنطقيون: اطلب إلى الطلاب إثبات أنه إذا قطع مستوى مستويين متوازيين، فإن خطوط التقاطع تكون متوازية، ووجّه الطلاب إلى الرسم التوضيحي في السؤال 30، ويجب أن يفهم الطلاب أن المستوى يقطع كلًّا من المستويين المتوازيين في مستقيمٍ، وبما أن المستويين متوازيان، فإن أي مستقيمين ناتجين عن تقاطعهما مع مستوى ثالث يكونان متوازيين.

35) **تحدٍّ:** أعد كتابة النظرية 2.9 بدلالة مستويين متساويَي البعد عن مستوٍ ثالث، وارسم مثالًا على ذلك. انظر ملحق الإجابات

36) **اكتب:** لخِّص الخطوات الضرورية لإيجاد البُعد بين مستقيمين متوازيين إذا عُلمت معادلتاهما. انظر ملحق الإجابات

تدريب على اختبار

37) إذا كانت $\overline{AB}$ و $\overline{BD}$ متعامدتين و $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ تنصف إحداهما الأخرى عند النقطة X، $AB = 16$، $CD = 20$، فما طول $\overline{BD}$؟ **A**



A 6

B 8

C 10

D 18

38) متنزه المدينة مربع الشكل، ومساحته $81000\,ft^2$. أيٌّ مما يأتي هو الأقرب إلى طول ضلعه؟ **C**

A $100\,ft$

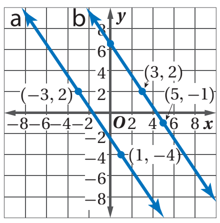
B $200\,ft$

C $300\,ft$

D $400\,ft$

مراجعة تراكمية

39) استعمل بالشكل المجاور؛ لتحدّد ما إذا كان $a \parallel b$. برّر إجابتك. (الدرس 4-2) انظر الهامش.



اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كلٍّ مما يأتي: (الدرس 5-2)

40) $m = \frac{1}{4}, (3, -1)$ $\quad y + 1 = \frac{1}{4}(x - 3)$

41) $m = 0, (-2, 6)$ $\quad y - 6 = 0$

42) $m = -2, (-6, -7)$ $\quad y + 7 = -2(x + 6)$

43) **حاسوب:** في عام 1426 هـ كانت نسبة مستخدِمي شبكة الإنترنت في المملكة 11% تقريبًا، وبعد سنتين ارتفعت النسبة لتصبح 20% تقريبًا، إذا استمر معدل التغير هذا، فما السنة التي تكون فيها نسبة المشتركين 50% تقريبًا. (الدرس 4-2) **1435 هـ**

استعد للدرس اللاحق

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

44) $O(-12, 0), P(-8, 3)$ **5**

45) $R(-2, 3), S(3, 15)$ **13**

46) $Q(-12, 2), T(-9, 6)$ **5**

4 التقويم

فهم الرياضيات: على كل طالب أن يعيِّن نقطة على قطعة ورق، وأن يضع مسطرة على الورقة نفسها لتمثل مستقيمًا، ويكتب تعليمات لطريقة إيجاد المسافة من النقطة إلى المستقيم الذي تمثله المسطرة، ثم يقيس الطلاب المسافة ويبرِّروا إجاباتهم.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 6–2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4 ، ص (31) .

تنبيه لحل سؤال

الفرجار والمسطرة: السؤال 34 يتطلب استعمال الفرجار والمسطرة.

إجابة:

39) ميل a: $m = \frac{(-4-2)}{(1+3)} = -\frac{3}{2}$؛

ميل b: $m = \frac{(-1-2)}{(5-3)} = -\frac{3}{2}$؛

بما أن الميلين متساويان، إذن $a \parallel b$.

134 الفصل 2 التوازي والتعامد

الفصل
2

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 2

دون دون المتوسط   ضمن ضمن المتوسط   فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31) دون

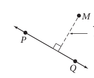
الاسم ______ التاريخ ______

2-6 تدريبات إعادة التعليم

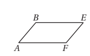
الأعمدة والمسافة

البُعد بين نقطة ومستقيم:

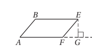
عندما لا تقع نقطة على خطّ مستقيم، فإن بُعدها عن ذلك المستقيم يساوي طول القطعة المستقيمة العموديّة علَى المستقيم من تلك النقطة.



مثال أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثّل البُعد بين النقطة E و $\overleftrightarrow{AF}$.



مُدَّ $\overleftrightarrow{AF}$، وأنشئ $\overline{EG} \perp \overleftrightarrow{AF}$

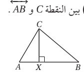


$\overline{EG}$ تمثّل البُعدَ بين E و $\overleftrightarrow{AF}$.

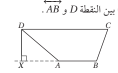
تمارين

أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثّل البُعد المحدّد في كلٍّ ممّا يأتي:

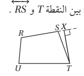
1) بين النقطة C و $\overleftrightarrow{AB}$.



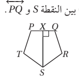
2) بين النقطة D و $\overleftrightarrow{AB}$.



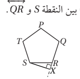
3) بين النقطة T و $\overleftrightarrow{RS}$.



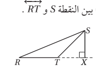
4) بين النقطة S و $\overleftrightarrow{PQ}$.



5) بين النقطة S و $\overleftrightarrow{QR}$.



6) بين النقطة S و $\overleftrightarrow{RT}$.



الصف: الأول الثانوي   31   **الفصل 2:** التوازي والتعامد

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (32) دون

الاسم ______ التاريخ ______

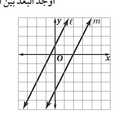
2-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الأعمدة والمسافة

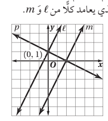
البُعد بين مستقيمين متوازيين:

البُعد بين مُستقيمين متوازيين يساوي طول القطعة المستقيمة التي يقع طرفاها على المستقيمين، وتكون عموديّة على كلٍّ منهما، ولمّا كان البُعد بين مستقيمين متوازيين ثابتًا دائمًا، فإن جميع هذه القطع يكون لها الطول نفسه؛ لذا فإن البُعد بين مستقيمين متوازيين يساوي البُعد بين أحد المستقيمين وأيِّ نقطةٍ على المستقيم الآخر.

مثال أوجد البُعد بين المستقيمين المتوازيين ℓ, m، إذا كانت معادلتاهما $y = 2x + 1$ ، $y = 2x - 4$ على التوالي.



ارسم المستقيم p المار بالنقطة $(0, 1)$ التي تقع على المستقيم ℓ، والذي يعامد كلًّا من ℓ و m.



الخطوة 1: ميل المستقيم p يساوي $-\frac{1}{2}$، ومقطع المحور y له يساوي 1.
معادلة المستقيم p هي: $y = -\frac{1}{2}x + 1$، ونقطة تقاطع p و ℓ هي النقطة $(0, 1)$.

الخطوة 2: لإيجاد نقطة تقاطع p و m حُلّ النظام المكوّن من المعادلتين:

المستقيم m: $y = 2x - 4$

المستقيم p: $y = -\frac{1}{2}x + 1$

ضع $2x - 4$ بدلًا من y في المعادلة الثانية

$$2x - 4 = -\frac{1}{2}x + 1$$
$$4x - 8 = -x + 2$$
$$5x = 10$$
$$x = 2$$

عوّض $x = 2$ في المعادلة الثانية لإيجاد قيمة y.

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$
$$y = -\frac{1}{2}(2) + 1 = -1 + 1 = 0$$

إذن نقطة تقاطع p و m هي $(2, 0)$

الخطوة 3: استعمل صيغة البعد؛ لإيجاد البعد بين النقطتين $(0, 1), (2, 0)$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(2 - 0)^2 + (0 - 1)^2}$$
$$= \sqrt{5}$$

البعد بين المستقيمين ℓ و m تساوي $\sqrt{5}$ وحدات.

ملاحظة: إذا كان المطلوب في المثال هو إيجاد المسافة بين النقطة $(0, 1)$ والمستقيم m، فإننا نتبع الخطوات نفسها.

تمارين

في السؤالين 1, 2 أوجد البعد بين كلٍّ من المستقيمين المتوازيين:

1) $y = 8$ ، $y = -3$ **11**

2) $y = x + 3$ ، $y = x - 1$ $\mathbf{2\sqrt{2}}$

3) أوجد المسافة بين النقطة $(0, 0)$ والمستقيم. $y = -2x - 5$ $\mathbf{\sqrt{5}}$

الصف: الأول الثانوي   32   **الفصل 2:** التوازي والتعامد

تدريبات المهارات (33) دون ضمن

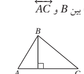
الاسم ______ التاريخ ______

2-6 تدريبات المهارات

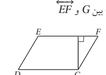
الأعمدة والمسافة

أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثّل البُعد المحدّد في الأسئلة 3–1:

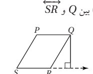
1) بين B و $\overleftrightarrow{AC}$



2) بين G و $\overleftrightarrow{EF}$



3) بين Q و $\overleftrightarrow{SR}$



هندسة إحداثيّة: أوجد بُعد النقطة P عن المستقيم ℓ في كلٍّ ممّا يأتي:

4) المستقيم ℓ يمرّ بالنقطتين $(6, 6)$, $(0, -2)$، وإحداثيّا P هما $(-1, 5)$.
5

5) المستقيم ℓ يمرّ بالنقطتين $(5, 1)$, $(2, 4)$، وإحداثيّا P هما $(1, 1)$.
$\mathbf{2\sqrt{2}}$

6) المستقيم ℓ يمرّ بالنقطتين $(2, 0)$, $(-4, -2)$ ، وإحداثيّا P هما $(3, 7)$.
$\mathbf{2\sqrt{10}}$

7) المستقيم ℓ يمرّ بالنقطتين $(0, 5)$, $(-7, 8)$، وإحداثيّا P هما $(-5, 32)$.
$\mathbf{3\sqrt{58}}$

أوجد البعد بين كلٍّ من المستقيمين المتوازيين فيما يأتي:

8) $y = 7$ ، $y = -1$ **8**

9) $x = -6$ ، $x = 5$ **11**

10) $y = 3x$ ، $y = 3x + 10$ $\mathbf{\sqrt{10}}$

11) $y = -5x$ ، $y = -5x + 26$ $\mathbf{\sqrt{26}}$

12) $y = x + 9$ ، $y = x + 3$ $\mathbf{3\sqrt{2}}$

13) $y = -2x + 5$ ، $y = -2x - 5$ $\mathbf{2\sqrt{5}}$

الصف: الأول الثانوي   33   **الفصل 2:** التوازي والتعامد

تدريبات حل المسألة (34) دون ضمن فوق

الاسم ______ التاريخ ______

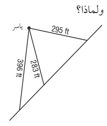
2-6 تدريبات حلّ المسألة

الأعمدة والمسافة

1) **مسافة:** إذا كانت المسافة بين المسجد والشارع A صفرًا، فكيف يمكن التعبير عن ذلك بطريقة أخرى؟ وإذا كانت المسافة بين الشارع الذي يقع فيه منزل خالد والشارع A صفرًا، فكيف يمكن التعبير عن ذلك بطريقة أخرى؟

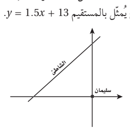
إجابة ممكنة: المسجد يقع على الشارع A، والشارع الذي يحوي منزل خالد هو نفسه الشارع A.

2) **مسافة:** يقف ياسر في ساحة المدرسة، والشكل أدناه يبيّن المسافات بينه وبين أبواب الغُرف الصفيّة الواقعة في الحائط نفسه، فهل يمكن أن تكون المسافة بين ياسر والحائط $285 ft$؟ ولماذا؟



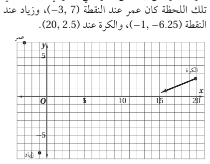
لا؛ لأن المسافة تمثل طول القطعة العمودية الواصلة بين ياسر والحائط، وهي أقصر قطعة تصل بين ياسر والحائط.

3) **صيد السمك:** يقف سليمان عند شاطئ البحر عند نقطة الأصل للمستوى الإحداثيّ، وخطّ الشاطئ يُمثّل بالمستقيم $y = 1.5x + 13$.



إذا كانت كلّ وحدة تمثل مترًا واحدًا، وأراد سليمان أن يُلقِيَ الصنّارة لصيد السمك من البحر، فما المسافة التي يتعيّن أن يكون سليمان قادرًا على رمي الصّنارة إليها، حتى يتمكّن من إيصالها إلى البحر؟ قرّب إجابتك إلى أقرب سنتمتر. **721 cm**

4) **مواقع:** شاهد عمر كرةً تتّجه نحو رأس صديقه زياد مباشرةً، فقرّر أن يركض ليعترض الكرة كي لا تؤذي صديقه، وفي تلك اللحظة كان عمر عند النقطة $(-3, 7)$، وزياد عند النقطة $(-1, -6.25)$، والكرة عند $(20, 2.5)$.



a) ما معادلة المستقيم الذي يمرّ بموقِعَي زيادٍ والكرة؟
$$\mathbf{y = \frac{5}{12}x - \frac{35}{6}}$$

b) إذا ركض عمر أقصر مسافة ليعترض الكرة (على طول الخط العموديّ على مسار الكرة)، فما إحداثيّات النقطة التي يصل إليها على مسار الكرة؟
(2, −5)

c) ما أقصر مسافة يجب أن يركضها عمر حتى يصل إلى مسار الكرة؟
13 وحدة

الصف: الأول الثانوي   34   **الفصل 2:** التوازي والتعامد

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 2

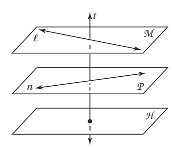
دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (35) ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

2-6 التدريبات الإثرائية

التوازي في الفضاء



يتعيّن في الفضاء توسيع مفهوم التوازي؛ ليشمل مستويين، ومستقيم ومستوًى.

مفهوم أساسي: يكون مستويان متوازيين، إذا وفقط إذا كانا غير متقاطعين.

مفهوم أساسي: يوازي مستقيم مستوًى، إذا وفقط إذا كانا غير متقاطعين.

لذا فإنه يمكن في الفضاء أن يكون المستقيمان متقاطعين أو متوازيين أو متخالفين، بينما يمكن أن يكون أيّ مستويين أو مستقيم ومستوى متقاطعين أو متوازيين.
في الشكل المجاور: $t \perp \mathcal{M}, t \perp \mathcal{P}, \mathcal{P} \parallel \mathcal{H}$ ، والمستقيمان ℓ وَ n متخالفان.

تُعدّ العبارات الخمس الآتية نظريّات تتعلق بالمستويات المتوازية:

نظرية: المستويان العموديّان على المستقيم نفسه يكونان متوازيين.

نظرية: المستويان الموازيان للمستوى نفسه يكونان متوازيين.

نظرية: المستقيم العموديّ على أحد مستويين متوازيين يكون عموديًّا على المستوى الآخر.

نظرية: المستوى العموديّ على أحد مستويين متوازيين يكون عموديًّا على المستوى الآخر.

نظرية: إذا قطع مستوى مستويين متوازيين، فإن خطَّي التقاطع يكونان متوازيين.

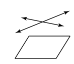
استعمل الشكل المُعطَى أعلاه للإجابة عن الأسئلة 10–1، واكتب "نعم" أو "لا" لتبيّن ما إذا كانت العبارة صحيحةً أم لا.

1) $M \parallel \mathcal{P}$ **نعم** 2) $\ell \parallel n$ **لا** 3) $\mathcal{M} \parallel \mathcal{H}$ **نعم** 4) $\ell \parallel \mathcal{P}$ **نعم** 5) $\ell \perp t$ **نعم**

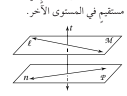
6) $n \parallel \mathcal{H}$ **نعم** 7) $\ell \perp \mathcal{P}$ **لا** 8) $t \parallel \mathcal{H}$ **لا** 9) $\mathcal{P} \perp t$ **نعم** 10) $t \perp \mathcal{H}$ **نعم**

ارسم شكلًا لتبيّن خطأ كلّ عبارةٍ ممّا يأتي:

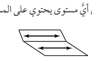
11) إذا وازَى مستقيمان مستوًى ، فإن المستقيمين متوازيان.



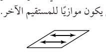
12) إذا توازَى مستويان، فإن أيَّ مستقيم في أحد المستويين يوازي أيَّ مستقيمٍ في المستوى الآخر.



13) إذا توازَى مستقيمان، فإن أيَّ مستوى يحتوي على أحد المستقيمين يوازي أيَّ مستوى يحتوي على المستقيم الآخر.



14) إذا توازَى مستقيمان، فإن أيَّ مستوى يحتوي على أحد المستقيمين يكون موازيًا للمستقيم الآخر.



الصف: الأول الثانوي 35 **الفصل 2:** التوازي والتعامد

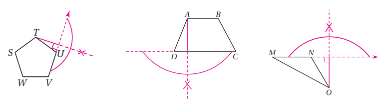
كتاب التمارين (19) دون ضمن فوق

الفصل الثاني التوازي والتعامد

2-6 الأعمدة والمسافة

أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثّل البعد في كلٍّ مما يأتي:

1) البعد بين O وَ $\overleftrightarrow{MN}$ **2)** البعد بين A وَ $\overleftrightarrow{DC}$ **3)** البعد بين T وَ $\overleftrightarrow{VU}$



أوجد البعد بين المستقيمين P و l في كلٍّ ممّا يأتي:

4) المستقيم l يمر بالنقطتين $(4, 8)$, $(-2, 0)$، وإحداثيًّا النقطة P هما $(5, 1)$. **5**

5) المستقيم l يمر بالنقطتين $(7, 9)$, $(3, 5)$، وإحداثيًّا النقطة P هما $(2, 10)$. $\mathbf{3\sqrt{2}}$

6) المستقيم l يمر بالنقطتين $(9, 10)$, $(5, 18)$، وإحداثيًّا النقطة P هما $(-4, 26)$. $\mathbf{2\sqrt{5}}$

7) المستقيم l يمر بالنقطتين $(1, -9)$, $(-2, 4)$، وإحداثيًّا النقطة P هما $(14, -6)$. $\mathbf{\sqrt{178}}$

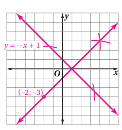
أوجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين فيما يأتي :

8) $y = -x$ ، $y = -x - 4$ $\mathbf{2\sqrt{2}}$

9) $y = 2x + 7$ ، $y = 2x - 3$ $\mathbf{2\sqrt{5}}$

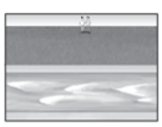
10) $y = 3x + 12$ ، $y = 3x - 18$ $\mathbf{3\sqrt{10}}$

11) مثّل المستقيم $y = -x + 1$ بيانيًّا، وأنشئ قطعة مستقيمة عمودية عليه من النقطة $(-2, -3)$، ثم أوجد البعد بين النقطة والمستقيم. $\mathbf{3\sqrt{2}}$



12) رحلة سير: يسير فهد وصديقه نحو قناة ماء مستقيمة مرورًا بحقلٍ منبسطٍ. صِفِ المسار الأقصر الذي يمكن أن يسلُكَاه.

إجابة ممكنة : أقصر مسار إلى القناة هو العمود النازل من المكان الذي يقفان فيه.



19

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

القاطع: (الدرسان 2-1, 2-2)

- عندما يقطع قاطع مستقيمين، ينتج عن التقاطع أزواج من الزوايا المتبادلة خارجيًا أو المتبادلة داخليًا، أو المتحالفة أو المتناظرة.
- إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين فإن:
  - كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.
  - كل زاويتين متبادلتين داخليًا متطابقتان.
  - كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
  - كل زاويتين متبادلتين خارجيًا متطابقتان.

إثبات توازي مستقيمين: (الدرس 2-3)

- إذا قطع قاطع مستقيمين في نفس المستوى ونتج عن التقاطع أي مما يأتي، فإن المستقيمين متوازيان:
  - زاويتان متناظرتان متطابقتان.
  - زاويتان متبادلتان خارجيًا متطابقتان.
  - زاويتان متبادلتان داخليًا متطابقتان.
  - زاويتان متحالفتان متكاملتان.
- إذا كان المستقيمان عموديين على المستقيم نفسه في المستوى فإنهما متوازيان.

الميل: (الدرسان 2-4, 2-5)

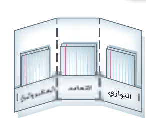
- الميل m لمستقيم يمر بالنقطتين (x_1, y_1)، (x_2, y_2) يعطى بالصيغة $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$، حيث $x_1 \neq x_2$.

البُعد: (الدرس 2-6)

- البُعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه، هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.
- البُعد بين مستقيمين متوازيين، هو المسافة العمودية بين أحد المستقيمين وأي نقطة على المستقيم الآخر.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

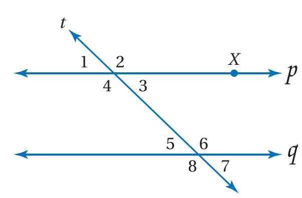


المفردات الأساسية

- **المستقيمان المتخالفان** (ص 86)
- **المستويان المتوازيان** (ص 86)
- **المستقيمان المتوازيان** (ص 86)
- **الزاويتان المتبادلتان خارجيًا** (ص 87)
- **الزاويتان المتبادلتان داخليًا** (ص 87)
- **الزاويتان المتحالفتان** (ص 87)
- **الزاويتان المتناظرتان** (ص 87)
- **القاطع** (ص 87)
- **الزوايا الداخلية** (ص 87)
- **الزوايا الخارجية** (ص 87)
- **الميل** (ص 109)
- **معدل التغير** (ص 110)
- **صيغة الميل ونقطة** (ص 117)
- **صيغة الميل والمقطع** (ص 117)
- **متساوي البعد** (ص 129)
- **المحل الهندسي** (ص 129)

اختبر مفرداتك

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:



1) إذا كان $\angle 5 \cong \angle 1$، فإن p و q مستقيمان متخالفان. خاطئة؛ متوازيان
2) الزاويتان 4 ، 6 متبادلتان داخليًا. صحيحة
3) الزاويتان 1 ، 7 متبادلتان خارجيًا . صحيحة
4) إذا كان p و q متوازيين فإن الزاويتين 3 ، 6 متطابقتان. خاطئة؛ متكاملتان
5) بعد النقطة X عن المستقيم q هو طول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة X إلى المستقيم q. صحيحة
6) يُسمّى المستقيم t قاطعًا للمستقيمين p و q. صحيحة
7) إذا كان $p \parallel q$، فإن $\angle 2$ و $\angle 8$ متكاملتان. خاطئة؛ متطابقتان
8) الزاويتان 4 ، 8 متناظرتان. صحيحة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية: يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرة، فإذا واجه بعض الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 8-1، فذكِّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مَرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (33) .

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

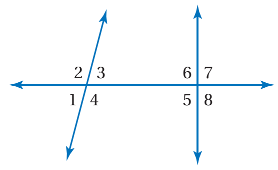
واقترح عليهم أن يُبقُوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

مراجعة الدروس

2-1 المستقيمان والقاطع (ص: 86-91)

صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين، مستعملًا الشكل أدناه. 9–12 انظر الهامش.



9) $\angle 1 , \angle 5$

10) $\angle 4 , \angle 6$

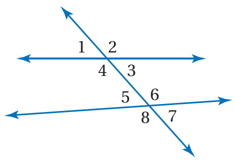
11) $\angle 2 , \angle 8$

12) $\angle 4 , \angle 5$

13) **جسور المشاة:** بُني جسر لعبور المشاة فوق شارع، صنّف المستقيمين اللذين يمثلان الجسر والشارع. مستقيمان متخالفان

مثال 1

صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين، مستعملًا الشكل أدناه.



a) $\angle 3, \angle 6$
متحالفتان

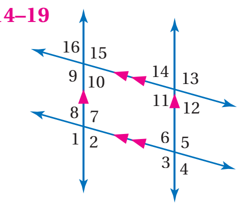
b) $\angle 2, \angle 6$
متناظرتان

c) $\angle 1, \angle 7$
متبادلتان خارجيًّا

d) $\angle 3, \angle 5$
متبادلتان داخليًّا

2-2 الزوايا والمستقيمات المتوازية (ص: 94-101)

في الشكل أدناه: $m\angle 1 = 123°$، أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها: 14–19 انظر الهامش.



14) $\angle 5$

15) $\angle 14$

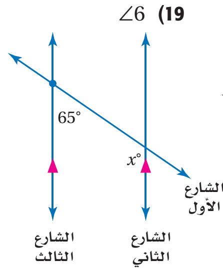
16) $\angle 16$

17) $\angle 11$

18) $\angle 4$

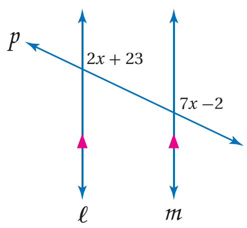
19) $\angle 6$

20) **خرائط:** يبيّن الشكل المجاور تخطيط ثلاثة شوارع. أوجد قيمة x. $115°$



مثال 2

جبر: أوجد قيمة x في الشكل الآتي. وضّح تبريرك.



$7x - 2 = 2x + 23$	مسلمة الزاويتين المتناظرتين
$7x - 2x = 23 + 2$	جمْع الحدود المتشابهة
$5x = 25$	بسِّط
$x = 5$	اقسم كلا الطرفين على 5

مراجعة الدروس

مراجعة: إذا لم تكن الأمثلة المُعطاة كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلُّهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

إجابات:

9) متناظرتان.

10) متبادلتان داخليًّا.

11) متبادلتان خارجيًّا.

12) متحالفتان.

14) 123؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

15) $57°$؛ $\angle 13 \cong \angle 5$ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين، و $\angle 13$ و $\angle 14$ متجاورتان على مستقيم.

16) $57°$؛ $\angle 14 \cong \angle 16$ مسلمة الزاويتين المتناظرتين، و $\angle 9$ و $\angle 16$ متجاورتان على مستقيم.

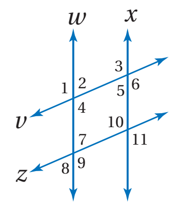
17) $123°$؛ $\angle 5 \cong \angle 11$ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا، و $\angle 1 \cong \angle 5$ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

18) $57°$؛ $\angle 5 \cong \angle 1$ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا، $\angle 4$ و $\angle 5$ متجاورتان على مستقيم.

19) $57°$؛ $\angle 3 \cong \angle 1$ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين، و$\angle 3$ و $\angle 6$ متجاورتان على مستقيم.

2-3 إثبات توازي مستقيمين (ص: 102–107)

هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية، اعتمادًا على المعطيات في كلٍّ مما يأتي؟ وإذا كان أيها متوازيًا ، فاذكر المسلّمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



21–24) انظر الهامش

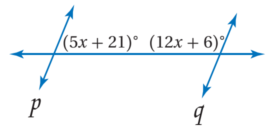
21) $\angle 7 \cong \angle 10$

22) $\angle 2 \cong \angle 10$

23) $\angle 1 \cong \angle 3$

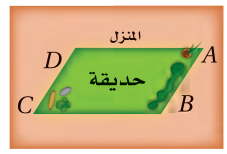
24) $\angle 3 \cong \angle 11$

25) أوجد قيمة x، بحيث يكون $p \parallel q$، وحدّد المسلّمة أو النظرية التي استعملتها.



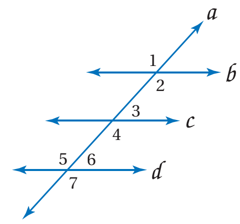
9؛ عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين

26) **هندسة المواقع:** إذا كان $m\angle BAD = 45°$، فأوجد قياس $m\angle ADC$ الذي يجعل $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. $135°$



مثال 3

هل يمكن إثبات أن أيًّا من مستقيمات الشكل متوازية اعتمادًا على المعطيات في كل مما يأتي؟ وإذا كان أيها متوازيًا ، فاذكر المسلّمة أو النظرية التي تبرّر إجابتك.



a) $\angle 1 \cong \angle 7$

$\angle 1$ و $\angle 7$ متبادلتان خارجيًّا بالنسبة للمستقيمين b و d.

بما أن $\angle 7 \cong \angle 1$، فإن $b \parallel d$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

b) $\angle 4 \cong \angle 5$

$\angle 4$ و $\angle 5$ متبادلتان داخليًّا بالنسبة للمستقيمين c و d.

بما أن $\angle 5 \cong \angle 4$، فإن $c \parallel d$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.

2-4 ميل المستقيم (ص. 109–116)

حدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{XY}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ومثّل كل مستقيم بيانيًّا لتتحقق من إجابتك.

27–31) انظر الهامش.

27) $A(5,3), B(8,0), X(-7,2), Y(1,10)$

28) $A(-3,9), B(0,7), X(4,13), Y(-5,7)$

29) $A(8,1), B(-2,7), X(-6,2), Y(-1,-1)$

ارسم المستقيم الذي يحقق الشروط في كلٍّ مما يأتي:

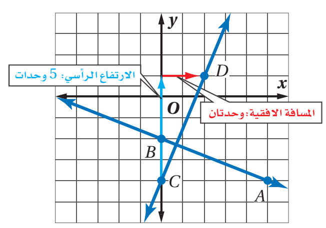
30) يمر بالنقطة $(-3,4)$ ويوازي $\overleftrightarrow{AB}$، حيث $A(2,5), B(9,2)$.

31) يمر بالنقطة $(1,3)$ ويعامد $\overleftrightarrow{PQ}$، حيث $P(4,-6), Q(6,-1)$.

32) **طائرات:** تحلّق الطائرتان A و B في مسارين مستقيمين وعلى الارتفاع نفسه. رصد قمر اصطناعي موقعين للطائرة A عند النقطتين $(5,11)$، $(23,17)$، ورصد موقعين للطائرة B عند النقطتين $(9,17)$، $(3,15)$. هل مسارا الطائرتين متوازيان، أم متعامدان، أم غير ذلك؟ متوازيان

مثال 4

مثّل بيانيًّا المستقيم الذي يمر بالنقطة $C(0,-4)$، والعمودي على $\overleftrightarrow{AB}$، حيث $A(5,-4), B(0,-2)$.



ميل $\overleftrightarrow{AB}$ يساوي $\frac{-2-(-4)}{0-5} = -\frac{2}{5}$

بما أن ميل $\overleftrightarrow{AB}$ يساوي $-\frac{2}{5}$، فإن ميل المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{AB}$ يساوي $\frac{5}{2}$

لتمثيل المستقيم بيانيًّا، ابدأ من النقطة C، وتحرك 5 وحداتٍ إلى أعلى ووحدتين إلى اليمين، وسمّ النقطة D، ثم ارسم $\overleftrightarrow{CD}$.

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

إجابات:

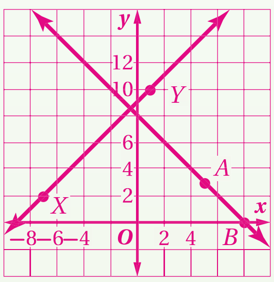
21) $x \parallel w$؛ عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين.

22) لا يوجد مستقيمات متوازية.

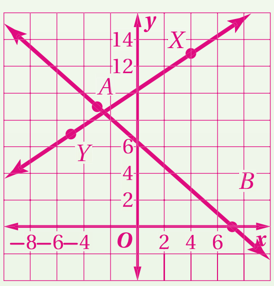
23) $x \parallel w$؛ عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

24) $z \parallel v$؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

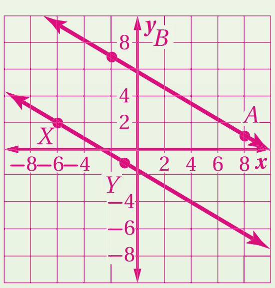
27) متعامدان



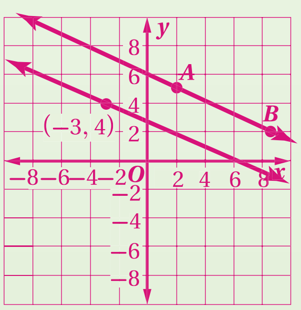
28) غير ذلك



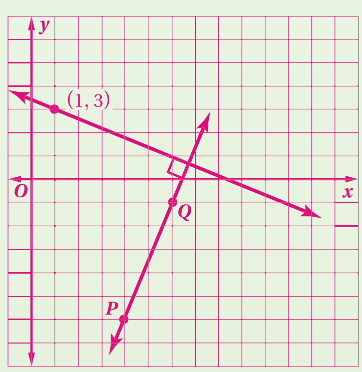
29) متوازيان



30)



31)



الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

2-5 صيغ معادلة المستقيم (ص. 117–124)

اكتب بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم المُعطى ميله ونقطة يمر بها في كلٍّ مما يأتي:

33) $m = 2, (4, -9)$ $\quad y + 9 = 2(x - 4)$

34) $m = -\frac{3}{4}, (8, -1)$ $\quad y + 1 = -\frac{3}{4}(x - 8)$

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المُعطى ميله ومقطع محور y له فيما يأتي:

35) $m = 5, b = -3$ $\quad y = 5x - 3$

36) $m = \frac{1}{2}, b = 4$ $\quad y = \frac{1}{2}x + 4$

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي أُعطيت نقطتان يمر بهما فيما يأتي:

37) $(-3, 12), (15, 0)$ $\quad y = -\frac{2}{3}x + 10$

38) $(-7, 2), (5, 8)$ $\quad y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

39) **فيزياء:** تسير مركبة بسرعة 30 m/s، وبدأت تتباطأ بمعدل ثابت، وبعد ثانيتين أصبحت سرعتها 16m/s، اكتب معادلة تمثّل سرعة المركبة v بعد t ثانية. ثم استعمل المعادلة لتحدّد الزمن الذي تستغرقه حتى تقف. $v = -7t + 30$؛ 4.3s تقريبًا

مثال 5

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2, 5), (6, 3)$.

الخطوة 1: أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 5}{6 - 2} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

الخطوة 2: اكتب معادلة المستقيم.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{صيغة الميل ونقطة}$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}[x - 2] \quad m = -\frac{1}{2}, (x_1, y_1) = (2, 5)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}x + 1 \quad \text{بسّط}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 6 \quad \text{اجمع 5 لكلا الطرفين}$$

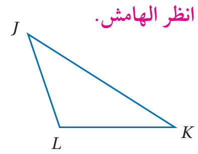
2-6 الأعمدة والمسافة (ص. 126–134)

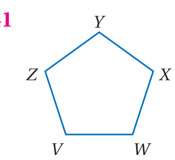
أنشئ القطعة المستقيمة التي تمثّل البعد في كلٍّ مما يأتي:

40) البعد بين X و $\overleftrightarrow{VW}$

41) البعد بين L و $\overleftrightarrow{JK}$

40, 41) انظر الهامش.

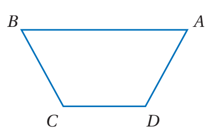




42) **قياس:** علّق خالد صفّين من الصور على حائط غرفته، فقام أولًا بتثبيت مسامير لوحات الصف العلوي على استقامة واحدة، ثم علّق الخيط الشاقولي على كل مسمار وقاس مسافات متساوية أسفل كل مسمار ووضع مسمارًا للوحة في الصف الثاني. لماذا يدل هذا العمل على أن صفّي الصور سيكونان متوازيين؟ صَف المسامير الثاني متساوي البعد عن نقاط الصف الأول كلّها.

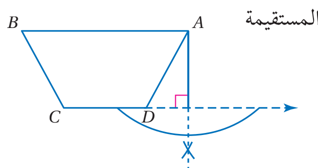
مثال 6

ارسم القطعة المستقيمة التي تمثّل البعد بين A و $\overleftrightarrow{CD}$.



البعد بين المستقيم ونقطة لا تقع عليه، هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.

مد $\overline{CD}$، وارسم القطعة المستقيمة العمودية على $\overleftrightarrow{CD}$ من A

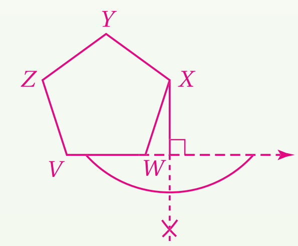


نموذج التوقع

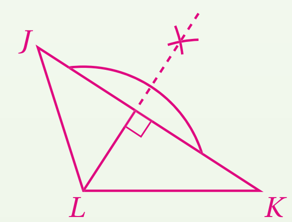
اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 2 ص (27)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

40)

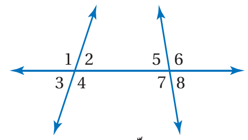


41)



الفصل 2 اختبار الفصل

صنِّف كل زوج من الزوايا فيما يأتي إلى زاويتين متبادلتين داخليًّا، أو متبادلتين خارجيًّا، أو متناظرتين، أو متحالفتين، مستعملًا الشكل أدناه.



1) $\angle 6, \angle 3$ متبادلتان خارجيًّا

2) $\angle 4, \angle 7$ متحالفتان

3) $\angle 5, \angle 4$ متبادلتان داخليًّا

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين A, B في كلٍّ مما يأتي:

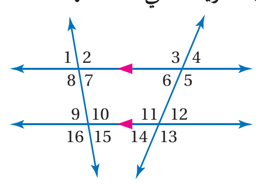
4) $A(8, 1), B(8, -6)$ غير معرف

5) $A(0, 6), B(4, 0)$ $-\frac{3}{2}$

6) $A(6, 3), B(-6, 3)$ **0**

7) $A(5, 4), B(8, 1)$ **−1**

في الشكل أدناه: $m\angle 8 = 96°$ و $m\angle 12 = 42°$. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها.

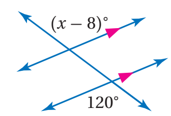


8) $\angle 9$ (8–10) انظر الهامش

9) $\angle 11$

10) $\angle 6$

11) أوجد قيمة x في الشكل الآتي: **128**



12) **نادٍ رياضي:** يقارن مشاري بين عرضين مقدمين من نادٍ رياضي. يدفع في العرض الأول 200 ريال شهريًّا. ويدفع في العرض الثاني 140 ريالًا شهريًّا بالإضافة إلى رسوم اشتراك لأول مرة مقدارها 180 ريالًا. (a–c) انظر الهامش

a) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلتين تمثلان التكلفة y للاشتراك في كلٍّ من العرضين لعدد x من الأشهر. ثم مثّلهما بيانيًّا.

b) هل المستقيمان الممثلان بيانيًّا في الفرع a متوازيان؟ وضّح السبب.

c) أيُّ العرضين هو الأفضل؟ وضّح إجابتك.

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم في كلٍّ من الحالات الآتية:

13) يمر بالنقطة $(-8, 1)$، ويعامد $y = 2x - 17$ $\quad y = -\frac{1}{2}x - 3$

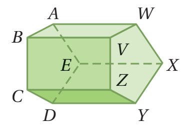
14) يمر بالنقطة $(0, 7)$، ويوازي $y = 4x - 19$ $\quad y = 4x + 7$

أوجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين فيما يأتي:

15) $y = x - 11$, $y = x - 7$ $\quad \sqrt{8} \approx 2.8$

16) $y = -2x + 1$, $y = -2x + 16$ $\quad \sqrt{45} \approx 6.7$

17) **اختيار من متعدد:** أي القطع المستقيمة تخالف $\overline{CD}$؟ **D**



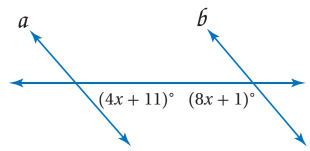
A) $\overline{ZY}$

B) $\overline{AB}$

C) $\overline{DE}$

D) $\overline{VZ}$

18) أوجد قيمة x التي تجعل $a \parallel b$. وحدّد المسلّمة أو النظرية التي استعملتها. 14؛ عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين

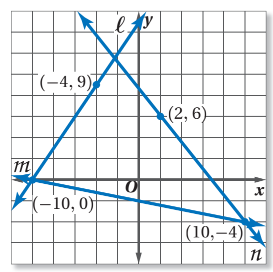


هندسة إحداثية: أوجد البعد بين النقطة P والمستقيم ℓ في كلٍّ ممّا يأتي:

19) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(-4, 2)$, $(3, -5)$. وإحداثيا النقطة P هما $(1, 2)$. $\frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3.5$

20) يمر المستقيم ℓ بالنقطتين $(2, 3)$, $(6, 5)$. وإحداثيا النقطة P هما $(2, 6)$. $\frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2.7$

استعمل الشكل أدناه لتجد ميل كل مستقيم فيما يأتي:



21) المستقيم ℓ. $\frac{3}{2}$

22) مستقيم يوازي m. $-\frac{1}{5}$

23) مستقيم يعامد n. $\frac{4}{5}$

24) **أعمال:** يعمل محمود مندوب مبيعات، ويتقاضى 12 ريالًا عن كل ساعة عمل زائد عمولة مقدارها 15% من قيمة مبيعاته. اكتب معادلة تمثّل ما يتقاضاه في أحد الأسابيع إذا كانت قيمة مبيعاته 2000 ريال. انظر الهامش.

المعالجة: استعمل نتائج اختبار الفصل ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. العبارة "إذا... فاختر...". في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصدر لكل مستوى.

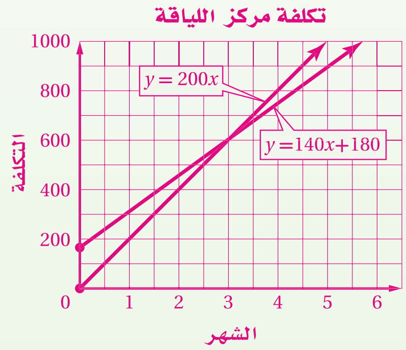
إجابات:

8) °84؛ نظرية الزاويتين المتحالفتين.

9) °138؛ نظرية الزاويتين المتكاملتين.

10) °42؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.

12a) العرض الأول: $y = 200x$
العرض الثاني: $y = 140x + 180$



12b) ليسا متوازيين؛ يتقاطع المستقيمان لأن ميليهما غير متساويين.

12c) يظهر من الرسم أن الاشتراك لأقل من 3 أشهر أفضل في العرض الأول، أما الاشتراك لمدة تزيد على 3 أشهر أفضل في العرض الثاني.

24) $y = 12x + 300$، حيث x عدد ساعات العمل.

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا أخطأ بعض الطلبة في حلّ ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	**إذا** أخطأ بعض الطلبة في حلّ 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر أحد المصادر الآتية: الدروس 1-2، 2-2، 3-2، 4-2، 5-2، 6-2 تدريبات المهارات، ص (8، 13، 18، 23، 28، 33) www.obeikaneducation.com	**فاختر** أحد المصدرين الآتيين: تدريبات إعادة التعليم، ص (6، 11، 16، 21، 26، 31) www.obeikaneducation.com

الفصل 2 الإعداد للاختبارات

رسم مستقيمات مساعدة لحل بعض المسائل الهندسية

من المحتمل أن تواجه في الاختبارات المعيارية بعض الأسئلة التي تحتاج فيها إلى إضافة مستقيمات مساعدة لتطبيق بعض النظريات والمسلمات عليها والوصول لحلها.

استراتيجيات الحل

الخطوة 1

- اقرأ المسألة وتفحص الشكل بإمعان.
- حاول ربط الشكل بأشكال مرتبطة بنظريات أو مسلمات.

الخطوة 2

- قرر الجزء الناقص من الشكل؛ ليكون مشابهًا لشكلٍ له خصائص معينة.
- أضف الجزء الناقص (رسم مستقيم، إكمال زاوية...).

الخطوة 3

- طبق النظريات والمسلمات على الشكل بعد التعديل.
- استنتج المطلوب.

1 التركيز

الهدف: إضافة مستقيمات مساعدة على بعض الرسوم لحل المسألة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

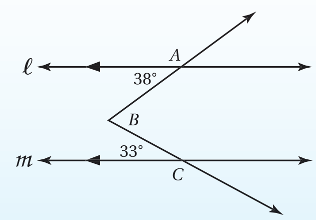
اسأل:

- ما فائدة إضافة مستقيم مساعد على رسم هندسيٍّ؟ إجابة ممكنة: يصبح الشكل مقاربًا لشكلٍ مألوفٍ يمكن حساب بعض القياسات عليه، أو اكتشاف بعض الخصائص.
- هل إضافة المستقيم المساعد تؤثر في معطيات المسألة؟ لا.

مثال

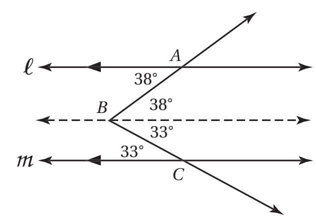
اقرأ المسألة جيدًا، وحدّد ما تحتاج إلى معرفته، ثم استعمل المعطيات لحلها.

في الشكل أدناه: قُطعت $\angle ABC$ بالمستقيمين المتوازيين ℓ و m. ما قياس $\angle ABC$؟ اكتب إجابتك بالدرجات.



ارسم مستقيمًا ثالثًا مساعدًا يوازي المستقيمين ℓ و m مارًّا بالنقطة B. وأوجد قياسات الزوايا باستعمال الزوايا المتبادلة داخليًّا:

حل المسألة

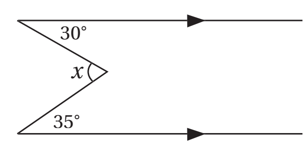


$$m\angle ABC = 38^\circ + 33^\circ = 71^\circ$$

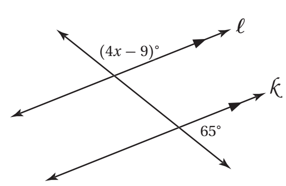
تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في نموذج الإجابة:

1) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



2) ما قيمة x في الشكل أدناه؟ **31**



مثال إضافي

ما ميل المستقيم الذي يحتوي على النقاط المبيَّنة في الجدول أدناه؟ **4**

x	y
-4	-18
-2	-10
2	6
4	14

3 التقويم

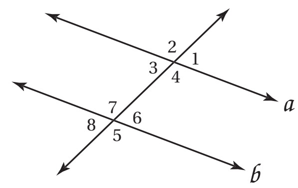
استعمل التمرينين 1 و 2 للتحقق من فهم الطلاب.

الفصل 2 اختبار تراكمي
للفصلان 1, 2

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي ، ثم اكتب رمز الإجابة الصائبة:

1) في الشكل أدناه: إذا كان $a \parallel b$ ، فأيٌّ مما يأتي صحته ليست مؤكدة؟ D



A $\angle 1 \cong \angle 3$ **C** $\angle 2 \cong \angle 5$

B $\angle 4 \cong \angle 7$ **D** $\angle 8 \cong \angle 2$

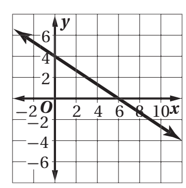
2) أيٌّ مما يأتي مثال مضاد للعبارة أدناه؟ A

مجموع أي عددين فرديين عدد فردي

A $3 + 3 = 6$ **C** $6 + 2 = 8$

B $5 + 4 = 9$ **D** $4 + 9 = 13$

3) ما ميل المستقيم الممثل بيانيًا أدناه ؟ A



A $-\frac{2}{3}$ **C** $-\frac{2}{5}$

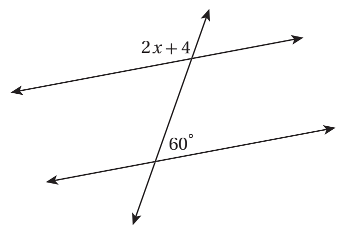
B $-\frac{1}{2}$ **D** $-\frac{1}{6}$

4) يمر المستقيم k بالنقطتين $(4, 1)$ و $(-5, -5)$.
أوجد البعد بين المستقيم k والنقطة $F(-4, 0)$. B

A 3.3 وحدات **C** 4.0 وحدات

B 3.6 وحدات **D** 4.2 وحدات

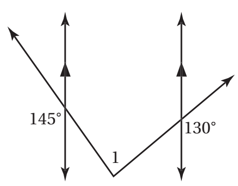
5) ما قيمة x على الشكل أدناه؟ C



A 120 **C** 58

B 116 **D** 60

6) ما قياس $\angle 1$ في الشكل أدناه؟ A



A 85 **C** 95

B 90 **D** 100

7) يرغب عبدالله في شراء ساعة يد سعرها 580 ريالًا . إذا كان لديه 140 ريالًا ، ويمكنه ادخار 40 ريالًا أسبوعيًّا، فبعد كم أسبوعٍ يتوافر لديه المبلغ الكافي لشراء الساعة؟ B

A 10 **C** 12

B 11 **D** 13

إرشادات للاختبار

السؤال 6: يمكن أن يساعدك الرسم على حل المسألة؛ لذا ارسم مستقيمًا ثالثًا موازيًا يمر برأس الزاوية 1، ثم استعمل خصائص المستقيمات المتوازية والقاطع لحل المسألة.

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة في كل سؤال، إذ قد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية مثل:

1) A لم يطبق نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس.
B لم يطبق نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.
C لم يطبق نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.
D صحيحة.

2) A صحيحة.
B أحد العددين المجموعين زوجيٌّ.
C العددان المجموعان زوجيان والمجموع زوجيٌّ.
D أحد العددين المجموعين زوجيٌّ.

3) A صحيحة.
B لم ينتبه إلى أن الارتفاع أكثر من 1 بقليل.
C أخطأ في الحسابات.
D أخطأ في الحسابات.

4) A أخطأ في الصيغة.
B صحيحة.
C أخطأ في الحسابات.
D أخطأ في الحسابات.

5) A أوجد مكملة 60°
B أخطأ في الحسابات.
C صحيحة.
D أخطأ في الحسابات.

6) A صحيحة.
B قدّر بالنظر.
C أخطأ في الحسابات.
D أخطأ في الحسابات.

7) A أخطأ في الحسابات.
B صحيحة.
C أخطأ في الحسابات.
D أخطأ في الحسابات.

التقويم التكويني

يمكنك تحديد مدى تقدم الطلاب في الفصلين 1, 2 من خلال:

- اختبار تراكمي: الفصلان 1, 2، ص (143 ، 142)
- اختبار تراكمي: ص (45–43)

أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة:

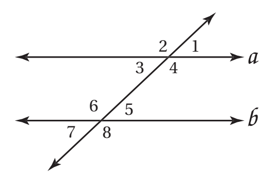
8) إذا عُلم مستقيم ونقطة لا تقع عليه، فكم مستقيمًا يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم؟ مستقيم واحد

9) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4, 3), (-2, -5)$. $\frac{4}{3}$

10) أكمل البرهان الآتي:

المعطيات: $m\angle 1 + m\angle 8 = 180°$

المطلوب: $a \parallel b$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $m\angle 1 + m\angle 8 = 180°$	1) مُعطى
2) $m\angle 1 = 180° - m\angle 8$	2) ؟ خاصية الطرح للمساواة
3) $m\angle 5 + m\angle 8 = 180°$	3) ؟ زاويتان متجاورتان على مستقيم
4) $m\angle 5 = 180° - m\angle 8$	4) خاصية الطرح للمساواة
5) $m\angle 1 = m\angle 5$	5) خاصية التعدي للمساواة أو (خاصية التعويض)
6) $a \parallel b$	6) عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

11) اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة:

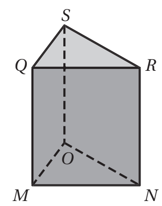
"إذا كان الشكل مربعًا، فإنه متوازي أضلاع".

إذا لم يكن الشكل متوازي أضلاع ، فإنه ليس مربعًا.

أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

12) استعمل الشكل أدناه لتحدد كلًّا مما يأتي:

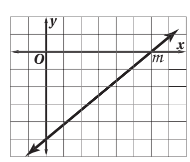


a) جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{MQ}$ القطعتان المستقيمتان $\overline{NR}$, $\overline{OS}$

b) جميع المستويات المتقاطعة مع المستوى SRN المستويات QMN, SOM, QRS, OMN

c) قطعة مستقيمة تخالف $\overline{ON}$ إجابة ممكنة: $\overline{MQ}$

13) استعمل التمثيل البياني المجاور للإجابة عن كلٍّ من الأسئلة الآتية:



a) ما معادلة المستقيم m؟ $y = 0.8x - 5$

b) ما ميل المستقيم الذي يوازي المستقيم m؟ 0.8

c) ما ميل مستقيم عمودي على المستقيم m؟ -1.25

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

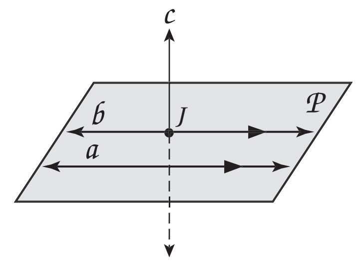
إذا لم تجب عن سؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى ...	2-2	1-1	2-4	2-6	2-2	2-2	2-5	2-6	2-4	2-3	1-3	2-1	2-5

بديل الواجب المنزلي

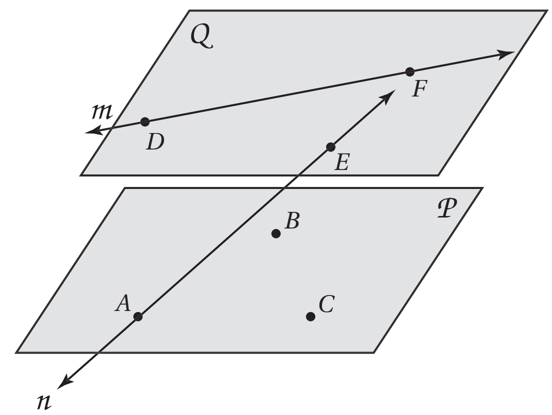
التهيئة للفصل 3: حدد الأسئلة ص (145) واجبًا منزليًّا؛ لتقويم مهارات الطلاب في المتطلبات السابقة للفصل القادم.

الدرس 2-1 ، ص (90) :

46)



47a)



استكشاف 2-2 ، ص (93) :

1) $\angle FAC, \angle GAB, \angle JBA, \angle KBD$ لها القياس نفسه.
$\angle CAG, \angle FAB, \angle ABK, \angle JBD$ لها القياس نفسه.

2) إجابة ممكنة:

الزاوية	$\angle FAC$	$\angle CAG$	$\angle GAB$	$\angle FAB$	$\angle JBA$	$\angle ABK$	$\angle KBD$	$\angle JBD$
القياس الأول	107°	73°	107°	73°	107°	73°	107°	73°
القياس الثاني	87°	93°	87°	93°	87°	93°	87°	93°
القياس الثالث	45°	135°	45°	135°	45°	135°	45°	135°
القياس الرابع	122°	58°	122°	58°	122°	58°	122°	58°
القياس الخامس	150°	30°	150°	30°	150°	30°	150°	30°

3a) المتناظرة: $\angle FAC$ و $\angle JBA$، $\angle CAG$ و $\angle ABK$، $\angle GAB$ و $\angle KBD$، $\angle FAB$ و $\angle JBD$؛ إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن أزواج الزوايا المتناظرة متطابقة.

3b) المتبادلة داخليًّا: $\angle FAB$ و $\angle ABK$، $\angle GAB$ و $\angle JBA$؛ إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن الزوايا المتبادلة داخليًّا متطابقة.

3c) المتبادلة خارجيًّا: $\angle FAC$ و $\angle KBD$، $\angle CAG$ و $\angle JBD$؛ إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن الزوايا المتبادلة خارجيًّا متطابقة.

3d) المتحالفة: $\angle FAB, \angle JBA, \angle GAB, \angle ABK$؛ إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن الزاويتين المتحالفتين متكاملتان.

4a) قياس جميع الزوايا 90°

4b) إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، وكان عموديًّا على أحد المستقيمين، فإنه يعامد المستقيم الآخر.

الدرس 2-2 ، ص (94) (تحقق من فهمك) :

1A) 105°؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين.

1B) 75°؛ 2∠ تكمّل 1∠؛ نظرية الزاويتين المتكاملتين.

1C) 105°؛ نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس.

الدرس 2-2، ص (100-98) :

22) $x = 40$ بحسب مسلّمة الزاويتين المتناظرتين،
$y = 50$ بحسب نظرية الزاويتين المتكاملتين.

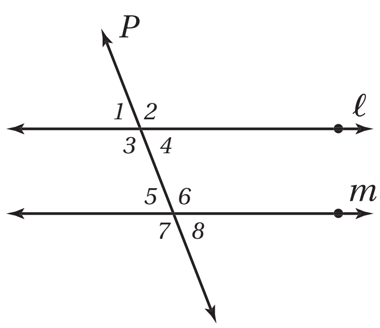
23) $x = 63$ بحسب نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس، ونظرية الزاويتين المتحالفتين.

24) $x = 54$ بحسب نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا،
$y = 12$ بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين.

33) **المعطيات:** $\ell \parallel m$ ، p قاطع

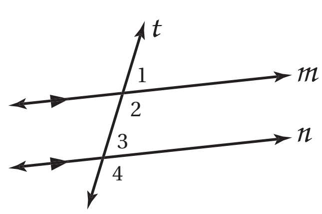
المطلوب: $\angle 1 \cong \angle 8$
$\angle 2 \cong \angle 7$

البرهان:



العبارات	المبررات
1) $\ell \parallel m$	1) مُعطى
2) $\angle 1 \cong \angle 5$ ، $\angle 2 \cong \angle 6$	2) مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
3) $\angle 5 \cong \angle 8$ ، $\angle 6 \cong \angle 7$	3) نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
4) $\angle 1 \cong \angle 8$ ، $\angle 2 \cong \angle 7$	4) خاصية التعدي

38a) إجابة ممكنة للمستقيمين m و n:



38b) إجابة ممكنة:

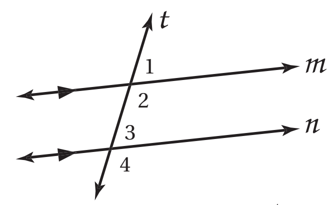
$m\angle 1$	$m\angle 2$	$m\angle 3$	$m\angle 4$
60	120	60	120
45	135	45	135
70	110	70	110
90	90	90	90
25	155	25	155

38c) الزاويتان الخارجيتان الواقعتان في جهة واحدة من القاطع متكاملتان.

38d) التبرير الاستقرائي؛ ثم استعمال نمطٍ للوصول إلى النتيجة.

38e) **المعطيات:** المستقيمان m و n متوازيان ويقطعهما المستقيم t

المطلوب: $\angle 1$ و $\angle 4$ متكاملتان.



البرهان:

العبارات	المبررات
1) المستقيمان m و n متوازيان ويقطعهما المستقيم t.	1) مُعطًى
2) $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$	2) نظرية الزاويتين المتكاملتين
3) $\angle 2 \cong \angle 4$	3) مسلمة الزاويتين المتناظرتين
4) $m\angle 2 = m\angle 4$	4) تعريف التطابق
5) $m\angle 1 + m\angle 4 = 180°$	5) بالتعويض
6) $\angle 1$ و $\angle 4$ متكاملتان	6) تعريف الزاويتين المتكاملتين

39) المستقيمان b و c متعامدان؛ بما أن $\angle 1$ و $\angle 2$ متجاورتان على مستقيم؛ فإن: $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$، لكن $\angle 1 \cong \angle 2$؛ لذا $m\angle 1 = m\angle 2$، بالتعويض $m\angle 1 + m\angle 1 = 180°$، لذا $m\angle 1 = 90°$ و $m\angle 2 = 90°$؛ لذا فالمستقيمان a و c متعامدان، بحسب النظرية 2.4، وبما أن c عمودي على المستقيم a والمستقيمين a و b متوازيان، فإن المستقيم c عمودي على المستقيم b أيضًا.

40) في كلتا النظريتين يتكون زوج من الزوايا، عندما يقطع قاطع مستقيمين متوازيين. ومع ذلك ففي نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا، يكون كل زوج من الزوايا المتبادلة داخليًّا متطابقًا. في حين يكون كل زوج من الزوايا المتحالفة متكاملًا في نظرية الزاويتين المتحالفتين.

الدرس 3-2، ص (107-104) :

1) $j \parallel k$؛ عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين.

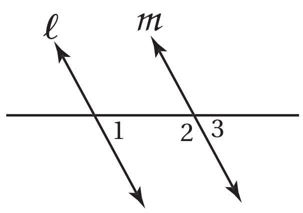
2) $j \parallel k$؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا.

3) $\ell \parallel m$؛ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا.

4) $\ell \parallel m$؛ عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين.

14) المعطيات: $\angle 1, \angle 2$ متحالفتان،
$\angle 1, \angle 2$ متكاملتان

المطلوب: $\ell \parallel m$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 1$ و $\angle 2$ متحالفتان ومتكاملتان	1) مُعطى
2) $\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم	2) تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
3) $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان	3) نظرية الزاويتين المتكاملتين
4) $\angle 1 \cong \angle 3$	4) نظرية تطابق المكملات
5) $l \parallel m$	5) عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

15) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 1 \cong \angle 3,\ \overline{AC} \parallel \overline{BD}$	1) مُعطى
2) $\angle 2 \cong \angle 3$	2) مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
3) $\angle 1 \cong \angle 2$	3) خاصية التعدّي
4) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	4) إذا كانت الزاويتان المتبادلتان متطابقتين، فإن المستقيمين متوازيان

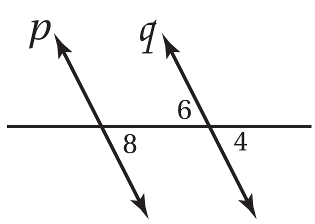
16) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle 1 \cong \angle 2,\ \overline{LJ} \perp \overline{ML}$	1) مُعطى
2) $\overline{LJ} \parallel \overline{KM}$	2) إذا كانت الزاويتان المتبادلتان داخليًّا متطابقتين، فإن المستقيمين متوازيان
3) $\overline{KM} \perp \overline{ML}$	3) نظرية القاطع العمودي

17) المعطيات: $\angle 8 \cong \angle 6$

المطلوب: $p \parallel q$

البرهان:

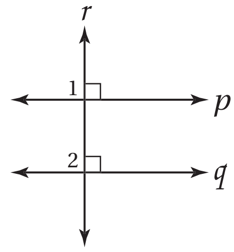


$\angle 8 \cong \angle 6$ معطى،

$\angle 4 \cong \angle 6$ لأنهما متقابلتان بالرأس،

ومن ذلك $\angle 4 \cong \angle 8$ باستعمال خاصية التعدي. وبما أن $\angle 4$ و $\angle 8$ زاويتان متناظرتان ومتطابقتان، فإن $p \parallel q$.

18) المعطيات: $p \perp r, q \perp r$



المطلوب: $p \parallel q$

البرهان:

بما أن $p \perp r$ و $q \perp r$، فإن قياس كلٍّ من $\angle 1$ و $\angle 2$ يساوي $90°$. وبما أن $\angle 1$ و $\angle 2$ لهما القياس نفسه، فإنهما متطابقتان، وبحسب عكس مسلّمة الزاويتين المتناظرتين يكون $p \parallel q$.

20) $s \parallel r$؛ إجابة ممكنة: $32° + 32° = 64°$؛ إذن الزاويتان المتناظرتان متطابقتان؛ لذا فإن المستقيمين متوازيان.

21) $s \parallel r$ ؛ إجابة ممكنة: بما أن $98 = 75 + 23 = 57 + 41$؛ إذن الزاويتان المتبادلتان خارجيًّا متطابقتان؛ لذا فإن المستقيمين متوازيان.

22) $s \parallel r$؛ إجابة ممكنة: بما أن $92 = 65 + 27$؛ إذن الزاويتان المتبادلتان خارجيًّا متطابقتان؛ لذا فإن المستقيمين متوازيان.

27a) نعلم أن $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$. بما أن $\angle 2$ و $\angle 3$ متجاورتان على مستقيم، فإن $m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$.

وبالتعويض $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$.

وبطرح $m\angle 2$ من كلا الطرفين نحصل على $m\angle 1 = m\angle 3$.

أي أن $\angle 3 \cong \angle 1$ بحسب تعريف الزوايا المتطابقة، لذا فإن $a \parallel c$؛ لأن الزاويتين المتناظرتين متطابقتان.

27b) نعلم أن: $a \parallel c$ و $m\angle 1 + m\angle 3 = 180$.

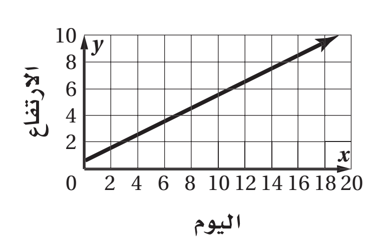
بما أن $\angle 1$ و $\angle 3$ متناظرتان، فإنهما متطابقتان وقياساهما متساويان.

وبالتعويض: $m\angle 3 + m\angle 3 = 180°$ أو $2m\angle 3 = 180$. وبقسمة كلا الطرفين على 2 ، نحصل على $m\angle 3 = 90°$ ؛ لذلك $t \perp c$ ؛ لأنهما يشكّلان زاويةً قائمةً.

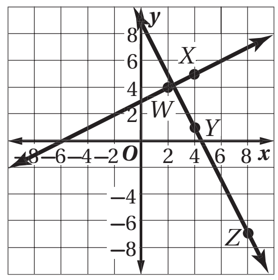
28) إجابة ممكنة: استعمل زاويتين متبادلتين خارجيًّا ناتجتين عن مستقيمين وقاطع، وبيّن أنهما متطابقتان، أو بيّن أن زاويتين متحالفتين متكاملتان؛ أو بيّن أن زاويتين متبادلتين داخليًّا متطابقتان، أو بيّن أن مستقيمًا يقع في نفس المستوى عموديٌّ على كلا المستقيمين، أو بيّن أن زاويتين متناظرتين متطابقتان.

الدرس 4-2 ، ص (113-116) :

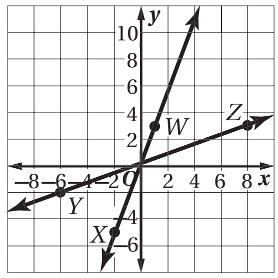
4a)



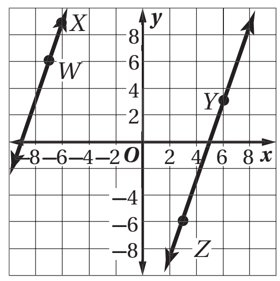
5)



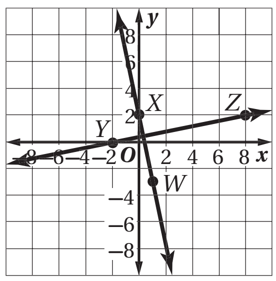
6)



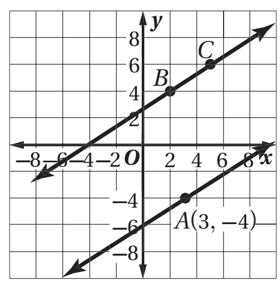
7)



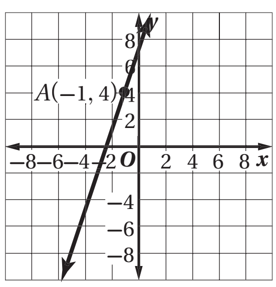
8)



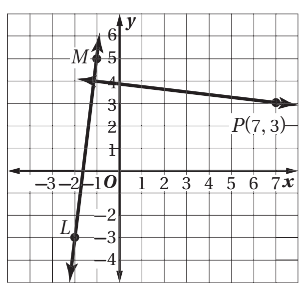
9)



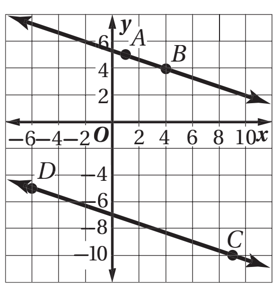
10)



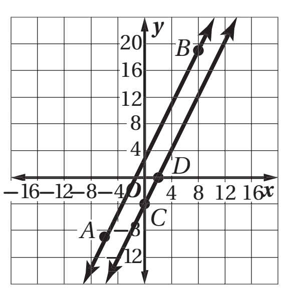
11)



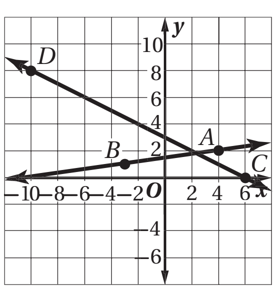
22) متوازيان



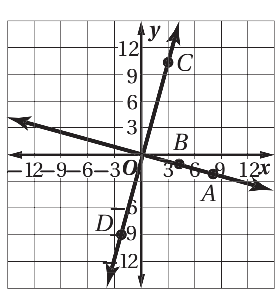
23) متوازيان



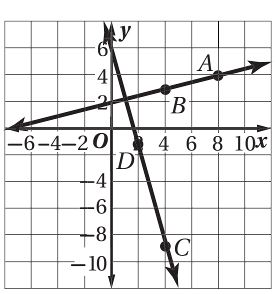
24) غير ذلك



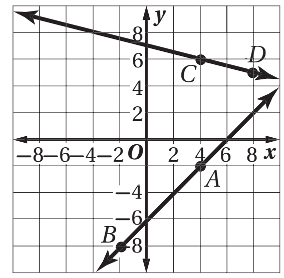
25) متعامدان



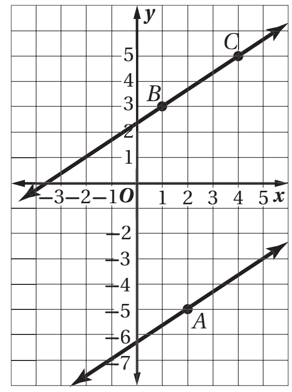
26) متعامدان



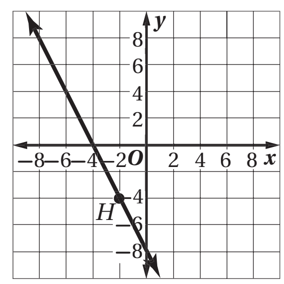
27) غير ذلك



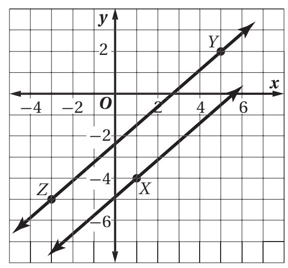
28)



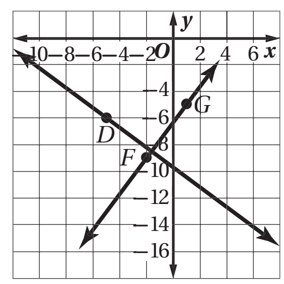
29)



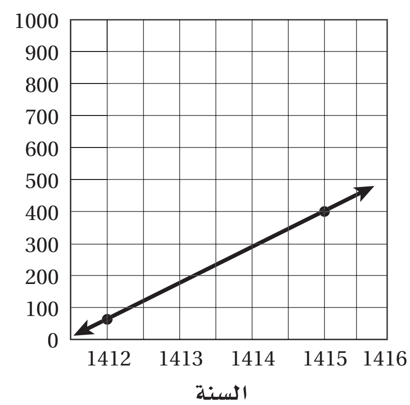
30)



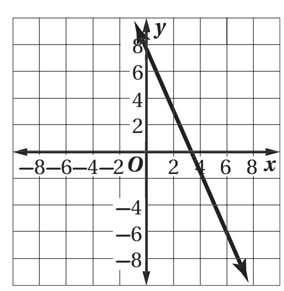
31)



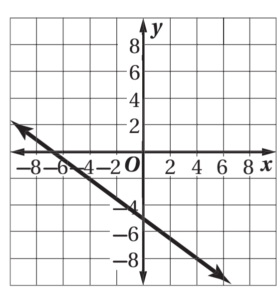
35b)



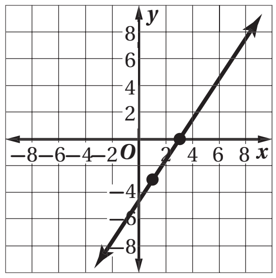
36) $x = 6$



37) $y = -8$



38) $y = 0$



43) إجابة ممكنة:

المعطيات: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

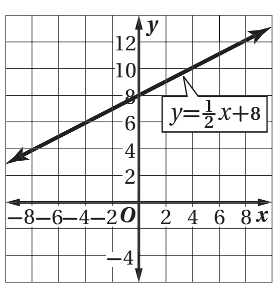
المطلوب: $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

البرهان:

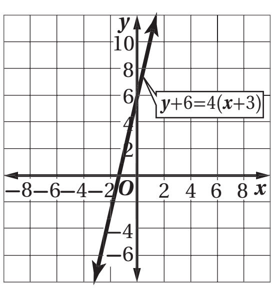
العبارات	المبررات
1) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	1) مُعطى
2) $m = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)}$	2) ضرب البسط والمقام في -1
3) $m = \frac{-y_2 + y_1}{-x_2 + x_1}$	3) خاصية التوزيع
4) $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$	4) خاصية الإبدال في الجمع

الدرس 5-2، ص (117, 118)، (تحقق من فهمك):

1) $y = \frac{1}{2}x + 8$

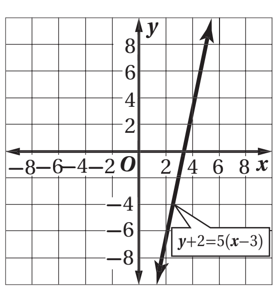


2) $y + 6 = 4(x + 3)$

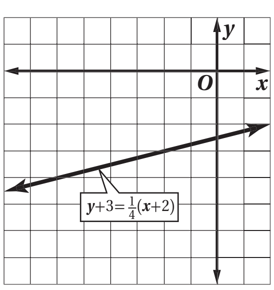


الدرس 5-2، ص (121, 122):

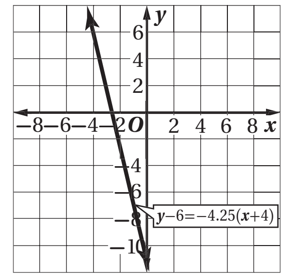
4)



5)

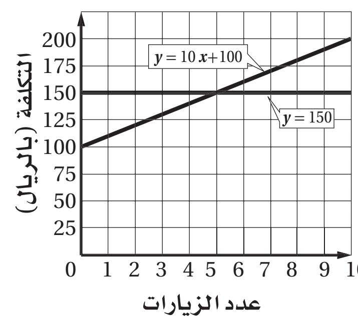


(6

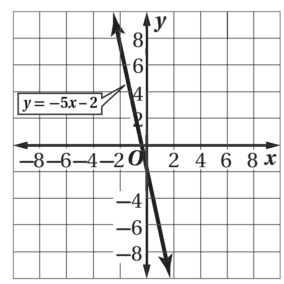


(12b

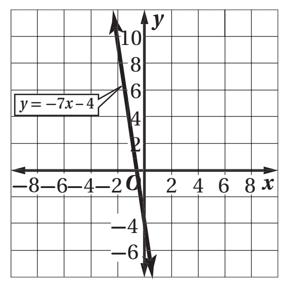
تكلفة مركز اللياقة



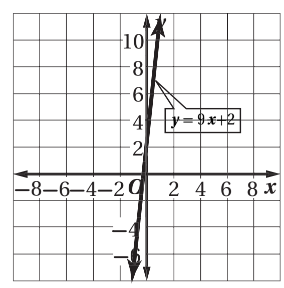
(13 $y=-5x-2$



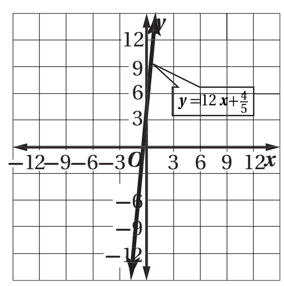
(14 $y=-7x-4$



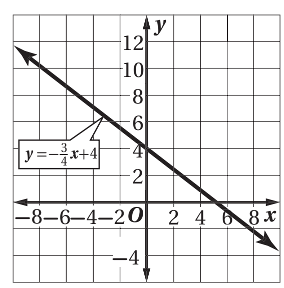
(15 $y=9x+2$



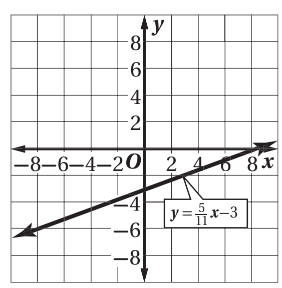
(16 $y=12x+\frac{4}{5}$



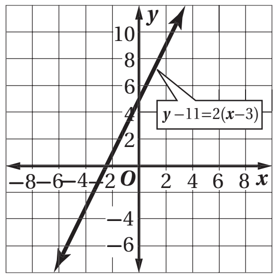
(17 $y=-\frac{3}{4}x+4$



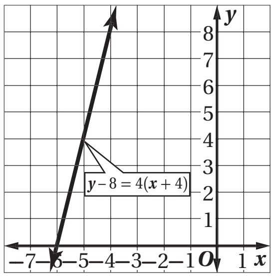
(18 $y=\frac{5}{11}x-3$



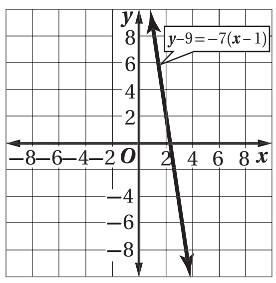
(19 $y-11=2(x-3)$



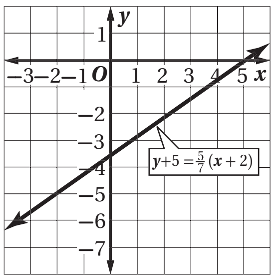
(20 $y-8=4(x+4)$



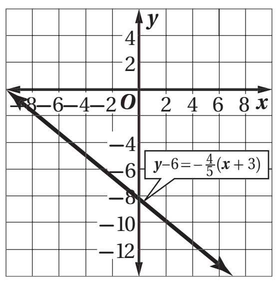
(21 $y-9=-7(x-1)$



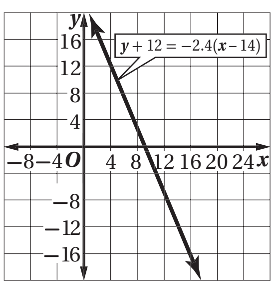
(22 $y+5=\frac{5}{7}(x+2)$



(23 $y+6=-\frac{4}{5}(x+3)$

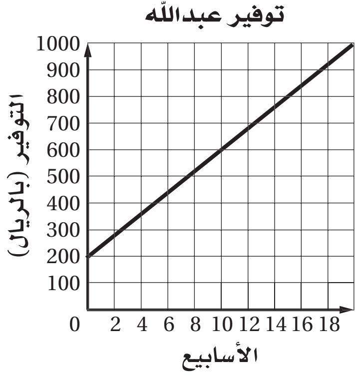


(24 $y+12=-2.4(x-14)$



(42b

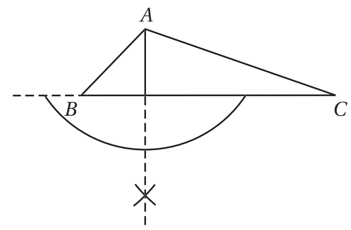
توفير عبدالله



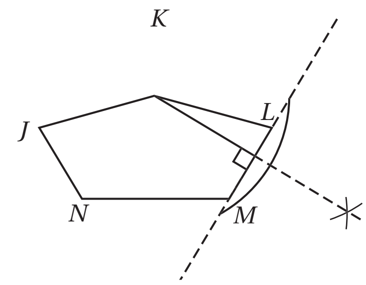
(42d 21 ؛ إذا بدأ عبد الله التوفير قبل أسبوعين، فسيكون لديه 200 ريال + 40 ريالًا +40 ريالًا أو 280 ريالًا. وبما أنه يحتاج إلى توفير 420 + 700 أو 1120 ريالًا، فهو ما زال في حاجة إلى 280 – 1120 أو 840 ريالًا، وبقسمة 840 ريالًا على 40 ريالًا، سيحتاج سلطان إلى 21 أسبوعًا زيادة حتى يوفر نقودًا كافية.

الدرس 2-6 ، ص (131-134) :

9)



10)



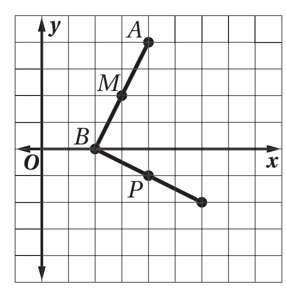
21) **المعطيات:** ℓ متساوي البعد عن m ، وn متساوي البعد عن m.

المطلوب: $\ell \parallel n$

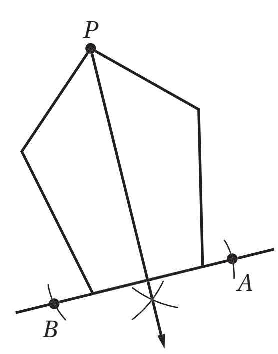
البرهان:

العبارات	المبررات
1) ℓ متساوي البعد عن m ، وn متساوي البعد عن m	1) معطيات
2) $\ell \parallel m$ و $m \parallel n$	2) تعريف تَسَاوِي البعد
3) ميل ℓ يساوي ميل m	3) (تعريف توازي مستقيمين) ميل m يساوي ميل n
4) ميل ℓ يساوي ميل n	4) بالتعويض
5) $\ell \parallel n$	5) تعريف توازي مستقيمين

28a)

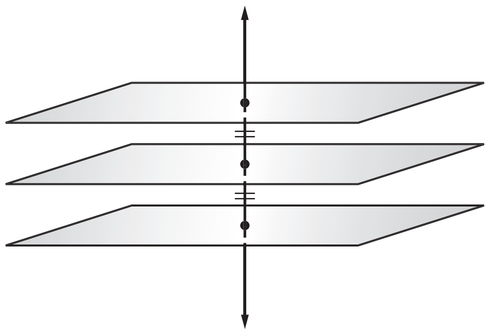


34a)



34b) إجابة ممكنة: باستعمال المنقلة، نجد أن قياس الزاوية التي أُنشئت يساوي $90°$؛ لذا فالمستقيم الذي أُنشئ من الرأس P عمودي على الضلع المختار غير المجاور.

35) إذا كان المستويان متساوِيَي البعد عن مستوًى ثالثٍ، فإن المستويين متوازيان.



36) إجابة ممكنة: نختار نقطة على أحد المستقيمين، ونجد معادلة المستقيم الذي يعامد المستقيمين المتوازيين ويمر بهذه النقطة، ثم نجد نقطة تقاطع هذا العمودي مع المستقيم الآخر الذي لم يستعمل في الخطوة الأولى، وبعد ذلك نستعمل صيغة المسافة بين نقطتين؛ لإيجاد المسافة بين النقطة المفروضة على المستقيم الأول، ونقطة التقاطع على المستقيم الثاني، فيكون الناتج هو البعد بين المستقيمين المتوازيين.

الفصل 3

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
التهيئة، ص (145)

	الدرس 3-1 حصتان	استكشاف 3-2 حصة واحدة	الدرس 3-2 حصتان	الدرس 3-3 حصتان
العنوان	**تصنيف المثلثات**	**معمل الهندسة: زوايا المثلثات**	**زوايا المثلثات**	**المثلثات المتطابقة**
الأهداف	• استعمال تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها وزواياها في إيجاد قيم مجهولة.	• إيجاد العلاقات بين قياسات الزوايا الداخلية في المثلث.	• تطبيق نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية. • تطبيق نظرية الزاوية الخارجية للمثلث.	• تسمية العناصر المتناظرة في المضلعات المتطابقة واستعمالها. • إثبات تطابق مثلثين باستعمال تعريف التطابق.
المفردات	المثلث الحاد الزوايا المثلث المتطابق الزوايا المثلث المنفرج الزاوية المثلث القائم الزاوية المثلث المتطابق الأضلاع المثلث المتطابق الضلعين المثلث المختلف الأضلاع		المستقيم المساعد الزاوية الخارجية الزاويتان الداخليتان البعيدتان البرهان التسلسلي النتيجة	التطابق المضلعات المتطابقة العناصر المتناظرة
تمثيلات متعددة	ص (151)		ص (160)	ص (167)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات المهارات، ص (8) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (20) دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • مقص • مسطرة	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (11) دون • تدريبات المهارات، ص (13) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (21) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (16) دون • تدريبات المهارات، ص (18) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (22) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	نظام استجابات الطلاب، ص (150)		جهاز العرض، ص (155)	السبورة التفاعلية، ص (165)
تنويع التعليم	ص (147, 148, 151)		ص (156, 160)	ص (164, 167)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

المثلثات المتطابقة

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(16) حصة	(4) حصص	(20) حصة

الدرس 3-4 حصتان	الدرس 3-5 حصتان	توسع 3-5 حصة واحدة	الدرس 3-6 حصتان	الدرس 3-7 حصتان
إثبات تطابق المثلثات SSS , SAS	إثبات تطابق المثلثات ASA , AAS	معمل الهندسة : تطابق المثلثات القائمة	المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع	المثلثات والبرهان الإحداثي
• استعمال مسلَمتَي SSS , SAS لاختبار تطابق مثلثين.	• استعمال مسلَمتَي ASA , AAS لاختبار تطابق مثلثين .	• استكشاف التطابق في المثلثات القائمة الزاوية.	• استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع والمتطابقة الضلعين .	• رسم مثلثات وتحديد مواقعها لاستعمالها في البرهان الإحداثي . • كتابة برهان إحداثي .
الزاوية المحصورة	الضلع المحصور		الساقان زاوية الرأس زاويتا القاعدة	البرهان الإحداثي
			ص (194)	
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (21) دون • تدريبات المهارات، ص (23) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (23) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون • تدريبات المهارات، ص (28) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (24) دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • مسطرة • منقلة • فرجار	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (31) دون • تدريبات المهارات، ص (33) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (35) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (25) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (36) دون • تدريبات المهارات، ص (38) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص (39) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (40) دون ضمن **كتاب التمارين** • ص (26) دون ضمن فوق
السبورة التفاعلية، ص (175)	تسجيل مرئي، ص (182)		تسجيل مرئي، ص (189)	السبورة التفاعلية، ص (198)
ص (171, 177)	ص (181, 185)		ص (190, 191)	ص (198, 201)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (178)

التقويم الختامي
• دليل الدراسة والمراجعة ص (202-206)
• اختبار الفصل ص (207)

الفصل 3

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 3**	
	التهيئة للفصل 3 ، ص (145) نموذج التوقع، ص (46)	مخطط المعالجة، ص (145)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب.
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك كل مثال تأكد مسائل مهارات التفكير العليا (اكتشف الخطأ، اكتب) مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة ، ص (49, 50) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصول 3-1 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصول 3-1
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (178) اختبار منتصف الفصل، ص (51) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصول 3-1 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصول 3-1
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (202-206) اختبار الفصل، ص (207) اختبار تراكمي، ص (210-211) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصول 3-1 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصول 3-1
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 3**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (53-58) اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (59-60) اختبار المفردات ، ص (52) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (61) اختبار تراكمي ، ص (62-64) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصول 3-1 www.obeikaneducation.com

كتاب الطالب   دليل المعلم   مصادر المعلم للأنشطة الصفية   دليل التقويم   شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون: كوّن مستوًى إحداثيًّا على أرض غرفة الصف باستعمال شريط لاصق، واطلب إلى الطلاب أن يشكلوا رؤوس أشكال هندسية، وأن يمسكوا خيوطًا من الصوف تمتد من طالب إلى آخر لتمثل الأضلاع، واطلب إليهم أن يشكلوا كل أنواع المثلثات التي درسوها في هذا الفصل، وأن يحدِّدوا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بينها.

المتعلمون الطبيعيون: اطلب إلى الطلاب أن يستعملوا أمثلةً من هذا الفصل ومشاهداتهم الخاصة؛ لتصنيف مثلثات يشاهدونها في الطبيعة. فعلى سبيل المثال تنمو بعض الأشجار على هيئة مثلث. كما أن بعض أوراق الأشجار مثلثة الشكل. وللقطط آذان مثلثة الشكل، وكذلك بعض الطحالب تأخذ شكل المثلث.

البديل 2 دون المتوسط دون

وزِّع الطلبة مجموعات صغيرة؛ لإنشاء جميع أنواع المثلثات التي درسوها في هذا الفصل، باستعمال مستوى إحداثي مرسوم على لوح من الفلّين، ثم اطلب إليهم أن يستعملوا دبابيس للرؤوس، وخيوطًا ملونة للأضلاع، وأن يصنِّفوا مثلثاتهم، ويشرحوا خصائص كل واحدٍ منها.

البديل 3 فوق المتوسط فوق

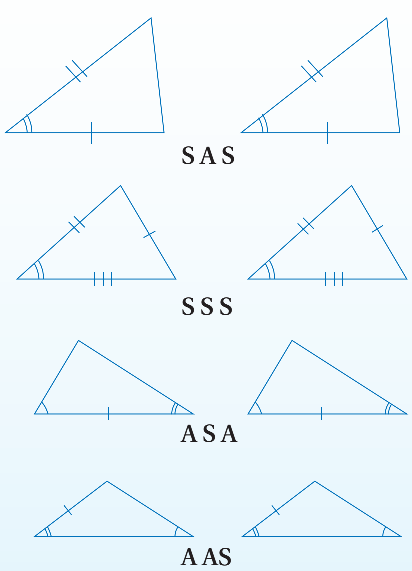
- اطلب إلى الطلاب إنشاء بنك أمثلة لزملائهم، ثم اطلب إليهم أن يكونوا عدة أمثلة على تطابق المثلثات، بحيث يكتبون SSS, SAS, ASA, AAS على أحد وجهَي بطاقة مع تعريف المسلّمة، ويكتبون مثالًا يوضحها على الوجه الآخر.
- تحدَّ الطلاب في أن يكتبوا جميع أنواع المثلثات الممكنة، وأن ينظِّموها في جدول يشبه الجدول أدناه. وعلى الطلاب أن يرسموا مثالًا لكل نوع، أو يكتبوا تفسيرًا يبين سبب عدم إمكانية تكوين المثلث.

	حاد الزوايا	قائم الزاوية	منفرج الزاوية	متطابق الزوايا
مختلف الأضلاع				
متطابق الضلعين				
متطابق الأضلاع				

قراءة الرياضيات

مهارة الدراسة

يمكن استعمال الرسوم لتمييز حالات تطابق المثلثات؛ لمساعدة الطلاب على تذكُّرها، فبعد أن تُكمل حالات التطابق في (الدرس 5-3)، اكتب على السبورة حالات تطابق المثلثات وأرفقها بالرسوم المبينة جانبًا، ويمكن أن يُكمل الطلاب الرسوم بحالات التطابق الخاصة بالمثلثات القائمة بعد دراسة توسع الدرس (5-3)، ويمكن أن يستعمل الطالب الرسوم لتذكُّر حالة عدم التطابق SSA، وكذلك لتذكُّر نظرية الزاوية الخارجية للمثلث في (الدرس 2-3)، واطلب إلى الطلاب القيام بذلك.



يُسهم هذا النشاط وماشابهه في بناء استقلالية الطلاب من خلال استعمالهم الاستراتيجيات الخاصة بهم.

الفصل 3 المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 3

- استعمال المفاهيم والخصائص الهندسية لحل المسائل .
- تمثيل الأشكال في المستوى الإحداثي.

الفصل 3

- صياغة تخمينات حول المثلثات.
- استعمال الأنماط العددية والهندسية؛ للتوصل إلى تعميماتٍ حول الخصائص الهندسية .
- استعمال التبرير المنطقي لإثبات صحة عبارات رياضية.

ما بعد الفصل 3

- حل مسائل لمواقف طبيعية باستعمال قانونَي الجيب وجيب التمام وقوانين المساحة.

ملخص الدروس

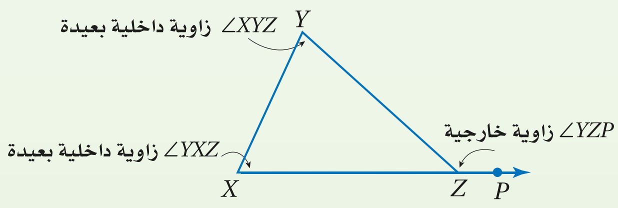
3-1 تصنيف المثلثات

يمكن تصنيف المثلثات وفقًا لقياسات زواياها إلى: مثلث حاد الزوايا وهو مثلث جميع زواياه حادة، أو مثلث منفرج الزاوية وهو المثلث الذي إحدى زواياه منفرجة، أو مثلث قائم الزاوية وهو المثلث الذي قياس إحدى زواياه $90°$، وإذا كانت جميع زوايا المثلث متطابقة فإنه يسمَّى متطابق الزوايا.

كما يمكن أن تصنف المثلثات وفقًا لعدد أضلاعها المتطابقة إلى: مثلث مختلف الأضلاع وهو مثلث لا يتطابق فيه أي ضلعين، أو مثلث متطابق الضلعين وهو مثلث فيه ضلعان متطابقان على الأقل، أو مثلث متطابق الأضلاع وهو مثلث جميع أضلاعه متطابقة. ويعد المثلث المتطابق الأضلاع حالة خاصة من المثلث المتطابق الضلعين.

3-2 زوايا المثلثات

تنصُّ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث على أن "مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي $180°$ دائمًا". وكل زاوية داخلية في المثلث لها زاويتان خارجيتان مكونة من أحد أضلاع المثلث وامتداد الضلع الآخر. والزاويتان الداخليتان غير المجاورتين لزاوية خارجية معلومة تُسمَّيان الزاويتين الداخليتين البعيدتين، وقياس الزاوية الخارجية يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين البعيدتين، وهذه النظرية تسمى نظرية الزاوية الخارجية.



$$m\angle XYZ + m\angle YXZ = m\angle YZP$$

ويقدم في هذا الدرس أيضًا البرهان التسلسلي؛ حيث تنظَّم سلسلة من العبارات في ترتيب منطقي. وتستعمل الأسهم لتبين ترتيب العبارات.

المثلثات المتطابقة

3-3 المثلثات المتطابقة

يتطابق المثلثان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة.

وتُستعمل نظرية الزاوية الثالثة (إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتين في مثلث آخر فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني) لتخفيف شروط التطابق لمثلثين.
ويحقق تطابق المثلثات خصائص الانعكاس والتماثل والتعدِّي.

3-4 إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS

ينشئ الطالب في هذا الدرس مثلثًا أضلاعه الثلاثة تطابق الأضلاع الثلاثة لمثلثٍ معلوم. ويوضح هذا النشاط مسلمة SSS التي تنص على أنه" إذا تطابقتْ أضلاع مثلث مع الأضلاع المناظرة لها في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متطابقان "وسوف يُنشئ أيضًا مثلثًا فيه ضلعان والزاوية المحصورة بينهما يطابقون ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في مثلث آخر. ويوضح هذا النشاط مسلّمة SAS التي تنصُّ على أنه «إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متطابقان».

3-5 إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS

يتضح صواب مسلّمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما، والتي تُكتب على الصورة ASA من كون قياس زاويتين وطول الضلع المحصور بينهما تشكل مثلثًا وحيدًا. وتنص هذه المسلّمة على أنه "إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلثٍ زاويتين والضلع المحصور بينهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان" وتنتج نظرية AAS عن مسلّمة ASA. وتنص هذه المسلّمة على أنه "إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث زاويتين وضلع غير محصور بينهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان". وللمثلثات القائمة نظرياتها الخاصة لإثبات تطابقها. ومن هذه النظريات نظرية تطابق الساقين LL وهي تكافئ مسلمة SAS المطبقة على المثلثات القائمة الزاوية، وتنصُّ هذه النظرية على أنه "إذا طابق ساقا مثلث قائم الزاوية ساقَي مثلث آخر قائم الزاوية، فإن المثلثين متطابقان" وتنصُّ نظرية تطابق وتر وزاوية حادة HA المشتقة من مسلّمة AAS على أنه "إذا طابق وتر مثلث قائم الزاوية وزاوية حادة فيه الوتر والزاوية الحادة المناظرة في مثلث آخر قائم الزاوية، فإن المثلثين متطابقان" وتنصُّ نظرية تطابق وتر وساق HL المشتقة من SSA الخاصة بالمثلثات القائمة الزاوية فقط على أنه "إذا طابق وتر وساق في مثلث قائم الزاوية الوتر والساق المناظرَين في مثلثٍ آخر قائم الزاوية فإن المثلثين متطابقان".

وتنصُّ نظرية تطابق ساق وزاوية حادة LA على أنه "إذا طابقت زاوية حادة وساق في مثلث قائم الساقَ المناظرة والزاوية الحادة المناظرة في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان".

3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

لعناصر المثلثات المتطابقة الضلعين تسمياتٌ خاصة؛ فالزاوية المحصورة بين الضلعين المتطابقين تُسمَّى زاوية الرأس، وتسمى الزاويتان اللتان تتكون كلٌّ منهما من القاعدة وأحد الضلعين المتطابقين زاويتَي القاعدة. وللمثلثات المتطابقة الضلعين خصائص تحددها نظرية المثلث المتطابق الضلعين وعكسها: إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين للضلعين المتطابقين متطابقتان.

وتقودنا هذه النظرية إلى نتيجتين مرتبطتين بزوايا المثلث المتطابق الأضلاع. وتنصُّ الأولى على أنه "يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا". وتنصُّ الثانية على أن "قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي 60°".

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي

يمكن استعمال المستوى الإحداثي والجبر في طريقة جديدة للبرهان تسمى البرهان الإحداثي، وتحتاج قبل الشروع في البرهان الإحداثي إلى رسم الشكل في المستوى الإحداثي. ومن المهم أن تستعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات ممكنةً وسهلةً. استعمل نقطة الأصل رأسًا أو مركزًا للشكل، وارسم ضلعًا واحدًا على الأقل منطبقًا على أحد محورَي الإحداثيات، وإن أمكن فاجعل الشكل كله في الربع الأول، واستعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

وعندما يتم رسم المثلث يمكنك المباشرة في البرهان، وغالبًا ما تحتاج إلى استعمال قوانين المسافة والميل ونقطة المنتصف في البراهين الإحداثية.

مشروع الفصل

تصنيف المثلثات

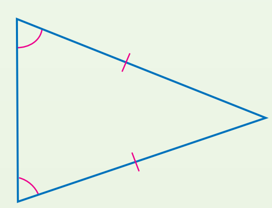
يستعمل الطلاب ما تعلموه عن المثلثات لتصنيف الكثير من أنواعها المختلفة المستعملة في الرياضة وأجهزة اللياقة البدنية.

- اطلب إلى الطلاب أن يجدوا أمثلة على استعمال المثلثات في الرياضة وأجهزة اللياقة البدنية مثل: هيكل الدراجة الهوائية، ومرمى كرة القدم، والطائرة الشراعية، وغيرها. وأن يحددوا أي أنواع المثلثات أكثر استعمالًا، والطريقة التي تستعمل فيها هذه الأشكال، والفائدة التي تحققها هذه التصاميم المثلثية.
- ثم اطلب إليهم نسخ أكبر عدد ممكن من الأمثلة، وتحديد الأشكال المثلثية المستعملة في التصاميم المختلفة على أوراق، ومناقشة طريقة استعمال المثلثات في كل من الأجهزة.
- وأخيرًا، اطلب إليهم تصنيف كل مثلث وفقاً لزواياه، وأضلاعه، وعرض ما توصل إليه على زملائه في الصف.

المفردات: قدم مفردات الفصل مستعملاً النمط الآتي :

التعريف: المثلث المتطابق الضلعين هو مثلث فيه ضلعان متطابقان على الأقل.

مثال :



سؤال: هل تعتقد أن الزاوية الثالثة هي دائمًا الزاوية الأصغر؟

إجابة ممكنة: لا، إذا كان مجموع قياسي الزاويتين المتطابقتين أقل من $90°$ ، فإن الزاوية الثالثة تكون منفرجة، وبذلك تكون الزاوية الثالثة هي الأكبر في المثلث.

الفصل 3

المثلثات المتطابقة
Congruent Triangles

فيما سبق:

درست القطع المستقيمة والزوايا والعلاقات بين قياساتها.

والآن:

- أطبق العلاقات الخاصة بالزوايا الداخلية والزوايا الخارجية للمثلثات.
- أحدد العناصر المتناظرة في مثلثات متطابقة، وأبرهن على تطابق المثلثات.
- أتعرف خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

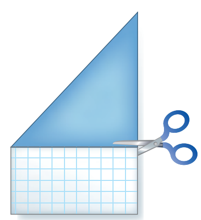
لماذا؟

لياقة: تستعمل المثلثات لتقوية إنشاءات ومعدات كثيرة، من بينها أجهزة اللياقة البدنية مثل هياكل الدراجات.

المطويات منظم أفكار

المثلثات المتطابقة: اعمل المطوية التالية لتنظيم ملاحظاتك حول المثلثات المتطابقة. ابدأ بثلاث أوراق رسم بياني وورقة مقواة من الحجم نفسه.

1 **ضع** أوراق الرسم البياني فوق الورقة المقواة، ثم اطو الأوراق لتشكل مثلثًا ، كما في الشكل، ثم قص الورق الزائد.



2 **ثبِّت** الحافة، بحيث تشكل الأوراق دفترًا، واكتب عنوان الفصل في الصفحة الأولى، ورقِّم كل درس وعنوانه في باقي الصفحات.

المطويات منظم أفكار

غرضها: يدوِّن الطلبة ملاحظاتهم حول المثلثات المتطابقة التي تمر معهم في هذا الفصل.

وظيفتها: اطلب إلى الطلبة تكوين مطوياتهم وعنونتها كما هو موضح. واطلب إليهم استعمال الجزء المناسب منها لكتابة المفردات الجديدة في ملاحظاتهم لكل درس، وشجعهم كذلك على توضيح المفردات عن طريق كتابة الأمثلة.

وقت استعمالها: شجع الطلبة أثناء دراستهم للفصل على إضافة معلومات إلى مطوياتهم لاستعمالها في المراجعة لاختبار الفصل.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (47)

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. والعبارة "إذا ... فقم"، في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 **ضمن المتوسط**

إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% أو أقل من الأسئلة،

فقم باختيار أحد المصادر الآتية:

- الدرس 2-2
- تدريبات المهارات، الفصل2، ص (13)
- www.obeikaneducation.com

المستوى 2 **دون المتوسط**

إذا أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،

فقم باختيار أحد المصدرين الآتيين:

- تدريبات إعادة التعليم، الفصل 2 ، ص (11, 12)
- www.obeikaneducation.com

التهيئة للفصل الثالث

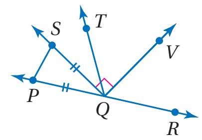
تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة الضرورية.

البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي، انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

(تستعمل مع الدرسين 1-3, 6-3)

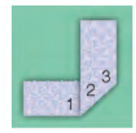
صنّف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادّة أو منفرجة، ثم صنّف ΔSQP بحسب أضلاعه.



1) $\angle VQS$ 2) $\angle TQV$

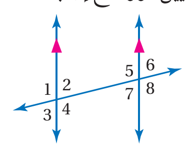
3) $\angle PQV$ 3–1) انظر الهامش

4) **تصاميم ورقية:** اطْوِ قطعة مستطيلة من الورق كما في الشكل المجاور، بحيث تتشكل زاوية قائمة من جهة الطي، ثم صنِّف كلًّا من الزوايا المرقمة إلى قائمة أو منفرجة أو حادّة. انظر الهامش



(تستعمل مع الدروس من 2-3 إلى 5-3)

جبْر: استعمل الشكل أدناه لإيجاد المتغيِّر المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين. ووضِّح إجابتك:



5) أوجد قيمة x إذا علمت أنّ: $m\angle 3 = (x - 12)^\circ$، وأنّ $m\angle 6 = 72^\circ$

6) أوجد قيمة y . إذا علمت أنّ $m\angle 4 = (2y + 32)^\circ$، وأنّ $m\angle 5 = (3y - 3)^\circ$. (5, 6) انظر الهامش

(يستعمل مع الدرسين 7-3, 4-3)

أوجد المسافة بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي: (7, 8) انظر الهامش.

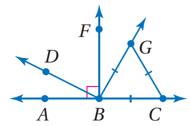
7) $X(-2, 5), Y(1, 11)$ 8) $R(8, 0), S(-9, 6)$

9) **خرائط:** قسَّمت منى خريطة المملكة برسم خطوط رأسية وأفقية، بحيث تمثل الوحدة عليها 35 كيلومترًا. إذا كان موقع المدينة التي تسكنها منى على الخريطة عند النقطة $(0, 0)$، وكانت مدينة نجران تقريبًا عند النقطة $(5, 2.2)$، فاحسب المسافة بين المدينتين إلى أقرب كيلومتر تقريبًا. 191 km تقريبًا

مراجعة سريعة

مثال 1

صنِّف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادّة أو منفرجة، ثم صنِّف ΔGBC بحسب أضلاعه.



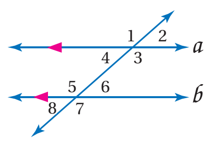
a) $\angle ABG$ تقع النقطة G خارج الزاوية القائمة $\angle ABF$؛ لذا تكون $\angle ABG$ زاوية منفرجة.

b) $\angle DBA$ تقع النقطة D داخل الزاوية القائمة $\angle FBA$؛ لذا تكون $\angle DBA$ زاوية حادة.

بما أن أطوال أضلاع المثلث جميعها متطابقة إذن هو متطابق الأضلاع.

مثال 2

في الشكل المجاور، إذا كان $m\angle 4 = 42^\circ$، فأوجد $m\angle 7$.



$\angle 7$ و $\angle 1$ زاويتان متبادلتان خارجيًّا؛ لذا فهما زاويتان متطابقتان.

$\angle 1$ و $\angle 4$ تشكّلان زاوية مستقيمة؛ لذا فهما زاويتان متكاملتان.

ينتج مما سبق أن $\angle 7$ و $\angle 4$ متكاملتان؛

إذن: $m\angle 7 = 180^\circ - 42^\circ$، أي 138°

مثال 3

أوجد المسافة بين النقطتين $J(5, 2), K(11, -7)$.

$$JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ صيغة المسافة بين نقطتين

$$= \sqrt{(11 - 5)^2 + [(-7) - 2]^2}$$ عوِّض

$$= \sqrt{6^2 + (-9)^2}$$ اطرح

$$= \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117}$$ بسِّط

البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع: www.obeikaneduction.com.

إجابات

1) قائمة

2) حادة

3) منفرجة
بما أن ΔSQP يحوي ضلعين متطابقين إذن هو متطابق الضلعين.

4) $\angle 1$ قائمة
$\angle 2$ حادة
$\angle 3$ منفرجة

5) 84°؛ لأن الزاويتين $\angle 6$، $\angle 3$ متبادلتان خارجيًّا.

6) 35°؛ لأن الزاويتين $\angle 5$، $\angle 4$ متبادلتان داخليًّا.

7) 6.7 تقريبًا

8) 18.0 تقريبًا

3-1 تصنيف المثلثات
Classifying triangles

فيما سبق:

درست قياس الزوايا وتصنيفها.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها أو زواياها في إيجاد قيم مجهولة.

المفردات:

المثلث الحاد الزوايا
acute triangle

المثلث المنفرج الزاوية
obtuse triangle

المثلث القائم الزاوية
right triangle

المثلث المتطابق الأضلاع
equilateral triangle

المثلث المتطابق الضلعين
isosceles triangle

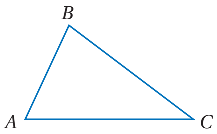
المثلث المختلف الأضلاع
scalene triangle

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يعدُّ المثلث عنصرًا زخرفيًّا مميزًا في العمارة التقليدية في المملكة العربية السعودية، كما يلاحظ ذلك في صالات المسافرين بمطار الملك خالد الدولي بمدينة الرياض.

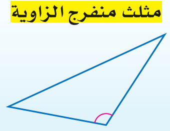
تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها: يكتب المثلث ABC على الصورة $\triangle ABC$، وتُسمى عناصره باستعمال الأحرف A, B, C كما يلي:



- أضلاع $\triangle ABC$ هي: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$
- الرؤوس هي: A, B, C
- الزوايا هي: $\angle A$ أو $\angle BAC$ ، $\angle C$ أو $\angle BCA$ ، $\angle B$ أو $\angle ABC$

وتُصنّف المثلثات بطريقتين: وفقًا لزواياها أو أضلاعها. وتحتوي جميع المثلثات على زاويتين حادتين على الأقل، وتُستعمل الزاوية الثالثة لتصنيف المثلث.

مفهوم أساسي — **تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها** — أضف إلى مطويتك

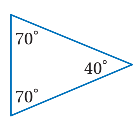
مثلث حاد الزوايا	مثلث منفرج الزاوية	مثلث قائم الزاوية
		
3 زوايا حادة	إحدى الزوايا منفرجة	إحدى الزوايا قائمة

يمكن تصنيف أي مثلث وفقًا لزواياه إلى أحد التصنيفات السابقة، بمعرفة قياسات زواياه.

مثال 1 **تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها**

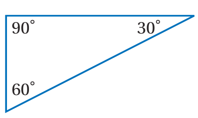
صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لزواياه:

a)



زوايا المثلث الثلاث حادّة؛ لذا فالمثلث حادُّ الزوايا.

b)



قياس إحدى زوايا هذا المثلث 90°، وبما أن إحدى زواياه قائمة، فإنه مثلث قائم الزاوية.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-1

قياس الزوايا وتصنيفها

الدرس 3-1

استعمال تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها أو أضلاعها في إيجاد قيم مجهولة.

ما بعد الدرس 3-1

استعمال تحويلات التطابق، للتوصل إلى تخمينات وتبرير خصائص الأشكال الهندسية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب ملاحظة المثلثين (الكبير والصغير) في فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- هل توجد زوايا مشتركة بين المثلثين المحدَّدَين (الصغير العلوي والكبير)؟ نعم
- ما عدد هذه الزوايا؟ 1
- هل زوايا هذه المثلثات قائمة أم منفرجة أم حادة؟ حادة

مصادر الدرس 3-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (147)	• تنويع التعليم، ص (147, 148, 151)	• تنويع التعليم، ص (147, 148, 151)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (20)	• كتاب التمارين، ص (20)	• كتاب التمارين، ص (20)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

مراجعة المفردات

الزاوية الحادة: زاوية يقل قياسها عن 90°

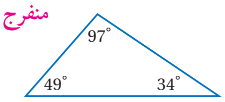
الزاوية القائمة: زاوية قياسها 90°

الزاوية المنفرجة: زاوية قياسها أكبر من 90°

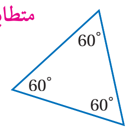
✓ تحقق من فهمك

صنِّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لزواياه:

1A) منفرج الزاوية

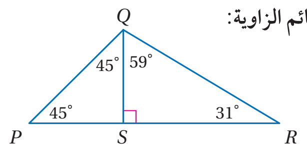


1B) متطابق الزوايا



مثال 2 تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقًا لزواياها

صنِّف $\triangle PQR$ إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



تقع النقطة S داخل $\angle PQR$، وحسب مسلّمة جمع قياسات الزوايا

يكون: $m\angle PQR = m\angle PQS + m\angle SQR$

بالتعويض: $m\angle PQR = 45° + 59° = 104°$

وبما أن إحدى زوايا $\triangle PQR$ منفرجة، فإنه منفرج الزاوية.

✓ تحقق من فهمك

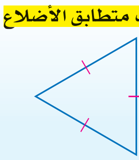
2) استعمل الشكل أعلاه لتصنيف $\triangle PQS$ إلى: حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية. **قائم الزاوية؛ الزاوية PSQ قائمة.**

تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها: يمكن كذلك تصنيف المثلثات بحسب عدد الأضلاع المتطابقة فيها. وللدلالة على تطابق ضلعين في مثلث، يوضع عدد متساوٍ من الشرطات الصغيرة على الضلعين المتطابقين.

مفهوم أساسي تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها

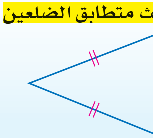
أضف إلى مطويتك

مثلث متطابق الأضلاع



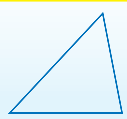
3 أضلاع متطابقة

مثلث متطابق الضلعين



ضلعان على الأقل متطابقان

مثلث مختلف الأضلاع



لا توجد أضلاع متطابقة

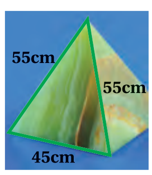
إن المثلث المتطابق الأضلاع حالة خاصة من المثلث المتطابق الضلعين.

الربط مع الحياة

في العديد من السيارات، تُشغَّل أضواء الخطر بالضغط على زرّ صغير قرب المقود. يكون شكل هذا الزر عادة مثلثًا أحمر أو برتقاليًا صغيرًا كما في الشكل أعلاه.

عندما يشغَّل هذا الزر تضيء أضواء إشارات الانعطاف بطريقة تحذيرية، وبنمط خاص يسهِّل رؤية السيارة من قبل السائقين الآخرين.

مثال 3 من واقع الحياة تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها



فن العمارة: صنِّف المثلث في الشكل المجاور وفقًا لأضلاعه.

في المثلث ضلعان قياس كلٍّ منهما 55 cm؛ أيْ أنّه في المثلث ضلعين متطابقين. فيكون المثلث متطابق الضلعين.

✓ تحقق من فهمك

3) **قيادة السيارة والسلامة:** صنِّف شكل زرِّ ضوءِ الخطر في الهامش يمين الصفحة وفقًا لأضلاعه. **متطابق الأضلاع**

تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها

المثالان 1, 2 يبيِّنان كيفية تصنيف المثلثات باستعمال قياسات الزوايا.

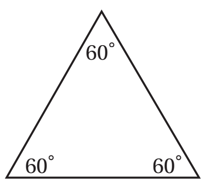
✓ التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثالان إضافيان

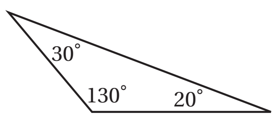
1 صنف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لزواياه.

a)



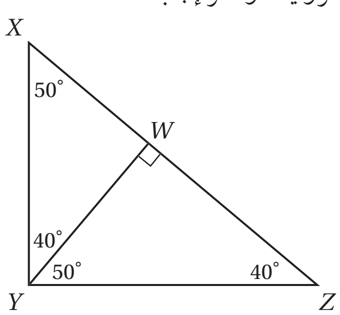
زوايا هذا المثلث الثلاث متطابقة، إذن هو مثلث متطابق الزوايا.

b)



قياس إحدى زوايا هذا المثلث 130°، إذن فهي زاوية منفرجة. ولذلك فهو مثلث منفرج الزاوية؛ لأن فيه زاوية منفرجة.

2 صنف $\triangle XYZ$ في الشكل أدناه وفقًا لزواياه. وفسِّر إجابتك.



تقع النقطة W في داخل $\angle XYZ$، لذلك وبحسب مسلمة جمع الزوايا فإن: $m\angle XYW + m\angle WYZ = m\angle XYZ$.

وبالتعويض ينتج أن: $m\angle XYZ = 40° + 50° = 90°$.

وبما أن إحدى زوايا $\triangle XYZ$ قائمة، إذن هو مثلث قائم الزاوية.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

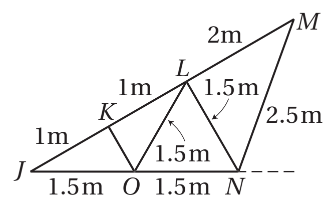
المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلاب أن يعملوا في مجموعات ثنائية أو ثلاثية؛ لاستكشاف تصنيف المثلثات. ثم اطلب إليهم أن يطرحوا أسئلة مثل: هل يمكن رسم مثلث متطابق الزوايا قياس إحدى زواياه 90°؟ هل يمكن أن ترسم مثلثًا قائم الزاوية فيه زاوية منفرجة؟ اعمل على إثراء النقاش، بحيث يكتشف الطلاب أي تصنيفات المثلث تكون متنافية وأيها غير متنافية.

تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها

الأمثلة 5-3 تبيِّن طريقة تصنيف المثلثات باستعمال عدد أضلاعها المتطابقة.

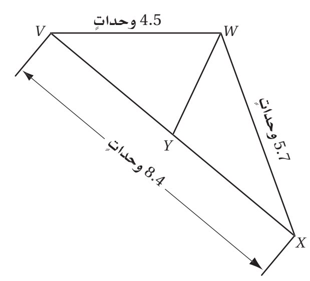
أمثلة إضافية

3 **هندسة العمارة** يمثل الشكل أدناه جزءًا من هيكل دعامة معدنية. صنف كلًّا من $\triangle JMN, \triangle OLN$ وفقًا لأضلاعه.



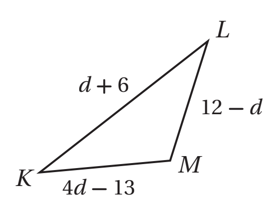
$\triangle JMN$ مختلف الأضلاع، $\triangle OLN$ متطابق الأضلاع.

4 إذا كانت Y نقطة منتصف $\overline{VX}$، وكان $\overline{WY}$ يساوي 3.0 وحدات، فصنِّف $\triangle VWY$ إلى متطابق الأضلاع، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع. فسِّر إجابتك.



مختلف الأضلاع؛ لأن أطوال أضلاعه الثلاثة مختلفة.

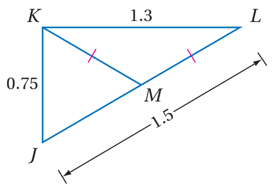
5 **جبرٌ** أوجد طول كل ضلع في المثلث أدناه إذا علمت أن $LM = KM$.



$d = 5$ ،$KM = LM = 7, KL = 11$

مثال 4 تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقًا لأضلاعها

إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{JL}$، فصنِّف $\triangle JKM$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضِّح إجابتك.



من تعريف نقطة المنتصف $JM = ML$.

$JM + ML = JL$	مسلمة جمع قياسات القطع المستقيمة
$ML + ML = 1.5$	عوِّض
$2ML = 1.5$	بسِّط
$ML = 0.75$	اقسم الطرفين على 2
$JM = ML = 0.75$	

وبما أن $\overline{KM} \cong \overline{ML}$، فإنّ $KM = ML = 0.75$

وهكذا تكون قياسات أضلاع المثلث الثلاثة متساوية، أي أن الأضلاع الثلاثة متطابقة؛ لذا فإن المثلث متطابق الأضلاع.

تحقق من فهمك

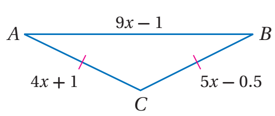
4) صنِّف $\triangle KML$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضِّح إجابتك.

متطابق الضلعين؛ $KM = ML$

يمكنك استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع والمتطابقة الضلعين؛ لإيجاد قيمٍ مجهولةٍ كما في المثال الآتي:

مثال 5 إيجاد قيم مجهولة

جبر: أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الضلعين ABC في الشكل المجاور.



الخطوة 1: أوجد قيمة x.

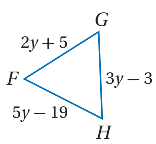
$AC = CB$	مُعطى
$4x + 1 = 5x - 0.5$	عوِّض
$1 = x - 0.5$	اطرح $4x$ من الطرفين
$1.5 = x$	اجمع 0.5 إلى الطرفين

الخطوة 2: عوِّض لإيجاد طول كل ضلع من أضلاع المثلث:

$AC = 4x + 1$	مُعطى
$= 4(1.5) + 1 = 7$	$x = 1.5$
$CB = AC$	مُعطى
$= 7$	$AC = 7$
$AB = 9x - 1$	مُعطى
$= 9(1.5) - 1$	$x = 1.5$
$= 12.5$	بسِّط

تحقق من فهمك

5) أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع FGH.



$y = 8, FG = GH = HF = 21$

إرشادات للدراسة

تحقّق للتحقق من الإجابة في المثال 5، اختبر ما إذا كانت $CB = AC$ عندما نعوِّض بـ 1.5 مكان x في العبارة $5x - 0.5$ التي تمثل CB.

$CB = 5x - 0.5$
$= 5(1.5) - 0.5$
$= 7$ ✓

تنويع التعليم

ضمن فوق

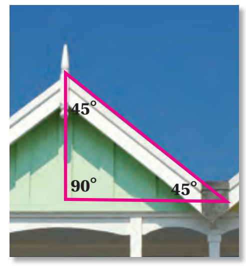
توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يرجعوا إلى صورة الزخارف المثلثية أعلى الصفحة 140 ويقارنوا المثلثات المتكوّنة منها. هل الأضلاع متطابقة؟ هل الزوايا متطابقة؟ هل المثلثات متطابقة؟ اطلب إليهم أن يكتبوا تخمينًا حول الأضلاع والزوايا المشتركة في المثلثين. الأضلاع المتناظرة غير متطابقة، وبالتالي المثلثات غير متطابقة.

تنبيه!

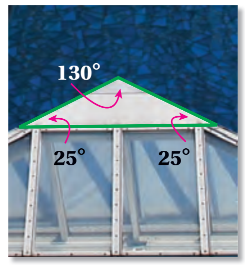
استمر: ذكِّر الطلاب في المثال 5 بأنه حتى تكون الإجابة كاملة، يجب أن يحسبوا أطوال أضلاع المثلث بعد إيجاد قيمة x، ويتم ذلك بتعويض قيمة x في العبارات الجبرية التي تمثل طول كل ضلع من أضلاع المثلث.

تأكد

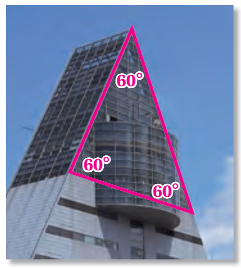
المثال 1 **فنّ العمارة:** صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه.

1) 

قائم الزاوية

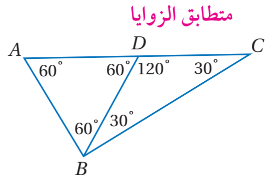
2) 

منفرج الزاوية

3) 

متطابق الزوايا

المثال 2 صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه.



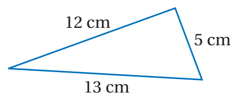
4) $\triangle ABD$ متطابق الزوايا؛ قياس كل زاوية فيه، يساوي $60°$.

5) $\triangle BDC$ منفرج الزاوية؛ $m\angle BDC > 90°$

6) $\triangle ABC$ قائم الزاوية؛ $m\angle ABC = 90°$

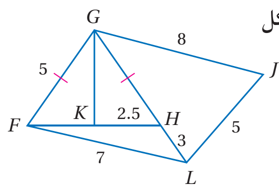
المثال 3 صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لأضلاعه.

7) 
متطابق الضلعين

8) 

مختلف الأضلاع

المثال 4 إذا كانت النقطة K هي منتصف $\overline{FH}$ ، فصنّف كلًّا من المثلثات الآتية في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

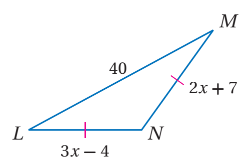


9) $\triangle FGH$ متطابق الأضلاع

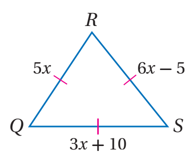
10) $\triangle GJL$ متطابق الضلعين

11) $\triangle FHL$ مختلف الأضلاع

المثال 5 **جبر:** أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في كلٍّ من المثلثين الآتيين:

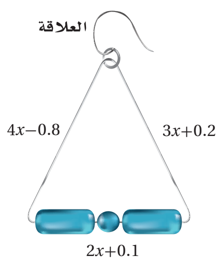
12) 

$x = 11,$
$LN = 29,$
$MN = 29$

13) 

$x = 5,$
$QR = RS = QS = 25$

14) **مجوهرات:** افترض أن لديك سلكًا مرنًا من الفولاذ غير قابل للصدأ، وتريد أن تُشكِّله لتعمل قرطًا. إذا كان الجزء المثلث من القرط متطابق الضلعين، وأبعاده كما في الصورة، وطول جزء العلاقة 1.5 cm، فكم سنتمترًا من السلك تحتاج لعمل القرط؟ برِّر إجابتك.



14) لمعرفة طول السلك الذي نحتاجه لعمل القرط، نجد أطوال أضلاع المثلث، بما أن المثلث متطابق الضلعين، إذن:

$4x - 0.8 = 3x + 0.2$

$4x - 3x = 0.2 + 0.8$

$x = 1$

إذن طول كلٍّ من الضلعين المتطابقين 3.2 cm وطول الضلع الثالث $2(1)+0.1=2.1$ ، لذلك نحتاج إلى $2.1+3.2+3.2+1.5=10$ cm لتشكيل قرطٍ واحدٍ.

إرشادات للمعلم الجديد

الحسّ الرياضي: ذكّر الطلاب بأن المثلث الحاد الزوايا، يجب أن تكون زواياه الثلاث حادة. لذلك فإن أي مثلث يحوي زاويةً واحدةً غير حادة، يجب أن يصنف إلى منفرج أو قائم الزاوية .

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–14 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

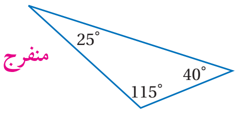
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	15–33، 44-46، 48-59
ضمن المتوسط	15–41 فردي، 43–45، 48-59
فوق المتوسط	34-55 ، (اختياري: 56-59)

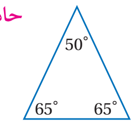
تدرب وحل المسائل

المثال 1 صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:

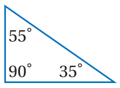
15) منفرج الزاوية



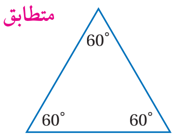
16) حاد الزوايا



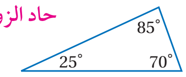
17) قائم الزاوية



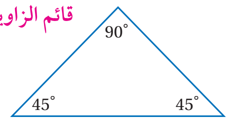
18) متطابق الزوايا



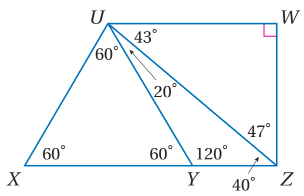
19) حاد الزوايا

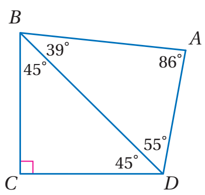


20) قائم الزاوية



المثال 2 صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:





21) $\triangle UYZ$ منفرج الزاوية

22) $\triangle BCD$ قائم الزاوية

23) $\triangle ADB$ حاد الزوايا

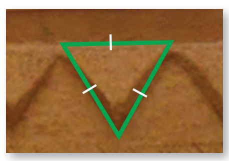
24) $\triangle UXZ$ حاد الزوايا

25) $\triangle UWZ$ قائم الزاوية

26) $\triangle UXY$ متطابق الزوايا

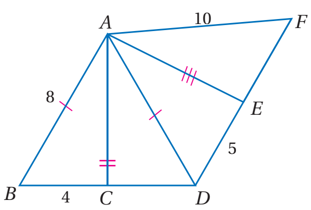
المثال 3 صنِّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لأضلاعه:

27) متطابق الأضلاع



28) مختلف الأضلاع

المثال 4 إذا كانت النقطة C هي منتصف $\overline{BD}$، والنقطة E منتصف $\overline{DF}$، فصنِّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعها:



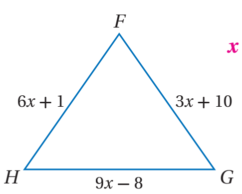
29) $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع

30) $\triangle ADF$ متطابق الضلعين

31) $\triangle ACD$ مختلف الأضلاع

32) $\triangle ABD$ متطابق الأضلاع

المثال 5 **33)** **جبر:** إذا علمت أن المثلث $\triangle FGH$ متطابق الأضلاع، فأوجد قيمة x وطول كل ضلع من أضلاعه. $x = 3; FG = GH = HF = 19$



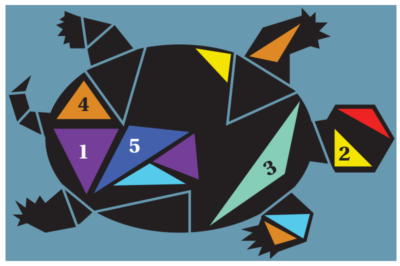
التعليم باستعمال التقنيات

نظام استجابات الطلاب:

استعمل برمجية نظام استجابات الطلاب لإعداد شرائح تعرض للطلاب سلسلة من المثلثات، واسألهم عن نوع المثلث الظاهر في الشريحة، وأن يصنِّفوا المثلثات وفقًا لزواياها أولًا، ثم وفقاً لأضلاعها، واتفق مع الطلاب على إشارات معينة أو رموز واختصارات معينة لتمييز كلِّ نوعٍ.

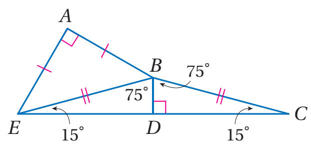
150 الفصل 3 المثلثات المتطابقة

34) **فنّ تشكيلي:** صنِّف كلًّا من المثلثات المرقمة في الشكل وفق زواياه ثم وفق أضلاعه. استعمل المثلث القائم الزاوية لتصنيف الزوايا، والمسطرة لقياس الأضلاع. انظر الهامش



صنِّف كلًّا من المثلثات الظاهرة في الشكل المجاور وفق زواياه، ثم وفق أضلاعه:

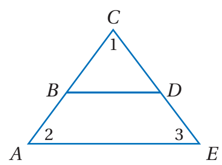
35) $\triangle ABE$ 36) $\triangle EBC$ 37) $\triangle BDC$



هندسة إحداثية: أوجد أطوال أضلاع $\triangle XYZ$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وصنِّفه وفق أضلاعه:

38) $X(-5, 9), Y(2, 1), Z(-8, 3)$ 39) $X(7, 6), Y(5, 1), Z(9, 1)$ 38, 39) انظر الهامش

40) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين تبين فيه أنّ $\triangle BCD$ متطابق الزوايا، إذا كان $\triangle ACE$ متطابق الزوايا، وكانت $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$. انظر ملحق الإجابات

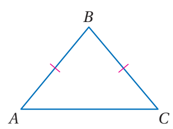


جبر: أوجد قيمة x وأطوال أضلاع المثلث في كلٍّ مما يأتي:

41) $\triangle FGH$ مثلث متطابق الأضلاع فيه: $FG = 3x - 10$, $GH = 2x + 5$, $HF = x + 20$.

42) $\triangle RST$ متطابق الأضلاع. ويزيد RS ثلاثة على أربعة أمثال x، ويزيد ST سبعة على مثلَي x، ويزيد TR واحدًا على خمسة أمثال x . $x = 2; RS = ST = TR = 11$

43) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين قياسَي الزاويتين اللتين تقابلان ضلعين متطابقين في مثلث، ومجموع زوايا المثلث المتطابق الضلعين.



a–d) انظر ملحق الإجابات

a) **هندسيًّا:** ارسم أربعة مثلثات متطابقة الضلعين، منها مثلث حادّ الزوايا ومثلث قائم الزاوية، ومثلث منفرج الزاوية. وفي كلٍّ من هذه المثلثات سمِّ الرأسَين المقابلين للضلعين المتطابقين A, C، وسمِّ الرأس الثالث B. ثم قس زوايا كل مثلث، واكتب على كل زاوية قياسها.

b) **جدوليًّا:** رتِّب قياسات الزوايا في جدول. وضمِّنه عمودًا تكتب فيه مجموع قياسات هذه الزوايا.

c) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين قياسَيْ الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين، ثم خمّن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين.

d) **جبريًّا:** إذا كان قياس إحدى الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين هو x ، فاكتب عبارتين جبريتين تمثّلان قياسَيْ الزاويتين الأخريين. وفسِّر إجابتك.

35) قائم الزاوية ومتطابق الضلعين.
36) منفرج الزاوية ومتطابق الضلعين.
37) قائم الزاوية ومختلف الأضلاع.

41) $x = 15; FG = 35,$ $GH = 35, HF = 35$

تمثيلات متعددة في السؤال 43، يستقصي الطلاب زوايا المثلث المتطابق الضلعين باستعمال الرسم، والجدول، والوصفين (اللفظي والجبري).

إجابات:

34) $\triangle 1$: حاد الزوايا متطابق الضلعين.

$\triangle 2$: قائم الزاوية متطابق الضلعين.

$\triangle 3$: منفرج الزاوية مختلف الأضلاع.

$\triangle 4$: حاد الزوايا متطابق الأضلاع.

$\triangle 5$: منفرج الزاوية مختلف الأضلاع.

38) مختلف الأضلاع؛ $XZ = 3\sqrt{5}, XY = \sqrt{113},$ $YZ = 2\sqrt{26}$

39) متطابق الضلعين؛ $XZ = \sqrt{29}, XY = \sqrt{29}, YZ = 4$

تنويع التعليم

ضمن فوق

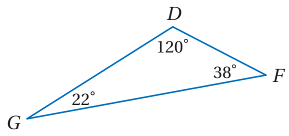
توسّع: ارسم مثلثًا أطوال أضلاعه 3 cm, 4 cm, 5 cm. ما نوع المثلث؟ قائم الزاوية

اختر أي عدد طبيعي k، وارسم مثلثًا آخر أطوال أضلاعه $3k$ cm, $4k$ cm, $5k$ cm. ما نوع المثلث؟ قائم الزاوية

مسائل مهارات التفكير العليا

44) ليلى، إجابة ممكنة: في أي مثلث توجد زاويتان حادتان على الأقل؛ لذا فبحسب كلام نوال فإن جميع المثلثات تُصنف على أنها حادة الزوايا، وهذا غير صحيح، حيث تُصنف المثلثات وفقًا للزاوية الثالثة فإذا كانت الزاوية الثالثة حادة، فالمثلث حاد الزوايا. وإذا كانت منفرجة، فالمثلث منفرج الزاوية.

44) اكتشف الخطأ: تقول ليلى: إن $\triangle DFG$ منفرج الزاوية، لكن نوال لا توافقها الرأي وتقول: إن عدد الزوايا الحادة في المثلث أكثر من عدد الزوايا المنفرجة؛ لذا فإن المثلث حادّ الزوايا. أيّتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.



تبرير: قرِّر ما إذا كانت الجملة في كلٍّ مما يأتي صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضح إجابتك. 45–48) انظر ملحق الإجابات

45) المثلث المتطابق الزوايا هو مثلث قائم الزاوية أيضًا.

46) المثلث المتطابق الأضلاع هو مثلث متطابق الضلعين أيضًا.

47) تحدٍّ: إذا كان طولا ضلعين من أضلاع مثلث متطابق الأضلاع $5x + 3$ وحدات، $7x - 5$ وحدات، فما محيطه؟ فسِّر إجابتك.

48) اكتب: فسِّر لماذا يُعد تصنيف المثلث المتطابق الزوايا أنه مثلث حاد متطابق الزوايا، تصنيفًا غير ضروري؟

تدريب على اختبار

49) جبر: اشترى خالد معجمًا من معرض الكتب بعد تخفيض نسبته 40% . إذا كان ثمنه قبل التخفيض 84.50 ريالًا، فكم ريالًا وفّر خالد؟ C

A 50.70 ريالًا C 33.80 ريالًا

B 44.50 ريالًا D 32.62 ريالًا

50) ما ميل المستقيم الذي معادلته $2x + y = 5$ ؟ D

A 2 C -1

B $\frac{5}{2}$ D -2

مراجعة تراكمية

أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 6-2)

51) $x = -2, x = 5$ 7

52) $y = x + 2, y = x - 4$ $3\sqrt{2}$

53) كرة قدم: رسم مصطفى الخطَّين الجانبيَّين لتخطيط ملعب كرة قدم، ووضع علامات على أحدهما، بحيث كانت المسافة بين أي علامتين متتابعتين 9 m، ثم أنشأ أعمدة عند هذه العلامات. فسِّر لماذا تكون هذه الأعمدة متوازية. (الدرس 3-2)
المستقيمان العموديان على مستقيم آخر متوازيان

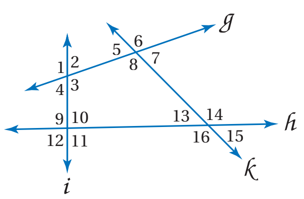
حدِّد الفرض والنتيجة في كل جملة شرطية فيما يأتي: (الدرس 3-1)

54) إذا كان الرجل كهلًا، فإن عمره 40 سنة على الأقل. الفرض: كون الرجل كهلًا. النتيجة: عمره 40 سنة على الأقل.

55) إذا كان $2x + 6 = 10$، فإن $x = 2$. الفرض: $2x + 6 = 10$. النتيجة: $x = 2$

استعد للدرس اللاحق

صنّف كل زوج من الزوايا مما يأتي إلى متبادلتين داخليًّا أو متبادلتين خارجيًّا أو متناظرتين أو متحالفتين:



56) $\angle 5$ و $\angle 3$ متبادلتان داخليًّا

57) $\angle 9$ و $\angle 4$ متحالفتان

58) $\angle 11$ و $\angle 13$ متبادلتان داخليًّا

59) $\angle 1$ و $\angle 11$ متبادلتان خارجيًّا

تنبيه!

أكتشف الخطأ: في السؤال 44 يجب أن يلاحظ الطلاب أن ليلى على صواب، وضح للطلاب أنه لا يمكن أن يحوي المثلث إلّا زاوية منفرجة واحدة، وكذلك سيكون في كل مثلث منفرج الزاوية زاويتان حادتان. وفي الحقيقة، فإن كل مثلث يحوي زاويتين حادتين على الأقل.

تنبيه لحل أسئلة

المنقلة والمسطرة: تتطلب الأسئلة 56-59 استعمال المنقلة والمسطرة .

4 التقويم

تعلُم لاحق: اطلب إلى الطلاب كتابة فقرة حول وصف زوايا أنواع مختلفة من المثلثات باستعمال الرموز > أو < أو = ، من خلال المعلومات التي تعلموها عن تصنيف المثلثات. فعلى سبيل المثال يكون في المثلث المنفرج الزاوية زاوية واحدة قياسها أكبر من 90 درجة.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 3

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) دون

الاسم ______ التاريخ ______

3-1 تدريبات إعادة التعليم

تصنيف المثلثات

تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها:

تصنّف المثلثات وفقًا لقياسات زواياها كما يأتي:

- إذا كانت زوايا المثلث الثلاث حادّة، سُمّي مثلثًا حادّ الزوايا.
- إذا كانت زوايا المثلث الثلاث متطابقة، سُمّي مثلثًا متطابق الزوايا.
- إذا كانت إحدى زوايا المثلث منفرجة، سُمّي مثلثًا منفرج الزاوية.
- إذا كانت إحدى زوايا المثلث قائمة، سُمّي مثلثًا قائم الزاوية.

مثال صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه.

a) زوايا هذا المثلث الثلاث متطابقة، وقياس كلّ زاوية منها يساوي 60°؛ لذا فهو مثلث متطابق الزوايا.

b) يوجد في هذا المثلث زاوية قياسها 120°؛ لذا فهو مثلث منفرج الزاوية.

c) يوجد في هذا المثلث زاوية قياسها 90°؛ لذا فهو مثلث قائم الزاوية.

تمارين

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:

1) قائم الزاوية 2) منفرج الزاوية 3) متطابق الزوايا

4) حادّ الزوايا 5) قائم الزاوية 6) منفرج الزاوية

الصف الأول الثانوي 6 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (7) دون

الاسم ______ التاريخ ______

3-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

تصنيف المثلثات

تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها:

تصنّف المثلثات وفقًا لعدد الأضلاع المتطابقة فيها، ويُشار عادة إلى الأضلاع المتطابقة في الرسوم، بوضع أعداد متساوية من الشرطات عليها.

- إذا كانت أضلاع المثلث الثلاثة متطابقة، سُمّي مثلثًا متطابق الأضلاع.
- إذا كان في المثلث ضلعان متطابقان على الأقل، سُمّي مثلثًا متطابق الضلعين. وبناءً عليه يكون المثلث المتطابق الأضلاع مثلثًا متطابق الضلعين أيضًا.
- إذا لم يوجد في المثلث ضلعان متطابقان، سُمّي مثلثًا مختلف الأضلاع.

مثال 1 صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعه.

a) يوجد في هذا المثلث ضلعان متطابقان؛ لذا فهو متطابق الضلعين.

b) أضلاع هذا المثلث الثلاثة متطابقة؛ لذا فهو متطابق الأضلاع.

c) لا يوجد في هذا المثلث أي ضلعين متطابقين؛ لذا فهو مختلف الأضلاع.

مثال 2 أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلث ABC.

الخطوة 1: أوجد قيمة x وذلك بمساواة طولَي الضلعين.

$2x + 4 = x + 5$ معطى

$x + 4 = 5$ اطرح x من الطرفين

$x = 1$ اطرح 4 من الطرفين

الخطوة 2: عوّض عن قيمة x بأحد الطولين.

$2x + 4 = 2(1) + 4 = 6$

إذن طول كلٍّ من الضلعين 6

تمارين

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعه:

1) مختلف الأضلاع 2) متطابق الأضلاع 3) متطابق الضلعين 4) متطابق الضلعين

5) جبر: أوجد قيمة x، وطول كلّ ضلع من أضلاع $\triangle RST$ المتطابق الأضلاع. 2; 6

6) جبر: أوجد قيمة y، وطول كلّ ضلع من أضلاع المثلث المتطابق الضلعين $\triangle ABC$، علمًا بأن $AB = BC$. 2; AB = 8; BC = 8, AC = 6

7) هندسة إحداثية: أوجد أطوال أضلاع $\triangle ABC$ الذي رؤوسه: $A(-1,5)$, $B(6,1)$, $C(2,-6)$، ثم صنّفه وفقًا لأضلاعه. بما أن: $AB = BC = \sqrt{65}$, $AC = \sqrt{130}$؛ إذن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين.

الصف الأول الثانوي 7 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

تدريبات المهارات (8) دون ضمن

الاسم ______ التاريخ ______

3-1 تدريبات المهارات

تصنيف المثلثات

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:

1) متطابق الزوايا 2) منفرج الزاوية 3) قائم الزاوية

4) حادّ الزوايا 5) منفرج الزاوية 6) حادّ الزوايا

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعه:

7) $\triangle ABE$ مختلف الأضلاع. 8) $\triangle EDB$ متطابق الضلعين.

9) $\triangle EBC$ مختلف الأضلاع. 10) $\triangle DBC$ متطابق الضلعين.

11) جبر: أوجد قيمة x، وطول كلّ ضلع من أضلاع المثلث المتطابق الضلعين $\triangle ABC$، علمًا بأن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$.

x = 4; AB = BC = 13; AC = 6

12) جبر: أوجد قيمة x، وطول كلّ ضلع من أضلاع $\triangle FGH$ المتطابق الأضلاع.

x = 9; FG = GH = FH = 37

13) جبر: أوجد قيمة x، وطول كلّ ضلع من أضلاع $\triangle RST$ المتطابق الضلعين، إذا كان $\overline{RS} \cong \overline{TS}$.

x = 2; RS = ST = 20; RT = 5

14) هندسة إحداثية: أوجد أطوال أضلاع $\triangle ABC$ الذي رؤوسه: $A(0,3)$، $B(-4,0)$، $C(2,2)$، ثم صنّفه وفقًا لأضلاعه.

$AB = 5$، $BC = 2\sqrt{10}$، $AC = \sqrt{5}$، مختلف الأضلاع.

الصف الأول الثانوي 8 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

تدريبات حل المسألة (9) دون ضمن فوق

الاسم ______ التاريخ ______

3-1 تدريبات حل المسألة

تصنيف المثلثات

1) ورق: قصّ سلطان ورقة مستطيلة نصفين على طول قُطرها. ينتج عن ذلك مثلثان. صنّف كلًّا من المثلثين وفقًا لزواياهما.

قائما الزاوية

2) رياضة مائية: يتزلّج إبراهيم ونايف على المياه، وهما يُمسكان بحبلين لهما الطول نفسه، ومربوطين في قارب سريع كما في الشكل أدناه.

يُبحر القارب بأقصى سرعة والحبلان مشدودان، ويشكّل إبراهيم ونايف والنقطة التي رُبط عندها الحبلان في القارب رؤوس مثلث. إذا لم تكن المسافة بين إبراهيم ونايف مساوية لطول أيٍّ من الحبلين، فصنّف ذلك المثلث وفقًا لأضلاعه.

متطابق الضلعين

3) دعامات الكتب: تشكّل كلٌّ من دعامتَي الكتب أدناه مثلثًا قائم الزاوية.

طول ضلع قاعدة كلّ مثلث منها يساوي نصف طول الوتر في المثلث. إذا أُبعدت الكتب الموضوعة بين الدعامتين جميعها، وقُرّبت الدعامتان إحداهما إلى الأخرى، فإنهما تشكّلان مثلثًا واحدًا. صنّف هذا المثلث وفقًا لأضلاعه.

متطابق الأضلاع

4) ديكور: يريد مهندس ديكور استعمال المخروط المُبيّن في الشكل أدناه، فإذا قام بقصّه طوليًّا من الرأس، فما نوع المثلث الذي يظهر؟

متطابق الضلعين

5) تصاميم: شاهد خالد النمط أدناه على بلاطة خماسيّة، وقد لاحظ وجود أنواع كثيرة ومختلفة من المثلثات التي شكّلتها المستقيمات المرسومة على البلاطة.

a) عيّن خمسة مثلثات حادّة الزوايا ومتطابقة الضلعين.

إجابة ممكنة: $\triangle EBD, \triangle CAE, \triangle ADC, \triangle BGH, \triangle CHI$

b) عيّن خمسة مثلثات منفرجة الزاوية ومتطابقة الضلعين.

إجابة ممكنة: $\triangle AFE, \triangle EJD, \triangle CID, \triangle BHC, \triangle BGA$

الصف الأول الثانوي 9 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 3

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10) ضمن فوق

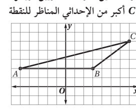
الاسم ________ التاريخ ________

3-1 التدريبات الإثرائيّة

قراءة الرياضيّات

عندما تقرأ الهندسة، قد تحتاج أن ترسم شكلًا توضيحيًّا ليسهل عليك فهم النص.

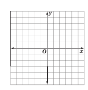
مثال **عيّن النقاط A, B, C في المستوى الإحداثي، على أن يكون إحداثيًّا y للنقطتين A و B متساويين، ويكون الإحداثي x للنقطة B أكبر من الإحداثي x للنقطة A، وأن يكون كلٌّ من إحداثيّي النقطة C أكبر من الإحداثي المناظر للنقطة B. صنِّف ΔABC وفقًا لزواياه؟**



للإجابة عن هذا السؤال، لا بدّ من رسم شكل يحقّق المعطيات.
ويتعيّن أن يكون الضلع $\overline{AB}$ أفقيًّا؛ لأن الإحداثيّ y لكلٍّ من النقطتين A, B هو نفسه،
ويجب أن تعيّن النقطة B عن يمين النقطة A، وأن تعيّن
النقطة C عن يمين B وإلى أعلى.
تلاحظ من الشكل أن ΔABC منفرج الزاوية.

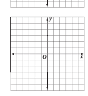
تمارين

عيّن على الشبكة؛ لمساعدتك على حلّ كلٍّ من الأسئلة الآتية:



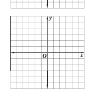
1) ثلاث نقاطٍ R, S, T في المستوى الإحداثي، على أن يكون إحداثيّا x للنقطتين R , S متساويين، ويقع الإحداثي y للنقطة T بين إحداثيَّيْ y للنقطتين R , S ، على أن يقل الإحداثي x للنقطة T عن الإحداثيّ x للنقطة R. صنِّف ΔRST وفقًا لزواياه.

حاد الزوايا



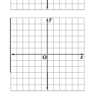
2) ثلاث نقاطٍ ليست على استقامةٍ واحدةٍ في المستوى الإحداثيّ وسمّها J, K, L، على أن يكون إحداثيّا y للنقطتين J , K متساويين، ويكون إحداثيّا x للنقطتين K , L متساويين. صنِّف ΔJKL وفقًا لزواياه.

قائم الزاوية



3) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة في المستوى الإحداثي وسمّها D, E, F، على أن يكون إحداثيّا x للنقطتين D , E متساويين ومختلفي الإشارة، ويكون إحداثيّا y للنقطتين D , E متساويين، والإحداثيّ x للنقطة F يساوي 0. صنِّف ΔDEF وفقًا لأضلاعه.

متطابق الضلعين



4) النقاط G, H, I في المستوى الإحداثي، على أن تقع النقطتان G , H على المحور y الموجب، ويكون الإحداثيّ y للنقطة G مِثْلَي الإحداثيّ y للنقطة H. إذا وقعت I على المحور x الموجب، وكان الإحداثيّ x للنقطة I أكبر من الإحداثيّ y للنقطة G، فصنِّف ΔGHI وفقًا لأضلاعه.

مختلف الأضلاع

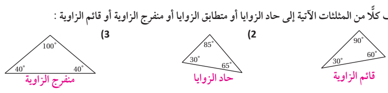
الصف: الأول الثانوي | 10 | الفصل 3: المثلثات المتطابقة

كتاب التمارين (20) دون ضمن فوق

الفصل الثالث: المثلثات المتطابقة

3 - 1 تصنيف المثلثات

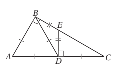
صنّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية :



1) قائم الزاوية
2) حاد الزوايا
3) منفرج الزاوية

الفصل الثالث
المثلثات المتطابقة

صنّف كلًّا من المثلثات الظاهرة في الشكل المجاور وفقًا لزواياها ولأضلاعها :



4) $\triangle ABD$
متطابق الزوايا ، ومتطابق الأضلاع

5) $\triangle ABC$
قائم الزاوية ، ومختلف الأضلاع

6) $\triangle EDC$
قائم الزاوية ، ومختلف الأضلاع

7) $\triangle BDC$
منفرج الزاوية ، ومتطابق الضلعين

جبر: في كلٍّ من المثلثين الآتيين، أوجد قيمة x وطول كل ضلع:

8) $\triangle FGH$ متطابق الأضلاع، فيه: $FG = x + 5, GH = 3x - 9, FH = 2x - 2$
$x = 7; FG = 12, GH = 12, FH = 12$

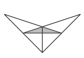
9) $\triangle LMN$ متطابق الضلعين، فيه: $LM = LN, LM = 3x - 2, LN = 2x + 1, MN = 5x - 2$
$x = 3; LM = 7, LN = 7, MN = 13$

أوجد أطوال أضلاع $\triangle KPL$ في كلٍّ مما يأتي، وصنّفه وفقًا لأضلاعه:

10) $K(-3, 2), P(2, 1), L(-2, -3)$
$KP = \sqrt{26}, PL = 4\sqrt{2}, LK = \sqrt{26}$ ، متطابق الضلعين

11) $K(5, -3), P(3, 4), L(-1, 1)$
$KP = \sqrt{53}, PL = 5, LK = 2\sqrt{13}$ ، مختلف الأضلاع

12) $K(-2, -6), P(-4, 0), L(3, -1)$
$KP = 2\sqrt{10}, PL = 5\sqrt{2}, LK = 5\sqrt{2}$ ، متطابق الضلعين



13) **تصميم:** شارك عبدالله في مسابقةٍ لتصميم شعارٍ لجمعية الحفاظ على الحياة البرية فقدّم الشعار المجاور. حدد عدد الزوايا القائمة فيه باستعمال المنقلة . 5

20

زوايا المثلثات
Angles of Triangles

ستجد علاقات خاصة بين زوايا المثلث في هذا المعمل.

النشاط 1 الزوايا الداخلية للمثلث

الخطوة 1:

ارسم عدة مثلثات مختلفة ثم قصّها، وسمِّ رؤوس كل مثلث A, B, C.

الخطوة 2:

اطوِ الرأس B في كل مثلث، على أن يكون خطُّ الطيّ موازيًا لـ AC. وأعِد تسمية الرأس B على الورقة بعد طيّها.

الخطوة 3:

اطوِ الرأسين A, C حتى يلتقيا مع الرأس B. أعدْ تسمية الرأسين A, C بعد الطيّ.

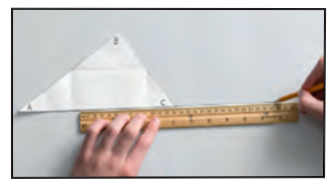
حلِّل النتائج:

1) الزوايا A, B, C تُسمى زوايا داخلية في المثلث ABC. ما اسم الشكل الهندسي الناتج بعد التقاء الرؤوس A, B, C في الخطوة 3؟ زاوية مستقيمة أو خط مستقيم

2) خمِّن مجموع قياسات الزوايا الداخلية في المثلث. $180°$

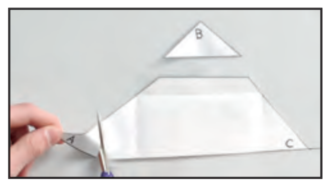
النشاط 2 الزوايا الخارجية للمثلث

الخطوة 1:



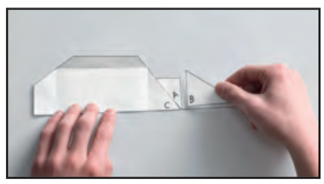
ابسط المثلثات التي استعملتها في النشاط 1، وضع كل مثلث على ورقة منفصلة. مُدّ $\overline{AC}$ كما في الشكل.

الخطوة 2:



افصل الزاويتين $\angle A$, $\angle B$ في كل مثلث.

الخطوة 3:



ضع $\angle A$, $\angle B$ على أن تشكّلا الزاوية المجاورة لـ $\angle C$ كما في الشكل.

حلِّل النتائج:

3) الزاوية المجاورة لـ $\angle C$ تُسمّى زاوية خارجية للمثلث ABC. خمِّن العلاقة بين الزاويتين $\angle B$, $\angle A$ من جهة، والزاوية الخارجية عند C. $m\angle A + m\angle B$ يساوي قياس الزاوية الخارجية المجاورة لـ $\angle C$

4) كرّر خطوات النشاط 2 بالنسبة للزاويتين الخارجيتين عند $\angle B$, $\angle A$ في كل مثلث. انظر إجابات الطلاب

5) خمِّن العلاقة بين قياس الزاوية الخارجية ومجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين عدا المجاورة لها. انظر الهامش

استكشاف 3-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف

يجد العلاقة بين قياسات الزوايا الداخلية للمثلث.

المواد اللازمة

- مقص
- مسطرة

إرشادات للتدريس

عند تنفيذ النشاط 1 لأول مرة، اطلب إلى الطلاب تسمية الزاوية المنفرجة بالحرف B. ويجب إعادة النشاط 1 باستعمال مثلث حاد الزوايا، ومثلث قائم الزاوية، ومثلث متطابق الأضلاع؛ لتأكيد صحة المفاهيم.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزِّع الطلبة مجموعات ثلاثية أو رباعية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إليهم تنفيذ النشاط 1 وحل التمرينين 1, 2 .

واسأل:

- ما الشيء المشترك بين جميع المثلثات؟ لها جميعًا ثلاثة أضلاع وثلاثة رؤوس.
- عند تغيُّر المثلث من حاد الزوايا إلى منفرج الزاوية كيف يؤثر ذلك في قياسات الزاويتين الأخريين؟ يقل قياسا الزاويتين الأخريين.
- عند تغيُّر قياسات الزوايا، ما الشيء الذي يبقى ثابتًا دون تغيير؟ مجموع قياسات الزوايا.

تدريب: اطلب إلى الطلاب تنفيذ النشاط 2 وحل الأسئلة 5-3 .

إجابة:

5) قياس الزاوية الخارجية يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها.

من المحسوس إلى المجرد

يمكن أن يستقصي الطلبة أيضًا، ويكوِّنوا تخمينات حول العلاقات بين أطوال أضلاع وقياسات زوايا المثلث الصغير المتكون عند طي $\angle B$ في النشاط 1 إلى أسفل، يجب أن يلاحظ الطلبة أنه بالرغم من أن أطوال الأضلاع في المثلثين غير متساوية، إلَّا أن الزوايا المتناظرة في المثلثين متطابقة.

3 التقويم

التقويم التكويني

في الأسئلة 5-1، يحدِّد الطلبة قياسات الزوايا المُستعملة في هذا النشاط، ويكتشفون علاقات ويتوصلون إلى تخمينات تقودهم إلى نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث ونظرية الزاوية الخارجية.

3-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-2

تصنيف المثلثات وفقًا لأطوال أضلاعها وفقًا لقياسات زواياها.

الدرس 3-2

تطبيق نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث، ونظرية الزاوية الخارجية.

ما بعد الدرس 3-2

إثبات تطابق مثلثين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- فضلًا عن زوايا الدوران، ما القياسات الأخرى التي يجب أن تتم برمجتها حتى يتحرك الروبوت الآلي في مسار مثلثيّ الشكل؟ المسافة التي سيتحركها الروبوت الآلي لتكوين كل ضلع من أضلاع المثلث.
- بما أن زوايا الدوران المبيَّنة في الشكل كلها حادة، فهل يجب أن تكون زوايا الدوران حادة دائمًا؟ لا؛ يمكن أن تكون زاوية الدوران منفرجة أو قائمة.
- ورد في النص أن مجموع قياسات زوايا الدوران عند نقط الارتكاز الثلاث يبقى ثابتًا دائمًا، ما ذلك المجموع؟ مجموع قياسات تلك الزوايا °180؛ لأن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث °180

3-2 زوايا المثلثات
Angles of Trangles

فيما سبق:

درست تصنيف المثلثات وفقًا لقياسات أضلاعها وزواياها.

(الدرس 3-1)

والآن:

- أطبق نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.
- أطبق نظرية الزاوية الخارجية للمثلث.

المفردات:

المستقيم المساعد
auxiliary line

الزاوية الخارجية
exterior angle

الزاويتان الداخليتان البعيدتان
remote interior angles

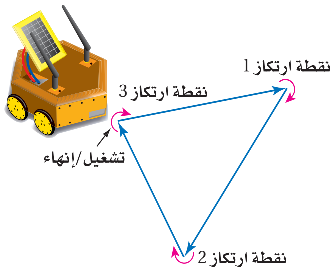
البرهان التسلسلي
flow proof

النتيجة
corollary

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يرعى أحد معاهد التقنية مسابقة سنوية، حيث يصمِّم الطلاب روبوتًا آليًّا يؤدّي مهامّ مختلفة. وقد تمَّت برمجة هذا الروبوت الآلي في أحد الاختبارات ليتحرك في مسار على شكل مثلث. على أن يكون مجموع قياسات الزوايا التي ينعطف فيها الروبوت الآلي عند نقاط الارتكاز الثلاث ثابتًا دائمًا.

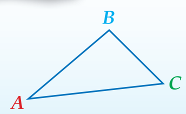


نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث: تُعبِّر نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث عن العلاقة بين الزوايا الداخلية لأيّ مثلث.

نظرية 3.1 نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث — أضف إلى مطويتك

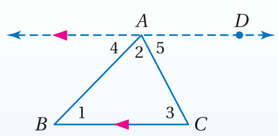
التعبير اللفظي: مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي °180

مثال: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$



يتطلب برهان نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث استعمال مستقيم مساعِد، والمستقيم المساعد هو مستقيم إضافي (أو قطعة مستقيمة إضافية) يتم رسمه للمساعدة على تحليل العلاقات الهندسية، وكما تُبرر العبارات والاستنتاجات المُستعملة في البرهان، فإن خصائص المستقيم المساعِد يجب تبريرها.

برهان نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث



المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$

البرهان: من النقطة A ارسم المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$ موازيًا لـ $\overline{BC}$.

العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC$	1) مُعطى
2) $\angle 4, \angle BAD$ زاويتان متجاورتان على مستقيم.	2) تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
3) $\angle 4, \angle BAD$ متكاملتان.	3) الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان
4) $m\angle 4 + m\angle BAD = 180^\circ$	4) تعريف الزاويتين المتكاملتين
5) $m\angle BAD = m\angle 2 + m\angle 5$	5) مسلّمة جمع قياسات الزوايا
6) $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180^\circ$	6) بالتعويض
7) $\angle 4 \cong \angle 1, \angle 5 \cong \angle 3$	7) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
8) $m\angle 4 = m\angle 1, m\angle 5 = m\angle 3$	8) تعريف تطابُق الزوايا
9) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$	9) بالتعويض

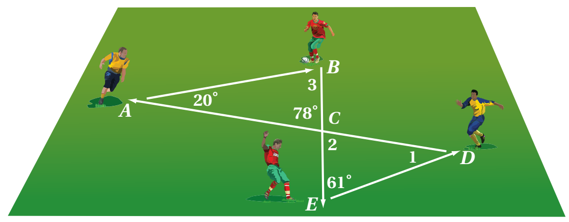
مصادر الدرس 3-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (156)	• تنويع التعليم، ص (156, 160)	• تنويع التعليم، ص (160)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (21)	• كتاب التمارين، ص (21)	• كتاب التمارين، ص (21)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

يمكن استعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث لإيجاد الزاوية الثالثة في المثلث إذا عُلم قياسا زاويتيه الأُخريين.

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال نظرية مجموع زوايا المثلث

كرة قدم: يبيِّن الشكل مسار الكرة في تدريب على تمريراتٍ نفَّذها أربعة لاعبين. أوجد قياسات الزوايا المرقمة.



افهم: **المعطيات:** في الشكل أعلاه، قياس الزاويتين A, C في المثلث ABC $20°, 78°$، قياس الزاوية E في المثلث CED يساوي $61°$
المطلوب: إيجاد قياسات الزوايا المرقمة.

خطط: أوجد $m\angle 3$ باستعمال نظرية مجموع زوايا المثلث مستعملًا قياسَيْ الزاويتين الأُخريين في $\triangle ABC$. ثم استعمل نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس لإيجاد $m\angle 2$، وعندها يمكنك إيجاد $m\angle 1$ في $\triangle CDE$

حُلّ:

$m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 3 + 20° + 78° = 180°$ عوّض

$m\angle 3 + 98° = 180°$ بسّط

$m\angle 3 = 82°$ اطرح 98 من الطرفين

$\angle 2, \angle ACB$ متطابقتان؛ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس؛ لذا فإن $m\angle 2 = 78°$.

استعمل $m\angle 2$ و $m\angle CED$ في $\triangle CDE$ لإيجاد $m\angle 1$.

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 1 + 78° + 61° = 180°$ عوّض

$m\angle 1 + 139° = 180°$ بسّط

$m\angle 1 = 41°$ اطرح 139 من الطرفين

تحقّق: يجب أن يكون مجموع قياسات زوايا كلٍّ من $\triangle ABC, \triangle CDE$ مساويًا لـ $180°$

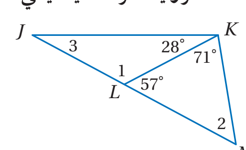
$\triangle ABC: \ m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 82° + 20° + 78° = 180°$ ✓

$\triangle CDE: \ m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 41° + 78° + 61° = 180°$ ✓

✓ تحقق من فهمك

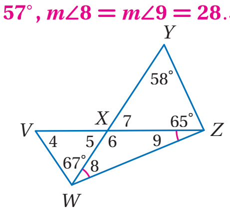
أوجد قياسات الزوايا المرقّمة فيما يأتي:

(1A



$m\angle 1 = 123°, m\angle 2 = 52°, m\angle 3 = 29°$

(1B



(1B $m\angle 4 = 56°, m\angle 5 = 57°, m\angle 6 = 123°,$ $m\angle 7 = 57°, m\angle 8 = m\angle 9 = 28.5°$

الربط مع الحياة

يدمج تمرين "مرِّر وتحرَّك" في لعبة كرة القدم بين عدة مظاهر أساسية لعملية التمرير، حيث تكون جميع التمريرات في التدريب على شكل مثلثات، وهذا هو الأساس في جميع حركات الكرة، وبالإضافة إلى ذلك، على اللاعب أن يتحرك فورًا بعد تمريره الكرة.

إرشادات للدراسة

تجزئة المسألة
تُجزأ المسائل المركبة إلى مسائل يمكن التعامل مع كلٍّ منها بسهولة؛ مما يساعد على حلّها. فمثلًا في المثال 1: عليك أن تجد $m\angle 2$ أولًا قبل أن تحاول إيجاد $m\angle 1$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

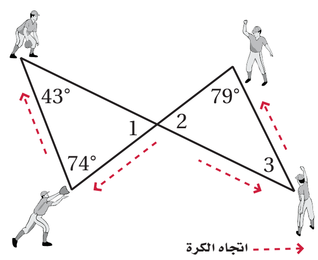
المثال 1 يبيّن كيفية إيجاد قياس زاوية مجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث ونظريات سابقة.

✓ التقويم التكويني

استعمل أسئلة "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

1 **لعبة البيسبول:** يبين الشكل الآتي مسار كرةٍ في تدريب على التمريرات بين أربعة لاعبين. أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقمة في الشكل.



$m\angle 1 = 63, m\angle 2 = 63,$ $m\angle 3 = 38$

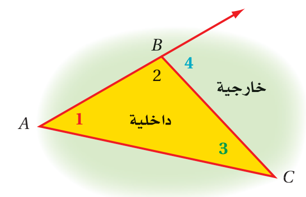
المحتوى الرياضي

المعرفة السابقة: لقد استعمل الطلاب في الفصل 2 العلاقات بين الزوايا لإيجاد قياسات زوايا. وفي هذا الدرس سيطبقون معرفتهم بالزوايا المتقابلة بالرأس، والزوايا المتتامة، والزوايا المتكاملة، جنبًا إلى جنبٍ مع نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث، ونظرية الزاوية الخارجية للمثلث؛ لإيجاد قياسات زوايا في الأشكال.

التعليم باستعمال التقنيات

جهاز العرض: استعمل برمجية هندسية لرسم عدة مثلثات. ثم أوجد قياسات زوايا هذه المثلثات، ورتِّبها في جدول لتوضيح العلاقات فيما بينها.

نظرية الزاوية الخارجية للمثلث: بالإضافة إلى الزوايا الداخلية الثلاث، يمكن أن يكون للمثلث **زوايا خارجية** كلٌّ منها تتشكل من أحد أضلاع المثلث وامتداد ضلع مجاور له. ولكل زاوية خارجية **زاويتان داخليتان بعيدتان** غير مجاورتين لها.



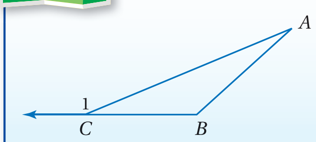
$\angle 4$ زاوية خارجية لِـ $\triangle ABC$، وزاويتاها الداخليتان البعيدتان هما $\angle 3$ ، $\angle 1$.

نظرية 3.2 نظرية الزاوية الخارجية

أضف إلى مطويتك

قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مثال: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$

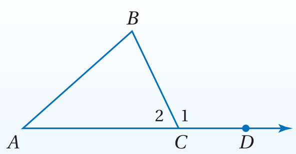


في **البرهان التسلسلي** تُستعمل عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبيِّن التسلسل المنطقي لهذه العبارات. ويُكتب أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرِّر العبارة المكتوبة داخله، ويمكنك برهنة نظرية الزاوية الخارجية باستعمال البرهان التسلسليِّ كما يأتي.

البرهان نظرية الزاوية الخارجية

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



برهان تسلسلي:

$\triangle ABC$
معطى
↓
$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = 180$
نظرية مجموع زوايا المثلث

$\angle 1, \angle 2$ زاويتان متجاورتان على مستقيم
تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
↓
$\angle 1, \angle 2$ متكاملتان
الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان
↓
$m\angle 1 + m\angle 2 = 180$
تعريف الزاويتين المتكاملتين

↓
$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 2$
بالتعويض
↓
$m\angle A + m\angle B = m\angle 1$
بالطرح

قراءة الرياضيات

البرهان بالمخطط التسلسلي
يُسمَى البرهان التسلسلي أحيانًا البرهان بالمخطط التسلسلي.

إرشادات للدراسة

البرهان التسلسلي
يمكن أن يكتب البرهان التسلسليّ بصورة رأسيّة أو أفقيّة.

إرشادات للمعلم الجديد

الزاوية الخارجية: اطلب إلى الطلاب اكتشاف النظرية 3.2، من خلال تزويدهم بأمثلة متعددة، ثم اطلب إليهم إيجاد قياس الزاوية الخارجية بمعلومية قياس كلٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

تنبيه!

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
عند إيجاد قياسات زوايا مجهولة في المثلث، تحقق من صحة الحل بالتحقق من أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي °180

تنويع التعليم

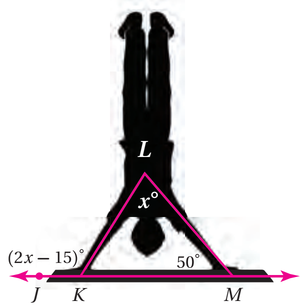
دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون: بيِّن للطلاب أنه إذا قمت بقصِّ زاويتَي المثلث البعيدتين عن زاوية خارجية ووضعهما جنبًا إلى جنبٍ فوق الزاوية الخارجية، فإنهما ستنطبقان عليها، وبذلك تتضح نظرية الزاوية الخارجية في المثلث.

يمكن إيجاد قياسات الزوايا المجهولة باستعمال نظرية الزاوية الخارجية.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال نظرية الزاوية الخارجية

اللياقة البدنية: أوجد قياس $\angle JKL$ في الوضع الذي يظهر فيه المتدرب في الصورة.

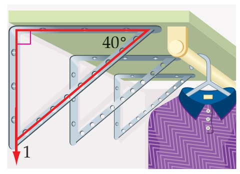


$m\angle KLM + m\angle LMK = m\angle JKL$	نظرية الزاوية الخارجية
$x + 50 = 2x - 15$	عوّض
$50 = x - 15$	اطرح x من الطرفين
$65 = x$	اجمع 15 إلى الطرفين

لذا فإن $m\angle JKL = (2(65) - 15)° = 115°$.

✓ **تحقق من فهمك**

2) **تنظيم خزانة الملابس:** ثبّتت لطيفة جسور الرفوف على جدار خزانتها. ما قياس $\angle 1$ التي يصنعها الجسر مع جدار الخزانة؟ **130°**



الربط مع الحياة

المدرب المتخصص
يعلّم مدرّبو اللياقة البدنية المتدربين طرائق متنوعة ويحفزونهم على أدائها، ومن المهم أن يحمل هؤلاء المدربون شهادات تخصص في مجال عملهم.

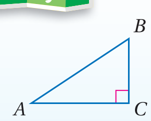
النتيجة هي نظرية يكون برهانها مبنيًّا على نظرية أخرى، ويمكن استعمال النتيجة كأي نظرية أخرى لتبرير خطوات برهانٍ آخر، أو حلّ أسئلة ذات علاقة، وفيما يلي نتائج مباشرة لنظرية مجموع زوايا المثلث:

نتيجتان — مجموع زوايا المثلث

أضف إلى مطويتك

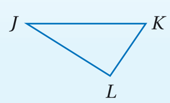
3.1 الزاويتان الحادتان في أي مثلث قائم الزاوية متتامتان.

مثال: إذا كانت $\angle C$ قائمة، فإن $\angle A$, $\angle B$ زاويتان متتامتان.



3.2 توجد زاوية قائمة واحدة، أو زاوية منفرجة واحدة على الأكثر في أي مثلث.

مثال: إذا كانت $\angle L$ قائمة، فإن $\angle J$, $\angle K$ زاويتان حادتان.



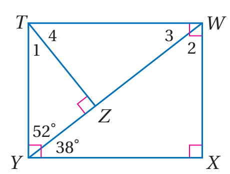
ستبرهن النتيجتين 3.2 , 3.1 في السؤالين 24 , 23

إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية
عندما تجد قياسات زوايا مثلث، تأكد دائمًا أن مجموع هذه القياسات يساوي 180°.

مثال 3 — إيجاد قياسات الزوايا في مثلثات قائمة الزاوية

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور.



$m\angle 1 + m\angle TYZ = 90°$	زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية
$m\angle 1 + 52° = 90°$	عوّض
$m\angle 1 = 38°$	اطرح 52 من الطرفين

✓ **تحقق من فهمك**

3A) $\angle 2$ **52°**　3B) $\angle 3$ **38°**　3C) $\angle 4$ **52°**

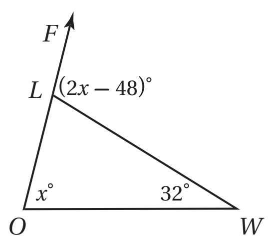
نظرية الزاوية الخارجية للمثلث

المثال 2 يبيّن كيفية إيجاد قياسات زوايا مجهولة باستعمال نظرية الزاوية الخارجية.

المثال 3 يبيّن كيفية استعمال نتائج مجموع زوايا المثلث؛ لإيجاد قياسات زوايا مثلثات قائمة.

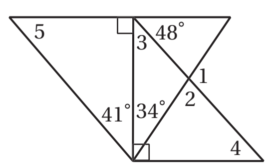
مثالان إضافيان

2 أوجد قياس $\angle FLW$ في الشكل الآتي:



$m\angle FLW = 112°$

3 أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقمة في الشكل الآتي.



$m\angle 3 = 42°$, $m\angle 2 = 76°$
$m\angle 1 = 104°$, $m\angle 4 = 48°$
$m\angle 5 = 49°$

إرشادات للمعلم الجديد

الزوايا المرقمة: أحيانًا قد لا يكون ممكنًا إيجاد قياس الزوايا المرقمة بالترتيب الذي رقمت به؛ لذا شجّع الطلاب على إيجاد قياسات الزوايا المجهولة بالتسلسل المنطقي والمفيد.

3 التدريب

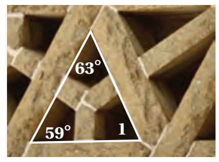
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-9 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

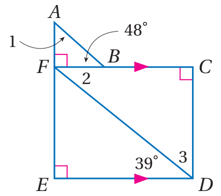
تأكـد

المثال 1 أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(1 58°



(2 $m\angle1 = 42^\circ, m\angle2 = 39^\circ, m\angle3 = 51^\circ$



المثال 2 **كراسي الشاطئ:** تشكل دعامة المقعد مع بقية الهيكل مثلثًا كما هو موضح في الشكل المجاور. أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

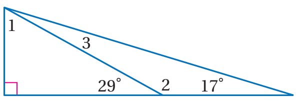
(3 $m\angle2$ 49°

(4 $m\angle4$ 127°

(5 $m\angle1$ 78°

(6 $m\angle3$ 131°

المثال 3 معتمدًا على الشكل المجاور، أوجد القياسات التالية:



(7 $m\angle1$ 61°

(8 $m\angle3$ 12°

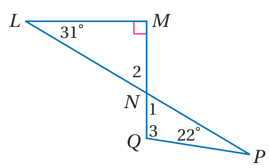
(9 $m\angle2$ 151°

تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد قياس الزوايا المرقّمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

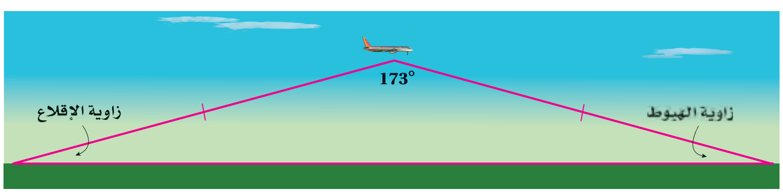
(10 60°

(11



$m\angle1 = 59^\circ, m\angle2 = 59^\circ, m\angle3 = 99^\circ$

(12 **طائرات:** يمكن تمثيل خطّ الطيران في رحلةٍ ما باستعمال ضلعَي مثلث كما في النموذج أدناه، علمًا بأن المسافة التي تقطعها الطائرة صعودًا تساوي المسافة التي تقطعها هبوطًا.



a) صنِّف النموذج بحسب الأضلاع والزوايا. متطابق الضلعين ، منفرج الزاوية

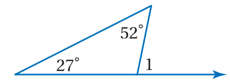
b) إذا كانت زاويتا الإقلاع والهبوط متطابقتين، فأوجد قياس كلٍّ منهما. 3.5°

تنويع الواجبات المنزلية

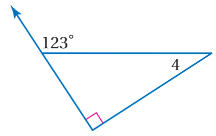
المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	10–21، 33 ، 34 ، 36-46
ضمن المتوسط	10-33 ، 36-46
فوق المتوسط	22-43 ، (اختياري: 44-46)

المثال 2 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

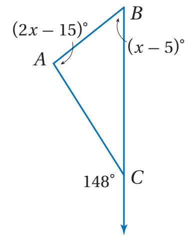
13) $m\angle 1$ **$79°$**



14) $m\angle 4$ **$33°$**



15) $m\angle ABC$ **$51°$**



المثال 3 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

16) $m\angle 1$ **$62°$**

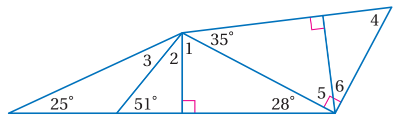
17) $m\angle 2$ **$39°$**

18) $m\angle 3$ **$26°$**

19) $m\angle 5$ **$55°$**

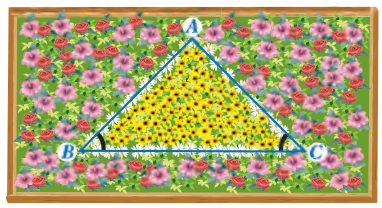
20) $m\angle 4$ **$55°$**

21) $m\angle 6$ **$35°$**



22) **بستنة:** استَنْبَتَ مهندس زراعيّ زهور أقحوان في حوض على شكل مثلث متطابق الضلعين. إذا رغب المهندس في أن يكون قياس $\angle A$ ثلاثة أمثال قياس كلٍّ من $\angle B, \angle C$، فما قياس كل زاوية في هذا المثلث؟

$m\angle A = 108°,\ m\angle B = m\angle C = 36°$



الربط مع الحياة

يصل طول ساق زهرة الأقحوان إلى 30in، وتنقسم هذه النباتات إلى 13 صنفًا بحسب أشكال أزهارها.

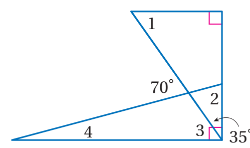
براهين: برهن كلًّا مما يأتي مستعملًا طريقة البرهان المذكورة.

23) النتيجة 3.1 باستعمال البرهان التسلسلي **انظر الهامش**

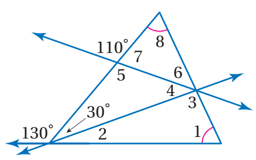
24) النتيجة 3.2 باستعمال البرهان الحر **انظر ملحق الإجابات**

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة فيما يأتي:

25)



26)



25)

$m\angle 3 = 55°,\ m\angle 4 = 15°,$

$m\angle 1 = 55°,\ m\angle 2 = 75°$

26)

$m\angle 2 = 20°,\ m\angle 1 = 65°,$

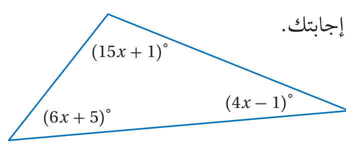
$m\angle 3 = 95°,\ m\angle 8 = 65°,$

$m\angle 5 = 110°,\ m\angle 4 = 40°,$

$m\angle 6 = 45°,\ m\angle 7 = 70°$

27) **جبر:** صنّف المثلث في الشكل المجاور وفقًا لزواياه. وفسّر إجابتك.

انظر الهامش



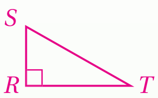
28) قرّر ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحةً أم خطأً، واذكر مثالًا مضادًا لها إذا كانت خطأً، ودعِّم استنتاجك إذا كانت صحيحة: **انظر الهامش**

" إذا كان مجموع زاويتين حادتين في مثلث أكبر من 90 ، فإن المثلث حادّ الزوايا ".

إجابات:

23) المعطيات: $\triangle RST$

$\angle R$ قائمة.



المطلوب: $\angle S, \angle T$ زاويتان متتامتان.

البرهان:

$\angle R$ زاوية قائمة
معطى

$m\angle R + m\angle S + m\angle T = 180°$
نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$m\angle R = 90°$
تعريف الزاوية القائمة

$90° + m\angle S + m\angle T = 180°$
بالتعويض

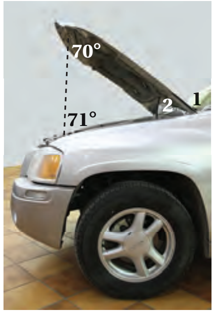
$m\angle S + m\angle T = 90°$
خاصية الطرح للمساواة

$\angle S$ و $\angle T$ زاويتان متتامتان
تعريف الزاويتين المتتامتين

27) منفرج الزاوية؛ مجموع قياسات الزوايا $180°$؛ لذا $(15x + 1) + (6x + 5) + (4x - 1) = 180°$، ولذلك فإن $x = 7$. وبتعويض $x = 7$ في العبارات الثلاث، نجد أن قياسات الزوايا الثلاث هي: $106°, 47°, 27°$

28) صحيحة؛ إجابة ممكنة: بما أن مجموع قياسَي الزاويتين الحادتين أكبر من $90°$، إذن قياس الزاوية الثالثة يساوي $180°$ ناقصًا عددًا أكبر من $90°$، وسيكون ناتج الطرح أقل من $90°$ بالتأكيد، وعليه فإن زوايا هذه المثلث الثلاث حادة، وهو مثلث حادُّ الزوايا.

29) سيارات: انظر إلى الصورة المجاورة:



a) أوجد $m\angle 1$, $m\angle 2$. $m\angle 1 = 141°$; $m\angle 2 = 39°$

b) إذا قلَّ ارتفاع غطاء السيارة عن الارتفاع الذي يظهر في الصورة، فما أثر ذلك في $m\angle 1$؟ فسِّر إجابتك. انظر الهامش

c) إذا قلَّ ارتفاع غطاء السيارة عن الارتفاع الذي يظهر في الصورة، فما أثر ذلك في $m\angle 2$؟ فسِّر إجابتك. انظر الهامش

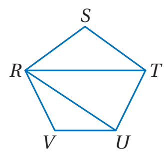
برهان: برهن كلًّا مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:

30) برهان ذو عمودين انظر ملحق الإجابات

المعطيات: $RSTUV$ شكل خماسيّ.

المطلوب:

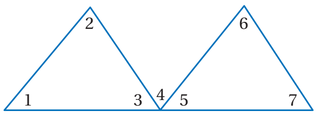
$m\angle S + m\angle STU + m\angle TUV + m\angle V + m\angle VRS = 540°$



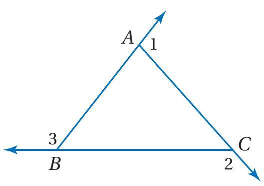
31) برهان تسلسلي انظر ملحق الإجابات

المعطيات: $\angle 3 \cong \angle 5$

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$



32) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة ستستكشف مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث. a–e) انظر ملحق الإجابات



a) **هندسيًّا:** ارسم خمسة مثلثات مختلفة، ومُدّ الأضلاع وسمِّ الزوايا كما في الشكل المجاور، على أن يكون ضمن المثلثات التي رسمتها على الأقل مثلث منفرج الزاوية، وآخر قائم الزاوية، ومثلث حادّ الزوايا.

b) **جدوليًّا:** قِس الزوايا الخارجية لكل مثلث. وسجِّل القياسات ومجموعها لكل مثلثٍ في جدول.

c) **لفظيًّا:** خمِّن مجموع الزوايا الخارجية للمثلث، واكتب تخمينك.

d) **جبريًّا:** عبِّر عن التخمين الذي وصلتَ إليه في الجزء c جبريًّا.

e) **تحليليًّا:** اكتب برهانًا حرًّا لإثبات التخمين الذي توصلتَ إليه.

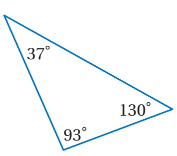
تنبيه!

قياس الزوايا

عند استعمال المنقلة لقياس زاوية ما، اجعل خطَ التدريج 0 منطبقًا على أحد ضلعي الزاوية، ومركز المنقلة منطبقًا على رأس الزاوية.

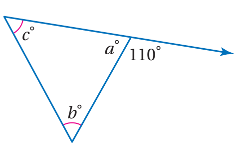
مسائل مهارات التفكير العليا

33) اكتشف الخطأ: قام خالد بقياس زوايا المثلث وكتبها كما في الشكل. فقال عادل: إنّ هناك خطأً في هذه القياسات. وضِّح بطريقتين مختلفتين على الأقل كيف توصَّل عادل إلى هذه النتيجة. انظر ملحق الإجابات



34) اكتب: فسِّر كيف يمكنك إيجاد القياسات المجهولة في الشكل المجاور؟

انظر الهامش



تمثيلات متعددة: في السؤال 32 يستقصي الطلاب مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث باستعمال الرسم الهندسي والجدول والتعبير اللفظي والبرهان الحر.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 33 يمكن تبرير صحة قول عادل، بتوضيح أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لهذا المثلث هو: $37°+93°+130°=260°$، ولا يمكن أن يكون هذا صحيحًا؛ لأن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي $180°$. ويمكن تبرير صحة قول عادل بأنه لا يمكن أن يكون في المثلث أكثر من زاويةٍ منفرجةٍ واحدةٍ، وعليه يستحيل وجود مثلث فيه زاويتان قياسهما $93°$, $130°$

إجابات:

29b) إجابة ممكنة: سيزداد قياس $\angle 1$؛ لأن غطاء السيارة سيقترب من الضلع الآخر للمثلث المحاذي لرفرف السيارة.

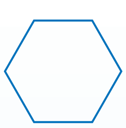
29c) إجابة ممكنة: سيقل قياس $\angle 2$؛ لأن قياس $\angle 1$ سيزداد؛ ولأن هاتين الزاويتين متجاورتان على مستقيم.

34) $m\angle a = 70°$؛ لأن هذه الزاوية والزاوية التي قياسها $110°$ متجاورتان على مستقيم، وبما أن $m\angle c = m\angle b$ ومجموعهما يساوي $110°$؛ ولأن الزاوية التي قياسها $110°$ خارجية، فهي تساوي مجموع الزاويتين البعيدتين؛ إذن $m\angle c = m\angle b = 55°$

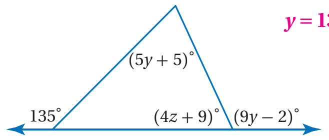
تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يختاروا أحد رؤوس السداسي ويرسموا مستقيمات داخلية من هذا الرأس إلى الرؤوس الأخرى التي لا يوجد مستقيم يصلها بذلك الرأس، واسألهم عن عدد المثلثات الناتجة. ما عدد المثلثات الناتجة عند استعمال مضلع سباعي؟ اكتب معادلة جبرية لإيجاد عدد المثلثات t، إذا كان عدد الأضلاع n. $4; 5; t = n - 2$



35) **تحدٍّ:** أوجد قيمة كلٍّ من y, z في الشكل المجاور. $y = 13, z = 14$



36) **تبرير:** إذا كانت الزاوية الخارجية المجاورة لـ $\angle A$ حادة، فهل $\triangle ABC$ حادّ الزوايا أم قائم الزاوية أم منفرج الزاوية أم أنه لا يمكن تحديد نوعه؟ وضح إجابتك. انظر الهامش

تدريب على اختبار

37) **جبر:** أيُّ المعادلات الآتية تكافئ المعادلة $7x - 3(2 - 5x) = 8x$؟ **B**

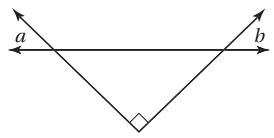
A $2x - 6 = 8$

B $22x - 6 = 8x$

C $-8x - 6 = 8x$

D $22x + 6 = 8x$

38) أيُّ العبارات التالية تصف العلاقة الصحيحة بين الزاويتين a, b في الشكل أدناه؟ **C**



A $a + b < 90^\circ$

B $a + b > 90^\circ$

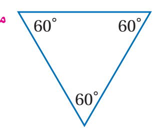
C $a + b = 90^\circ$

D $a + b = 45^\circ$

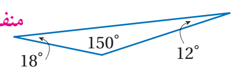
مراجعة تراكمية

صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: (الدرس 6-2)

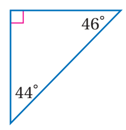
39) متطابق الزوايا



40) منفرج الزاوية



41) قائم الزاوية



هندسة إحداثية: أوجد المسافة بين النقطة P والمستقيم ℓ في كلٍّ من السؤالين الآتيين. (الدرس 6-2)

42) المستقيم ℓ يمرّ بالنقطتين $(1, 3)$, $(-2, 0)$، وإحداثيًّا النقطة P هما $(-4, 4)$. $\sqrt{26}$ وحدة

43) المستقيم ℓ يمرّ بالنقطتين $(3, 0)$, $(-3, 0)$، وإحداثيًّا النقطة P هما $(4, 3)$. 3 وحدات

استعد للدرس اللاحق

اكتب الخاصية المستعملة (الانعكاس، التماثل، التعدي) في كل عبارة مما يلي:

44) $\angle 1 \cong \angle 1, \overline{AB} \cong \overline{AB}$ الانعكاس

45) إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$. التماثل

46) إذا كانت $\angle 4 \cong \angle 2$, $\angle 2 \cong \angle 3$، فإن $\angle 4 \cong \angle 3$. التعدي

4 التقويم

فهم الرياضيات: ارسم مثلثًا حاد الزوايا قياس زاويتين فيه 56° , 44°.

وارسم مثلثًا منفرج الزاوية قياس زاويتين فيه 40° , 110°، وارسم مثلثًا متطابق الضلعين قياس كلٍّ من زاويتَي قاعدته 75°، واطلب إلى الطلاب أن يجدوا قياس الزاوية الثالثة في كلٍّ من هذه المثلثات باستعمال النظريات التي تعلَّموها في هذا الدرس، وأن يكتبوا إجاباتهم.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 2-3 , 1-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1 ، ص (49) .

إجابة:

36) منفرج الزاوية؛ لأن الزاوية الخارجية حادة، ومجموع الزاويتين الداخليتين البعيدتين أقل من 90°؛ لذا فإن الزاوية الثالثة ستكون أكبر من 90° حتمًا.

الفصل 3

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 3

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

الاسم ______ التاريخ ______

2-3 تدريبات إعادة التعليم

زوايا المثلثات

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

إذا عُلِم قياسا زاويتين في المثلث، فإنه يُمكنك إيجاد قياس الزاوية الثالثة مستعملاً النظرية الآتية دائمًا:

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث	مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$. في الشكل المجاور: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

ونتيجةً لنظرية مجموع قياسات زوايا المثلث، نستطيع القول بأنه في أيّ مثلث قائم تكون الزاويتان الحادتان متتامتين، وكذلك نستنتج أنه لا يمكن وجود مثلث يحوي أكثر من زاوية قائمة أو أكثر من زاوية منفرجة.

مثال 1 أوجد $m\angle T$.

$m\angle R + m\angle S + m\angle T = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$25° + 35° + m\angle T = 180°$ بالتعويض

$60° + m\angle T = 180°$ بالتبسيط

$m\angle T = 120°$ بطرح 60 من الطرفين.

مثال 2 أوجد قياسات الزوايا المرقمة في الشكل الآتي:

$m\angle 1 + m\angle A + m\angle B = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 1 + 58° + 90° = 180°$ بالتعويض

$m\angle 1 + 148° = 180°$ بالتبسيط

$m\angle 1 = 32°$ بطرح 148° من الطرفين

$m\angle 2 = 32°$ الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة

$m\angle 3 + m\angle 2 + m\angle E = 180°$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 3 + 32° + 108° = 180°$ بالتعويض

$m\angle 3 + 140° = 180°$ بالتبسيط

$m\angle 3 = 40°$ بطرح 140° من الطرفين

تمارين

أوجد قياسات الزوايا المرقمة في كلٍّ من الأشكال الآتية:

1) $m\angle 1 = 28°$

2) $m\angle 1 = 120°$

3) $m\angle 1 = 30°, m\angle 2 = 60°$

4) $m\angle 1 = m\angle 2 = 56°, m\angle 3 = 74°$

5) $m\angle 1 = 30°, m\angle 2 = 60°$

6) $m\angle 1 = 8°$

الصف الأول الثانوي 11 الفصل 3، المثلثات المتطابقة

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (12) دون

الاسم ______ التاريخ ______

2-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

زوايا المثلث

نظريّة الزاوية الخارجية:

الزاوية المشكّلة من أحد أضلاع المثلث وامتداد الضلع الآخر عند كلّ رأس من رؤوسه تُسمى **زاوية خارجية للمثلث**. ويقابل كلّ زاوية خارجية للمثلث **زاويتان داخليتان بعيدتان**، وهما زاويتان داخليتان غير مجاورتين لها. في الشكل الآتي $\angle A, \angle B$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان بالنسبة للزاوية الخارجية $\angle DCB$.

نظرية الزاوية الخارجية	قياس الزاوية الخارجية للمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين. $m\angle 1 = m\angle A + m\angle B$

مثال 1 أوجد $m\angle 1$.

$m\angle 1 = m\angle R + m\angle S$ نظرية الزاوية الخارجية

$= 60° + 80°$ بالتعويض

$= 140°$ بالجمع

مثال 2 أوجد قيمة x.

$m\angle PQS = m\angle R + m\angle S$ نظرية الزاوية الخارجية

$78 = 55 + x$ بالتعويض

$23 = x$ بطرح 55 من الطرفين

تمارين

أوجد قياسات الزوايا المرقمة في كلٍّ من الأشكال الآتية.

1) $m\angle 1 = 115°$

2) $m\angle 1 = 60°, m\angle 2 = 120°$

3) $m\angle 1 = 60°, m\angle 2 = 60°, m\angle 3 = 120°$

4) $m\angle 1 = 109°, m\angle 2 = 29°, m\angle 3 = 71°$

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي:

5) 25

6) 29

الصف الأول الثانوي 12 الفصل 3، المثلثات المتطابقة

تدريبات المهارات (13) دون ضمن

الاسم ______ التاريخ ______

2-3 تدريبات المهارات

زوايا المثلث

أوجد قياس كلّ زاوية مرقمة في السؤالين الآتيين:

1) $m\angle 1 = 27°$

2) $m\angle 1 = m\angle 2 = 17°$

أوجد كلًّا من القياسات الآتية في الشكل المجاور.

3) $m\angle 1$ 55°

4) $m\angle 2$ 55°

5) $m\angle 3$ 70°

أوجد كلًّا من القياسات الآتية في الشكل المجاور.

6) $m\angle 1$ 125°

7) $m\angle 2$ 55°

8) $m\angle 3$ 95°

أوجد كلًّا من القياسات الآتية في الشكل المجاور.

9) $m\angle 1$ 140°

10) $m\angle 2$ 40°

11) $m\angle 3$ 65°

12) $m\angle 4$ 75°

13) $m\angle 5$ 115°

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين في الشكل المجاور.

14) $m\angle 1$ 27°

15) $m\angle 2$ 27°

الصف الأول الثانوي 13 الفصل 3، المثلثات المتطابقة

تدريبات حل المسألة (14) دون ضمن فوق

الاسم ______ التاريخ ______

2-3 تدريبات حلّ المسألة

زوايا المثلث

لعبة تحدي: قام خالد ومحمد بإجراء لعبة التحدي، بأن يعطي أحدهما مواصفات مثلث، ويقوم الآخر برسم المثلث إذا كان ممكنًا، وإلا فعليه أن يقول مباشرة: غير ممكن.

1) إذا طلب خالد إلى محمد رسم مثلث فيه زاوية قائمة وزاوية منفرجة، فهل يمكن لمحمد رسم المثلث؟ ولماذا؟

لا؛ إجابة ممكنة: لأن الزاوية القائمة قياسها 90° والمنفرجة أكثر من 90°، وبذلك يكون مجموع الزاويتين أكثر من 180°، وذلك لا يتفق مع نظرية مجموع زوايا المثلث.

2) إذا طلب محمد إلى خالد رسم مثلث قائم الزاوية، وقياس الزاويتين الأخريين 20°، 80°، فهل يمكن لخالد رسم هذا المثلث؟ ولماذا؟

لا؛ لأن الزاويتين الحادتين في المثلث القائم متتامتان.

3) إذا طلب خالد إلى محمد رسم مثلث متطابق الأضلاع، ومتطابق الزوايا، فهل يمكن لمحمد رسم هذا المثلث؟

نعم

4) إذا طلب محمد إلى خالد رسم مثلث قياسات زواياه: 70°، 30°، 80°، وقياس زاوية من زواياه الخارجية 120°، فهل يمكن لخالد رسم هذا المثلث؟ ولماذا؟

لا؛ إجابة ممكنة: لأن 120° لا يمكن أن تكون حاصل جمع أي زاويتين من زوايا المثلث.

5) **أبراج:** يرتكز برج مراقبة على مجموعة من الدعامات والقوائم، إذا كان قياس زاويتين على البرج كما هو موضح أدناه، فما قياس الزاوية 1؟

$\angle 1$ زاوية خارجية؛ إذن: $m\angle 1 = 62° + 36° = 98°$

6) **حديقة حيوانات:** تُضاء بيوت القرود ليلًا عن طريق ضوء علوي، فإذا صنع شعاعان من الأشعة الصادرة من الضوء الشكل التالي:

فما قياس الزاوية 1؟ 64°

7) **طاولة رسم:** اشترى سامي طاولة رسم، وثبّتها بطريقة تمكّنه من الرسم بسهولة وهو جالس على كرسيه، وقد قاس سامي الزاويتين المتكوّنتين بين الساقين وسطح الطاولة ليستطيع أن يعيد الطاولة إلى وضعها الحالي إذا أراد نقلها.

a) أيّ الزوايا الأربعة المرقّمة في الشكل أعلاه يمكن لسامي أن يجدها من معرفة قياس كلٍّ من الزاويتين المتشكّلتين من سطح الطاولة والساقين؟ وما قياساها؟

$\angle 1, \angle 2$; $m\angle 1 = 97°, m\angle 2 = 83°$

b) ما الاستنتاج الذي يمكن أن يتوصل إليه سامي بخصوص الزوايا غير المعلومة الأخرى قبل أن يقيسها لإيجاد قياساتها الدقيقة؟

إجابة ممكنة: مجموع قياسي الزاويتين 3، 4 يساوي قياس الزاوية 1، $m\angle 3 + m\angle 4 = 97°$.

الصف الأول الثانوي 14 الفصل 3، المثلثات المتطابقة

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 3

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (15)　ضمن فوق

الاسم ______ التاريخ ______

3-2 التدريبات الإثرائيّة

إيجاد قياسات الزوايا في المثلث:

يمكنك استعمال الجبر لحلّ مسائل تتضمّن قياسات زوايا المثلث.

مثال **في المثلث ABC، إذا كان $m\angle A$ مِثْلَيْ $m\angle B$، ويزيد $m\angle C$ على $m\angle B$ بمقدار °8، فما قياس كلّ زاويةٍ من زوايا هذا المثلث؟**

اكتب معادلة ثم حُلّها، افترض أن $x° = m\angle B$

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$$
$$2x° + x° + (x° + 8°) = 180°$$
$$4x° + 8° = 180°$$
$$4x° = 172°$$
$$x° = 43°$$

ولذلك فإن: $m\angle A = 2(43°) = 86°, m\angle B = 43°, m\angle C = 43° + 8° = 51°$.

حُلَّ كلًّا من المسائل الآتية:

1) في المثلث DEF، إذا كان $m\angle E$ ثلاثة أمثال $m\angle D$، ويقلّ $m\angle F$ عن $m\angle E$ بمقدار °9، فما قياسات زوايا المثلث؟
$m\angle D = 27°, m\angle E = 81°, m\angle F = 72°$

2) في المثلث RST، يزيد $m\angle T$ على $m\angle R$ بمقدار °5، ويقلّ $m\angle S$ عن $m\angle T$ بمقدار °10، فما قياسات زوايا المثلث؟
$m\angle R = 60°, m\angle S = 55°, m\angle T = 65°$

3) في المثلث JKL، إذا كان $m\angle K$ أربعة أمثال $m\angle J$، وكان $m\angle L$ خمسة أمثال $m\angle J$، فما قياسات زوايا المثلث؟
$m\angle J = 18°, m\angle K = 72°, m\angle L = 90°$

4) في المثلث XYZ، يزيد $m\angle Z$ على مثْلَي $m\angle X$ بمقدار °2، ويقلّ $m\angle Y$ عن مثْلَي $m\angle X$ بمقدار °7، فما قياسات زوايا المثلث؟
$m\angle X = 37°, m\angle Y = 67°, m\angle Z = 76°$

5) في المثلث GHI، إذا كان $m\angle H$ يزيد °20 على $m\angle G$، وكان $m\angle G$ يزيد °8 على $m\angle I$، فما قياسات زوايا المثلث؟
$m\angle G = 56°, m\angle H = 76°, m\angle I = 48°$

6) في المثلث MNO، إذا كان $m\angle M$ يساوي $m\angle N$، ويزيد $m\angle O$ على ثلاثة أمثال $m\angle N$ بمقدار °5، فما قياسات زوايا المثلث؟
$m\angle M = m\angle N = 35°, m\angle O = 110°$

7) في المثلث STU، إذا كان $m\angle U$ نصف $m\angle T$، ويزيد $m\angle S$ على $m\angle T$ بمقدار °30، فما قياسات زوايا المثلث؟
$m\angle S = 90°, m\angle T = 60°, m\angle U = 30°$

8) في المثلث PQR، إذا كان $m\angle P$ يساوي $m\angle Q$، ويقلّ $m\angle R$ عن $m\angle P$ بمقدار °24، فما قياسات زوايا المثلث؟
$m\angle P = m\angle Q = 68°, m\angle R = 44°$

9) اكتب مسألة عن قياسات الزوايا في المثلث، بحيث تكون مشابهةً للمسائل السابقة ثم حلَّها.
انظر إجابات الطلاب.

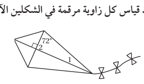
الصف: الأول الثانوي　15　الفصل 3: المثلثات المتطابقة

كتاب التمارين (21)　دون ضمن فوق

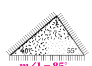
2 - 3 زوايا المثلثات

الفصل الثالث　المثلثات المتطابقة

أوجد قياس كل زاوية مرقمة في الشكلين الآتيين :

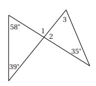
1)


$m\angle 1 = 18°, m\angle 2 = 90°$

2)


$m\angle 1 = 85°$

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية :

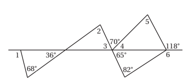


3) $m\angle 1$　97°

4) $m\angle 2$　83°

5) $m\angle 3$　62°

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا الآتية :



6) $m\angle 1$　104°

7) $m\angle 4$　45°

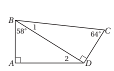
8) $m\angle 3$　65°

9) $m\angle 2$　79°

10) $m\angle 5$　73°

11) $m\angle 6$　147°

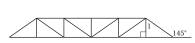
أوجد قياس كلٍّ من الزاويتين الآتيتين:



12) $m\angle 1$　26°

13) $m\angle 2$　32°

14) **إنشاءات هندسية:** يبيّن الشكل المجاور جزءًا من دعامة تُستعمل في بناء الجسور.
أوجد $m\angle 1$.　55°



21

3-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-3

تعرف الزوايا المتطابقة واستعمالها.

الدرس 3-3

تسمية العناصر المتناظرة في المضلعات المتطابقة.

إثبات تطابق مثلثين باستعمال تعريف التطابق.

ما بعد الدرس 3-3

استعمال البرهان الإحداثي لإثبات تطابق مثلثين.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- لماذا يجب أن يكون شكل الواجهة الأماميّة وأبعادها مطابقين للمكان الذي ستثبت فيه؟ إذا لم تكن مطابقة للمكان، فإن الواجهة لن تثبت تمامًا، تاركةً فجواتٍ صغيرة أو لن تثبت بتاتًا.
- ما الأجزاء الأخرى للواجهة الأمامية التي ستتوافق تمامًا مع المكان التي ستوضع فيه؟ يجب أن تكون فتحات المفاتيح والأزرار بقياس وشكل المفاتيح والأزرار الحقيقية بالضبط .
- ما عواقب عدم توافق العناصر المتناظرة للواجهة الأمامية ومسجل السيارة؟ لن تركب الواجهة بالشكل الصحيح، ولن تكون أداة فعالة للحماية من السرقة.

3-3 المثلثات المتطابقة
Congruent triangles

فيما سبق:

درست الزوايا المتطابقة واستعمالاتها.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أُسمّي العناصر المتناظرة في المضلعات المتطابقة وأستعملها.
- أُثبت تطابق مثلثين باستعمال تعريف التطابق.

المفردات:

التطابق
Congruent

المضلعات المتطابقة
Congruent Polygons

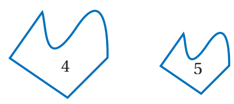
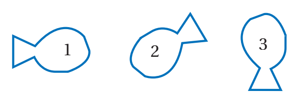
العناصر المتناظرة
Corresponding Parts

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تقوم عدّة مصانع بصنع مسجّلات سيارات بواجهات متحركة يصعب نزعها لحمايتها من السرقة، علمًا بأن شكل هذه الواجهات وأبعادها تطابق شكل المكان الذي تثبت فيه وأبعاده تمامًا؛ وذلك لتثبيتها في لوحة أجهزة السيارة بدقة.

التطابق والعناصر المتناظرة: إذا كان لشكلين هندسيين الشكل نفسه والقياسات نفسها فإنّهما **متطابقان**.

غير متطابقة	متطابقة
	
الشكلان 4, 5 لهما الشكل نفسه، لكنهما مختلفان في القياسات.	الأشكال 1, 2, 3 لها الشكل نفسه والقياسات نفسها، على الرغم من أنها في أوضاع مختلفة.

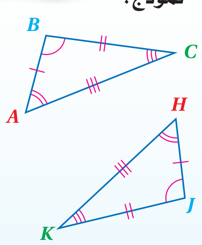
في أيِّ **مضلعين متطابقين** تتطابق **العناصر المتناظرة**، والعناصر المتناظرة تتضمن الزوايا والأضلاع.

مفهوم أساسي — تعريف المضلعات المتطابقة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يتطابق مضلعان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة.

نموذج:



مثال:

الزوايا المتناظرة

$\angle A \cong \angle H$ $\quad \angle B \cong \angle J$ $\quad \angle C \cong \angle K$

الأضلاع المتناظرة

$\overline{AB} \cong \overline{HJ}$ $\quad \overline{BC} \cong \overline{JK}$ $\quad \overline{CA} \cong \overline{KH}$

عبارة التطابق

$\triangle ABC \cong \triangle HJK$

هناك عباراتُ تطابقٍ أخرى للمثلثين أعلاه، وعبارات التطابق الصحيحة للمضلعات المتطابقة تظهر الرؤوس المتناظرة بالترتيب نفسه.

عبارة صحيحة

$\triangle BCA \cong \triangle JKH$

عبارة غير صحيحة

$\triangle ABC \cong \triangle HKJ$

مصادر الدرس 3-3

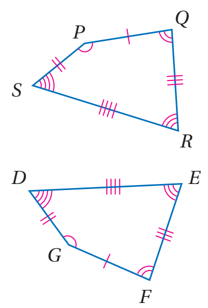
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (164)	• تنويع التعليم، ص (164, 167)	• تنويع التعليم، ص (164, 167)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (22)	• كتاب التمارين، ص (22)	• كتاب التمارين، ص (22)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

تاريخ الرياضيات

جوهان كارل فردريك جاوس (1777م – 1855م)
قدّم جاوس رمز التطابق ليبيّن أن طرفي المعادلة متساويان حتى ولو كانا مختلفين شكلًا. وقد حقق إنجازات عديدة في الرياضيات والفيزياء تتضمن برهانًا للنظرية الأساسية في الجبر.

مثال 1 تعرف العناصر المتناظرة المتطابقة

بيّن أنّ المضلّعين المجاورين متطابقان، بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب عبارة التطابق.



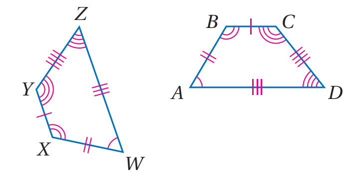
الزوايا: $\angle P \cong \angle G, \angle Q \cong \angle F,$
$\angle R \cong \angle E, \angle S \cong \angle D$

الأضلاع: $\overline{PQ} \cong \overline{GF}, \overline{QR} \cong \overline{FE},$
$\overline{RS} \cong \overline{ED}, \overline{SP} \cong \overline{DG}$

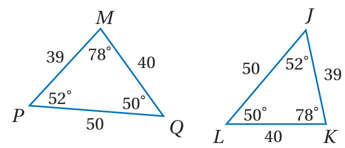
وبما أنّ جميع العناصر المتناظرة للمضلعين متطابقة، فإنّ المضلع $PQRS \cong$ المضلع $GFED$.

تحقق من فهمك (1A, 1B) انظر الهامش

(1A



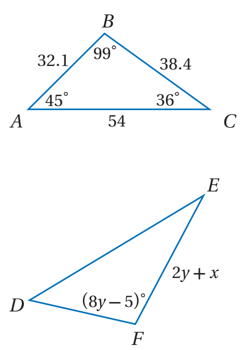
(1B



أداة الربط "إذا وفقط إذا" التي وردت في تعريف المضلعات المتطابقة تعني أن كلًّا من العبارة الشرطيّة وعكسها صحيحتان؛ لذا إذا كان المضلعان متطابقين، فإنّ عناصرهما المتناظرة متطابقة. وإذا كانت العناصر المتناظرة متطابقة فإن المضلعين متطابقان.

مثال 2 تعيين العناصر المتناظرة المتطابقة

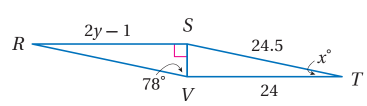
في الشكل المجاور إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ ، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y



$\angle F \cong \angle B$	العناصر المتناظرة متطابقة
$m\angle F = m\angle B$	تعريف التطابق
$8y - 5 = 99$	عوّض
$8y = 104$	اجمع 5 إلى الطرفين
$y = 13$	اقسم الطرفين على 8
$\overline{FE} \cong \overline{BC}$	العناصر المتناظرة متطابقة
$FE = BC$	تعريف التطابق
$2y + x = 38.4$	عوّض
$2(13) + x = 38.4$	عوّض
$26 + x = 38.4$	بسّط
$x = 12.4$	اطرح 26 من الطرفين

تحقق من فهمك

2) في الشكل المجاور إذا كان $\triangle RSV \cong \triangle TVS$، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y . $x = 12, y = 12.5$



إرشادات للدراسة

استعمال عبارة التطابق
يمكنك استعمال عبارة التطابق لمساعدتك على معرفة الأضلاع المتناظرة.
$\triangle ABC \cong \triangle DFE$
$\overline{BC} \cong \overline{FE}$

إجابات (تحقق من فهمك):

(1A $\angle A \cong \angle W, \angle B \cong \angle X, \angle C \cong \angle Y, \angle D \cong \angle Z,$
$\overline{AB} \cong \overline{WX}, \overline{BC} \cong \overline{XY}, \overline{CD} \cong \overline{YZ}, \overline{DA} \cong \overline{ZW},$
المضلع $ABCD \cong$ المضلع $WXYZ$

(1B $\angle J \cong \angle P, \angle K \cong \angle M, \angle L \cong \angle Q,$
$\overline{JK} \cong \overline{PM}, \overline{KL} \cong \overline{MQ}, \overline{LJ} \cong \overline{QP},$
$\triangle JKL \cong \triangle PMQ$

التطابق والعناصر المتناظرة

المثال 1 يبيّن أنّه إذا كانت العناصر المتناظرة لمثلثين متطابقة، فإنّ المثلثين متطابقان.

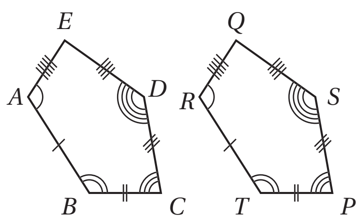
المثال 2 يبيّن كيفية إيجاد القيم المجهولة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

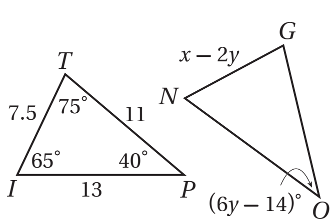
مثالان إضافيان

1 بيّن أن المضلعين أدناه متطابقان، وذلك بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة تطابق.



$\angle A \cong \angle R, \angle B \cong \angle T,$
$\angle C \cong \angle P, \angle D \cong \angle S,$
$\angle E \cong \angle Q, \overline{AB} \cong \overline{RT},$
$\overline{BC} \cong \overline{TP}, \overline{CD} \cong \overline{PS},$
$\overline{DE} \cong \overline{SQ}, \overline{EA} \cong \overline{QR}$
جميع العناصر المتناظرة للمضلعين متطابقة؛ لذلك $ABCDE \cong RTPSQ$.

2 في الشكل أدناه، $\triangle ITP \cong \triangle NGO$. أوجد قيمة كلٍّ من x, y .



$x = 25.5, y = 9$

163 الدرس 3-3 المثلثات المتطابقة

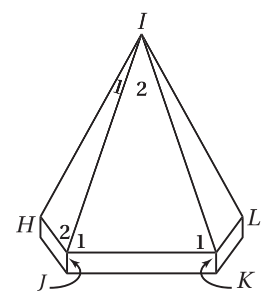
إثبات تطابق المثلثات

المثال 3 يبيّن كيفية استعمال نظرية الزاوية الثالثة لإيجاد قياسات مجهولة في مثلثين.

المثال 4 يبيّن كيفية استعمال نظرية الزاوية الثالثة في إثبات تطابق مثلثين.

مثالان إضافيان

3 **هندسة العمارة:** يتكون رسم قمّة برج من مثلثاتٍ تلتقي جميعها عند نقطة في القمّة. إذا كانت $\angle J_1 \cong \angle J_2 \cong \angle K_1$، $m\angle J_1 = 72°$، $\angle I_1 \cong \angle I_2$، فأوجد $m\angle H$

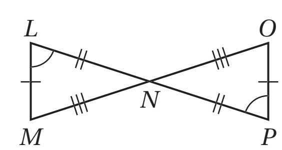


$m\angle H = 72°$

4 اكتب برهانًا ذا عمودين لما يأتي:

المعطيات: في الشكل أدناه: $\angle L \cong \angle P$, $\overline{LM} \cong \overline{PO}$, $\overline{LN} \cong \overline{PN}$, $\overline{MN} \cong \overline{ON}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle PON$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle L \cong \angle P$, $\overline{LM} \cong \overline{PO}$, $\overline{LN} \cong \overline{PN}$, $\overline{MN} \cong \overline{ON}$	1) المعطيات
2) $\angle LNM \cong \angle PNO$	2) الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان
3) $\angle M \cong \angle O$	3) نظرية الزاوية الثالثة
4) $\triangle LMN \cong \triangle PON$	4) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

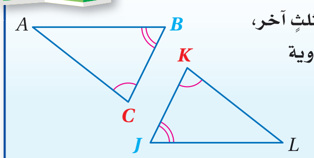
إثبات تطابق المثلثات إن نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث التي تعلمتها في الدرس 3–2 تقود إلى نظرية أخرى حول الزوايا في مثلثين.

نظرية 3.3 نظريّة الزاوية الثالثة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، فإنّ الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

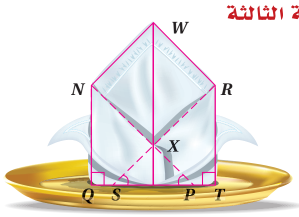
مثال: إذا كانت: $\angle C \cong \angle K$, $\angle B \cong \angle J$، فإن: $\angle A \cong \angle L$.



ستبرهن هذه النظرية في السؤال 17

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال نظرية الزاوية الثالثة

تنظيم الحفلات: قرّر منظّم حفلة مدرسيّة أن يطووا مناديل الطعام على صورة جيب مثلثي حتى يتمكنوا من وضع هدية بسيطة فيه. إذا كانت: $\angle NPQ \cong \angle RST$, $m\angle NPQ = 40°$، فأوجد $m\angle SRT$.



بما أنّ $\angle NPQ \cong \angle RST$، ولأن جميع الزوايا القائمة متطابقة ($\angle NQP \cong \angle RTS$)، فإنّ $\angle QNP \cong \angle SRT$ بحسب نظرية الزاوية الثالثة؛ إذن $m\angle QNP = m\angle SRT$.

$m\angle QNP + m\angle NPQ = 90°$ الزاويتان الحادّتان في المثلث القائم الزاوية متتامّتان

$m\angle QNP + 40° = 90°$ عوّض

$m\angle QNP = 50°$ اطرح 40° من الطرفين

وبالتعويض فإن: $m\angle SRT = m\angle QNP = 50°$.

الربط مع الحياة

استعمال بعض المهارات الأساسية عند طي مناديل المائدة يُضفي لمسة من الجمال والأناقة على أي حفلة. وكثير من هذه الطيات تأخذ شكل المثلث.

تحقق من فهمك

3) في الشكل أعلاه، إذا كانت $\angle WNX \cong \angle WRX$، وكان $\overline{WX}$ منصِّفًا لـ $\angle NXR$، وكان $m\angle WNX = 88°$, $m\angle NXW = 49°$، فأوجد $m\angle NWR$. وفسِّر إجابتك.

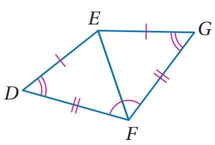
3) 86°؛ بما أن: $\angle WNX \cong \angle WRX$, $\angle NXW \cong \angle RXW$ فإن $\angle NWX \cong \angle RWX$
$m\angle NWX = 180° - 88° - 49° = 43°$
$m\angle NWR = 2 \times 43° = 86°$

مثال 4 إثبات تطابق مثلثين

اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$, $\angle D \cong \angle G$, $\angle DFE \cong \angle GFE$

المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle GEF$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{DE} \cong \overline{GE}$, $\overline{DF} \cong \overline{GF}$	1) معطيات
2) $\overline{EF} \cong \overline{EF}$	2) خاصية الانعكاس للتطابق
3) $\angle D \cong \angle G$, $\angle DFE \cong \angle GFE$	3) معطيات
4) $\angle DEF \cong \angle GEF$	4) نظرية الزاوية الثالثة
5) $\triangle DEF \cong \triangle GEF$	5) تعريف المضلعات المتطابقة

إرشادات للدراسة

خاصية الانعكاس

عندما يشترك مثلثان في ضلع، استعمل خاصيّة الانعكاس للتطابق؛ لتثبت أن الضلع المشترك يطابق نفسه.

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

توسّع اطلب إلى الطلاب رسم $\triangle ABC$ الذي رؤوسه $A(-8, 8)$, $B(-2, 5)$, $C(-8, 2)$، ثم اطلب إليهم رسم $\triangle PTS$ الذي رؤوسه $P(8, 8)$, $T(2, 5)$, $S(8, 2)$. واسألهم كيف يمكن التحقق من أنّ الأضلاع المتناظرة للمثلثين متطابقة. علاوة على ذلك، أعطهم فرصة لمناقشة ما إذا كانت الزوايا المتناظرة للمثلثين متطابقة. يمكن أن يستعمل الطلاب صيغة المسافة بين نقطتين؛ لإثبات تطابق الأضلاع المتناظرة. وقد تتضمن المناقشة حول الزوايا اقتراحات بأنّ المثلثين متطابقان تمامًا؛ لأن أحدهما انعكاس للآخر، أو لأن الأضلاع المتساوية في الطول تتطلب أن تكون الزوايا متساوية في القياس.

4) البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\angle J \cong \angle P$, $\overline{JK} \cong \overline{PM}$, $\overline{JL} \cong \overline{PL}$

L تنصف $\overline{KM}$ (معطيات)

2) $\angle JLK \cong \angle PLM$ الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.

3) $\overline{LK} \cong \overline{LM}$ (تعريف منصف القطعة المستقيمة)

4) $\angle K \cong \angle M$ (نظرية الزاوية الثالثة)

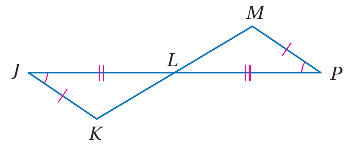
5) $\triangle JLK \cong \triangle PLM$ (تعريف تطابق مضلعين)

تحقق من فهمك

4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle J \cong \angle P$, $\overline{JK} \cong \overline{PM}$, $\overline{JL} \cong \overline{PL}$، L تنصف $\overline{KM}$

المطلوب: $\triangle JLK \cong \triangle PLM$



علاقة تطابق المثلثات علاقة انعكاس وتماثل وتعدٍّ كما في تطابق القطع المستقيمة والزوايا.

النظرية 3.4 خصائص تطابق المثلثات

أضف إلى مطويتك

خاصيّة الانعكاس للتطابق

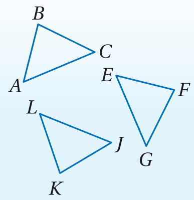
$\triangle ABC \cong \triangle ABC$

خاصيّة التماثل للتطابق

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$، فإنّ $\triangle EFG \cong \triangle ABC$.

خاصيّة التعدّي للتطابق

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$, $\triangle EFG \cong \triangle JKL$، فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle JKL$.

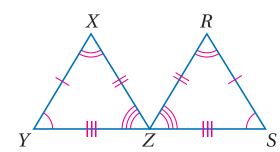


ستبرهن عناصر هذه النظرية في الأسئلة 21 ،20 ،18

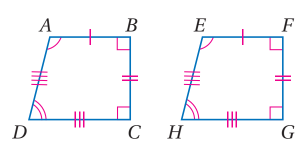
تأكد

المثال 1 في كلٍّ من السؤالين الآتيين، بيّن أنّ المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثمّ اكتب عبارة التطابق: 1, 2) انظر ملحق الإجابات

1)



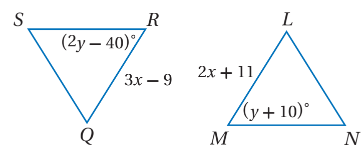
2)



المثال 2 في الشكلين المجاورين، إذا كان $\triangle LMN \cong \triangle QRS$ فأوجد:

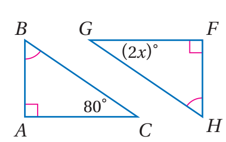
3) قيمة x. 20

4) قيمة y. 50

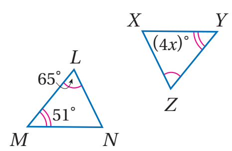


المثال 3 في كلٍّ من السؤالين الآتيين، أوجد قيمة x، وفسِّر إجابتك. 5, 6) انظر الهامش

5)



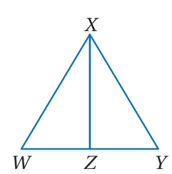
6)



المثال 4 7) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\angle WXZ \cong \angle YXZ$, $\angle XZW \cong \angle XZY$, $\overline{WX} \cong \overline{YX}$, $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$ انظر الهامش



التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اعرض مثلثين متطابقين على السبورة. اسحب أحد المثلثين لتبيِّن للطلاب أنه ينطبق فوق المثلث الآخر تمامًا. استعمل هذه الطريقة لبيان أيّ العناصر في المثلثين تناظر بعضها.

تنبيه!

التطابق مقابل التشابه: لإثبات أنّ مضلعين متطابقان، من الضروري بيان أن جميع الأضلاع والزوايا المتناظرة في المضلعين متساوية في القياس. أما كون الزوايا المتناظرة فقط متطابقة، فلا يكفي لإثبات التطابق، وإنما يثبت التشابه في حالة المثلثات.

إرشادات للمعلم الجديد

تصوُّر التطابق: يمكن أن يضع الطلاب علاماتٍ أو إرشاداتٍ على الأضلاع والزوايا؛ لمساعدتهم على تنظيم العناصر المتناظرة لمثلثين متطابقين بصريًّا.

المحتوى الرياضي

أخطاء شائعة: بيّن للطلاب أن علامات أو إرشادات التطابق لا توضع على الشكل أحيانًا، وأن عليهم استعمال معرفتهم المفاهيم الهندسية لإثبات التطابق. وأكّد على أهميّة استعمال المعلومات المعطاة فقط، وألّا يضعوا أي افتراضات حول الأشكال بناءً على الظاهر فقط.

إجابات:

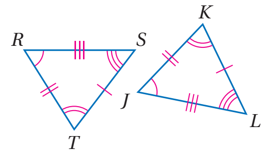
5) 40؛ بما أنّ $\angle B \cong \angle H$, $\angle A \cong \angle F$. فإنه بحسب نظرية الزاوية الثالثة في مثلثٍ، تكون $\angle C \cong \angle G$
ومن تعريف التطابق يكون $m\angle C = m\angle G$،
وبالتعويض نحصل على:
$2x = 80$؛ لذا $x = 40$

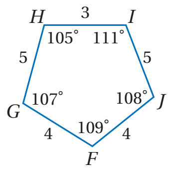
6) 16؛ بما أن $\angle Y \cong \angle M$, $\angle Z \cong \angle L$ فإنه بحسب نظرية الزاوية الثالثة في مثلث، تكون $\angle X \cong \angle N$،
ومن تعريف التطابق يكون: $m\angle x = m\angle N$،
ومن نظرية مجموع زوايا المثلث نجد أن:
$m\angle N = 180° - 65° - 51° = 64°$،
وبالتعويض نحصل على $4x = 64°$؛
أي أن $x = 16$

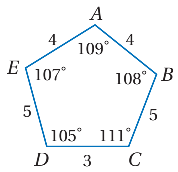
7) نعلم أنّ $\overline{WX} \cong \overline{YX}$, $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$،
وبحسب خاصية الانعكاس فإن $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$.
وتعلم أيضًا أن:
$\angle WXZ \cong \angle YXZ$, $\angle XZW \cong \angle XZY$
وبحسب نظرية الزاوية الثالثة تكون،
$\angle W \cong \angle Y$؛ إذن $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$،
بحسب تعريف المضلعين المتطابقين .

تدرب وحل المسائل

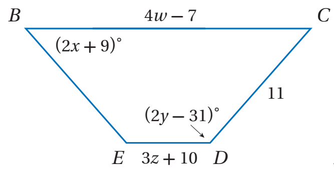
المثال 1 في كل من السؤالين الآتيين، بيّن أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثمّ اكتب عبارة التطابق. **8, 9) انظر الهامش**

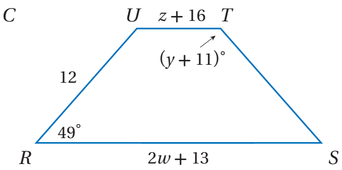
8) 

9) 



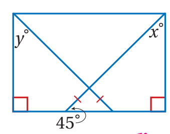
المثال 2 إذا كان المضلع $BCDE \cong$ المضلع $RSTU$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:



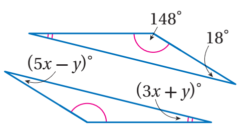


10) x **20** 11) y **42** 12) z **3** 13) w **10**

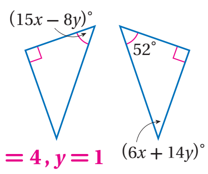
المثال 3 أوجد قيمة كلٍّ من x, y في الأسئلة الآتية:

14) 

$x = 45, y = 45$

15) 

$x = 4, y = 2$

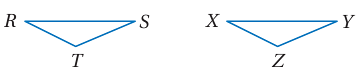
16) 

$x = 4, y = 1$

المثال 4 17) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 3.3. **19–17) انظر ملحق الإجابات**

18) **برهان:** رتِّب العبارات المستعملة في برهان العبارة الآتية ترتيبًا صحيحًا. وقدّم تبريرًا لكل عبارة.

"تطابق المثلثات علاقة تماثل." (النظرية 3.4)



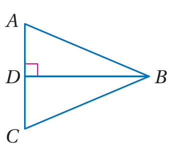
المعطيات: $\triangle RST \cong \triangle XYZ$

المطلوب: $\triangle XYZ \cong \triangle RST$

البرهان:

$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S, \angle Z \cong \angle T, \overline{XY} \cong \overline{RS}, \overline{YZ} \cong \overline{ST}, \overline{XZ} \cong \overline{RT}$	$\angle R \cong \angle X, \angle S \cong \angle Y, \angle T \cong \angle Z, \overline{RS} \cong \overline{XY}, \overline{ST} \cong \overline{YZ}, \overline{RT} \cong \overline{XZ}$	$\triangle RST \cong \triangle XYZ$	$\triangle XYZ \cong \triangle RST$
?	?	?	?

19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين: **انظر ملحق الإجابات**



المعطيات: $\overline{BD}$ تنصّف $\angle B$.
$\overline{BD} \perp \overline{AC}$

المطلوب: $\angle A \cong \angle C$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 7-1 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزليّة للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

8) $\angle R \cong \angle J, \angle T \cong \angle K, \angle S \cong \angle L,$
$\overline{RT} \cong \overline{JK}, \overline{TS} \cong \overline{KL}, \overline{RS} \cong \overline{JL};$
$\triangle RTS \cong \triangle JKL$

9) $\angle A \cong \angle F, \angle B \cong \angle J, \angle C \cong \angle I,$
$\angle D \cong \angle H, \angle E \cong \angle G, \overline{AB} \cong \overline{FJ},$
$\overline{BC} \cong \overline{JI}, \overline{CD} \cong \overline{IH}, \overline{DE} \cong \overline{HG},$
$\overline{AE} \cong \overline{FG};$
المضلع $ABCDE \cong$ المضلع $FJIHG$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	8–21 ، 27-29 ، 31-40
ضمن المتوسط	8-24 زوجي ، 24-29، 31-40
فوق المتوسط	22-40

برهان: اكتب برهانًا من النوع المذكور لكل جزء من النظرية 3.4.

20) تطابق المثلثات علاقة تعدٍّ. (برهان حرّ) انظر ملحق الإجابات

21) تطابق المثلثات علاقة انعكاس. (برهان تسلسلي) انظر ملحق الإجابات

جبر: ارسم شكلًا يمثّل المثلثين المتطابقين في كلٍّ من السؤالين الآتيين وسمِّه، ثم أوجد قيمة x, y:

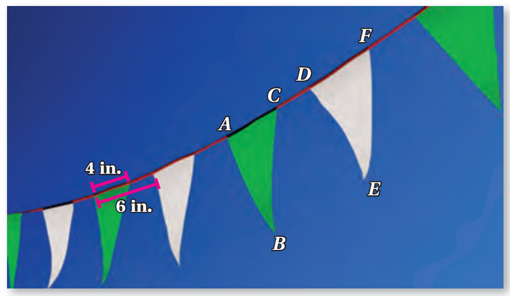
22) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $AB = 7$, $BC = 25$, $AC = 11 + x$, $DF = 3x - 13$, $DE = 2y - 5$

23) $\triangle LMN \cong \triangle RST$, $m\angle L = 49°$, $m\angle M = (10y)°$, $m\angle S = 70°$, $m\angle T = (4x + 9)°$

22–23) انظر الهامش

24) **رايات:** في مهرجان رياضي، كان سعيد مسؤولًا عن إحاطة منطقة مساحتها $100\ ft^2$ مخصصة لجلوس المُعلقين والإعلاميين، فاستعمل حبلًا وثبّت عليه رايات على شكل مثلثات متطابقة، كلٌّ منها متطابق الضلعين.

إرشاد: $1\ ft = 12\ in$



a) اكتب سبعة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة في الصورة.

b) إذا كانت المنطقة التي حوّطها سعيد بحبل الرايات مربّعة الشكل، فكم سيكون طول الحبل؟ 40 ft

c) ما عدد الرايات المثبتة بالحبل؟ 80

24a) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{FE}$, $\overline{CB} \cong \overline{DE}$, $\overline{CB} \cong \overline{FE}$, $\overline{DE} \cong \overline{FE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

25) **تمثيلات متعدّدة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين مساحات المضلعات المتطابقة:
$a-d$) انظر ملحق الإجابات

a) **لفظيًّا:** اكتب عبارة شرطيّة تمثل العلاقة بين مساحتَي مثلثين متطابقين.

b) **لفظيًّا:** اكتب عكس عبارتك الشرطيّة. وهل العبارة العكسيّة صحيحة أم خطأ؟ وضّح تبريرك.

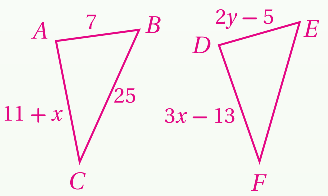
c) **هندسيًّا:** ارسم - إنْ أمكن - مستطيلين لهما المساحة نفسها، ولكنّهما غير متطابقين، وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.

d) **هندسيًّا:** ارسم - إنْ أمكن - مربعين لهما المساحة نفسها، ولكنّهما غير متطابقين، وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال 25، يستعمل الطلاب الوصف اللفظي والرسوم الهندسيّة؛ لاستقصاء مساحات المثلثات المتطابقة.

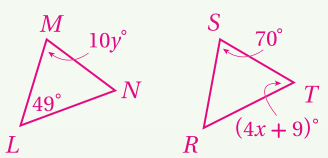
إجابات

22)



$x = 12 ; y = 6$

23)



$x = 13 ; y = 7$

تنويع التعليم

ضمن فوق

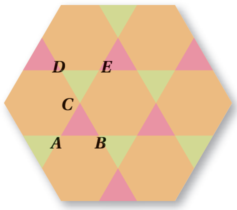
توسّع: أوراق الرسم البياني تُسّهل رسم أنواع مختلفة من المثلثات المتطابقة. اطلب إلى الطلاب أن يرسموا تصميمًا يتضمن 10 أزواج مختلفة على الأقل من المثلثات المتطابقة. وشجعهم على أن يوضّحوا كيف يعرفون أن كل زوج من المثلثات متطابقان، وتحدَّ الطلاب في توضيح كيفية استخدام ميل مستقيمٍ في رسم مثلثين متطابقين.

إذا لم يتمكن الطلاب من التوضيح، فقدّم لهم التلميح الآتي:

ارسم قطعةً مستقيمةً $\overline{AB}$ في المستوى الإحداثي، وحدِّد النقطة C في المستوى بحيث لا تقع على $\overline{AB}$، وحاول أن ترسم قطعة $\overline{CD}$ مطابقة للقطعة $\overline{AB}$، من خلال تحديدك الانتقال من النقطة A إلى النقطة B بعدد الوحدات الأفقية وعدد الوحدات العمودية.

a–e) انظر ملحق الإجابات

26) أنماط: صُمّم النمط المجاور باستعمال مضلعات منتظمة.



a) ما المضلعان المنتظمان اللذان استُعملا في التصميم؟

b) سمِّ زوجًا من المثلثات المتطابقة.

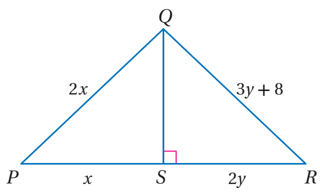
c) سمِّ زوجًا من الزوايا المتطابقة.

d) إذا كان $CB = 2$ in ، فكم يكون AE؟ وضح إجابتك.

e) ما قياس $\angle EDC$؟ وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) تحدٍّ: إذا كان $\triangle PQS \cong \triangle RQS$. فأوجد قيمة كلٍّ من x, y.
$x = 16, y = 8$

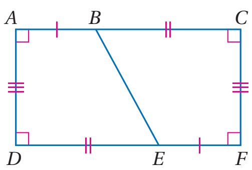


تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خطأً. وإذا كانت خطأً، فأعطِ مثالًا مضادًا. أما إذا كانت صحيحة، فوضح إجابتك. انظر الهامش.

28) إذا تطابق زوجان من الزوايا المتناظرة لمثلثين، وتطابقت الأزواج الثلاثة من أضلاعهما المتناظرة، فإنّ المثلثين متطابقان.

29) إذا كانت أزواج الزوايا المتناظرة الثلاثة لمثلثين متطابقة، فإنّ المثلثين متطابقان. انظر الهامش

30) تحدٍّ: اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن المضلع $ABED \cong$ المضلع $FEBC$.
انظر الهامش



31) اكتب: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحةً دائمًا أو صحيحةً أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا. ووضح إجابتك.

"المثلثان المتطابقا الأضلاع يكونان متطابقين" انظر الهامش

تدريب على اختبار

32) إذا علمت أن: $\triangle ABC \cong \triangle HIJ$ ، ورؤوس $\triangle ABC$ هي: $A(-1, 2), B(0, 3), C(2, -2)$ ، فما طول الضلع HJ ؟ **A**

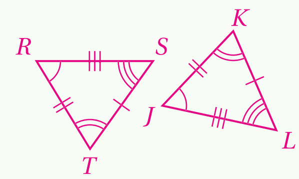
A 5	**C** $\sqrt{2}$
B $\sqrt{29}$	**D** 25

33) جبر: أيٌّ مما يأتي عامل لـ $x^2 + 19x - 42$؟ **C**

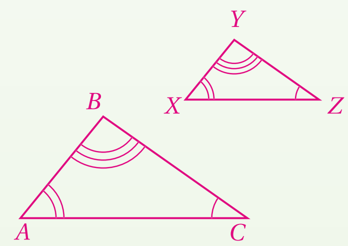
A $x + 14$	**C** $x - 2$
B $x + 2$	**D** $x - 14$

إجابات:

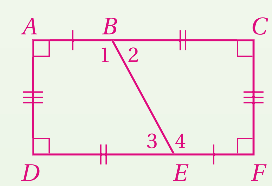
28) صحيحة؛ إجابة ممكنة: باستعمال نظريّة الزاوية الثالثة، تكون زاويتا الزوج الثالث من الزوايا متطابقتين أيضًا، وجميع الأضلاع المتناظرة متطابقة، ولأنّ العناصر المتناظرة متطابقة، فإن المثلثين متطابقان.



29) خطأ؛
$\angle A \cong \angle X, \angle B \cong \angle Y, \angle C \cong \angle Z$،
ولكن الأضلاع المتناظرة ليست متطابقة .



30)

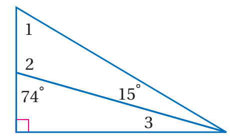


نعلم أنّ $\overline{AB} \cong \overline{FE}, \overline{ED} \cong \overline{BC}$, $\overline{AD} \cong \overline{FC}$. وبحسب خاصية الانعكاس $\overline{BE} \cong \overline{EB}$، ولأن جميع الزوايا القائمة متطابقة، فإن $\angle A \cong F, \angle D \cong \angle C$. وبما أنّ $\overline{AC}$ و $\overline{DF}$ عموديتان على المستقيم نفسه فإنّ $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$ (عكس نظرية القاطع العمودي).
ولأنّ الزوايا المتبادلة داخليًّا متطابقة، فإنّ $\angle 1 \cong \angle 4, \angle 2 \cong \angle 3$، وبما أن جميع العناصر المتناظرة متطابقة، فإن المضلع $ABED \cong$ المضلع $FEBC$.

31) صحيحة أحيانًا؛ يكون المثلثان المتطابقا الأضلاع متطابقين إذا تطابق زوجٌ من الأضلاع المتناظرة فيهما.

مراجعة تراكمية

في الشكل المجاور أوجد كلًّا من القياسات الآتية: (الدرس 2-3)



34) $m\angle 2$ **106°**

35) $m\angle 1$ **59°**

36) $m\angle 3$ **16°**

37) **هندسة إحداثية:** أوجد أطوال أضلاع $\triangle JKL$ الذي رؤوسه هي $J(-7, 10), K(15, 0), L(-2, -1)$، وصنّفه وفقًا لأطوال أضلاعه. (الدرس 1-3) **$JK = 2\sqrt{146}$, $KL = \sqrt{290}$, $JL = \sqrt{146}$ ؛ مختلف الأضلاع**

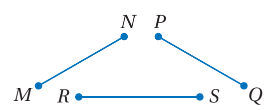
حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحةً دائمًا أو أحيانًا أو ليست صحيحةً أبدًا: (الدرس 8-1)

38) تكون الزاويتان المتجاورتان على خط مستقيم متكاملتين. **صحيحة دائمًا**

39) إذا كانت الزاويتان متكاملتين فإن إحداهما تكون منفرجة. **صحيحة أحيانًا**

استعد للدرس اللاحق

40) انقل البرهان الآتي وأكمله:



المعطيات: $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$, $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\overline{MN} \cong \overline{RS}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ؟ **$\overline{MN} \cong \overline{PQ}, \overline{PQ} \cong \overline{RS}$**	a) معطيات
b) $MN = PQ, PQ = RS$	b) ؟ **تعريف القطع المستقيمة المتطابقة**
c) ؟ **$MN = RS$**	c) ؟ **خاصية التعدي**
d) $\overline{MN} \cong \overline{RS}$	d) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة

4 التقويم

تعلّم لاحق: اطلب إلى الطلاّب أن يتوقعوا كيف تساعدهم معرفة العناصر المتناظرة المتطابقة لمثلثين على إثبات أنّ المثلثين متطابقان.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 3

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16) دون

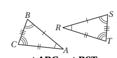
الاسم ________ التاريخ ________

3-3 تدريبات إعادة التعليم

المثلثات المتطابقة

التطابق والعناصر المتناظرة:

المثلثات التي لها القياس نفسه والشكل نفسه تُسمَّى **مثلثات متطابقة**، ويتطابق مثلثان إذا وفقط إذا كانت **العناصر المتناظرة** متطابقة؛ أي أزواج الزوايا المتناظرة الثلاث متطابقة، وكانت أزواج الأضلاع المتناظرة الثلاثة متطابقة.



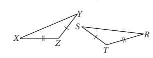
$\triangle ABC \cong \triangle RST$

نظريّة الزاوية الثالثة	إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

مثال إذا كان $\triangle XYZ \cong \triangle RST$، فسمّ أزواج الزوايا المتطابقة وأزواج الأضلاع المتطابقة .

$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S, \angle Z \cong \angle T$

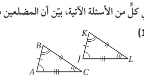
$\overline{XY} \cong \overline{RS}, \overline{XZ} \cong \overline{RT}, \overline{YZ} \cong \overline{ST}$



تمارين

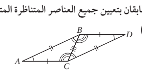
في كلٍّ من الأسئلة الآتية، بيّن أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق.

(1



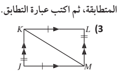
$\angle A \cong \angle J; \angle B \cong \angle K; \angle C \cong \angle L; \overline{AB} \cong \overline{JK}; \overline{BC} \cong \overline{KL}; \overline{AC} \cong \overline{JL}$ $\triangle ABC \cong \triangle JKL$

(2



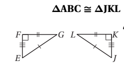
$\angle A \cong \angle D; \angle ABC \cong \angle DCB; \angle ACB \cong \angle DBC; \overline{AC} \cong \overline{BD}; \overline{BC} \cong \overline{CB}; \overline{AB} \cong \overline{DC}$ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$

(3



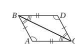
$\angle J \cong \angle L; \angle JKM \cong \angle LMK; \angle KMJ \cong \angle MKL; \overline{KJ} \cong \overline{ML}; \overline{KM} \cong \overline{MK}; \overline{KL} \cong \overline{MJ}$ $\triangle JKM \cong \triangle LMK$

(4



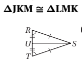
$\angle E \cong \angle J; \angle F \cong \angle K; \angle G \cong \angle L; \overline{EF} \cong \overline{JK}; \overline{EG} \cong \overline{JL}; \overline{FG} \cong \overline{KL}$ $\triangle FGE \cong \triangle KLJ$

(5



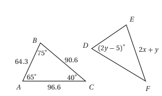
$\angle A \cong \angle D; \angle ABC \cong \angle DCB; \angle ACB \cong \angle DBC; \overline{AC} \cong \overline{DB}; \overline{BC} \cong \overline{CB}; \overline{AB} \cong \overline{DC}$ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$

(6



$\angle R \cong \angle T; \angle RSU \cong \angle TSU; \angle RUS \cong \angle TUS; \overline{RU} \cong \overline{TU}; \overline{RS} \cong \overline{TS}; \overline{SU} \cong \overline{SU}$; $\triangle RSU \cong \triangle TSU$

في الشكل المجاور، إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle DEF$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:



7) y **35**

8) x **27.8**

الصف: الأول الثانوي 16 **الفصل 3:** المثلثات المتطابقة

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (17) دون

الاسم ________ التاريخ ________

3-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المثلثات المتطابقة

إثبات تطابق مثلثين:

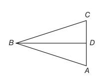
يتطابق مثلثان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة، وتتضمن العناصر المتناظرة الزوايا والأضلاع. إن العبارة " إذا.. وفقط إذا" تعني أن العبارة الشرطية وعكسها صحيحتان.

وعند إثبات تطابق مثلثين، يمكن استعمال خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي للتطابق.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle BAD \cong \angle BCD$, $\overline{AD} \cong \overline{CD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CB}$، $\overline{BD}$ تنصف $\angle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.



البرهان:

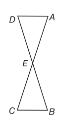
العبارات	المبرِّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{CD}$	1) معطيات.
2) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	2) خاصية الانعكاس للتطابق.
3) $\angle BAD \cong \angle BCD$	3) معطيات.
4) $\angle ABD \cong \angle CBD$	4) تعريف منصف الزاوية.
5) $\angle BDA \cong \angle BDC$	5) نظرية الزاوية الثالثة.
6) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$	6) جميع العناصر المتناظرة متطابقة.

تمارين

1) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle A \cong \angle C, \angle D \cong \angle B,$ $\overline{AD} \cong \overline{CB}, \overline{AE} \cong \overline{CE}$ $\overline{AC}$ تنصف $\overline{BD}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle AED \cong \triangle CEB$



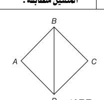
1) البرهان:

العبارات	المبرِّرات
1) $\angle A \cong \angle C, \angle D \cong \angle B$	1) معطيات.
2) $\angle AED \cong \angle CEB$	2) زاويتان متقابلتان بالرأس.
3) $\overline{AD} \cong \overline{CB}, \overline{AE} \cong \overline{CE}$	3) معطيات.
4) $\overline{DE} \cong \overline{BE}$	4) تعريف منصف قطعة مستقيمة.
5) $\triangle AED \cong \triangle CEB$	5) جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة.

2) اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\overline{BD}$ تنصف كلًّا من $\angle ABC$، $\angle ADC$، $\overline{AB} \cong \overline{CB}, \overline{AB} \cong \overline{AD}, \overline{CB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



2) البرهان:

بما أن BD تنصف كلًّا من $\angle ABC, \angle ADC$ ، بحسب المعطيات؛ فإن: $\angle ABD \cong \angle CBD$, $\angle ADB \cong \angle CDB$
بحسب تعريف منصف زاوية، وباستعمال نظرية الزاوية الثالثة في المثلث نجد أن $\angle A \cong \angle C$
وبما أننا نعلم من المعطيات أن: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ وأن $\overline{CB} \cong \overline{DC}$ وباستعمال خاصية التعويض ، فإن $\overline{AD} \cong \overline{CD}$
وبحسب خاصية الانعكاس للتطابق فإن $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ ، وهذا يعني أن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ ؛ لأن جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة.

الصف: الأول الثانوي 17 **الفصل 3:** المثلثات المتطابقة

تدريبات المهارات (18) دون ضمن

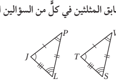
الاسم ________ التاريخ ________

3-3 تدريبات المهارات

المثلثات المتطابقة

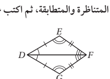
بيّن تطابق المثلثين في كلٍّ من السؤالين الآتيين، بتعيين جميع العناصر المتناظرة والمتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق.

(1



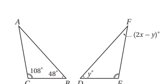
$\angle J \cong \angle T; \angle P \cong \angle V; \angle L \cong \angle S; \overline{JP} \cong \overline{TV}; \overline{PL} \cong \overline{VS}; \overline{JL} \cong \overline{TS}$ $\triangle JPL \cong \triangle TVS$

(2



$\angle EDF \cong \angle GDF; \angle E \cong \angle G; \angle EFD \cong \angle GFD; \overline{DE} \cong \overline{DG}; \overline{DF} \cong \overline{DF}; \overline{GF} \cong \overline{EF}$; $\triangle DEF \cong \triangle DGF$

في الشكل المجاور، إذا كان: $\triangle ABC \cong \triangle FDE$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:



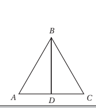
3) y **48**

4) x **36**

5) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{CD}, \angle ABD \cong \angle CBD$ $\angle ADB \cong \angle CDB$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.



البرهان:

العبارات	المبرِّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{CD}$	1) معطيات
2) $\angle ABD \cong \angle CBD, \angle ADB \cong \angle CDB$	2) معطيات
3) $\angle A \cong \angle C$	3) نظرية الزاوية الثالثة
4) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$	5) جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة

الصف: الأول الثانوي 18 **الفصل 3:** المثلثات المتطابقة

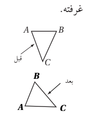
تدريبات حل المسألة (19) دون ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

3-3 تدريبات حل المسألة

المثلثات المتطابقة

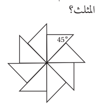
1) **مناظر:** علّق منصورٌ منظرًا طبيعيًّا مُحاطًا بإطار مثلثٍ الشكل على حائط في غرفته.



وفي أحد الأيام سقط الإطار على الأرض من دون أن ينكسر أو أن ينثني، والشكل أعلاه يبيّن الإطار قبل سقوطه وبعده. اكتب أسماء رؤوس الإطار بعد السقوط تبعًا للتسمية المبيَّنة على الإطار قبل السقوط.

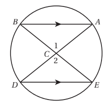
2) **مثلث سيربنسكي:** يبيّن الشكل أدناه جزءًا من مثلث سيربنسكي، ويمتاز هذا المثلث بأن المثلثات الموجودة فيه جميعها متطابقة الأضلاع، ما عدد المثلثات الظاهرة في هذا الجزء من مثلث سيربنسكي التي تطابق المثلث المظلّل في الركن السفلي؟ **11**

3) **تصميم هندسي:** الشكل أدناه نموذج لنقش على أحد الألحفة، وهو عبارة عن مثلثات متطابقة ناتجة عن تكرار رسم المثلث المتطابق الضلعين القائم الزاوية نفسه، ما القياسان المجهولان لزاويتي هذا المثلث؟



90°, 45°

4) قامت هند بزخرفة جدار غرفتها بالرسوم المبينة في الشكل أدناه.



فسألتها أختها: هل $\triangle DCE$ وَ $\triangle ACB$ متطابقان؟

فأجابتها: ما عليك سوى قياس $\overline{AB}$ وَ $\overline{DE}$، فإذا كانتا متطابقتين، فالمثلثان متطابقان.

ما الأساس الذي بنت هند إجابتها عليه؟

إجابة ممكنة: $m\angle 1 = m\angle 2$ لأنهما متقابلتان بالرأس، وكذلك $m\angle E = m\angle B$ لأنهما متبادلتان داخليًا، $m\angle A = m\angle D$ لأنهما متبادلتان داخليًا، $BC = CE$، $AC = DC$ وَ أنصاف أقطار للدائرة. وبذلك تتطابق جميع العناصر المتناظرة.

5) **خرائط:** لاحظ سامي على خريطة للحيّ أن المثلث الذي رؤوسه المركز التجاري (S) والمسجد (M) والحديقة (P)، يطابق المثلث الذي رؤوسه بيت عامر (A) وبيت فايز (F) وبيت حسن (H)؛ أي أن $\triangle SMP \cong \triangle AFH$.

a) إذا كانت المسافة بين المركز التجاريّ والحديقة 1 km، فأيّ مسار في $\triangle AFH$ يطابق هذه المسافة؟

المسار بين بيتَي عامر وحسن يطابق المسار بين المركز التجاري والحديقة، وطوله يساوي 1 km

b) إذا كان قياس $\angle MPS$ يساوي 40°، فأيُّ زوايا $\triangle AFH$ تطابق هذه الزاوية ؟ $\angle FHA$

الصف: الأول الثانوي 19 **الفصل 3:** المثلثات المتطابقة

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 3

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (20) ضمن فوق

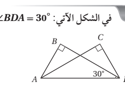
الاسم ________ التاريخ ________

3-3 التدريبات الإثرائيّة

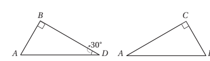
المثلثات المتداخلة

عندما تتداخل المثلثات، فإنها تشترك في بعض العناصر المتناظرة أحيانًا، ولتحديد العناصر المتناظرة بسهولةٍ، حاول أن تُعيد رسم المثلثين منفصلين.

مثال في الشكل الآتي: $m\angle BDA = 30°$ ، $\Delta ABD \cong \Delta DCA$، أوجد $m\angle CDA$ ، $m\angle CAD$.



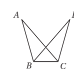
أعد رسم ΔABD ، ΔDCA منفصلين على النحو الآتي:



والآن تلاحظ أن $\angle BDA \cong \angle CAD$؛ لأنهما عنصران متناظران في مثلثين متطابقين؛ لذا فإن $m\angle CAD = 30°$،
وباستعمال نظرية مجموع زوايا المثلث تجد أن:
$m\angle CDA = 180° - (90° + 30°) = 60°$

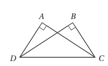
تمارين

1) في الشكل المجاور:



$\Delta ABC \cong \Delta DCB$, $m\angle ABC = 110°$, $m\angle D = 20°$
أوجد $m\angle DCB$ ، $m\angle ACB$.
$\mathbf{m\angle DCB = 110°}$, $\mathbf{m\angle ACB = 50°}$

2) اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\angle A$ ، $\angle B$ زاويتان قائمتان،
$\angle ACD \cong \angle BDC$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ADC \cong \Delta BCD$.

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\angle A$ و $\angle B$ قائمتان	1) معطيات
2) $\angle A \cong \angle B$	2) الزوايا القوائم متطابقة
3) $\angle ACD \cong \angle BDC$	3) معطيات
4) $\angle ADC \cong \angle BCD$	4) نظرية الزاوية الثالثة
5) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	5) معطيات
6) $\overline{DC} \cong \overline{CD}$	6) خاصية الانعكاس
7) $\Delta ADC \cong \Delta BCD$	7) جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة

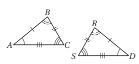
الصف: الأول الثانوي 20 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

كتاب التمارين (22) دون ضمن فوق

3 - 3 المثلثات المتطابقة

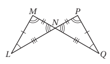
في كلٍّ من السؤالين الآتيين، بيّن أن المثلثين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق :

1)



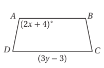
$\angle A \cong \angle D; \angle B \cong \angle R$
$\angle C \cong \angle S; \overline{AB} \cong \overline{DR}$
$\overline{BC} \cong \overline{RS}; \overline{AC} \cong \overline{DS}$
$\triangle ABC \cong \triangle DRS$

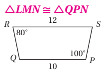
2)



$\angle L \cong \angle Q; \angle M \cong \angle P$
$\angle MNL \cong \angle PNQ;$
$\overline{LM} \cong \overline{QP}; \overline{MN} \cong \overline{PN}$
$\overline{LN} \cong \overline{QN}$
$\triangle LMN \cong \triangle QPN$

إذا علمت أن المضلع $ABCD \cong$ المضلع $PQRS$ فأوجد:

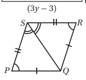




3) قيمة x. $x = 48$

4) قيمة y. $y = 5$

5) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.



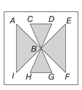
المعطيات: $\angle P \cong \angle R$, $\angle PSQ \cong \angle RSQ$, $\overline{PQ} \cong \overline{RQ}$, $\overline{PS} \cong \overline{RS}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle PQS \cong \triangle RQS$.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle P \cong \angle R, \angle PSQ \cong \angle RSQ$	1) معطيات
2) $\angle PQS \cong \angle RQS$	2) نظرية الزاوية الثالثة
3) $\overline{PQ} \cong \overline{RQ}, \overline{PS} \cong \overline{RS}$	3) معطيات
4) $\overline{QS} \cong \overline{QS}$	4) خاصية الانعكاس
5) $\triangle PQS \cong \triangle RQS$	5) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

6) رسم هندسي: في الرسم المجاور



a) عيِّن المثلثات التي تبدو متطابقة. $\triangle ABI \cong \triangle EBF, \triangle CBD \cong \triangle HBG$

b) سمِّ الزوايا المتطابقة والأضلاع المتطابقة لكل مثلثين متطابقين .

في المثلثين المتطابقين ABI , EBF
$\angle A \cong \angle E, \angle ABI \cong \angle EBF, \angle I \cong \angle F;$
$\overline{AB} \cong \overline{EB}, \overline{BI} \cong \overline{BF}, \overline{AI} \cong \overline{EF}$

وفي المثلثين المتطابقين CBD , HBG
$\angle C \cong \angle H, \angle CBD \cong \angle HBG, \angle D \cong \angle G;$
$\overline{CB} \cong \overline{HB}, \overline{BD} \cong \overline{BG}, \overline{CD} \cong \overline{HG}$

22

الفصل الثالث المثلثات المتطابقة

3-4 إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS
Proving Triangles Congruent-SSS, SAS

فيما سبق:

درست إثبات تطابق المثلثات باستعمال تعريف التطابق.

(الدرس 3-3)

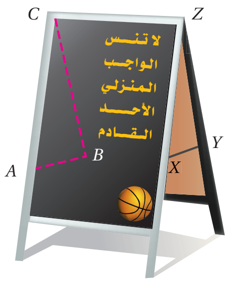
والآن:

- أستعمل المسلمة SSS لاختبار تطابق المثلثات.
- أستعمل المسلمة SAS لاختبار تطابق المثلثات.

المفردات:

الزاوية المحصورة
Included Angle

www.obeikaneducation.com



لماذا؟

تُعدّ السبورة المزدوجة التي على شكل الحرف A طريقة مناسبة لعرض المعلومات، لا لأنها تُطوى عند التخزين فقط، ولكن لأنّها تكون ثابتةً تمامًا عند وضع الذراعين الجانبيَّين في موقعيهما. وعندما يكون للذراعين الطول نفسه، ويتم تثبيتهما على أبعاد متساوية من القمة على الجانبين، فإن السبورة المفتوحة تشكّل مثلثين متطابقين هما $\triangle ABC, \triangle XYZ$.

مسلمة التطابق بثلاثة أضلاع SSS: في هذا الدرس ستكتشف أنه ليس من الضروري أن تبين تطابق الأضلاع المتناظرة وتطابق الزوايا المتناظرة في مثلثين لتثبت أنهما متطابقان.

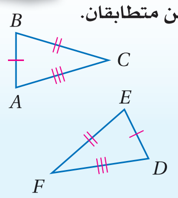
تبيّن السبورة المزدوجة أنّه إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متساوية، فإن المثلثين متطابقان. وهذا ما تنصّ عليه المسلمة الآتية:

مسلمة 3.1 — التطابق بثلاثة أضلاع (SSS) — أضف إلى مطويتك

إذا تطابقت أضلاع مثلث مع الأضلاع المناظرة لها في مثلث آخر، فإنَّ المثلثين متطابقان.

مثال إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



قراءة الرياضيات

اختصارات رياضية

S اختصار لـ side أو ضلع، و A اختصار لـ Angle أو زاوية.

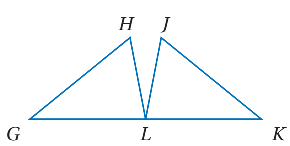
مثال 1 استعمال المسلمة SSS لإثبات تطابق مثلثين

اكتب برهانًا تسلسليًّا.

المعطيات: $\overline{HL} \cong \overline{JL}$, $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$، L نقطة منتصف $\overline{GK}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle GHL \cong \triangle KJL$

البرهان:



$\overline{GH} \cong \overline{KJ}$ — معطى

$\overline{HL} \cong \overline{JL}$ — معطى

L هي نقطة منتصف $\overline{GK}$ — معطى

$\overline{GL} \cong \overline{KL}$ — تعريف نقطة المنتصف

$\triangle GHL \cong \triangle KJL$ — SSS

إرشادات للدراسة

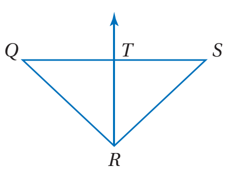
منصف قطعة مستقيمة عبارة عن قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة عند منتصفها.

تحقق من فهمك

1) اكتب برهانًا تسلسليًّا. انظر ملحق الإجابات

المعطيات: $\triangle QRS$ متطابق الضلعين، فيه $\overline{QR} \cong \overline{SR}$،
$\overline{RT}$ تنصّف $\overline{QS}$ عند النقطة T.

المطلوب: إثبات أنّ $\triangle QRT \cong \triangle SRT$



3-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-4

إثبات تطابق مثلثين باستعمال تعريف التطابق.

الدرس 3-4

استعمال المسلمة SSS لاختبار تطابق مثلثين.

استعمال المسلمة SAS لاختبار تطابق مثلثين.

ما بعد الدرس 3-4

صياغة تخمينات حول خصائص المضلعات واختبارها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا".

واسأل:

- هل يمكن أن تثبت السبورة، إن لم يكن للذراعين الطول نفسه؟ لا
- ما الشروط التي يجب أن تتحقق حتى يكون: $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$؟ أن تكون جميع الأضلاع المتناظرة والزوايا المتناظرة للمثلثين متطابقة.
- كيف يتأثر تطابق المثلثين اللذين تمَّت مناقشتهما، إذا لم تكن الأذرع الجانبيّة على مسافات متساوية من قمّة السبورة؟ لن يكون المثلثان المتكونان متطابقين.

مصادر الدرس 3-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (171)	• تنويع التعليم، ص (171, 177)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (23)	• كتاب التمارين، ص (23)	• كتاب التمارين، ص (23)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

مثال 2 على اختبار معياري

إجابة مطولة: إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(1, 1), B(0, 3), C(2, 5)$.
ورؤوس المثلث EFG هي: $E(1, -1), F(2, -5), G(4, -4)$.

a) مثِّل كلا المثلثين في مستوى إحداثيٍّ واحدٍ.

b) استعمل هذا التمثيل؛ لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسِّر إجابتك.

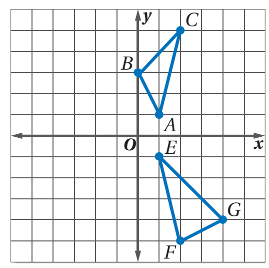
c) اكتب برهانًا منطقيًّا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء b.

اقرأ سؤال الاختبار:

في هذه المسألة يُطلب إليك عمل ثلاثة أشياء؛ إذ يتعين عليك في الجزء a أن ترسم كلًّا من $\triangle ABC, \triangle EFG$ في مستوى إحداثيٍّ واحد. وفي الجزء b أن تضع تخمينًا يبين ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ أم لا، اعتمادًا على الرسم. وأخيرًا عليكَ في الجزء c أن تثبت صحّة تخمينك.

حل سؤال الاختبار:

a)



b) يتضح من الرسم أن المثلثين مختلفان في الشكل؛ لذا يمكن أن نخمِّن أنهما ليسا متطابقين.

c) استعمل صيغة المسافة لبيان أن أطوال بعض الأضلاع المتناظرة غير متساوية.

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$
$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$
$$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$
$$EF = \sqrt{(2-1)^2 + [-5-(-1)]^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$
$$FG = \sqrt{(4-2)^2 + [-4-(-5)]^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$EG = \sqrt{(4-1)^2 + [-4-(-1)]^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

وبما أن $AB = FG, AC = EF$، في حين أن $BC \neq EG$، فإن شروط مسلمة التطابق SSS غير متحققة؛ إذن $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$.

✓ تحقق من فهمك

2) إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي $J(2, 5), K(1, 1), L(5, 2)$. ورؤوس المثلث NPQ هي $N(-3, 0), P(-7, 1), Q(-4, 4)$. **A–C) انظر ملحق الإجابات**

A) مثِّل كلا المثلثين في مستوى إحداثيٍّ واحدٍ.

B) استعمل هذا التمثيل؛ لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسِّر إجابتك.

C) اكتب برهانًا منطقيًّا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء **B**.

قراءة الرياضيات

الرموز
تقرأ العبارة $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$ المثلث ABC لا يطابق المثلث EFG.

مسلمة SSS

المثالان 1, 2 يبيِّنان كيفية إثبات تطابق مثلثين باستعمال المسلّمة 3.1 .

✓ التقويم التكويني

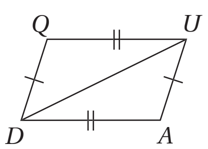
استعمل أسئلة "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

1 اكتب برهانًا تسلسليًّا.

المعطيات: $\overline{QU} \cong \overline{AD}, \overline{QD} \cong \overline{AU}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle QUD \cong \triangle ADU$



برهان تسلسلي:

$\boxed{\overline{QD} \cong \overline{AU}}$ معطى

$\boxed{\overline{QU} \cong \overline{AD}}$ معطى

$\boxed{\overline{DU} \cong \overline{DU}}$ خاصية الانعكاس

$\boxed{\triangle QUD \cong \triangle ADU}$ SSS

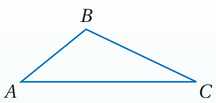
تنويع التعليم

ضمن فوق

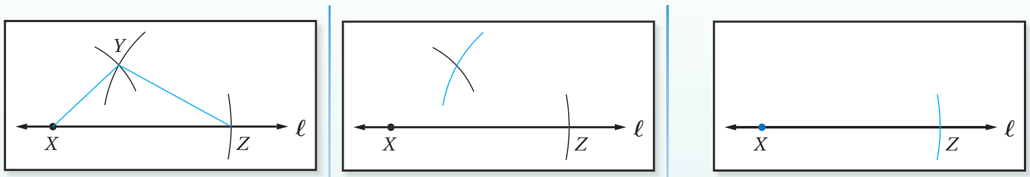
المتعلمون المنطقيون: يمكن أن يستعمل الطلاب مدخلًا منظّمًا لكتابة براهين للمسائل والأمثلة في هذا الدرس. اطلب إلى الطلاب أن يبدؤوا التفكير في الطرق الممكنة للبرهان باستعمال مسلمة SSS أو SAS، ويجب عليهم تفحّص المسألة لتحديد المعلومات المعطاة، وكيف يمكنهم إيجاد معلومات أخرى تلزمهم للبرهان. وأخيرًا يمكنهم استحضار معرفتهم السابقة لنقطة المنتصف والمسافة وعلاقات الزوايا... إلخ؛ لاستخراج أي معلومة أخرى ضروريّة، وتجميع الحقائق اللازمة للبرهان النهائي.

إنشاء هندسي

إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال المسلّمة (SSS)



ارسم مثلثًا وسمّه $\triangle ABC$، ثم استعمل المسلمة SSS لتنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.



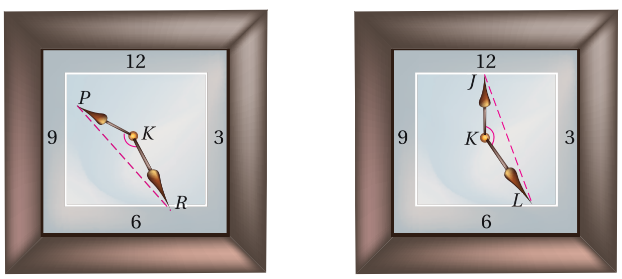
الخطوة 1 عيّن النقطة X على المستقيم ℓ. ثم أنشئ $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$ على ℓ كما يأتي:

- ركز رأس الفرجار في النقطة A، وافتحه حتى يصل القلم إلى النقطة C.
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ركِّز رأس الفرجار في X، وارسم قوسًا يقطع المستقيم ℓ وسمِّ نقطة التقاطع Z.

الخطوة 2 أنشئ قوسًا طول نصف قطره AB، ومركزه X، وقوسًا آخر طول نصف قطره BC، ومركزه Z (مستعملًا الفرجار كما في الخطوة 1).

الخطوة 3 سمِّ نقطة تقاطع القوسين Y. وارسم $\overline{XY}, \overline{ZY}$ لتشكل $\triangle XYZ$.

مسلمة التطابق: ضلعان والزاوية المحصورة بينهما SAS: تُسمّى الزاوية المتكونة من ضلعين متجاورين لمضلع **زاوية محصورة**. تأمّل الزاوية المحصورة والمتكونة من عقربَي الساعة في كلا الوضعين الموضَّحين أدناه، ولاحظ أنه كلما شكّل العقربان زاويةً لها القياس نفسه، فستكون المسافتان بين طرفَي العقربين $\overline{PR}$, $\overline{JL}$ متساويتين.



$\triangle PKR \cong \triangle JKL$

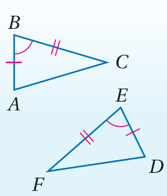
أيُّ مثلثين يتكونان من زوجين من الأضلاع المتساوية في الطول وزاويتين محصورتين متساويتين في القياس يكونان متطابقين. وهذا يوضح المسلمة الآتية:

مسلمة 3.2 مسلمة التطابق: ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (SAS)

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا طابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر، فإنّ المثلثين متطابقان.

مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DE}$،
$\angle B \cong \angle E$،
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$،
فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



مثال إضافي

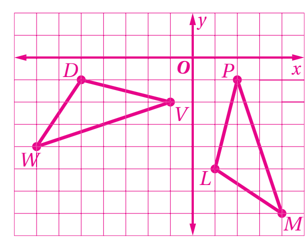
2 إجابة مطولة: إحداثيات رؤوس المثلث DVW هي: $D(-5,-1)$، $V(-1,-2), W(-7,-4)$. ورؤوس المثلث LPM هي $L(1,-5), P(2,-1), M(4,-7)$.

a) مثّل كلا المثلثين على المستوى الإحداثي نفسه.

b) استعمل هذا التمثيل؛ لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا؟

c) اكتب برهانًا منطقيًّا باستعمال الهندسة الإحداثية لتؤيد التخمين الذي وضعته في الجزء b.

a)



b) المثلثان متطابقان.

c) من حساب أطوال القطع المستقيمة

$$WD = \sqrt{(-5+7)^2+(-1+4)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$ML = \sqrt{(4-1)^2+(-7+5)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$DV = \sqrt{(-1+5)^2+(-2+1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$LP = \sqrt{(2-1)^2+(-1+5)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$VW = \sqrt{(-7+1)^2+(-4+2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

$$PM = \sqrt{(4-2)^2+(-7+1)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

يتضح أنّ: $WD = ML, DV = LP$، $VW = PM$. وبحسب تعريف القطع المستقيمة المتطابقة، فإن جميع القطع المتناظرة متطابقة؛ لذلك يكون $\triangle WDV \cong \triangle MLP$ بحسب المسلمة SSS.

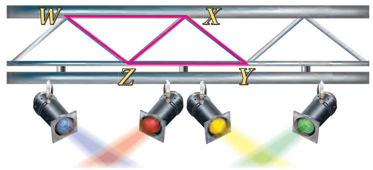
المحتوى الرياضي

تسمية المثلثات: وضّح للطلاب أنّه عند كتابة المثلثات المتطابقة، يجب أن يكتبوا الرؤوس المتناظرة بالترتيب نفسه. فإذا استعمل في العبارة $\triangle PKR \cong \triangle JKL$ الترتيب الصحيح للأضلاع والزوايا المتناظرة في المثلثين، فإنّه من غير الصواب كتابة $\triangle PRK \cong \triangle JKL$.

الربط مع الحياة

فنيو الإضاءة: في صناعة الصور المتحركة، يقوم فنيُّو الإضاءة بتحديد مواقع المصابيح التي يتطلبها الفيلم. ويقوم هؤلاء الفنيون بالتأكد من أن الزوايا التي يشكلها الضوء في مواضعها الصحيحة.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال SAS لإثبات تطابق المثلثات



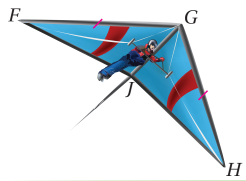
إضاءة: تبدو دعامات السقّالة حاملة المصابيح الظاهرة في الصورة وكأنّها مكونة من مثلثات متطابقة. فإذا كان $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$, $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$، فاكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$	1) معطى
2) $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$	2) معطى
3) $\angle WXZ \cong \angle XZY$	3) نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة
4) $\overline{XZ} \cong \overline{ZX}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$	5) SAS

تحقق من فهمك — انظر الهامش

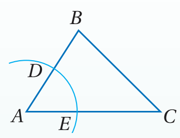
3) **طيران شراعي:** في الصورة المجاورة يبدو جناحا الطائرة الشراعية أنهما مثلثان متطابقان. فإذا كانت $\overline{FG} \cong \overline{GH}$ ، $\overline{JG}$ تنصّف $\angle FGH$، فأثبت أنّ $\triangle FGJ \cong \triangle HGJ$.

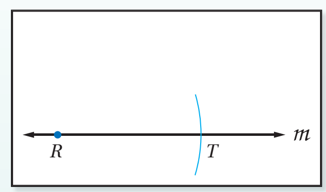


يمكنك أيضًا أن تنشئ مثلثات متطابقة إذا عُلم طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

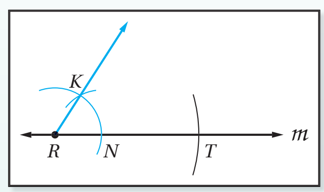
إنشاء هندسي — إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال مسلمة التطابق "ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (SAS)"

ارسم مثلثًا وسمِّه $\triangle ABC$، ثم استعمل المسلمة SAS لتنشئ $\triangle RST$ الذي يطابق $\triangle ABC$.



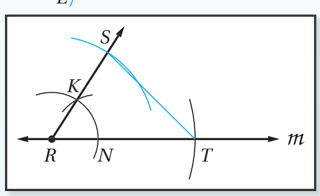


الخطوة 1: عيِّن النقطة R على المستقيم m. ثم أنشئ $\overline{RT} \cong \overline{AC}$ على m.



الخطوة 2: أنشئ $\angle R \cong \angle A$، باستعمال $\overline{RT}$ ضلعًا للزاوية، والنقطة R رأسًا لها كما يأتي:

- ضع رأس الفرجار على النقطة A، وارسم قوسًا يقطع ضلعَي $\angle A$. سمِّ نقطتَي التقاطع D, E.
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع رأس الفرجار عند R وارسم قوسًا يبدأ فوق المستقيم m ويقطعه، سمِّ نقطة التقاطع N.
- ضع رأس الفرجار عند E وعدِّل الفتحة حتى يصل رأس القلم إلى D.
- دون تغيير فتحة الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة N، وارسم قوسًا يقطع القوس الذي رسمته سابقًا في النقطة K، ثم ارسم $\overline{RK}$.



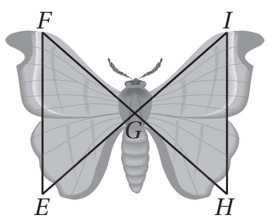
الخطوة 3: أنشئ $\overline{RS} \cong \overline{AB}$، ثم ارسم $\overline{ST}$ لتشكّل $\triangle RST$.

مسلمة SAS

المثالان 3, 4 يبيّنان كيفية إثبات تطابق مثلثين، عندما يتطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحد المثلثين مع ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الآخر.

مثال إضافي

3 **علم الحشرات:** يبدو جناحا نوع من فراشات الليل الظاهرة في الصورة أدناه وكأنها مكونة من مثلثين. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $\triangle FEG \cong \triangle HIG$ إذا كان $\overline{EI} \cong \overline{FH}$، و G نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{EI}$, $\overline{FH}$.



العبارات	المبررات
1) $\overline{EI} \cong \overline{FH}$، G منتصف $\overline{EI}$، G منتصف $\overline{FH}$.	1) معطيات
2) $\overline{FG} \cong \overline{HG}$; $\overline{EG} \cong \overline{IG}$	2) نظرية نقطة المنتصف
3) $\angle FGE \cong \angle HGI$	3) نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
4) $\triangle FEG \cong \triangle HIG$	4) SAS

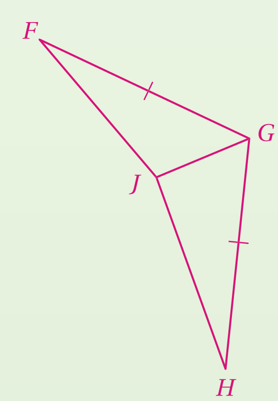
تنبيه!

الزاوية المحصورة: لا يمكن استعمال المسلمة SAS، إلّا إذا كانت الزاوية محصورةً بين ضلعين متجاورين.

إجابة (تحقق من فهمك)

3) **المعطيات:** $\overline{FG} \cong \overline{GH}$، $\overline{JG}$ تنصّف $\angle FGH$.

المطلوب: $\triangle FGJ \cong \triangle HGJ$



البرهان:

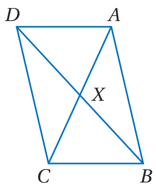
العبارات	المبررات
1) $\overline{FG} \cong \overline{GH}$، $\overline{JG}$ تنصّف $\angle FGH$.	1) معطيات
2) $\angle FGJ \cong \angle HGJ$	2) تعريف منصف الزاوية
3) $\overline{JG} \cong \overline{JG}$	3) خاصية الانعكاس للتطابق
4) $\triangle FGJ \cong \triangle HGJ$	4) SAS

مثال 4 استعمال تطابق المثلثين بضلعين وزاوية محصورة SAS في البراهين

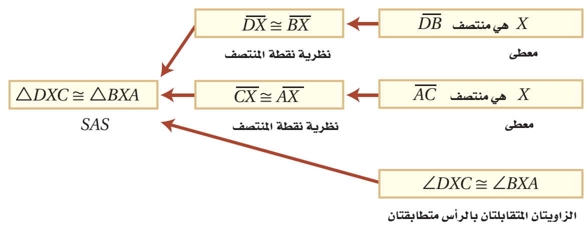
اكتب برهانًا تسلسليًّا لما يلي.

المعطيات: X منتصف $\overline{DB}$
و X منتصف $\overline{AC}$

المطلوب: $\triangle DXC \cong \triangle BXA$



البرهان:

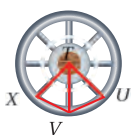


إرشادات للدراسة

البراهين التسلسلية
يمكن كتابة البراهين التسلسلية إما رأسيًّا وإما أفقيًّا.

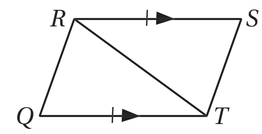
تحقق من فهمك

4) قضبان الإطار الداخلية تقسمه إلى ثمانية أجزاء. إذا كان: $\overline{TU} \cong \overline{TX}$ وَ $\angle XTV \cong \angle UTV$، فبين أن $\triangle XTV \cong \triangle UTV$.
انظر ملحق الإجابات



مثال إضافي

4 اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $\overline{RS} \parallel \overline{QT}$, $\overline{RS} \cong \overline{QT}$

المطلوب: إثبات $\triangle RQT \cong \triangle TSR$

بما أن $\overline{RS} \parallel \overline{QT}$ ، فإن الزوايا المتبادلة داخليًّا متطابقة، إذن $\angle QTR \cong \angle SRT$ ، وبما أن $\overline{RS} \cong \overline{QT}$، وأن $\overline{RT} \cong \overline{RT}$ بحسب نظرية الانعكاس، فإن $\triangle RQT \cong \triangle TSR$ بحسب SAS

3 التدريب

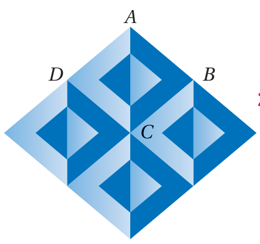
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-4 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تأكد

المثال 1

1) **الخداع البصري:** في الشكل المقابل المربع $ABCD$ يطابق المربعات الثلاثة الأخرى التي تشكّل النمط.



a) ما عدد المثلثات المختلفة القياس التي استُعملت لعمل هذا النمط؟ 2

b) استعمل مسلمة التطابق SSS لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.
انظر ملحق الإجابات

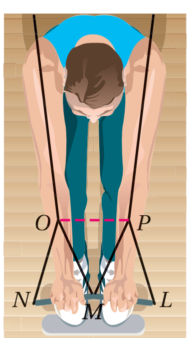
المثال 2

2) **إجابة مطولة:** إحداثيات رؤوس $\triangle ABC$ هي: $A(-3, -5)$, $B(-1, -1)$, $C(-1, -5)$. ورؤوس $\triangle XYZ$ هي $X(5, -5)$, $Y(3, -1)$, $Z(3, -5)$. (a–c انظر ملحق الإجابات)

a) مثّل كلا المثلثين في مستوى إحداثيٍّ واحد.

b) استعمل هذا التمثيل لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسِّر إجابتك.

c) اكتب برهانًا منطقيًّا باستعمال الهندسة الإحداثية يدعم تخمينك في الفرع b.



المثال 3

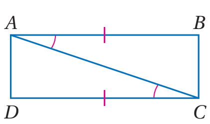
3) **رياضة:** في الشكل المجاور، إذا كان: $\angle LPM \cong \angle NOM$, $\overline{LP} \cong \overline{NO}$ ، $\triangle MOP$ متطابق الأضلاع، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\triangle LMP \cong \triangle NMO$.
انظر ملحق الإجابات

المثال 4

4) اكتب برهانًا ذا عمودين. انظر ملحق الإجابات

المعطيات: $\overline{BA} \cong \overline{DC}, \angle BAC \cong \angle DCA$

المطلوب: $\overline{BC} \cong \overline{DA}$



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	12–5 ، 34-24
ضمن ضمن المتوسط	21–5 فردي، 34-24
فوق فوق المتوسط	30-13 ، (اختياري: 34-31)

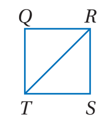
تدرب وحل المسائل

المثال 1 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المذكور في كلٍّ من السؤالين الآتيين: **5, 6** انظر الهامش

5) برهان حرٌّ

المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{SR}$, $\overline{ST} \cong \overline{QT}$

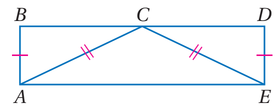
المطلوب: $\triangle QRT \cong \triangle SRT$



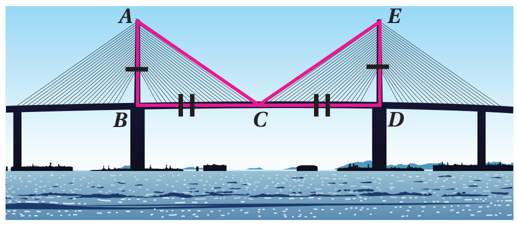
6) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\overline{CA} \cong \overline{CE}$
$\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



7) **جسور:** جسر الرياض المعلق طوله 763m، وهو مثبت بحبال معدنيّة معلقة بدعامتين خرسانيتين. كما هو مبين بالشكل، بحيث يلتقي الحبلان المعدنيان العلويان في النقطة C عند منتصف المسافة بين الدعامتين، إذا كانت $AB = ED$: فأثبت أن المثلثين المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان. انظر ملحق الإجابات



المثال 2 حدّد ما إذا كان $\triangle MNO \cong \triangle QRS$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ووضّح إجابتك: **8, 9** انظر الهامش

8) $M(2, 5), N(5, 2), O(1, 1), Q(-4, 4), R(-7, 1), S(-3, 0)$

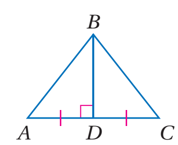
9) $M(0, -1), N(-1, -4), O(-4, -3), Q(3, -3), R(4, -4), S(3, 3)$

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين: **10, 11** انظر ملحق الإجابات

10) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$,
$\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$

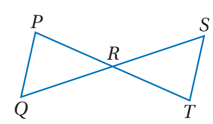
المطلوب: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



11) برهان حرٌّ

المعطيات: R نقطة المنتصف لكلٍّ من $\overline{QS}$, $\overline{PT}$

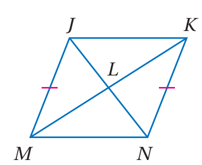
المطلوب: $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$



المثال 4 **12)** **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًّا انظر ملحق الإجابات

المعطيات: $\overline{JM} \cong \overline{NK}$ ؛ L نقطة المنتصف لكلٍّ من $\overline{JN}$, $\overline{KM}$

المطلوب: $\angle MJL \cong \angle KNL$



إجابات:

5) البرهان: نعلم أن $\overline{QR} \cong \overline{SR}, \overline{ST} \cong \overline{QT}$.
وبحسب خاصية الانعكاس $\overline{RT} \cong \overline{RT}$ وبما أن $\overline{QR} \cong \overline{SR}, \overline{ST} \cong \overline{QT}, \overline{RT} \cong \overline{RT}$ ، فإن $\triangle QRT \cong \triangle SRT$ بحسب SSS.

6) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\overline{CA} \cong \overline{CE}$ ، $\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$	1) المعطيات
2) C نقطة منتصف $\overline{BD}$	2) تعريف منصف القطعة المستقيمة
3) $\overline{BC} \cong \overline{CD}$	3) نظرية نقطة المنتصف
4) $\triangle ABC \cong \triangle EDC$	4) (SSS)

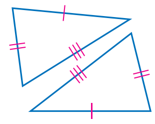
8) $MN = \sqrt{18}$, $NO = \sqrt{17}$, $MO = \sqrt{17}$, $QR = \sqrt{18}$, $RS = \sqrt{17}$, $QS = \sqrt{17}$. بما أن كل ضلعين من الأضلاع المتناظرة متساويان في الطول فإنهما متطابقان، إذن $\triangle MNO \cong \triangle QRS$ بحسب SSS.

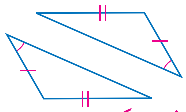
9) $MN = \sqrt{10}$, $QR = \sqrt{2}$, $RS = \sqrt{50}$, $QS = 6$. بما أن $\overline{MN}$ في المثلث الأول لا يطابق أي ضلع في المثلث الثاني، إذن يوجد ضلعان متناظران غير متطابقين، فالمثلثان غير متطابقين، وبذلك يمكن أن نكتفي بحساب طولَي ضلعين متناظرين غير متطابقين.

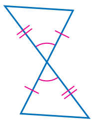
التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: عيّن عدّة أسئلة للطلاب كي يحلّوها. ثم اختر عدّة طلاب لعرض حلولهم وتوضيح كيف استعملوا المسلمة SSS أو SAS لإثبات تطابق مثلثين.

حدّد ما إذا كان المثلثان في كلٍّ من الأسئلة الآتية متطابقين أم لا. وضح إجابتك.

13) 
SSS

14) 
غير ممكن

15) 
SAS

إرشادات للدراسة

تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر، لا يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان.

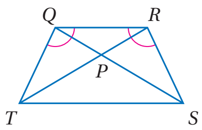
16) **إشارة تحذيرية:** استعمل الشكل المجاور.

a) ما اسم المجسم الذي تمثّله إشارة التحذير. هرم

b) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ، $\overline{CB} \cong \overline{CD}$ ، فأثبت أنّ $\triangle ACB \cong \triangle ACD$.

c) لماذا يبدو المثلثان غير متطابقين في الشكل؟ (b, c انظر ملحق الإجابات

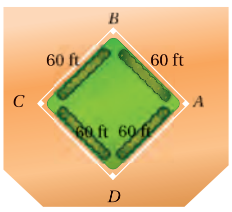
17) **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًّا. انظر ملحق الإجابات



المعطيات: $\triangle TPQ \cong \triangle SPR$
$\angle TQR \cong \angle SRQ$

المطلوب: $\triangle TQR \cong \triangle SRQ$

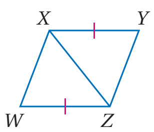
18) في الشكل المجاور ABCD مزرعة مربعة الشكل، ويريد أخوان فصلها باستعمال سياج على أحد القطرين. (a, b انظر ملحق الإجابات



a) اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $BD = AC$.

b) اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنّ $\angle BDC \cong \angle BDA$.

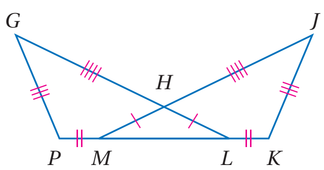
19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (19, 20 انظر الهامش



المعطيات: $\overline{YX} \cong \overline{WZ}$, $\overline{YX} \parallel \overline{ZW}$

المطلوب: $\triangle YXZ \cong \triangle WZX$

20) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $\overline{HL} \cong \overline{HM}$, $\overline{PM} \cong \overline{KL}$,
$\overline{PG} \cong \overline{KJ}$, $\overline{GH} \cong \overline{JH}$

المطلوب: $\angle G \cong \angle J$

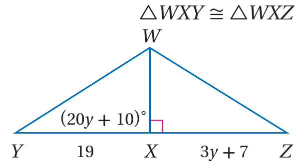
إرشادات للدراسة

الأشكال

عند كتابة البراهين أو حل المسائل التي تتضمن مثلثات متطابقة، من المفيد أن ترسم شكلًا خاصًا بك، وتعيّن عليه الأضلاع والزوايا المتطابقة التي تجدها.

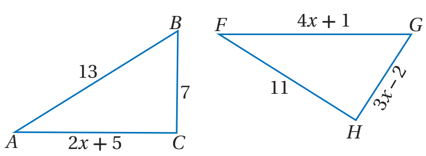
جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وفسِّر إجابتك:

21) $\triangle WXY \cong \triangle WXZ$



$y = 4$ ؛ لأن: $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$, $\angle WXZ \cong \angle WXY$

22) $\triangle ABC \cong \triangle FGH$



$x = 3$ ؛ لأن: $\overline{AC} \cong \overline{FH}$, $\overline{BC} \cong \overline{GH}$

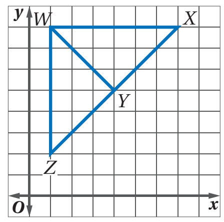
إجابات:

19) **البرهان:**

العبارات	المبررات
1) $\overline{YX} \cong \overline{WZ}$, $\overline{YX} \parallel \overline{ZW}$	1) معطيات
2) $\angle YXZ \cong \angle WZX$	2) زاويتان متبادلتان داخليًّا
3) $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$	3) خاصيّة الانعكاس
4) $\triangle YXZ \cong \triangle WZX$	4) SAS

20) **البرهان:** بما أنّ $\overline{GH} \cong \overline{JH}$ ، $\overline{HL} \cong \overline{HM}$، فإنه وبحسب تعريف التطابق، $GH = JH$, $HL = HM$. وبحسب مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة يكون $GL = GH + HL$، $JM = JH + HM$. وبالتعويض $GL = JH + HM$ وهذا يعني أن $GL = JM$، وبحسب تعريف التطابق تكون $\overline{GL} \cong \overline{JM}$ وبما أنّ $\overline{PM} \cong \overline{KL}$، فإنّه وبحسب تعريف التطابق يكون $PM = KL$. باستعمال خاصية الجمع للمساواة $PM + ML = KL + LM$ وهذا يعني أن $PL = KM$. وبحسب تعريف التطابق يكون، $\overline{PL} \cong \overline{KM}$. وبما أنّ $\overline{PG} \cong \overline{KJ}$، فإنه وبحسب SSS، يكون $\triangle GPL \cong \triangle JKM$. ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فإن، $\angle G \cong \angle J$.

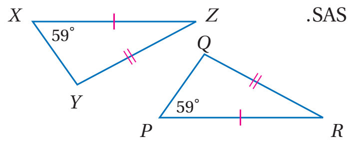
مسائل مهارات التفكير العليا



23) تحدٍّ: في الشكل المجاور: a, b انظر ملحق الإجابات

a) صف طريقتين يمكنك استعمالهما لإثبات أنّ $\triangle WYZ$ يطابق $\triangle WYX$. علمًا بأنه لا يُسمح باستعمال المسطرة أو المنقلة. وأيّ طريقة تعتقد أنها فعّالة أكثر؟ وضح إجابتك.

b) أثبت أن $\triangle WYZ \cong \triangle WYX$ ووضّح إجابتك.



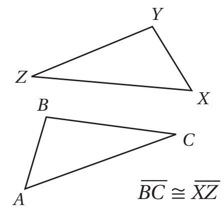
24) اكتشف الخطأ: قال أحمد: إنّ $\triangle PRQ \cong \triangle XYZ$ بحسب SAS. فاعترض خالد وقال: لا توجد معلومات كافية لإثبات أن المثلثين متطابقان. أيُّهما كانت إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

24) خالد؛ لأن الزاوية يجب أن تكون محصورة، والزاوية هنا ليست محصورة.

25) اكتب: إذا كان زوجان من الأضلاع المتناظرة لمثلثين قائمَي الزاوية متطابقين، فهل المثلثان متطابقان؟ وضح إجابتك. انظر ملحق الإجابات

تدريب على اختبار

26) في الشكلين المجاورين، $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ و $\angle C \cong \angle Z$. ما المعلومة الإضافية التي يمكن استعمالها لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$؟ **A**



A $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$

B $\overline{AB} \cong \overline{XY}$

C $\overline{BC} \cong \overline{XZ}$

D $\overline{XZ} \cong \overline{XY}$

27) إذا كان $-2a + b = -7$، فما قيمة a إذا علمت أن $b = -1$؟ **C**

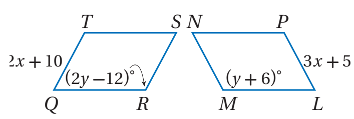
A -1

B 2

C 3

D 4

مراجعة تراكمية



في الشكلين المجاورين، إذا علمت أن متوازي الأضلاع $LMNP \cong$ متوازي الأضلاع $QRST$، فأوجد: (الدرس 3-3)

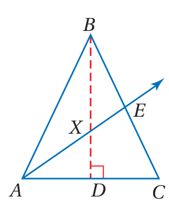
28) قيمة x. **5**

29) قيمة y. **18**

30) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة: "الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان". وحدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًا. (الدرس 1-3) انظر ملحق الإجابات

استعد للدرس اللاحق

إذا علمت أن $\overline{BD}$, $\overline{AE}$ ينصّفان الزاويتين والضلعين اللذين يقطعانهما، فاذكر القطع المستقيمة والزوايا المشار إليها فيما يأتي:



31) قطعة مستقيمة تطابق $\overline{EC}$ **$\overline{BE}$**

32) زاوية تطابق $\angle ABD$ **$\angle CBD$**

33) زاوية تطابق $\angle BDC$ **$\angle BDA$**

34) قطعة مستقيمة تطابق $\overline{AD}$ **$\overline{CD}$**

4 التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا بكلماتهم الخاصّة كيف يمكنهم استعمال مسلمتَي SSS و SAS لإثبات تطابق مثلثين.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 4-3, 3-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (49).

تنبيه!

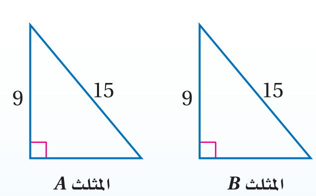
اكتشف الخطأ: في السؤال 24، كانت إجابة خالد هي الصحيحة. فمع أنّه يوجد زوجان من الأضلاع المتناظرة المتطابقة وزوج من الزوايا المتناظرة المتطابقة في المثلثين، إلَّا أنّ الزاوية في كلٍّ منهما ليست متكونة من الضلعين المتطابقين، ولذلك فهي ليست الزاوية المحصورة. ولتطبيق المسلمة SAS، يجب أن تكون الزاوية محصورة، ولا توجد معلومات إضافية معطاة أو يمكن استنتاجها من الشكل. إذن لا توجد معلومات كافية لتحديد ما إذا كان المثلثان متطابقين.

تنويع التعليم

فوق

توسّع: المثلثان A و B قائما الزاوية ولكلٍّ منهما ساق طولها 9 وطول وتر كلٍّ منهما 15، أثبت أن المثلث A يطابق المثلث B. ووضح إجابتك.

باستعمال نظرية فيثاغورس، تجد أن طول الساق الآخر في كلٍّ من المثلثين تساوي 12، إذن المثلثان متطابقان بحسب SSS.



مصادر المعلم للأنشطة الصفّية

الفصل 3

مصادر المعلم للأنشطة الصفّية

مصادر الدرس 4 - 3

دون المتوسط ضمن المتوسط فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21) دون

الاسم ________ التاريخ ________

3-4 تدريبات إعادة التعليم

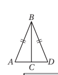
إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

المسلّمة SSS:

تعلم أن المثلثين يكونان متطابقين إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة، وكانت زواياهما المتناظرة متطابقة. المسلّمة: ضلع – ضلع – ضلع (SSS)، وتمكّنك من أن تثبت تطابق مثلثين إذا علمت أن أضلاعهما المتناظرة متطابقة .

مسلمة التطابق بثلاثة أضلاع (SSS):	إذا طابقت الأضلاع الثلاثة في مثلث الأضلاع المناظرة لها في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{DB}$, C نقطة منتصف $\overline{AD}$.

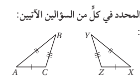
المطلوب: إثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle DBC$.

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{DB}$	1) معطيات
2) C نقطة منتصف $\overline{AD}$	2) معطيات
3) $\overline{AC} \cong \overline{DC}$	3) تعريف نقطة المنتصف
4) $\overline{BC} \cong \overline{BC}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\triangle ABC \cong \triangle DBC$	5) المسلّمة SSS

تمارين

اكتب برهانًا من النوع المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) برهان ذو عمودين:



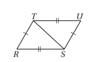
المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{XY}, \overline{AC} \cong \overline{XZ}, \overline{BC} \cong \overline{YZ}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{XY}$ $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$	1) معطيات
2) $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$	2) المسلّمة SSS

2) برهان تسلسلي:



المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UT}, \overline{RT} \cong \overline{US}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle RST \cong \triangle UTS$

البرهان:

$\boxed{\overline{RS} \cong \overline{UT}, \overline{RT} \cong \overline{US}}$ معطى

$\boxed{\overline{TS} \cong \overline{ST}}$ خاصية الانعكاس للتطابق

$\boxed{\triangle RST \cong \triangle UTS}$ المسلمة SSS

الصف: الأول الثانوي 21 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22) دون

الاسم ________ التاريخ ________

3-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

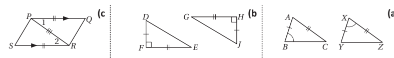
إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

مسلّمة التطابق بضلعين وزاوية محصورة بينهما SAS:

يمكنك إثبات تطابق مثلثين بطريقةٍ أُخرى مستعملًا المسلّمة: ضلع زاوية ضلع (SAS) .

مسلّمة التطابق بضلعين وزاويةٍ محصورةٍ بينهما (SAS)	إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلثٍ نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال أي أزواج المثلثات الآتية يُمكِنك إثبات تطابقها باستعمال المسلّمة SAS.



a) الزاوية المحددة في $\triangle ABC$ ليست محصورة بين الضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$. وبناءً عليه لا يمكنك إثبات تطابق هذين المثلثين مستعملًا المسلّمة SAS.

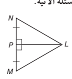
b) الزاويتان القائمتان متطابقتان، وهما محصورتان بين الأضلاع المتناظرة المتطابقة، وبناءً عليه فإن $\triangle DEF \cong \triangle JGH$ وفق المسلّمة SAS.

c) $\angle 1, \angle 2$ متطابقتان؛ لأنهما متبادلتان داخليًا بين مستقيمين متوازيين ومستقيم يقطعهما، وهما محصورتان بين الأضلاع المتناظرة المتطابقة. وبناءً عليه فإن $\triangle PSR \cong \triangle RQP$ وفق المسلّمة SAS.

تمارين

اكتب برهانًا من النوع المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية.

1) برهان ذو عمودين.



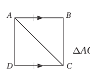
المعطيات: $\overline{NP} \perp \overline{PL}$, $\overline{NP} \cong \overline{PM}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle NPL \cong \triangle MPL$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{NP} \cong \overline{PM}, \overline{NP} \perp \overline{PL}$	1) معطيات
2) $\angle MPL$ قائمة، $\angle NPL$ قائمة	2) القطع المتعامدة تكوّن زوايا قائمة
3) $\angle MPL \cong \angle NPL$	3) الزوايا القائمة متطابقة
4) $\overline{PL} \cong \overline{PL}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\triangle NPL \cong \triangle MPL$	5) المسلّمة SAS

2) برهان تسلسلي:



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ACD \cong \triangle CAB$

البرهان:

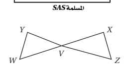
$\boxed{\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{AB} \parallel \overline{CD}}$ معطى

$\boxed{\overline{AC} \cong \overline{AC}}$ خاصية الانعكاس للتطابق

$\boxed{\angle BAC \cong \angle DCA}$ نظرية الزوايا المتبادلة داخليًا

$\boxed{\triangle ACD \cong \triangle CAB}$ المسلمة SAS

3) برهان حر.



المعطيات: V نقطة منتصف $\overline{YZ}$ و V نقطة منتصف $\overline{WX}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle XVZ \cong \triangle WVY$.

البرهان:

بما أن V نقطة منتصف كلٍّ من $\overline{YZ}$, $\overline{WX}$ ، فإن: $\overline{WV} \cong \overline{VX}$ ، $\overline{YV} \cong \overline{VZ}$ من تعريف نقطة المنتصف،

كما أن $m\angle XVZ \cong m\angle YVW$ بالتقابل بالرأس، وعليه فإن $\triangle XVZ \cong \triangle WVY$ بحسب المسلّمة SAS.

الصف: الأول الثانوي 22 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

تدريبات المهارات (23) دون ضمن

الاسم ________ التاريخ ________

3-4 تدريبات المهارات

إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

حدّد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle KLM$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين ، وبرّر إجابتك.

1) $A(-3, 3), B(-1, 3), C(-3, 1), K(1, 4), L(3, 4), M(1, 6)$

$AB = 2, KL = 2, BC = 2\sqrt{2}, LM = 2\sqrt{2}, AC = 2, KM = 2$.

أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية؛ لذا فهي متطابقة.إذن $\triangle ABC \cong \triangle KLM$ وفق المسلّمة SSS.

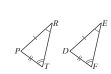
2) $A(-4, -2), B(-4, 1), C(-1, -1), K(0, -2), L(0, 1), M(4, 1)$

$AB = 3, KL = 3, BC = \sqrt{13}, LM = 4, AC = \sqrt{10}, KM = 5$.

أطوال الأضلاع المتناظرة غير متساوية، لذا فهي غير متطابقة، وعليه يكون المثلثان $\triangle ABC$, $\triangle KLM$ غير متطابقين.

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

3) برهان تسلسلي.



المعطيات: $\overline{PR} \cong \overline{DE}, \overline{PT} \cong \overline{DF}$

$\angle R \cong \angle E, \angle T \cong \angle F$

المطلوب: إثبات أن $\triangle PRT \cong \triangle DEF$

البرهان :

$\boxed{\overline{PR} \cong \overline{DE}}$ معطيات

$\boxed{\overline{PT} \cong \overline{DF}}$ معطيات

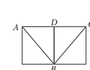
$\boxed{\angle R \cong \angle E}$ معطيات

$\boxed{\angle T \cong \angle F}$ معطيات

$\boxed{\angle P \cong \angle D}$ نظرية الزاوية الثالثة

$\boxed{\triangle PRT \cong \triangle DEF}$ SAS

4) برهان ذو عمودين.



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ و D نقطة منتصف $\overline{AC}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$; D نقطة منتصف $\overline{AC}$	1) معطيات
2) $\overline{AD} \cong \overline{CD}$	2) تعريف نقطة المنتصف
3) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	3) خاصية الانعكاس للتطابق
4) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$	4) المسلّمة SSS

الصف: الأول الثانوي 23 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

3-4 تدريبات حلّ المسألة

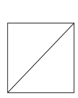
إثبات تطابق المثلثات: SSS, SAS

1) أعواد: تقوم كلٌّ من هند ومها بصنع مجسم باستعمال أعوادٍ خشبيةٍ، فإذا تناولت كلٌّ منهما 3 أعواد أطوالها 30 cm, 28 cm, 29 cm وصنعت مثلثًا، فهل يمكن أن تحصلا على مثلثين غير متطابقين؟ ولماذا؟

لا، أطوال الأعواد ثابتة، وعليه فإن أي ترتيب لها يُعطي المثلث نفسه.

2) حلوى: خبزت سعاد رقاقتين لصنع البقلاوة، وهناك علامات على الطبق الذي خبزتها فيه، مكّنتها من تقسيم الرقاقة مربّعاتٍ كبيرةً، ثم قسّمت كلّ مربّع قطريًّا لتكوين مثلثين متطابقين.

ما المسلّمة التي يمكنك استعمالها لإثبات تطابق المثلثين؟



إما مسلّمة SSS أو SAS

3) ورق جدران: يستعمل سليمان ورقة جدران على شكل مثلث متطابق الضلعين، وزواياه هي: $77°, 77°, 26°$، وأراد أن يقسم الورقة جزأين متطابقين، فقسَمها من رأس الزاوية $26°$ إلى منتصف الضلع المقابل، وقال إن القطعتين متطابقتان؛ لأنه قسَمَها من نقطة منتصف أحد الأضلاع. فهل هذه المعلومة كافية لإثبات التطابق؟ وضِّح إجابتك.

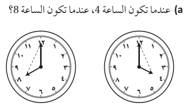
إجابة ممكنة: لا؛ لأنه وضّح تطابق ضلع وزاوية في القطعة الأولى مع ضلع وزاوية في القطعة الثانية فقط، وهي ليست عناصر كافية للتطابق.

4) بلاط: يعمل مُصطفى في تركيب البلاط، ولديه صندوقان من البلاط، يحوي كلٌّ منهما على بلاطات متطابقةً فيما بينها ومتطابقة الأضلاع، إذا أراد أن يتأكدً من أن جميع البلاط في الصندوقين متطابق، فما الذي يتعيَّن عليه فعله؟ وضِّح إجابتك.

إجابة ممكنة: يحتاج فقط إلى قياس طول أحد الأضلاع لبلاطة من الصندوق الأول؛ وطول أحد الأضلاع لبلاطة من الصندوق الثاني.

5) عقارب الساعة: إذا اعتبرنا عقربَي الساعة يشكِّلان ضلعين في مثلث، فحدّد هل المثلثان متطابقان في كلٍّ من الفقرتين a, b. ولماذا؟

a) عندما تكون الساعة 4، عندما تكون الساعة 8؟



متطابقان، تطابق ضلعين وزاوية محصورة بينهما، مسلمة SAS

b) عندما تكون الساعة 4 وعندما تكون مثلث الساعة 8 في ساعتين مختلفتين بأطوال عقاربهما؟

لا؛ لأن العناصر المتناظرة غير متطابقة.

c) اقترح توقيتًا يتطابق مثلثه مع مثلث الساعة 5.

إجابة ممكنة: مثلث الساعة 7.

الصف: الأول الثانوي 24 الفصل 3: المثلثات المتطابقة

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 3

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (25) ضمن فوق

الاسم ______________ التاريخ ________

3-4 التدريبات الإثرائيّة

تطابق المثلثات القائمة :

عرفنا تطابق مثلثين، ثم اكتفينا ببعض العناصر لإثبات تطابق مثلثين، إذا كان المثلثان قائمين، فهل يمكن تقليل عدد العناصر اللّازمة للتطابق.

انفِ أو أثبت صحة كل من العبارات الآتية:

1) يتطابق مثلثان قائمان، إذا تطابق ضلعا الزاوية القائمة في المثلث الأول مع نظائرها من المثلث الثاني؟

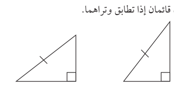
صحيحة، بما أن المثلثين قائمان، إذن فقد تحققت حالة SAS

2) يتطابق مثلثان قائمان، إذا تطابق وتر وأحد ضلعي الزاوية القائمة من الأول مع نظائرها من المثلث الثاني.

صحيحة، إجابة ممكنة يمكن إيجاد طول الضلع الثالث باستعمال نظرية فيثاغورس، وبذلك تنطبق على المثلثين المسلّمة SSS.

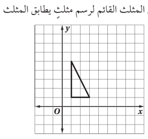
3) يتطابق مثلثان قائمان إذا تطابق وتراهما.

لا، مثال مضاد



4) استعمل معلومات تطابق المثلث القائم لرسم مثلثٍ يطابق المثلث المرسوم على الشبكة، وحدِّد إحداثيات رؤوسه.

انظر إجابات الطلاب.



كتاب التمارين (23) دون ضمن فوق

3 - 4 إثبات تطابق المثلثات SSS , SAS

حدد ما إذا كان $\triangle PQR \cong \triangle DEF$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين أم لا. ووضح إجابتك.

1) $D(-6,1), E(1,2), F(-1,-4), P(0,5), Q(7,6), R(5,0)$

$DE = 5\sqrt{2}, PQ = 5\sqrt{2}, EF = 2\sqrt{10}, QR = 2\sqrt{10}, DF = 5\sqrt{2}, PR = 5\sqrt{2}.$

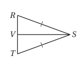
وبما أن الأضلاع المتناظرة لها الطول نفسه ، فإنها تكون متطابقة، ويكون $\triangle PQR \cong \triangle DEF$.

2) $D(-7,-3), E(-4,-1), F(-2,-5), P(2,-2), Q(5,-4), R(0,-5)$

$DE = \sqrt{13}, PQ = \sqrt{13}, EF = 2\sqrt{5}, QR = \sqrt{26}, DF = \sqrt{29}, PR = \sqrt{13}$

وبما أن الأضلاع المتناظرة غير متطابقة ، فإن $\triangle DEF$ لا يطابق $\triangle PQR$.

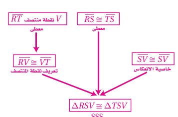
3) **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًّا.



المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{TS}$ ، V نقطة منتصف $\overline{RT}$

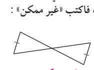
المطلوب: إثبات أن $\triangle RSV \cong \triangle TSV$

البرهان:



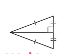
حدد المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات تطابق المثلثين في كلٍّ من الأسئلة الآتية، وإذا لم يكن إثبات تطابقهما ممكنًا، فاكتب «غير ممكن» :

4)



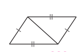
غير ممكن

5)



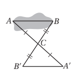
SAS أو SSS

6)



SSS

7) **القياس غير المباشر:** رسم حامد مثلثين متطابقين كما في الشكل المجاور لقياس عرض بُحيرةٍ صغيرةٍ. كيف يعرف أن الطولين AB , $A'B'$ متساويان؟



بما أن $\angle ACB$, $\angle A'CB'$ متقابلتان بالرأس فإنهما متطابقتان، ومن الشكل تلاحظ أن $\overline{BC} \cong \overline{B'C}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C}$ لذا يكون $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C$ بحسب SAS. وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإن $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. ومن تعريف التطابق ينتج أن AB , $A'B'$ متساويان.

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ لتقويم تقدُّم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

للأسئلة التي لم يُجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلبة مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (51)

المطويات متابعة المطويات

قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل، شجِّع الطلاب على مراجعة الملاحظات التي دوّنوها في مطوياتهم حول الدروس 1-3 إلى 4-3

إجابات:

12) $\triangle BED \cong \triangle CFG$; $\triangle BJH \cong \triangle CKM$; $\triangle BPN \cong \triangle CQS$; $\triangle DIH \cong \triangle GLM$; $\triangle DON \cong \triangle GRS$;

17)

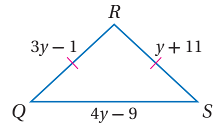
العبارات	المبررات
1) $\triangle LMN$ متطابق الضلعين فيه $\overline{LM} \cong \overline{NM}$	1) معطيات
2) $\overline{MO}$ تنصّف $\angle LMN$	2) معطى
3) $\angle 1 \cong \angle 2$	3) تعريف منصّف الزاوية
4) $\overline{MO} \cong \overline{MO}$	4) خاصيّة الانعكاس
5) $\triangle MLO \cong \triangle MNO$	5) (SAS)

الفصل 3 اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-3 إلى 4-3

1) **هندسة إحداثيّة:** صنّف $\triangle ABC$ الذي رؤوسه $A(-2,-1), B(-1,3), C(2,0)$ إلى مختلف الأضلاع أو متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين. (الدرس 1-3) **متطابق الضلعين**

2) **اختيار من متعدّد:** أيٌّ مما يأتي يمثل أطوال أضلاع المثلث المتطابق الضلعين QRS؟ (الدرس 1-3) **A**



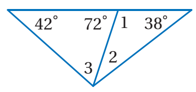
A 17, 17, 15

B 15, 15, 16

C 14, 15, 14

D 14, 14, 16

أوجد كلًّا من قياسات الزوايا الآتية: (الدرس 2-3)

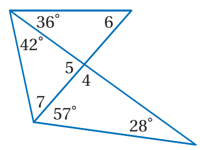


3) $m\angle 1$ **108°**

4) $m\angle 2$ **34°**

5) $m\angle 3$ **66°**

أوجد كلًّا من قياسات الزوايا الآتية: (الدرس 2-3)



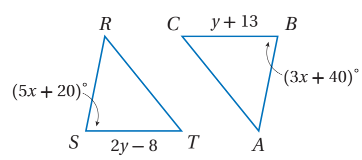
6) $m\angle 4$ **95°**

7) $m\angle 5$ **85°**

8) $m\angle 6$ **49°**

9) $m\angle 7$ **53°**

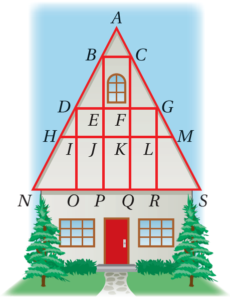
في الشكلين أدناه، إذا علمت أن $\triangle RST \cong \triangle ABC$ فأوجد: (الدرس 3-3)



10) قيمة x. **10**

11) قيمة y. **21**

12) **فن العمارة:** يبيّن الشكل المجاور بيتًا واجهته على شكل الحرف A، وتظهر عليه نقاط مختلفة. افترض أن القطع المستقيمة والزوايا التي تبدو أنها متطابقة هي متطابقة فعلًا. اكتب المثلثات المتطابقة. (الدرس 3-3) **انظر الهامش**

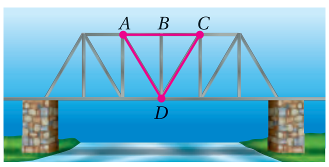


13) **اختيار من متعدد:** إذا كان $\triangle CBX \cong \triangle SML$، فأي عبارة ممّا يأتي صحيحة؟ (الدرس 3-3) **D**

A $\overline{CB} \cong \overline{ML}$ **C** $\angle X \cong \angle S$

B $\overline{XC} \cong \overline{ML}$ **D** $\angle XCB \cong \angle LSM$

14) **جسور:** يُظهر الجسر في الشكل أدناه أن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$، وأن B نقطة منتصف $\overline{AC}$. ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات أنّ $\triangle ABD \cong \triangle CBD$؟ (الدرس 4-3) **SSS أو SAS**



حدّد ما إذا كان $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 4-3)

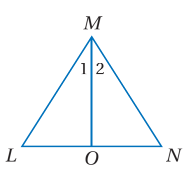
15) $P(3,-5), Q(11,0), R(1,6), X(5,1), Y(13,6), Z(3,12)$ **نعم**

16) $P(-3,-3), Q(-5,1), R(-2,6), X(2,-6), Y(3,3), Z(5,-1)$ **لا**

17) اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 4-3) **انظر الهامش**

المعطيات: $\triangle LMN$ متطابق الضلعين. فيه، $\overline{LM} \cong \overline{NM}$، $\overline{MO}$ تنصّف $\angle LMN$.

المطلوب: $\triangle MLO \cong \triangle MNO$



مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس 1-3 إلى 4-3		تدريبات إعادة التعليم، ص (16 ,11 ,6)
	تدريبات المهارات ، ص (18 ,13 ,8)		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

3-5 إثبات تطابق المثلثات ASA , AAS
Proving Triangles Congruent - ASA, AAS

فيما سبق:
درست إثبات تطابق مثلثين باستعمال SSS , SAS .
(الدرس 4-3)

والآن:
- أستعمل المسلمة ASA لاختبار التطابق.
- أستعمل النظرية AAS لاختبار التطابق.

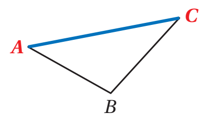
المفردات:
الضلع المحصور
Included Side

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تتضمن مسابقات التجديف شخصين أو أكثر يجلسون ووجوههم نحو مؤخرة القارب، ولكلٍّ منهم مجداف. ويتطلب السباق عادة مسطّحًا من الماء طوله 1500 متر على الأقل، ويمكن استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة، مثل طول مضمار سباق الزوارق.

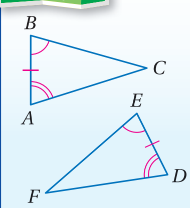
مسلّمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما ASA: الضلع الواقع بين زاويتين متتاليتين لمضلع يُسمى **الضلع المحصور**، ففي $\triangle ABC$ المجاور، $\overline{AC}$ هو الضلع المحصور بين $\angle C$, $\angle A$.



مسلمة 3.3 التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA) — أضف إلى مطويتك

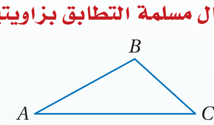
إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle D$,
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$,
$\angle B \cong \angle E$,
فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



إنشاء هندسي إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال مسلمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA)

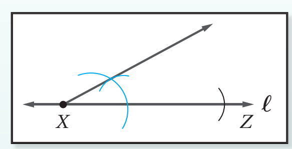
ارسم مثلثًا وسمِّه $\triangle ABC$، ثم استعمل المسلّمة ASA لتنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.



الخطوة 1:

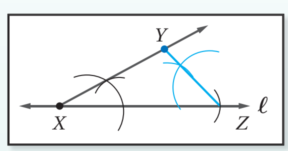
ارسم مستقيمًا ℓ، واختر عليه النقطة X. وأنشئ $\overline{XZ}$ على أن تكون $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$.

الخطوة 2:



أنشئ زاوية مطابقة لـِ $\angle A$ عند النقطة X باستعمال $\overline{XZ}$ ضلعًا للزاوية.

الخطوة 3:



أنشئ زاوية مطابقة لـِ $\angle C$ عند النقطة Z باستعمال $\overline{XZ}$ ضلعًا للزاوية، وسمِّ نقطة تقاطع الضلعين الجديدين للزاويتين Y.

مصادر الدرس 5-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (181, 185)	• تنويع التعليم، ص (181, 185)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (24)	• كتاب التمارين، ص (24)	• كتاب التمارين، ص (24)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

3-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-5

إثبات تطابق مثلثين باستعمال المسلمتين SSS و SAS.

الدرس 3-5

استعمال المسلمة AAS لاختبار تطابق مثلثين.

استعمال المسلمة ASA لاختبار تطابق مثلثين.

ما بعد الدرس 3-5

استعمال مسلمات تطابق المثلثات لوضع تخمينات وتبرير خصائص الأشكال الهندسيّة.

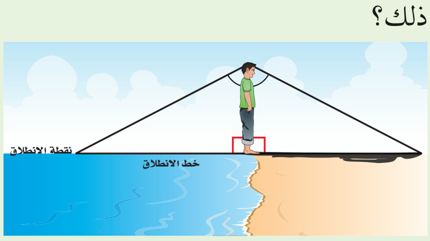
2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا"

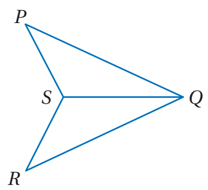
واسأل:

- ذُكر في فقرة "لماذا؟" أن طول مضمار سباق التجديف يمكن أن يُقاس بشكل غير مباشر. إلى أي سطح عليك أن تنقل طول المضمار؟ سطح الأرض أو الساحل.
- لتقدير المسافة من الساحل إلى نقطة انطلاق السباق، قف عموديًّا عند نقطة على خط الانطلاق وانظر إلى نقطة الانطلاق مباشرة. ثبّت عينيك ورقبتك على وضعها ثم دوّر جسمك لتعمل خط بصر مُشابهٍ نحو نقطةٍ على الساحل كما هو مبين بالشكل. ثم قِس المسافة من مكان وقوفك حتى تلك النقطة على الساحل. بهذا العمل تكون قد صنعت مثلثين متطابقين. كيف يمكنك إثبات ذلك؟



لأنك تقف عموديًّا على الأرض، فقد تشكّلت زاويتان قائمتان متطابقتان. والزاويتان المتكوِّنتان من خطٍّ بصرك متطابقتان أيضًا، وارتفاعك هو نفسه في المثلين؛ لذا فالمثلثان المتكوِّنان متطابقان بحسب ASA . ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة، إذن المسافتان متساويتان.

مثال 1 استعمال ASA لإثبات تطابق مثلثين



اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{QS}$ تنصِّف $\angle PQR$

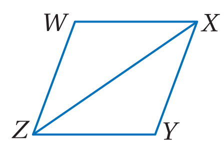
$\angle PSQ \cong \angle RSQ$.

المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RQS$

البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطيات	1) $\overline{QS}$ تنصّف $\angle PQR$، $\angle PSQ \cong \angle RSQ$.
2) تعريف منصِّف الزاوية	2) $\angle PQS \cong \angle RQS$
3) خاصية الانعكاس للتطابق	3) $\overline{QS} \cong \overline{QS}$
4) ASA	4) $\triangle PQS \cong \triangle RQS$

تحقق من فهمك



1) اكتب برهاناً حرًّا. انظر الهامش

المعطيات: $\overline{ZX}$ تنصّف $\angle WZY$، $\overline{XZ}$ تنصّف $\angle YXW$.

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$

نظريّة التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما AAS: تطابُق زاويتين وضلع غير محصور يكفي لإثبات أنّ المثلثين متطابقان. وتُعدّ علاقة التطابق هذه نظرية؛ لأنه يمكن إثبات صحتها باستعمال نظرية الزاوية الثالثة.

نظريّة 3.5 التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)

أضف إلى مطويتك

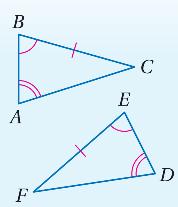
إذا طابقتْ زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين.

مثال إذا كانت $\angle A \cong \angle D$,

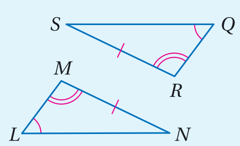
$\angle B \cong \angle E$,

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$,

فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



برهان نظرية التطابق بزاوية - زاوية - ضلع (AAS)



المعطيات: $\angle L \cong \angle Q$, $\angle M \cong \angle R$, $\overline{MN} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle QRS$

البرهان:

$\angle L \cong \angle Q$ معطى

$\angle M \cong \angle R$ معطى

$\overline{MN} \cong \overline{RS}$ معطى

$\angle N \cong \angle S$ نظرية الزاوية الثالثة

$\triangle LMN \cong \triangle QRS$ ASA

إرشادات للدراسة

تطابق ضلعين SSA وزاوية غير محصورة بينهما: بالرغم من أن تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما لايكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان؛ لكن تطابق زاويتين وضلع سواءً أكان محصورًا بينهما أو غير محصور بينهما كافٍ لإثبات تطابق مثلثين.

المسلمة ASA

المثال 1 يبيّن كيف تستعمل المسلمة ASA في البرهان.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة للمفاهيم.

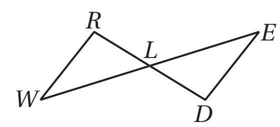
مثال إضافي

1 اكتب برهانًا ذا عمودين

المعطيات: L نقطة منتصف $\overline{WE}$.

$\overline{WR} \parallel \overline{ED}$

المطلوب: $\triangle WRL \cong \triangle EDL$



البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطى	1) L نقطة منتصف $\overline{WE}$
2) تعريف نقطة المنتصف	2) $\overline{WL} \cong \overline{LE}$
3) معطى	3) $\overline{WR} \parallel \overline{ED}$
4) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا	4) $\angle W \cong \angle E$
5) نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس	5) $\angle WLR \cong \angle ELD$
6) ASA	6) $\triangle WRL \cong \triangle EDL$

المحتوى الرياضي

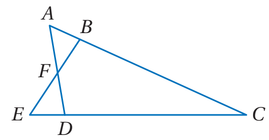
المعالجة: قد يسأل بعض الطلاب عن إثبات التطابق باستعمال ASS. بيّن لهم أن تطابق ضلعين وزاويةٍ غير محصورةٍ بينهما في مثلثٍ مع نظائرها في مثلثٍ آخر لا يؤدي بالضرورة إلى تطابق المثلثين. فموضع الزاويتين بالنسبة لأضلاع المثلثين أمر حاسم لإثبات التطابق.

إجابة (تحقق من فهمك):

1) بما أن $\overline{ZX}$ تنصف $\angle WZY$، إذن $\angle WZX \cong \angle YZX$ من تعريف منصِّف الزاوية. وكذلك $\overline{ZX}$ تنصِّف $\angle YXW$، إذن $\angle WXZ \cong \angle YXZ$ من تعريف منصف الزاوية، وبما أن $\overline{ZX} \cong \overline{ZX}$ من خاصية الانعكاس للتطابق. فإن $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$ بحسب المسلمة ASA

مثال 2 استعمال AAS لإثبات تطابق مثلثين

اكتب برهانًا حرًّا.



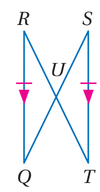
المعطيات: $\angle DAC \cong \angle BEC$,
$\overline{DC} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle ECB$

البرهان: بما أن: $\angle DAC \cong \angle BEC, \overline{DC} \cong \overline{BC}$ ، وأن $\angle C \cong \angle C$ بحسب خاصية الانعكاس،
إذن $\triangle ACD \cong \triangle ECB$ بحسب النظرية AAS .

تحقق من فهمك

2) اكتب برهانًا تسلسليًّا: انظر ملحق الإجابات



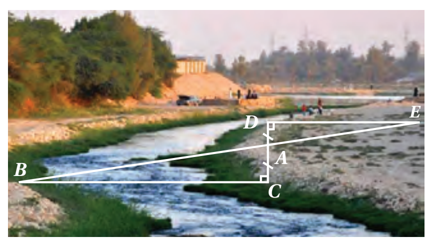
المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$, $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$

المطلوب: $\triangle RUQ \cong \triangle TUS$

يمكنك استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال تطابق المثلثات في حساب مسافات يصعب قياسها مباشرة

مسافات: أراد أكرم أن يحسب المسافة بين النقطتين C, B، فقام بتعيين نقطة أخرى D ليستعملها نقطةً مرجعيةً، بحيث تكون العلاقات بين القطع المستقيمة كما في الشكل أدناه. إذا علمت أن طول DE يساوي 8 ft، فاحسب المسافة بين النقطتين C, B.



لتحديد طول $\overline{CB}$ ، يجب أولًا أن نثبت أن المثلثين اللذين أنشأهما أكرم متطابقان.

- بما أن $\overline{CD}$ عمودية على كلٍّ من $\overline{CB}, \overline{DE}$ كما هو مبيّن في الشكل، وجميع الزوايا القوائم متطابقة.
  إذن $\angle BCA \cong \angle EDA$.
- $\overline{AC} \cong \overline{AD}$
- $\angle BAC, \angle EAD$ زاويتان متقابلتان بالرأس إذن هما متطابقتان، وبحسب ASA ينتج أن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$

وبما أن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$ فإن $\overline{CB} \cong \overline{DE}$ ؛ لأن العناصر المتناظرة متطابقة. وبما أن طول $\overline{DE}$ يساوي 8 ft فإن طول $\overline{CB}$ يساوي 8 ft أيضًا، وهي المسافة بين النقطتين C, B.

إرشادات للدراسة

زاوية-زاوية-زاوية
$\angle B, \angle E$ في المثال 3 متطابقتان بحسب نظرية الزاوية الثالثة. إن تطابق الزوايا الثلاث المتناظرة غير كافٍ لإثبات تطابق مثلثين.

النظرية AAS

المثال 2 يبيّن كيفية برهان تطابق مثلثين باستعمال النظرية 3.5 .

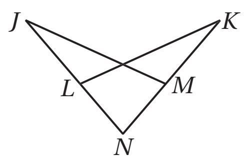
المثال 3 يبيّن كيفية استعمال مثلثين متطابقين لقياس مسافات بشكل غير مباشر .

مثالان إضافيان

2 اكتب برهانًا حرًّا

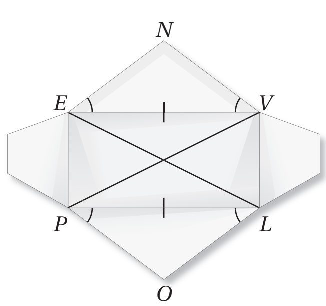
المعطيات: $\angle NKL \cong \angle NJM$
$\overline{KL} \cong \overline{JM}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{LN} \cong \overline{MN}$



البرهان: نعلم أن:
$\overline{KL} \cong \overline{JM}$ ،$\angle NKL \cong \angle NJM$
وأن: $\angle N \cong \angle N$ بحسب خاصية الانعكاس؛ لذلك
$\triangle JNM \cong \triangle KNL$ بحسب AAS.
ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة، إذن $\overline{LN} \cong \overline{MN}$.

3 **تصنيع:** تصمّم رباب نموذجًا من الورق لصنع مغلف كلٍّ من طرفيه (العلوي والسفلي) على شكل مثلث متطابق الضلعين ولهما قاعدتان متطابقتان وزاويتا القاعدتين في المثلث الأول تطابق نظائرها في المثلث الآخر. إذا كان $EV = 8$ cm وارتفاع المثلث المتطابق الضلعين 3 cm. فأوجد PO.



$PO = 5$ cm

تنبيه!

أين الزاوية؟: تستعمل النظرية AAS فقط إذا لم تكن الزاوية محصورة بين الضلعين.

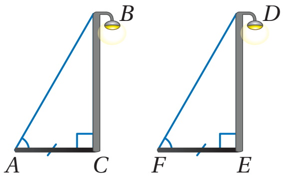
تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون الفرديون: اطلب إلى الطلاب دراسة براهين الأمثلة في هذا الدرس وملاحظة الخصائص التي تتكرَّر مثل: خاصية الانعكاس لتطابق كلٍّ من الزوايا والقطع المستقيمة، وتعريف المنصف لقطعةٍ مستقيمةٍ، وتعريف نقطة المنتصف... وهكذا. ويمكن أن يبدأ الطلاب بكتابة قائمةٍ تتضمن الأشياء التي يبحثون عنها عند كتابة البراهين، ومن ضمنها الخصائص المتكررة والنظريات والقوانين والطرق التي يمكن أن يرجعوا إليها في دروس لاحقة، ويمكنهم أيضًا ملاحظة ترتيب الخطوات في البراهين الحرة والبراهين التسلسلية والبراهين ذات العمودين، وملاحظة التشابه والاختلاف بينها.

تحقق من فهمك

3) استعمل الشكل المجاور الذي يمثل عمودَيِ كهرباء وظلَّيهما لكتابة برهان حرٍّ يبيِّن أن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ انظر الهامش

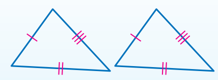


تعلمت طرائق عديدة لإثبات تطابق المثلثات.

ملخص المفاهيم — إثبات تطابق المثلثات

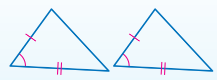
أضف إلى مطويتك

SSS



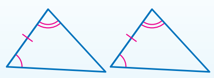
يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعُهما المتناظرة متطابقة.

SAS



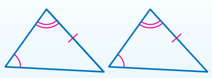
يتطابق المثلثان إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

ASA



يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

AAS



يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

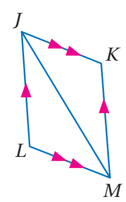
تأكد

المثالان 1, 2 **برهان:** برهن كلًّا مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة: (1, 2) انظر ملحق الإجابات

1) برهان تسلسلي

المعطيات: $\overline{JK} \parallel \overline{LM}, \overline{JL} \parallel \overline{KM}$

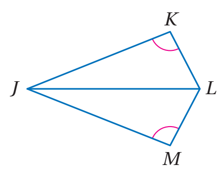
المطلوب: إثبات أن: $\triangle JML \cong \triangle MJK$



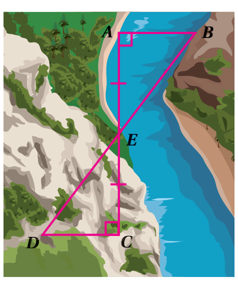
2) برهان حرّ

المعطيات: $\angle K \cong \angle M$، $\overline{JL}$ تنصف $\angle KLM$.

المطلوب: إثبات أن: $\triangle JKL \cong \triangle JML$



المثال 3 3) **بناء جسور:** يحتاج مسّاح إلى إيجاد المسافة بين النقطتين A, B المبينتين في الشكل المجاور لبناء جسر فوق النهر. فوضعَ وتدًا عند A، ووضع زميله وتدًا عند B في الجهة المقابلة، ثمّ عيّن المسّاح النقطة C في جهة A، بحيث كانت $\overline{CA} \perp \overline{AB}$. ووضع وتدًا رابعًا عند E، التي هي نقطة منتصف $\overline{CA}$. وأخيرًا وضع وتدًا عند النقطة D، بحيث كان $\overline{CD} \perp \overline{CA}$، والنقاط D, E, B تقع على مستقيمٍ واحدٍ.



a) وضّح كيف يمكن أن يستعمل المسّاح المثلثين المتكونين لإيجاد المسافة بين النقطتين A, B. انظر ملحق الإجابات

b) إذا كان: $AC = 160\text{ m}, DC = 60\text{ m}, DE = 100\text{ m}$، فأوجد المسافة بين النقطتين A, B. ووضّح إجابتك.

3b) 60 m؛ لأن $DC = 60\text{ m}$، $\overline{DC} \cong \overline{AB}$، إذن $AB = 60\text{ m}$ بحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة.

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات؛ لإعداد مقاطع فيديو توضح طريقة إثبات تطابق مثلثين باستعمال كلٍّ من ASA, AAS، ثم حمِّل هذه المقاطع على موقع المدرسة الإلكتروني، بحيث يمكن لكل مجموعةٍ أن تشاهد المقاطع التي أعدَّتها المجموعات الأخرى.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل التمارين 3–1 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابة (تحقق من فهمك):

3) من المعطيات نعلم أن: $\overline{BC} \perp \overline{AC}$، $\overline{DE} \perp \overline{FE}$, $\angle BAC \cong \angle DFE$، $\overline{AC} \cong \overline{FE}$.
بما أن $\overline{BC} \perp \overline{AC}$, $\overline{DE} \perp \overline{FE}$، إذن كلٌّ من $\angle BCA$, $\angle DEF$ قائمتان، $\angle BCA \cong \angle DEF$؛ لأن جميع الزوايا القائمة متطابقة، وبحسب المسلمة ASA فإن $\triangle BAC \cong \triangle DFE$.
لذا $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.

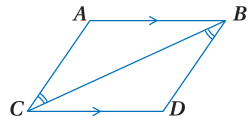
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	4-7 ، 13-15 ، 17-24
ضمن المتوسط	5 ، 7 ، 10-12 ، 14 ، 15 ، 17-24
فوق المتوسط	8-22، (اختياري: 23 ، 24)

182 الفصل 3 المثلثات المتطابقة

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **برهان:** على الشكل المقابل: انظر الهامش

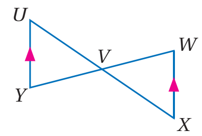


4) **المعطيات:** $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\angle CBD \cong \angle BCA$

المطلوب: $\triangle CAB \cong \triangle BDC$

المثال 2 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. انظر ملحق الإجابات

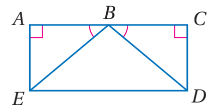


5) **المعطيات:** V نقطة منتصف $\overline{WY}$

$\overline{XW} \parallel \overline{UY}$

المطلوب: $\triangle UVY \cong \triangle XVW$

6) **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًّا. انظر ملحق الإجابات

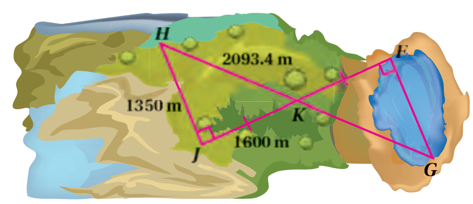


المعطيات: $\angle A, \angle C$ زاويتان قائمتان.

$\angle ABE \cong \angle CBD$, $\overline{AE} \cong \overline{CD}$

المطلوب: $\overline{BE} \cong \overline{BD}$

المثال 3 **7)** **سباق زوارق:** يرغب المشرفون في إقامة سباق تجديفٍ في بحيرة، لكنهم غير متأكدين ممَّا إذا كان طول البحيرة كافيًا لإجراء السباق أم لا، ولقياس طول البحيرة حدّدوا رؤوس المثلثين المبينين في الشكل أدناه، ووجدوا أطوال أضلاع $\triangle HJK$ ، استعمل المعلومات الواردة في فقرة لماذا للإجابة عن الفقرتين a, b



a) وضّح كيف يستعمل المشرفون على السباق المثلثين المتكونين لتقدير المسافة FG عبر البحيرة. انظر الهامش

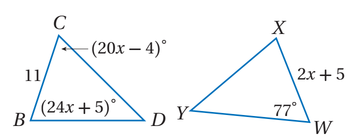
b) هل طول البحيرة كافٍ لإجراء سباق الزوارق باستعمال القياسات المعطاة؟ وضّح إجابتك.

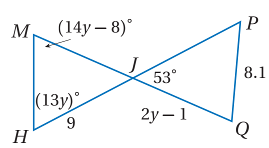
7b) لا؛ بما أن $HJ = 1350$ m فإن $FG = 1350$ m، والمسافة المطلوبة للسباق 1500 m .

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

8) $\triangle BCD \cong \triangle WXY$ $x = 3$

9) $\triangle MHJ \cong \triangle PQJ$ $y = 5$





إجابات:

4) البرهان:

$\angle CDB \cong \angle BCA$، معطًى

$CB \cong CB$ خاصية الانعكاس للتطابق

$\angle ABC \cong \angle DCB$ بالتبادل الداخلي

لأن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ وَ $\overline{BC}$ قاطع،

بحسب مسلَّمة التطابق ASA،

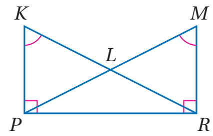
فإن $\triangle CAB \cong \triangle BDC$

7a) $\angle HJK \cong \angle GFK$ ؛ لأن جميع الزوايا القوائم متطابقة، ونعلم من المعطيات أن $\overline{JK} \cong \overline{KF}$ ، وأن $\angle HKJ$ و $\angle FKG$ متقابلتان بالرأس، لذا فإن $\angle HKJ \cong \angle FKG$ بحسب نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس، وبحسب ASA، فإن $\triangle HJK \cong \triangle GFK$، ولذا فإن $\overline{FG} \cong \overline{HJ}$ ؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين (10, 11 انظر ملحق الإجابات)

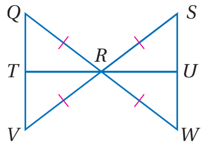
10) **المعطيات:** $\angle K \cong \angle M$, $\overline{KP} \perp \overline{PR}$, $\overline{MR} \perp \overline{PR}$

المطلوب: $\angle KPL \cong \angle MRL$



11) **المعطيات:** $\overline{QR} \cong \overline{SR} \cong \overline{WR} \cong \overline{VR}$

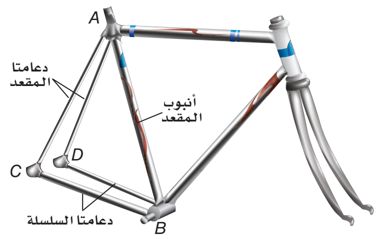
المطلوب: $\overline{QT} \cong \overline{WU}$



الربط مع الحياة

يعتمد حجم الدراجة الهوائية على طول أنبوب المقعد فيها. ويتراوح هذا الطول في الدراجات الهوائية للشباب ما بين 12 in إلى 26 in. وتعتبر ملائمة للراكب إذا استطاع أن يركب الدراجة بسهولة وهو واقف على الأرض.

12) **دراجات هوائية:** يشكِّل أنبوب مقعد الدراجة مثلثًا مع كلٍّ من دعامتَي السلسلة والمقعد. إذا كانت كل دعامة مقعد تشكّل زاوية قياسها $68°$ مع دعامة السلسلة المناظرة لها، وكل دعامة سلسلة تشكل زاوية قياسها $44°$ مع أنبوب المقعد، فبيِّنْ أن دعامتَي المقعد لهما الطول نفسه. انظر ملحق الإجابات

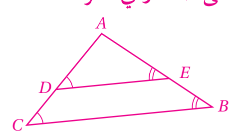


مسائل مهارات التفكير العليا

13) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثين يمكن إثبات تطابقهما باستعمال مسلّمة ASA، وسمِّهما. انظر الهامش

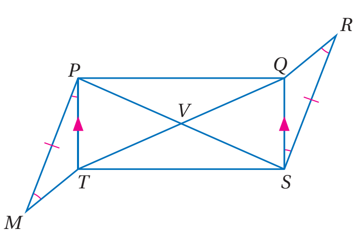
14) **اكتشف الخطأ:** يقول عمر إنه لا يمكن إثبات تطابق مثلثين بتطابق ثلاث زوايا AAA، بينما يقول حسن إنه بإمكانه إثبات هذا التطابق، أيُّهما كانت إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

14) عمر؛ لأن حسن حاول إثبات التطابق باستعمال AAA، وهي ليست من الحالات التي تستعمل لإثبات التطابق. والرسم التالي مثالٌ على صحة رأي عمر:



15) **تبرير:** أوجد مثالًا مضادًّا يوضّح لماذا لا تستعمل حالة تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما SSA؛ لإثبات تطابق مثلثين. انظر ملحق الإجابات

16) **تحدٍّ:** باستعمال المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، اكتب برهانًا تسلسليًّا لإثبات أن $\triangle PVQ \cong \triangle SVT$. انظر ملحق الإجابات



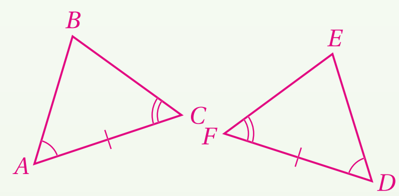
17) **اكتب:** لخِّص الطرائق الواردة في الدروس من 3–3 إلى 3–5؛ لإثبات تطابق المثلثات في جدول موضحًا متى تُستعمل كل طريقة. انظر ملحق الإجابات

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 14 كان قول عمر صحيحًا، وقد بيّن حسن أن أزواج الزوايا الثلاثة المتناظرة في المثلثين متطابقة، ولكن هذا لا يثبت $\triangle ADE \cong \triangle ACB$، وفي الحقيقة يمكن أن تكون الزوايا المتناظرة في مثلثين متطابقة، لكن أطوال الأضلاع المتناظرة مختلفة.

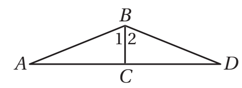
إجابة:

13) إجابة ممكنة: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



تدريب على اختبار

18) في الشكل أدناه، $\overline{BC} \perp \overline{AD}$, $\angle 1 \cong \angle 2$.



أي نظرية أو مسلّمة مما يأتي يمكن استعمالها لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle DBC$؟ **B**

A) AAS
B) ASA
C) SAS
D) SSS

19) ما قيمة $\sqrt{121+104}$ ؟ **A**

A) 15
B) 21
C) 125
D) 225

مراجعة تراكمية

20) إذا علمت أن: $A(6, 4), B(1, -6), C(-9, 5), X(0, 7), Y(5, -3), Z(15, 8)$، فبيّن ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ أم لا. ووضّح إجابتك. (الدرس 4-3) **انظر الهامش**

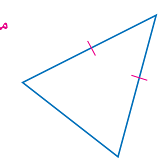
21) **جبر:** إذا كان: $\triangle RST \cong \triangle JKL, RS = 7, ST = 5, RT = 9 + x, JL = 2x - 10, JK = 4y - 5$، فارسم شكلًا يمثّل المثلثين المتطابقين، وسمّه. ثمّ أوجد قيمة كلٍّ من x, y . (الدرس 3-3) **انظر الهامش**

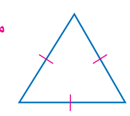
22) أكمل جدول الصواب المجاور (الدرس 2-1)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
F	T	T	T
T	T	F	T
F	F	T	T
T	F	F	F

استعد للدرس اللاحق

صنف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لأضلاعه:

23)  متطابق الضلعين

24)  متطابق الأضلاع

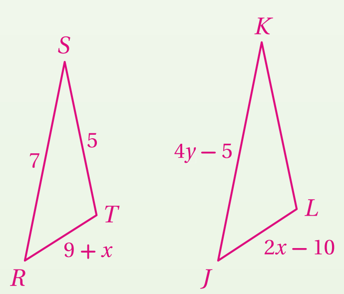
4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب أن يلاحظوا ويدرسوا المفاهيم الأساسية في الدرسين السابقين، وأن يكتبوا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المفاهيم السابقة في SSS, SAS والمفاهيم الحالية في ASA, AAS .

إجابة:

20) $AB = \sqrt{125}, BC = \sqrt{221}$
$AC = \sqrt{226}, XY = \sqrt{125},$
$YZ = \sqrt{221}, XZ = \sqrt{226}$.
الأضلاع المتناظرة لها الطول نفسه ومتطابقة؛ إذن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ بحسب SSS.

21) $x = 19; y = 3$

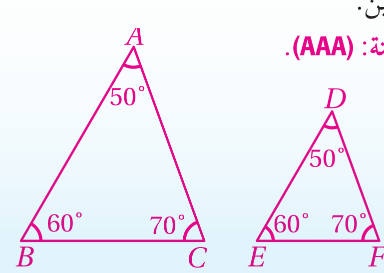


تنويع التعليم

ضمن فوق

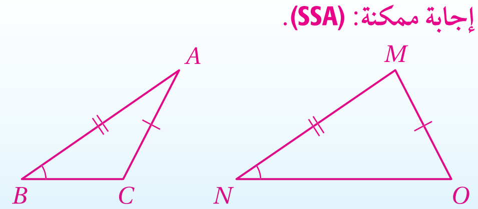
توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يجدوا أمثلةً مضادةً؛ لإثبات أنه لا يمكن استعمال كلٍّ من SSA وَ AAA لإثبات تطابق مثلثين.

إجابة ممكنة: (AAA).



من الواضح أن $\triangle ABC \ncong \triangle DEF$ على الرغم من تطابق الزوايا المتناظرة في المثلثين.

إجابة ممكنة: (SSA).



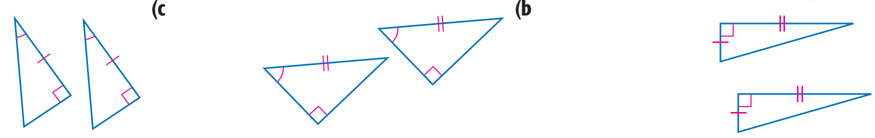
من الواضح أن $\triangle BAC \ncong \triangle NMO$ على الرغم من تطابق ضلعين وزاوية من المثلث الأول مع ضلعين وزاوية من المثلث الثاني.

توسع
3-5 معمل الهندسة
تطابق المثلثات القائمة
Congruence in Right Triangles

في الدرسين 5 - 3 ,4 - 3 تعلمت نظريات ومسلّمات تُثبت تطابق المثلثات، فكيف تطبّق هذه النظريات والمسلّمات على المثلثات القائمة؟

ادرس كل زوج من المثلثات القائمة الآتية:

(a (b (c



حلّل:

1) هل يتطابق كل زوج من المثلثات؟ إن كان ذلك صحيحًا، فأي نظرية تطابق أو مسلمة استعملت؟ نعم، a) SAS, b) AAS, c) ASA

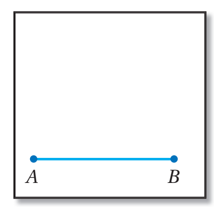
2) أعد كتابة قواعد التطابق في التمرين 1 باستعمال الساق (L)، أو الوتر (H) ليحل محل الضلع (S). واحذف A لكل زاوية قائمة؛ لأن كل مثلث قائم الزاوية يحوي زاوية قائمة. وجميع الزوايا القوائم متطابقة. a) LL , b) HA , c) LA

3) **خمّن:** إذا علمت أن ضلعَي الزاوية القائمة المتناظرين في المثلثات القائمة متطابقان، فما المعلومات الأخرى الضرورية حتى تؤكد تطابق المثلثات؟ وضّح إجابتك. لا نحتاج إلى معلومات إضافية، فتطابق الضلعين في مثلث قائم الزاوية مع نظيريهما في مثلث آخر قائم الزاوية كافٍ لإثبات التطابق.

في الدرس 5–3 درست أن الحالة SSA ليست كافية لتحديد تطابق مثلثين، فهل يمكن استعمالها لبرهنة تطابق مثلثين قائمين؟

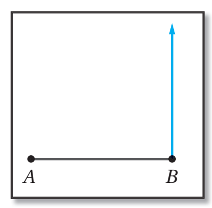
نشاط SSA والمثلثات القائمة

الخطوة 1:



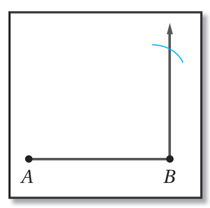
ارسم $\overline{AB}$ على أن يكون $AB = 6\,cm$

الخطوة 2:



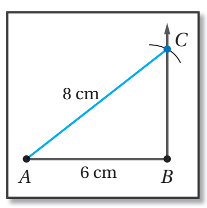
استعمل المنقلة لرسم نصف مستقيم من B عمودي على $\overline{AB}$.

الخطوة 3:



افتح الفرجار فتحة تساوي 8 cm وركزه عند النقطة A، ثمّ ارسم قوسًا يقطع نصف المستقيم.

الخطوة 4:



سمّ نقطة التقاطع C، ثم ارسم $\overline{AC}$ لإكمال $\triangle ABC$.

حلّل:

4) هل يؤدي النموذج إلى رسم مثلث وحيد؟ نعم

5) هل يمكنك استعمال طولَي الوتر والضلع لتبيّن تطابق مثلثين قائمين؟ نعم

6) خمّن حالة SSA الخاصة بالمثلثات القائمة الزاوية. يمكن إثبات تطابق مثلثين قائمين باستعمال SSA.

توسع
3-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف
استكشاف تطابق المثلثات القائمة.

المواد اللازمة
- مسطرة
- منقلة
- فرجار

2 التدريس

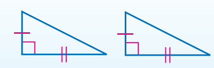
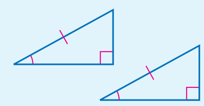
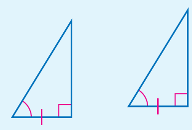
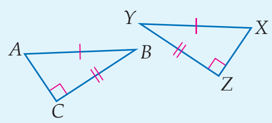
العمل في مجموعات متعاونة
نظِّم الطلاب مجموعات ثلاثية أو رباعيّة متفاوتة القدرات، ثم اطلب إليهم تنفيذ النشاط.

اسأل:
- كيف نميِّز المثلثات القائمة بشكل مختلف عن المثلثات الأخرى؟ عليها الرمز الذي يدل على الزاوية القائمة.
- ما هي الميزات التي تنفرد بها المثلثات القائمة؟ ضلعا القائمة يسميان الساقين، والضلع المقابل للزاوية القائمة يُسمى الوتر.
- هل توجد أنواع أخرى من المثلثات لها أسماء خاصة لعناصرها؟ المثلثات المتطابقة الضلعين، والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل الأسئلة 14–7.

النشاط السابق يبيّن أربع طرائق لإثبات تطابق المثلثات القائمة وهي:

نظريات ومسلّمات — **تطابق المثلثات القائمة** — أضف إلى مطويتك

نظرية 3.6 تطابق الساقين LL إذا طابق ساقان في مثلث قائم نظيريهما في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.	
نظرية 3.7 تطابق وتر وزاوية حادة HA إذا طابق وتر وزاوية حادة في مثلث قائم الوتر والزاوية الحادة المناظرة في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.	
نظرية 3.8 تطابق ساق وزاوية حادة LA إذا طابق ساق وزاوية حادة في مثلث قائم الساق المناظرة والزاوية الحادة المناظرة في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.	
نظرية 3.9 تطابق وتر وساق HL إذا طابق وتر وساق في مثلث قائم وترًا وساقًا في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.	

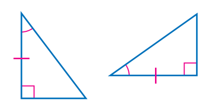
قراءة الرياضيات

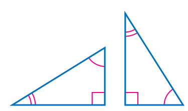
اختصارات رياضية

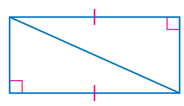
L هي اختصار لـ leg أو ساق، وَ H اختصار لـ Hypotenuse أو وتر، وَ A اختصار لـ Angle أو زاوية.

تمارين:

حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات الآتية متطابقين أم لا، وإذا كانت الإجابة "نعم"، فاذكر المسلمة أو النظرية التي استعملتها:

7)  نعم، LA

8)  لا

9)  نعم، HL

برهان: اكتب برهانًا لكلٍّ مما يأتي: 10) انظر ملحق الإجابات

10) النظرية 3.7

11) النظرية 3.8 (إرشاد: توجد حالتان ممكنتان) انظر الهامش

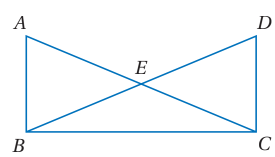
12) النظرية 3.9 (إرشاد: استعمل نظرية فيثاغورس) انظر ملحق الإجابات

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن السؤال 13. انظر ملحق الإجابات

13) **المعطيات:** $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{DC} \perp \overline{BC}$

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$



3 التقويم

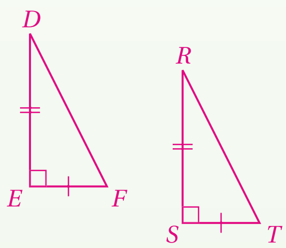
التقويم التكويني

استعمل السؤال 10؛ لتقويم فهم الطلاب طريقة كتابة برهان نظرية بالاستناد لمسلمات.

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب كتابة برهانٍ حرٍّ؛ لإثبات حالة التطابق LL في المثلثات القائمة.

المعطيات: $\triangle DEF , \triangle RST$



مثلثان قائما الزاوية.

$\angle E , \angle S$ قائمتان.

$EF \cong ST , ED \cong SR$

المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle RST$

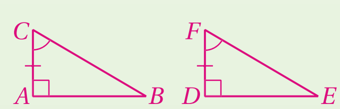
البرهان: نعلم أن: $EF \cong ST , ED \cong SR$، وأن $\angle E , \angle S$ قائمتان، وبما أن جميع الزوايا القائمة متطابقة، إذن $\angle E \cong \angle S$، ولذلك يكون $\triangle DEF \cong \triangle RST$ بحسب SAS.

إجابات:

11) الحالة 1:

المعطيات: $\triangle ABC$، $\triangle DEF$ قائما الزاوية، فيهما $\angle A , \angle D$ قائمتان، $\angle C \cong \angle F$، $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

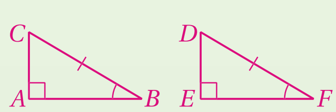


البرهان: نعلم أن $\triangle ABC , \triangle DEF$ قائما الزاوية، فيهما $\angle A, \angle D$ قائمتان، و $\overline{AC} \cong \overline{DF}$، و $\angle C \cong \angle F$. و $\angle A \cong \angle D$؛ لأن جميع الزوايا القوائم متطابقة؛ إذن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ بحسب ASA.

الحالة 2:

المعطيات: $\triangle ABC , \triangle EFD$ قائما الزاوية. فيهما $\angle A, \angle E$ قائمتان $\overline{CB} \cong \overline{DF} , \angle B \cong \angle F$

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle EFD$



البرهان: نعلم أن $\triangle ABC , \triangle EFD$ قائما الزاوية، $\overline{CB} \cong \overline{DF}$، $\angle B \cong \angle F$. $\angle A, \angle E$ قائمتان؛ لذا $\angle A \cong \angle E$؛ لأن جميع الزوايا القوائم متطابقة. إذن $\triangle ABC \cong \triangle EFD$ بحسب AAS.

الفصل 3 مصادر المعلم للأنشطة الصفّية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 5

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) دون

الاسم ________ التاريخ ________

3-5 تدريبات إعادة التعليم

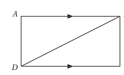
إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

مسلّمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA):

يمكنك إثبات تطابق مثلثين مستعملاً المسلّمة: زاوية – ضلع – زاوية (ASA) .

مسلّمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA)	إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلثٍ آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

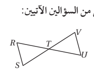
البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	1) معطيات
2) $\angle CBD \cong \angle ADB$	2) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
3) $\angle ABD \cong \angle BDC$	3) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
4) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\Delta ABD \cong \Delta CDB$	5) المسلّمة ASA

تمارين

اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) برهان ذو عمودين.



المعطيات: $\angle S \cong \angle V$

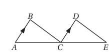
T نقطة منتصف $\overline{SV}$.

المطلوب: إثبات أن $\Delta RTS \cong \Delta UTV$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\angle S \cong \angle V$ ؛ T نقطة منتصف $\overline{SV}$	1) معطيات
2) $\overline{ST} \cong \overline{TV}$	2) تعريف نقطة المنتصف
3) $\angle RTS \cong \angle VTU$	3) نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
4) $\Delta RTS \cong \Delta UTV$	4) المسلمة ASA

2) برهان حر.



المعطيات: $\overline{AE}$ تنصف $\overline{CD}$

$\angle E \cong \angle BCA$ و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta CDE$

البرهان:

تعلم أن: $\angle E \cong \angle BCA$، و$\overline{CD}$ تنصف $\overline{AE}$، وعليه يكون $\overline{AC} \cong \overline{CE}$، وتعلم أيضًا من المعطيات أن $\overline{AC} \parallel \overline{CD}$، وعليه فإن $\angle A \cong \angle DCE$، بحسب مسلّمة الزاويتين المتناظرتين،

إذن $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ بحسب المسلّمة ASA.

الصف: الأول الثانوي | 26 | الفصل 3: المثلثات المتطابقة

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (27) دون

الاسم ________ التاريخ ________

3-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS):

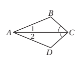
يمكنك إثبات تطابق مثلثين مستعملًا نظرية: زاوية – زاوية – ضلع (AAS) .

التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)	إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان.

لقد أصبح لديك الآن خمس طرائق لإثبات تطابق مثلثين هي:

- المسلّمة ASA
- المسلّمة AAS
- المسلّمة SSS
- المسلّمة SAS

مثال في الشكل المجاور: $\angle BCA \cong \angle DCA$، ما الأضلاع المتطابقة في الشكل؟ ما العنصران المتناظران الآخران اللذان يتعيّن أن يكونا متطابقين، حتى يكون المثلثان متطابقين وفق النظرية AAS؟



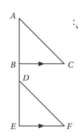
الأضلاع المتطابقة: $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ وفق خاصية الانعكاس للتطابق.

لا يمكن أن يكون العنصران الآخران هما $\angle 1$ و$\angle 2$؛ لأن $\overline{AC}$ يكون الضلع المحصور بينهما في هذه الحالة؛ لذا يتعين أن تكون $\angle B \cong \angle D$، وعندها يكون $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ وفق النظرية AAS.

تمارين

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدّد في كل من السؤالين الآتيين:

1) برهان ذو عمودين.



المعطيات: $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$

$\overline{AB} \cong \overline{ED}$

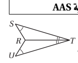
$\angle C \cong \angle F$

المطلوب: إثبات أن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$, $\overline{AB} \cong \overline{ED}$ $\angle C \cong \angle F$	1) معطيات
2) $\angle ABC \cong \angle DEF$	2) مسلمة الزاويتين المتناظرتين
3) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	3) النظريّة AAS

2) برهان تسلسلي.



المعطيات: $\angle S \cong \angle U$؛ $\overline{TR}$ تنصّف $\angle STU$

المطلوب: إثبات أن $\angle SRT \cong \angle URT$

$\overline{TR}$ تنصف $\angle STU$ (معطيات) ← $\angle STR \cong \angle UTR$ (تعريف منصف الزاوية)

$\angle S \cong \angle U$ (معطيات)

$\overline{RT} \cong \overline{RT}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

← $\Delta SRT \cong \Delta URT$ (AAS) ← $\angle SRT \cong \angle URT$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة)

الصف: الأول الثانوي | 27 | الفصل 3: المثلثات المتطابقة

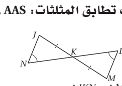
تدريبات المهارات (28) دون ضمن

الاسم ________ التاريخ ________

3-5 تدريبات المهارات

إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

1) اكتب برهانًا تسلسليًّا.



المعطيات: $\angle N \cong \angle L$

$\overline{JK} \cong \overline{MK}$.

المطلوب: إثبات أن $\Delta JKN \cong \Delta MKL$.

البرهان:

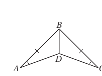
$\angle N \cong \angle L$ (معطيات)

$\overline{JK} \cong \overline{MK}$ (معطيات)

$\angle JKN \cong \angle MKL$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

← $\Delta JKN \cong \Delta MKL$ (AAS)

2) اكتب برهانًا تسلسليًّا



المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$

$\angle A \cong \angle C$.

$\overline{DB}$ تنصّف $\angle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{AD} \cong \overline{CD}$.

البرهان :

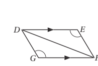
$\overline{AB} \cong \overline{CB}$ (معطيات)

$\angle A \cong \angle C$ (معطيات)

$\overline{DB}$ تنصف $\angle ABC$ (معطيات) ← $\angle ABD \cong \angle CBD$ (تعريف منصف الزاوية)

← $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (ASA) ← $\overline{AD} \cong \overline{CD}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة)

3) اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$.

$\angle E \cong \angle G$

المطلوب: إثبات أن $\Delta DFG \cong \Delta FDE$

البرهان : لَمّا كان $\overline{FG} \parallel \overline{DE}$، فإن$\angle GFD \cong \angle EDF$؛ لأن الزاويتين المتبادلتين داخليًا بين مستقيمين متوازيين وقاطع لهما تكونان متطابقتين، وتعلم أن $\angle G \cong \angle E$، وكذلك $\overline{FD} \cong \overline{DF}$ وفق خاصية الانعكاس للتطابق، وعليه فإن $\Delta FDE \cong \Delta DFG$ وفق النظرية AAS.

الصف: الأول الثانوي | 28 | الفصل 3: المثلثات المتطابقة

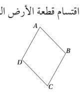
تدريبات حل المسألة (29) دون ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

3-5 تدريبات حلّ المسألة

إثبات تطابق المثلثات: ASA, AAS

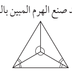
1) أراد أخوان اقتسام قطعة الأرض التالية بالتساوي،



فقام أحدهما بوضع حدٍّ فاصلٍ $\overline{DB}$ يقسم الأرض إلى قطعتين متطابقتين، خمن المعلومة التي كانت لديه حتى يتيقن من أن قطعتي الأرض متطابقتان؟

إجابة ممكنة: $\overline{DB}$ تنصف كلًّا من $\angle B$ و $\angle D$، المسلمة ASA

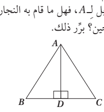
2) هرم: أراد خالد صنع الهرم المبين بالشكل من الورق المقوى،



فاستنتج أن عليه القيام بقصِّ 3 مثلثاتٍ متطابقة على الأقل. فهل استنتاجه صحيح؟ برِّر إجابتك.

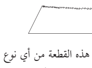
نعم؛ لأن مثلث القاعدة يطابق كُلًّا من المثلثين الآخرين الظاهرين؛ المسلمة ASA.

3) نجارة: لدى نجار قطعة خشبية على شكل مثلث متطابق الأضلاع، إذا أراد أن يقسمها إلى قسمين متطابقين، فرسم بالقلم قطعةً مستقيمةً من النقطة A وعموديةً على الضلع المقابل لـA، فهل ما قام به النجار يضمن تطابق المثلثين الناتجين؟ برِّر ذلك.



إجابة ممكنة: نعم؛ بما أن المثلث الأصلي متطابق الأضلاع، فإن هناك زوجًا من الزوايا المتطابقة إضافة إلى زوج الزاويتين القائمتين، والضلع المشترك، وبذلك يكون المثلثان متطابقين بحسب النظرية .

4) ديكور: استعمل مهندس ديكور 5 أنواع مختلفة من القطع الزجاجية المثلثة الشكل لعمل ديكور للحائط، إذا وجد إحدى قطع الزجاج مكسورة والباقي منها هو الجزء المبين أدناه،



فهل يستطيع معرفة هذه القطعة من أي نوع من الأنواع الخمسة المختلفة التي استعملها؟ برِّر إجابتك.

نعم، بما أن القطعة تحدد قياس زاويتين وضلع من المثلث، فإنه يمكن تحديد المثلث المطابق للقطعة قبل الكسر. بحسب المسلمة ASA.

5) صيانة الحدائق: تحتاج إدارة حديقة إلى غطاء على هيئة مثلث لتغطية حقل على هيئة مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه $200 ft$.

a) إذا وُجد غطاء على هيئة مثلث فيه زاويتان، قياس كلٍّ منهما $60°$، وطول أحد أضلاعه $200 ft$، فهل هذا الغطاء مناسب لذلك الحقل؟ وضِّح إجابتك.

نعم؛ لأن هناك زاويتين قياس كلّ منهما $60°$، فإن قياس الزاوية الثالثة يساوي $60°$ ، ويمكن استعمال ASA أو AAS لإثبات أن الغطاء مناسب.

b) إذا علمت أن قياس كلٍّ من الزوايا الثلاث في غطاءٍ مثلث الشكل يساوي $60°$، فهل يكون هذا الغطاء مناسبًا لذلك الحقل بالضرورة؟

لا؛ لأن هناك مثلثات متطابقة الزوايا من كافة الأطوال.

الصف: الأول الثانوي | 29 | الفصل 3: المثلثات المتطابقة

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 3

دون دون المتوسط — ضمن ضمن المتوسط — فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (30) ضمن فوق

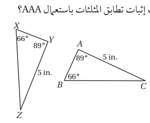
الاسم ______________ التاريخ ________

3-5 التدريبات الإثرائيّة

هل يمكن إثبات تطابق المثلثات باستعمال AAA؟

لقد تعلمت إثبات تطابق المثلثات باستعمال المسلّمتين SSS , ASA، فهل تعتقد أنه يمكنك إثبات تطابق المثلثات باستعمال AAA؟

استقصِ النظريّة AAS التي تنصّ على أنه يتطابق المثلثان إذا طابق زوجٌ من الزوايا المتناظرة وضلع غير محصور في المثلث الأول نظائرها في المثلث الثاني، فعلى سبيل المثال، في الشكل المجاور: $\angle B \cong \angle X, \angle A \cong \angle Y, \overline{AC} \cong \overline{YZ}$



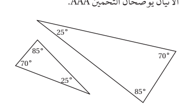
1) ارجع إلى الشكل السابق، وأوجد قياس الزاوية المجهولة في المثلث الأول، وأوجد قياس الزاوية المجهولة في المثلث الثاني.

25° ; 25°

2) مستعملًا المعلومات التي في السؤال 1، ما المسلّمة التي يُمكِنك استعمالها الآن لإثبات تطابق المثلثين؟

ASA

والآن استقصِ التخمين AAA الذي ينصّ على أنه يتطابق مثلثان إذا كانت الأزواج الثلاثة من الزوايا المتناظرة متطابقة، والمثلثان الآتيان يوضِّحان التخمين AAA.



3) هل هذان المثلثان متطابقان؟ وضِّح إجابتك.

لا؛ لأن أطوال الأضلاع المتناظرة في المثلثين مختلفة.

4) هل يمكنك رسم مثلثين زواياهما المتناظرة الثلاث متطابقة ولكنهما غير متطابقين؟ وهل يمكنك استعمال AAA لإثبات تطابق مثلثين؟

نعم؛ لا.

5) ما الخاصيّة التي يحقّقها هذان المثلثان المرسومان وفق AAA؟

لهما الشكل نفسه، ولكن أبعادهما مختلفة.

الصف: الأول الثانوي — 30 — الفصل 3: المثلثات المتطابقة

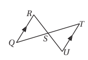
كتاب التمارين (24) دون ضمن فوق

3 - 5 إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS

الفصل الثالث — المثلثات المتطابقة

برهان: اكتب البرهان المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

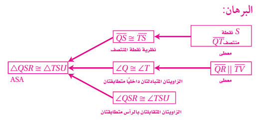
1) اكتب برهانًا تسلسليًّا.



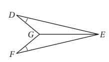
المعطيات: S نقطة منتصف $\overline{QT}$، $\overline{QR} \parallel \overline{TU}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle QSR \cong \triangle TSU$.

البرهان:



2) اكتب برهانًا حرًّا .



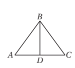
المعطيات: $\angle D \cong \angle F$، $\overline{GE}$ تنصف $\angle DEF$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{DG} \cong \overline{FG}$.

بما أن $\overline{GE}$ تنصّف $\angle DEF$ فإن $\angle DEG \cong \angle FEG$ بحسب تعريف منصف الزاوية. ومعلوم أيضًا أن $\angle D \cong \angle F$، وبناءً على خاصية الانعكاس، فإن $\overline{GE} \cong \overline{GE}$؛ لذا $\triangle DEG \cong \triangle FEG$ بحسب المسلّمة AAS. وعليه فإن $\overline{DG} \cong \overline{FG}$ ؛ لأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة.

هندسة العمارة: استعمل المعلومات الآتية للإجابة عن السؤالين 3,4.

استعمل مهندس تصميم النافذة المبينة في الشكل المجاور عند إعادة هيكلة قاعة للرسم. حيث إن $AB = CB = 3$ ft .



3) إذا كانت D نقطة منتصف $\overline{AC}$ ، فبيِّن ما إذا كان $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ أم لا. وفسِّر إجابتك .

بما أن D نقطة منتصف $\overline{AC}$ ، فإن $\overline{AD} \cong \overline{CD}$ بحسب نظرية نقطة المنتصف، وكذلك $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ بحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة، وبحسب خاصية الإنعكاس فإن $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ ، وعليه فإن $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ بحسب SSS.

4) إذا كانت $\angle A \cong \angle C$، فبيِّن ما إذا كان $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ أم لا. وفسِّر إجابتك.

نعلم أن $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ بحسب خاصية الانعكاس. ونعلم أيضًا أن $\angle A \cong \angle C, \overline{AB} \cong \overline{CB}$. وبما أنه لا يمكن إثبات تطابق مثلثين في حالة SSA؛ لذا لا يمكن الحكم على تطابق المثلثين $\triangle ABD , \triangle CBD$ في هذه الحالة.

24

3-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-6

تحديد المثلثات المتطابقة الضلعين والمتطابقة الأضلاع.

الدرس 3-6

استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين والمتطابقة الأضلاع.

ما بعد الدرس 3-6

استعمال تحويلات التطابق؛ لتكوين تخمينات وإثبات خصائص الأشكال الهندسية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا".

واسأل:

- لماذا تُعدُّ هذه المثلثات متطابقة الضلعين؟ لأن كل مثلث فيه ضلعان متطابقان.
- ما الذي يظهر أنه صحيح حول الزوايا التي تقابل الأضلاع المتطابقة؟ تبدو متطابقة.
- ما نوع المثلث الناتج عندما يكون الضلع الثالث في المثلث مطابقًا الضلعين الآخرين؟ مثلث متطابق الأضلاع.
- ما الذي يظهر أنه صحيح بالنسبة للزوايا الثلاث إذا كانت الأضلاع الثلاثة متطابقة؟ الزوايا أيضًا متطابقة وقياس كل منها يساوي $60°$.

3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

Isosceles and Equilateral Triangles

فيما سبق:

درست المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

(الدرس 1-3)

والآن:

- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين.
- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع.

المفردات:

ساقا المثلث المتطابق الضلعين
legs of an isosceles triangle

زاوية الرأس
vertex angle

زاويتا القاعدة
base angles

www.obeikaneducation.com

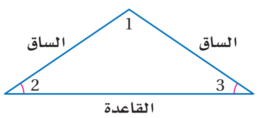
لماذا؟

للعبة القطار السريع في مدينة الألعاب دعائم مثلثية بين المسارات لتقويتها وتثبيتها، والدعائم المثلثية الظاهرة في الصورة عبارة عن مثلثات متطابقة الضلعين.

خصائص المثلث المتطابق الضلعين: تذكّر أن المثلثات المتطابقة الضلعين لها ضلعان متطابقان على الأقل، وأن لعناصرها أسماءً خاصة.

يُسمّى الضلعان المتطابقان **الساقين**، والزاوية التي ضلعاها الساقان تُسمّى **زاوية الرأس**. ويُسمى ضلع المثلث المقابل لزاوية الرأس القاعدةَ. والزاويتان المكونتان من القاعدة والضلعين المتطابقين تُسميان **زاويتَي القاعدة**.

ففي الشكل المجاور، $\angle 1$ هي زاوية الرأس، وزاويتا القاعدة هما $\angle 2, \angle 3$.

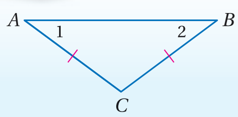


نظريات: المثلث المتطابق الضلعين

أضف إلى مطويتك

3.10 نظرية المثلث المتطابق الضلعين

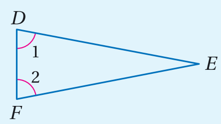
إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.



مثال: إذا كان $\overline{BC} \cong \overline{AC}$، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.

3.11 عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

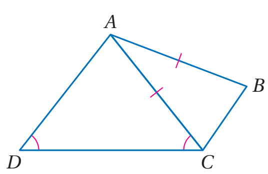
إذا تطابقت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان.



مثال: إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$، فإن $\overline{DE} \cong \overline{FE}$

ستبرهن النظرية 3.11 في السؤال 24

مثال 1 القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة



a) سمّ زاويتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

$\angle ACB$ تقابل $\overline{AB}$، $\angle B$ تقابل $\overline{AC}$؛ لذا فإن $\angle B \cong \angle ACB$.

b) سمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

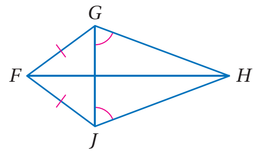
$\overline{AD}$ تقابل $\angle ACD$، $\overline{AC}$ تقابل $\angle D$، لذا فإن $\overline{AC} \cong \overline{AD}$.

مصادر الدرس 3-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (190)	• تنويع التعليم، ص (190, 191)	• تنويع التعليم، ص (191)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (25)	• كتاب التمارين، ص (25)	• كتاب التمارين، ص (25)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

$\angle FGJ , \angle FJG$ (1A
$\overline{GH} , \overline{JH}$ (1B

تحقق من فهمك

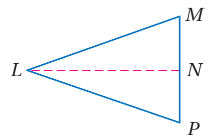


1A) سمِّ زاويتين متطابقتين غير مشار إلى تطابقهما في الشكل.

1B) سمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

لإثبات نظرية المثلث المتطابق الضلعين، ارسم مستقيمًا مساعدًا، ثم استعمل المثلثين الناتجين.

البرهان — نظرية المثلث المتطابق الضلعين



المعطيات: في $\triangle LMP$ ، $\overline{LM} \cong \overline{LP}$

المطلوب: إثبات أن: $\angle M \cong \angle P$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) افترض أن N نقطة منتصف $\overline{MP}$.	1) كل قطعة مستقيمة لها نقطة منتصف واحدة.
2) ارسم قطعة مساعدة $\overline{LN}$.	2) كل نقطتين تحدِّدان مستقيمًا.
3) $\overline{PN} \cong \overline{NM}$	3) نظرية نقطة المنتصف.
4) $\overline{LN} \cong \overline{LN}$	4) خاصية الانعكاس في التطابق.
5) $\overline{LM} \cong \overline{LP}$	5) معطًى.
6) $\triangle LMN \cong \triangle LPN$	6) مسلّمة التطابق بثلاثة أضلاع.
7) $\angle M \cong \angle P$	7) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة.

خصائص المثلث المتطابق الأضلاع: نظرية المثلث المتطابق الضلعين تقود إلى نتيجتين حول زوايا المثلث المتطابق الأضلاع.

مراجعة المفردات

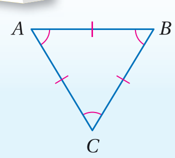
المثلث المتطابق الأضلاع: هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة.

نتيجتان — المثلث المتطابق الأضلاع

أضف إلى مطويتك

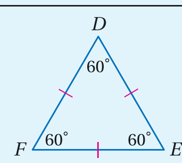
3.3 يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.

مثال: $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ ،
إذا وفقط إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$



3.4 قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع $60°$.

مثال: إذا كان $\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FD}$ ،
فإن $m\angle E = m\angle F = m\angle D = 60°$.



ستبرهن النتيجتين 3.3, 3.4 في السؤالين 22, 23

خصائص المثلث المتطابق الضلعين

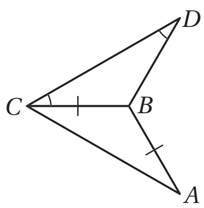
المثال 1 يبيّن كيفية استعمال نظرية المثلث المتطابق الضلعين لتسمي الأضلاع والزوايا المتطابقة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين تحقق من فهمك بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

1



a) سّم زاويتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل. $\angle A , \angle BCA$

b) سّم قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل. $\overline{BD} \cong \overline{BC}$

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات؛ لإعداد تسجيل مرئيٍّ يوضح طريقة إثبات أن مثلثين متطابقا الضلعين أو متطابقا الأضلاع، وأن تعرض كل مجموعة تسجيلها الذي أعدَّته لطلاب الفصل.

إرشادات للمعلم الجديد

تغيير الاتجاه: بما أن عناصر المثلثات المتطابقة الضلعين لها أسماء خاصة، إذن قد يُخطئ الطلاب أحيانًا عند تصنيف المثلثات المتطابقة الضلعين. تأكد من تقديم المثلثات المتطابقة الضلعين في اتجاهات مختلفة؛ حتى يستطيع الطلاب تعيين الأضلاع المتطابقة وزاويتَي القاعدة.

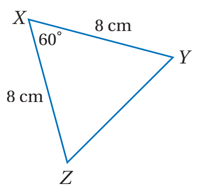
إرشادات للمعلم الجديد

تطابق الزوايا: استعمل الورق الشفاف لتوضيح العلاقة بين زاويتَي القاعدة للمثلث المتطابق الضلعين. ارسم الشكل ثم اطوِ الورقة؛ لتنطبق زاويتا القاعدة.

مثال 2 إيجاد القياسات المجهولة

أوجد كل قياس من القياسات الآتية:

a) $m\angle Y$

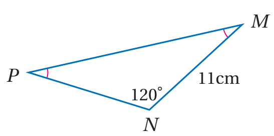


بما أن $\overline{XZ} \cong \overline{XY}$ ، $XY = XZ$ ، وباستعمال نظرية المثلث المتطابق الضلعين، تكون زاويتا القاعدة Z, Y متطابقتين؛ لذا فإن $m\angle Z = m\angle Y$. استعمل نظرية مجموع زوايا المثلث لإيجاد $m\angle Y$.

$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$60° + m\angle Y + m\angle Y = 180°$	$m\angle X = 60°, m\angle Z = m\angle Y$
$60° + 2(m\angle Y) = 180°$	بسّط
$2(m\angle Y) = 120°$	اطرح 60 من كل طرف
$m\angle Y = 60°$	اقسم كل طرف على 2

b) YZ

$m\angle Z = m\angle Y$ ؛ لذا بالتعويض فإن $m\angle Z = 60°$، وبما أن $m\angle X = 60°$ ، فإن قياس كل زاوية من الزوايا الثلاث $60°$ ؛ لذا فالمثلث متطابق الزوايا. وهو متطابق الأضلاع أيضًا، لذا فإن $XY = XZ = ZY$. وبما أن $XY = 8\,\text{cm}$ ، إذن $YZ = 8\,\text{cm}$



تحقق من فهمك

2A) $m\angle M$ $30°$

2B) PN $11\,\text{cm}$

يمكنك استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع والجبر لتجد القيم المجهولة.

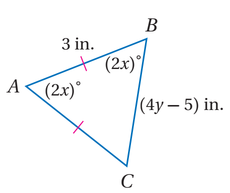
إرشادات للدراسة

المثلثات المتطابقة الضلعين

كما اكتشفت في المثال 2، أي مثلث متطابق الضلعين فيه زاوية قياسها 60° يكون مثلثًا متطابق الأضلاع.

مثال 3 إيجاد القيم المجهولة

جبر: أوجد قيمة كل متغير في الشكل المجاور.

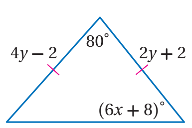


بما أن $m\angle A = m\angle B$؛ أي أن $\angle A \cong \angle B$ فإن $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ باستعمال عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين؛ وبذلك فإن أضلاع المثلث متطابقة. وقياس كل زاوية فيه تساوي $60°$؛ لذا فإن $2x = 60$ ، $x = 30$.

وبما أن المثلث متطابق الأضلاع، إذن جميع الأضلاع متطابقة.

$AB = BC$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$3 = 4y - 5$	عوّض
$8 = 4y$	اجمع 5 إلى كلٍ من الطرفين
$2 = y$	اقسم كل طرف على 4

تحقق من فهمك



3) أوجد قيمة كلٍّ من المتغيرين في الشكل المجاور. $x = 7, y = 2$

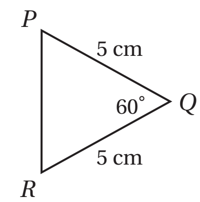
خصائص المثلث المتطابق الأضلاع

المثالان 2, 3 يبيّنان كيفية استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع؛ لإيجاد القياسات والقيم المجهولة.

المثال 4 يوضّح كيفية تطبيق خصائص تطابق المثلثات؛ لإثبات أن مثلثًا ما يكون متطابق الأضلاع.

مثالان إضافيان

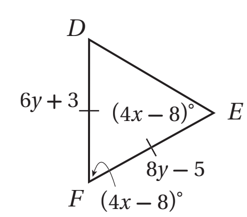
2 أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:



a) $m\angle R$ $60°$

b) PR $5\,\text{cm}$

3 **جبر:** أوجد قيمة كلٍّ من x, y في الشكل أدناه.



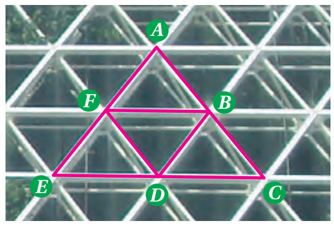
$x = 17, y = 4$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى مجموعات الطلاب حل أسئلة تحقق من فهمك 1–3، وشجعهم على مناقشة خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين والمتطابقة الأضلاع في أثناء استكشافهم البراهين.

مثال 4 من واقع الحياة — تطبيق تطابق المثلثات



بناء: في الصورة المجاورة، $\triangle ACE$ مثلث متطابق الأضلاع. F نقطة منتصف $\overline{AE}$، D نقطة منتصف $\overline{EC}$، B نقطة منتصف $\overline{CA}$. برهن أن $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.

المعطيات: $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، و F نقطة منتصف $\overline{AE}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$، و B نقطة منتصف $\overline{CA}$

المطلوب: إثبات أن: $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.

البرهان:

العبارات	المبررات
(1) $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع.	(1) معطى
(2) F نقطة منتصف $\overline{AE}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$، و B نقطة منتصف $\overline{CA}$.	(2) معطى
(3) $\angle A \cong \angle C \cong \angle E$	(3) المثلث المتطابق الأضلاع متطابق الزوايا
(4) $AF = FE, ED = DC, CB = BA$	(4) تعريف نقطة المنتصف
(5) $\overline{CA} \cong \overline{AE} \cong \overline{EC}$	(5) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
(6) $CA = AE = EC$	(6) تعريف التطابق
(7) $\frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}BC$	(7) خاصية الضرب
(8) $AF = FE = ED = DC = AB = BC$	(8) بالتعويض
(9) $\overline{AF} \cong \overline{ED} \cong \overline{CB}, \overline{FE} \cong \overline{DC} \cong \overline{BA}$	(9) تعريف التطابق
(10) $\triangle AFB \cong \triangle EDF \cong \triangle CBD$	(10) مسلّمة SAS
(11) $\overline{DF} \cong \overline{FB} \cong \overline{BD}$	(11) العناصر المتناظرة متطابقة.
(12) $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.	(12) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع

الربط مع الحياة

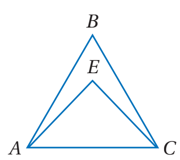
استعمل المهندس المعماري في هذا المبنى قضبانًا حديديّةً تم تثبيتها على شكل مثلثات لتزيد المبنى دعمًا وقوةً مراعيًا في ذلك الجوانب الجمالية للبناء أيضًا.

تحقق من فهمك

4) في الصورة أعلاه إذا علمت أن $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، فيه: $\overline{BD} \parallel \overline{EF}, \overline{FD} \parallel \overline{BC}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$، فأثبت أن $\triangle FED \cong \triangle BDC$. انظر ملحق الإجابات

تأكد

المثال 1 باستعمال الشكل المجاور أجب عن السؤالين الآتيين:



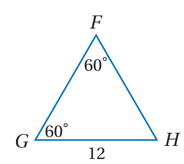
1) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CB}$، فسمّ زاويتين متطابقتين. $\angle BAC, \angle BCA$

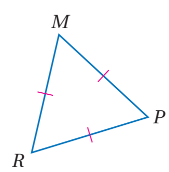
2) إذا كان $\angle EAC \cong \angle ECA$، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين. $\overline{EA}, \overline{EC}$

المثال 2 أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

3) FH 12

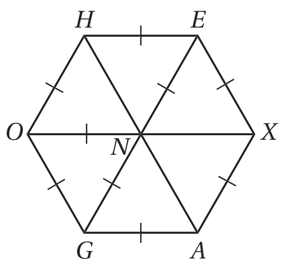
4) $m\angle MRP$ $60°$





مثال إضافي

4



المعطيات: $HEXAGO$ مضلع منتظم. $\triangle ONG$ متطابق الأضلاع، N نقطة منتصف $\overline{GE}$، $\overline{EX} \parallel \overline{OG}$.

المطلوب: $\triangle ENX$ متطابق الأضلاع.

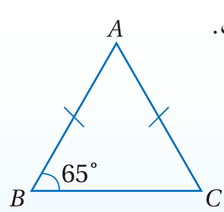
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $HEXAGO$ مضلع منتظم	1) معطيات
2) $\triangle ONG$ متطابق الأضلاع	2) مُعطى
3) $\overline{EX} \cong \overline{XA} \cong \overline{AG} \cong \overline{GO} \cong \overline{OH} \cong \overline{HE}$	3) تعريف الشكل السداسي المنتظم
4) N نقطة منتصف $\overline{GE}$.	4) مُعطى
5) $\overline{NG} \cong \overline{NE}$	5) نظرية نقطة المنتصف
6) $\overline{EX} \parallel \overline{OG}$	6) مُعطى
7) $\angle NEX \cong \angle NGO$	7) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
8) $\triangle ONG \cong \triangle XNE$	8) SAS
9) $\overline{OG} \cong \overline{NO} \cong \overline{GN}$	9) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
10) $\overline{NO} \cong \overline{NX}, \overline{GN} \cong \overline{EN}$	10) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
11) $\overline{XE} \cong \overline{NX} \cong \overline{EN}$	11) بالتعويض
12) $\triangle ENX$ متطابق الأضلاع.	12) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيّون: أوجِدْ قياس زاوية الرأس A في الشكل المجاور. وفسِّر ذلك.

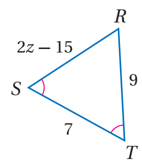


المعطيات : $\overline{AB} \cong \overline{AC}$; $m\angle B = 65°$

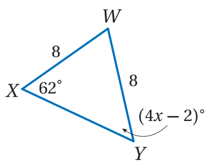
نظرية المثلث المتطابق الضلعين تنصُّ على أنه إذا كان ضلعان في مثلث متطابقين فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان؛ لذا $m\angle C = 65$. نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث وتنصُّ على أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$؛ لذا $m\angle A = 180° - 65° - 65° = 50°$.

المثال 3 **جبر:** أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

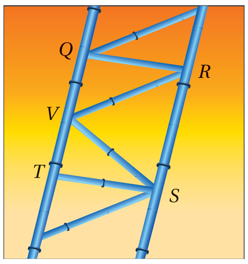
5) **12**



6) **16**



المثال 4 7) **القاطرة السريعة:** الشكل المجاور يظهر جزءًا من سكة القاطرة السريعة المبينة في فقرة "لماذا؟" مكوّنة من مثلثات.



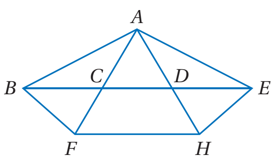
(a, b انظر الهامش)

a) إذا كان $\overline{QR}$ ، $\overline{ST}$ عموديَّان على $\overline{QT}$، وَ $\triangle RVS$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{SR}$، $\overline{RS} \parallel \overline{QT}$، فأثبت أن $\triangle RQV \cong \triangle STV$.

b) إذا كان $VR = 2.5\ m$ ، $QR = 2\ m$، فأوجد البعد بين المستقيمين $\overleftrightarrow{ST}$ وَ $\overleftrightarrow{QR}$. برِّر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 باستعمال الشكل المجاور أجب عن الأسئلة 8–11 :



8) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AE}$ ، فسمِّ زاويتين متطابقتين. **$\angle ABE , \angle AEB$**

9) إذا كانت $\angle ABF \cong \angle AFB$ ، فسمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

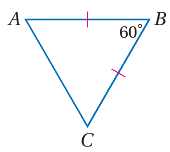
10) إذا كان $\overline{CA} \cong \overline{DA}$ ، فسمِّ زاويتين متطابقتين. **$\angle ACD , \angle ADC$**

11) إذا كانت $\angle DAE \cong \angle DEA$، فسمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

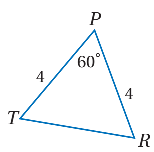
9) $\overline{AB} , \overline{AF}$
11) $\overline{AD} , \overline{DE}$

المثال 2 أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

12) $m\angle BAC$ **60°**

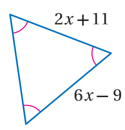


13) TR **4**

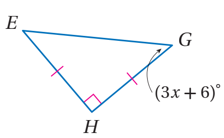


المثال 3 **جبر:** أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

14) **x = 5**

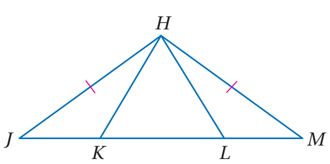


15) **x = 13**



المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا. **انظر الهامش**

16) **المعطيات:** $\triangle HJM$ متطابق الضلعين،
$\triangle HKL$ متطابق الأضلاع.
المطلوب إثبات أن: $\angle JHK \cong \angle MHL$



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–7 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

7a) **المعطيات:** $\overline{QR}$, $\overline{ST}$ متعامدتان مع $\overline{QT}$
$\triangle VSR$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{SR}$
. $\overline{QT} \parallel \overline{SR}$

المطلوب: $\triangle RQV \cong \triangle STV$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{QR}, \overline{ST}$ متعامدان مع $\overline{QT}$، $\triangle VSR$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{SR}$، $\overline{QT} \parallel \overline{SR}$	1) معطيات
2) $\angle RQV, \angle STV$ قائمتان.	2) تعريف التعامد
3) $\angle STV \cong \angle RQV$	3) جميع الزوايا القوائم متطابقة
4) $\overline{VR} \cong \overline{VS}$	4) تعريف المثلث المتطابق الضلعين
5) $\angle VSR \cong \angle VRS$	5) نظرية المثلث المتطابق الضلعين
6) $\angle QVR \cong \angle VRS$، $\angle TVS \cong \angle VSR$	6) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
7) $\angle TVS \cong \angle QVR$	7) خاصية التعدي للتطابق
8) $\triangle RQV \cong \triangle STV$	8) AAS

7b)

المبررات	العبارات
1) $QV = \sqrt{2.5^2 - 2^2} = 1.5\ m$	1) نظرية فيثاغورس
2) $VT = 1.5$	2) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
3) $QT = QV + VT$	3) مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة
4) $QT = 1.5 + 1.5 = 3\ m$	4) بالتعويض
البعد = 3	تعريف البعد بين مستقيمين

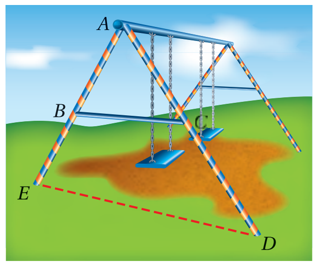
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	8-16 ، 33-48
ضمن المتوسط	8-16 فردي ، 17 ، 19-29 فردي ، 31 ، 33-48
فوق المتوسط	17-45 ، (اختياري: 46-48)

الربط مع الحياة

مهمة الوالدين اختيار الألعاب التي تناسب أعمار أطفالهم.

17) **حدائق:** اصطحب خالد أخاه الأصغر إلى حديقة الحي، فلاحظ أن دعائم الأرجوحة الموجودة في الحديقة تشكل مجموعتين من المثلثات، وأن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ولكن $\overline{BC} \ncong \overline{AB}$. **انظر الهامش (a, b**

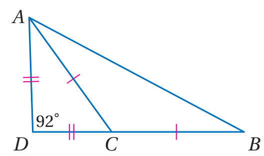


a) إذا قدّر خالد أن $m\angle BAC = 50°$، فما قيمة $m\angle ABC$ وفقًا لهذا التقدير؟ وضّح إجابتك.

b) إذا كان $\overline{BE} \cong \overline{CD}$، فبيِّن أن $\triangle AED$ متطابق الضلعين.

c) إذا كان $\overline{ED} \cong \overline{AD}$ ، $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$، فبيّن أن $\triangle AED$ متطابق الأضلاع. **انظر ملحق الإجابات**

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:



18) $m\angle CAD$ **44°**

19) $m\angle ACD$ **44°**

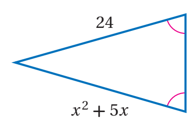
20) $m\angle ACB$ **136°**

21) $m\angle ABC$ **22°**

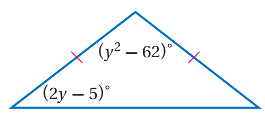
برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكل نتيجة أو نظرية مما يأتي: **22–24) انظر ملحق الإجابات**

22) النتيجة 3.3 23) النتيجة 3.4 24) النظرية 3.11

أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

25) 

3 أو −8

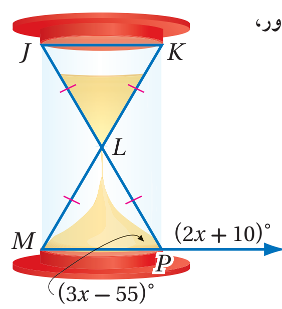
26) 

14

الربط مع الحياة

دقة ساعة الرمل الزجاجية تعتمد على ثبات معدل تدفق الرمل الذي يعتمد على نسبة قطر الثقب إلى قطر حبات الرمل المستعملة.

الساعات الرملية: استعمل الساعة الرملية المبينة في الشكل المجاور، وأوجد كلًّا من القياسات الآتية:



27) $m\angle LPM$ **80°**

28) $m\angle LMP$ **80°**

29) $m\angle JLK$ **20°**

30) $m\angle JKL$ **80°**

إجابات:

16) البرهان: نعلم أن $\triangle HJM$ متطابق الضلعين، و $\triangle HKL$ متطابق الأضلاع، $\angle JKH, \angle HKL$ متكاملتان و $\angle HLK, \angle MLH$ متكاملتان. ومن نظرية المثلث المتطابق الضلعين نعلم أن $\angle HJK \cong \angle HML$. وبما أن $\triangle HKL$ متطابق الأضلاع؛ إذن: $\angle HLK \cong \angle LKH \cong \angle KHL$. $\overline{HL} \cong \overline{KL} \cong \overline{HK}$ ، $\angle JKH, \angle HKL$ متكاملتان، و $\angle HLK, \angle MLH$ متكاملتان، وبما أن $\angle HKL \cong \angle HLK$، فإن $\angle MLH \cong \angle JKH$ بحسب نظرية الزاوية المكملة لزاويتين متطابقتين، وبحسب AAS فإن $\triangle JHK \cong \triangle MHL$ ، ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة إذن $\angle JHK \cong \angle MHL$.

17a) 65°؛ بما أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، إذن $\angle ABC \cong \angle ACB$؛ لذا $180 - 50 = 130$ ، $130 \div 2 = 65$

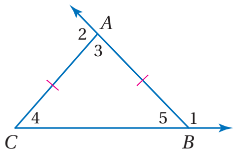
17b) البرهان:

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{BC} \ncong \overline{AB}$, $\overline{BE} \cong \overline{CD}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle AED$ متطابق الضلعين.

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}, \overline{BE} \cong \overline{CD}$	1) معطيات
2) $AB = AC, BE = CD$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $AB + BE = AC + BC$	3) خاصية الجمع للمساواة
4) $AB + BE = AC + CD$	4) خاصية التعويض للمساواة
5) $AB + BE = AE, AC + CD = AD$	5) مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة
6) $AE = AD$	6) بالتعويض
7) $\overline{AE} \cong \overline{AD}$	7) تعريف تطابق القطع المستقيمة
8) $\triangle AED$ متطابق الضلعين	8) تعريف المثلث المتطابق الضلعين

31) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف القياسات الممكنة للزوايا الداخلية للمثلث المتطابق الضلعين، إذا عُلم قياس زاوية خارجية له. (a–c) انظر الهامش



a) **هندسيًا:** استعمل المسطرة والمنقلة لرسم ثلاثة مثلثات مختلفة، كلٌّ منها متطابق الضلعين. ومُدّ أحد ضلعَي زاوية الرأس ومدّ القاعدة من إحدى جهتيها كما في الشكل المجاور.

b) **جدوليًا:** استعمل المنقلة لإيجاد $m\angle 1$ لكل مثلث وسجّله في جدول. واستعمل $m\angle 1$ لحساب قياسات $\angle 5$, $\angle 4$, $\angle 3$، ثم أوجد $m\angle 2$ وسجِّله في جدول آخر واستعمله لحساب القياسات السابقة نفسها. رتِّب نتائجك في جدولين.

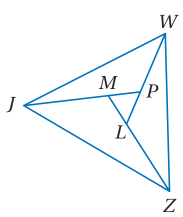
c) **لفظيًا:** وضّح كيف استعملت $m\angle 1$ لإيجاد قياسات $\angle 3, \angle 4, \angle 5$. ثم وضّح كيف استعملت $m\angle 2$ لإيجاد هذه القياسات نفسها.

d) **جبريًا:** إذا كان $m\angle 1 = x$، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كلٍّ من $\angle 3, \angle 4, \angle 5$، وبالمثل إذا كان $m\angle 2 = x$ ، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كلٍّ من الزوايا نفسها.

$m\angle 5 = 180 - x, m\angle 4 = 180 - x, m\angle 3 = 2x - 180; m\angle 3 = 180 - x, m\angle 4 = \frac{x}{2}, m\angle 5 = \frac{x}{2}$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور إذا كان $\triangle WJZ$ متطابق الأضلاع، $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$ ، فأثبت أن $\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM}$. انظر ملحق الإجابات



تبرير: حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارتين الآتيتين صحيحة أحيانًا أو دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضّح إجابتك: (33–35) انظر الهامش

33) إذا كان قياس زاوية رأس المثلث المتطابق الضلعين عددًا صحيحًا، فإن قياس كلٍّ من زاويتَي القاعدة عدد صحيح.

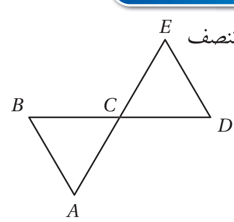
34) إذا كان قياس كلٍّ من زاويتَي القاعدة عددًا صحيحًا، فإن قياس زاوية الرأس عدد فردي.

35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا متطابق الضلعين، فيه زاويتا القاعدة منفرجتان إن أمكنك ذلك، وإلا فوضِّح السبب.

36) **اكتب:** وضِّح كيف تستعمل قياس زاوية قاعدة المثلث المتطابق الضلعين لإيجاد قياس زاوية الرأس. انظر الهامش

تدريب على اختبار

37) في الشكل المجاور، $\overline{AE}, \overline{BD}$ تنصف كلٌّ منهما الأخرى في النقطة C.



أي المعلومات الإضافية الآتية تعد كافية لإثبات أن $\overline{DE} \cong \overline{DC}$؟ A

A $\angle A \cong \angle BCA$

B $\angle B \cong \angle D$

C $\angle ACB \cong \angle EDC$

D $\angle A \cong \angle B$

38) إذا كان $x = -3$ ، فإنّ قيمة $4x^2 - 7x + 5$ تساوي: D

A 2

B 20

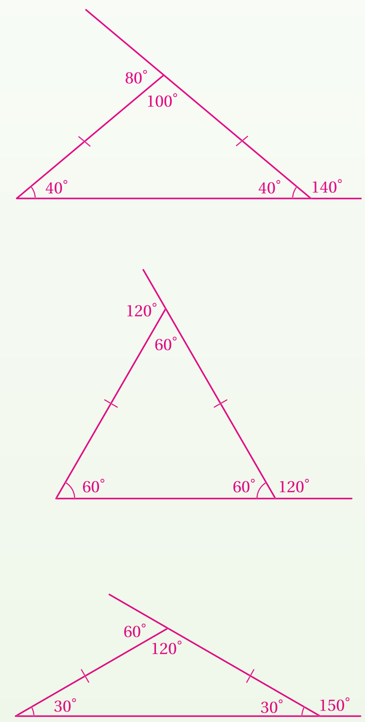
C 42

D 62

تمثيلات متعددة: في السؤال 31، يستعمل الطلاب الرسومات الهندسية، والجدول والوصف اللفظي، والعبارات الجبرية لاستقصاء القياسات الممكنة للزوايا الداخلية لمثلث متطابق الضلعين إذا عُلمت إحدى زواياه الخارجية.

إجابات:

31a)



31b)

$m\angle 5$	$m\angle 4$	$m\angle 3$	$m\angle 1$
40	40	100	140
60	60	60	120
30	30	120	150

$m\angle 5$	$m\angle 4$	$m\angle 3$	$m\angle 2$
40	40	100	80
60	60	60	120
30	30	120	60

31c) $\angle 5$ تكمّل $\angle 1$؛ لذا

$m\angle 5 = 180^\circ - m\angle 1$

$\angle 4 \cong \angle 5$ لذا $m\angle 4 = m\angle 5$

مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180°؛ لذا

$m\angle 3 = 180^\circ - m\angle 4 - \angle 5$

كذلك $\angle 2$ تكمّل $\angle 3$، لذا فإن

$m\angle 3 = 180^\circ - m\angle 2$

$m\angle 4$ يساوي مِثْلَيْ $m\angle 2$ أو مِثْلَيْ $m\angle 5$؛ لذا

$m\angle 4 = m\angle 5 = \frac{m\angle 2}{2}$.

33) أحيانًا؛ إذ تكون صحيحة فقط عندما يكون قياس زاوية الرأس عددًا زوجيًّا.

34) غير صحيحة أبدًا؛ لأن قياس زاوية الرأس يساوي $(180^\circ - 2$ (قياس إحدى زاويتَي القاعدة))، وإذا كان قياس إحدى زاويتَي القاعدة عددًا صحيحًا، فإن مجموع قياس زاويتَي القاعدة يكون عددًا زوجيًّا، وبالتالي فإن قياس زاوية الرأس سيكون زوجيًّا أيضًا.

35) لا يمكن أن يحوي المثلث أكثر من زاوية منفرجة؛ لذا لا يمكن رسم المثلث المطلوب.

36) مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180°، وزاويتا القاعدة لهما القياس نفسه؛ لذا فإن قياس زاوية رأس المثلث يساوي 180° ناقصًا مِثْلَيْ قياس إحدى زاويتَي القاعدة.

4 التقويم

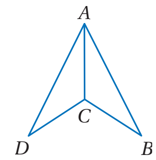
تعلَّم لاحق: اطلب إلى الطلاب أن يتوقعوا كيف ستساعدهم طرق البرهان التي تعلّموها في هذا الفصل في الدرس التالي.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 6-3 ,5-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3 ، ص (50) .

مراجعة تراكمية



39) إذا كان: $AB = 27$ in ،$AD = 27$ in ،$DC = 7$ in ،$CB = 7$ in،
فحدّد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle ADC$. (الدرس 4-3)
$\triangle ABC \cong \triangle ADC$ بحسب SSS، حيث $AC = AC$

اذكر الخاصية التي تبرر كلًّا من العبارات الآتية: (الدرس 6-1)

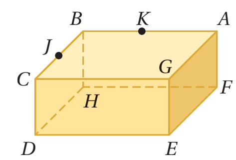
40) إذا كان $x(y + z) = a$ ، فإنّ $xy + xz = a$. خاصية التوزيع

41) إذا كان $n - 17 = 39$ ، فإنّ $n = 56$. خاصية الجمع للمساواة

42) إذا كان $m\angle P + m\angle Q = 110$ وكانت $m\angle R = 110°$ ، فإنّ $m\angle P + m\angle Q = m\angle R$. خاصية التعويض

43) إذا كان $MD = 15$, $CV = MD$ فإنّ $CV = 15$. خاصية التعدي

انظر إلى الشكل المجاور. (مهارة سابقة)



44) ما عدد المستويات الظاهرة في هذا الشكل؟ 6

45) سمِّ ثلاث نقاطٍ تقع على استقامةٍ واحدةٍ. إجابة ممكنة : A, K, B

استعد للدرس اللاحق

أوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة التي إحداثيات طرفَيها كما يأتي:

46) $A(2, 15)$, $B(7, 9)$ **(4.5 , 12)**

47) $C(-4 , 6)$, $D(2, -12)$ **(−1 , −3)**

48) $E(3 , 2.5)$, $F(7.5 , 4)$ **(5.25 , 3.25)**

الدرس 6-3 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع 195

الفصل 3

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 3

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31) دون

الاسم ______ التاريخ ______

3-6 تدريبات إعادة التعليم

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين:

في المثلث المتطابق الضلعين يوجد ضلعان متطابقان، يطلق عليهما اسم **الساقين**. وتُسمَّى الزاوية التي ضلعاها ساقا المثلث **زاوية الرأس**. وتُسمَّى الزاويتان الأخريان **زاويتي القاعدة**. ويمكنك إثبات النظرية الآتية الخاصة بالمثلث المتطابق الضلعين وعكسها.

- إذا تطابق ضلعان في مثلثٍ، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان (نظرية المثلث المتطابق الضلعين).
- إذا تطابقت زاويتان في مثلثٍ، فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان (عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين).

إذا كانت: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$، فإن: $\angle A \cong \angle C$

إذا كانت: $\angle A \cong \angle C$، فإن: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$

مثال 1 أوجد قيمة x في الشكل أدناه، إذا علمت أن $\overline{BC} \cong \overline{BA}$.

بما أن $BC = BA$، فإن:

$m\angle A = m\angle C$	نظريّة المثلث المتطابق الضلعين
$5x - 10 = 4x + 5$	بالتعويض
$x - 10 = 5$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$x = 15$	بإضافة 10 إلى كلا الطرفين

مثال 2 أوجد قيمة x في الشكل أدناه.

بما أن $m\angle S = m\angle T$، فإن:

$SR = TR$	عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين
$3x - 13 = 2x$	بالتعويض
$3x = 2x + 13$	بإضافة 13 إلى كلا الطرفين
$x = 13$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين

تمارين

جبر: أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

1) 35　2) 12　3) 15

4) 12　5) 9　6) 36

7) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\angle 1 \cong \angle 2$	1) معطيات
2) $\angle 2 \cong \angle 3$	2) الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان
3) $\angle 1 \cong \angle 3$	3) خاصية التعدي للتطابق
4) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$	4) عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

الصف: الأول الثانوي　31　الفصل 3: المثلثات المتطابقة

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (32) دون

الاسم ______ التاريخ ______

3-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع:

الأضلاع في المثلث المتطابق الأضلاع تكون متطابقة، تقود نظريّة المثلث المتطابق الضلعين إلى النتيجتين الآتيتين المتعلقتين بزوايا المثلث المتطابق الأضلاع:

1) يكون المثلث متطابق الأضلاع، إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.
2) قياس كلّ زاويةٍ في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي $60°$.

مثال أثبت أنه إذا وازى مستقيمٌ أحد أضلاع مثلثٍ متطابق الأضلاع، فإنه يُكوّن مثلثًا آخر متطابق الأضلاع.

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) ΔABC متطابق الأضلاع $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$	1) معطيات
2) $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60°$	2) قياس كلّ زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي $60°$.
3) $\angle 1 \cong \angle B, \angle 2 \cong \angle C$	3) إذا توازَى مستقيمان، فإن الزاويتين المتناظرتين متطابقتان.
4) $m\angle 1 = 60°, m\angle 2 = 60°$	4) بالتعويض
5) ΔAPQ متطابق الأضلاع.	5) إذا كان المثلث متطابق الزوايا، فإنه يكون متطابق الأضلاع.

تمارين

جبر: أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

1) 10　2) 5　3) 20

4) 10　5) 12　6) 15

7) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: ΔABC متطابق الأضلاع؛ $\angle 1 \cong \angle 2$.

المطلوب: إثبات أن $\angle ADB \cong \angle CDB$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) ΔABC متطابق الأضلاع	1) معطيات
2) $\overline{AB} \cong \overline{CB}; \angle A \cong \angle C$	2) زوايا المثلث المتطابق الأضلاع متطابقة وأضلاعه متطابقة
3) $\angle 1 \cong \angle 2$	3) معطيات
4) $\Delta ABD \cong \Delta CBD$	4) المسلّمة ASA
5) $\angle ABD \cong \angle CDB$	5) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

الصف: الأول الثانوي　32　الفصل 3: المثلثات المتطابقة

تدريبات المهارات (33) دون ضمن

الاسم ______ التاريخ ______

3-6 تدريبات المهارات

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة 4–1.

1) إذا كانت: $\overline{AC} \cong \overline{AD}$، فسَمِّ زاويتين متطابقتين.
$\angle ACD \cong \angle CDA$

2) إذا كانت: $\overline{BE} \cong \overline{BC}$، فسَمِّ زاويتين متطابقتين.
$\angle BEC \cong \angle BCE$

3) إذا كانت: $\angle EBA \cong \angle EAB$، فسَمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.
$\overline{EB} \cong \overline{EA}$

4) إذا كانت: $\angle CED \cong \angle CDE$، فسَمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.
$\overline{CE} \cong \overline{CD}$

أوجد القياس المحدّد في السؤالين الآتيين:

5) $m\angle ABC$　**$60°$**

6) $m\angle EDF$　**$70°$**

جبر: أوجد قيمة المتغيّر في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

7) **14**

8) **21**

9) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{CD} \cong \overline{CG}$، $\overline{DE} \cong \overline{GF}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{CE} \cong \overline{CF}$.

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) $\overline{CD} \cong \overline{CG}$	1) معطيات
2) $\angle D \cong \angle G$	2) إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.
3) $\overline{DE} \cong \overline{GF}$	3) معطيات
4) $\Delta CDE \cong \Delta CGF$	4) المسلّمة SAS
5) $\overline{CE} \cong \overline{CF}$	5) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.

الصف: الأول الثانوي　33　الفصل 3: المثلثات المتطابقة

تدريبات حل المسألة (34) دون ضمن فوق

الاسم ______ التاريخ ______

3-6 تدريبات حلّ المسألة

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

1) **مخطط هندسي:** في مخطط هندسيٍّ يرسمه ياسر، يريد تحديد نقطة C على الرسم أدناه، بحيث يصبح المثلث ABC متطابق الضلعين، فيه: $AB = AC$، $m\angle ACB = 40°$

هل يستطيع إجراء ذلك؟ وضِّح الخطوات.

نعم؛ بما أن ΔABC متطابق الضلعين، إذن زاويتا القاعدة متطابقتان. يرسم ياسر $\angle ABC$ والتي قياسها $40°$، ثم يحدد C باستعمال الفرجار، بحيث يكون $AB = BC$

2) **مساطر:** على مسطرة قابلة للطيّ مفصلتان تقسمانها إلى ثلاثة أجزاء متساوية. فإذا طوي طرفا المسطرة إلى أعلى حتى يتلامسا، فما نوع المثلث الناتج؟
مثلث متطابق الأضلاع

3) **أشكال سداسيّة:** وضع هشام 6 أعواد ثقاب، بحيث تلتقي أطرافها عند نقطة واحدة. ثم جُعلت أطرافها الأخرى على أبعاد متساوية بعضها عن بعض، ورُسمت مستقيمات تصل بينها، فكانت النتيجة شكلًا سداسيًّا منتظمًا كما في الشكل أدناه. صنِّف المثلثات الستة المكونة للشكل، ووضِّح إجابتك.

إجابة ممكنة: لمّا كان في كلّ مثلث ضلعان متطابقان، فإن جميع المثلثات متطابقة الضلعين. وبما أن الأعواد على أبعاد متساوية عن بعضها البعض، فإن زاوية الرأس عند المركز تساوي $\frac{360°}{6}$ أي $60°$. ولذلك فإن زوايا القاعدة تساوي $\frac{(180° - 60°)}{2}$ أي $60°$. وبما أن جميع زوايا كلّ مثلث تساوي $60°$، فإن الأضلاع جميعها ستكون متطابقة؛ أي أن هذه المثلثات متطابقة الأضلاع.

4) **ممرّات:** أُنشيء ممرٌّ من الرخام بصفّ عدة مثلثات متطابقة ومتطابقة الضلعين. إذا كانت زاوية الرأس في كلٍّ من هذه المثلثات $20°$، فما قياس الزاوية 1 في الشكل الآتي؟

$80°$

5) **زخارف هندسية:** أراد مصمم أن يختار وحدة زخارف هندسية منتظمة تتكون من عدة مثلثات متطابقة، فكان أمامه الخيارات التالية:

الشكل 1　الشكل 2　الشكل 3　الشكل 4

a) ما نوع المثلثات المستعملة في كل حالةٍ؟
جميع المثلثات متطابقة الضلعين، ما عدا شكل 3 مثلثات متطابقة الأضلاع.

b) إذا وجد المصمم أن لديه مجموعة من المثلثات المتطابقة الضلعين، والتي قياس إحدى زوايا القاعدة فيها $54°$، فهل يمكنه استخدامها لتكوين شكل 4؟ ولماذا؟
لا، إجابة ممكنة: في الشكل 4 لا يكون قياس زاوية القاعدة $54°$

c) أيُّ الأشكال يمكن تكوينها من المثلثات التي لدى المصمم؟
الشكل رقم 2؛ لأن قياس زاوية الرأس في المثلث $\frac{360°}{5} = 72°$، إذن مجموع قياسَي زاويتَي القاعدة $180°-72°=108°$، إذن قياس زاوية القاعدة يساوي $54°$

الصف: الأول الثانوي　34　الفصل 3: المثلثات المتطابقة

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 3

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (35) ضمن فوق

الاسم ____________ التاريخ ________

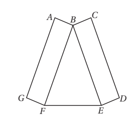
3-6 التدريبات الإثرائية

قياسات زوايا:

تحوي بعض المسائل رسومًا، إذا لم تكن متأكّدًا من طريقة حلّ المسألة، فابدأ بالمعطيات، وأوجد قياس أكبر عددٍ ممكنٍ من الزوايا في الشكل، واكتب كلّ قياسٍ على الشكل، فقد يوفّر هذا الأمر أدلّة إضافيّة تساعدك على حلّ المسألة.

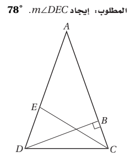
1) **المعطيات:** $BE = BF, \angle BFG \cong \angle BEF \cong \angle BED, m\angle BFE = 82^\circ$، والأضلاع المتقابلة في كلٍّ من المضلعين $ABFG$، $BCDE$ متوازية ومتطابقة.

المطلوب: **إيجاد** $m\angle ABC$. **148°**



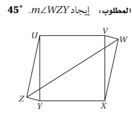
2) **المعطيات:** $AC = AD$، $\overline{AB} \perp \overline{BD}$، و $m\angle DAC = 44^\circ$، $\overline{CE}$ تنصّف $\angle ACD$.

المطلوب: **إيجاد** $m\angle DEC$. **78°**



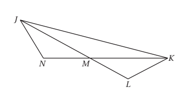
3) **المعطيات:** $m\angle UZY = 90^\circ, m\angle ZWX = 45^\circ$، $\Delta YZU \cong \Delta VWX$، $UVXY$ مربع (أي أن جميع أضلاعه متطابقة، وجميع زواياه قوائم).

المطلوب: إيجاد $m\angle WZY$. **45°**



4) **المعطيات:** $m\angle N = 120^\circ$، $\overline{JN} \cong \overline{MN}$، $\Delta JNM \cong \Delta KLM$.

المطلوب: إيجاد $m\angle JKM$. **15°**

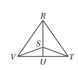


كتاب التمارين (25) دون ضمن فوق

3 - 6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

الفصل الثالث المثلثات المتطابقة

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة الآتية :



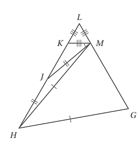
1) إذا كان $\overline{RV} \cong \overline{RT}$، فسمّ زاويتين متطابقتين. $\angle RTV \cong \angle RVT$

2) إذا كان $\overline{RS} \cong \overline{SV}$، فسمّ زاويتين متطابقتين. $\angle SVR \cong \angle SRV$

3) إذا كانت $\angle SRT \cong \angle STR$، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين. $\overline{ST} \cong \overline{SR}$

4) إذا كانت $\angle STV \cong \angle SVT$، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين. $\overline{ST} = \overline{SV}$

أوجد قياس كلٍّ مما يأتي، علمًا بأن $\angle HMK = 50^\circ$:



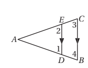
5) $m\angle KML$ 60° 6) $m\angle HMG$ 70° 7) $m\angle GHM$ 40°

8) إذا كان $m\angle HJM = 145^\circ$، فأوجد $m\angle MHJ$. 17.5°

9) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$، $\angle 1 \cong \angle 2$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	1) معطى
2) $\angle 1 \cong \angle 4$، $\angle 2 \cong \angle 3$	2) الزاويتان المتناظرتان متطابقتان.
3) $\angle 1 \cong \angle 2$	3) معطًى
4) $\angle 3 \cong \angle 4$	4) تطابق الزوايا يحقق خاصية التعدي.
5) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	5) إذا تطابقت زاويتان في مثلث ، فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين.

10) **رياضة:** راية فريق كرة القدم في مدرسة ابن الهيثم الثانوية على شكل مثلث متطابق الضلعين. إذا كان قياس زاوية رأس المثلث 18، فأوجد قياس كلٍّ من زاويتَي القاعدة. $81^\circ, 81^\circ$

3-7 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-7

استعمال الهندسة الإحداثية لإثبات تطابق المثلثات.

الدرس 3-7

- رسم مثلثات وتحديد مواقعها لاستعمالها في البرهان الإحداثي.
- كتابة برهان إحداثي.

ما بعد الدرس 3-7

استعمال تحويلات التطابق لعمل تخمينات حول خصائص الأشكال الهندسية ومن ضمنها الأشكال المرسومة على المستوى الإحداثي، وإثبات صحتها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا".

واسأل:

- ما أوجه الشبه بين الشبكة الإحداثية على سطح الأرض والمستوى الإحداثي الهندسي؟ المحور x يمثل خط الاستواء، والمحور y يمثل خط الطول الصفري .
- ما الطريقة التي تتوقع أن يحدد بها القمر الاصطناعي موقعك على الأرض؟ اقبل الإجابات المنطقية كلها.
- ماذا يلزم لإيجاد المسافة بين نقطتين على المستوى الإحداثي؟ يجب معرفة إحداثيات كل نقطة.

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي
Triangles and Coordinate Proof

فيما سبق:

درست استعمال الهندسة الإحداثية لبرهان تطابق المثلثات.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أرسم مثلثات، وأحدد مواقعها لاستعمالها في البرهان الإحداثي.
- أكتب برهانًا إحداثيًا.

المفردات:

البرهان الإحداثي
coordinate proof

www.obeikaneducation.com

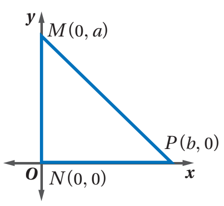
لماذا؟

نظام تحديد الموقع العالمي (GPS) يستقبل البث من الأقمار الاصطناعية، والتي يمكن بواسطتها تحديد موقع السيارة. ويمكن الاستفادة من هذه المعلومات بالإضافة إلى برمجيات أخرى لتوجيه حركة السيارة.

موقع المثلث وتسميته: كما هو الحال في نظام تحديد الموقع العالمي، فإن معرفة إحداثيات رؤوس شكل ما في مستوى إحداثيٍّ، يمكِّن من اكتشاف خصائصه والتوصل إلى استنتاجات خاصة به. ويستعمل **البرهان الإحداثي** الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية. فالخطوة الأولى في البرهان الإحداثي هي تمثيل الشكل في المستوى الإحداثي.

مثال 1 تحديد موقع المثلث وتسميته

ارسم المثلث القائم MNP في المستوى الإحداثي، وسمِّ رؤوسه على أن يكون طول $\overline{MN}$ يساوي a وحدة، وطول $\overline{NP}$ يساوي b وحدة.



- يحدد طول الضلع الذي يقع على أحد المحورين بسهولة؛ لذا من الأفضل وضع ضلعَي القائمة على المحورين x, y.
- اجعل زاوية المثلث القائمة $\angle N$ على نقطة الأصل، فيكون ضلعا القائمة على المحورين هما x, y.
- ارسم المثلث في الربع الأول.
- ارسم M على المحور y، وبما أن طول $\overline{MN}$ يساوي a وحدة، فإن إحداثيها x يساوي صفرًا، وإحداثيها y يساوي a.
- ارسم P على المحور x، وبما أن طول $\overline{NP}$ يساوي b وحدة، فإن إحداثيها y يساوي صفرًا، وإحداثيها x يساوي b.

إرشادات للدراسة

الارتفاع على القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين ينصف القاعدة.

تحقق من فهمك انظر ملحق الإجابات

1) ارسم المثلث JKL المتطابق الضلعين في المستوى الإحداثي وسمِّ رؤوسه، على أن يكون طول قاعدته $\overline{JL}$ يساوي a وحدة، ويكون ارتفاعه b وحدة، والرأس K يقع على المحور y.

مفهوم أساسي رسم المثلثات في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اجعل نقطة الأصل رأسًا للمثلث.

الخطوة 2: ارسم ضلعًا واحدًا على الأقل من أضلاع المثلث على أحد المحورين.

الخطوة 3: ارسم المثلث في الربع الأول إن أمكن.

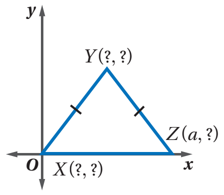
الخطوة 4: استعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

مصادر الدرس 3-7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (198)	• تنويع التعليم، ص (198, 201)	• تنويع التعليم، ص (198, 201)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (26)	• كتاب التمارين، ص (26)	• كتاب التمارين، ص (26)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36) • تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (36) • تدريبات المهارات، ص (38) • تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)	• تدريبات حل المسألة، ص (39) • التدريبات الإثرائية، ص (40)

مثال 2 إيجاد الإحداثيات المجهولة

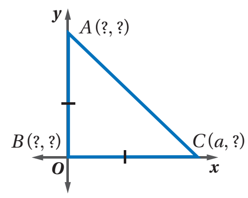
أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث XYZ المتطابق الضلعين.



بما أن الرأس X يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0, 0)$، ولأن الرأس Z يقع على المحور x، فإن الإحداثي y له يساوي صفرًا، فتكون إحداثيات الرأس Z هي $(a, 0)$، وبما أن $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فإن الإحداثي x للنقطة Y يقع في منتصف المسافة بين 0 و a ويكون $\frac{a}{2}$، أما الإحداثي y للنقطة Y فلا يمكننا إيجاده بدلالة a، وإذا افترضناه b، فتكون إحداثيات النقطة Y هي $\left(\frac{a}{2}, b\right)$.

تحقق من فهمك

2) أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية. $A(0, a), B(0, 0), C(a, 0)$



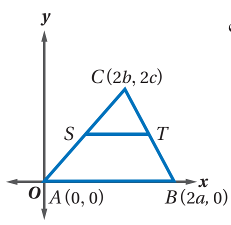
إرشادات للدراسة

الزاوية القائمة
تقاطع المحور x مع المحور y يشكّل زاوية قائمة؛ ولذا يُعد هذا التقاطع المكان المناسب لموقع الزاوية القائمة.

كتابة البرهان الإحداثي بعد رسم المثلث في المستوى الإحداثي، وتحديد إحداثيات رؤوسه، يمكنك استعمال البرهان الإحداثي؛ للتحقق من بعض الخصائص وبرهنة بعض النظريات.

مثال 3 كتابة البرهان الإحداثي

اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفَي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث.



اجعل أحد رؤوس المثلث عند نقطة الأصل وسمِّه A، واستعمل إحداثيات من مضاعفات 2؛ لأن قانون نقطة المنتصف يتضمن قسمة مجموع الإحداثيين على 2

المعطيات: $\triangle ABC$، فيه:

S نقطة منتصف $\overline{AC}$،

T نقطة منتصف $\overline{BC}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$.

البرهان:

باستعمال قانون نقطة المنتصف، فإن إحداثيات S هي: $\left(\frac{2b+0}{2}, \frac{2c+0}{2}\right) = (b, c)$.

وكذلك إحداثيات T هي: $\left(\frac{2a+2b}{2}, \frac{0+2c}{2}\right) = (a+b, c)$.

وبتطبيق قانون الميل، فإن ميل $\overline{ST}$ هو: $\frac{c-c}{a+b-b} = 0$.

وميل $\overline{AB}$ هو: $\frac{0-0}{2a-0} = 0$.

وبما أن ميل $\overline{ST}$ يساوي ميل $\overline{AB}$، فإن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$.

إرشادات للدراسة

البرهان الإحداثي
تنطبق الإرشادات والطرائق المستعملة في هذا الدرس على كل المضلعات، ولا تقتصر على المثلثات.

موقع المثلث وتسميته

المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية استعمال البرهان الإحداثي لإثبات صحة المفاهيم الهندسية.

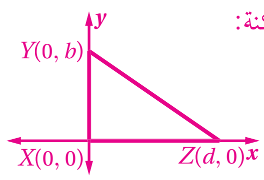
التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

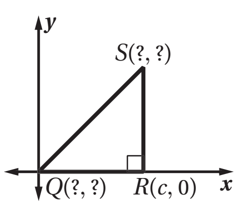
مثالان إضافيان

1 ارسم المثلث XYZ القائم في X في المستوى الإحداثي، وسمِّ رؤوسه، بحيث يكون طول الضلع $\overline{XZ}$ يساوي d وحدة، وطول الضلع $\overline{XY}$ يساوي b وحدة.

إجابة ممكنة:



2 أوجد الإحداثيات المجهولة للمثلث القائم الزاوية المتطابق الضلعين QRS. $Q(0, 0); S(c, c)$

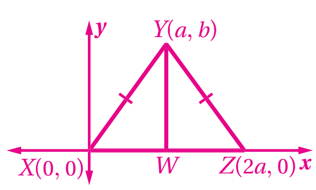


كتابة البرهان الإحداثي

المثالان 3, 4 يبيّنان كيفية استعمال الخصائص والنظريات لكتابة البراهين الإحداثية.

مثال إضافي

3 اكتب برهانًا إحداثيًّا؛ لإثبات أن القطعة المستقيمة الواصلة من رأس المثلث المتطابق الضلعين إلى نقطة منتصف القاعدة تكون عمودية على تلك القاعدة.

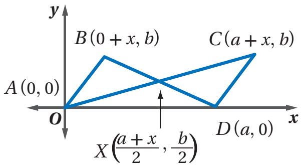


$W(a, 0)$ هي نقطة منتصف $\overline{XZ}$، وميل $\overline{YW}$ غير معرّف وميل $\overline{XZ}$ يساوي 0.

$\overline{YW} \perp \overline{XZ}$.

✓ تحقق من فهمك

3) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن:
$\triangle ABX \cong \triangle CDX$. انظر ملحق الإجابات



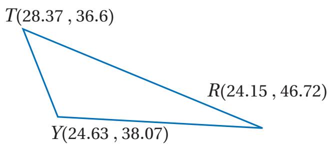
يمكن استعمال طرائق البرهان الإحداثي لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 4 من واقع الحياة — تصنيف المثلثات

جغرافيا: إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لكلٍّ من الرياض وينبع وتبوك هي: الرياض **24.15°N 46.72°E**، ينبع **24.63°N 38.07°E**، تبوك **28.37°N 36.6°E**، فاكتب برهانًا إحداثيًّا يبيِّن أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

إرشاد: يمكن التعبير عن إحداثي المدينة 24.15°N 46.72°E بالزوج المرتب (24.15, 46.72) وكذلك بقية المدن.

الخطوة الأولى هي رسم شكل تقريبي لهذا المثلث، وتعيين المواقع الثلاثة وإحداثياتها على الرسم، ولتكن R تمثّل الرياض، و Y تمثّل ينبع ، و T تمثّل تبوك.



إذا لم يتطابق أي ضلعين في $\triangle RYT$ ، فسيكون مختلف الأضلاع. استعمل قانون المسافة بين نقطتين والآلة الحاسبة لإيجاد أطوال أضلاع المثلث.

$$RY = \sqrt{(24.15 - 24.63)^2 + (46.72 - 38.07)^2} \approx 8.66$$

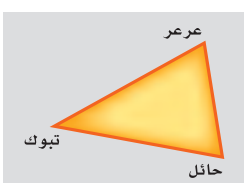
$$RT = \sqrt{(28.37 - 24.15)^2 + (36.6 - 46.72)^2} \approx 10.96$$

$$YT = \sqrt{(24.63 - 28.37)^2 + (38.07 - 36.6)^2} \approx 4.02$$

وبما أن أطوال أضلاع المثلث مختلفة، إذن فهو مثلث مختلف الأضلاع؛ أيْ أن المثلث الذي رؤوسه هي الرياض وينبع وتبوك مختلف الأضلاع.

✓ تحقق من فهمك

4) **جغرافيا:** يضم مجمَّع كشفيّ ثلاث فرق من ثلاث مدن تمثل مثلثًا. إذا كانت الإحداثيات التقريبية لمواقع هذه المدن الثلاث هي: تبوك 28.37°N36.6°E ، عرعر 30.9°N41.13°E ، حائل 27.43°N41.68°E، فاكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث متطابق الضلعين تقريبًا. انظر ملحق الإجابات



الربط مع الحياة

يقع مثلث برمودا المبين في الخريطة في المحيط الأطلسي، وهو على شكل مثلث مختلف الأضلاع. وتقدر مساحته الحقيقية بـ 482344 ميلًا مربعًا.

تاريخ الرياضيات

محمد بن أحمد أبو الريحان البيروني الخوارزمي، 362هـ - 973هـ

برز في كثير من فروع المعرفة الإنسانية (الأدب، الجغرافيا، الفلك، الرياضيات)، فقد حدد بدقة خطوط الطول وخطوط العرض، ووضع قاعدة حسابية لتسطيح الكرة؛ أي نقل الخطوط والخرائط من الكرة إلى سطح مسطح والعكس..

التعليم باستعمال التقنيات

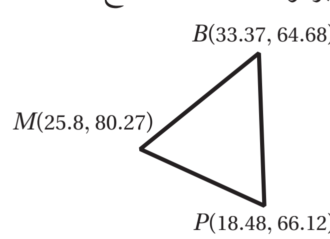
السبورة التفاعلية: ارسم مثلثًا على السبورة، ثم ارسم مستوى إحداثيًّا بحيث يقع أحد رؤوس المثلث عند النقطة (a, b) في الربع الأول. ثم أعد رسم مستوى إحداثي آخر بحيث يقع هذا الرأس عند النقطة $(0, 0)$. وضح للطلاب أن هذا الوضع للمثلث يساعد على تبسيط الحسابات.

إرشادات للمعلم الجديد

التبرير: بما أن البرهان الإحداثي يستعمل الخصائص الهندسية والجبرية، ذكّر الطلاب أنهم يحتاجون إلى استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف بالإضافة إلى المسلّمات والنظريات. ووجههم في أثناء حلّهم للمسائل اللفظية إلى البحث عن الكلمات المفتاحية مثل "الطول" أو "الموازي" التي قد تعني أنه يمكن حل المسألة باستعمال صيغة معينة.

مثال إضافي

4 **مثلث برمودا:** إذا كانت إحداثيات رؤوس مثلث برمودا على الخريطة هي:
ميامي: 25.8°N 80.27°W ،
بورتريكو: 18.48°N 66.12°W ،
برمودا: 33.37°N 64.68°W،
فاكتب برهانًا إحداثيًّا يبيِّن أن مثلث برمودا مختلف الأضلاع.



$$MB = \sqrt{(33.37-25.8)^2+(64.68-80.27)^2} \approx 17.33$$

$$MP = \sqrt{(25.8-18.48)^2+(80.27-66.12)^2} \approx 15.93$$

$$PB = \sqrt{(33.37-18.48)^2+(64.68-66.12)^2} \approx 14.96$$

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون / المكانيون: زوِّد الطلاب بنسخة شفافة من خريطة، أو اعرض لهم خريطة على جهاز العرض الرأسي، واطلب إليهم أن يختاروا ثلاثة مواقع ويرسموا مثلثًا رؤوسه هي هذه المواقع، ثم يضعوا هذه الخريطة الشفافة فوق مستوى إحداثي، واطلب إليهم أن يكتبوا برهانًا إحداثيًّا لتصنيف المثلث.

المحتوى الرياضي

بالأرقام أولًا: قبل البدء في البراهين، وجِّه الطلاب إلى أن يرسموا شكلًا باستعمال إحداثيات عددية أولًا، ثم يحولوها إلى متغيرات؛ لأن ذلك يُسهِّل عليهم كتابة البراهين الإحداثية.

تأكد

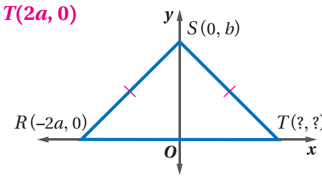
المثال 1 ارسم كلًّا من المثلثين الآتيين في المستوى الإحداثي، وحدِّد إحداثيات رؤوسه. **1, 2) انظر الهامش**

1) $\triangle ABC$ قائم الزاوية، فيه $\overline{AC}, \overline{AB}$ ضلعا القائمة، وطول $\overline{AC}$ يساوي $2a$ وحدة، وطول $\overline{AB}$ يساوي $2b$ وحدة.

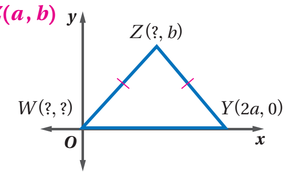
2) $\triangle FGH$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{FG}$ يساوي $2a$ وحدة.

المثال 2 أوجد الإحداثيات المجهولة في كلٍّ من المثلثين الآتيين:

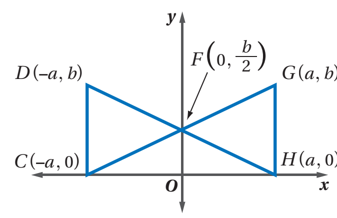
3) **$T(2a, 0)$**



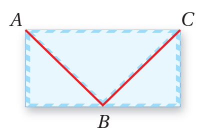
4) **$W(0, 0), Z(a, b)$**



المثال 3 **5)** اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن $\triangle FDC \cong \triangle FGH$. **انظر ملحق الإجابات**



المثال 4 **6)** اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن المثلث ABC متطابق الضلعين، علمًا بأن بُعدَي المظروف هما: 10 cm, 20 cm، والنقطة B في منتصف الحافة السفلى للمظروف. **انظر ملحق الإجابات**



تدرب وحل المسائل

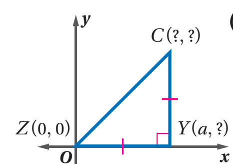
المثال 1 ارسم كل مثلثٍ من المثلثات الآتية في المستوى الإحداثي، وحدِّد إحداثيات رؤوسه: **7, 8) انظر ملحق الإجابات**

7) $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{AB}$ يساوي a وحدة.

8) $\triangle XYZ$ القائم الزاوية الذي وتره $\overline{YZ}$، وطول الضلع $\overline{XY}$ يساوي b وحدة، وطول $\overline{XZ}$ ثلاثة أمثال طول $\overline{XY}$.

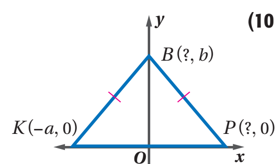
المثال 2 أوجد الإحداثيات المجهولة في كل مثلث مما يأتي:

9)



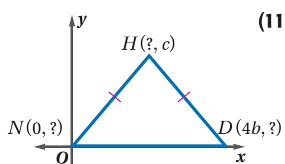
$C(a, a), Y(a, 0)$

10)



$P(a, 0), B(0, b)$

11)



$H(2b, c), N(0, 0), D(4b, 0)$

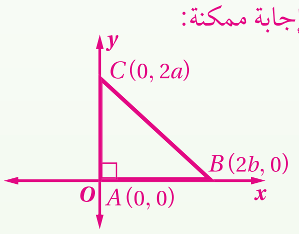
3 التدريب

التقويم التكويني

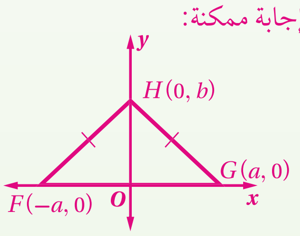
استعمل الأسئلة 6–1 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

1) إجابة ممكنة:



2) إجابة ممكنة:



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	7–17 ، 19 ، 22 ، 23-33
ضمن المتوسط	7–17 فردي ، 18 ، 19 ، 22 ، 22-33
فوق المتوسط	18–30 ، (اختياري: 31-33)

المثالان 3, 4 **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل عبارة من العبارات الآتية: **(12, 13 انظر ملحق الإجابات**

12) القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين نقاط منتصفات أضلاع مثلث متطابق الضلعين تشكّل مثلثًا متطابق الضلعين أيضًا.

13) طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في المثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث.

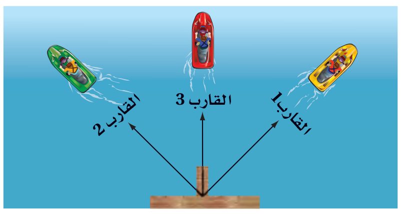
14) **جغرافيا:** إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لمواقع مدن جيزان ونجران وخميس مشيط هي: جيزان 16.9°N 42.58°E ، نجران 17.5°N 44.16°E ، خميس مشيط 18.3°N 42.8°E، فبيّن أن المثلث الذي رؤوسه هي هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع. **انظر ملحق الإجابات**

في $\triangle XYZ$ ، أوجد ميل كل ضلع من أضلاعه، ثم حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. ووضّح إجابتك.

15) $X(0, 0), Y(2h, 2h), Z(4h, 0)$ **16)** $X(0, 0), Y(1, h), Z(2h, 0)$ **(15, 16 انظر الهامش**

17) **نزهة:** أقامت عائلتان خيمتين في متنزّه كبير. إذا اعتبرنا أن موقع إدارة المتنزّه تقع عند النقطة (0, 0)، وأن إحداثيات موقعَي الخيمتين هما (12, 9) , (0, 25). فاكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن الشكل المتكون من مواقع إدارة المتنزّه والخيمتين هو مثلث قائم الزاوية. **انظر ملحق الإجابات**

18) **رياضة مائية:** انطلقت ثلاثة قوارب مائية من الرصيف نفسه، فاتجه الأول نحو الشمال الشرقي، واتجه الثاني نحو الشمال الغربي، أما الثالث فاتجه نحو الشمال.



توقف القاربان (الأول والثاني) على بُعد 300 m تقريبًا من الرصيف، بينما توقف الثالث على بُعد 212 m من الرصيف. **a–d) انظر ملحق الإجابات**

a) إذا اعتبرنا أن الرصيف يمثل النقطة (0, 0)، فمثّل هذا الوضع بيانيًّا، وأوجد معادلة خط سير القارب الأول، ومعادلة خط سير القارب الثاني. وفسّر إجابتك.

b) اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن الرصيف والقاربين (الأول والثاني) تُشكّل مثلثًا قائم الزاوية متطابق الضلعين.

c) أوجد إحداثيات مواقع هذه القوارب الثلاثة، وفسّر إجابتك.

d) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القوارب الثلاثة تقع على خط مستقيم واحد تقريبًا، وأن القارب الثالث يقع في منتصف المسافة بين القاربين الأول والثاني.

الربط مع الحياة

تستثمر المنطقة الشرقية وجدة إطلالتيهما على الخليج العربي والبحر الأحمر في توجيه برامج رياضية بحرية متنوعة للسياح الذين يتوافدون على الواجهات البحرية من مختلف مناطق المملكة.

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: إذا كانت إحداثيات النقطة J هي $(0, 0)$، والنقطة K هي $(2a, 2b)$، فأوجد إحداثيات النقطة L ، على أن يكون $\triangle JKL$ من النوع المحدّد في كلٍّ من الأسئلة الثلاثة الآتية:

19) مثلث مختلف الأضلاع **20)** مثلث قائم الزاوية **21)** مثلث متطابق الضلعين

19) إجابة ممكنة: $(a, 0)$
20) إجابة ممكنة: $(2a, 0)$
21) إجابة ممكنة: $(4a, 0)$

22) **مسألة مفتوحة:** في المستوى الإحداثي، ارسم مثلثًا قائم الزاوية متطابق الضلعين، على أن تكون نقطة الأصل هي نقطة منتصف وتره، وحدِّد إحداثيات كل رأسٍ من رؤوسه. **انظر الهامش**

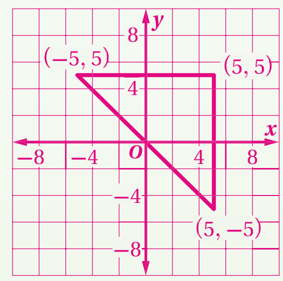
إجابات:

15) ميل $\overline{XY}$ يساوي 1، وميل $\overline{YZ}$ يساوي -1، وميل $\overline{ZX}$ يساوي صفرًا. وبما أن ناتج ضرب ميلَي ضلعين في المثلث $\triangle XYZ$ يساوي -1 ؛ فإنه قائم الزاوية.

16) ميل $\overline{XY}$ يساوي h، وميل $\overline{YZ}$ يساوي $\frac{h}{1-2h}$ ،

وميل $\overline{ZX}$ يساوي صفرًا. ولا يوجد ميلان ناتج ضربهما يساوي -1 ، إذن $\triangle XYZ$ ليس قائم الزاوية.

22) إجابة ممكنة :



23) **تبرير:** إحداثيات رأسين في مثلثٍ هما: $(a, 0)$, $(0, 0)$. إذا أعطي إحداثيي الرأس الثالث بدلالة a ، وكان المثلث متطابق الضلعين، فحدّد إحداثيات الرأس الثالث، ثم ارسم المثلث في المستوى الإحداثي.
انظر الهامش

24) **اكتب:** وضّح فائدة اتباع كلٍّ من الإرشادات الآتية؛ لرسم المثلث في المستوى الإحداثي عند كتابة البرهان الإحداثي:

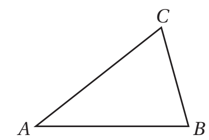
a) اجعل نقطة الأصل أحد رؤوس المثلث. a–c انظر الهامش

b) ارسم ضلعًا واحدًا على الأقل من أضلاع المثلث على المحور x أو المحور y.

c) حاول أن يقع المثلث في الربع الأول ما أمكن ذلك.

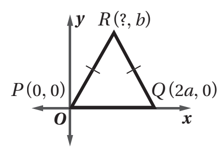
تدريب على اختبار

25) في الشكل أدناه إذا كان $m\angle B = 76°$، وقياس $\angle A$ يساوي نصف قياس $\angle B$، فما $m\angle C$؟ D



A) $33°$
B) $38°$
C) $46°$
D) $66°$

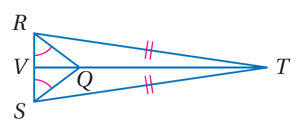
26) ما إحداثيات النقطة R في المثلث المجاور؟ B



A) $\left(\frac{a}{2}, b\right)$
B) (a, b)
C) $(4a, b)$
D) $\left(\frac{a}{4}, b\right)$

مراجعة تراكمية

باستعمال الشكل المجاور، أجب عن الأسئلة 29–27. (الدرس 6-3)



27) سمِّ زاويتين متطابقتين غير المشار إليهما في الشكل. إجابة ممكنة: $\angle TSR \cong \angle TRS$

28) سمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إليهما في الشكل. إجابة ممكنة: $\overline{RQ} \cong \overline{QS}$

29) سمِّ مثلثين متطابقين. إجابة ممكنة: $\triangle RQV \cong \triangle SQV$

30) ما ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2, 6)$, $(-2, -6)$. (الدرس 4-2) 3

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، وقرّب الناتج إلى أقرب عُشر:

31) $X(5, 4)$, $Y(2, 1)$ 4.2

32) $A(1, 5)$, $B(-2, -3)$ 8.5

33) $J(-2, 6)$, $K(1, 4)$ 3.6

4 التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلاب استعمال كلماتهم الخاصة في الكتابة عن كيفية رسم الأشكال في المستوى الإحداثي، وتحديد الإحداثيات المناسبة للرؤوس. وكيف يمكن تسهيل البرهان الإحداثي بجعل أحد الرؤوس عند نقطة الأصل واختيار الإحداثيات الأنسب لكل مسألة.

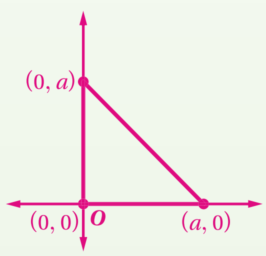
التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 7-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4 ، ص (50) .

إجابات:

23) إجابة ممكنة: $(0, a)$؛



24a) استعمال نقطة الأصل رأسًا للمثلث يُسهِّل العمليات الحسابية؛ لأن إحداثيات نقطة الأصل $(0, 0)$.

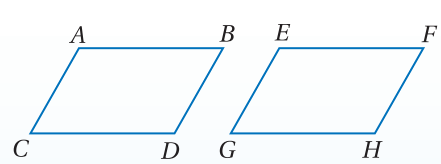
24b) رسم ضلع واحد على الأقل للمثلث على المحور x أو المحور y، يُسهِّل الحسابات عند إيجاد أطوال أضلاع؛ لأن أحد الإحداثيات يكون 0

24c) رسم المثلث في الربع الأول، يجعل جميع إحداثيات رؤوسه موجبة، وهذا يُسهِّل إجراء العمليات الحسابية.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسع: اكتب برهانًا لإثبات أن $ACDB \cong EGHF$.



المعطيات: $\overline{AC} \cong \overline{EG}, \overline{BD} \cong \overline{FH}, \overline{AB} \cong \overline{EF},$
$\overline{CD} \cong \overline{GH}, \angle A \cong \angle E, \angle D \cong \angle H$

البرهان: ارسم القطرين $\overline{CB}$, $\overline{FG}$. $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ وكذلك $\triangle BCD \cong \triangle FGH$ (SAS) . وبكتابة الزوايا المتطابقة الناتجة عن تطابق هذه المثلثات، وبجمع الزوايا، يمكن إثبات أن: $\angle B \cong \angle F, \angle C \cong \angle G$. وبما أن الأضلاع والزوايا في الشكل الرباعي $ACDB$ تتطابق مع نظائرها في الشكل الرباعي $EGHF$ إذن $ACDB \cong EGHF$.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر الدرس 7 - 3

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (36) دون

الاسم ______ التاريخ ______

3-7 تدريبات إعادة التعليم

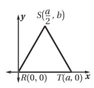
المثلثات والبرهان الإحداثيّ

رسم المثلثات وتحديد مواقعها:

يستعمل **البرهان الإحداثيّ** الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر؛ لإثبات خصائص هندسيّة، والخطوة الأولى في البرهان الإحداثيّ هي رسم الشكل في المستوى الإحداثيّ، وكتابة إحداثيّات رؤوسه. استعمل الإرشادات الآتية عند رسم الشكل في المستوى الإحداثيّ:

1) اجعل نقطة الأصل رأسًا أو مركزًا للشكل.
2) ارسم ضلعًا واحدًا على الأقلّ من أضلاع المضلّع على أحد المحورين.
3) ارسم الشكل في الربع الأوّل من المستوى الإحداثيّ إن أمكن.
4) استعمل الإحداثيّات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

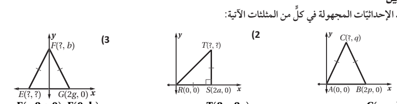
مثال ارسم ΔRST المتطابق الضلعين في المستوى الإحداثيّ، وحدِّد إحداثيات رؤوسه، على أن تكون قاعدته على المحور x الموجب، ويكون طولها a وحدةً.



- ابدأ بوضع الرأس R عند نقطة الأصل $R(0, 0)$، وارسم القاعدة $\overline{RT}$ على المحور x الموجب، فإذا كان RT يساوي a وحدةً، فإن إحداثيَّي T هما $(a, 0)$.
- أما الرأس S، فإنه يقابل نقطة منتصف $\overline{RT}$؛ لأن المثلث متطابق الضلعين، فسيكون الإحداثيّ x له يساوي $\frac{a}{2}$، وبما أننا لا نستطيع أن نكتب الإحداثيّ الصاديّ للرأس S بدلالة a، إذن سنفترض أن هذا الإحداثيّ يساوي b، فيكون الرأس الثالث $S\left(\frac{a}{2}, b\right)$.

تمارين

أوجد الإحداثيّات المجهولة في كلٍّ من المثلثات الآتية:



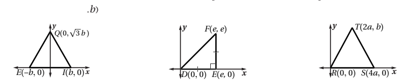
1) **C(p, q)** 2) **T(2a, 2a)** 3) **E(−2g, 0); F(0, b)**

ارسم كلَّ مثلثٍ ممّا يأتي في المستوى الإحداثيّ، وحدّد إحداثيّات رؤوسه: **الإجابات المعطاة هي بعض الإجابات الممكنة:**

4) المثلث المتطابق الضلعين RST، والذي طول قاعدته $\overline{RS}$ يساوي $4a$ وحدة.

5) المثلث القائم الزاوية المتطابق الساقين DEF الذي طول ساقه e وحدة.

6) المثلث المتطابق الأضلاع EQI الذي طول ضلعه $2b$ وحدة، ورأسه $Q(0, \sqrt{3}b)$.



الصف: الأول الثانوي 36 **الفصل 3:** المثلثات المتطابقة

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (37) دون

الاسم ______ التاريخ ______

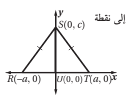
3-7 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المثلثات والبرهان الإحداثيّ

كتابة البرهان الإحداثيّ:

نستعمل البراهين الإحداثيّة لإثبات بعض النظريّات، والتحقّق من بعض خصائص الأشكال الهندسيّة، ونستعمل قانون المسافة أو قانون الميل أو قانون نقطة منتصف القطعة المستقيمة في كثيرٍ من البراهين الإحداثيّة.

مثال اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن القطعة المستقيمة المرسومة من الرأس إلى نقطة منتصف القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين تكون عموديّة على القاعدة.



ارسم مثلثًا متطابق الضلعين في المستوى الإحداثيّ أوّلًا، ولتسهيل عمليّة كتابة البرهان، اجعل رؤوس المثلث عند: $S(0, c)$, $R(-a, 0)$, $T(a, 0)$، وعندها تكون $U(0, 0)$ نقطة منتصف $\overline{RT}$.

المعطيات: ΔRST متطابق الضلعين، وU نقطة منتصف القاعدة $\overline{RT}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{SU} \perp \overline{RT}$.

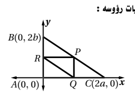
البرهان: بما أن U نقطة منتصف $\overline{RT}$، فإن إحداثيَّيها هما $\left(\frac{-a+a}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$؛ أيْ $(0, 0)$، وعندها فإن $\overline{SU}$ تكون واقعةً على المحور y، وقد رسم ΔRST، بحيث كانت $\overline{RT}$ على المحور x، ومن المعلوم أن المحورين متعامدان، وبناءً عليه فإن $\overline{SU} \perp \overline{RT}$.

تمارين

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات كلٍّ من العبارتين الآتيتين:

1) "القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين منتصفات أضلاع المثلث القائم الزاوية تشكّل مثلثًا قائم الزاوية".

إجابة ممكنة: ارسم في المستوى الإحداثي ΔABC القائم الزاوية، بحيث تكون إحداثيات رؤوسه:
A(0, 0), B(0, 2b), 0 C(2a, 0)



نقطة منتصف BC هي $P\left(\frac{0+2a}{2}, \frac{2b+0}{2}\right)$؛ أي P (a, b)

نقطة منتصف AC هي $Q\left(\frac{0+2a}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$؛ أي Q (a, 0)

نقطة منتصف AB هي $R\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+2b}{2}\right)$؛ أي R (0, b)

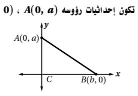
ميل $\overline{RP}$ يساوي $\frac{b-b}{a-0}$ أي 0 أي أن $\overline{RP}$ أفقية.

وميل $\overline{PQ}$ يساوي $\frac{b-0}{a-a}$ أي $\frac{b}{0}$، وهذا غير معرف؛ إذن $\overline{PQ}$ رأسية؛

إذن $\angle RPQ$ زاوية قائمة؛ لأن كلّ مستقيم رأسي يعامد كلّ مستقيم أفقي؛ إذن ΔPRQ قائم الزاوية.

2) في أيِّ مثلث قائم، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعَي طولَي الضلعين الآخرين "نظرية فيثاغورس".

إجابة ممكنة: ارسمْ في المستوى الإحداثي ΔABC القائم الزاوية في C، بحيث تكون إحداثيات رؤوسه $A(0, a)$، $B(b, 0)$، $C(0, 0)$.



- **أوجد AB باستعمال صيغة البعد بين نقطتين**

$$AB = \sqrt{(b-0)^2+(0-a)^2} = \sqrt{b^2+a^2}$$

$$(AB)^2 = b^2+a^2 = (CB)^2+(CA)^2$$

الصف: الأول الثانوي 37 **الفصل 3:** المثلثات المتطابقة

تدريبات المهارات (38) دون ضمن

الاسم ______ التاريخ ______

3-7 تدريبات المهارات

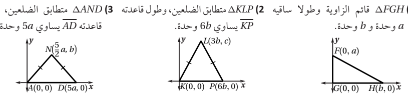
المثلثات والبرهان الإحداثيّ

ارسم كلًّا من المثلثات الآتية في المستوى الإحداثيّ، وحدّد إحداثيّات رؤوسها: **الإجابات المعطاة هي بعض الإجابات الممكنة.**

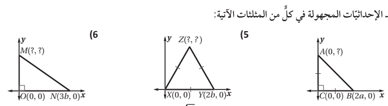
1) ΔFGH قائم الزاوية وطولا ساقيه a وحدة و b وحدة.

2) ΔKLP متطابق الضلعين، وطول قاعدته $\overline{KP}$ يساوي $6b$ وحدة.

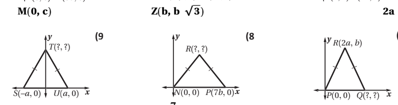
3) ΔAND متطابق الضلعين، وطول قاعدته $\overline{AD}$ يساوي $5a$ وحدة.



أوجد الإحداثيّات المجهولة في كلٍّ من المثلثات الآتية:



4) **2a** 5) **Z(b, b $\sqrt{3}$)** 6) **M(0, c)**



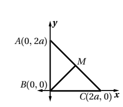
7) **Q(4a, 0)** 8) **R($\frac{7}{2}$ b, c)** 9) **T(0, b)**

10) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس الزاوية القائمة ومنتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية المتطابق الساقين، تكون عموديّةً على الوتر.

المعطيات: ΔABC قائم الزاوية ومتطابق الضلعين؛ فيه $\angle ABC$ زاوية قائمة، و M نقطة منتصف $\overline{AC}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{BM} \perp \overline{AC}$.

البرهان:



باستعمال قانون نقطة المنتصف، نجد أن إحداثيَّي M هما:

$\left(\frac{0+2a}{2}, \frac{2a+0}{2}\right)$؛ أي (a, a)، وميل $\overline{AC}$ يساوي $\frac{2a-0}{0-2a} = -1$، وميل $\overline{BM}$ يساوي $\frac{a-0}{a-0} = 1$، وبما أن ناتج ضرب ميلَيهما يساوي -1؛ إذن $\overline{BM} \perp \overline{AC}$.

الصف: الأول الثانوي 38 **الفصل 3:** المثلثات المتطابقة

تدريبات حل المسألة (39) دون ضمن فوق

الاسم ______ التاريخ ______

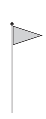
3-7 تدريبات حلّ المسألة

المثلثات والبرهان الإحداثيّ

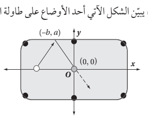
1) **رفوف:** لدى سلطان دعامة كُتب على هيئة مثلث قائم الزاوية متطابق الساقين، ويريد أن يعرف طول الوتر مقارنة بساقَي المثلث وليس لديه مسطرة، ولكنه يتذكّر صيغة المسافة، وبناءً عليه رسم الدعامة في المستوى الإحداثيّ، على أن يكون رأس الزاوية القائمة عند نقطة الأصل، ويكون طول كلٍّ من الساقين a وحدة، فما إحداثيات الرأسين اللذين يشكِّلان الزاويتين الحادّتين؟

(0, a) و (a, 0)

2) **رايات:** راية على صورة مثلث متطابق الضلعين، ويريد مصمِّمٌ أن يرسمها في المستوى الإحداثيّ، على أن تكون القاعدة على المحور y، وأحد طرفَيها عند $(0, 0)$، فإذا كان موقع رأس الراية عند $\left(a, \frac{b}{2}\right)$، فما إحداثيات الرأس الثالث؟ **$(0, b)$**



3) **بلياردو:** يبيّن الشكل الآتي أحد الأوضاع على طاولة البلياردو،



فما إحداثيّات الكرة البيضاء قبل أن تُضرَب؟

$(-2b, 0)$.

4) **خيام:** مدخل خيمة فايز على شكل مثلثٍ متطابق الضلعين، إذا رسم هذا المثلث في المستوى الإحداثيّ، على أن تكون قاعدته على المحور x، وركنه الأيسر عند $(0, 0)$، فسيكون ركنه الأيمن عند $(6, 0)$، ورأسه عند $(3, 4)$، أثبت أن هذا المثلث متطابق الضلعين.

إجابة ممكنة: طول كلٍّ من الضلعين الواصلين من طرفي القاعدة إلى الرأس يساوي 5 وحدات، وبما أن الضلعين متطابقان، فإن المثلث متطابق الضلعين.

5) **رسمٌ هندسيٌّ:** يصمّم مهندس شبكة طرق، على أن تتقاطع ثلاث طُرُق لتشكّل مثلثًا. وقد عيّن المهندس اثنين من رؤوس المثلث في المستوى الإحداثيّ عند $(-5, 0)$ و $(5, 0)$.

a) صِفْ مجموعة النقاط في المستوى الإحداثيّ التي لا يمكنها أن تكون الرأس الثالث للمثلث.

جميع نقاط المحور x.

b) صِفْ مجموعة النقاط في المستوى الإحداثيّ التي يمكنها أن تكون رأس مثلث متطابق الضلعين يلتقي عنده ضلعاه المتطابقان.

جميع نقاط المحور y باستثناء نقطة الأصل.

c) صِفْ مجموعة النقاط في المستوى الإحداثيّ التي تكوّن مع النقطتين الأخريين مثلثًا قائم الزاوية، على أن يكون رأس زاويته القائمة عند $(-5, 0)$.

جميع النقاط التي إحداثيُّها x يساوي -5 باستثناء النقطة $(-5, 0)$.

الصف: الأول الثانوي 39 **الفصل 3:** المثلثات المتطابقة

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 3

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

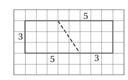
التدريبات الإثرائية (40) ضمن فوق

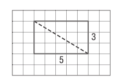
الاسم ________________ التاريخ ________

3-7 التدريبات الإثرائيّة

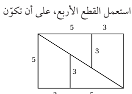
غرائب المستطيل

ارسم مستطيلين في ورق المربّعات، كما في الصورة المبيَّنة في الشكلين الآتيين وقُصَّهما على طول الخط المتقطع.





1) استعمل القطع الأربع، على أن تكوّن منها مستطيلًا جديدًا، واكتب الأبعاد عليه.



2) ما مجموع مساحتَي المستطيلين الأصليين؟

39 وحدة مربعة

3) ما مساحة الشكل الجديد؟

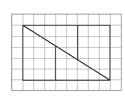
40 وحدة مربعة

4) اكتب تخمينًا لسبب وجود اختلاف بين المساحتين .

انظر إجابات الطلاب.

5) استعمل حافةً مستقيمةً لرسم الأشكال الأربعة التي تكوّن المستطيل الكبير بدقّة، ماذا تلاحظ من هذا الرسم؟

هناك فجوة صغيرة، فلا تغطّي القطع الأربع المستطيل الكبير تمامًا.



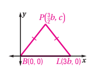
الصف: الأول الثانوي — 40 — **الفصل 3:** المثلثات المتطابقة

كتاب التمارين (26) دون ضمن فوق

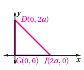
3 - 7 المثلثات والبرهان الإحداثي

ارسم كلًّا من المثلثين الآتيين في المستوى الإحداثي، واكتب إحداثيات رؤوسهما. الإجابات المعطاة هي بعض الإجابات الممكنة.

1) $\triangle BLP$ متطابق الضلعين، وطول قاعدته $\overline{BL}$ يساوي $3b$ وحدةً.



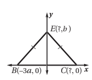
2) $\triangle DGJ$ قائم الزاوية ومتطابق الساقين، وتره $\overline{DJ}$. وطول كلٍّ من ساقيه $2a$ وحدةً.



الفصل الثالث — المثلثات المتطابقة

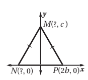
أوجد الإحداثيات المجهولة في كلٍّ من المثلثين الآتيين:

3)



$C(3a, 0), E(0, b)$

4)

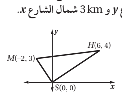


$M(0, c), N(-2b, 0)$

اتجاهات: استعمل المعلومات التالية لحل السؤالين 6 ,5:

تقع مدرسة كمال عند تقاطع الشارعين المتعامدين x , y ، ويقع منزله على بعد 6 km شرق الشارع y و 4 km شمال الشارع x ، ويقع مسجد الحي الذي يعيش فيه كمال على بعد 2 km غرب الشارع y و 3 km شمال الشارع x.

5) برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن منزل كمال ومدرسته والمسجد تشكّل رؤوس مثلث قائم الزاوية.



المعطيات: $\triangle SHM$

المطلوب: إثبات أن $\triangle SHM$ قائم الزاوية.

البرهان:

ميل $SH = \frac{2}{3} = \frac{4-0}{6-0}$

ميل $SM = -\frac{3}{2} = \frac{3-0}{-2-0}$

وبما أن حاصل ضرب ميلَيهما يساوي -1 ، فإن $\overline{SH} \perp \overline{SM}$ ؛ وعليه فإن $\triangle SHM$ قائم الزاوية .

6) أوجد المسافة بين منزل كمال والمسجد.

$HM = \sqrt{(-2-6)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65} \approx 8.1$

المسافة بين منزل كمال والمسجد 8.1km تقريبًا.

26

التقويم التكويني

المفردات الأساسية: رقم الصفحة بعد كل مفردة يشير إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرةٍ.

فإذا واجه بعض الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 1-7 ، فذكّرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (52) .

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تصنيف المثلثات (الدرس 3-1)

- يمكن تصنيف المثلث بحسب نوع زواياه، فيكون حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية. وكذلك يمكن تصنيفه بحسب أضلاعه، فيكون مختلف الأضلاع أو متطابق الضلعين أو متطابق الأضلاع.

زوايا المثلث (الدرس 3-2)

- قياس الزاوية الخارجية للمثلث يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

المثلثات المتطابقة (الدرس 3-3 إلى 3-5)

- SSS: يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعُهما المتناظرة متطابقة.
- SAS: يتطابق مثلثان إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.
- ASA: يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.
- AAS: يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع (الدرس 3-6)

- زاويتا القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان، ويكون المثلث متطابق الأضلاع إذا تطابقت جميع زواياه.

المثلثات والبرهان الإحداثي (الدرس 3-7)

- يستعمل البرهان الإحداثي الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر؛ لإثبات صحة المفاهيم الهندسية.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.

المفردات الأساسية:

- المثلث الحاد الزوايا (ص 146)
- المثلث المنفرج الزاوية (ص 146)
- المثلث القائم الزاوية (ص 146)
- المثلث المتطابق الأضلاع (ص 147)
- المثلث المتطابق الضلعين (ص 147)
- المثلث المختلف الأضلاع (ص 147)
- المستقيم المساعد (ص 154)
- الزاوية الخارجية (ص 156)
- الزاويتان الداخليتان البعيدتان (ص 156)
- البرهان التسلسليّ (ص 156)
- النتيجة (ص 157)
- التطابق (ص 162)
- المضلعات المتطابقة (ص 162)
- العناصر المتناظرة (ص 162)
- الزاوية المحصورة (ص 172)
- الضلع المحصور (ص 179)
- ساقا المثلث المتطابق الضلعين (ص 188)
- زاوية الرأس (ص 188)
- زاويتا القاعدة (ص 188)
- البرهان الإحداثي (ص 196)

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح صحيحة:

1) المثلث المتطابق الزوايا هو مثال على المثلث الحاد الزوايا. صحيحة

2) المثلث الذي يحوي زاوية أكبر من $90°$ هو مثلث قائم الزاوية. خاطئة؛ منفرج

3) المثلث المتطابق الأضلاع يكون متطابق الزوايا دائمًا. صحيحة

4) المثلث المختلف الأضلاع فيه ضلعان متطابقان على الأقل. خاطئة؛ المتطابق الضلعين

5) الضلع المحصور هو الضلع الذي يقع بين زاويتين متتاليتين في مضلع. صحيحة

6) البرهان التسلسلي يستعمل الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لبرهنة المفاهيم الهندسية. خاطئة؛ البرهان الإحداثي

7) قياس الزاوية الخارجية لمثلث يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين البعيدتين. صحيحة

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلة لكل درس.

واقترح عليهم أن يُبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون هذه المطويات أداة مراجعة سريعة لهم استعدادًا لاختبار الفصل.

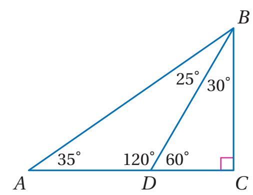
مراجعة الدروس

مراجعة: إذا لم تكن الأمثلة المعطاة كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلُّهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم.

مراجعة الدروس

3-1 تصنيف المثلثات (ص: 146-152)

صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



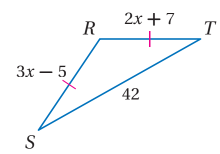
8) $\triangle ADB$ **منفرج الزاوية**

9) $\triangle BCD$ **قائم الزاوية**

10) $\triangle ABC$ **قائم الزاوية**

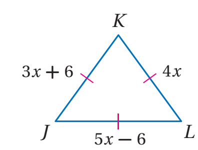
جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلثات الآتية:

11)



$x = 12, RS = RT = 31$

12)



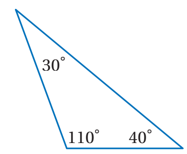
$x = 6, JK = KL = JL = 24$

13) **خرائط:** المسافة من الرياض إلى المدينة المنورة ومنها إلى مكة المكرمة ثم إلى الرياض تساوي 2092 km، والمسافة بين الرياض ومكة المكرمة تزيد 515 km على المسافة بين المدينة المنورة ومكة المكرمة. والمسافة بين المدينة المنورة ومكة المكرمة تقل 491 km عن المسافة بين الرياض والمدينة المنورة. أوجد المسافة بين كل مدينتين من هذه المدن، وصنِّف المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث.

مثال 1

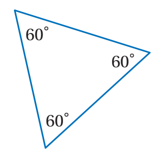
صنِّف كلًّا من المثلثين الآتيين إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

a)



بما أن للمثلث زاوية منفرجة، فيكون مثلثًا منفرج الزاوية.

b)



للمثلث ثلاث زوايا حادة جميعها متساوية؛ لذا فهو مثلث متطابق الزوايا.

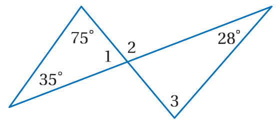
13) المسافة بين الرياض ومكة المكرمة: 877 km
المسافة بين الرياض والمدينة المنورة: 853 km
المسافة بين مكة المكرمة والمدينة المنورة: 362 km،
المثلث المتكون مختلف الأضلاع.

203 الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

3-2 زوايا المثلثات (ص: 154-161)

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة الآتية:

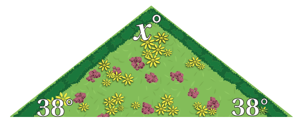


14) $\angle 1$ **70°**

15) $\angle 2$ **110°**

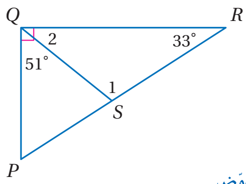
16) $\angle 3$ **82°**

17) **منازل:** حديقة منزلية على صورة مثلث متطابق الضلعين كما في الشكل أدناه. أوجد قيمة x. **104**



مثال 2

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور:



$m\angle 2 + m\angle PQS = 90°$

$m\angle 2 + 51° = 90°$ عوّض

$m\angle 2 = 39°$ اطرح 51 من الطرفين

$m\angle 1 + m\angle 2 + 33° = 180°$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$m\angle 1 + 39° + 33° = 180°$ عوّض

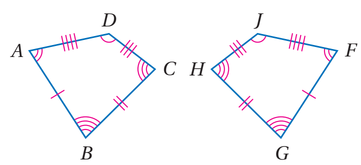
$m\angle 1 + 72° = 180°$ بسّط

$m\angle 1 = 108°$ اطرح 72 من الطرفين

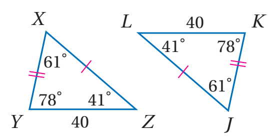
3-3 المثلثات المتطابقة (ص: 162-169)

بيّن أن كل مضلعين مما يأتي متطابقان، وذلك بتحديد العناصر المتناظرة المتطابقة جميعها، ثم اكتب عبارة التطابق: **(18, 19 انظر الهامش)**

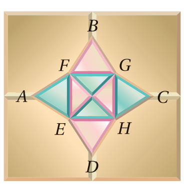
18)



19)

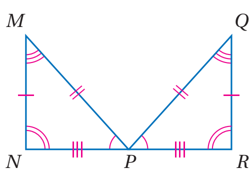


20) **فسيفساء:** يُظهر الشكل المجاور جزءًا من تبليط فسيفسائي. سمِّ 4 مثلثات تبدو متطابقة في الشكل. **انظر الهامش**



مثال 3

بيّن أن المثلثين الآتيين متطابقان، وذلك بتحديد العناصر المتناظرة المتطابقة جميعها، ثم اكتب عبارة التطابق:



الزوايا: $\angle N \cong \angle R, \angle M \cong \angle Q, \angle MPN \cong \angle QPR$

الأضلاع: $\overline{MN} \cong \overline{QR}, \overline{MP} \cong \overline{QP}, \overline{NP} \cong \overline{RP}$

جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة؛ لذا فإن

$\triangle MNP \cong \triangle QRP$

إجابات:

18) $\angle D \cong \angle J, \angle A \cong \angle F, \angle C \cong \angle H, \angle B \cong \angle G, \overline{AB} \cong \overline{FG}, \overline{BC} \cong \overline{GH}, \overline{DC} \cong \overline{JH}, \overline{DA} \cong \overline{JF}$؛ لذا المضلع $ABCD \cong$ المضلع $FGHJ$

19) $\angle X \cong \angle J, \angle Y \cong \angle K, \angle Z \cong \angle L, \overline{XY} \cong \overline{JK}, \overline{YZ} \cong \overline{KL}, \overline{XZ} \cong \overline{JL}$؛ لذا $\triangle XYZ \cong \triangle JKL$

20) إجابة ممكنة: $\triangle BFG \cong \triangle CGH \cong \triangle DHE \cong \triangle AEF$.

204 الفصل 3 المثلثات المتطابقة

3-4 إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS (ص: 170-177)

حدّد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$، ووضح إجابتك.

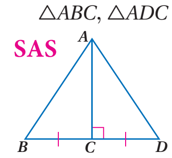
21) $A(5, 2), B(1, 5), C(0, 0), X(-3, 3), Y(-7, 6), Z(-8, 1)$

22) $A(3, -1), B(3, 7), C(7, 7), X(-7, 0), Y(-7, 4), Z(1, 4)$

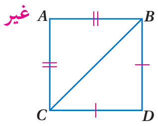
21, 22 انظر الهامش

حدّد المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل مثلثين فيما يأتي متطابقان، وإذا كان إثبات تطابقهما غير ممكن فاكتب "غير ممكن".

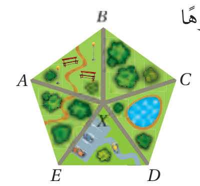
23) $\triangle ABC, \triangle ADC$ SAS



24) $\triangle ABC, \triangle DBC$ غير ممكن



25) **متنزهات:** يظهر الرسم المجاور متنزّهًا على صورة خماسي فيه خمسة ممرات مُشاة لها الطول نفسه، تؤدي إلى نقطة المركز. إذا كانت جميع الزوايا المركزية متساوية القياس، فأي مسلمة (نظرية) تستعمل لإثبات أن $\triangle ABX \cong \triangle DCX$؟ SAS



مثال 4

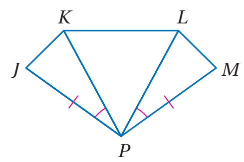
اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\triangle KPL$ متطابق الأضلاع.

$\overline{JP} \cong \overline{MP}$

$\angle JPK \cong \angle MPL$

المطلوب: إثبات أن $\triangle JPK \cong \triangle MPL$.



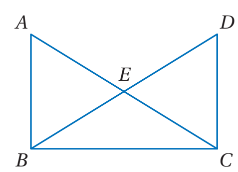
العبارات	المبررات
1) $\triangle KPL$ متطابق الأضلاع.	1) معطى
2) $\overline{PK} \cong \overline{PL}$	2) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
3) $\overline{JP} \cong \overline{MP}$	3) معطى
4) $\angle JPK \cong \angle MPL$	4) معطى
5) $\triangle JPK \cong \triangle MPL$	5) SAS

3-5 إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS (ص: 179-185)

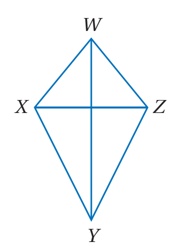
اكتب برهانًا ذا عمودين. 26, 27 انظر الهامش

26) **المعطيات:** $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABE \cong \triangle CDE$.



27) **الطائرة الورقية:** يظهر الشكل المجاور طائرة عثمان الورقية. إذا علمت أن $\overline{WY}$ تنصف كلًّا من $\angle XWZ, \angle XYZ$، فأثبت أن $\triangle WXY \cong \triangle WZY$.



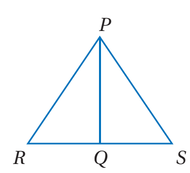
مثال 5

اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{PQ}$ تنصف $\angle RPS$

$\angle R \cong \angle S$

المطلوب: إثبات أن $\triangle RPQ \cong \triangle SPQ$.



البرهان التسلسلي:

$\overline{PQ}$ تنصف $\angle RPS$ — معطى

$\angle RPQ \cong \angle SPQ$ — تعريف منصّف الزاوية

$\angle R \cong \angle S$ — معطى

$\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$ — خاصية الانعكاس

$\triangle RPQ \cong \triangle SPQ$ — AAS

إجابات:

21) نعم بتطبيق المسلمة SSS؛ حيث إن

$AB = XY = 5,$

$BC = YZ = \sqrt{26},$

$ZX = CA = \sqrt{29}$

22) لا؛ الأضلاع المتناظرة في المثلثين غير متطابقة.

26)

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	1) معطى
2) $\angle A \cong \angle DCE$	2) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
3) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	3) معطى
4) $\angle ABE \cong \angle D$	4) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
5) $\triangle ABE \cong \triangle CDE$	5) ASA

27)

العبارات	المبررات
1) $\overline{WY}$ ينصف كلًّا من $\angle XWZ$ و $\angle XYZ$	1) معطيات
2) $\angle XWY \cong \angle ZWY$	2) تعريف منصف الزاوية
3) $\overline{WY} \cong \overline{WY}$	3) خاصية الانعكاس
4) $\angle XYW \cong \angle ZYW$	4) تعريف منصف الزاوية
5) $\triangle WXY \cong \triangle WZY$	5) ASA

نموذج التوقع

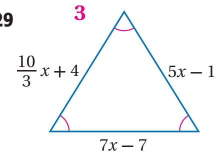
اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 3 ص (46)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع (ص: 188-195)

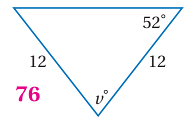
أوجد قيمة كلٍّ من المتغيرين فيما يأتي:

28)



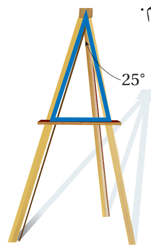
3

29)



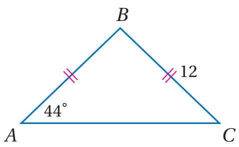
76

30) **رسم:** يستعمل وليد حاملًا خشبيًّا للرسم. والقطعة الداعمة الأفقية في الحامل تشكل مثلثًا متطابق الضلعين مع الدعامتين الأماميتين كما في الشكل المجاور، ما قياس كلٍّ من زاويتَي قاعدة المثلث؟ 77.5°



مثال 6

أوجد كل قياس فيما يأتي:



a) $m\angle B$

بما أن $AB = BC$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، وبتطبيق نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون زاويتا القاعدة A, C متطابقتين؛ إذن $m\angle A = m\angle C$. استعمل نظرية مجموع قياس زوايا المثلث لكتابة معادلة. ثم حلها لتجد $m\angle B$.

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$m\angle B + 44 + 44 = 180$	$m\angle A = m\angle C = 44°$
$m\angle B + 88 = 180$	بسّط
$m\angle B = 92°$	اطرح 88 من الطرفين

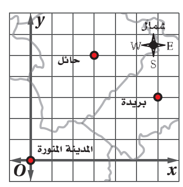
b) AB

$AB = BC$؛ إذن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين. وبما أن $BC = 12$، فإن $AB = 12$ أيضًا.

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي (ص: 196-201)

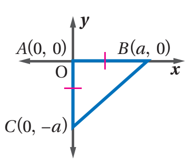
31) ارسم $\triangle MNO$ القائم الزاوية في M، طولا ضلعيه $a, 2a$.
انظر الهامش

32) **جغرافيا:** عيّن شاكر المدينة المنورة وبريدة وحائل كما هو مبين على الخريطة المجاورة. اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع. انظر الهامش



مثال 7

ارسم المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية وطول كلٍّ من ساقَي القائمة يساوي a وحدة على الربع الرابع في المستوى الإحداثي، وسمِّه.

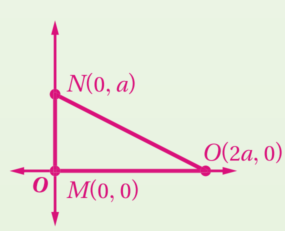


- اجعل نقطة الأصل رأسًا للزاوية القائمة في المثلث.
- اجعل أحد ضلعَي القائمة على المحور x، والضلع الآخر على المحور y.
- بما أن النقطة B على المحور x، إذن إحداثيها y يساوي صفرًا، وإحداثيها x يساوي a.

وبما أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، فإن C ستبعد عن نقطة الأصل a وحدة وإحداثيَّيها $(0, -a)$؛ لأنها تقع على الجزء السالب من المحور y، وذلك لكي يكون المثلث في الربع الرابع.

إجابات:

31)



32) **المعطيات:** المدينة المنورة $A(0, 0)$، بريدة $B(6, 3)$، حائل $C(3, 5)$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع.

نستعمل صيغة البعد بين نقطتين؛ لإيجاد أطوال أضلاع $\triangle ABC$

$$AB = \sqrt{(6-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{45}$$

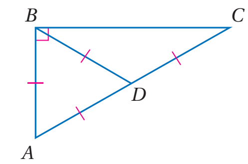
$$BC = \sqrt{(3-6)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$CA = \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{34}$$

المثلث ABC مختلف الأضلاع؛ لأن أطوال أضلاعه مختلفة.

الفصل 3 اختبار الفصل

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

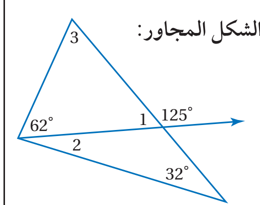


1) $\triangle ABD$ متطابق الزوايا

2) $\triangle ABC$ قائم الزاوية

3) $\triangle BDC$ منفرج الزاوية

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور:

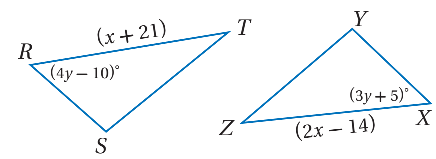


4) $\angle 1$ **55°**

5) $\angle 2$ **23°**

6) $\angle 3$ **63°**

في المثلثين أدناه، إذا كان $\triangle RST \cong \triangle XYZ$ فأوجد:



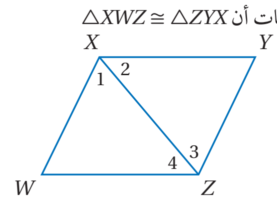
7) قيمة x. **35**

8) قيمة y. **15**

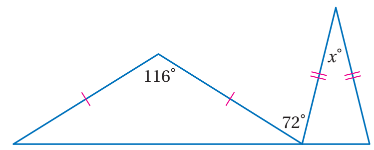
9) **برهان** اكتب برهانًا تسلسليًّا. **انظر ملحق الإجابات**

المعطيات: $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$ ، $\overline{XW} \parallel \overline{YZ}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle XWZ \cong \triangle ZYX$



10) **اختيار من متعدد** ما قيمة x في الشكل أدناه؟ **C**



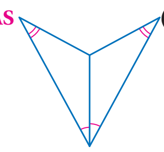
A 36 C 28

B 32 D 22

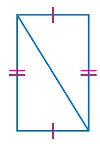
11) إذا علمت أن: $T(-4, -2), J(0, 5), D(1, -1), S(-1, 3)$ ، $E(3, 10), K(4, 4)$. فحدد ما إذا كان $\triangle TJD \cong \triangle SEK$ أم لا، ووضح إجابتك. **انظر الهامش**

حدد النظرية أو المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل زوج من المثلثات متطابق. واكتب "غير ممكن" إذا تعذر إثبات التطابق.

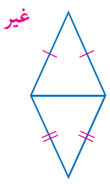
12) **AAS**



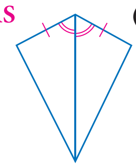
13) **SSS**



14) **غير ممكن**



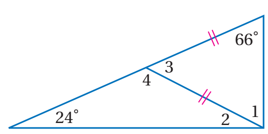
15) **SAS**



أوجد قياس كلٍّ من الزاويتين الآتيتين:

16) $\angle 1$ **66°**

17) $\angle 2$ **24°**



18) **برهان** إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين وقائم الزاوية، وكانت M نقطة منتصف وتره $\overline{AB}$. فاكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن $\overline{CM}$ عمودية على $\overline{AB}$. **انظر الهامش**

المعالجة: استعمل نتائج اختبار الفصل ومخطط المعالجة، لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب.

تساعدك العبارة "إذا... فاختر..." في الجدول على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصدر لكل مستوى.

إجابة:

11) تحسب أطوال أضلاع كلٍّ من المثلثين:

$TJ = \sqrt{(0+4)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{65}$

$SE = \sqrt{(3+1)^2 + (10-3)^2} = \sqrt{65}$

$JD = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{37}$

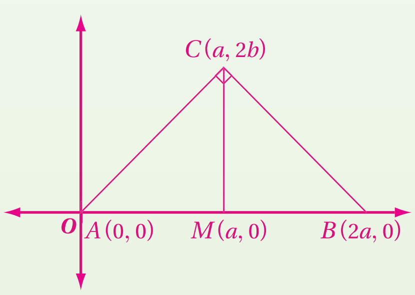
$EK = \sqrt{(4-3)^2 + (4-10)^2} = \sqrt{37}$

$TD = \sqrt{(1+4)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{26}$

$SK = \sqrt{(4+1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{26}$

إذن باستعمال مسلمة SSS المثلثان متطابقان.

18) إجابة ممكنة:



نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي $(a, 0)$، ميل $\overline{CM}$ غير معرّف، إذن $\overline{CM}$ خط رأسي. ميل $\overline{AB}$ يساوي صفرًا، إذن هو أفقي. لذلك $\overline{AB} \perp \overline{CM}$.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	الدروس 5-3 إلى 7-3		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16, 21, 26, 31)
	تدريبات المهارات، ص (28, 33, 38)		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الهدف: فَهم مكونات الأسئلة ذات الإجابات القصيرة وتطوير طرق حلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- ما الاختلاف بين حل الأسئلة ذات الإجابة القصيرة وأسئلة الاختيار من متعدد؟ وما أوجه التشابه بينهما؟

إجابة ممكنة: عند حل أسئلة الإجابة القصيرة، يجب عليك أن تقدم الحل مبررًا خطواته، وبذلك قد تحصل على جزء من درجة السؤال، مع إجابة صحيحة وتبرير خاطئ أو إجابة خاطئة وتبرير صحيح.

أما عن أوجه الشبه بين هذين النوعين، ففي كليهما تستعمل الطريقة نفسها في الحل، بعد أن تقرأها بدقة وتحدد المطلوب.

- ما أهمية كتابة التفسير والتبرير أثناء إجابتك عن الأسئلة ذات الإجابات القصيرة؟

إجابة ممكنة: كتابة التبريرات في أثناء حل أسئلة الإجابة القصيرة هي طريقة جيدة لتحديد معقولية الإجابة.

- لماذا يجب التحقق من الإجابة؟

إجابة ممكنة: يجب التحقق من الإجابة؛ لأن حدوث خطأ جبري واحد في إحدى الخطوات يعني خطأ الخطوات التالية.

الفصل 3 الإعداد للاختبارات

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة تتطلب منك أن تقدِّم حلًّا لها متضمنًا الطريقة والتبريرات والتفسيرات التي استعملتها. وفي العادة يتم تصحيح هذه الأسئلة، وتحدد درجاتها باستعمال سلالم التقدير. وهذا مثال على تصحيح هذا النوع من الأسئلة.

سلالم التقدير		
	المعايير	الدرجة
درجة كاملة	الإجابة صحيحة مدعّمة بتفسيرات كاملة توضح كل خطوة.	2
درجة جزئية	• الإجابة صحيحة، لكن التفسيرات ليست كاملة. • الإجابة غير صحيحة، لكن التفسيرات صحيحة.	1 1
لا يستحق درجة	لم يُقدّم أي إجابة، أو أن الإجابة ليس لها معنى.	0

استراتيجيات حل الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الخطوة 1

اقرأ السؤال جيدًا؛ كي تفهم الشيء الذي تحاول حله.

- حدد الحقائق ذات العلاقة.
- ابحث عن الكلمات المفتاحية والمصطلحات الرياضية.

الخطوة 2

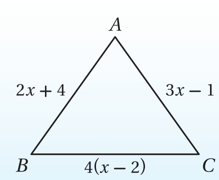
ضع خطة وحل المسألة.

- فسّر تبريرك، أو اعرض الطريقة التي ستتبعها لحل المسألة.
- اكتب الحل كاملًا مبينًا الخطوات جميعها.
- تحقق من إجابتك إذا سمح الوقت بذلك.

مثال

اقرأ السؤال الآتي، وحدد المطلوب. ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال لحله. واكتب خطوات الحل.

ما محيط المثلث ABC متطابق الضلعين الذي قاعدته $\overline{BC}$؟



اقرأ السؤال بعناية. تَعْلَم من السؤال أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{BC}$، والمطلوب أن تجد محيط هذا المثلث.

ضع خطة وحل السؤال.

ضلعا المثلث المتطابق الضلعين متطابقان.

لذا $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ أو $AB = AC$. والآن حل المعادلة لتجد قيمة x.

$$AB = AC$$
$$2x + 4 = 3x - 1$$
$$2x - 3x = -1 - 4$$
$$-x = -5$$
$$x = 5$$

ثم أوجد طول كل ضلع من أضلاع المثلث.

$\overline{AB}$: $2(5) + 4 = 14$

$\overline{AC}$: $3(5) - 1 = 14$

$\overline{BC}$: $4(5 - 2) = 12$

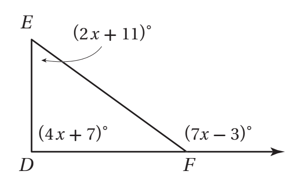
وبما أن $14 + 14 + 12 = 40$، إذن محيط $\triangle ABC$ يساوي 40 وحدةً.

خطوات الحل والحسابات والتبريرات واضحة. وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة؛ إذن تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، وحدد المطلوب، ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال. واكتب خطوات الحل:

1) صنّف $\triangle DEF$ بحسب زواياه. منفرج الزاوية

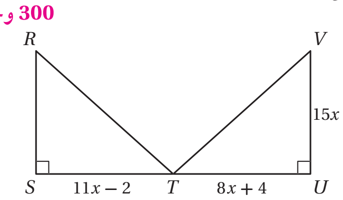


2) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين: $(0, -2)$, $(2, 4)$.

$y = 3x - 2$

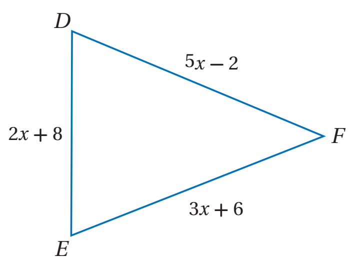
3) يحتاج مزارع إلى إنشاء حظيرة مستطيلة الشكل لأغنامه، مساحتها $1000\,m^2$، ويريد أن يوفر المال عن طريق شراء أقل كمية ممكنة من السياج. إذا كانت أبعاد الحظيرة أعدادًا صحيحة، فأوجد بُعدَي القطعة التي تتطلب أقل كميةٍ من السياج. $40\,m \times 25\,m$

4) في الشكل أدناه، $\triangle RST \cong \triangle VUT$. ما مساحة $\triangle RST$؟
300 وحدة مربعة



مثال إضافي

المثلث DEF متطابق الضلعين وقاعدته $\overline{DE}$. أوجد محيط هذا المثلث.



ساقا المثلث المتطابق الضلعين متطابقان؛ لذا

$\overline{DF} \cong \overline{EF}$, $DF = EF$

لإيجاد، قيمة x، حُلّ المعادلة

$$5x - 2 = 3x + 6$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

إذن أطوال أضلاع المثلث هي:

$DF = 18$

$EF = 18$

$DE = 16$

وبالتالي فإن محيط المثلث DEF هو $16 + 18 + 18$ أو 52 وحدة.

3 التقويم

استعمل التمارين 4–1؛ للتحقق من فهم الطلاب.

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلاب في كل سؤال؛ فقد تُشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية مثل:

1) A خمّن
B خمّن
C أوجَدَ الزاوية المكمِّلة
D صحيحة

2) A خمّن
B خمّن
C لم يصنفه تبعًا لأطوال الأضلاع
D صحيحة

3) A خمّن
B خمّن
C صحيحة
D خمّن

4) A صحيحة
B أخطأ حسابيًّا
C أخطأ حسابيًّا
D اعتبر أن $\triangle TRS$ متطابق الضلعين.

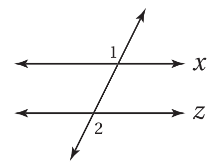
5) A أخطأ حسابيًّا
B صحيحة
C أوجد متمِّمة الزاوية المعطاة
D هذا قياس الزاوية الثانية للقاعدة

6) A صحيحة
B اعتبر أن الزاوية المطلوبة مطابقة للزاوية المجهولة في المثلث الآخر.
C اعتبرها مطابقة للزاوية التي قياسها $47°$ في المثلث الآخر.
D اعتبر أن المثلث الموجود فيه $\angle 1$ متطابق الضلعين.

أسئلة الاختيار من متعدد

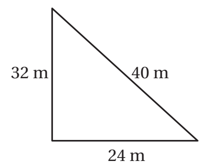
اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) إذا كان $m\angle 1 = 110°$، فما قيمة $m\angle 2$ التي تجعل المستقيمين x, z متوازيين؟ D



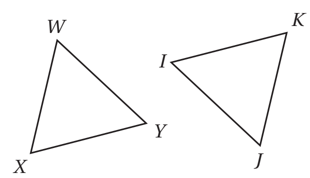
A $30°$ **B** $60°$ **C** $70°$ **D** $110°$

2) يصنف المثلث المرسوم أدناه بحسب أضلاعه بأنه: D



A متطابق الأضلاع **C** قائم الزاوية
B متطابق الضلعين **D** مختلف الأضلاع

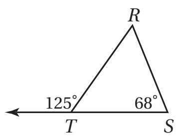
3) في المثلثين أدناه إذا كان: $\overline{WX} \cong \overline{JK}, \overline{YX} \cong \overline{IK}, \angle X \cong \angle K$



فأيُّ العبارات الآتية تعبِّر عن تطابق هذين المثلثين؟ C

A $\triangle WXY \cong \triangle KIJ$
B $\triangle WXY \cong \triangle IKJ$
C $\triangle WXY \cong \triangle JKI$
D $\triangle WXY \cong \triangle IJK$

4) ما قياس الزاوية R في الشكل أدناه؟ A

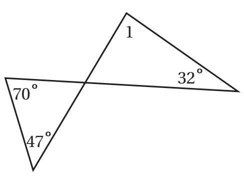


A $57°$
B $59°$
C $65°$
D $68°$

5) افترض أن قياس إحدى زاويتَي القاعدة في مثلث متطابق الضلعين يساوي $44°$، فما قياس زاوية رأس المثلث؟ B

A $108°$
B $92°$
C $56°$
D $44°$

6) أوجد $m\angle 1$؟ A

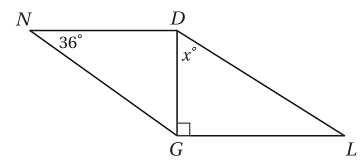


A $85°$
B $63°$
C $47°$
D $32°$

أسئلة ذات إجابات قصيرة

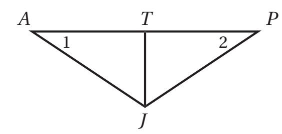
أجب عن كلٍّ مما يأتي:

7) إذا كان $\triangle LGD \cong \triangle NDG$ في الشكل أدناه، فما قيمة x؟ **54**



8) اكتب عكس العبارة الآتية: **إذا كنتَ الخاسر، فأنا الرابح.**
"إذا كنتَ الرابحَ، فأنا الخاسر".

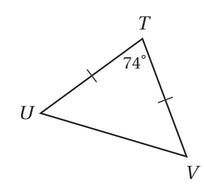
9) في الشكل أدناه $\angle 1 \cong \angle 2$ ، $\overline{JT} \perp \overline{AP}$



حدِّد نظرية التطابق التي تبيِّن أن $\triangle ATJ \cong \triangle PTJ$ باستعمال المعطيات الواردة في السؤال فقط، ووضح إجابتك.
بما أن $\overline{JT} \cong \overline{JT}$ (خاصية الانعكاس)؛ $\angle 2 \cong \angle 1$ (معطى) $\angle JTP \cong \angle JTA$؛ لأن $\overline{JT} \perp \overline{AP}$ ؛ فإن $\triangle ATJ \cong \triangle PTJ$ بحسب AAS

10) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(4, -5)$ ، $(0, 3)$ بصيغة الميل والمقطع الصادي. $y = -2x + 3$

11) أوجد $m\angle TUV$ في الشكل أدناه. **53°**



12) أثبت الجملة "يتطابق مثلثان إذا تطابق ضلعان وزاوية غير محصورة بينهما من المثلث الأول مع نظائرها من المثلث الثاني" إذا كانت صحيحة بكتابة برهان حرٍّ، أو ارسم شكلًا يبيِّن عدم صحَّتِها. **انظر الهامش**

13) إذا علمت أن $\triangle DCB \cong \triangle EFG$، فاكتب الزوايا والأضلاع المتناظرة في المثلثين.
$\angle E \cong \angle D, \angle F \cong \angle C, \angle G \cong \angle B,$
$\overline{EF} \cong \overline{DC}, \overline{FG} \cong \overline{CB}, \overline{GE} \cong \overline{BD}$

أسئلة ذات إجابات مطولة

14) أجب عن الأسئلة a–d؛ لتحصل على برهان إحداثيٍّ للعبارة الآتية:
المثلث الذي رؤوسه $A(0, 0), B(2a, b), C(4a, 0)$ هو مثلث متطابق الضلعين.

a) عيِّن الرؤوس على ورقة رسم بيانيٍّ. **انظر الهامش**

b) استعمل قانون المسافة لكتابة عبارة تمثِّل AB.
$AB = \sqrt{4a^2 + b^2}$

c) استعمل قانون المسافة لكتابة عبارة تمثِّل BC.
$BC = \sqrt{4a^2 + b^2}$

d) استعمل النتائج التي توصَّلت إليها في الفرعين b, c ؛ لتدوِّن استنتاجك عن $\triangle ABC$. **بما أن $AB = BC$ ، إذن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ إذن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين.**

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟														
إذا لم تستطع الإجابة عن ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس...	2-3	3-1	3-3	3-2	3-6	3-2	3-3	1-3	3-5	2-5	3-6	3-4	3-3	3-7

التقويم التكويني

يمكنك تحديد مدى تقدُّم الطلاب في الفصل 3 من خلال:

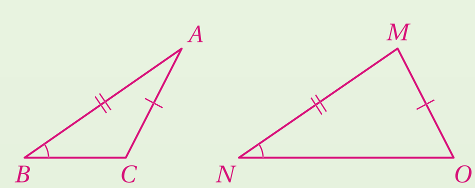
- اختبار تراكمي: ص (211–210)
- اختبار تراكمي: ص (64–62)

بديل الواجب المنزلي

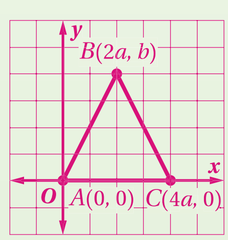
التهيئة للفصل 4: حدِّد الأسئلة ص (213) واجبًا منزليًّا؛ لتقويم مهارات الطلاب في المتطلبات السابقة للفصل القادم.

إجابات:

12) ليس بالضرورة أن يكونا متطابقين؛
مثال مضاد:



14a)



الدرس 1-3 ، ص (151, 152) :

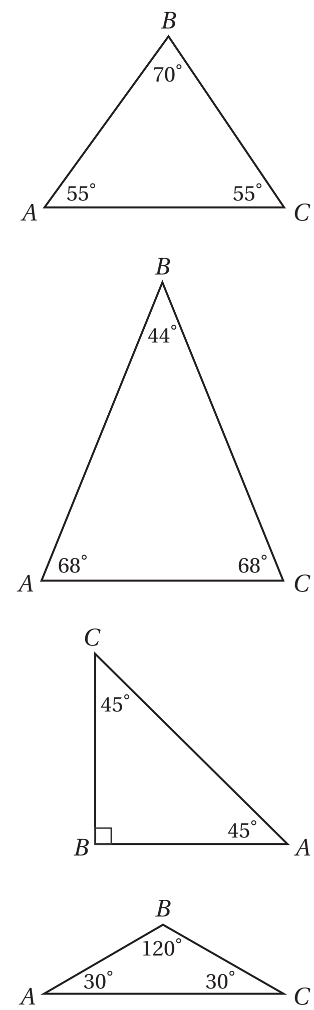
40) **المعطيات:** $\triangle ACE$ متطابق الزوايا، $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$.

المطلوب: $\triangle BCD$ متطابق الزوايا.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\triangle ACE$ متطابق الزوايا و $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$	1) معطيات
2) $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3$	2) تعريف المثلث المتطابق الزوايا
3) $\angle 2 \cong \angle CBD$ و $\angle 3 \cong \angle CDB$	3) مسلمة الزاويتين المتناظرتين
4) $\angle 1 \cong \angle CBD \cong \angle CDB$	4) بالتعويض
5) $\triangle BCD$ متطابق الزوايا	5) تعريف المثلث المتطابق الزوايا

43a) إجابات ممكنة:



43b)

مجموع قياسات الزوايا	$m\angle B$	$m\angle C$	$m\angle A$
180	70	55	55
180	44	68	68
180	90	45	45
180	120	30	30

43c) إجابة ممكنة: الزاويتان المقابلتان للضلعين في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان، ومجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين يساوي $180°$

43d) x و $180° - 2x$؛ إذا كان للزاويتين المقابلتين للضلعين المتطابقين في المثلث المتطابق الضلعين القياس نفسه وكان قياس إحداهما x، فإن قياس الأخرى يساوي x. وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين يساوي $180°$، فإن قياس الزاوية الثالثة يساوي $180° - 2x$

45) غير صحيحة أبدًا ؛ جميع المثلثات المتطابقة الزوايا فيها ثلاث زوايا قياس كلٍّ منها $60°$ ، ولذلك فإنها لا تحتوي على زاوية قياسها $90°$ ، إذن لا يمكن أن تكون قائمة الزاوية.

46) صحيحة دائمًا؛ المثلث المتطابق الأضلاع فيه ثلاثة أضلاع لهم الطول نفسه، والمثلث المتطابق الضلعين فيه ضلعان على الأقل لهما الطول نفسه، وعليه فإن جميع المثلثات المتطابقة الأضلاع تكون متطابقة الضلعين أيضًا.

47) إجابة ممكنة: بما أن المثلث متطابق الأضلاع؛ فإن أطوال أضلاعه متساوية. بوضع $5x + 3$ تساوي $7x - 5$ وحل المعادلة ينتج $x = 4$، ويكون طول كل ضلع $5(4) + 3$ أو 23 وحدة، ويكون محيط المثلث المتطابق الأضلاع هو مجموع أطوال أضلاعه أو ثلاثة أمثال طول أحد أضلاعه؛ إذن محيط هذا المثلث $3(23)$ أو 69 وحدة.

48) إجابة ممكنة: في المثلث الحاد الزوايا ثلاث زوايا حادة، والمثلث المتطابق الزوايا فيه ثلاث زوايا قياس كلٍّ منها $60°$ ، وبما أن الزوايا التي قياسها $60°$ هي زوايا حادة ، إذن جميع المثلثات المتطابقة الزوايا هي مثلثات حادة الزوايا. وعليه فإن تسمية حاد الزوايا متطابق الزوايا إسهاب غير ضروري.

الدرس 2-3 ، ص (159, 160) :

24) **المعطيات:** $\triangle MNO$ فيه $\angle M$ قائمة.

المطلوب: إثبات أنه يوجد زاوية قائمة واحدة على الأكثر في المثلث.

البرهان:

$\triangle MNO$ فيه $\angle M$ قائمة.

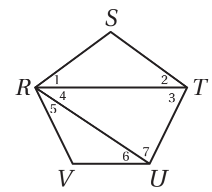
$m\angle M + m\angle N + m\angle O = 180°$. $m\angle M = 90°$، ولذلك فإن $m\angle N + m\angle O = 90°$. فإذا كانت N زاوية قائمة فسيكون $m\angle O = 0°$. وهذا مستحيل. لذا لا يمكن أن يكون في المثلث زاويتان قائمتان.

المعطيات: $\triangle PQR$ فيه $\angle P$ منفرجة.

المطلوب: إثبات أنه يوجد زاوية منفرجة واحدة على الأكثر في المثلث.

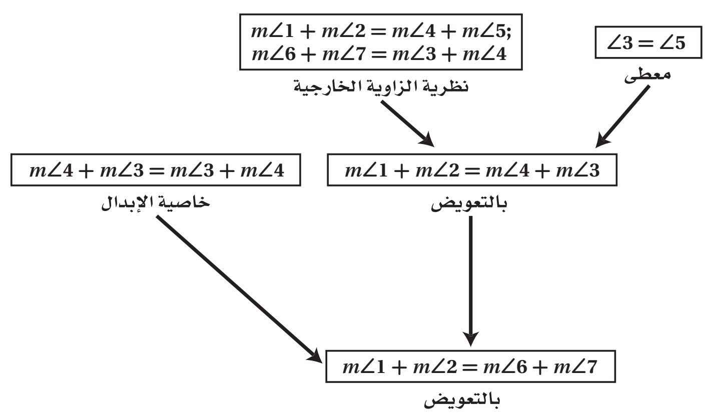
البرهان: في $\triangle PQR$، $\angle P$ منفرجة، ولذلك . $m\angle P > 90°$ وبما أن $m\angle P + m\angle Q + m\angle R = 180°$. فيجب أن يكون $m\angle Q + m\angle R < 90°$. إذن يجب أن تكون كلٌّ من $\angle Q$ و $\angle R$ حادة.

30) البرهان:

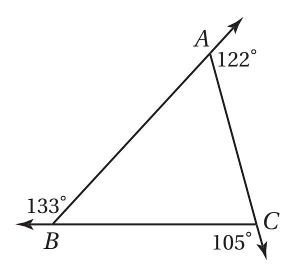


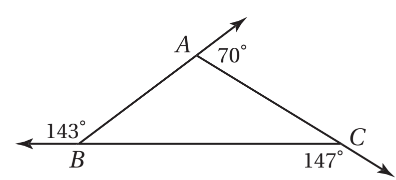
العبارات	المبررات
1) RSTUV خماسي	1) معطًى
2) $m\angle S + m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$; $m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 7 = 180°$; $m\angle 6 + m\angle V + m\angle 5 = 180°$	2) نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
3) $m\angle S + m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 7 = 180° + 180°$	3) خاصية الجمع للمساواة والتعويض
4) $m\angle S + m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 7 + m\angle 6 + m\angle V + m\angle 5 = 540°$	4) خاصية الجمع للمساواة والتعويض
5) $m\angle VRS = m\angle 1 + m\angle 4 + m\angle 5$; $m\angle TUV = m\angle 7 + m\angle 6$; $m\angle STU = m\angle 2 + m\angle 3$	5) مسلمة جمع قياسات الزوايا
6) $m\angle S + m\angle STU + m\angle TUV + m\angle V + m\angle VRS = 540°$	6) بالتعويض

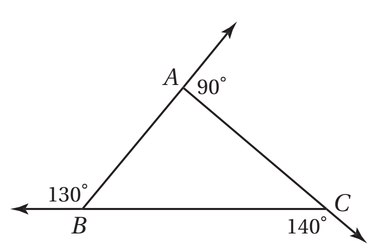
31) البرهان:

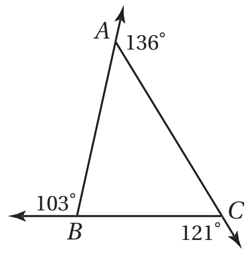


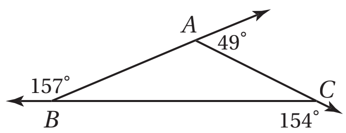
32a) إجابة ممكنة:









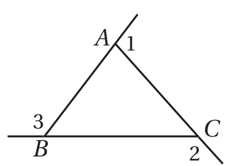


32b) إجابة ممكنة:

$m\angle 1$	$m\angle 2$	$m\angle 3$	المجموع
122°	105°	133°	360°
70°	147°	143°	360°
90°	140°	130°	360°
136°	121°	103°	360°
49°	154°	157°	360°

32c) إجابة ممكنة: مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث يساوي °360.

32d) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360°$



32e) نظرية الزاوية الخارجية تخبرنا أن: $m\angle 3 = m\angle BAC + m\angle BCA$، وأن: $m\angle 2 = m\angle BAC + m\angle CBA, m\angle 1 = m\angle CBA + m\angle BCA$.

وبالتعويض

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle CBA + m\angle BCA + m\angle BAC + m\angle CBA + m\angle BAC + m\angle BCA$$

ويمكن تبسيط هذه المعادلة بالشكل التالي:

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 2m\angle CBA + 2m\angle BCA + 2\, m\angle BAC$.

وباستعمال خاصية التوزيع ينتج:

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 2(m\angle CBA + m\angle BCA + m\angle BAC)$.

ونظرية مجموع قياسات زوايا المثلث تخبرنا أن:

$m\angle CBA + m\angle BCA + m\angle BAC = 180°$. وبالتعويض ينتج أن:

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 2(180) = 360°$.

33) إجابة ممكنة: تنصُّ النتيجة 3.2 على أنه يمكن أن يكون في أي مثلث زاوية قائمة أو منفرجة واحدة على الأكثر، وبما أنه كُتب في المثلث قياسان لزاويتين منفرجتين °130، °93، فإن واحدًا على الأقل منها غير صحيح، وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي °180 بحسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث، ومجموع القياسات المسجلة في هذا المثلث $37° + 93° + 130° \neq 180°$، فإن واحدًا على الأقل من هذه القياسات غير صحيح.

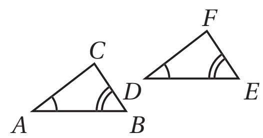
الدرس 3-3 ، ص (165-168) :

1) $\angle Y \cong \angle S, \angle X \cong \angle R, \angle XZY \cong \angle RZS,$
$\overline{YX} \cong \overline{SR}, \overline{YZ} \cong \overline{SZ}, \overline{XZ} \cong \overline{RZ}; \triangle YXZ \cong \triangle SRZ$

2) $\angle A \cong \angle E, \angle B \cong \angle F, \angle C \cong \angle G, \angle D \cong \angle H,$
$\overline{AB} \cong \overline{EF}, \overline{CD} \cong \overline{GH}, \overline{AD} \cong \overline{EH}, \overline{BC} \cong \overline{FG}$
المضلع $ABCD \cong$ المضلع $EFGH$

17) **المعطيات:** $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$

المطلوب: $\angle C \cong \angle F$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$	1) معطيات
2) $m\angle A = m\angle D, m\angle B = m\angle E$	2) تعريف الزوايا المتطابقة
3) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$, $m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180°$	3) نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
4) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle D + m\angle E + m\angle F$	4) خاصية التعدي
5) $m\angle D + m\angle E + m\angle C = m\angle D + m\angle E + m\angle F$	5) خاصية التعويض
6) $m\angle C = m\angle F$	6) خاصية الطرح للمساواة
7) $\angle C \cong \angle F$	7) تعريف تطابق الزوايا

18) **البرهان:**

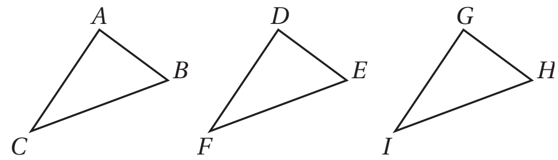
$\triangle RST \cong \triangle XYZ$
معطى
↓
$\angle R \cong \angle X, \angle S \cong \angle Y, \angle T \cong \angle Z,$
$\overline{RS} \cong \overline{XY}, \overline{ST} \cong \overline{YZ}, \overline{RT} \cong \overline{XZ}$
العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
↓
$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S, \angle Z \cong \angle T,$
$\overline{XY} \cong \overline{RS}, \overline{YZ} \cong \overline{ST}, \overline{XZ} \cong \overline{RT}$
تطابق الزوايا والقطع المستقيمة يحقق خاصية التماثل
↓
$\triangle XYZ \cong \triangle RST$
تعريف المثلثين المتطابقين

19) **البرهان :**

العبارات	المبررات
1) $\overline{BD}$ تنصف $\angle B$، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$	1) معطيات
2) $\angle ABD \cong \angle DBC$	2) تعريف منصف الزاوية
3) $\angle ADB, \angle BDC$ قائمتان	3) المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا قائمة
4) $\angle ADB \cong \angle BDC$	4) الزوايا القائمة متطابقة
5) $\angle A \cong \angle C$	5) نظرية الزاوية الثالثة

20) **المعطيات:** $\triangle ABC \cong \triangle DEF, \triangle DEF \cong \triangle GHI$

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle GHI$



البرهان:

نعلم أن $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة إذن: $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$، $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$. نعلم أن $\triangle DEF \cong \triangle GHI$، لذا فإن $\angle D \cong \angle G, \angle E \cong \angle H, \angle F \cong \angle I, \overline{DE} \cong \overline{GH}, \overline{EF} \cong \overline{HI}$ ، $\overline{DF} \cong \overline{GI}$ ؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة. وعليه فإن:
$\angle A \cong \angle G, \angle B \cong \angle H, \angle C \cong \angle I, \overline{AB} \cong \overline{GH}, \overline{BC} \cong \overline{HI}, \overline{AC} \cong \overline{GI}$ ؛
لأن تطابق الزوايا والقطع المستقيمة يحقق خاصية التعدي، وبهذا يكون $\triangle ABC \cong \triangle GHI$ من تعريف المثلثين المتطابقين.

21) **المعطيات:** $\triangle DEF$

المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle DEF$

البرهان :

$\triangle DEF$
معطى

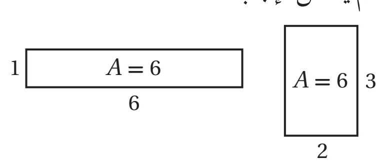
$\overline{DE} \cong \overline{DE}, \overline{EF} \cong \overline{EF}, \overline{DF} \cong \overline{DF}$
تطابق القطع المستقيمة يحقق خاصية الانعكاس

$\angle D \cong \angle D, \angle E \cong \angle E, \angle F \cong \angle F$
تطابق الزوايا يحقق خاصية الانعكاس
↓
$\triangle DEF \cong \triangle DEF$
تعريف المثلثين المتطابقين

25a) إذا تطابق مثلثان، فإن مساحتيهما متساويتان.

25b) إذا تساوت مساحَتَا مثلثين، فإن المثلثين متطابقان. خطأ؛ فإذا كانت قاعدة مثلث 2 وارتفاعه 6، وكانت قاعدة مثلث آخر 3 وارتفاعه 4، فإن مساحَتيهما متساويتان، ولكن هذين المثلثين غير متطابقين.

25c) نعم يمكن؛ إجابة ممكنة:



25d) لا يمكن؛ لأن المربعين اللذين لهما المساحة نفسها يكون لأضلاعهما الطول نفسه وهو الجذر التربيعي للمساحة، فإذا كانت المساحتان متساويتين يكون المربعان متطابقين. لأن أضلاعهما متطابقة وزواياهما متطابقة.

26a) المضلع السداسي المنتظم والمثلث المتطابق الأضلاع.

26b) إجابة ممكنة: $\triangle ABC \cong \triangle DEC$

26c) إجابة ممكنة: $\angle B \cong \angle E$

26d) 4 in ، إجابة ممكنة: لأن المضلعات التي صمِّم منها النمط منتظمة، فأطوال أضلاع المثلثات جميعها متطابقة. وهذا يعني أن: $CB = AC,\ CB = CE$ ؛ لذا فإن:

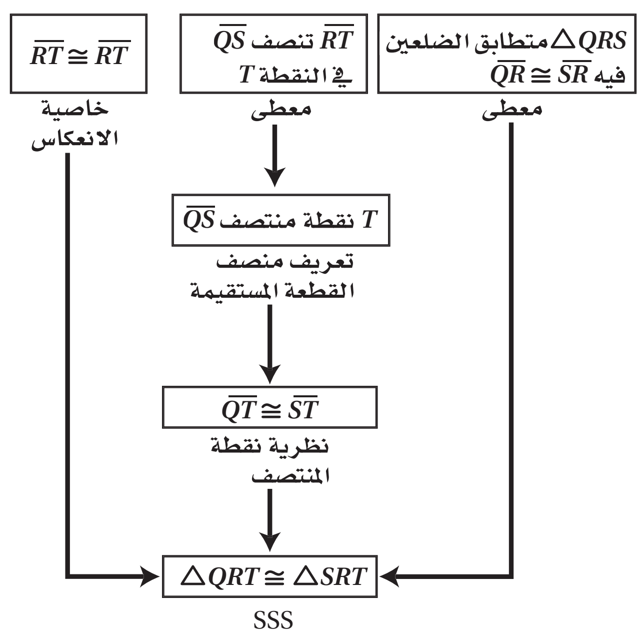
$AE = 2\,(CB)$

$= 4$ in

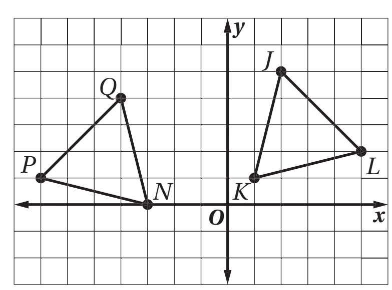
26e) $60°$ ، إجابة ممكنة: لأن جميع مثلثات النمط منتظمة، فهي مثلثات متطابقة الأضلاع ومتطابقة الزوايا، وكل زاوية في أي مثلث تساوي $60°$

الدرس 4-3 (تحقق من فهمك)، ص (170, 171) :

1) البرهان :



2A)



2B) يبدو من الشكل أن للمثلثين الشكل نفسه والقياس نفسه، لذا يمكن أن نخمِّن أن المثلثين متطابقان.

2C)

$QP = \sqrt{(-4-(-7))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$JL = \sqrt{(2-5)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$LK = \sqrt{(5-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$PN = \sqrt{(-7-(-3))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$KJ = \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$NQ = \sqrt{(-4-(-3))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

نلاحظ أن: $JL = QP,\ LK = PN,\ KJ = NQ$، ومن تعريف تطابق القطع المستقيمة نستنتج أن القطع المتناظرة جميعها متطابقة، وعليه فإن $\triangle JKL \cong \triangle QNP$ بحسب SSS.

4) المعطيات : $\overline{TU} \cong \overline{TX}$

$\angle XTV \cong \angle UTV$

المطلوب : $\triangle XTV \cong \triangle UTV$

البرهان :

العبارات	المبررات
1) $\angle XTV \cong \angle VTU,\ \overline{TU} \cong \overline{TX}$	1) معطى
2) $\overline{TV} \cong \overline{TV}$	2) خاصية الانعكاس
3) $\triangle XTV \cong \triangle UTV$	3) SAS

الدرس 4-3 ، ص (174-177) :

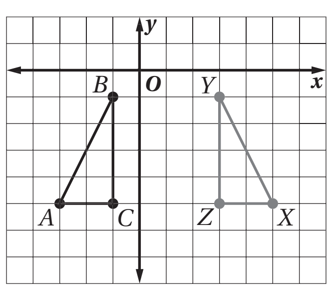
1b) المعطيات : $AB = CD,\ DA = BC$

المطلوب : $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

البرهان :

العبارات	المبررات
1) $AB = CD,\ DA = BC$	1) معطيات
2) $\overline{AB} \cong \overline{CD},\ \overline{DA} \cong \overline{BC}$	2) تعريف تطابق القطع المستقيمة
3) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$	3) خاصية الانعكاس في التطابق
4) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$	4) SSS

2a)



2b) يبدو من الشكل أن المثلثين لهما القياس نفسه والشكل نفسه؛ ولذا يمكن أن تخمِّن أنهما متطابقان.

2c) $AB = \sqrt{20},\ XY = \sqrt{20},\ BC = 4,\ YZ = 4,\ AC = 2,\ XZ = 2$. فالأضلاع المتناظرة متطابقة؛ لأن لها الطول نفسه. إذن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ بحسب SSS.

3) إجابة ممكنة: نعلم أن $\angle LPM \cong \angle NOM$, $\overline{LP} \cong \overline{NO}$. وبما أنَّ $\triangle MOP$ متطابق الأضلاع، إذن $\overline{MO} \cong \overline{MP}$ من تعريف المثلث المتطابق الأضلاع؛ ولذلك فإن $\triangle LMP \cong \triangle NMO$ بحسب مسلمة التطابق SAS.

4) البرهان:

العبارات	المبررات
$\overline{BA} \cong \overline{DC}$, (1 $\angle BAC \cong \angle DCA$	1) معطيات
$\overline{AC} \cong \overline{CA}$ (2	2) خاصية الانعكاس للتطابق
$\triangle BCA \cong \triangle DAC$ (3	SAS (3
$\overline{BC} \cong \overline{DA}$ (4	4) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة

7) المعطيات: $\overline{BA} \perp \overline{BD}$, $\overline{DE} \perp \overline{BD}$, $\overline{AB} \cong \overline{ED}$ و C نقطة منتصف $\overline{BD}$.

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$

البرهان:

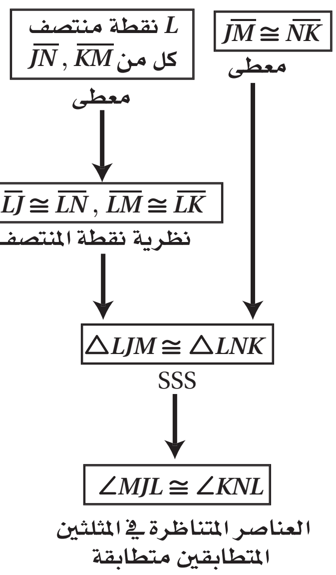
العبارات	المبررات
$\overline{BA} \perp \overline{BD}$, $\overline{DE} \perp \overline{BD}$, $\overline{AB} \cong \overline{ED}$، (1 C نقطة منتصف $\overline{BD}$	1) معطيات
$\angle ABC$ ، $\angle EDC$ قائمتان (2	2) تعريف التعامد
$\angle ABC \cong \angle EDC$ (3	3) جميع الزوايا القوائم متطابقة
$\overline{BC} \cong \overline{CD}$ (4	4) نظرية نقطة المنتصف
$\triangle ABC \cong \triangle EDC$ (5	SAS (5

10) البرهان:

العبارات	المبررات
$\overline{BD} \perp \overline{AC}$. $\overline{BD}$ تنصف $\overline{AC}$ (1	1) معطيات
$\angle BDA$, $\angle BDC$ قائمتان (2	2) تعريف التعامد
$\angle BDA \cong \angle BDC$ (3	3) جميع الزوايا القوائم متطابقة
D نقطة منتصف $\overline{AC}$ (4	4) تعريف منصِّف القطعة المستقيمة
$\overline{AD} \cong \overline{DC}$ (5	5) نظرية منصِّف القطعة المستقيمة
$\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (6	6) خاصية الانعكاس للتطابق
$\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (7	SAS (7

11) بما أن R نقطة المنتصف لكلٍّ من $\overline{QS}$, $\overline{PT}$ ، إذن $\overline{PR} \cong \overline{RT}$ و $\overline{RQ} \cong \overline{RS}$ من نظرية نقطة المنتصف، وكذلك $\angle PRQ \cong \angle TRS$ بحسب نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس؛ إذن $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$ بحسب SAS.

12) البرهان:



16b) المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, $\overline{CB} \cong \overline{DC}$

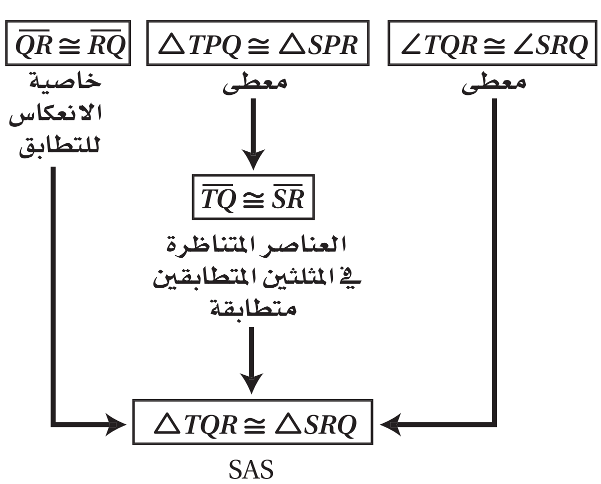
المطلوب: $\triangle ACB \cong \triangle ACD$

البرهان:

العبارات	المبررات
$\overline{AB} \cong \overline{AD}$ و $\overline{CB} \cong \overline{DC}$ (1	1) معطيات
$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (2	2) خاصية الانعكاس للتطابق
$\triangle ACB \cong \triangle ACD$ (3	SSS (3

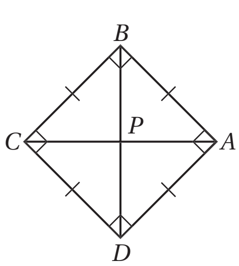
16c) إجابة ممكنة: المجسم ثلاثي الأبعاد، ولذا عندما يتم رسمه في المستوى الثنائي الأبعاد يظهر وكأن المثلثين مختلفان.

17) البرهان:



18a) المعطيات: $ABCD$ مربع

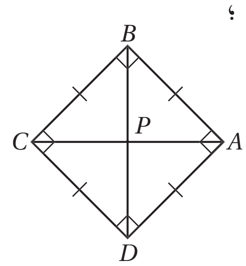
المطلوب: $BD = AC$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $ABCD$ مربع	1) معطى
2) $\overline{CB} \cong \overline{BA} \cong \overline{AD} \cong \overline{DC}$	2) تعريف المربع
3) $\angle CBA, \angle BAD, \angle ADC, \angle DCB$ قوائم	3) تعريف المربع
4) $\angle BCD \cong \angle CDA$	4) جميع الزوايا القوائم متطابقة
5) $\triangle BCD \cong \triangle CDA$	5) SAS
6) $\overline{BD} \cong \overline{AC}$	6) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة
7) $BD \cong AC$	7) تعريف تطابق القطع المستقيمة

18b) المعطيات: $\overline{CB} \cong \overline{BA} \cong \overline{AD} \cong \overline{DC}$ ؛ $\angle CBA, \angle BAD, \angle ADC, \angle DCB$ قوائم.



المطلوب: $\angle BDC \cong \angle BDA$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{CB} \cong \overline{BA} \cong \overline{AD} \cong \overline{DC}$	1) معطيات
2) $\angle CBA, \angle BAD, \angle ADC, \angle DCB$ قوائم	2) معطيات
3) $\angle BCD \cong \angle BAD$	3) جميع الزوايا القائمة متطابقة
4) $\triangle BCD \cong \triangle BAD$	4) SAS
5) $\angle BDC \cong \angle BDA$	5) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة

23a) إجابة ممكنة: الطريقة الأولى: تستعمل صيغة المسافة لإيجاد أطوال الأضلاع الثلاثة، ثم تستعمل مسلمة التطابق SSS .
الطريقة الثانية: يمكن أن تجد ميل كلٍّ من $\overline{ZX}$, $\overline{WY}$ ، وتبرهن أنهما متعامدان، وبذلك تكون $\angle WYZ$, $\angle WYX$ كلتاهما قائمتين، ويمكن استعمال صيغة المسافة لإثبات أن $\overline{XY}$ تطابق $\overline{ZY}$ ، وبما أن المثلثين يشتركان في الضلع $\overline{WY}$ ، إذن يمكن استعمال مسلمة SAS لإثبات تطابق المثلثين. إجابة ممكنة: أعتقد أن الطريقة الثانية أفضل؛ لأن فيها خطوتين بدلًا من ثلاث خطوات كما في الطريقة الأولى.

23b) المعطيات: $Z(1, 2)$ ، $W(1, 8)$ ، $X(7, 8)$ ، $Y(4, 5)$
نقاط في المستوى الإحداثي.

المطلوب: $\triangle WYZ \cong \triangle WYX$

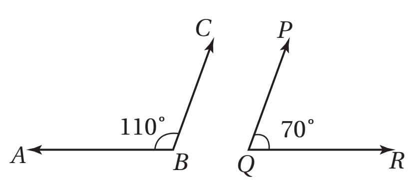
إجابة ممكنة: ميل $\overline{WY}$ يساوي -1 وميل $\overline{ZX}$ يساوي 1، وبما أن ناتج ضربهما يساوي -1 ، إذن $\overline{WY} \perp \overline{ZX}$. وبما أنهما متعامدان إذن قياس كلٍّ من $\angle WYZ$ و $\angle WYX$ يساوي $90°$، وباستعمال صيغة المسافة تجد أن طول $\overline{ZY}$ يساوي $\sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2}$ ،
وكذلك طول $\overline{XY}$ يساوي $\sqrt{(7-4)^2 + (8-5)^2} = 3\sqrt{2}$ ؛
وبما أن $\overline{WY} \cong \overline{WY}$ من خاصية الانعكاس للتطابق،
فإن $\triangle WYZ \cong \triangle WYX$ بحسب مسلمة التطابق SAS .

25) نعم؛ الحالة الأولى: إذا علمت أن الوترين متطابقان وكان أحد ضلعَي القائمة في الأول يطابق الضلع المناظر له في الثاني، فإنّ ضلعَي القائمة الآخران سيكونان متطابقين بحسب نظرية فيثاغورس، ولذلك يكون المثلثان متطابقين بحسب SSS .

الحالة الثانية: إذا علمت أن ضلعي القائمة في المثلث الأول يطابقان ضلعي القائمة في المثلث الثاني، إذن سيكون المثلثان متطابقين بحسب SAS .

30) اكتب العبارة على صورة "إذا ... فإن ..."
العبارة الشرطية: إذا كانت الزاويتان متجاورتين على مستقيم فإنهما متكاملتان، وهي عبارة صحيحة.

عكس العبارة الشرطية: إذا كانت الزاويتان متكاملتين فإنهما متجاورتان على مستقيم، وهي عبارة خاطئة.
$\angle ABC$ و $\angle PQR$ زاويتان متكاملتان، ولكنهما غير متجاورتين على مستقيم.

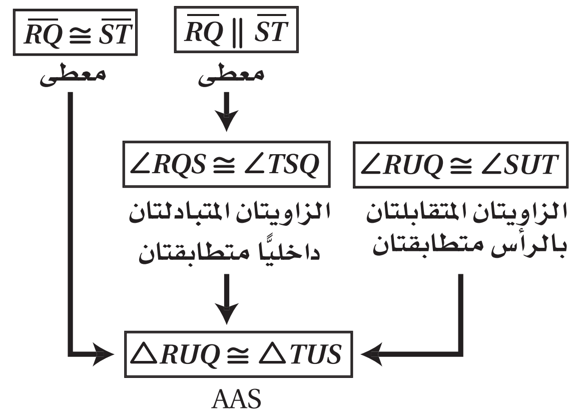


معكوس العبارة الشرطية: إذا كانت الزاويتان غير متجاورتين على مستقيم فإنهما غير متكاملتين، وهذه عبارة خاطئة، والمثال المضاد هو المثال نفسه أعلاه.

المعاكس الإيجابي: إذا كانت الزاويتان غير متكاملتين فإنهما غير متجاورتين على مستقيم، وهذه العبارة صحيحة.

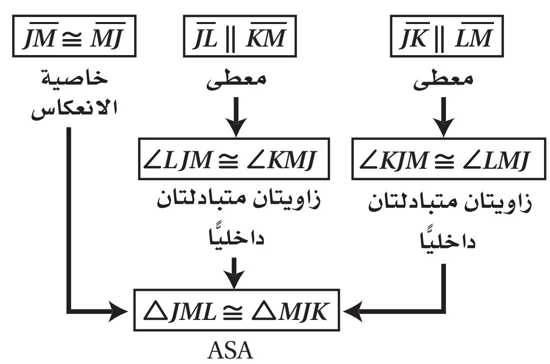
الدرس 3-5 (تحقق من فهمك)، ص (181):

2) **البرهان:**



الدرس 3-5، ص (182-184):

1)



2) **البرهان:** من المعطيات نعلم أن:
$\angle K \cong \angle M$ ، $\overline{JL}$ تنصّف $\angle KLM$.

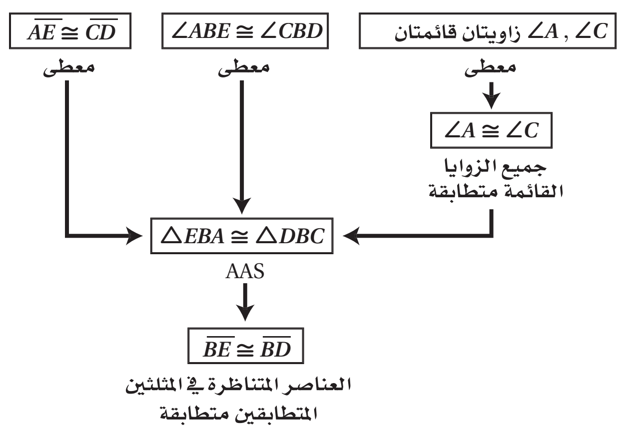
بما أن $\overline{JL}$ تنصّف $\angle KLM$، إذن $\angle KLJ \cong \angle MLJ$. وَ $\overline{JL} \cong \overline{JL}$ بحسب خاصية الانعكاس للتطابق. لذا $\triangle JKL \cong \triangle JML$ بحسب نظرية التطابق AAS .

3a) نعلم أن $\angle BAE, \angle DCE$ متطابقتان؛ لأنهما زاويتان قائمتان، $\overline{AE}$ تطابق $\overline{EC}$ بحسب نظرية نقطة المنتصف. ومن نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس، نعلم أن $\angle DEC \cong \angle BEA$. وبحسب ASA، يعلم المسّاح أن $\triangle DCE \cong \triangle BAE$. ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة إذن $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ ، ولذا يمكن للمساح أن يقيس $\overline{DC}$ وبذلك يعرف المسافة بين النقطتين A, B.

5) **البرهان:**

العبارات	المبررات
1) V نقطة منتصف $\overline{YW}$ ، $\overline{UY} \parallel \overline{XW}$	1) معطيات
2) $\overline{VW} \cong \overline{YV}$	2) نظرية نقطة المنتصف
3) $\angle VYU \cong \angle VWX$	3) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
4) $\angle VXW \cong \angle VUY$	4) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
5) $\triangle XVW \cong \triangle UVY$	5) AAS

6) **البرهان:**



10) **البرهان:**

العبارات	المبررات
1) $\overline{MR} \perp \overline{PR}$ ، $\overline{KP} \perp \overline{PR}$ ، $\angle K \cong \angle M$	1) معطيات
2) $\angle KPR, \angle MRP$ قائمتان	2) تعريف التعامد
3) $\angle KPR \cong \angle MRP$	3) جميع الزوايا القوائم متطابقة
4) $\overline{PR} \cong \overline{PR}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\triangle KPR \cong \triangle MRP$	5) AAS
6) $\overline{KP} \cong \overline{MR}$	6) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
7) $\angle KLP \cong \angle MLR$	7) الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان
8) $\triangle KLP \cong \triangle MLR$	8) AAS
9) $\angle KPL \cong \angle MRL$	9) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

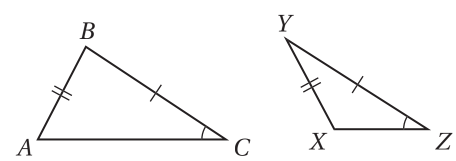
11) البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{QR} \cong \overline{SR} \cong \overline{WR} \cong \overline{VR}$	1) معطيات
2) $\angle QRV \cong \angle SRW$	2) الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان
3) $\triangle VRQ \cong \triangle SRW$	3) SAS
4) $\angle VQR \cong \angle SWR$	4) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
5) $\angle QRT \cong \angle URW$	5) الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان
6) $\triangle URW \cong \triangle TRQ$	6) ASA
7) $\overline{QT} \cong \overline{WU}$	7) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

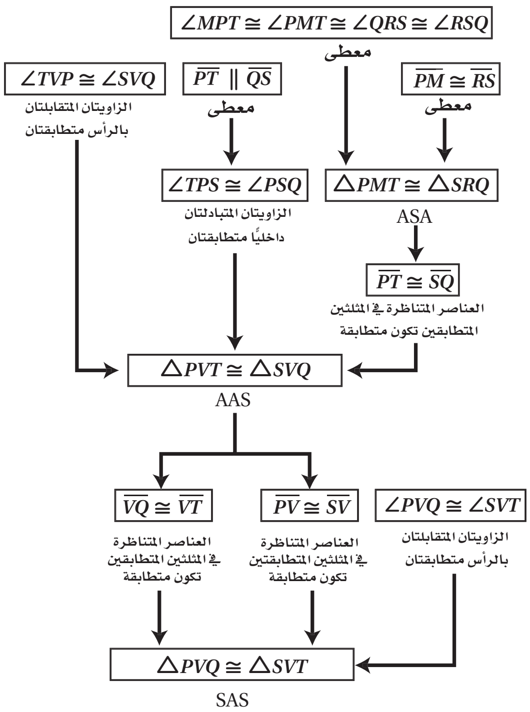
12) البرهان :

العبارات	المبررات
1) $m\angle ACB = 68°, m\angle ADB = 68°,$ $m\angle CBA = 44°, m\angle DBA = 44°$	1) معطيات
2) $m\angle ACB = m\angle ADB,$ $m\angle CBA = m\angle DBA$	2) بالتعويض
3) $\angle ACB \cong \angle ADB, \angle CBA \cong \angle DBA$	3) تعريف تطابق الزوايا
4) $\overline{AB} \cong \overline{AB}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\triangle ADB \cong \triangle ACB$	5) AAS
6) $\overline{AC} \cong \overline{AD}$	6) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة

15) إجابة ممكنة: في المثلثين أدناه. نلاحظ أن: $\overline{AB} \cong \overline{XY}$، $\overline{BC} \cong \overline{YZ}, \angle C \cong \angle Z$، لكن: $\triangle ABC \ncong \triangle XYZ$.



16) البرهان :



17)

الطريقة	وقت استعمالها
تعريف المثلثين المتطابقين	عندما تكون جميع العناصر في أحد المثلثين متطابقة مع نظيراتها في المثلث الآخر.
SSS	عندما تكون الأضلاع الثلاثة في المثلث الأول متطابقة مع الأضلاع الثلاثة في المثلث الثاني.
SAS	عندما يتطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحد المثلثين مع ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الآخر.
ASA	عندما تتطابق زاويتان والضلع المحصور بينهما في أحد المثلثين مع زاويتين والضلع المحصور بينهما في المثلث الآخر.
AAS	عندما تتطابق زاويتان وضلع غير محصور بينهما في أحد المثلثين مع زاويتين وضلع غير محصور بينهما في المثلث الآخر .

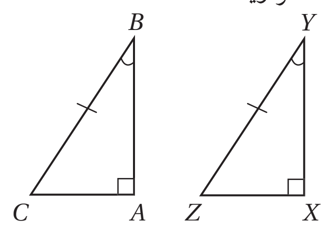
توسّع 3-5 ، ص (187) :

10) المعطيات : $\triangle ABC , \triangle XYZ$ قائما الزاوية.

$\angle A , \angle X$ قائمتان،

$\overline{BC} \cong \overline{YZ}$

$\angle B \cong \angle Y$



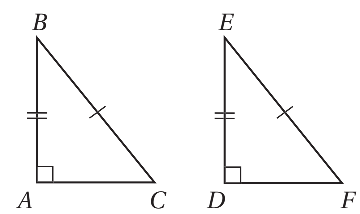
المطلوب : $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$

البرهان : نعلم أن: $\triangle ABC, \triangle XYZ$ قائما الزاوية. وأن $\angle A, \angle X$ قائمتان، وأن $\angle B \cong \angle Y$ ، $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$. وبما أن جميع الزوايا القائمة متطابقة، إذن $\angle A \cong \angle X$، ولذلك فإن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ بحسب AAS.

12) المعطيات : $\triangle ABC, \triangle DEF$ مثلثان قائما الزاوية،

$\overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AB} \cong \overline{DE}$

المطلوب : $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



البرهان :

العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC , \triangle DEF$ مثلثان قائما الزاوية، $\overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AB} \cong \overline{DE}$	1) معطيات
2) $AB = DE , BC = EF$	2) تعريف التطابق
3) $(AB)^2 + (CA)^2 = (BC)^2$. $(DE)^2 + (FD)^2 = (EF)^2$	3) نظرية فيثاغورس
4) $(AB)^2 + (CA)^2 = (DE)^2 + (FD)^2$	4) خاصية التعويض
5) $(AB)^2 + (CA)^2 = (AB)^2 + (FD)^2$	5) خاصية التعويض
6) $(CA)^2 = (FD)^2$	6) خاصية الطرح للمساواة
7) $CA = FD$	7) خاصية الجذر التربيعي
8) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	8) SSS

13) البرهان :

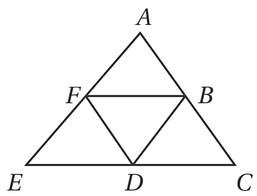
العبارات	المبررات
1) $AB \perp BC , DC \perp BC$	1) معطيات
2) $\angle ABC$ قائمة، $\angle DCB$ قائمة.	2) المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا قائمة
3) $\triangle ABC , \triangle DCB$ قائما الزاوية.	3) تعريف المثلث القائم الزاوية
4) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	4) معطى
5) $\overline{BC} \cong \overline{BC}$	5) خاصية الانعكاس للتطابق
6) $\triangle ABC \cong \triangle DCB$	6) HL
7) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	7) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة

الدرس 3-6 (تحقق من فهمك)، ص (191) :

4) المعطيات : $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع فيه $\overline{EC} \parallel \overline{FB}$

$\overline{FD} \parallel \overline{BC}, \overline{BD} \parallel \overline{EF}$

والنقطة D نقطة منتصف $\overline{EC}$.



المطلوب : $\triangle FED \cong \triangle BDC$

البرهان :

العبارات	المبررات
1) $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع $\overline{EC} \parallel \overline{FB}$. D نقطة منتصف $\overline{EC}$.	1) معطيات
2) $m\angle E = 60°, m\angle C = 60°$	2) قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي $60°$
3) $m\angle E = m\angle C$	3) خاصية التعدي للتطابق
4) $\angle E \cong \angle C$	4) تعريف التطابق
5) $\overline{ED} \cong \overline{DC}$	5) نظرية نقطة المنتصف
6) $\angle CBD \cong \angle BDF, \angle EFD \cong \angle BDF$	6) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
7) $\angle CBD \cong \angle EFD$	7) خاصية التعدي للتطابق
8) $\triangle FED \cong \triangle BDC$	8) AAS

الدرس 3-6 ، ص (193, 194) :

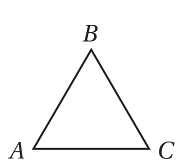
17c) البرهان :

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}, \overline{BC} \parallel \overline{ED}, \overline{ED} \cong \overline{AD}$	1) معطيات
2) $\angle ABC \cong \angle ACB$	2) نظرية المثلث المتطابق الضلعين
3) $m\angle ABC = m\angle ACB$	3) تعريف تطابق الزوايا
4) $\angle ABC \cong \angle AED, \angle ACB \cong \angle ADE$	4) مسلمة الزاويتين المتناظرتين
5) $m\angle ABC = m\angle AED, m\angle ACB = m\angle ADE$	5) تعريف تطابق الزوايا
6) $m\angle AED = m\angle ACB$	6) بالتعويض
7) $m\angle AED = m\angle ADE$	7) بالتعويض
8) $\angle AED \cong \angle ADE$	8) تعريف تطابق الزوايا
9) $\overline{AD} \cong \overline{AE}$	9) عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين
10) $\triangle ADE$ متطابق الأضلاع	10) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع

22) الحالة الأولى:

المعطيات : $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع.

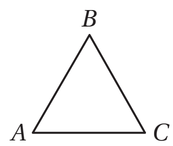
المطلوب : $\triangle ABC$ متطابق الزوايا.



البرهان :

العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع	1) معطى
2) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$	2) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
3) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$	3) نظرية المثلث المتطابق الضلعين وخاصية التعدي
4) $\triangle ABC$ متطابق الزوايا	4) تعريف المثلث المتطابق الزوايا

الحالة الثانية :



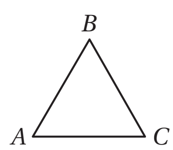
المعطيات: $\triangle ABC$ متطابق الزوايا.

المطلوب: $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC$ متطابق الزوايا	1) معطى
2) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$	2) تعريف المثلث المتطابق الزوايا
3) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$	3) عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين وخاصية التعدي
4) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع	4) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع

23) **المعطيات:** $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع.

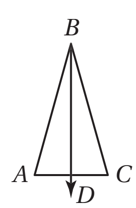


المطلوب: $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60^\circ$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع	1) معطى
2) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$	2) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
3) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$	3) نظرية المثلث المتطابق الأضلاع وخاصية التعدي
4) $m\angle A = m\angle B = m\angle C$	4) تعريف التطابق
5) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$	5) نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
6) $3m\angle A = 180^\circ$	6) بالتعويض والتبسيط
7) $m\angle A = 60^\circ$	7) خاصية القسمة
8) $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60^\circ$	8) بالتعويض

24) **المعطيات:** $\triangle ABC$ فيه $\angle A \cong \angle C$

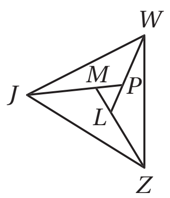


المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{CB}$

البرهان: نرسم $\overrightarrow{BD}$ منصف لـ $\angle ABC$

العبارات	المبررات
1) $\angle ABD \cong \angle CBD$	1) تعريف منصف الزاوية
2) $\angle A \cong \angle C$	2) معطى
3) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	3) خاصية الانعكاس
4) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$	4) AAS
5) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$	5) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة

32) **المعطيات:** $\triangle WJZ$ متطابق الأضلاع، $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$.



المطلوب: $\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM}$

البرهان:

نعلم أن $\triangle WJZ$ متطابق الأضلاع، وبما أن المثلث المتطابق الأضلاع يكون متطابق الزوايا، إذن $\angle ZWJ \cong \angle WJZ \cong \angle JZW$، وبحسب تعريف تطابق الزوايا يكون: $m\angle ZWJ = m\angle WJZ = m\angle JZW$ وبما أن $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$ فإنه بحسب تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle ZWP = m\angle WJM = m\angle JZL$

وباستعمال مسلمة جمع قياسات الزوايا ينتج أن:
$m\angle ZWJ = m\angle ZWP + m\angle PWJ, m\angle WJZ = m\angle WJM + m\angle MJZ,$ $m\angle JZW = m\angle JZL + m\angle LZW$.

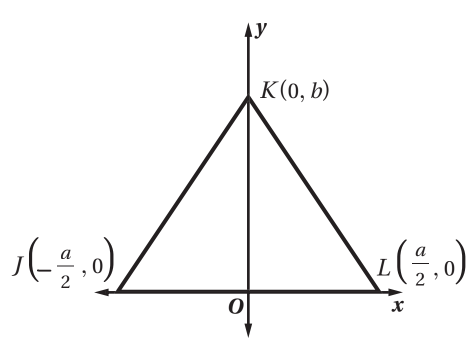
وبالتعويض ينتج أن:
$m\angle ZWP + m\angle PWJ = m\angle WJM + m\angle MJZ =$ $m\angle JZL + m\angle LZW$.

وبالتعويض مرة أخرى ينتج أن:
$m\angle ZWP + m\angle PWJ = m\angle ZWP + m\angle PJZ =$ $m\angle ZWP + m\angle LZW$.

وبحسب خاصية الطرح للمساواة ينتج أن: $m\angle PWJ = m\angle PJZ = m\angle LZW$، ومن تعريف التطابق ينتج أن: $\angle PWJ \cong \angle PJZ \cong \angle LZW$، وبحسب مسلمة ASA ينتج أن: $\triangle WZL \cong \triangle ZJM \cong \triangle JWP$، ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإن $\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM}$.

الدرس 7-3 ، (تحقق من فهمك) ص (196-198):

1)



3) **المعطيات:** المثلثان $\triangle ABX$ و $\triangle CDX$

المطلوب: $\triangle ABX \cong \triangle CDX$

البرهان:

نقطة منتصف $\overline{AC}$ هي

$$\left(\frac{0 + a + x}{2}, \frac{0 + b}{2}\right) = \left(\frac{a + x}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

نقطة منتصف $\overline{BD}$ هي $\left(\frac{0+x+a}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2}\right)$

إحداثي نقطة منتصف $\overline{AC}$ = إحداثي نقطة منتصف $\overline{BD}$ = إحداثي النقطة X؛ لذا $\overline{AC}$ تُنصِّف $\overline{BD}$ و $\overline{BD}$ تنصِّف $\overline{AC}$، وذلك بتعريف المنّصف.

وهذا يعني أن X هي منتصف كلٍّ من $\overline{AC}$ وَ $\overline{BD}$ أي أن:

$\overline{BX} \cong \overline{XD}$ و $\overline{AX} \cong \overline{XC}$، وذلك بتعريف نقطة المنصّف.

$$CD = \sqrt{((a+x)-a)^2+(b-0)^2} = \sqrt{x^2+b^2}$$

$$AB = \sqrt{((0+x)-0)^2+(b-0)^2} = \sqrt{x^2+b^2}$$

إذن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ بتعريف تطابق القطع المستقيمة.

$\triangle ABX \cong \triangle CDX$ بحسب SSS.

4) افترض أن T ترمز لمدينة تبوك، و A ترمز لمدينة عرعر، و H لمدينة حائل .

$$AT = \sqrt{(28.37-30.9)^2+(36.6-41.13)^2} \approx 5.19$$

$$HT = \sqrt{(28.37-27.43)^2+(36.6-41.68)^2} \approx 5.17$$

$$AH = \sqrt{(30.9-27.43)^2+(41.13-41.68)^2} \approx 3.51 ،$$

وبما أن $AT \approx HT$، إذن $\triangle ATH$ متطابق الضلعين تقريبًا.

الدرس 7-3 ، ص (199, 200) :

5) $DC = \sqrt{(-a-(-a))^2+(b-0)^2} = b$

$$GH = \sqrt{(a-a)^2+(b-0)^2} = b$$

بما أن $DC = GH$، إذن $\overline{DC} \cong \overline{GH}$.

$$DF = \sqrt{(0+a)^2+\left(\frac{b}{2}-b\right)^2} = \sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}$$

$$GF = \sqrt{(a-0)^2+\left(b-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}$$

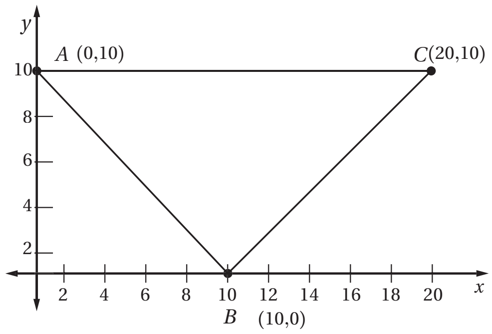
$$CF = \sqrt{(0+a)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2} = \sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}$$

$$HF = \sqrt{(a-0)^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}$$

وبما أن $DF = GF = CF = HF$، إذن $\overline{DF} \cong \overline{GF} \cong \overline{CF} \cong \overline{HF}$ ؛ لذا $\triangle FGH \cong \triangle FDC$ بحسب SSS .

6) **المعطيات:** $\triangle ABC$

المطلوب: $\triangle ABC$ متطابق الضلعين.



البرهان:

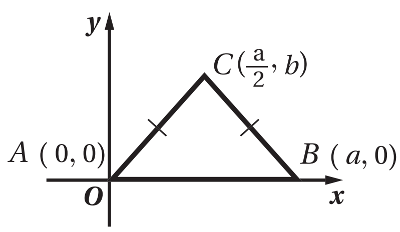
استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتجد AB و BC.

$$AB = \sqrt{(0-10)^2+(10-0)^2} = \sqrt{200}$$

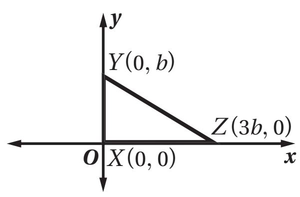
$$BC = \sqrt{(20-10)^2+(10-0)^2} = \sqrt{200}$$

وبما أن $AB = BC$ ، إذن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ويكون الساقان متطابقتين؛ أي أن: $\triangle ABC$ متطابق الضلعين.

7)

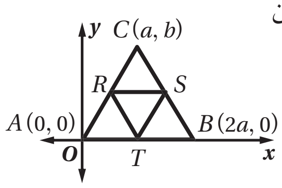


8)



12) **المعطيات:** ABC مثلث متطابق الضلعين فيه $\overline{BC} \cong \overline{AC}$

R, S, T نقاط منتصفات الأضلاع على الترتيب .



المطلوب: $\triangle RST$ متطابق الضلعين.

البرهان:

إحداثيات R هي $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

إحداثيات S هي $\left(\frac{a+2a}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{3a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

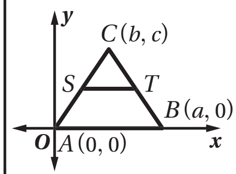
إحداثيات T هي $\left(\frac{2a+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (a, 0)$.

$$RT = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-a\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$ST = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}-a\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

لاحظ أن $RT = ST$ ، وهذا يعني أن $\overline{RT} \cong \overline{ST}$ ، لذا فالمثلث $\triangle RST$ متطابق الضلعين.

13) **المعطيات:** $\triangle ABC$



فيه S نقطة منتصف $\overline{AC}$.

T نقطة منتصف $\overline{BC}$.

المطلوب: $ST = \frac{1}{2}AB$

البرهان:

إحداثيات S هي $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

وإحداثيات T هي $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

$$ST = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

$$AB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = a$$

إذن $ST = \frac{1}{2}AB$

14) المسافة بين جيزان ونجران:

$$\sqrt{(17.5-16.9)^2 + (44.16-42.58)^2} \approx 1.69$$

المسافة بين جيزان وخميس مشيط:

$$\sqrt{(18.3-16.9)^2 + (42.8-42.58)^2} \approx 1.42$$

المسافة بين نجران وخميس مشيط:

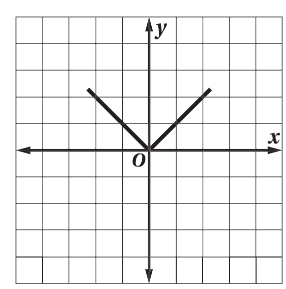
$$\sqrt{(18.3-17.5)^2 + (42.8-44.16)^2} \approx 1.58$$

وبما أن هذه المسافات مختلفة، فإن المثلث الذي رؤوسه هي هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

17) ميل الطريق الواصل بين الخيمتين يساوي $-\frac{4}{3}$ ، وميل الطريق بين موقع الإدارة والخيمة الواقعة عند $(9, 12)$ يساوي $\frac{3}{4}$

وبما أن $-\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = -1$ ، فإن المثلث المتكوِّن من الخيمتين وإدارة المتنزَّه مثلث قائم الزاوية.

18a)



معادلة المستقيم الذي يسير عليه القارب الأول هي $y = x$، وميل هذا المستقيم يساوي 1؛ لأن القارب أثناء سيره يقطع عددًا متساويًا من الوحدات من جهة الشمال ومن جهة الشرق، انطلاقًا من نقطة الأصل.

ومعادلة المستقيم الذي يسير عليه القارب الثاني هي $y = -x$، وميل هذا المستقيم يساوي -1 ؛ لأن القارب أثناء سيره يقطع عددًا متساويًا من الوحدات من جهة الشمال ومن جهة الغرب، انطلاقًا من نقطة الأصل، والمقطع y لخطَّي سير القاربين يساوي 0

18b) المسافة بين الرصيف وكلٍّ من القاربين (الأول والثاني) هي 300 m ؛ لذا فإن هذين الضلعين متطابقان، والمثلث المتكوِّن من الرصيف وكلٍّ من القاربين الأول والثاني يكون متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث المتطابق الضلعين.

وكذلك قياس الزاوية عند الرصيف تساوي $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ بحسب مسلمة جمع قياسات الزوايا، إذن المثلث قائم الزاوية.

18c) القارب الأول سيقع عند النقطة (a, a)؛ لأنه يقع على المستقيم الذي معادلته $y = x$؛ إذن المسافة بين القارب الأول والرصيف $(0, 0)$ تعطى بالمعادلة:

$$\sqrt{(a-0)^2 + (a-0)^2} = 300$$

أي $\sqrt{2a^2} = 300$

أي $2a^2 = 90000$

أي $a^2 = 45000$ ، إذن $a = \mp\sqrt{45000}$

أو $a = \pm 150\sqrt{2}$ ، لكن بما أن القارب يقع في الربع الأول، إذن إحداثيَّاه موجبان، و$a = 150\sqrt{2}$ ، أو موقع القارب الأول هو: $(150\sqrt{2}, 150\sqrt{2})$، وبالطريقة نفسها يكون موقع القارب الثاني: $(-150\sqrt{2}, 150\sqrt{2})$، وموقع القارب الثالث: $(0, 212)$

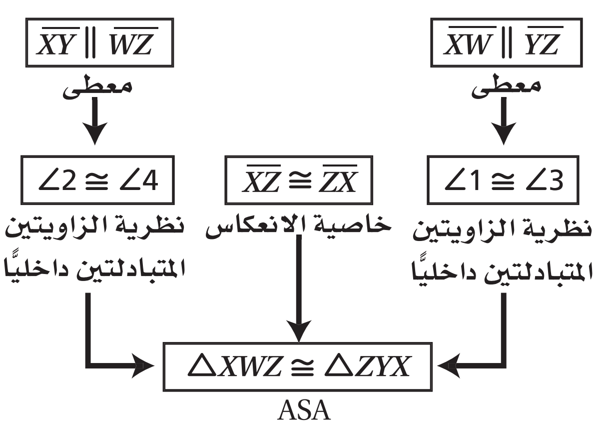
18d) الإحداثي y لكلٍّ من القاربين (الأول والثاني) يساوي $2\sqrt{150} \simeq 212.13$، في حين أن الإحداثي y للقارب الثالث يساوي 212، وبما أن للقوارب الثلاثة الإحداثي y نفسه تقريبًا، فإنها تقع على المستقيم نفسه تقريبًا، ونقطة المنتصف بين القاربين (الأول والثاني) هي:

$$\left(\frac{150\sqrt{2} - 150\sqrt{2}}{2}, \frac{212 + 212}{2}\right)$$

أو $(0, 212)$، وهذه هي إحداثيات موقع القارب الثالث.

اختبار الفصل، ص (207) :

9) **البرهان :**



الفصل 4

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
التهيئة، ص (213)

	استكشاف 4-1 حصة واحدة	الدرس 4-1 حصتان	استكشاف 4-2 حصة واحدة	الدرس 4-2 حصتان
العنوان	**معمل الهندسة: إنشاء المنصَّفات**	**المنصَّفات في المثلث**	**معمل الهندسة: إنشاء القطع المتوسطة والارتفاعات**	**القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث**
الأهداف	• إنشاء الأعمدة المنصفة لأضلاع مثلث وإنشاء منصفات زواياه.	• تعرف الأعمدة المنصفة في المثلث واستعمالها. • تعرف منصفات الزوايا في المثلثات واستعمالها.	• إنشاء القطع المتوسطة والارتفاعات لمثلث.	• تعرف القطع المتوسطة في المثلث واستعمالها. • تعرف الارتفاعات في المثلث واستعمالها.
المفردات		العمود المنصَّف المستقيمات المتلاقية نقطة التلاقي مركز الدائرة الخارجية للمثلث مركز الدائرة الداخلية للمثلث		القطعة المتوسطة مركز المثلث الارتفاع ملتقى ارتفاعات المثلث
تمثيلات متعددة				ص (231)
مصادر الدرس	**المواد اللازمة** • فرجار • مسطرة غير مدرجة	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص(6) دون • تدريبات المهارات، ص(8) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص(9) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص(10) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (27) دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • فرجار • مسطرة غير مدرجة	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص(11) دون • تدريبات المهارات، ص(13) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص(14) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص(15) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (28) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس		السبورة التفاعلية، ص(218)		السبورة التفاعلية، ص(226)
تنويع التعليم		ص (216, 223)		ص (228)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

العلاقات في المثلث

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(15) حصة	(4) حصص	(19) حصة

الدرس 4-3 حصتان	الدرس 4-4 حصتان	استكشاف 4-5 حصة واحدة	الدرس 4-5 حصتان	الدرس 4-6 حصتان
المتباينات في المثلث	**البرهان غير المباشر**	**معمل الحاسبة البيانية : متباينة المثلث**	**متباينة المثلث**	**المتباينات في مثلثين**
• تعرَف خصائص المتباينات وتطبيقها على قياسات زوايا المثلث. • تطبيق خصائص المتباينات على العلاقات بين زوايا مثلث وأضلاعه.	• كتابة براهين جبرية غير مباشرة. • كتابة براهين هندسية غير مباشرة.	• استعمال تطبيق Ceometry في الحاسبة البيانية TI-nspire لاستكشاف خصائص المثلثات.	• استعمال نظريّة متباينة المثلث لتعيين الأطوال التي تكوّن مثلثات. • إثبات العلاقات في المثلث باستعمال نظرية متباينة المثلث.	• تطبيق متباينة SAS أو عكسها لإجراء مقارنات بين عناصر مثلثين. • إثبات صحّة علاقات باستعمال متباينة SAS ، أو عكسها.
	التبرير غير المباشر البرهان غير المباشر البرهان بالتناقض			
ص (239)			ص (253)	ص (261)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص(16) دون • تدريبات المهارات، ص(18) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص(19) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص(20) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (29) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص(21) دون • تدريبات المهارات، ص(23) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص(24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص(25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (30) دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • الحاسبة البيانية TI-nspire	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص(26) دون • تدريبات المهارات، ص(28) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص(29) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص(30) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (31) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص(31) دون • تدريبات المهارات، ص(33) دون ضمن • تدريبات حل المسألة، ص(34) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص(35) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (32) دون ضمن فوق
مدونة، ص(237)	تسجيل مرئي، ص(244)		السبورة التفاعلية، ص(250)	السبورة التفاعلية، ص(258)
ص (235, 236)	ص (243, 247)		ص (250, 251)	ص (256, 262)

التقويم التكويني

اختبار منتصف الفصل، ص (240)

التقويم الختامي

• دليل الدراسة والمراجعة، ص (263 –266)
• اختبار الفصل، ص (267)

الفصل 4

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 4**	
	التهيئة للفصل 4 ، ص (213) نموذج التوقع، ص (65)	مخطط المعالجة، ص (213)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب.
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك كل مثال تأكد مسائل مهارات التفكير العليا (اكتشف الخطأ، اكتب) مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة ، ص(68, 69) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصول 4-1 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصول 4-1
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص(240) اختبار منتصف الفصل، ص(70) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصول 4-1 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصول 4-1
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص(263-266) اختبار الفصل، ص(267) اختبار تراكمي، ص(270, 271) www.obeikaneducation.com	**مستوى المعالجة 1** تدريبات المهارات، الفصول 4-1 www.obeikaneducation.com **مستوى المعالجة 2** تدريبات إعادة التعليم، الفصول 4-1
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 4**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص(72-77) اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص(78-79) اختبار المفردات ، ص(71) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص(80) اختبار تراكمي ، ص(81-83) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصول 4-1 www.obeikaneducation.com

كتاب الطالب   دليل المعلم   مصادر المعلم للأنشطة الصفية   دليل التقويم   شبكة الانترنت

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

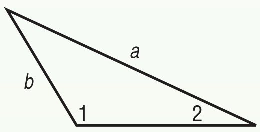
المتعلمون البصريون: اعرض لوحًا من الفلّين أمام الطلاب، مع دبابيس لاستعمالها رؤوسًا للمثلثات، وخيوطًا ملونة من الغزل لاستعمالها أضلاعًا للمثلثات، ومنصّفات وقطعًا متوسطة وارتفاعات لها. ويمكن أن يتبادل الطلاب الأدوار في استعمال الدبابيس والخيوط؛ لعمل نماذج لأنواع مختلفة من المثلثات، ويضيفوا عليها منصفات الزوايا ومنصّفات الأضلاع والقطع المتوسطة والارتفاعات لهذه المثلثات.

المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات صغيرة ليبحثوا في أصول الهندسة بما في ذلك أعمال إقليدس، ثم اطلب إليهم استقصاء الطريقة التي استعملت بها الإنشاءات في المثلثات أول مرّة، فمثلًا لم يكن اليونانيون القدماء قادرين على حساب نقطة المنتصف؛ لأن نظامهم العددي لم يكن يحتوي على الأعداد الصحيحة أو النسبيّة، إذ كان يتكون من الأعداد الكلّيّة فقط. لذا لم يكن اليونانيون قادرين على قياس طول قطعة مستقيمة وقسمة طولها على 2 لإيجاد نقطة المنتصف. وأدت هذه المشكلة إلى استعمال فرجار ومسطرة غير مدرّجة لتحديد نقطة المنتصف. اطلب إلى الطلاب أن يعملوا معًا لابتكار عرض بصري لأعمالهم، ثم يتبادلونها مع المجموعات الأخرى.

المتعلمون الحركيون: يفترض كثير من الطلاب في الهندسة أن أي ثلاثة أضلاع يمكن أن تُشكّل مثلثًا؛ مما يتناقض مع نظرية متباينة المثلث؛ لذا اطلب إليهم استعمال قطع بأطوال مختلفة (مثل استعمال عيدان ذات أطوال مختلفة) وتجربتها لاكتشاف الأطوال التي يمكن استعمالها لتكوين مثلثات، وتلك التي لا يمكن استعمالها في ذلك. وانظر إذا كان الطلاب قادرين على صياغة "قاعدة"؛ لتحديد ما إذا كانت أطوال ثلاث قطع تصلح لتكوين مثلثٍ أم لا، وذلك قبل تقديم متباينة المثلث.

البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات صغيرة متفاوتة القدرات؛ لإثبات علاقات المثلثات بالمتباينات. ارسم مجموعاتٍ مختلفةً من المثلثات على السبورة مع علاقات ممكنة بين زوايا المثلثات وأضلاعها، ثم اطلب إليهم أن يقرّروا ما إذا كانت المتباينات صحيحة أم لا، وأن يكتبوا تفسيرًا لتبريراتهم.



البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب استقصاء مهنٍ من واقع الحياة تكون فيها المعرفة الهندسيّة المتعمقة ضروريّة. فالمهندسون المعماريون في حاجة إلى إقامة المخططات والنماذج، وأن يروها مجسّمة، ويستعملوا القوانين الهندسية؛ ليتأكدوا من أن البِنَى صحيحة وجميلة المنظر. ويستعمل مهندسو التصميمات الداخليّة المثلثات؛ لتحديد أماكن الصور والمناظر والأشياء الكمالية الأخرى في الغرف لجعلها أكثر جمالًا وترتيبًا، ويمكن للطلاب أن يختاروا شخصًا متخصصًا في المجال الذي اختاروه لمقابلته وأخذ معلومات منه، أو أن يقرؤوا أعمال أحد العاملين في الميدان أو عمل مسحٍ لأمثلةٍ من أعمال شخص معاصر في المجال الذي اختاروه. ويجب عليهم أن يعرِضوا ما تعلّموه على صورة لوحة أو تقرير ليتبادلوه مع طلاب الصف، وأن يصفوا فيه تطبيقات من واقع الحياة لعلاقات المثلث والمفاهيم الهندسية الأخرى.

قراءة الرياضيات

الدراسة

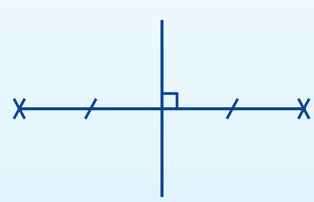
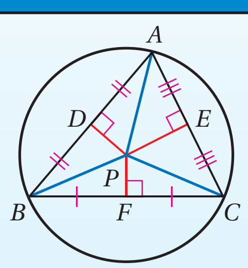
مهارة الدراسة

يمكن تمثيل الكثير من العلاقات في المثلث بالرسم.

من الطرائق المفيدة في تنظيم المعلومات استعمال جدول للتعاريف والرسم والخصائص والملاحظات.

ولتعزيز الفهم، يمكن أن يكتب الطالب المفردة أو الخاصية أو النظرية، ويكتب تفاصيلها ويُدرج رسمها وخصائصها.

ويمكن أن يضيف الطلاب إلى هذه العينة مفردات أو نظريات أخرى من الفصل 4

المفردة	التعريف	الرسم	خصائص
العمود المنصف لقطعة	مستقيم عمودي على القطعة عند منتصفها		الأعمدة المنصفة في مثلث تلتقي في نقطةٍ واحدة تبعد البعد نفسه عن رؤوس المثلث، وتكون تلك النقطة مركزًا للدائرة الخارجية للمثلث. 

يُسهم هذا النشاط وماشابهه في بناء استقلالية الطلاب، من خلال استعمالهم الاستراتيجيات الخاصة بهم.

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 4

- تمييز العلاقات الخطيَّة.
- التمثيل البياني في المستوى الإحداثي.
- تمثيل علاقات باستعمال الجداول والرسم البياني.
- حل معادلات خطيّة.

الفصل 4

- استعمال الميل ومعادلات المستقيمات؛ لاستقصاء علاقات هندسيّة تتضمن قطعًا مستقيمةً خاصّةً في المثلث.
- تحليل العلاقات الهندسيّة من أجل التحقق من صحّة تخمينات.

مابعد الفصل 4

التهيئة للصف الثالث الثانوي

- حل مسائل فيزيائية باستعمال حساب المثلثات تتضمن استعمال قانون الجيب وقانون جيب التمام وقوانين المساحة .

ملخص الدروس

4-1 المنصّفات في المثلث

العمود المنصّف لأحد أضلاع مثلث هو مستقيم يمرّ في نقطة منتصف الضلع ويعامده. وللأعمدة المنصّفة خصائص؛ فأيّ نقطة على العمود المنصِّف لقطعة مستقيمة تكون على بُعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة، وعكس هذه العبارة صحيح أيضًا. وتُسمّى نقطة التقاء الأعمدة المنصفة لأضلاع مثلث مركز الدائرة الخارجية للمثلث، وهي على أبعادٍ متساوية من رؤوس المثلث.

ولمنصّفات الزوايا خصائص أيضًا؛ فأي نقطة على منصّف الزاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعَي تلك الزاوية، وكل نقطة في داخل الزاوية، وتبعد بعدين متساويين عن ضلعَيها تقع على منصّف الزاوية. وتسمّى نقطة تقاطع منصّفات الزوايا لمثلث مركز الدائرة الداخلية للمثلث، وهي على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.

4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

القطعة المتوسطة قطعة مستقيمة، طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس. وتتلاقى القطع المتوسطة لمثلث في نقطة تسمى مركز المثلث. ويبعد مركز المثلث عن كل رأس مسافة تساوي ثُلُثَي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ونقطة منتصف الضلع المقابل له.

وارتفاع المثلث هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد رؤوس المثلث إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس. والمستقيمات التي تحوي ارتفاعات المثلث تتلاقى في نقطة تسمى ملتقى الارتفاعات.

الاسم	النوع	نقطة التلاقي
العمود المنصّف	مستقيم	مركز الدائرة الخارجية للمثلث.
منصّف الزاوية	نصف مستقيم	مركز الدائرة الداخلية للمثلث
القطعة المتوسطة	قطعة مستقيمة	مركز المثلث
الارتفاع	قطعة مستقيمة	ملتقى الارتفاعات

العلاقات في المثلث

4-3 المتباينات في المثلث

مفهوم المتباينة في الجبر ينص على أنه لأي عددين حقيقيين a و b، يكون $a > b$ إذا وُجد عدد حقيقي موجب c، بحيث يكون $a = b + c$. وقد درس الطلاب عدة خصائص للمتباينات على الأعداد الحقيقيّة. وفي هذا الدرس سيطبق الطلاب هذه المفاهيم على الزوايا.

تنص نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة على أنّ قياس الزاوية الخارجيّة لمثلث أكبر من قياس أي زاوية داخليّة غير مجاورة لها (بعيدة عنها). وفي الهندسة نظرية لمتباينة أخرى تعتمد على العلاقة بين أحد أضلاع المثلث والرأس المقابل لذلك الضلع، وتنص على أنه إذا كان ضلع في مثلث أطول من ضلع آخر، فإن قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول منهما أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر، وعكس هذه العبارة صحيح أيضًا وهو: إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإنّ الضلع المقابل للزاوية الكبرى منهما يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.

4-4 البرهان غير المباشر

البرهان غير المباشر أو البرهان بالتناقض طريقة لإثبات صحّة عبارة ما، وذلك بافتراض أنها خطأ أولًا، ثمّ بيان أنّ هذا الافتراض يؤدي إلى تناقضٍ مع الفرض أو مع أي حقيقةٍ صحيحةٍ أخرى مثل تعريف أو مسلمة أو نظريّة أو نتيجة. وأخيرًا رفض الافتراض لأنّه أدّى إلى تناقض وقبول العبارة الأصلية على أنّها صحيحة، ويمكن استعمال البرهان غير المباشر في كلٍّ من الهندسة والجبر.

4-5 متباينة المثلث

تنص نظرية متباينة المثلث على أن مجموع طولَي أيّ ضلعين لمثلث أكبر من طول الضلع الثالث، ويمكن استعمال هذه النظريّة؛ لتحديد ما إذا كانت ثلاث قطع مستقيمة عُلمت أطوالها تُشكل مثلثًا.

4-6 المتباينات في مثلثين

هذا الدرس يمثِّل توسعًا لنظرية متباينة المثلث إلى نظرية المتباينات في مثلثين.

تنص نظرية الرافعة على أنّه إذا كان ضلعان في مثلث ما مطابقين لضلعين في مثلثٍ آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني ،فإنّ الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني. وعكس نظرية الرافعة صحيح أيضًا وهو أنه إذا كان ضلعان في مثلث ما مطابقين لضلعين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنّ قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول، يكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

تقديم الفصل

فن العمارة: التصميم المثلثي

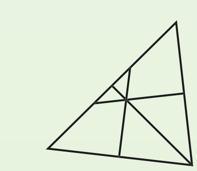
يطبق الطلاب ما تعلَّموه عن الزوايا والعلاقات المثلثيّة في تخطيط متنزّه وتحديد موقع خيمة عند مركز المتنزه.

- اطلب إلى الطلاب أن يخططوا لإنشاء متنزّه على شكل مثلث حادِّ الزوايا. وعلى افتراض أن الأضلاع الثلاثة للمتنزه هي شوارع محاذية للمتنزه.
- والآن على الطلاب أن يخطّطوا ويعيّنوا موقع الخيمة عند مركز المتنزّه، بحيث تكون على أبعادٍ متساويةٍ من الشوارع الثلاثة المحيطة بالمتنزّه.
- يجب على الطلاب أن يتذكروا أنّه بإمكانهم تعيين مركز هذا المتنزّه المثلثي الشكل، باستعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية التي تعلَّموها في هذا الفصل.
- اطلب إلى الطلاب تسمية جميع المستقيمات التي رسموها على مخطط المتنزّه لتعيين موقع الخيمة.
- وأخيرًا، اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا جميع العلاقات المثلثية التي استعملوها في تصميم المتنزّه وتعيين موقع الخيمة. شجِّع الطلاب على مناقشة أوجه التشابه في تصاميمهم والمقارنة بينها.

المفردات: قدّم مفردات هذا الفصل مستعملًا النمط الآتي:

التعريف: مركز الدائرة التي تمرُّ برؤوس مثلث هو نقطة التقاء الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.

مثال:



سؤال: كيف يؤثر تغيير قياسات الزوايا في موقع مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث؟

الفصل 4 العلاقات في المثلث
Relationships in Triangle

فيما سبق:

درستُ طرائق تصنيف المثلثات.

والآن:

- أتعرف القطع المستقيمة والنقاط المرتبطة بالمثلثات.
- أتعرف العلاقات الخاصة بين أضلاع المثلث وزواياه.
- أكتب برهانًا غير مباشر.

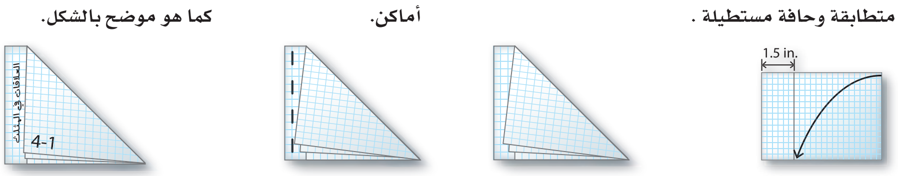
لماذا؟

التصميم الداخلي: تستعمل العلاقات في المثلث لإيجاد الأبعاد وقياسات الزوايا ومقارنتها. ويستعمل مهندسو التصميم الداخلي هذه العلاقات لتحسين تصاميمهم.

المطويات منظم أفكار

العلاقات في المثلث: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 4، مبتدئًا بسبع أوراق رسم بياني.

1. **اجمع الأوراق،** واطوِ الركن العلوي الأيمن إلى الحافة السفلى لتشكل مثلثات متطابقة وحافة مستطيلة.
2. **اطوِ الجزء** المستطيل كما هو مبين بالشكل.
3. **ثبِّت الأوراق** على طول الحافة المستطيلة في أربعة أماكن.
4. **اكتب عنوان الفصل على الحافة** المستطيلة، ورقِّم كل درس أسفل المثلث، وخصص الورقة الأخيرة للمفردات الجديدة كما هو موضح بالشكل.



المطويات منظم أفكار

غرضها: يدوّن الطلاب ملاحظاتهم، وتعريفات المصطلحات، والمفاهيم، وبراهين العلاقات في المثلث.

وظيفتها: بعد أن يُعدّ الطلاب مطوياتهم، اطلب إليهم كتابة عناوين لأوراق المطويات تناظر الدروس الستة في هذا الفصل، وفقرات تصف المفاهيم والمفردات والنظريات في كل درس، وأن يضيفوا أيّ رسم يدعم هذا الوصف.

وقت استعمالها: تستعمل الورقة المناسبة حال انتهاء الطلاب من دراسة كل درس من هذا الفصل. ويمكن أن يُضاف شريط المفردات إلى كل درس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (66, 67). يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. والعبارة "إذا ... فقم"، في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 25% أو أقل من الأسئلة،

فقم باختيار أحد المصادر الآتية:

- الدرسان 2-3 ,1-1
- تدريبات المهارات، الفصل 1، ص (8)، الفصل 3، ص (13)
- www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،

فقم باختيار أحد المصدرين الآتيين:

- تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1، ص (7)، الفصل 3، ص (12)
- www.obeikaneducation.com

التهيئة للفصل 4

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المهارات السابقة الضرورية.

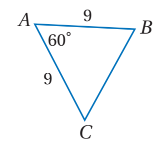
البديل 1 أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

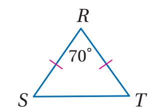
تستعمل مع الدروس من 1-4 إلى 3-4

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

1) BC **9**



2) $m\angle RST$ **55**



3) **حدائق:** يصمِّم عبد الله حوضًا لزراعة الورود على شكل مثلث قائم الزاوية. إذا كان طول كلٍّ من ضلعَي القائمة 7 ft، فما طول الضلع الثالث (قرِّب إلى أقرب عدد صحيح)؟ **10 ft**

تستعمل مع الدرس 4-4

للأسئلة 6–4 ضع تخمينًا مبنيًّا على المعطيات وارسم شكلًا يوضح تخمينك: **7–4) انظر الهامش**

4) $\angle 4$,$\angle 3$ زاويتان متجاورتان على خط مستقيم.

5) $JKLM$ مربع.

6) $\overrightarrow{BD}$ منصِّف لـ $\angle ABC$.

7) **تبرير:** حدِّد ما إذا كان التخمين التالي المبني على المعطيات الواردة صحيحًا دائمًا أو صحيحًا أحيانًا أو غير صحيح أبدًا. وفسِّر إجابتك.

المعطيات: D, E, F ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

التخمين: $DE + EF = DF$

حل كلًّا من المتباينات الآتية: تستعمل مع الدرسين 6-4 , 5-4

8) $x + 13 < 41$ **$x < 28$**

9) $x - 6 > 2x$ **$-6 > x$**

10) $6x + 9 < 7x$ **$x > 9$**

11) $8x + 15 > 9x - 26$ **$x < 41$**

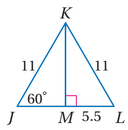
12) **صور:** أضافت نورة 15 صورة إلى ألبوم صورها، فأصبح عدد الصور أكثر من 120، فكم صورة كانت في الألبوم؟ **$x > 105$**

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

a) JM b) $m\angle JKL$



a) بما أن $JK = KL$ (معطى)، فإن $m\angle J = m\angle L$ (نظرية المثلث المتطابق الضلعين)، وبما أن $(KM \perp JM)$ $m\angle KMJ = m\angle KML = 90°$، فإن هذا يعني أن $\angle KMJ \cong \angle KML$، ويكون $\triangle KMJ \cong \triangle KML$ بحسب AAS، ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإن $JM = ML = 5.5$

b)

$m\angle J + m\angle JKL + m\angle L = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$60° + m\angle JKL + 60° = 180°$	$m\angle J = m\angle L = 60°$
$120° + m\angle JKL = 180°$	بسِّط
$m\angle JKL = 60°$	اطرح 120 من الطرفين

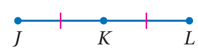
مثال 2

ضع تخمينًا مبنيًّا على المعطى الآتي، إذا كانت K نقطة منتصف $\overline{JL}$، وارسم شكلًا يوضح تخمينك.

المعطيات: K نقطة منتصف $\overline{JL}$.

التخمين: $\overline{JK} \cong \overline{KL}$

الرسم:



مثال 3

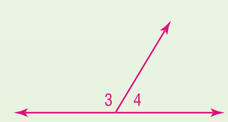
حل المتباينة $3x + 5 > 2x$

$3x + 5 > 2x$	معطى
$3x - 3x + 5 > 2x - 3x$	اطرح $3x$ من الطرفين
$5 > -x$	بسِّط
$-5 < x$	اقسم الطرفين على -1

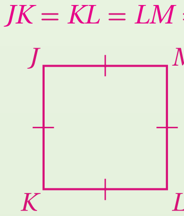
البديل 2 أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

إجابات:

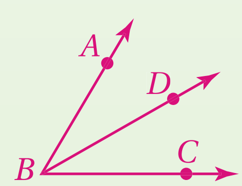
4) $\angle 3, \angle 4$ متكاملتان.



5) $JK = KL = LM = MJ$



6) $\angle ABD \cong \angle DBC$



7) صحيح أحيانًا؛ يكون التخمين صحيحًا، عندما تكون E بين D, F، وبخلاف ذلك يكون التخمين خاطئًا.

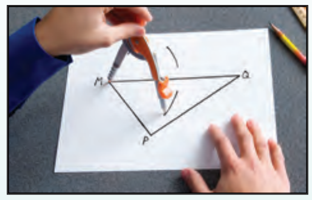
إنشاء المنصّفات
Constructing Bisectors

سوف تنشئ فيما يلي العمود المنصف لأحد أضلاع مثلث والمنصف لإحدى زواياه.
العمود المنصِف لقطعةٍ مستقيمةٍ هو العمود على القطعة المار بمنتصفها.

إنشاء هندسي 1 العمود المنصَف

إنشاء العمود المنصّف لأحد أضلاع مثلث.

الخطوة 1:

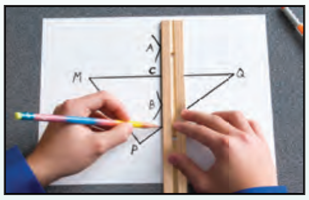


افتح الفرجار فتحة أكبر من $\frac{1}{2}MQ$، وارسم قوسًا من الرأس M فوق $\overline{MQ}$ وقوسًا آخر تحتها.

الخطوة 2:

استعمل فتحة الفرجار نفسها. وارسم من الرأس Q قوسًا فوق $\overline{MQ}$ وقوسًا آخر تحتها. وسمِّ نقطتي تقاطع القوسين A, B.

الخطوة 3:



استعمل مسطرة غير مدرّجة وارسم المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$. وسمّ نقطة تقاطع $\overline{MQ}, \overleftrightarrow{AB}$ بالحرف C.

منصّف زاوية في مثلث هو نصف مستقيم يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين.

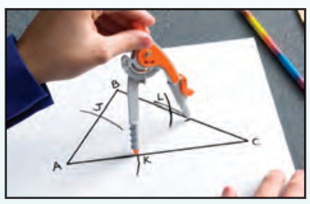
إنشاء هندسي 2 منصَف الزاوية

إنشاء منصّف زاوية في مثلث.

الخطوة 1:

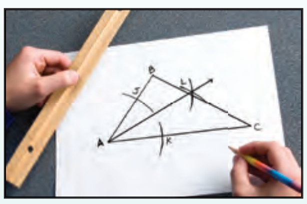
ثبّت الفرجار عند الرأس A، وارسم قوسًا يقطع $\overline{AB}, \overline{AC}$. وسمِّ نقطتَي التقاطع J, K.

الخطوة 2:



ثبّت الفرجار عند J، وارسم قوسًا داخل الزاوية A، وارسم من K قوسًا آخر، مستعملًا فتحة الفرجار نفسها، على أن يقطع القوس الأول في نقطة سمِّها L.

الخطوة 3:



استعمل مسطرة غير مدرّجة لرسم $\overrightarrow{AL}$، وهو منصّف للزاوية A في $\triangle ABC$.

التمثيل والتحليل:

1) أنشئ العمودين المنصّفين للضلعين الآخرين في $\triangle MPQ$. ثم أنشئ منصّفي الزاويتين الباقيتين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ حول نقطة التلاقي في الحالتين؟
انظر إجابات الطلاب. تلاقي في نقطة واحدة.

كرّر الإنشاءين السابقين لكل نوع من المثلثات الآتية: 2-4 انظر إجابات الطلاب

2) حادّ الزوايا
3) منفرج الزاوية
4) قائم الزاوية

1 التركيز

الهدف

إنشاء الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلث وإنشاء منصّفات زواياه.

المواد اللازمة

- فرجار
- مسطرة غير مدرّجة

إرشادات للتدريس

يوضح النشاط إنشاءين هندسيين مختلفين على مثلث. ويمكن للطلاب استعمال ورق شفاف لرسم مثلثين حادّي الزوايا مختلفي الأضلاع، أطوال أضلاعهما متساوية وقياسات زواياهما متساوية في ثلاثة مواقع مختلفة على الورقة. وعندما ينهي الطلاب الإنشاءين الهندسيين يمكنهم ملاحظة الفرق بين الأعمدة المنصّفة ومنصّفات الزوايا للمثلث نفسه.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب في مجموعات ثلاثية متفاوته القدرات، واطلب إلى كل طالب أن يقوم بتنفيذ خطوة من خطوات الرسم الثلاث في النشاط. وأن يتبادل الطلاب وزملاؤهم الأدوار في الإنشاءين الهندسيين 1 و 2.

أخبر الطلاب في أثناء قيامهم برسم المثلثين المتطابقين لإثبات أعمدة التنصيف في النشاط 1، بأنه يمكنهم استعمال النقطة P أو النقطة Q لأنّ كلاً من مجموعتي الأقواس قد رُسمت بفتحة الفرجار نفسها.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل السؤال 1 في أثناء تنفيذ النشاط.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 4–2 للتحقق من استيعاب الطلاب للمفهوم، وطريقة إنشاء العمود المنصّف ومنصّف الزاوية.

من المحسوس إلى المجرد

زود الطلاب بالأنواع الثلاثة للمثلثات المذكورة في الأسئلة 4–2، واطلب إليهم العمل على أن يستقر كل مثلث عند رفعه على سن قلم، وأن يختاروا طريقة الإنشاء الهندسي ويشرحوها.

4-1 المنصّفات في المثلث
Bisectors of Triangle

فيما سبق:

درستُ منصِّف القطعة المستقيمة ومنصِّف الزاوية.

والآن:

- أتعرّف الأعمدة المنصِّفة في المثلثات وأستعملها.
- أتعرّف منصِّفات الزوايا في المثلثات وأستعملها.

المفردات:

العمود المنصِّف
perpendicular bisector

المستقيمات المتلاقية
concurrent lines

نقطة التلاقي
point of concurrency

مركز الدائرة الخارجية للمثلث
circumcenter

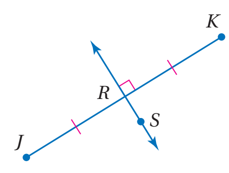
مركز الدائرة الداخلية للمثلث
incenter

www.obeikaneducation.com

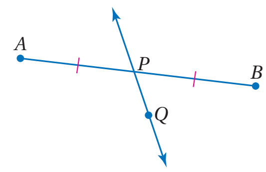
لماذا؟

إن تصميم منطقة العمل على شكل مثلث كما في الصورة المجاورة يجعل إعداد الطعام أسرع؛ وذلك بتقليل عدد الخطوات التي تخطوها سيدة البيت. ولتعيين النقطة المتساوية البعد عن كلٍّ من الفرن ومصدر الماء والثلاجة، يمكنك استعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.

الأعمدة المنصّفة: تعلمت سابقًا أن منصّف قطعة مستقيمة هو أي قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة عند نقطة منتصفها، وإذا كان المنصّف عموديًّا على القطعة سُمِّي **عمودًا منصِّفًا**.



$\overline{RS}$ عمود منصِّف لـ $\overline{JK}$



$\overleftrightarrow{PQ}$ منصِّف لـ $\overline{AB}$

تذكّر أنّ المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معينًا، فالعمود المنصّف لقطعة مستقيمة هو المحل الهندسي لمجموعة نقاطٍ في المستوى، تقع كلٌّ منها على بُعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة، وهذا يقود إلى النظريتين الآتيتين:

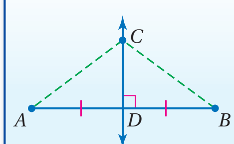
نظريتان — الأعمدة المنصِّفة

أضف إلى مطويتك

4.1 نظريّة العمود المنصّف

كلّ نقطة على العمود المنصّف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة.

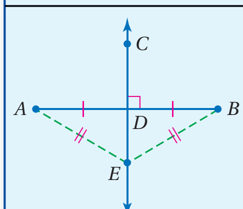
مثال: إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$ عمودًا منصّفًا لـ $\overline{AB}$، فإن $AC = BC$.



4.2 عكس نظريّة العمود المنصّف

كل نقطة على بُعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة.

مثال: إذا كان $AE = BE$، و $\overleftrightarrow{CD}$ هو العمود المنصّف لـ $\overline{AB}$، فإن E تقع على $\overleftrightarrow{CD}$.



سوف تبرهن النظريتين 4.1, 4.2 في السؤالين 29, 27 .

4-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-4

استعمال منصّفات القطع المستقيمة ومنصفات الزوايا.

الدرس 1-4

تعرُّف الأعمدة المنصّفة في المثلثات واستعمالها.

تعرُّف منصفات الزوايا في المثلثات واستعمالها.

ما بعد الدرس 1-4

الربط بين التمثيل الجبري والتمثيل الهندسي للدوال.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- لماذا تكون منطقة الحركة والعمل في تصميم المطبخ أكثر فائدة عندما تكون مثلثة الشكل؟ لأنّها تقلّل عدد الخطوات عند الانتقال من ركنٍ إلى آخر.
- أين يجب أن توضع الطاولة في هذا المثلث؟ عند نقطة متساوية الأبعاد عن كلٍّ من الثلاجة والفرن ومصدر الماء.
- هل تكون هذه النقطة عند منتصف ضلع من أضلاع المثلث دائمًا؟ ولماذا؟ إجابة ممكنة: لا، ففي الصورة لا تقع هذه النقطة عند منتصف أيٍّ من أضلاع المثلث.

مصادر الدرس 1-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (216)	• تنويع التعليم، ص (216, 223)	• تنويع التعليم، ص (223)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (27)	• كتاب التمارين، ص (27)	• كتاب التمارين، ص (27)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات المهارات، ص (8) • تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)	• تدريبات حل المسألة، ص (9) • التدريبات الإثرائية، ص (10)

الأعمدة المنصّفة

المثال 1 يبيّن كيفية استعمال نظريات العمود المنصّف لإيجاد قياسات في المثلث.

المثال 2 يبيّن كيفية استعمال نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث.

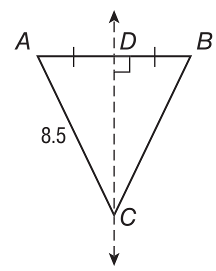
التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

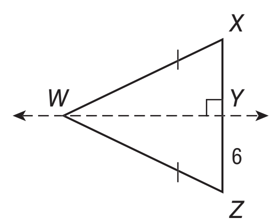
مثال إضافي

1 أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

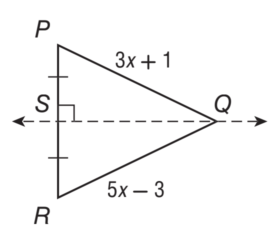
a) BC 8.5



b) XY 6



c) PQ 7

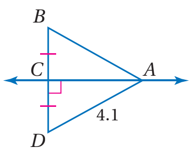


مثال 1 استعمال نظريات العمود المنصّف

أوجد كلّ قياس مما يأتي :

a) AB

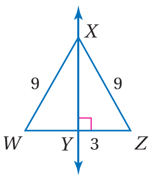
من المعطيات في الشكل المجاور، نعلم أن $\overleftrightarrow{CA}$ عمودٌ منصّف لـ $\overline{BD}$



$AB = AD$ نظريّة العمود المنصّف

$AB = 4.1$ عوّض

b) WY



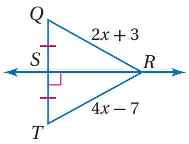
$WX = ZX, \overleftrightarrow{XY} \perp \overline{WZ}$ معطيات

$\overleftrightarrow{XY}$ عمود منصّف لـ $\overline{WZ}$ عكس نظرية العمود المنصّف

$WY = YZ$ تعريف منصّف قطعة مستقيمة

$WY = 3$ عوّض

c) RT



$\overleftrightarrow{SR}$ عمود منصّف $\overline{QT}$.

$RT = RQ$ نظريّة العمود المنصّف

$4x - 7 = 2x + 3$ عوّض

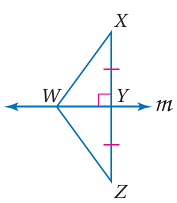
$2x - 7 = 3$ اطرح $2x$ من الطرفين

$2x = 10$ اجمع 7 إلى الطرفين

$x = 5$ اقسم الطرفين على 2

إذن $RT = 4(5) - 7 = 13$.

تحقق من فهمك



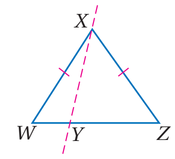
(1A) إذا كان $WX = 25.3, YZ = 22.4, WZ = 25.3$، فأوجد طول $\overline{XY}$. **22.4**

(1B) إذا كان m عمودًا منصّفًا لـ $\overline{XZ}$، $WZ = 14.9$، فأوجد طول $\overline{WX}$. **14.9**

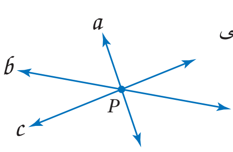
(1C) إذا كان m عمودًا منصّفًا لـ $\overline{XZ}$، $WX = 4a - 15, WZ = a + 12$ فأوجد طول $\overline{WX}$. **21**

إرشادات للدراسة

المعلومة $WX = ZX$ لوحدها لا تعدُّ كافية لاستنتاج أن $\overleftrightarrow{XY}$ عمود منصف لـ $\overline{WZ}$.



عندما تتقاطع ثلاثة مستقيمات أو أكثر في نقطة مشتركة، فإنّ هذه المستقيمات تُسمَّى **مستقيمات متلاقية**. والنقطة التي تلتقي فيها المستقيمات تسمّى **نقطة التلاقي**. وبما أنّ لكل مثلث ثلاثة أضلاع، فإنّ له ثلاثة أعمدة منصّفة. وهذه الأعمدة المنصّفة هي مستقيمات متلاقية. وتسمى نقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة **مركز الدائرة الخارجية للمثلث**.

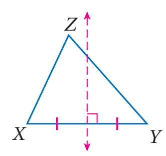


تتلاقى المستقيمات a, b, c في النقطة P.

إرشادات للدراسة

العمود المنصّف

ليس من الضروري أن يمرّ العمود المنصّف لضلع مثلث برأس المثلث المقابل . فمثلًا في $\triangle XYZ$ أدناه العمود المنصّف لـ $\overline{XY}$ لا يمرُّ بالرأس Z.

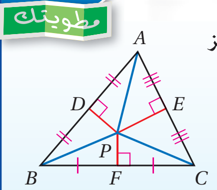


نظرية 4.3 نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث.

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تلتقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلث في نقطة تُسمَّى مركز الدائرة الخارجية للمثلث، وهي دائرة تمر برؤوس المثلث، وهي على أبعاد متساوية من الرؤوس.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الخارجية للمثلث $\triangle ABC$ ، فإنّ $PB = PA = PC$



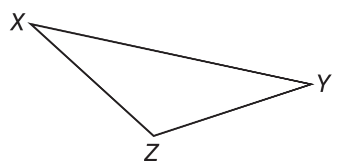
تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون: من المتوقع أن يجد بعض الطلاب صعوبة في إدراك معاني المفاهيم والمفردات في هذا الدرس. ولعلاج ذلك أعطِ وقتًا إضافيًا لاستيعاب جميع المفاهيم، واقترح على الطلاب إضافة ملصق إلى لوحة الفصل بعد كل مفهوم، بحيث يوضّح المفاهيم المختلفة والحقائق المتعلقة بها. وراجع المفاهيم أيضًا حال الانتهاء منها، وناقش أوجه التشابه والاختلاف بينها.

مثال إضافي

2 **بستنة:** يبيّن الشكل أدناه تمثيلًا لحديقةٍ مثلثةٍ، فهل يمكن وضع نافورة ماء عند مركز الدائرة الخارجية للمثلث، بحيث تكون داخل الحديقة؟



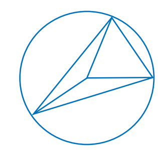
لا، مركز الدائرة الخارجية لمثلث منفرج الزاوية يقع خارج المثلث.

إرشادات للمعلم الجديد

توضيح المفردات: بيّن أن مركز الدائرة الخارجية للمثلث لا يقع بالضرورة داخل المثلث. وارسم مثلثًا منفرج الزاوية متطابق الضلعين قياسات زواياه $10°, 10°, 160°$؛ لتوضح من خلاله أن مركز الدائرة الخارجية للمثلث يقع خارج المثلث.

إرشادات للدراسة

مركز الدائرة الخارجية للمثلث: هو مركز الدائرة التي تمر برؤوس هذا المثلث.

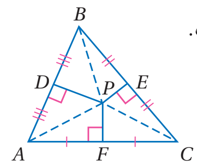


برهان نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث

المعطيات: $\overline{PD}, \overline{PF}, \overline{PE}$ أعمدة منصّفة للأضلاع $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ على الترتيب.

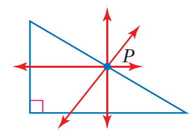
المطلوب: $AP = CP = BP$

برهان حرّ:

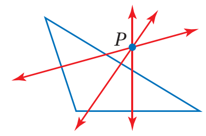


بما أنّ P تقع على العمود المنصّف لـ $\overline{AC}$، فإنها متساوية البُعد عن A, C. أي أن $AP = CP$. والعمود المنصّف لِـ $\overline{BC}$ يمر أيضًا بالنقطة P. لذلك يكون $CP = BP$، وتبعًا لخاصيّة التعدّي لعلاقة المساواة يكون $AP = BP$؛ إذن $AP = CP = BP$.

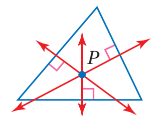
يمكن أن يقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث قائم الزاوية



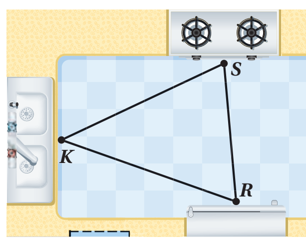
مثلث منفرج الزاوية



مثلث حاد الزوايا

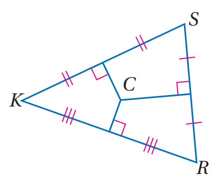
مثال 2 من واقع الحياة: استعمال نظريّة مركز الدائرة الخارجية للمثلث

تصميم داخلي: تطبيقًا للفكرة التي وردت في فقرة (لماذا؟)، إذا وُضع فرن الطبخ S ومصدر الماء K والثلاجة R في مطبخ كما في الشكل المجاور. أوجد النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط S, K, R.



بحسب نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث، يمكن تعيين النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط الثلاث باستعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث المتكون من هذه النقاط.

انسخ $\triangle SKR$ واستعمل المسطرة والمنقلة لرسم الأعمدة المنصفة لأضلاعه، فتكون النقطة C مركز الدائرة الخارجية للمثلث SKR. وهي النقطة المطلوبة.

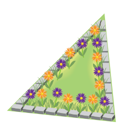


الربط مع الحياة

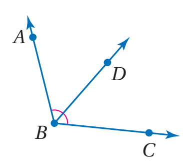
يتركز معظم النشاط داخل المطبخ حول ثلاث مناطق عمل أساسية هي: مصدر الماء، الثلاجة، فرن الطبخ، ويجب ألّا يزيد مجموع أطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث منطقة العمل على سبعة أمتار.

تحقق من فهمك

2) يريد عليّ أن يضع مرشَّة الماء على أبعاد متساوية من رؤوس حديقته المثلثة الشكل. فأين يتعين عليه وضع المرشّة؟ انظر الهامش



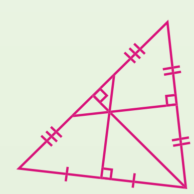
منصفات الزوايا: تعلم أنّ منصّف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين، كما يمكن أن يوصف منصّف الزاوية بأنّه المحل الهندسي للنقاط الواقعة داخل الزاوية، وتكون على أبعاد متساوية من ضلعَيها. ويقود هذا الوصف إلى النظريتين الآتيتين:



$\overrightarrow{BD}$ منصف لِـ $\angle ABC$.

إجابة (تحقق من فهمك):

2) يتعيَّن على عليٍّ وضعُ المرشِّ عند مركز الدائرة الخارجية للمثلث الذي يمثل شكل الحديقة.



منصّفات الزوايا

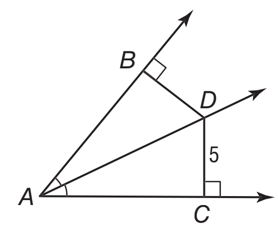
المثال 3 يبيّن كيفية استعمال نظرية منصّف الزاوية.

المثال 4 يبيّن كيفية استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث.

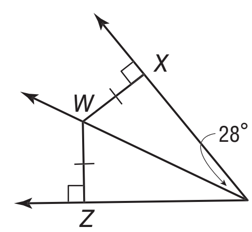
مثال إضافي

3 أوجد كل قياس مما يأتي:

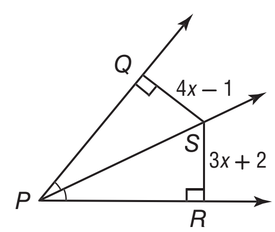
a. DB 5



b. $m\angle WYZ$ 28°



c. QS 11



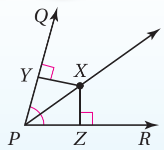
نظريتان — منصّفات الزوايا

أضف إلى مطويتك

4.4 نظرية منصّف الزاوية

كل نقطة تقع على منصّف زاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعيها.

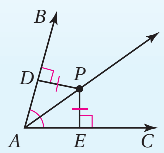
مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ منصّفًا لـ $\angle DBE$، وكان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}$, $\overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ فإن $DF = FE$.



4.5 عكس نظريّة منصّف الزاوية

كل نقطة تقع داخل الزاوية وتكون على بُعدين متساويين من ضلعيها فإنها تكون واقعة على منصّف الزاوية.

مثال: إذا كان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}, \overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}, DF = FE$ ، فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصّف $\angle DBE$

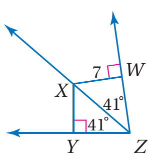


ستبرهن النظريتين 4.4, 4.5 في السؤالين 32,30

مثال 3 استعمال نظريتَي منصّفات الزوايا

أوجد كلّ قياس مما يأتي :

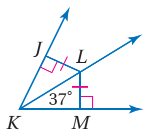
a) XY



$XY = XW$ نظريّة منصّف الزاوية

$XY = 7$ عوِّض

b) $m\angle JKL$



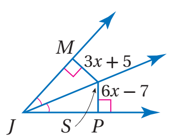
بما أن $\overline{LJ} \perp \overrightarrow{KJ}, \overline{LM} \perp \overrightarrow{KM}, LJ = LM$ ، فإن L على بعدين متساويين من ضلعي $\angle JKM$. وبحسب عكس نظرية منصّف الزاوية، فإن $\overrightarrow{KL}$ ينصّف $\angle JKM$

$\angle JKL \cong \angle LKM$ تعريف منصف الزوايا

$m\angle JKL = m\angle LKM$ تعريف الزوايا المتطابقة

$m\angle JKL = 37°$ عوِّض

c) SP



$SP = SM$ نظريّة منصّف الزاوية

$6x - 7 = 3x + 5$ عوِّض

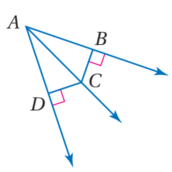
$3x - 7 = 5$ اطرح $3x$ من الطرفين

$3x = 12$ اجمع 7 إلى الطرفين

$x = 4$ اقسم الطرفين على 3

إذن $SP = 6(4) - 7 = 17$.

تحقق من فهمك



3A) إذا كان: $BC = 5$, $DC = 5$, $m\angle BAC = 38°$ ، فأوجد $m\angle DAC$ 38°

3B) إذا كان: $DC = 10$, $m\angle DAC = 40°$, $m\angle BAC = 40°$ ، فأوجد BC 10

3C) إذا كان $\overrightarrow{AC}$ ينصّف $\angle DAB$ ، و $BC = 4x + 8, DC = 9x - 7$ فأوجد BC 20

إرشادات للدراسة

منصّف الزاوية

لا تعدّ المعلومة $JL = LM$ في الفرع b لوحدها كافية لاستنتاج أن $\overrightarrow{KL}$ ينصّف $\angle JKM$.

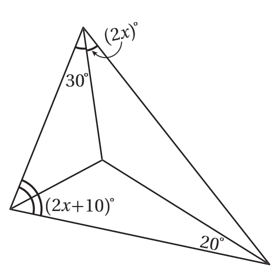
إرشادات للمعلم الجديد

التعريفات: اطلب إلى الطلاب أن يبحثوا عن تعريفات المنصّفات والقطع المتوسطة والارتفاعات، واطلب إليهم أن يقارنوا بين تعريفاتها الرياضيّة وتعريفاتها في واقع الحياة، حتى يصلوا إلى فهمٍ أعمق لمعانيها.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية : عيِّن لطلاب الفصل أسئلة متنوعة تتضمن قياس نصف زاوية من زوايا المثلث على صورة عبارة جبرية، واختر مجموعة طلاب ليحلوا الأسئلة أمام طلاب الفصل ويبيِّنوا كيف سيجدون كلًّا من قيمة المتغير وقياس الزاوية.

مثال:



تنبيه!

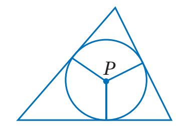
التعويض: لا يكفي أن تجد قيمة x في الجزء (c) من المثال 3، بل تحتاج إلى حساب قيمة $6x - 7$ لإيجاد طول $\overline{SP}$.

وكما هو الحال في الأعمدة المنصّفة، بما أن للمثلث ثلاث زوايا، فإنّ له ثلاثة منصّفات للزوايا تتلاقى في نقطة تُسمّى **مركز الدائرة الداخلية للمثلث**.

قراءة الرياضيات

مركز الدائرة الداخلية للمثلث

هو مركز الدائرة التي تقطع (تتماس مع) كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. ولهذا السبب فإن مركز هذه الدائرة يقع داخل المثلث دائمًا.



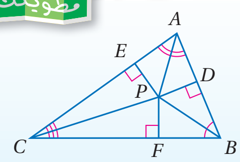
نظريّة 4.6 نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتقاطع منصّفات زوايا أي مثلث عند نقطة تُسمّى مركز الدائرة الداخلية للمثلث، وهي على أبعاد متساوية من أضلاعه.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC،

فإنّ $PD = PE = PF$

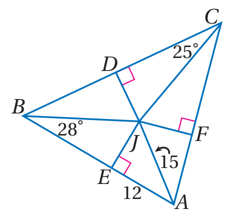


ستبرهن النظرية 4.6 في السؤال 28

مثال 4 استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين، إذا كانت J مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$.

a) JF



بما أن J على أبعادٍ متساوية من أضلاع $\triangle ABC$، بحسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث، فإن $JF = JE$؛ لذا أوجد JE باستعمال نظريّة فيثاغورس.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظريّة فيثاغورس
$JE^2 + 12^2 = 15^2$	عوّض
$JE^2 + 144 = 225$	$12^2 = 144,\ 15^2 = 225$
$JE^2 = 81$	اطرح 144 من الطرفين
$JE = \pm 9$	خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا؛ إذن نأخذ الجذر التربيعي الموجب فقط.
وبما أن $JE = JF$ فإنّ $JF = 9$

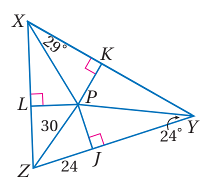
b) $m\angle JAC$

بما أنّ $\overrightarrow{BJ}$ ينصّف $\angle CBE$ ، فإنّ $m\angle CBE = 2m\angle JBE$ ؛ إذن $m\angle CBE = 2(28°) = 56°$.
وبالمثل؛ $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$ ؛ إذن $m\angle DCF = 2(25°) = 50°$.

$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$56° + 50° + m\angle FAE = 180°$	$m\angle CBE = 56°;\ m\angle DCF = 50°$
$106° + m\angle FAE = 180°$	بسّط.
$m\angle FAE = 74°$	اطرح °106 من الطرفين.

وبما أنّ $\overline{AJ}$ ينصّف $\angle FAE$، فإنّ $2m\angle JAC = m\angle FAE$. وهذا يعني أن $m\angle JAC = \frac{1}{2} m\angle FAE$ ،
إذن $m\angle JAC = \frac{1}{2}(74°) = 37°$.

✓ تحقق من فهمك



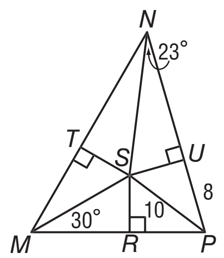
إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle XYZ$، فأوجد القياسين الآتيين:

4A) PK 18

4B) $\angle LZP$ 37°

مثال إضافي

4 إذا كانت S مركز الدائرة الداخلية للمثلث MNP، فأوجد كل قياسٍ ممَّا يأتي:



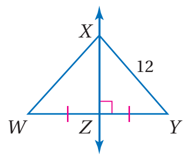
a) SU 6

b) $m\angle SPU$ 37°

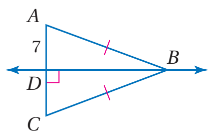
تأكد

المثال 1 أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

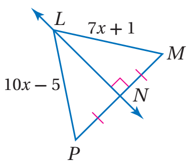
1) XW **12**



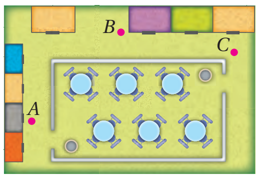
2) AC **14**



3) LP **15**

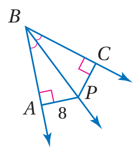


المثال 2 4) **إعلانات:** يقوم أربعة أصدقاء بتوزيع إعلانات على الناس في ساحة سوق تجاري. فحمل ثلاثة منهم ما يستطيعون من الإعلانات وأخذوا مواقعهم كما في الصورة المجاورة. أمّا الرابع فكان يزوِّدهم بالإعلانات. انسخ المواقع A, B, C في دفترك، ثم عيّن مكان الصديق الرابع D على أن يكون على أبعادٍ متساوية من أصدقائه الثلاثة. **انظر الهامش**

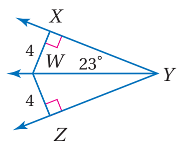


المثال 3 أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

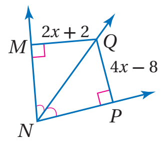
5) CP **8**



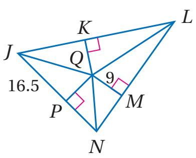
6) $\angle WYZ$ **23°**



7) QM **12**



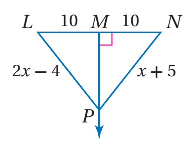
المثال 4 8) إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JLN$، فأوجد طول $\overline{JQ}$. **18.8 تقريبًا**



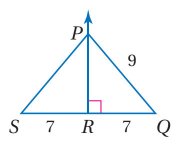
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

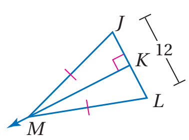
9) NP **14**



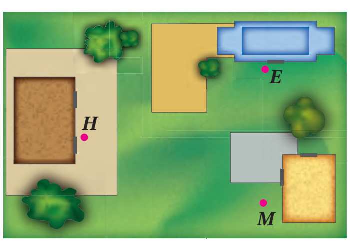
10) PS **9**



11) KL **6**



المثال 2 12) **مدرسة:** يتكون مجمّع مدارس من مدرسة ابتدائية E ومدرسة متوسطة M ومدرسة ثانوية H في المواقع المبيّنة في الصورة المجاورة. انسخ مواقع النقاط E, M, H في دفترك، ثم عيّن موقع موقف الحافلات، على أن يكون على أبعاد متساوية من المدارس الثلاث. **انظر الهامش**



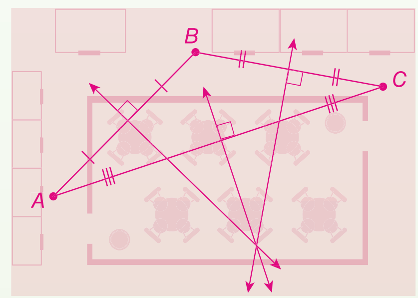
3 التدريب

التقويم التكويني

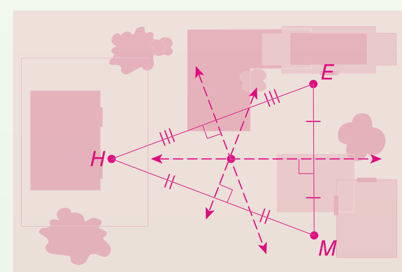
استعمل الأسئلة 1–8 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابة:

4)



12)

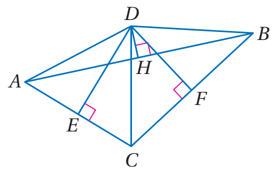


الموقع المطلوب هو مركز الدائرة الخارجية للمثلث الذي رؤوسه هي المدارس الثلاث.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	9-22 ، 35-37 ، 38-47
ضمن المتوسط	9-25 فردي، 27-31 فردي، 33-47
فوق المتوسط	23-46 ، (اختياري: 47)

النقطة D مركز الدائرة التي تمرُّ برؤوس $\triangle ABC$. اكتب القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المعطاة في كل سؤال مما يأتي:

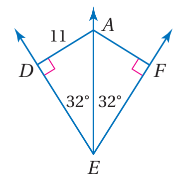


13) $\overline{AD}$ $\overline{CD}, \overline{BD}$

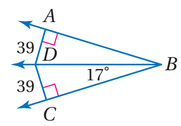
14) $\overline{AH}$ $\overline{BH}$

المثال 3 أوجد قياس كلٍّ ممّا يأتي :

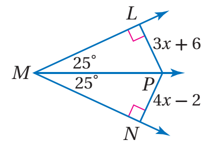
15) AF **11**



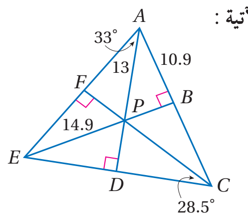
16) $\angle DBA$ **17°**



17) PN **30**



المثال 4 إذا كانت النقطة P مركز الدائرة الداخلية لِـ $\triangle AEC$ ، فأوجد كلًّا من القياسات الآتية :



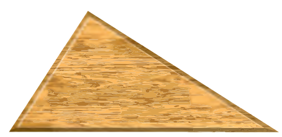
18) PB **7.1 تقريبًا**

19) DE **13.1 تقريبًا**

20) $\angle DAC$ **33°**

21) $\angle DEP$ **28.5°**

22) **تصميم داخلي:** توضع زهرية فضيّة عند مركز سطح الطاولة المبينة في الشكل أدناه، بحيث تكون على أبعاد متساوية من حوافه. انسخ الرسم المجاور في دفترك، وبيّن أين ستضع الزهرية. وضح إجابتك. **انظر الهامش**



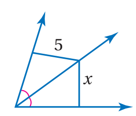
الربط مع الحياة

مهندس التصميم الداخلي

يزيّن مهندس الديكور المكان؛ بحيث يجعله بهيج المنظر ومريحًا للإقامة أو العمل فيه. ويجب على مهندسي الديكور أن يكونوا على معرفة بالألوان وتصاميم الإنارة وتخطيط المكان.

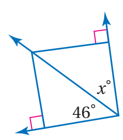
حدّد ما إذا كانت المعطيات في كل شكل مما يأتي كافية لإيجاد قيمة x. وضِّح إجابتك.

23)



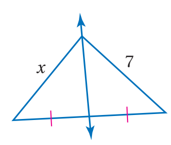
لا؛ يجب أن تعرف ما إذا كانت القطعتان عموديتين على ضلعَي الزاوية.

24)



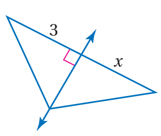
لا؛ يجب أن تعرف ما إذا كانت القطعتان العموديتان على ضلعي الزاوية متساويتين أم لا.

25)



لا؛ يجب أن تعرف ما إذا كان منصّف القطعة عموديًّا عليها.

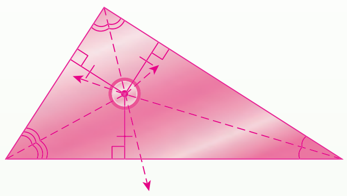
26)



لا؛ يجب أن تعرف ما إذا كان الوتران متساويين أم لا.

إجابات:

22)



أوجد نقطة تلاقي منصّفات زوايا المثلث، التي تمثل مركز الدائرة الداخلية للمثلث. وتبعد أبعادًا متساوية عن أضلاع المثلث.

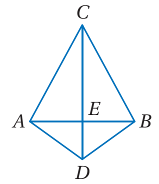
221 الدرس 1-4 المنصّفات في المثلث

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلٍّ من النظريتين الآتيتين: **27, 28 انظر ملحق الإجابات**

27) النظرية 4.2

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$

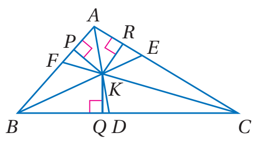
المطلوب: النقطتان C, D تقعان على العمود المنصّف لـ$\overline{AB}$



28) النظرية 4.6

المعطيات: $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ منصّفات لزوايا $\triangle ABC$، $\overline{KP} \perp \overline{AB}$, $\overline{KQ} \perp \overline{BC}$, $\overline{KR} \perp \overline{AC}$

المطلوب: $KP = KQ = KR$



برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريتين الآتيتين: **29, 30 انظر ملحق الإجابات**

29) النظرية 4.1

30) النظرية 4.5

31) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة العمود المنصِّف للقطعة المستقيمة التي إحداثيا نقطتَي طرفَيها هما $A(-3, 1)$, $B(4, 3)$. ووضِّح إجابتك. **انظر الهامش**

32) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 4.4. **انظر ملحق الإجابات**

33) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيَّي مركز الدائرة الخارجية للمثلث الذي إحداثيات رؤوسه هي $A(0, 0), B(0, 6), C(10, 0)$. وضح إجابتك. **انظر الهامش**

34) **المحل الهندسي:** انظر إلى القطعة المستقيمة $\overline{CD}$، وصِف مجموعة النقاط في الفضاء التي يبعد كلٌّ منها بُعدين متساويين عن C, D

مستوى يعامد المستوى الذي تقع فيه القطعة $\overline{CD}$ وينصّف $\overline{CD}$

مسائل مهارات التفكير العليا

35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا، على أن يقع مركز الدائرة الداخلية له داخله، و يقع مركز الدائرة التي تمر برؤوسه خارجه. برّر صحّة رسمك باستعمال مسطرة غير مدرجة وفرجار لإيجاد نقطتَي التلاقي. **انظر الهامش**

تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة من العبارتين الآتيتين صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا. وبرّر إجابتك. **36, 37 انظر ملحق الإجابات**

36) تتقاطع منصّفات زوايا المثلث عند نقطة تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه.

37) في المثلث المتطابق الضلعين، يكون العمود المنصّف للقاعدة منصّفًا لزاوية الرأس المقابلة للقاعدة.

38) **اكتب:** قارن بين الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث ومنصّفات زواياه مبيّنًا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف. وقارن بين نقطتَي التلاقي. **انظر الهامش**

مراجعة المفردات

المحل الهندسي
مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معيّنًا.

إجابات:

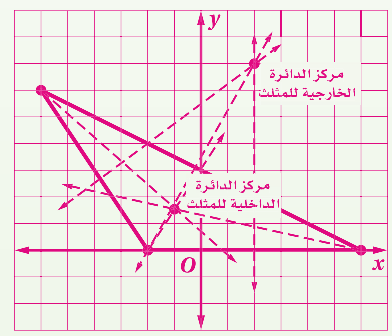
31) $y = -\frac{7}{2}x + \frac{15}{4}$؛ العمود المنصّف لقطعةٍ مستقيمةٍ يمرُّ بمنتصفها .

ونقطة المنتصف هي $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

وميل القطعة المستقيمة يساوي $\frac{2}{7}$، لذلك فميل العمود المنصف يساوي $-\frac{7}{2}$

33) معادلة أحد الأعمدة المنصّفة هي $y = 3$، ومعادلة عمود منصّف آخر هي $x = 5$، ويتقاطع هذان العمودان عند النقطة $(5, 3)$. لذلك فمركز الدائرة الخارجية للمثلث يقع عند النقطة $(5, 3)$.

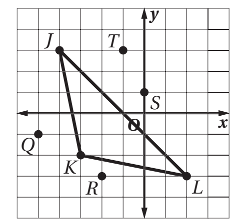
35) إجابة ممكنة:



38) ينصف كلٌّ منهما شيئًا ما، ولكن الأعمدة المنصّفة تنصّف القطع المستقيمة، في حين أن منصّفات الزوايا تنصف الزوايا. ويتقاطع كلٌّ منها عند نقطة. ونقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة هي مركز الدائرة الخارجية للمثلث. أما نقطة تلاقي منصفات الزوايا فهي مركز الدائرة الداخلية للمثلث، والتي تقع داخل المثلث دائمًا، أما مركز الدائرة الخارجية للمثلث، فيمكن أن يقع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.
وكذلك منصِّف الزاوية، لا بد أن يمر برأس المثلث، بينما لا يشترط ذلك في العمود المنصف.
والعمود المنصف لضلع مثلث يمر بمنتصفه ويكون عموديًّا عليه، بينما لا يشترط ذلك لمنصف زاويةٍ.

تدريب على اختبار

39) بأيّ نقطتين يمر العمود المنصّف للضلع $\overline{JL}$ في $\triangle JKL$؟ **D**



A T, K **C** J, R

B L, Q **D** S, K

40) إذا كانت $x \neq -3$، فإن $\frac{3x+9}{x+3}$ يساوي: **D**

A $x+9$

B $x+3$

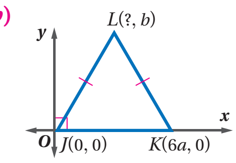
C x

D 3

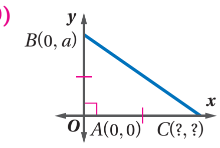
مراجعة تراكمية

عيّن الإحداثي المجهول في كلٍّ من المثلثات الآتية : (الدرس 3-7)

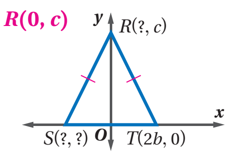
41) $L(3a, b)$



42) $C(a, 0)$



43) $S(-2b, 0), R(0, c)$



أوجد البعد بين المستقيم والنقطة المعطاة في كلٍّ مما يأتي : (الدرس 6-2)

44) $y = 5, (-2, 4)$ **1**

45) $y = 2x + 2, (-1, -5)$ $\sqrt{5}$

46) $2x - 3y = -9, (2, 0)$ $\sqrt{13}$

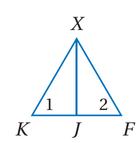
استعد للدرس اللاحق

47) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين: انظر الهامش

المعطيات: $\triangle XKF$ متطابق الأضلاع.

$\overline{XJ}$ تنصّف $\angle X$.

المطلوب: J نقطة منتصف $\overline{KF}$.



4 التقويم

فهم الرياضيات: اطلب إلى الطلاب رسم شكل خماسي غير منتظم، ثم وصف طريقة إيجاد مركز ثقله.

إجابة:

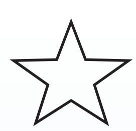
47) **برهان:**

العبارات	المبررات
1) $\triangle XKF$ متطابق الأضلاع	1) معطى
2) $\angle 1 \cong \angle 2$	2) المثلث المتطابق الأضلاع يكون متطابق الزوايا
3) $\overline{KX} \cong \overline{FX}$	3) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
4) $\overline{XJ}$ تنصّف $\angle X$	4) معطى
5) $\angle KXJ \cong \angle FXJ$	5) تعريف منصّف الزاوية
6) $\triangle KXJ \cong \triangle FXJ$	6) ASA
7) $\overline{KJ} \cong \overline{FJ}$	7) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
8) J نقطة منتصف $\overline{KF}$	8) تعريف نقطة المنتصف

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: من خلال العمل في مجموعات اطلب إلى الطلاب أن يبحثوا عن المصطلح الهندسي الذي يمثله مركز النجمة المجاورة، ويوضّحوا إجاباتهم.



إجابة ممكنة: مركز الدائرة الخارجية للمثلث، فمركز الدائرة الخارجية للمثلث يكون على أبعادٍ متساوية من رؤوسه.

الفصل 4

مصادر المعلم للأنشطة الصفّية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 4

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) دون

الاسم ______________ التاريخ ________

4-1 تدريبات إعادة التعليم

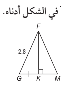
المنصّفات في المثلث

الأعمدة المنصّفة:

العمود المنصّف لأحد أضلاع مثلث هو مستقيم، أو قطعة مستقيمة، أو مستوى يقطع ضلع المثلث عند منتصفه، ويكون عموديًّا عليه، وهذه بعض النظريات المتعلقة بالأعمدة المنصّفة.

نظريّة العمود المنصّف	كلّ نقطة على العمود المنصّف لقطعةٍ مستقيمةٍ، تكون على بُعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة.
عكس نظريّة العمود المنصّف	كلّ نقطةٍ تبعد بُعدين متساويين عن طرفَي قطعةٍ مستقيمةٍ تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة.
نظريّة مركز الدائرة الخارجية للمثلث	تلتقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلثٍ في نقطةٍ تبعد أبعادًا متساوية عن رؤوس المثلث، وتُسمّى مركز الدائرة الخارجية للمثلث.

مثال 1 أوجد طول $\overline{FM}$ في الشكل أدناه.

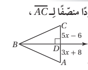


$\overline{FK}$ عمود منصف للضلع $\overline{GM}$

إذن، $FG = FM$

$2.8 = FM$

مثال 2 إذا كان $\overrightarrow{BD}$ عمودًا منصّفًا لـ $\overline{AC}$، فأوجد قيمة x.



$AD = DC$ نظرية العمود المنصف

$3x + 8 = 5x - 6$ عوّض

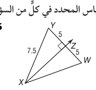
$14 = 2x$ حل المعادلة

$7 = x$

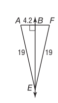
تمارين

أوجد القياس المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

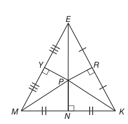
1) XW **7.5**



2) BF **4.2**



النقطة P مركز الدائرة الخارجية لـ ΔEMK، اكتب جميع القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المستقيمة المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية:



3) $\overline{MY}$ $\overline{EY}$

4) $\overline{KP}$ $\overline{EP}, \overline{MP}$

5) $\overline{MN}$ $\overline{NK}$

6) $\overline{ER}$ $\overline{RK}$

الصف: الأول الثانوي | 6 | الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (7) دون

الاسم ______________ التاريخ ________

4-1 تدريبات إعادة التعليم **(تتمة)**

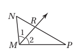
المنصفات في المثلث

منصفات الزوايا:

منصف الزاوية هو قطعة مستقيمة، أو نصف مستقيم، أو مستقيم يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين، وهذه بعض خصائص منصفات الزوايا:

نظريّة منصّف الزاوية	كلّ نقطة واقعة على منصّف زاوية، تكون على بُعدين متساويين عن ضلعَيها.
عكس نظرية منصّف الزاوية	كلّ نقطة واقعة داخل زاوية، وتبعد بُعدين متساويين عن ضلعَيها، تقع على منصّف تلك الزاوية.
نظريّة مركز الدائرة الداخليّة للمثلث	تلتقي منصّفات زوايا المثلث في نقطة واحدة، تبعد أبعادًا متساوية عن أضلاع ذلك المثلث، وتُسمَّى مركز الدائرة الداخلية للمثلث.

مثال 1 $\overrightarrow{MR}$ ينصّف $\angle NMP$، إذا كان: $m\angle 1 = 5x + 8$، وَ $m\angle 2 = 8x - 16$، فأوجد قيمة x.



$m\angle 1 = m\angle 2$ تعريف منصف الزاوية

$5x + 8 = 8x - 16$ عوّض

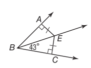
$24 = 3x$ اجمع $16-5x$ للطرفين

$8 = x$ اقسم الطرفين على 3

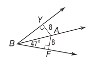
تمارين

أوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:

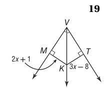
1) $\angle ABE$ **43°**



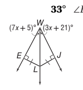
2) $\angle YBA$ **47°**



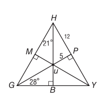
3) MK **19**



4) $\angle EWL$ **33°**



النقطة U هي مركز الدائرة الداخلية لـ ΔGHY، أوجد كلّ قياسٍ مما يأتي:



5) MU **5**

6) $m\angle UGM$ **28°**

7) $m\angle PHU$ **21°**

8) HU **13**

الصف: الأول الثانوي | 7 | الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

تدريبات المهارات (8) دون ضمن

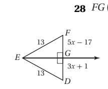
الاسم ______________ التاريخ ________

4-1 تدريبات المهارات

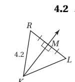
المنصّفات في المثلث

أوجد كلَّ قياس ممَّا يأتي:

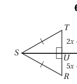
1) FG **28**



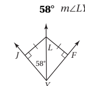
2) KL **4.2**



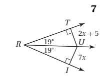
3) TU **60**



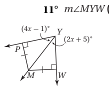
4) $m\angle LYF$ **58°**



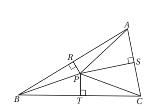
5) IU **7**



6) $m\angle MYW$ **11°**



النقطة P مركز الدائرة الخارجية لـ ΔABC، اكتب جميع القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المستقيمة المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية:



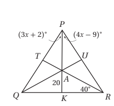
7) $\overline{BR}$ $\overline{AR}$

8) $\overline{CS}$ $\overline{AS}$

9) $\overline{BP}$ $\overline{PA}, \overline{PC}$

النقطة A مركز الدائرة الداخلية لـ ΔPQR

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:



10) $m\angle ARU$ **40°**

11) AU **20**

12) $m\angle QPK$ **35°**

الصف: الأول الثانوي | 8 | الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

تدريبات حل المسألة (9) دون ضمن فوق

الاسم ______________ التاريخ ________

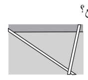
4-1 تدريبات حلّ المسألة

المنصّفات في المثلث

1) **آبارٌ:** لدى نادر قطعة أرض مثلثة الشكل، زرع على محيطها أشجار، إذا أراد نادر أن يحفر بئرًا في المزرعة، بحيث تكون متساوية البعد عن أضلاع قطعة الأرض، فأين يحفر هذه البئر؟

عند مركز الدائرة الداخلية للمثلث.

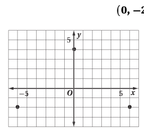
2) **نزهة:** ذهب مروان وباسم في نزهة إلى حديقة عامّة مثلثة الشكل، وأحد أضلاعها محاذ لرصيف، والضلعان الآخران محاذيان لشارعين عامّين كما في الشكل أدناه. إذا أراد الصديقان أن يجلسا في موقع يكون على أبعاد متساوية من الرصيف والشارعين. فعند أيِّ نقطة في الحديقة يقع هذا الموقع؟



عند مركز الدائرة الداخلية للحديقة

3) **منازل:** لدى محمود ثلاثة أبناء. والشكل أدناه يبيّن مواقع منازل الأبناء الثلاثة على خريطة في مستوى إحداثيّ. ويرغب محمود في الانتقال إلى منزل يكون على أبعاد متساوية من منازل أبنائه الثلاثة. ما إحداثيّات الموقع الذي يبعُد البُعد نفسه عن منازل الأبناء الثلاثة؟

(0, −2)



4) **بيوت:** نظر تركي إلى خريطة الحيّ، فلاحظ أن بيته وبيت صديقيه مساعد وخالد تكوّن رؤوس مثلث. وعندما وضع الخريطة على شبكة إحداثيّة، كان بيت تركي عند النقطة $(1, 3)$، وبيت مساعد عند النقطة $(5, -1)$، وبيت خالد عند النقطة $(4, 5)$، فأين يمكن أن يلتقي الأصدقاء الثلاثة، إذا غادر كلّ واحد منهم بيته في اللحظة نفسها، وسار على الطريق الأقصر من بيته إلى الضلع المقابل؟

$\left(\frac{11}{5}, \frac{16}{5}\right)$

5) **ملاعب:** رسم الطلاب مثلثًا في ملعب المدرسة.

a) حدّد أحد الطلاب مركز الدائرة الداخلية للمثلث، فوجده هو مركز دائرته الخارجية. فما نوع هذا المثلث؟

مثلث متطابق الأضلاع

b) إذا عدّل طالب آخر شكل المثلث، بحيث وقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث خارجه، وبقي مركز دائرته الداخلية داخله، فما نوع المثلث الناتج عن هذا التعديل؟

مثلث منفرج الزاوية

الصف: الأول الثانوي | 9 | الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 4

دون دون المتوسط   ضمن ضمن المتوسط   فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (10) ضمن فوق

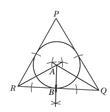
الاسم ______________ التاريخ ________

4-1 التدريبات الإثرائيّة

الدائرة الداخليّة والدائرة الخارجية للمثلث

تتقاطع منصّفات زوايا المثلث في نقطةٍ واحدةٍ تُسمّى مركز الدائرة الداخليّة للمثلث، وهي مركز الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلث الثلاثة، وتقع هذه الدائرة داخل المثلث، ما عدا النقاط الثلاث التي تمس الأضلاع عندها، ويقال إن هذه الدائرة محاطة بالمثلث.

اتبع الخطوات الآتية لرسم الدائرة الداخلية لِـ ΔPQR مستعملًا فرجارًا ومسطرةً:



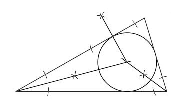
الخطوة 1: أنشئ منصِّفَي $\angle R$ و $\angle Q$، وسمّ نقطة تقاطعهما A.

الخطوة 2: أنشئ من A قطعة مستقيمة عموديّة على $\overline{RQ}$، وسمّ نقطة تقاطعها مع $\overline{RQ}$ النقطة B.

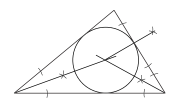
الخطوة 3: استعمل الفرجار لرسم الدائرة التي مركزها A، وطول نصف قطرها يساوي AB .

ارسم الدائرة الداخليّة في كلٍّ من المثلثين الآتيين:

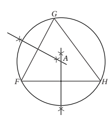
1)



2)



تتقاطع الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلثٍ في نقطةٍ واحدةٍ أيضًا تُسمّى مركز الدائرة التي تمرّ برؤوس المثلث، وتقع هذه الدائرة خارج المثلث باستثناء رؤوس المثلث.



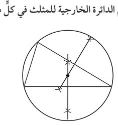
3) اتّبع الخطوات الآتية لرسم الدائرة الخارجية لِـ ΔFGH مستعملًا فرجارًا ومسطرةً.

الخطوة 1: ارسم العمودين المنصّفين للضلعين $\overline{FG}$ و $\overline{FH}$، وسمّ نقطة تقاطعهما A.

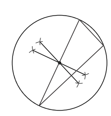
الخطوة 2: ارسم الدائرة التي مركزها A، وطول نصف قطرها يساوي AF .

ارسم الدائرة الخارجية للمثلث في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

4)



5)



الصف: الأول الثانوي   10   **الفصل ٤ :** العلاقات في المثلث

كتاب التمارين (27) دون ضمن فوق

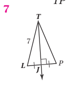
الفصل الرابع: العلاقات في المثلث

4 - 1 المنصّفات في المثلث

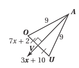
الفصل الرابع العلاقات في المثلث

أوجد كل قياس مما يأتي :

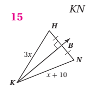
1) TP **7**



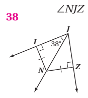
2) VU **16**



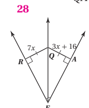
3) KN **15**



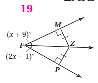
4) $\angle NJZ$ **38**



5) QA **28**

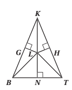


6) $\angle MFZ$ **19**



النقطة L مركز الدائرة الخارجية لِـ $\triangle BKT$.

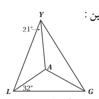
اكتب جميع القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المعطاة في كل سؤال مما يأتي:



7) $\overline{BN}$ $\overline{NT}$

8) $\overline{BL}$ $\overline{KL}, \overline{LT}$

إذا كانت النقطة A مركز الدائرة الداخلية لِـ $\triangle LYG$ ، فأوجد قياس كلٍّ من الزاويتين الآتيتين :



9) $\angle YLA$ $32°$

10) $\angle YGA$ $37°$

يعين مركز الدائرة الداخلية لمثلث وهو ملتقى منصّفات زوايا المثلث.

11) **هندسة:** حديقة منزلية مثلثة الشكل قياسات زواياها $50°$, $70°$, $60°$. ويريد مهندس زراعي أن يثبِّت عمود إنارة في مكان يكون على أبعادٍ متساوية من حواف الحديقة، فكيف يمكنه تعيين موقع العمود؟

27

استكشاف
4-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف
إنشاء القطع المتوسطة والارتفاعات لمثلث.

المواد اللازمة
- فرجار
- مسطرة غير مدرَّجة

إرشادات للتدريس
يوضّح النشاط إنشاءين هندسيين مختلفين على مثلث، يمكن للطلاب استعمال ورق شفاف لرسم مثلثين حادّي الزوايا مختلفي الأضلاع، أطوال أضلاعهما متساوية وقياسات زواياهما متساوية في ثلاثة مواقع مختلفة على الورقة. وعند تنفيذ الإنشائين الهندسيين يمكنهم ملاحظة الفرق بين القطع المتوسطة والارتفاعات للمثلث نفسه.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة
وزّع الطلاب مجموعات ثلاثية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إلى كل طالب أن ينفذ خطوة من خطوات أحد الإنشاءين الهندسيين، ثم يتبادلوا الأدوار.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل السؤالين 1 و 2.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤالين 1 و 2؛ للتحقق من استيعاب الطلاب طريقة إنشاء القطع المتوسطة والارتفاعات.

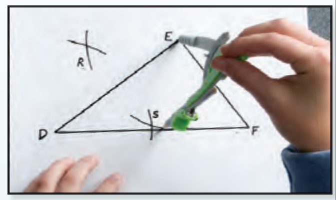
معمل الهندسة : استكشاف

4-2 إنشاء القطع المتوسطة والارتفاعات
Constructing Medians and Altitudes

القطعة المتوسطة في مثلث هي قطعة مستقيمة، طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس. ويمكنك استعمال طريقة تعيين نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة لإنشاء قطعة متوسطة.

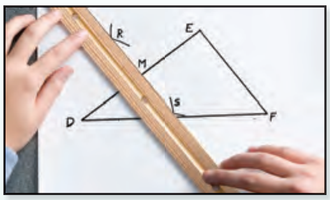
إنشاء هندسي 1 قطعة متوسطة لمثلث

الخطوة 1:



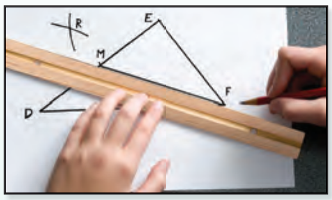
ثبت الفرجار عند الرأس D ثم عند الرأس E؛ لترسم أقواسًا متقاطعة فوق $\overline{DE}$ وتحتها، وسمّ نقطتَي التقاطع R, S.

الخطوة 2:



استعمل مسطرة لإيجاد نقطة تقاطع $\overline{RS}, \overline{DE}$، وسمّ نقطة المنتصف M.

الخطوة 3:

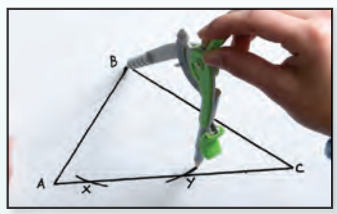


ارسم مستقيمًا يمرّ بالنقطتين F, M، فتكون $\overline{FM}$ قطعة متوسطة لـ $\triangle DEF$.

ارتفاع المثلث هو قطعة مستقيمة من أحد رؤوس المثلث إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل، وتكون عموديّةً عليه.

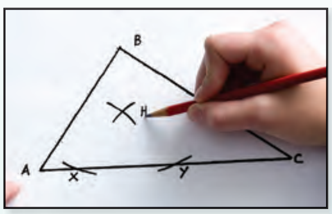
إنشاء هندسي 2 ارتفاع المثلث

الخطوة 1:



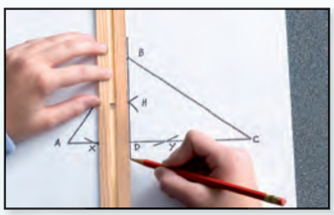
ثبّت الفرجار عند الرأس B، وارسم قوسين يقطعان $\overline{AC}$ في النقطتين X, Y.

الخطوة 2:



عدّل فتحة الفرجار على أن تكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$ وثبّته عند X، وارسم قوسًا فوق $\overline{AC}$، ثم استعمل الفتحة نفسها وارسم قوسًا آخر من Y، وسمّ نقطة تقاطع القوسين H.

الخطوة 3:



استعمل مسطرة غير مدرّجة لرسم $\overleftrightarrow{BH}$، وسمّ نقطة تقاطع $\overline{AC}$, $\overline{BH}$ بالحرف D، فتكون $\overline{BD}$ ارتفاعًا لـ $\triangle ABC$ وهي عموديّة على $\overline{AC}$.

التمثيل والتحليل: 1, 2) انظر الهامش

1) أنشئ القطعتين المتوسطتين على الضلعين الآخرين في $\triangle DEF$، ماذا تلاحظ بالنسبة للقطع المتوسطة للمثلث؟
2) أنشئ الارتفاعين الآخرين على الضلعين الآخرين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ؟

من المحسوس إلى المجرّد
اطلب إلى الطلاب أن يقارنوا نقطتَي تقاطع القطع المتوسطة والارتفاعات بمركز الدائرة للمثلث، والدائرة الخارجية للمثلث.

إجابات
1) تتقاطع في نقطةٍ واحدةٍ.
2) تتقاطع في نقطةٍ واحدةٍ.

4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث
Medians and Altitudes of Triangle

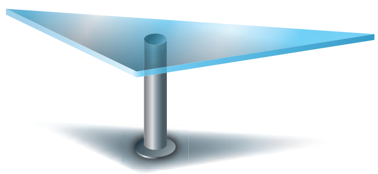
فيما سبق:
درستُ الأعمدة المنصّفة ومنصفات الزوايا في المثلث واستعمالها.

والآن:
- أتعرّف القطع المتوسطة في المثلث وأستعملها.
- أتعرّف الارتفاعات في المثلث وأستعملها.

المفردات:
القطعة المتوسطة
median
مركز المثلث
centroid
الارتفاع
altitude
ملتقى ارتفاعات المثلث
orthocenter

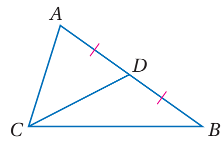
www.obeikaneducation.com

لماذا؟



صمّم مهندس طاولة خاصة لأحد الزبائن، يتكون سطحها من لوح زجاجي مثلث الشكل يرتكز على دعامة واحدة، ولتحقيق ذلك فهو في حاجة إلى إيجاد النقطة التي يضع عندها الدعامة لكي يحافظ على اتزانها، ويمكن إيجاد هذه النقطة برسم القطع المتوسطة، وتعيين نقطة تقاطعها.

القطع المتوسطة: **القطعة المتوسطة** لمثلث قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.



$\overline{CD}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$.

ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتلاقى في نقطة تُسمّى **مركز المثلث**، وتقع داخله دائمًا.

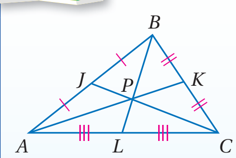
نظرية 4.7 نظرية مركز المثلث

أضف إلى مطويتك

يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثُلُثَي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

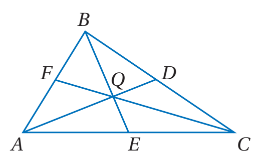
مثال: إذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإنّ

$$AP = \frac{2}{3}AK,\ BP = \frac{2}{3}BL,\ CP = \frac{2}{3}CJ$$



مثال 1 استعمال نظرية مركز المثلث

إذا كانت النقطة Q مركز $\triangle ABC$، $BE = 9$.
فأوجد كلًّا من QE , BQ .



$BQ = \frac{2}{3}BE$	نظرية مركز المثلث
$= \frac{2}{3}(9) = 6$	$BE = 9$
$BQ + QE = 9$	جمع أطوال القطع المستقيمة
$6 + QE = 9$	$BQ = 6$
$QE = 3$	اطرح 6 من الطرفين

تحقق من فهمك

في $\triangle ABC$ أعلاه، إذا كان $FC = 15$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين :

1A) FQ 5 **1B)** QC 10

4-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-4

تحديد الأعمدة المنصّفة ومنصفات زوايا المثلث واستعمالها.

الدرس 2-4

تعرُّف القطع المتوسطة في المثلث واستعمالها.

تعرُّف الارتفاعات في المثلث واستعمالها.

ما بعد الدرس 2-4

تعرُّف خصائص المتباينات وتطبيقها على زوايا مثلثٍ وأضلاعه.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- أين تقع نقطة اتزان سطح الطاولة؟ نقطة تقاطع القطع المتوسطة.
- هل تقع نقطة الاتزان على سطح الطاولة من الداخل، أم على الأضلاع، أم خارجها؟ تقع نقطة الاتزان على سطح الطاولة من الداخل.

مصادر الدرس 2-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (228)	• تنويع التعليم، ص (228)	• تنويع التعليم، ص (228)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (28)	• كتاب التمارين، ص (28)	• كتاب التمارين، ص (28)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (11) • تدريبات المهارات، ص (13) • تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)	• تدريبات حل المسألة، ص (14) • التدريبات الإثرائية، ص (15)

القطع المتوسطة

المثالان 1 , 2 يبيّنان كيفية استعمال نظريّة مركز المثلث لإيجاد أطوال القطع المستقيمة.

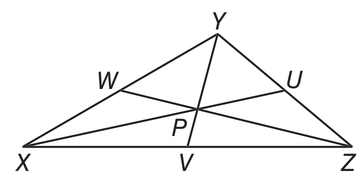
المثال 3 يبيّن كيفية إيجاد مركز المثلث في المستوى الإحداثي.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

1 إذا كانت النقطة P مركز $\triangle XYZ$ و $YV = 12$. فأوجد YP و PV



$YP = 8;\ PV = 4$

التعليم باستعمال التقنيات

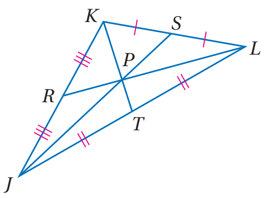
السبورة التفاعلية: حل مثالًا على السبورة، واحفظ الحل وانشر ملاحظاتك على صفحة الفصل على شبكة الإنترنت، كي تكون مرجعًا إضافيًّا للطلاب خارج غرفة الفصل.

إرشادات للدراسة

استعمال الحسّ العددي
في المثال 2، يمكنك أيضًا استعمال الحسّ العددي لإيجاد KP. بما أن $KP = \frac{2}{3}KT$، فإن $PT = \frac{1}{3}KT$ وكذلك $KP = 2PT$؛ لذا إذا كان $PT = 2$ فإن $KP = 2(2) = 4$.

مثال 2 استعمال نظرية مركز المثلث

في $\triangle JKL$، إذا كان $PT = 2$، فأوجد KP.



بما أنّ $\overline{JR} \cong \overline{RK}$، فإن R نقطة منتصف $\overline{JK}$، وتكون $\overline{LR}$ قطعة متوسطة في $\triangle JKL$، وبالمثل نستنتج أن S, T هما نقطتا منتصفَي $\overline{KL}, \overline{LJ}$ على الترتيب؛ لذا فإن $\overline{KT}, \overline{JS}$ قطعتان متوسطتان في $\triangle JKL$، لذلك فالنقطة P هي مركز $\triangle JKL$.

$KP = \frac{2}{3}KT$	نظرية مركز المثلث
$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$	جمع القطع المستقيمة والتعويض
$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$	$PT = 2$
$KP = \frac{2}{3}KP + \frac{4}{3}$	خاصيّة التوزيع
$\frac{1}{3}KP = \frac{4}{3}$	اطرح $\frac{2}{3}KP$ من الطرفين
$KP = 4$	اضرب الطرفين في 3

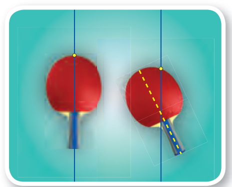
تحقق من فهمك

في $\triangle JKL$ أعلاه، إذا كان $RP = 3.5$, $JP = 9$، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين:

2A) PL 7

2B) PS 4.5

جميع المضلعات لها نقطة اتزان، وهذه النقطة تعتبر مركز ثقل الجسم، وهي النقطة التي يظهر فيها الجسم متوازنًا تحت تأثير الجاذبية الأرضية.



الربط مع الحياة

نقطة الاتزان (التعليق)
يمكن أن تحدد نقطة الاتزان لأي جسم، سواءً أكان على شكل مثلث أو غيره كما يأتي:
علق الجسم من أي نقطة، وعندما يتوقف عن التأرجح، ارسم مستقيمًا رأسيًا من نقطة التعليق، ثم علقه مرة أخرى من نقطة ثانية وارسم مستقيمًا رأسيًا منها، فتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي نقطة الاتزان.

مثال 3 من واقع الحياة إيجاد المركز في المستوى الإحداثي

فن الأداء: في مهرجان رياضي يُخطط عبدالعزيز لاتزان قطع مثلثة من المعدن كما في الشكل المجاور، وعندما وُضع مثلث على مستوى إحداثي كانت رؤوسه عند النقاط $(1, 10), (5, 0), (9, 5)$.
ما إحداثيات النقطة التي يجب على عبدالعزيز أن يثبّت المثلث عندها حتى يحفظ متوازنًا؟ وضح إجابتك.

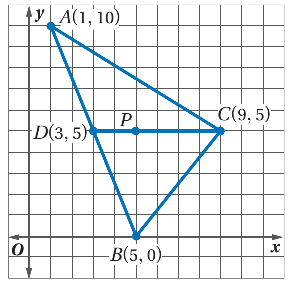
افهم: تحتاج إلى إيجاد مركز المثلث من خلال الإحداثيات المعطاة، وستكون هذه هي النقطة التي سيتزن عندها المثلث.

خطِّط: ارسم المثلث الذي رؤوسه $A(1, 10), B(5, 0), C(9, 5)$، وبما أن مركز المثلث هو النقطة التي تتلاقى عندها القطع المتوسطة للمثلث؛ إذن استعمل نظرية نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث، فيكون مركز المثلث واقعًا على القطعة المتوسطة وعلى بُعدٍ من الرأس يساوي ثُلُثَي طول القطعة المتوسطة.

إرشادات للمعلم الجديد

استعمال الحس المكاني: في حل مثال 3، وجِّه الطلاب لاختيار الضلع الذي تتوقع أن تكون القطعة المتوسطة المرسومة إليه في وضع أفقي أو عمودي، وذلك لسهولة إيجاد النقطة التي تقع عند ثُلُثَي القطعة من الرأس.

حل: مثّل $\triangle ABC$ بيانيًّا .



أوجد نقطة المنتصف D للضلع $\overline{AB}$ الذي طرفاه $A(1, 10)$, $B(5, 0)$.

$$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$$

عيّن النقطة D ، ولاحظ أن $\overline{DC}$ أفقيّة، والمسافة من $D(3, 5)$ إلى $C(9, 5)$ تساوي $9 - 3$ ، أيْ 6 وحداتٍ.

فإذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإنّ $PC = \frac{2}{3}DC$ ؛ ولذا يقع المركز على بُعد $\frac{2}{3}(6)$ ، أو 4 وحدات إلى اليسار من C، وتكون إحداثيات P هي $(9 - 4, 5)$ أو $(5, 5)$.

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(5, 5)$.

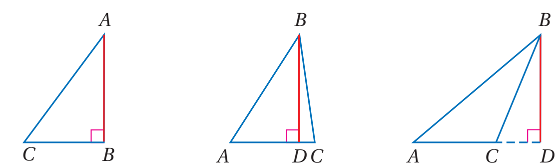
تحقق: استعمل قطعة متوسطة أخرى للتحقق من صحّة إجابتك. بما أنّ نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي $F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right)$ أو $F(5, 7.5)$ ، وأن $\overline{BF}$ رأسيّة فإن المسافة من B إلى F تساوي $7.5 - 0$ ؛ أيْ 7.5 وحداتٍ، وعلى ذلك يكون $\overline{PB}$ يساوي $\frac{2}{3}(7.5)$ أيْ 5، إذن P تقع على بعد 5 وحداتٍ إلى أعلى من B.

وتكون إحداثيات P هي $(5, 0+5)$ أي $(5, 5)$. ✓

تحقق من فهمك

3) تقع رؤوس مثلث آخر عند النقاط $(0, 4)$, $(6, 11.5)$, $(12, 1)$، فما إحداثيات النقطة التي يتزن عندها هذا المثلث؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش

ارتفاعات المثلث: **ارتفاع المثلث** هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، ويمكن أن يقع الارتفاع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



$\overline{BD}$ هو الارتفاع من B إلى $\overline{AC}$.

$\overline{AB}$ هو الارتفاع إلى $\overline{CB}$.

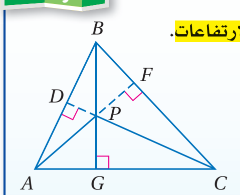
ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات، تتلاقى المستقيمات التي تحويها في نقطة مشتركة.

مفهوم أساسي — ملتقى الارتفاعات

أضف إلى مطويتك

تتقاطع المستقيمات التي تحوي ارتفاعات أيّ مثلث في نقطة تُسمى **ملتقى الارتفاعات**.

مثال: تتقاطع المستقيمات التي تحوي الارتفاعات $\overline{AF}, \overline{CD}, \overline{BG}$ عند النقطة P ، وهي ملتقى الارتفاعات للمثلث ABC .



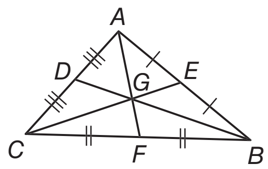
قراءة الرياضيات

ارتفاع المثلث

يطلق اسم الارتفاع على القطعة وعلى طولها، ويفهم المقصود من سياق المسألة. ويستعمل الارتفاع لحساب مساحة المثلث.

مثالان إضافيان

2 في $\triangle ABC$، إذا كان $CG = 4$، فأوجد GE.



2

3 **نحت:** صمّم نحّات تحفةً مثلثة الشكل متزنة على قمّة عمود، إذا كانت رؤوس التحفة على المستوى الإحداثي عند النقاط $(3, 0)$, $(1, 4)$ و $(3, 8)$. فما إحداثيات النقطة التي يضع النحّات العمود تحتها كي تتزن التحفة؟

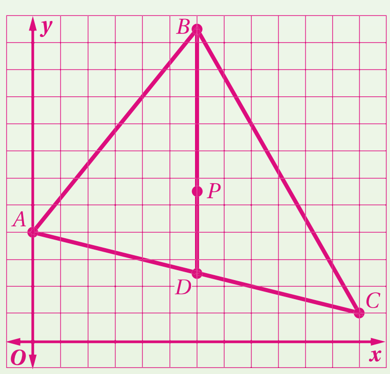
$\left(\frac{7}{3}, 4\right)$

تنبيه!

ملتقى الارتفاعات: يمكن ألا تقع نقطة التقاء ارتفاعات المثلث داخله.

إجابة (تحقق من فهمك):

3) $(6, 5.5)$



نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي $D\left(\frac{0+12}{2}, \frac{4+1}{2}\right)$ أو $D(6, 2.5)$.

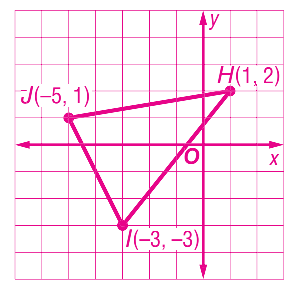
وبما أنّ $\overline{BD}$ رأسيّة، فإن المسافة من B إلى D تساوي $11.5 - 2.5 = 9$ ، وبما أنّ $PB = \frac{2}{3}(9) = 6$ ، فإن P تبعد 6 وحداتٍ أسفل B؛ إذن إحداثيات النقطة P هي $(6, 11.5 - 6)$ أو $(6, 5.5)$.

ارتفاعات المثلث

المثال 4 يبيّن كيفية إيجاد نقطة ملتقى ارتفاعات المثلث في المستوى الإحداثي.

مثال إضافي

4 **هندسة إحداثية:** إذا كانت إحداثيات رؤوس $\triangle HIJ$ هي $H(1, 2), I(-3, -3), J(-5, 1)$، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.

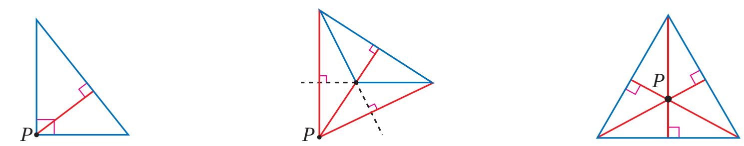


$\left(-3\frac{6}{13}, -\frac{3}{13}\right)$

المحتوى الرياضي

مركز المثلث وملتقى الارتفاعات: في المثلث الحادّ الزوايا، يمكن أن يكون مركز المثلث وملتقى الارتفاعات هما النقطة نفسها، ويكون ذلك فقط عندما تكون كل قطعة متوسطة للمثلث هي نفسها عمود منصف لضلع المثلث.

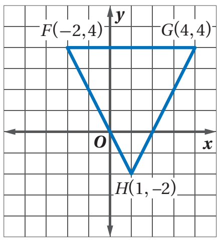
يمكن أن تلتقي الارتفاعات في مثلث داخله أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث حاد الزوايا   مثلث منفرج الزاوية   مثلث قائم الزاوية

مثال 4 إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

هندسة إحداثيّة: إذا كانت رؤوس $\triangle FGH$ هي $F(-2, 4), G(4, 4), H(1, -2)$، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.



الخطوة 1: مثّل $\triangle FGH$ بيانيًّا. ولإيجاد ملتقى الارتفاعات، أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين من الارتفاعات الثلاثة.

الخطوة 2: أوجد معادلة الارتفاع من F إلى $\overline{GH}$

بما أن ميل $\overline{GH}$ يساوي $\frac{4-(-2)}{4-1}=2$

فإنّ ميل الارتفاع العمودي على $\overline{GH}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-2)]$ $(x_1, y_1) = F(-2, 4), m = -\frac{1}{2}$

$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$ بسّط

$y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1$ خاصية التوزيع

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ اجمع 4 إلى الطرفين

ثم أوجد معادلة الارتفاع من G إلى $\overline{FH}$.

بما أن ميل $\overline{FH}$ يساوي $\frac{-2-4}{1-(-2)} = -2$، فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{FH}$ يساوي $\frac{1}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$ $(x_1, y_1) = G(4, 4), m = \frac{1}{2}$

$y - 4 = \frac{1}{2}x - 2$ خاصية التوزيع

$y = \frac{1}{2}x + 2$ اجمع 4 إلى الطرفين

الخطوة 3: حل نظام المعادلتين الناتج $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

اجمع المعادلتين لتحذف x، فينتج أن $2y = 5$، ومن ثم فإن $y = \frac{5}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + 2$ معادلة الارتفاع من G

$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2$ $y = \frac{5}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$ اطرح $\frac{4}{2}$، أو 2 من الطرفين

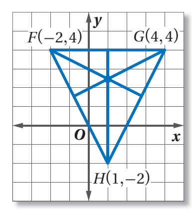
$1 = x$ اضرب الطرفين في 2

إذن إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle FGH$ هي $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ أو $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$

إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية

استعمل ركن ورقة لرسم ارتفاعات المثلث.



نقطة التقاطع تقع تقريبًا عند $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$؛ لذا فالجواب معقول.

تنويع التعليم

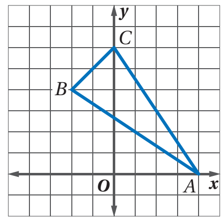
دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون / المكانيّون: اطلب إلى الطلاب أن يثنوا ورقةً دائريةً أربعة قطاعات، ويكتبوا عليها العناوين الآتية: مركز الدائرة الخارجية للمثلث، مركز الدائرة الداخلية للمثلث، مركز المثلث، ملتقى الارتفاعات. واطلب إليهم أن يرسموا مثلثًا في كل قطاع على أن تكون المثلثات متطابقة، وأن يستعملوا مهاراتهم المكانية لتحديد المواقع التقريبيّة لمركز الدائرة الخارجية للمثلث، مركز الدائرة الداخلية للمثلث، مركز المثلث، ملتقى الارتفاعات في المثلث، ثم يستعملوا مسطرة وفرجارًا ومنقلةً؛ ليروا كم كانت تقديراتهم قريبةً من المواقع الصحيحة.

تحقق من فهمك

4) أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ في الشكل المجاور.

$\left(-\frac{4}{5}, 4\frac{4}{5}\right)$



3 التدريب

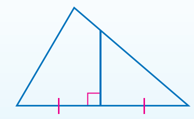
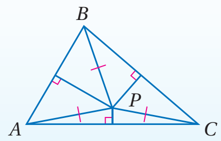
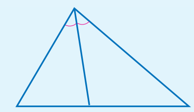
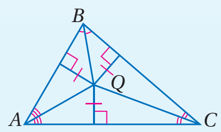
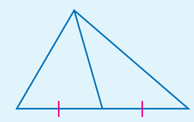
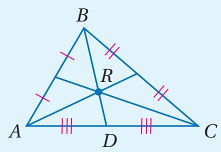
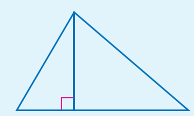
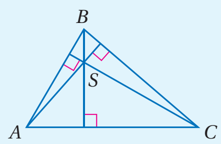
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 4–1؛ للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

ملخص المفاهيم

قطع مستقيمة ونقاط خاصّة في المثلث

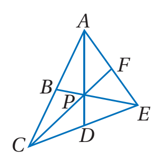
أضف إلى مطويتك

المفهوم	مثال	نقطة التلاقي	الخاصّية	مثال
العمود المنصّف		مركز الدائرة الخارجية للمثلث	P مركز الدائرة الخارجية لـ $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث.	
منصّف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية للمثلث	Q مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.	
القطعة المتوسطة		مركز المثلث	R مركز $\triangle ABC$، وتبعد عن كل رأس ثُلُثَي طول القطعة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.	
الارتفاع		ملتقى الارتفاعات	تلتقي المستقيمات التي تحوي ارتفاعات $\triangle ABC$ عند النقطة S ، وتسمى ملتقى الارتفاعات.	

تأكد

المثالان 1, 2

إذا كانت النقطة P مركز $\triangle ACE$، $PF = 6, AD = 15$.
فأوجد كلّ طول مما يأتي:



1) PC 12

2) AP 10

المثال 3

3) **تصميم داخلي:** بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث عند النقاط $(3, 6), (5, 2), (7, 10)$.
فعند أيّ نقطة ستوضع الدعامة؟ $(5, 6)$

المثال 4

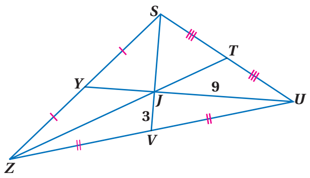
4) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ الذي رؤوسه: $A(-3, 3), B(-1, 7), C(3, 3)$، $(-1, 5)$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	3-12 ، 27 ، 28 ، 29-37
ضمن ضمن المتوسط	5-17 فردي، 19-27 فردي، 29-37
فوق فوق المتوسط	13-37 ، (اختياري: 38-41)

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 في $\triangle SZU$ ، إذا كان $ZT = 18$ ، فأوجد كلّ طول مما يأتي:



5) YJ **4.5**

6) SJ **6**

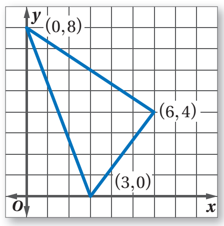
7) YU **13.5**

8) SV **9**

9) JT **6**

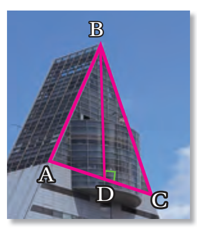
10) ZJ **12**

المثال 3 (11 **تصميم داخلي:** صنعت كوثر لوحةً مثلثة الشكل كما في الشكل أدناه لتضع عليها صور معالم مشهورة. وأرادت أن تعلقها في سقف حجرتها على أن تكون موازية له. فعند أي نقطة يجب أن تُثبّت الخيط؟ **(3, 4)**

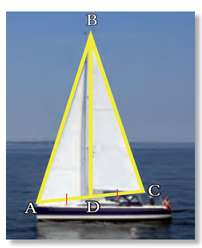


المثال 4 (12 **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث الذي رؤوسه:
$J(3, -2), K(5, 6), L(9, -2)$ **(5, −1)**

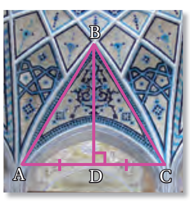
صنّف $\overline{BD}$ في كلٍّ من الأسئلة الآتية إلى ارتفاع، أو قطعة متوسطة، أو عمود منصّف:

13) 

ارتفاع

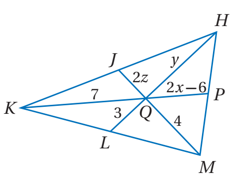
14) 

قطعة متوسطة

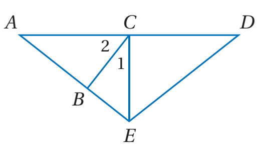
15) 

عمود منصف

16) **جبر:** في الشكل المجاور، إذا كانت J, P, L نقاط منتصفات $\overline{KH}$, $\overline{HM}$, $\overline{MK}$ على الترتيب، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y, z.
$x = 4.75, y = 6, z = 1$



17) **جبر:** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{EC}$ ارتفاعًا لِـ $\triangle AED$، $m\angle 1 = (2x + 7)^\circ$, $m\angle 2 = (3x + 13)^\circ$ ، فأوجد كلًّا من $m\angle 1, m\angle 2$.
$m\angle 1 = 35^\circ, m\angle 2 = 55^\circ$

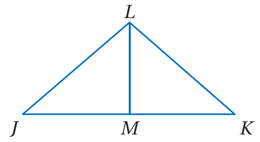


إرشادات للمعلم الجديد

الحسّ الرياضي: قد يجد الطلاب صعوبة في التمييز بين نقاط التلاقي الأربع للمثلث (مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية للمثلث، ومركز المثلث، ونقطة التقاء الارتفاعات)؛ لذا اطلب إليهم أن يرسموا شكلاً باستعمال المنقلة والمسطرة لتعيين كل نقطة من تلك النقاط، وشجّعهم على الربط بين القطع المستقيمة التي رسموها ونقطة التلاقي المناظرة.

230 الفصل 4 العلاقات في المثلث

في الشكل المجاور، حدّد ما إذا كانت $\overline{LM}$ عمودًا منصّفًا، أو قطعة متوسطة ، أو ارتفاعًا لـ $\triangle JKL$ في كل حالة مما يأتي:



18) $\overline{LM} \perp \overline{JK}$ ارتفاع

19) $\triangle JLM \cong \triangle KLM$

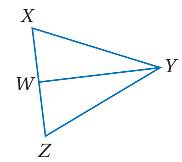
20) $\overline{JM} \cong \overline{KM}$ قطعة متوسطة

21) $\overline{LM} \perp \overline{JK}$ ، $\overline{JL} \cong \overline{KL}$

22) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فيه $\overline{XY} \cong \overline{ZY}$ ، $\overline{WY}$ تنصّف $\angle Y$

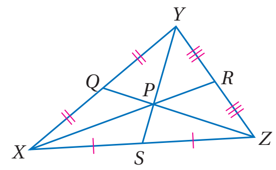
المطلوب: $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.



23) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{XR}, \overline{YS}, \overline{ZQ}$ قطع متوسطة لـ $\triangle XYZ$

المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$



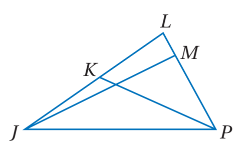
24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف مواقع نقاط التلاقي لأي مثلث متطابق الأضلاع.

a) **عمليًّا:** أنشئ ثلاثة مثلثات متطابقة الأضلاع ومختلفةً بعضها عن بعضٍ على ورق سهل الطي، ثم قصّها. واطوِ كل مثلث لتحدّد موقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية للمثلث، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات. انظر الهامش

b) **لفظيًّا:** خمّن العلاقات بين نقاط التلاقي الأربع لأي مثلث متطابق الأضلاع. انظر الهامش

c) **بيانيًّا:** ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع في مستوى إحداثي، وعيّن مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية ، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات. وحدّد إحداثيات كل نقطةٍ منها. انظر الهامش

جبر: في $\triangle JLP$ ، $m\angle JMP = (3x-6)^\circ$ ، $JK = 3y-2$ ، $LK = 5y-8$.

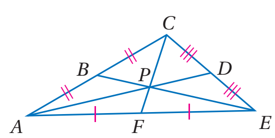


25) إذا كانت $\overline{JM}$ ارتفاعًا لـ $\triangle JLP$ ، فأوجد x . 32

26) إذا كانت $\overline{PK}$ قطعة متوسطة، فأوجد LK . 7

مسائل مهارات التفكير العليا

27) **اكتشف الخطأ:** قال صفوان: إن $AP = \frac{2}{3}AD$ في الشكل المجاور. ولكن عبد الكريم لم يوافقه في ذلك، فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ وضّح إجابتك. انظر الهامش



28) **تبرير:** هل العبارة التالية صحيحة أم خطأ؟ وضح إجابتك إذا كانت صحيحة، وإلا فأعطِ مثالًا مضادًا. "ملتقى ارتفاعات المثلث القائم الزاوية تقع عند رأس الزاوية القائمة". انظر الهامش

19) عمود منصّف وقطعة متوسطة وارتفاع.

21) عمود منصّف وقطعة متوسطة وارتفاع.

22, 23) انظر ملحق الإجابات

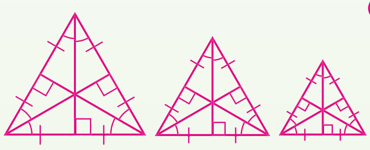
تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 27، بدل صفوان القطع المستقيمة في نظرية مركز المثلث. ذكّر الطلاب بأنّه يجب عليهم استعمال الشكل؛ للتحقق من معقولية إجاباتهم عن أسئلة الأشكال الهندسيّة.

تمثيلات متعدّدة: في السؤال 24، يستعمل الطلاب الوصف اللفظي والرسوم البيانيّة؛ لاستقصاء مواقع نقاط التلاقي في المثلثات.

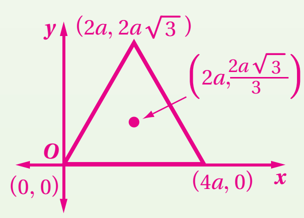
إجابات

24a)



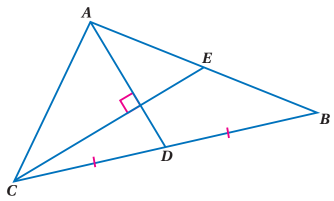
24b) إجابة ممكنة: نقاط التلاقي الأربع للمثلث المتطابق الأضلاع هي النقطة نفسها.

24c)



27) إجابات ممكنة: إجابة عبد الكريم هي الصحيحة، فحسب نظرية مركز المثلث، $AP = \frac{2}{3}AD$، وقد بُدِّلت أطوال القطع المستقيمة.

28) صحيحة؛ إجابة ممكنة: في المثلث القائم الزاوية، يكون الارتفاعان المرسومان من رأسَي الزاويتين الحادّتين هما ساقَي المثلث اللذين يتقاطعان عند رأس الزاوية القائمة. وبما أن الارتفاع إلى وتر المثلث يبدأ من الرأس، فإنّ الارتفاعات الثلاثة تتقاطع عند رأس الزاوية القائمة. وعليه فإن رأس الزاوية القائمة هو ملتقى الارتفاعات دائمًا.

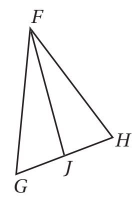


29) **تحدّ:** في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ قطعتين متوسطتين في $\triangle ACB$، وكانت $CE = 9$, $AB = 10$, $\overline{AD} \perp \overline{CE}$، فأوجد CA. $2\sqrt{13}$

30) **اكتب:** استعمل المساحة لتفسر لماذا يكون مركز المثلث هو نقطة اتزانه، ثم استعمل هذا التفسير لوصف موقع نقطة اتزان المستطيل. انظر الهامش

تدريب على اختبار

31) في الشكل المجاور، إذا كان $\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$، فأي عبارة مما يأتي صحيحة؟ C



A $\overline{FJ}$ ارتفاع لـ $\triangle FGH$

B $\overline{FJ}$ منصّف زاوية في $\triangle FGH$

C $\overline{FJ}$ قطعة متوسطة في $\triangle FGH$

D $\overline{FJ}$ عمود منصّف في $\triangle FGH$

32) ما المقطع x للمستقيم $4x - 6y = 12$؟ A

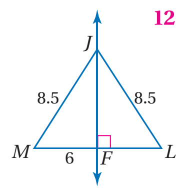
A 3   C −3

B 2   D −2

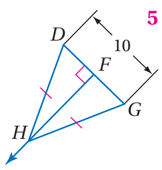
مراجعة تراكمية

أوجد كلَّ قياس ممّا يأتي: (الدرس 4-1)

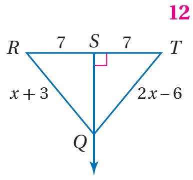
33) LM 12



34) DF 5



35) TQ 12



36) ارسم المثلث المتطابق الضلعين QRT في المستوى الإحداثي الذي طول قاعدته $\overline{QR}$ يساوي b وحدة، وحدِّد إحداثيات رؤوسه. (الدرس 3-7) انظر الهامش

37) بيّن ما إذا كان $\overleftrightarrow{RS}$, $\overleftrightarrow{JK}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك، حيث $K(2, 8)$, $J(-6, 1)$, $S(9, 8)$, $R(1, 1)$، وارسم كل مستقيم لتتحقق من إجابتك. (الدرس 3-2) انظر الهامش

استعد للدرس اللاحق

اكتب $>$ أو $<$ داخل ○ لتحصل على عبارة صحيحة.

38) $-\frac{18}{25}$ ⓘ $\frac{19}{27}$ → $-\frac{18}{25} < \frac{19}{27}$

39) $\frac{3}{8} > \frac{5}{16}$

40) $2.7 > \frac{3}{5}$

41) $-4.25 > -\frac{19}{4}$

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا وصفًا موجزًا يوضّح الفرق بين القطعة المتوسطة والارتفاع، والفرق بين ملتقى الارتفاعات ومركز المثلث.

التقويم التكويني

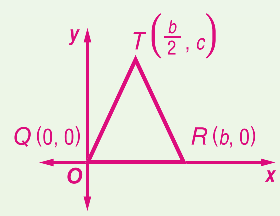
تحقق من فهم الطلاب الدرسين 2−4, 1−4 بإعطائهم:

الاختبار القصير (1)، ص (68)

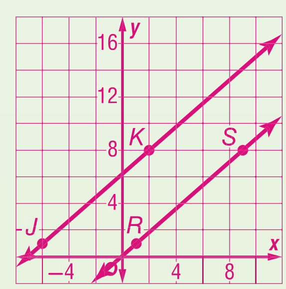
إجابات:

30) إجابة ممكنة: بما أن كل قطعة متوسطة تقسم المثلث إلى مثلثين متساويين في المساحة، وذلك لأن للمثلثين الناتجين الارتفاع نفسه، وكذلك لهما طول القاعدة نفسه، فيمكن أن يتزن المثلث على أي قطعة متوسطة، ولموازنة مثلث على نقطة، عليك أن تجد النقطة التي تتقاطع عندها خطوط الاتزان الثلاثة. ونقطة الاتزان لمستطيل هي نقطة تقاطع القطعتين المستقيمتين اللتين تصلان بين منتصفَي ضلعين متقابلين فيه؛ لأن كلّ قطعة واصلة بين منتصفَي ضلعين متقابلين تقسم المستطيل إلى جزأين متساويين في المساحة.

36)



37) متوازيان



232 الفصل 4 العلاقات في المثلث

الفصل 4

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 4

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

الاسم ________ التاريخ ________

4-2 تدريبات إعادة التعليم

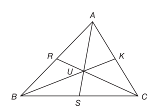
القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

القطع المتوسطة:

القطعة المتوسطة في مثلثٍ هي قطعة مستقيمة تصل أحد رؤوس المثلث بمنتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

نظرية مركز المثلث	تلتقي القطع المتوسطة لمثلث عند **مركز المثلث**، وهو نقطة على القطعة المتوسطة تبعد عن كل رأس مسافةً تساوي ثُلثَي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

مثال إذا كانت النقطة U مركز $\triangle ABC$، و $BU = 16$، فأوجد كلًّا من BK, UK.



$BU = \frac{2}{3}BK$ نظرية مركز المثلث

$16 = \frac{2}{3}BK$ $BU = 16$

$24 = BK$ اضرب الطرفين بـ $\frac{3}{2}$

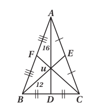
$BK = BU + UK$ مسلمة جمع أطوال القطع المستقيمة

$24 = 16 + UK$ عوِّض

$8 = UK$ اطرح 16 من الطرفين

تمارين

في $\triangle ABC$: $AU = 16$, $BU = 12$, $CF = 18$، أوجد كلًّا من القياسات التالية:

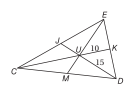


1) UD **8** 2) EU **6**

3) CU **12** 4) AD **24**

5) UF **6** 6) BE **18**

إذا كانت النقطة U مركز $\triangle CDE$، وكان: $UK = 10$, $EM = 21$, $UD = 15$، فأوجد كلًّا من القياسات الآتية:



7) CU **20** 8) MU **7**

9) CK **30** 10) JU **7.5**

11) EU **14** 12) JD **22.5**

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (12) دون

الاسم ________ التاريخ ________

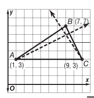
4-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

ارتفاعات المثلث:

ارتفاع المثلث هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، ولكل مثلثٍ ارتفاعات ثلاثة، تتلاقَى المستقيمات التي تحويها في نقطة واحدة تسمى ملتقَى **ارتفاعات المثلث**.

مثال 1 إذا كانت رؤوس $\triangle ABC$ $A(1,3)$, $B(7,7)$, $C(9,3)$، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.



الخطوة 1: مثِّل $\triangle ABC$ بيانيًا، ولإيجاد ملتقى ارتفاعاته، أوجد نقطة تقاطع اثنين من ارتفاعات المثلث الثلاثة.

الخطوة 2: أوجد معادلة الارتفاع من A إلى $\overline{BC}$:

بما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي $\frac{7-3}{7-9} = \frac{4}{-2} = -2$

إذن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{BC}$ يساوي $\frac{1}{2}$ ومعادلته هي:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - 3 = \frac{1}{2}(x-1)$ $m = \frac{1}{2}$, $(x_1, y_1) = (1, 3)$

$y - 3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ خاصية التوزيع

$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ اجمع 3 إلى الطرفين

ثم أوجد معادلة الارتفاع من C إلى $\overline{AB}$

بما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي $\frac{7-3}{7-1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

إذن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي $\frac{-3}{2}$ ومعادلته هي:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - 3 = \frac{-3}{2}(x-9)$ $m = \frac{-3}{2}$, $(x_1, y_1) = (9, 3)$

$y - 3 = \frac{-3}{2}x + \frac{27}{2}$ خاصية التوزيع

$y = \frac{-3}{2}x + \frac{33}{2}$ اجمع 3 إلى الطرفين

الخطوة 3: حُلَّ النظام الناتج $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = \frac{-3}{2}x + \frac{33}{2} \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات

$\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = \frac{-3}{2}x + \frac{33}{2}$ تعويض قيمة y من المعادلة الأولى في الثانية

$\frac{5}{2} = -2x + \frac{33}{2}$ اطرح $\frac{1}{2}x$ من الطرفين

$-14 = -2x$ اطرح $\frac{33}{2}$ من الطرفين

$7 = x$ اقسم الطرفين على -2

$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(7) + \frac{5}{2} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{12}{2} = 6$

إذن ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ هو $(7, 6)$

تمارين

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات كلٍّ من المثلثين الآتيين:

1) $\triangle JHI$ الذي رؤوسه: $J(1, 0)$, $H(6, 0)$, $I(3, 6)$. **(3, 1)**

2) $\triangle STU$ الذي رؤوسه: $S(4, 6)$, $T(8, -1)$, $U(10, 2)$. **(10, 2)**

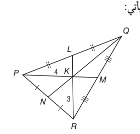
تدريبات المهارات (13) دون ضمن

الاسم ________ التاريخ ________

4-2 تدريبات المهارات

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

إذا كان: $NQ = 6$, $RK = 3$, $PK = 4$ في $\triangle PQR$ المجاور، فأوجد كلَّ طولٍ ممَّا يأتي:

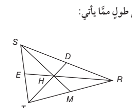


1) KM **2** 2) KQ **4**

3) LK **1.5** 4) LR **4.5**

5) NK **2** 6) PM **6**

إذا كانت H مركز $\triangle STR$، وكان: $SM = 24$, $EH = 6$, $DH = 4$، فأوجد كلَّ طولٍ ممَّا يأتي:



7) SH **16** 8) HM **8**

9) TH **8** 10) HR **12**

11) TD **12** 12) ER **18**

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات مركز كلٍّ من المثلثين الآتيين:

13) $\triangle XYZ$ الذي رؤوسه: $X(-3, 15)$, $Y(1, 5)$, $Z(5, 10)$. **(1, 10)**

14) $\triangle STR$ الذي رؤوسه: $S(2, 5)$, $T(6, 5)$, $R(10, 0)$. $\left(\mathbf{6, 3\frac{1}{3}}\right)$

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات كلٍّ من المثلثين الآتيين:

15) $\triangle LMN$ الذي رؤوسه: $L(8, 0)$, $M(10, 8)$, $N(14, 0)$. **(10, 1)**

16) $\triangle DEF$ الذي رؤوسه: $D(-9, 9)$, $E(-6, 6)$, $F(0, 6)$. **(−9, −3)**

تدريبات حل المسألة (14) دون ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

4-2 تدريبات حلّ المسألة

القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

1) **توازن:** وضعت هدى قطعةً مسطّحةً مثلثة الشكل على طرف أصبعها فلم تسقط، ففي أي نقطة من المثلث وضعت هدى أصبعها؟

مركز المثلث

2) أراد أحمد أن يصمِّم أشرطة زينة تُعلَّق في السقف عبارة عن خيط في نهايته مثلث، بحيث يكون المثلث في وضع أفقيٍّ عند تثبيت الخيط في السقف.

a) من أي نقطةٍ في المثلث سيمرّ الخيط؟

عند نقطة التوازن.

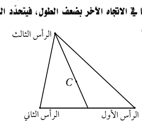
b) إذا أراد أن يكون الشكل أكثر جمالًا، وأن يُعلق المثلث في نقطةٍ تكون متساوية البعد عن رؤوسه وعن أضلاعه، فما نوع المثلث الذي يختاره للتصميم؟ ولماذا؟

مثلث متطابق الأضلاع؛ لأنه في المثلث المتطابق الأضلاع مركز المثلث هو نفسه مركز الدائرتين الداخلية والخارجية للمثلث.

3) **قص:** أراد سعيد أن يقصَّ ورقةً على شكل مثلث، بشرط أن تكون حافة الورقة أحد أضلاع المثلث، والنقطة C مركزه، كما هو مبيَّن بالشكل.

هل يمكنه تحديد المثلث وقصُّه بهذه المعطيات؟ إذا كانت الإجابة نعم، فوضِّح الخطوات التي يقوم بها سعيد لتحديد المثلث.

نعم، يصل سعيد النقطة C بمنتصف حافة الورقة، ويقيس هذه القطعة ويمدّها في الاتجاه الآخر بضعف الطول، فيتحدّد الرأس الثالث للمثلث.



4) وضع مدرس الرياضيات 3 مجموعات من المثلثات: مجموعة مثلثات حادة الزوايا، ومجموعة مثلثات منفرجة الزاوية، ومجموعة مثلثات قائمة الزاوية، ثم طلب إلى كلِّ طالب اختيار مثلث، وإيجاد نقطة التقاء الارتفاعات فيه، إذا أراد خالد أن يختار مثلثًا، بحيث يحدد النقطة من دون الحاجة إلى مسطرة أو أي أداة رسم، فما نوع المثلث الذي يختاره؟ ولماذا؟

قائم الزاوية؛ لأن نقطة التقاء الارتفاعات هي رأس الزاوية القائمة.

5) **ميادين:** صمّم مهندس معماري ميدانًا عامًّا مثلث الشكل، ولأغراض رياضيَّة أعطى المهندس اهتمامًا زائدًا لموقع مركز الميدان C، ولمركز الدائرة التي تمرّ برؤوسه O.

a) إذا أراد المهندس أن يتحقق الشرط: بأن تكون C هي نفسها O، فهل يمكنه القيام بذلك؟ وما نوع المثلث الذي يمثِّل الميدان في هذه الحالة؟

نعم، مثلث متطابق الأضلاع.

b) إذا أراد المهندس أن تكون النقطة C داخل الميدان، والنقطة O خارجه، فهل يمكنه القيام بذلك؟ وما نوع المثلث الذي يمثل الميدان في هذه الحالة؟

نعم، مثلث منفرج الزاوية.

c) إذا أراد المهندس أن تكون النقطة C خارج الميدان، والنقطة O داخله، فهل يمكنه القيام بذلك؟ وما نوع المثلث في هذه الحالة؟

لا يمكنه القيام بذلك.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 4

دون دون المتوسط   ضمن ضمن المتوسط   فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (15) ضمن فوق

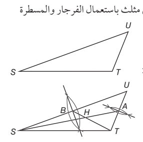
الاسم ________________ التاريخ ________

4-2 التدريبات الإثرائية

تعيين مركز المثلث وملتقى ارتفاعاته

تلتقي القطع المتوسطة للمثلث في نقطة واحدة تسمّى مركز المثلث، ويمكن تعيين مركز أي مثلث باستعمال الفرجار والمسطرة غير المدرجة.

اتبع الخطوات الآتية لتعيين مركز ΔSTU، مستعملًا فرجارًا ومسطرةً غير مدرجةٍ:

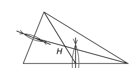


الخطوة 1: عيّن نقطَتَي منتصفَي الضلعين $\overline{TU}, \overline{SU}$، وسمّ نقطتَي منتصفَيهما A, B على الترتيب:

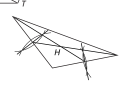
الخطوة 2: ارسم القطعتين $\overline{SA}$ ، $\overline{TB}$، وسمّ نقطة تقاطعهما H، ستكون H مركز ΔSTU .

عيّن مركز كلٍّ من المثلثين الآتيين:

(1

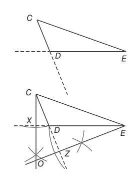


(2



تلتقي ارتفاعات المثلث الثلاثة في نقطة واحدة تسمّى مُلتَقَى الارتفاعات، ويمكن تعيين ملتقى الارتفاعات باستعمال الفرجار والمسطرة.

اتبع الخطوات الآتية لتعيين مُلتقى ارتفاعات ΔCDE مستعملًا فرجارًا ومسطرة غير مدرجة:



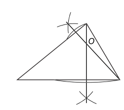
الخطوة 1: مُدّ الضلعين $\overline{CD}$ ، $\overline{DE}$ من جهة النقطة D كما في الشكل المجاور؛ لتتمكن من رسم العمودين من الرأسين E, C .

الخطوة 2: أنشئ من الرأس C عمودًا على المستقيم DE، وسمِّ نقطة تقاطعهما X، وبالمثل أنشئ من الرأس E عمودًا على المستقيم CD، وسمّ نقطة تقاطعهما Z، لاحظ أن كلًّا من Z ، X واقعتان خارج ΔCDE .

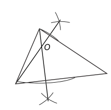
الخطوة 3: سمّ نقطة تقاطع العمودين ($\overleftrightarrow{CX}$ ، $\overleftrightarrow{EZ}$) النقطة O، وهي ملتقى ارتفاعات ΔCDE .

عيّن ملتقى ارتفاعات كلٍّ من المثلثين الآتيين:

(3



(4



الصف: الأول الثانوي   15   **الفصل ٤ :** العلاقات في المثلث

كتاب التمارين (28) دون ضمن فوق

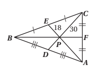
4 - 2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

الفصل الرابع

العلاقات في المثلث

إذا كانت النقطة P مركز $\triangle ABC$، و $EP = 18$, $CP = 30$, $BF = 39$.

فأوجد طول كلٍّ مما يأتي:



1) PD
15

2) FP
13

3) BP
26

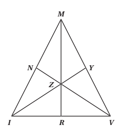
4) CD
45

5) PA
36

6) EA
54

إذا كانت النقطة Z مركز $\triangle MIV$، و $NZ = 12$, $YI = 18$, $MZ = 6$،

فأوجد طول كلٍّ مما يأتي:



7) ZR
3

8) YZ
6

9) MR
9

10) ZV
24

11) NV
36

12) IZ
12

13) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيات مركز المثلث الذي رؤوسه : $I(3, 1), J(6, 3), K(3, 5)$ **(4 ,3)**

14) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث الذي رؤوسه: $S(0, 0), T(3, 3), U(3, 6)$ **(9 , 0)**

15) **تزيين:** يُريد نبيل أن يزيّن حديقة بيته بتثبيت أعمدة وتعليق قطعة من الصفيح الملون مثلثة الشكل على كل عمود، على أن تبقى سطوح هذه القطع موازيةً لسطح الأرض، فكيف يعيّن نبيل نقطة التعليق لكل مثلث؟
يجب أن يعلق كل مثلث عند نقطة التقاء القطع المتوسطة .

28

4-3 المتباينات في المثلث
Inequalities in One Triangle

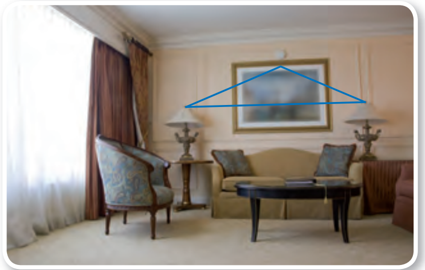
فيما سبق:
درستُ العلاقة بين قياسات زوايا المثلث.

والآن:
- أتعرف خصائص المتباينات، وأطبّقها على قياسات زوايا المثلث.
- أطبّق خصائص المتباينات على العلاقة بين زوايا مثلث وأضلاعه.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يستعمل المصمِّمون طريقة تُسمّى التثليث؛ لإعطاء الغرفة مظهرًا يُوحي بالاتساع، ومن الأمثلة على هذه الطريقة وضع طاولة صغيرة عند كل طرف من طرفَي أريكة مع وضع لوحة فوقها. على أن يكون قياس كل زاوية من زاويتَي قاعدة المثلث أقل من قياس الزاوية الثالثة.



متباينات الزوايا: تعلمت في الجبر المتباينة بوصفها علاقة بين عددين حقيقيين، وتُستعمل هذه العلاقة عادة في البراهين.

مفهوم أساسي — تعريف المتباينة
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لأي عددين حقيقيين مثل a, b يكون $a > b$ ، إذا وفقط إذا وُجِدَ عدد حقيقي موجب c على أن يكون $a = b + c$

مثال إذا كان $5 = 2 + 3$ ، فإنّ $5 > 3$ وَ $5 > 2$

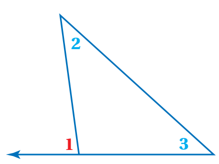
وفي الجدول أدناه قائمة ببعض خصائص المتباينات التي درستها.

مفهوم أساسي — خصائص المتباينة على الأعداد الحقيقية
أضف إلى مطويتك

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c

خاصيّة المقارنة	$a < b$ أو $a = b$ أو $a > b$.
خاصيّة التعدّي	1) إذا كان $a < b, b < c$ ، فإن $a < c$. 2) إذا كان $a > b, b > c$ ، فإن $a > c$.
خاصية الجمع	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a + c > b + c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a + c < b + c$.
خاصيّة الطرح	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a - c > b - c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a - c < b - c$.

يمكن أن يطبق تعريف المتباينة وخصائصها على قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة؛ لأنها أعداد حقيقية.



تأمّل $\angle 3$ ، $\angle 2$ ، $\angle 1$ في الشكل المجاور.

من نظرية الزاوية الخارجيّة، تعلم أنّ $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$

وبما أنّ قياسات الزوايا أعداد موجبة، إذن نستنتج أن:

$m\angle 1 > m\angle 2$ وَ $m\angle 1 > m\angle 3$

وهذه النتيجة تقود إلى النظرية الآتية:

4-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-4

إيجاد العلاقة بين قياسات زوايا المثلث.

الدرس 3-4

تعرّف خصائص المتباينات وتطبيقها على قياسات زوايا المثلث.

تطبيق خصائص المتباينات على العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه.

ما بعد الدرس 3-4

استعمال خصائص التشابه وتوسيعها؛ لاستقصاء تخمينات حول الأشكال الهندسية وتبريرها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- ما أكبر زاوية في المثلث الظاهر في الصورة؟ الزاوية العُليا.
- ما أطول ضلع في المثلث؟ الضلع الأسفل.
- ما العلاقة بين أكبر زاوية وأطول ضلع؟ إجابة ممكنة: الضلع الأطول يقابل الزاوية الكبرى.

مصادر الدرس 3-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (235)	• تنويع التعليم، ص (235, 236)	• تنويع التعليم، ص (235, 236)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (29)	• كتاب التمارين، ص (29)	• كتاب التمارين، ص (29)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (16) • تدريبات المهارات، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (19) • التدريبات الإثرائية، ص (20)

مراجعة المفردات

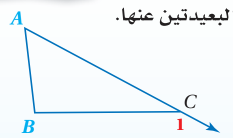
الزاويتان الداخلتان البعيدتان
لكل زاوية خارجيّة لمثلث زاويتان داخليتان بعيدتان وهما الزاويتان غير المجاورتين لها.

نظرية 4.8 متباينة الزاوية الخارجيّة

أضف إلى مطويتك

قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أيّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.

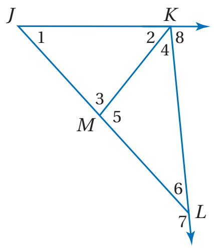
مثال: $m\angle 1 > m\angle A$
$m\angle 1 > m\angle B$



ستبرهن هذه النظرية في الدرس 4-4

مثال 1 استعمال نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كلٍّ مما يأتي:



a) قياساتها أقل من $m\angle 7$

$\angle 7$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle KML$، والزاويتان $\angle 5$, $\angle 4$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها، وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة يكون:

$m\angle 7 > m\angle 4$, $m\angle 7 > m\angle 5$.

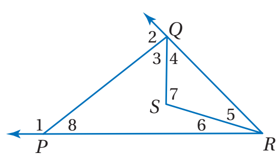
وكذلك $\angle 7$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle JKL$ ، والزاويتان $\angle 1$, $\angle JKL$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها؛ لذا فإن $m\angle 7 > m\angle 1$
وبما أنّ $m\angle 7 > m\angle JKL$. $m\angle JKL = m\angle 2 + m\angle 4$،
وبالتعويض يكون $m\angle 7 > m\angle 2 + m\angle 4$؛ إذن $m\angle 7 > m\angle 2$.

لذا فالزوايا التي قياساتها أقل من $m\angle 7$ هي $\angle 1, \angle 2, \angle 4, \angle 5$.

b) قياساتها أكبر من $m\angle 6$

$\angle 3$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle KLM$. وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة يكون $m\angle 3 > m\angle 6$. وبما أنّ $\angle 8$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle JKL$ ، فإن $m\angle 8 > m\angle 6$ ؛ لذا فقياس كلٍّ من $\angle 3$, $\angle 8$ أكبر من $m\angle 6$.

تحقق من فهمك



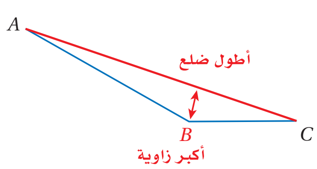
1A) قياساتها أقل من $m\angle 1$ $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$

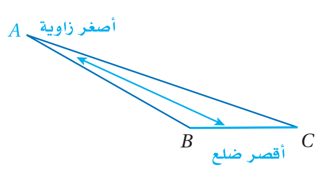
1B) قياساتها أكبر من $m\angle 8$ $\angle 2$

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه: في الدرس 6-3 ، تعلمت أنّه إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان . ولكن كيف تكون العلاقة إذا كان الضلعان غير متطابقين. وللإجابة عن هذا السؤال، افحص أطول الأضلاع وأقصرها وأصغر الزوايا وأكبرها لمثلث منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.

تنبيه !

تحديد الضلع المقابل
انتبه عند تحديد الضلع المقابل لزاوية بصورة صحيحة، فالضلعان اللذان يشكّلان الزاوية لا يمكن أن يكون أحدهما مقابلًا لها.





لاحظ أنّ أطول ضلع في $\triangle ABC$ يقابل أكبر زاوية، وبالمثل فإن أقصر ضلع يقابل أصغر زاوية أيضًا .

متباينات الزوايا

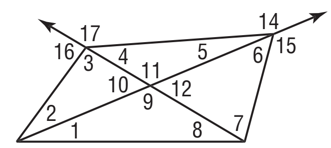
المثال 1 يبيّن كيفية استعمال نظرية متباينة الزوايا الخارجيّة.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

1 استعمل متباينة الزاوية الخارجية لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كلٍّ مما يأتي.



a) قياسها أقل من $m\angle 14$
$\angle 4, \angle 11, \angle 9, \angle 3, \angle 2, \angle 6, \angle 7$

b) قياسها أكبر من $m\angle 5$
$\angle 10, \angle 16, \angle 12, \angle 15, \angle 17$

إرشادات للمعلم الجديد

الزوايا الخارجيّة: النظرية 4.8 صحيحة؛ لأنَّ $\angle 1$ مكمّلة للزاوية الداخليّة المجاورة لها، ومجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمثلث يساوي $180°$.

تنبيه !

رمزا الزاوية والمتباينة

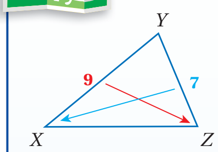
يبدو رمز الزاوية (∠) مشابهًا لرمز أقل من (<)، وخاصّة عند الكتابة باليد؛ لذا كن دقيقًا في كتابة الرموز بصورة صحيحة عندما يُستعمل الرمزان معًا.

إن العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلث المنفرج الزاوية والمختلف الأضلاع تكون صحيحة لجميع المثلثات، ويمكن صياغتها باستعمال المتباينات في النظريتين الآتيتين:

نظريتان — العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه

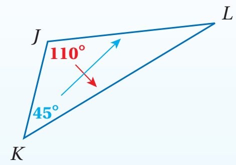
أضف إلى مطويتك

4.9 متباينة ضلع-زاوية: إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر، فإنّ قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.



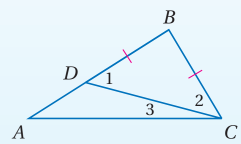
مثال بما أن $XY > YZ$ ، فإن $m\angle Z > m\angle X$.

4.10 متباينة زاوية-ضلع: إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإنّ الضلع المقابل للزاوية الكبرى يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.



مثال بما أن $m\angle J > m\angle K$ ، فإن $KL > JL$.

برهان — النظرية 4.9



المعطيات: $\triangle ABC$ ، فيه $AB > BC$.

المطلوب: $m\angle BCA > m\angle A$.

البرهان:

بما أنّ $AB > BC$ في $\triangle ABC$ ، فإنّه توجد نقطة D على $\overline{AB}$ بحيث $BD = BC$ ؛ لذا ارسم $\overline{CD}$ لتشكّل $\triangle BCD$ المتطابق الضلعين، وبناءً على نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle 2 \cong \angle 1$ ، واستنادًا إلى تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle 1 = m\angle 2$.

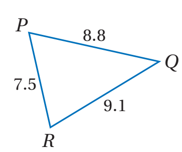
واعتمادًا على مسلمة جمع قياسات الزوايا يكون $m\angle BCA = m\angle 2 + m\angle 3$ ، إذن $m\angle BCA > m\angle 2$ بحسب تعريف المتباينة. وبالتعويض ينتج أن $m\angle BCA > m\angle 1$.

وبناءً على نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة يكون $m\angle 1 > m\angle A$. وبما أن $m\angle BCA > m\angle 1, m\angle 1 > m\angle A$ ، فإن $m\angle BCA > m\angle A$ بحسب خاصية التعدّي للمتباينة.

ستبرهن النظرية 4.10 في الدرس 4-4

مثال 2 ترتيب زوايا المثلث وفقًا لقياساتها

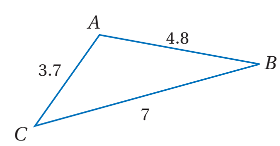
اكتب زوايا $\triangle PQR$ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.



الأضلاع مرتّبة من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{PR}, \overline{PQ}, \overline{QR}$. والزوايا المقابلة لهذه الأضلاع هي: $\angle Q, \angle R, \angle P$ على الترتيب؛ لذا فالزوايا مرتّبة من الأصغر إلى الأكبر تكون على النحو الآتي: $\angle Q, \angle R, \angle P$

تحقق من فهمك

2) اكتب زوايا $\triangle ABC$ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.



الزوايا بالترتيب هي: $\angle B, \angle C, \angle A$

المحتوى الرياضي

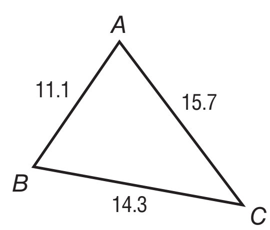
مقارنة النظريات: يمكنك اختصار النظريتين 4.9 و 4.10 بالقول إنّ الضلع الأقصر يقابل الزاوية الأصغر، والضلع الأطول يقابل الزاوية الأكبر.

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه

الأمثلة 2-4 تبيّن كيفية تحديد العلاقة بين قياسات زوايا معطاة وأضلاع مثلث، ويجب أن يكون الطلاب قادرين على استعمال النظريتين 4.9 و 4.10؛ لتحديد علاقة زوايا المثلث وأضلاعه.

مثال إضافي

2 اكتب زوايا $\triangle ABC$ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.



الزوايا بالترتيب هي: $\angle C, \angle A, \angle B$

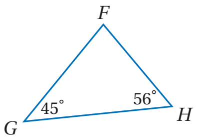
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المنطقيّون: اطلب إلى الطلاب أن يستعملوا كلماتهم الخاصّة في كتابة فقرة يُلخِّصون فيها برهان النظرية 4.9 ، وأخبرهم أنّهم غير ملزمين باتباع خطوات البرهان الحر نفسها، إلّا أن عليهم مراعاة التسلسل المنطقي من بداية الفقرة حتى نهايتها، وعليهم توضيح معاني الخصائص والتعريفات والمسلمات والنظريات المُستعملة في البرهان.

مثال 3 ترتيب أضلاع المثلث وفقًا لأطوالها

اكتب أضلاع $\triangle FGH$ مرتّبةً من الأقصر إلى الأطول.



أوجد قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.

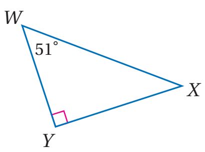
$m\angle F = 180 - (45° + 56°) = 79°$

لذا فالزوايا مرتّبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle G, \angle H, \angle F$.

والأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي: $\overline{FH}, \overline{FG}, \overline{GH}$ على الترتيب.

إذن فالأضلاع مرتّبةً من الأقصر إلى الأطول تكون على النحو التالي: $\overline{FH}, \overline{FG}, \overline{GH}$.

تحقق من فهمك



3) اكتب زوايا $\triangle WXY$ وأضلاعه، مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.

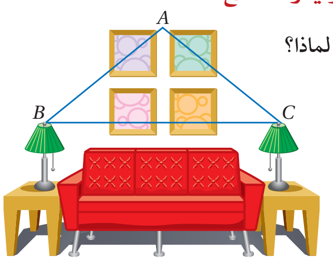
$\overline{WY}, \overline{YX}, \overline{WX};\ \angle X, \angle W, \angle Y$

ويمكنك استعمال العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلثات لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 4 من واقع الحياة العلاقات بين الزوايا والأضلاع

تصميم داخلي: يستعمل مصمّمٌ فكرة التثليث الواردة في فقرة لماذا؟ لترتيب غرفة الاستقبال.

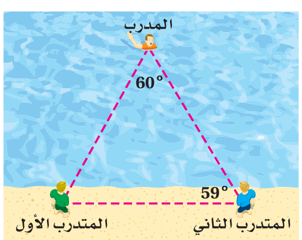
فإذا أراد المصمّم أن يكون $m\angle B$ أقلّ من $m\angle A$، فأي مسافة يجب أن تكون أطول: المسافة بين المصباحين أم المسافة بين النقطتين A, C؟ فسِّر إجابتك.



بحسب نظرية «متباينة زاوية – ضلع»، لكي يكون $m\angle B < m\angle A$، يجب أن يكون طول الضلع المقابل لـ $\angle B$ أقصر من طول الضلع المقابل لـ $\angle A$. وبما أن $\overline{AC}$ يقابل $\angle B$، و $\overline{BC}$ يقابل $\angle A$، فإنّ $AC < BC$؛ لذا فالمسافة BC بين المصباحين ستكون أكبَر من المسافة بين النقطتين A, C

تحقق من فهمك

4) **سبّاحو الإنقاذ:** في أثناء التدريب يُمثّل المدرّب دور شخصٍ في خطر ليتمكّن المتدرّبان من تطبيق مهارات الإنقاذ. إذا كان المدرّب والمتدرّبان الأول والثاني في المواقع المبيّنة في الشكل، فأيُّ المتدربَين أقرب إلى المدرّب؟ المتدرب الأول

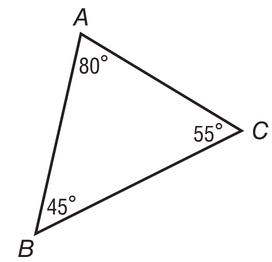


الربط مع الحياة

برامج إعداد المنقذين في السباحة تتضمن تدريبًا على المراقبة والإنقاذ والإسعافات الأولية، وتتراوح مدّة البرنامج عادة ما بين 30 إلى 37 ساعةً، تبعًا لطبيعة الوسط المائي مثل البرك أو شواطئ البحار.

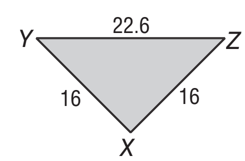
مثالان إضافيان

3 اكتب أضلاع $\triangle ABC$ مرتّبةً من الأقصر إلى الأطول.



$\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$

4 **منديل الكشافة:** يتبع صالح تعليمات ربط منديل الكشافة، حيث تنصُّ التعليمات على أنه بعد طي المنديل من منتصفه، عليه ربط الزاويتين الصغيرتين على الرقبة، فإذا طوى المنديل كالمثلث المبين أدناه فأي الطرفين يربط أحدهما بالآخر؟



الطرفان Y و Z

تنويع التعليم

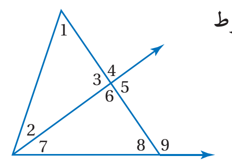
ضمن فوق

توسّع: إذا أُعطيت قياسات زوايا مثلث، فكيف ترتب الأضلاع من الأقصر إلى الأطول؟

باستعمال النظريتين (4.9 و 4.10)؛ الضلع المقابل للزاوية الأصغر هو الأقصر، والضلع المقابل للزاوية الأكبر هو الأطول.

تأكــد

المثال 1 استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة، لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كلٍّ مما يأتي :



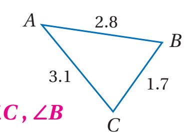
1) قياساتها أقل من $m\angle 4$. $\angle 1 , \angle 2$

2) قياساتها أكبر من $m\angle 7$. $\angle 3 , \angle 5 , \angle 9$

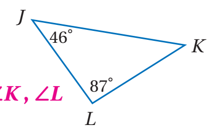
3) قياساتها أكبر من $m\angle 2$. $\angle 4 , \angle 6 , \angle 9$

4) قياساتها أقل من $m\angle 9$. $\angle 1 , \angle 2 , \angle 6 , \angle 7$

المثالان 2, 3 اكتب زوايا كل مثلث مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين :

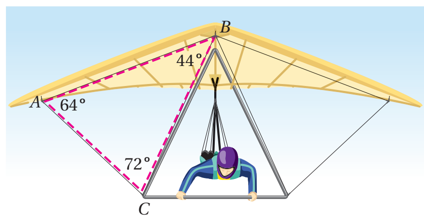
5) 

$\angle A , \angle C , \angle B$

6) 

$\angle J , \angle K , \angle L$

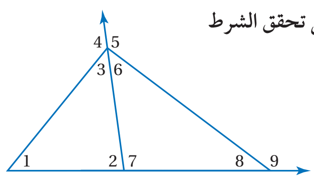
المثال 4 7) **طيران شراعي:** تشكّل دعائم الطائرة الشراعية مثلثات كالمثلث الظاهر في الصورة . فأي دعامة تكون أطول: $\overline{AC}$ أم $\overline{BC}$ ؟ وضّح إجابتك.



$\overline{BC}$ ؛ إجابة ممكنة: بما أن الزاوية التي تقابل $\overline{BC}$ أكبر من الزاوية التي تقابل $\overline{AC}$، إذن $\overline{BC}$ أطول.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطَى في كلٍّ مما يأتي:



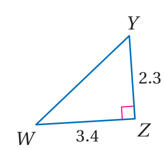
8) قياساتها أكبر من $m\angle 2$. $\angle 4$

9) قياساتها أقل من $m\angle 4$. $\angle 1 , \angle 2 , \angle 6 , \angle 8$

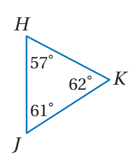
10) قياساتها أقل من $m\angle 9$. $\angle 1 , \angle 3 , \angle 6 , \angle 7$

11) قياساتها أكبر من $m\angle 8$. $\angle 2 , \angle 4 , \angle 5$

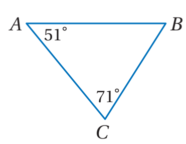
المثالان 2, 3 اكتب زوايا كل مثلث مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر في كلٍّ مما يأتي:

12) 

$\angle W , \angle Y , \angle Z$

13) 

$\angle H , \angle J , \angle K$

14) 

$\angle A , \angle B , \angle C$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–7 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة : اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا فقراتٍ تلخص العلاقة بين قياسات الزوايا وأطوال الأضلاع في المثلث في مدونة الفصل، ثم تحقق من استيعابهم المفهوم عمومًا.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	8-16 ، 33 ، 35-42
ضمن المتوسط	9-15 فردي، 17-33 ، 35-42
فوق المتوسط	18-39 ، (اختياري: 40-42)

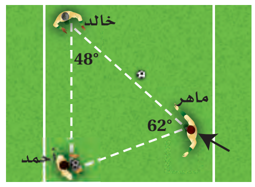
المثال 4

الربط مع الحياة

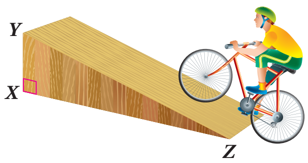
بينت إحدى الدراسات أن فريق كرة القدم يصبح في حالة الهجوم ما بين 45–65 مرةً في المباراة الواحدة.

والفريق المتميز هو الذي يتميز بقدرته على تنفيذ الهجمات بشكل جيد، وفي الوقت نفسه يستطيع الاحتفاظ بدفاع متماسك.

15) **كرة قدم:** يقف أحمد وخالد وماهر في ملعب كرة قدم كما في الشكل أدناه، ويريد ماهر أن يمرِّر الكرة إلى أحد زميلَيه، على أن تكون مسافة التمرير أقصر. أيهما يختار: خالد أم أحمد؟برّر إجابتك. انظر الهامش

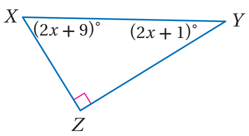


16) **منحدرات:** يمثّل المنحدر طريقًا للدراجات الهوائية. فأيّهما أطول؛ طول المنحدر $\overline{XZ}$ أم طول السطح العلوي للمنحدر $\overline{YZ}$ ؟ وضّح إجابتك باستعمال النظرية 4.9. انظر الهامش

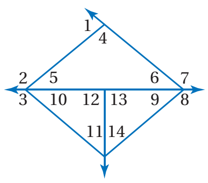


17) اكتب زوايا المثلث المجاور مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر :

$\angle Y, \angle X, \angle Z$



استعمل الشكل المجاور؛ لتحدّد الزاوية ذات القياس الأكبر في كل مجموعة مما يأتي :



18) $\angle 1, \angle 5, \angle 6$ $\angle 1$

19) $\angle 2, \angle 4, \angle 6$ $\angle 2$

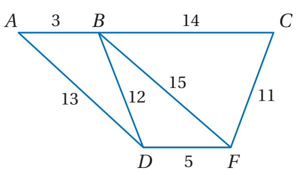
20) $\angle 7, \angle 4, \angle 5$ $\angle 7$

21) $\angle 3, \angle 11, \angle 12$ $\angle 3$

22) $\angle 3, \angle 9, \angle 14$ $\angle 3$

23) $\angle 8, \angle 10, \angle 11$ $\angle 8$

استعمل الشكل المجاور؛ لتحدد العلاقة بين قياسات الزوايا المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية :



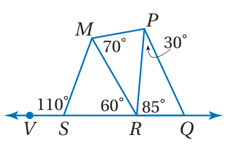
24) $\angle ABD, \angle BDA$ $m\angle ABD > m\angle BDA$

25) $\angle BCF, \angle CFB$ $m\angle BCF > m\angle CFB$

26) $\angle BFD, \angle BDF$ $m\angle BFD < m\angle BDF$

27) $\angle DBF, \angle BFD$ $m\angle DBF < m\angle BFD$

استعمل الشكل المجاور؛ لتحدد العلاقة بين أطوال الأضلاع المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية:



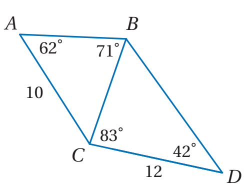
28) $\overline{SM}, \overline{MR}$ $MR > SM$

29) $\overline{RP}, \overline{MP}$ $RP > MP$

30) $\overline{RQ}, \overline{PQ}$ $RQ < PQ$

31) اكتب أضلاع كل مثلث في الشكل المجاور مرتّبةً من الأقصر إلى الأطول. ووضّح إجابتك.

في $\triangle ABC$ ، يكون $AB < BC < AC$ ، وفي $\triangle BCD$ يكون $BC < CD < BD$



إجابات

15) إجابة ممكنة: باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث، فإن قياس الزاوية المقابلة للقطعة المستقيمة الواصلة بين ماهر وخالد 70° وبما أن 70 > 48، إذن المسافة من ماهر إلى أحمد ستكون هي الأقصر. وهذا يعني أن ماهر سيختار أحمد ليمرر له الكرة.

16) بما أن $m\angle X = 90°$ ، فإن $m\angle Y + m\angle Z = 90°$ ، إذن $m\angle Y < 90°$ بحسب تعريف المتباينة؛ لذا فإن $m\angle X > m\angle Y$ ؛ أيْ أن الضلع الذي يقابل $\angle X$ أطول من الضلع الذي يقابل $\angle Y$. وبما أن $\overline{YZ}$ يقابل $\angle X$ ، و $\overline{XZ}$ يقابل $\angle Y$ ، فإن $YZ > XZ$. وهذا يعني أن السطح العلوي للمنحدر أطول من طول المنحدر.

32) **تمثيلات متعدِّدة:** ستكتشف في هذه المسألة العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث.

CA	$AB+BC$	BC	AB	المثلث
				الحاد الزوايا
				المنفرج الزاوية
				القائم الزاوية

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مثلثات: الأول حادّ الزوايا، والثاني منفرج الزاوية، والثالث قائم الزاوية، وسمِّ رؤوس كل مثلث A, B, C.

b) **جدوليًّا:** استعمل المسطرة لقياس أطوال أضلاع كل مثلث، ثم انسخ الجدول في دفترك وأكمله. **32a–32e انظر ملحق الإجابات**

c) **جدوليًّا:** نظِّم جدولين آخرين كالجدول أعلاه، وأوجد مجموع BC, CA في أحدهما، ومجموع AB, CA في الجدول الآخر.

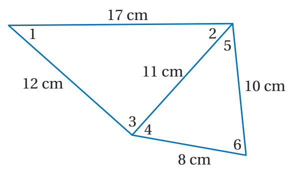
d) **جبريًّا:** اكتب متباينةً لكل جدول كوّنته تربط بين مجموع طولَي الضلعين في مثلثٍ وطول الضلع الثالث.

e) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين مجموع طولَي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث.

مسائل مهارات التفكير العليا

33) **تبرير:** هل تكون قاعدة المثلث المتطابق الضلعين هي الضلع الأطول في المثلث دائمًا أم أحيانًا أم لا تكون أبدًا؟ وضّح إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**

34) **تحدٍّ:** استعمل أطوال الأضلاع في الشكل المجاور؛ لترتب قياسات الزوايا المرقّمة من الأصغر إلى الأكبر، إذا علمت أنّ $m\angle 2 = m\angle 5$. ووضّح إجابتك. **انظر ملحق الإجابات**



35) **اكتب:** وضّح لماذا يكون الوتر في المثلث القائم الزاوية هو الضلع الأطول دائمًا؟ **انظر الهامش**

تدريب على اختبار

36) إذا كان قياسا زاويتين في مثلث هما °45 ,°92، فما نوع هذا المثلث؟ **A**

A منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.

B حادّ الزوايا ومختلف الأضلاع.

C منفرج الزاوية ومتطابق الضلعين.

D حادّ الزوايا ومتطابق الضلعين.

37) أيُّ عبارةٍ عدديةٍ مما يأتي لها أصغر قيمة؟ **B**

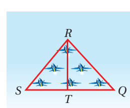
A $|45|$ C $|-28|$

B $|15|$ D $|-39|$

مراجعة تراكمية

38) **هندسة إحداثيّة:** بصيغة الميل والمقطع اكتب معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفيها $D(-2, 4)$, $E(3, 5)$. (الدرس 4-1) **انظر الهامش**

39) **طائرات:** يطير سربٌ من الطائرات على هيئة مثلثين بينهما ضلع مشترك. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن: $\triangle SRT \cong \triangle QRT$، إذا كانت النقطة T منتصف $\overline{SQ}$، $\overline{SR} \cong \overline{QR}$. (الدرس 4-3) **انظر الهامش**



استعد للدرس اللاحق

إذا كان $x = 8$, $y = 2$, $z = 3$، فحدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحةً أم خاطئةً:

40) $z(x-y) = 13$ **خاطئة**

41) $2x = 3yz$ **خاطئة**

42) $x + y > z + y$ **صحيحة**

تنبيه لحل سؤال

المسطرة: السؤال 32 يتطلب استعمال مسطرة.

تمثيلات متعددة: في السؤال 32، يستعمل الطلاب الرسم والجداول والحسابات الجبرية والوصف اللفظي لاستقصاء العلاقة بين أضلاع المثلث.

4 التقويم

فهم الرياضيات: اختر أمثلةً من الدرس أو من أسئلة التدريب، واطلب إلى بعض الطلاب مناقشة العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه باستعمال المصطلحات الهندسيّة. تأكد من أن الطلاب حدّدوا الزوايا والأضلاع بدقّة واستعملوا المفردات مثل أكبر من/ أصغر من؛ لقياسات الزوايا وأطوال الأضلاع.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 3–4 بإعطائهم:

الاختبار القصير (2) ، ص (68)

إجابات:

35) إجابة ممكنة: بما أن الوتر في المثلث القائم الزاوية يقابل الزاوية القائمة، وأن كلًّا من الزاويتين الأُخريين حادّتان دائمًا، فإن الوتر يقابل الزاوية الكبرى في المثلث دائمًا، وهو الضلع الأطول دائمًا.

38) $y = -5x + 7$؛ العمود المنصّف ينصّف القطعة المستقيمة عند نقطة منتصفها، ونقطة المنتصف هي $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$. وبما أن ميل القطعة المستقيمة المعطاة يساوي $\frac{1}{5}$، فإنّ ميل العمود المنصّف يساوي -5

39) **المعطيات:** T نقطة منتصف $\overline{SQ}$.

$\overline{SR} \cong \overline{QR}$

المطلوب: $\triangle SRT \cong \triangle QRT$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) T نقطة منتصف $\overline{SQ}$	1) معطى
2) $\overline{ST} \cong \overline{TQ}$	2) نظرية نقطة المنتصف
3) $\overline{SR} \cong \overline{QR}$	3) معطى
4) $\overline{RT} \cong \overline{RT}$	4) خاصية الانعكاس
5) $\triangle SRT \cong \triangle QRT$	5) SSS

مصادر المعلم للأنشطة الصفّية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 4

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (16) دون

الاسم ________ التاريخ ________

4-3 تدريبات إعادة التعليم

المتباينات في المثلث

متباينات الزوايا:

يمكنك استعمال خصائص المتباينات التي تتضمّن التعدّي والجمع والطرح، مع قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة، بالإضافة إلى خاصيّة المقارنة للمتباينة التي نصُّها:

لكلّ عددين حقيقيين a و b، يكون: $a < b$ أو $a = b$ أو $b > a$.

ويمكنك استعمال نظرية الزاوية الخارجية لإثبات المتباينة الآتية:

نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة	قياس أيّ زاوية خارجيّة لمثلث أكبر من قياس أيٍّ من زاويتَي المثلث الداخليتين البعيدتين عنها.	$m\angle 1 > m\angle A$ $m\angle 1 > m\angle B$

مثال استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقَّمة التي قياس كلٍّ منها أصغر من $m\angle 1$.

قياس الزاوية الخارجية أكبر من قياس أيٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها،
لذا فإن: $m\angle 4 < m\angle 1, m\angle 3 < m\angle 1$، حيث $\angle 3, \angle 4$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان.

تمارين

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة؛ لكتابة جميع الزوايا المرقَّمة التي تحقّق الشرط المحدّد في كلٍّ ممّا يأتي:

1) قياسها أصغر من $m\angle 1$. **$\angle 3, \angle 4$**

2) قياسها أكبر من $m\angle 3$. **$\angle 1, \angle 5$**

3) قياسها أصغر من $m\angle 1$. **$\angle 5, \angle 6$**

4) قياسها أكبر من $m\angle 1$. **$\angle 7$**

5) قياسها أصغر من $m\angle 7$. **$\angle 1, \angle 3, \angle 5, \angle 6, \angle TUV$**

6) قياسها أكبر من $m\angle 2$. **$\angle 4$**

7) قياسها أكبر من $m\angle 5$. **$\angle 1, \angle 7, \angle TUV$**

8) قياسها أصغر من $m\angle 4$ **$\angle 2, \angle 3$**

9) قياسها أصغر من $m\angle 1$. **$\angle 4, \angle 5, \angle 7, \angle NPR$**

10) قياسها أكبر من $m\angle 4$. **$\angle 1, \angle 8, \angle OPN, \angle ROQ$**

التمرينان 1, 2

التمارين 8–3

التمرينان 9, 10

الصف: الأول الثانوي   16   الفصل ٤: العلاقات في المثلث

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (17) دون

الاسم ________ التاريخ ________

4-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المتباينات في المثلث

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه:

عندما تكون أضلاع المثلث غير متطابقة، تتحقّق العلاقات الآتية بين أضلاعه وزواياه:

متباينة ضلع – زاوية	إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر، فإنّ قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.	إذا كان $AC > AB$، فإنّ $m\angle B > m\angle C$.
متباينة زاوية – ضلع	إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإنّ الضلع المقابل للزاوية الكبرى أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.	إذا كان $m\angle A > m\angle C$، فإنّ $BC > AB$.

مثال 1 اكتب زوايا ΔRST مرتّبة وفقًا لقياساتها من الأصغر إلى الأكبر.

الأضلاع مرتبة من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{SR}, \overline{ST}, \overline{RT}$

والزوايا المقابلة لهذه الأضلاع هي: $\angle T, \angle R, \angle S$ على الترتيب؛

لذا فالزوايا مرتبة من الأصغر إلى الأكبر على النحو الآتي: $\angle T, \angle R, \angle S$

مثال 2 اكتب أضلاع ΔABC مرتّبةً وفقًا لأطوالها من الأقصر إلى الأطول.

الزوايا مرتبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle A, \angle C, \angle B$

والأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي: $\overline{CB}, \overline{AB}, \overline{AC}$ على الترتيب؛

لذا فالأضلاع مرتبة من الأقصر إلى الأطول على النحو الآتي: $\overline{CB}, \overline{AB}, \overline{AC}$

تمارين

اكتب زوايا كلِّ مثلث وأضلاعه مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر فيما يأتي:

1) **$\angle T, \angle R, \angle S$** ; **$\overline{RS}, \overline{ST}, \overline{TR}$**

2) **$\angle T, \angle R, \angle S$** ; **$\overline{RS}, \overline{ST}, \overline{TR}$**

3) **$\angle C, \angle B, \angle A$** ; **$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$**

4) **$\angle S, \angle U, \angle T$** ; **$\overline{TU}, \overline{ST}, \overline{SU}$**

5) **$\angle B, \angle C, \angle A$** ; **$\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$**

6) **$\angle Q, \angle P, \angle R$** ; **$\overline{PR}, \overline{QR}, \overline{PQ}$**

7) **$\angle E, \angle C, \angle D$** ; **$\overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EC}$**

8) **$\angle X, \angle Z, \angle Y$** ; **$\overline{YZ}, \overline{XY}, \overline{XZ}$**

9) **$\angle T, \angle S, \angle R$** ; **$\overline{RS}, \overline{TR}, \overline{TS}$**

الصف: الأول الثانوي   17   الفصل ٤: العلاقات في المثلث

تدريبات المهارات (18) دون ضمن

الاسم ________ التاريخ ________

4-3 تدريبات المهارات

المتباينات في المثلث

استعمل الشكل المجاور لتحدّد الزاوية ذات القياس الأكبر في كل مجموعةٍ مما يأتي:

1) $\angle 1, \angle 3, \angle 4$ **$\angle 1$**

2) $\angle 4, \angle 5, \angle 7$ **$\angle 4$**

3) $\angle 2, \angle 3, \angle 6$ **$\angle 6$**

4) $\angle 5, \angle 6, \angle 8$ **$\angle 8$**

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقّق الشرط المحدّد في كلٍّ ممّا يأتي:

5) قياسها أقلّ من $m\angle 1$. **$\angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 7, \angle 8$**

6) قياسها أقلّ من $m\angle 9$. **$\angle 2, \angle 4, \angle 6, \angle 7$**

7) قياسها أكبر من $m\angle 5$. **$\angle 1, \angle 3$**

8) قياسها أكبر من $m\angle 8$ **$\angle 1, \angle 3, \angle 5$**

قارن بين قياسي الزاويتين في كلٍّ ممّا يأتي:

9) $m\angle ABD, m\angle BAD$ **$m\angle ABD > m\angle BAD$**

10) $m\angle ADB, m\angle BAD$ **$m\angle ADB < m\angle BAD$**

11) $m\angle BCD, m\angle CDB$ **$m\angle BCD > m\angle CDB$**

12) $m\angle CBD, m\angle CDB$ **$m\angle CBD > m\angle CDB$**

اكتب زوايا كلّ مثلث وأضلاعه مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر فيما يأتي:

13) **$\angle Q, \angle R, \angle P$, $\overline{RP}, \overline{PQ}, \overline{RQ}$**

14) **$\angle K, \angle M, \angle L$, $\overline{ML}, \overline{KL}, \overline{KM}$**

15) **$\angle X, \angle Y, \angle Z$; $\overline{YZ}, \overline{XZ}, \overline{XY}$**

16) **$\angle B, \angle A, \angle C, \overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$**

الصف: الأول الثانوي   18   الفصل ٤: العلاقات في المثلث

تدريبات حل المسألة (19) دون ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

4-3 تدريبات حلّ المسألة

المتباينات في المثلث

1) **مسافات:** يقع منزلا أيمن وسعد في شارع واحدٍ مستقيم، ويمكنهما رؤية سارية علم بعيدةٍ عنهما من شرفتَي منزليهما، إذا كانت الزاوية التي يصنعها خط نظر أيمن للسارية مع القطعة الواصلة بين المنزلين، أكبر من الزاوية التي يصنعها خط نظر سعد للسارية مع القطعة الواصلة بين المنزلين، فما العلاقة بين بُعدَيهما عن سارية العلم؟

منزل أيمن أقرب لسارية العلم.

2) **مستودع:** قرَّر سعد بناء مستودع في مزرعته عند الزاوية ذات القياس الأكبر، فإذا كانت حدود مزرعته مبيَّنة كما في الشكل أدناه،

فعند أي زاوية سيبني المستودع؟ ولماذا؟

عند $\angle A$؛ لأنها تقابل الضلع الأطول في المثلث.

3) **خيط:** كوّن صالح مثلثًا باستعمال ثلاثة عيدان، ثم ربط طرف خيط بين الرأس M ونقطة على العود المقابل للرأس M، وشدّ الخيط حتى أصبح مستقيمًا، هل يمكن أن يزيد طول الخيط على طول الضلع الأطول بين الضلعين الآخرين؟ ولماذا؟

إجابة ممكنة: لا؛ لأن الخيط يقسم المثلث إلى مثلثين؛ أحدهما قائم الزاوية أو منفرج الزاوية؛ لأن أحد طرفي الخيط سيصنع مع العود المربوط معه زاوية قائمة أو منفرجة، وفي هذا المثلث سيكون الضلع المقابل للزاوية القائمة أو الزاوية المنفرجة أطول من الخيط، وهذا الضلع سيكون ضلعًا للمثلث الكبير أيضًا.

4) **مربّعات:** لدى محمد ثلاثة مربّعات مختلفة، وقد رتّبها لتشكّل مثلثًا كما في الشكل أدناه، بناءً على المعطيات المُبيَّنة في الشكل، اكتب أرقام المربّعات مرتّبةً من المربع ذي المحيط الأصغر إلى المربع ذي المحيط الأكبر.

2,1 ,3

5) **مُرشد سياحي:** يحمل مرشد سياحي خريطة عليها المعالم المبيَّنة في الشكل التالي:

a) بناءً على المعطيات الواردة في الشكل، أيُّ موقعين أحدهما أقرب إلى الآخر؟

مدينة الملاهي والمتحف

b) بناءً على المعطيات الواردة في الشكل، أيُّ موقعين أحدهما أبعد إلى الآخر؟

الفندق ومدينة الملاهي

الصف: الأول الثانوي   19   الفصل ٤: العلاقات في المثلث

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر الدرس 3 - 4

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

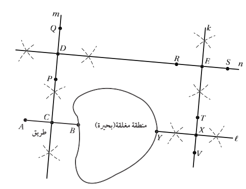
التدريبات الإثرائية (20) ضمن فوق

الاسم ________________ التاريخ ________

4-3 التدريبات الإثرائيّة

إنشاء هندسيّ

يبيّن الشكل أدناه القطعة المستقيمة AB عن يسار منطقة مغلقة (بحيرة)، وتتطلّب المسألة رسم قطعة مستقيمة أخرى XY عن يمين المنطقة المغلقة، على أن تكون النقاط A, B, X, Y على استقامة واحدة، علمًا بأنه لا يُسمح لك ملامسة أو عُبور المنطقة المغلقة بالفرجار أو المسطرة.



تتبّع الخطوات (5–1)؛ لإنشاء القطعة المستقيمة $\overline{XY}$ ، على أن تكون على استقامة القطعة $\overline{AB}$.

1) أنشئ العمود المنصّف لِـ $\overline{AB}$ ، وسمِّ نقطة المنتصف C ، والعمود m.

2) عيّن النقطتين P, Q على العمود m ، على أن تقعا فوق المنطقة المغلقة، وأنشئ العمود n المنصّف لِـ $\overline{PQ}$ ، وسمِّ نقطة تقاطع المستقيمين m وَ n النقطة D.

3) عيّن النقطتين R, S على العمود n، على أن تقعا يمين المنطقة المغلقة، وأنشئ العمود k المنصّف لِـ $\overline{RS}$، وسمّ نقطة تقاطع المستقيمين n و k النقطة E.

4) عيّن النقطة X على العمود k ، على أن تكون X أسفل العمود n ، وتكون $\overline{EX}$ تطابق $\overline{DC}$.

5) عيّن النقطتين T وَ V على المستقيم k وعلى جانبَي X ، على أن تكون كلٌّ من $\overline{XT}$ و $\overline{XV}$ متطابقتين. ثم أنشئ العمود l المنصّف لِـ $\overline{TV}$، وسمّ نقطة التقاء العمود l مع حدّ المنطقة المغلقة النقطة Y، وعليه تكون $\overline{XY}$ هي القطعة المطلوبة.

6) إذا كانت A, B, X, Y تمثّل مدنًا ستمرُّ فوقها طائرة، بحيث يكون خط سيرها مستقيمًا فوق هذه المدن الأربع، فكيف يمكننا على الأرض معرفة المسافة التي ستقطعها الطائرة بين المدينتين A, X ؟

إجابة ممكنة: بقياس $\overline{DE}$

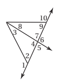
الصف: الأول الثانوي 20 الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

كتاب التمارين (29) دون ضمن فوق

3 - 4 المتباينات في المثلث

الفصل الرابع العلاقات في المثلث

حدد الزاوية التي لها أكبر قياس في كلٍّ من الأسئلة الآتية مستعملًا بالشكل المجاور :



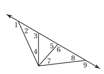
1) $\angle 1, \angle 3, \angle 4$ **$\angle 1$**

2) $\angle 4, \angle 8, \angle 9$ **$\angle 4$**

3) $\angle 2, \angle 3, \angle 7$ **$\angle 7$**

4) $\angle 7, \angle 8, \angle 10$ **$\angle 10$**

استعمل نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كلٍّ من الأسئلة الآتية :



5) قياسها أقل من $m\angle 1$.

$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 7, \angle 8$

6) قياسها أقل من $m\angle 3$.

$\angle 5, \angle 7, \angle 8$

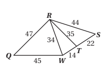
7) قياسها أكبر من $m\angle 7$.

$\angle 1, \angle 3, \angle 5, \angle 9$

8) قياسها أكبر من $m\angle 2$.

$\angle 6 , \angle 9$

مستعملًا الشكل المجاور، حدد العلاقة بين قياسَي الزاويتين في كلٍّ من الأسئلة الآتية:



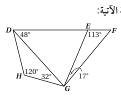
9) $\angle QRW, \angle RWQ$
$m\angle QRW < m\angle RWQ$

10) $\angle RTW, \angle TWR$
$m\angle RTW < m\angle TWR$

11) $\angle RST, \angle TRS$
$m\angle RST > m\angle TRS$

12) $\angle WQR, \angle QRW$
$m\angle WQR < m\angle QRW$

مستعملًا الشكل المجاور، حدد العلاقة بين طولَي كل قطعتين مستقيمتين في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

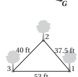


13) $\overline{DH}, \overline{GH}$
$DH > GH$

14) $\overline{DE}, \overline{DG}$
$DE < DG$

15) $\overline{EG}, \overline{FG}$
$EG < FG$

16) $\overline{DE}, \overline{EG}$
$DE > EG$



17) **حديقة :** يبين الشكل المجاور مواقع ثلاث شجرات في حديقة.
عند أيّ شجرة توجد الزاوية الأكبر؟ **2**

29

الفصل 4 اختبار منتصف الفصل

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ لتقويم تقدم الطلبة في النصف الأول من الفصل.

للأسئلة التي لم يُجيبوا عنها بشكل صحيح، اطلب إلى الطلبة مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (70) .

المطويات متابعة المطويات

قبل حل أسئلة اختبار منتصف الفصل، شجِّع الطلاب على مراجعة الملاحظات التي دوَّنوها في مطوياتهم حول الدروس 4-1 إلى 4-3 .

إجابات:

11) المداخل الثلاثة تشكِّل رؤوس مثلث، ونقطة التقاء المنصفات العمودية لأضلاع هذا المثلث على أبعادٍ متساويةٍ من الرؤوس، ومن غير الضروري أن تكون تلك النقطة نقطة التقاء الارتفاعات.

12) $\angle T, \angle S, \angle R; \overline{RS}, \overline{RT}, \overline{ST}$

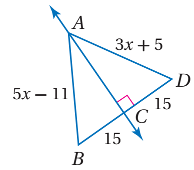
13) $\angle G, \angle H, \angle F; \overline{FH}, \overline{GF}, \overline{GH}$

الفصل 4 اختبار منتصف الفصل

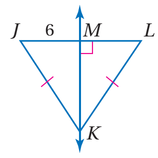
الدروس من 4-1 إلى 4-3

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين: (الدرس 4-1)

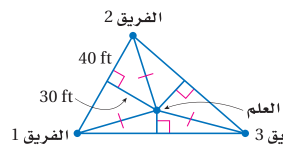
1) AB **29**



2) JL **12**

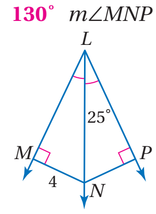


3) **مخيَّم:** يلعب المشاركون في مخيَّم كشفيٍّ لعبة الفوز بالعلم. إذا كانت الفِرق الثلاثة تقف في الأماكن المبيَّنة في الشكل أدناه، والعلم مثبّت عند نقطة متساوية البعد عن الفِرق الثلاثة، فما المسافة بين العلم وكل من هذه الفِرق؟ (الدرس 4-1) **50 ft**

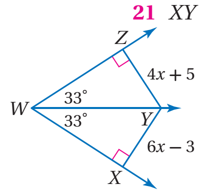


أوجد كلًّا من القياسين الآتيين: (الدرس 4-1)

4) $m\angle MNP$ **130°**



5) XY **21**

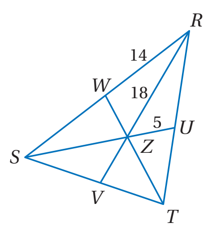


إذا كانت Z مركز $\triangle RST$ ، $RZ = 18$.
فأوجد كلًّا من الأطوال الآتية: (الدرس 4-2)

6) ZV **9**

7) SZ **10**

8) SR **28**

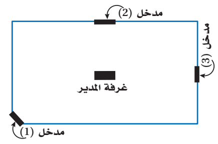


هندسة إحداثيَّة: أوجد إحداثيات مركز كل مثلث عُلمت رؤوسه في السؤالين الآتيين: (الدرس 4-2)

9) $A(1, 7), B(4, 2), C(7, 7)$ $\left(4, \frac{16}{3}\right)$

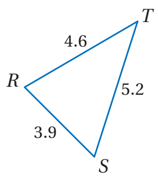
10) $J(-5, 5), K(-5, -1), L(1, 2)$ **(−3, 2)**

11) **تصميم هندسيٌّ:** في إحدى المدارس، صمَّم مهندس مبنى للإدارة، وراعى في التصميم أن تكون غرفة المدير على نفس البعد من مداخل المبنى الثلاثة. هل تقع غرفة المدير عند نقطة التقاء ارتفاعات المثلث الذي رؤوسه هي المداخل الثلاثة؟ ولماذا؟ (الدرس 4-2) انظر الهامش

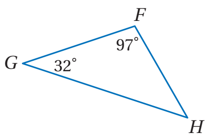


اكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتَّبةً من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين : (الدرس 4-3) (12, 13 انظر الهامش)

12)



13)

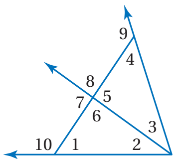


14) **مسافات:** في الخريطة أدناه، إذا علمت أن $m\angle C = 70°, m\angle A = \frac{2}{3}m\angle B$ ، فأجب عما يأتي: (الدرس 4-3)

a) أوجد قياس كلٍّ من الزاويتين A, B. $m\angle A = 44°, m\angle B = 66°$

b) رتِّب أطوال أضلاع المثلث من الأقصر إلى الأطول. **BC, AC, AB**

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كلٍّ من الأسئلة الآتية: (الدرس 4-3)



15) قياسها أقل من $m\angle 8$. $\angle 4, \angle 3$

16) قياسها أكبر من $m\angle 3$. $\angle 9, \angle 6, \angle 8$

17) قياسها أقل من $m\angle 10$. $\angle 8, \angle 3, \angle 4, \angle 6, \angle 2$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في 25% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في 50% تقريبًا من الأسئلة أو أقل،
فاختر	المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	مراجعة الدروس 4-1, 4-2, 4-3		تدريبات إعادة التعليم، ص (6, 11, 16)
	تدريبات المهارات ، ص (8, 13, 18)		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

4-4 ملاحظات الدرس

4-4 البرهان غير المباشر
Indirect Proof

فيما سبق:
درستُ البراهين الحرّة وذات العمودين والتسلسليّة.

والآن:
- أكتب براهين جبريّة غير مباشرة.
- أكتب براهين هندسيّة غير مباشرة.

المفردات:
التبرير المباشر
direct reasoning
البرهان المباشر
direct proof
التبرير غير المباشر
indirect reasoning
البرهان غير المباشر
indirect proof
البرهان بالتناقض
proof by contradiction

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

أعلن محل أحذية عن تخفيض مقداره 25% على جميع القطع الموجودة في المحل، **فسألت هند أختها مها خلال تسوقهما في المحل قائلة:** إذا كان ثمن القطعة 80 ريالًا بعد التخفيض، فهل كان ثمن القطعة أكثر من 100 ريالٍ قبل التخفيض؟

فأجابت مها: نعم؛ لأنه لو كان ثمن القطعة قبل التخفيض 100 ريالٍ أو أقل، فإن ثمنها بعد التخفيض سيكون 75 ريالًا أو أقل.

البرهان الجبري غير المباشر: البراهين التي كتبتها حتى الآن استعملت فيها **التبرير المباشر**، حيث كنت تبدأ بمعطيات صحيحة وتثبت أن النتيجة صحيحة هذه الطريقة من البرهان تعتبر **برهانًا مباشرًا**، وعندما تستعمل **التبرير غير المباشر** فإنك تفترض أن النتيجة خطأ، ثم تبيّن أنّ هذا الافتراض يؤدي إلى تناقضٍ مع المعطيات أو مع أيّ حقيقةٍ سابقةٍ كتعريف، أو مسلمة، أو نظرية. وحيث إن جميع خطوات البرهان تكون صحيحة منطقيًّا، فإنّ هذا يكون إثباتًا لخطأ الافتراض، وعلى ذلك يجب أن تكون النتيجة الأصلية صحيحةً، ويسمّى هذا النوع من البرهان **برهانًا غير مباشر** أو **برهانًا بالتناقض**. والخطوات التالية تلخص عمليّة البرهان غير المباشر.

> **مفهوم أساسي** — **خطوات كتابة البرهان غير المباشر** — أضف إلى مطويتك
>
> **الخطوة 1:** حدّد النتيجة التي ستبرهنها. ثم افترض خطأها، وذلك بافتراض أنّ نفيها صحيح.
>
> **الخطوة 2:** استعمل التبرير المنطقي لتبين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقضٍ مع المعطيات أو مع حقيقةٍ أخرى، مثل تعريف أو مسلمة أو نظريّة.
>
> **الخطوة 3:** بما أن الافتراض الذي بدأت به أدّى إلى تناقض، فبيِّن أن النتيجة الأصلية المطلوب إثباتها يجب أن تكون صحيحة.

مثال 1 صياغة افتراض للبدء في برهان غير مباشر

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

a) $\angle ABC \ncong \angle XYZ$

الافتراض هو: $\angle ABC \cong \angle XYZ$

b) **إذا كان العدد 6 عاملًا للعدد n، فإن 2 عامل للعدد n .**

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي 2 عامل للعدد n ، ونفي هذه النتيجة هو 2 ليس عاملًا للعدد n ؛ لذا فالافتراض هو: العدد 2 ليس عاملًا للعدد n .

c) **$\angle 3$ زاوية منفرجة.**

الافتراض هو: $\angle 3$ ليست زاوية منفرجة.

تحقق من فهمك

1A) $x > 5$ $x \leq 5$

1B) النقاط J, K, L تقع على استقامة واحدة. النقاط J,K,L لا تقع على استقامة واحدة

1C) $\triangle XYZ$ متطابق الأضلاع. $\triangle XYZ$ ليس متطابق الأضلاع.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-4

كتابة براهين حرّة وذات عمودين وتسلسليّة.

الدرس 4-4

كتابة براهين جبرية غير مباشرة.

كتابة براهين هندسية غير مباشرة.

ما بعد الدرس 4-4

وضع تخمينات حول الزوايا والمستقيمات والمضلعات والدوائر، وتحديد صحة التخمينات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- هل فكرت مها بطريقةٍ مباشرةٍ عندما أجابت أختُها؟ ولماذا؟ إجابة ممكنة: لا؛ لأنها لو فكرت بطريقةٍ مباشرةٍ، كانت ستحسب ثمن القطعة قبل التخفيض وتقارنها بـ 100 ريالٍ.
- هل يمكن اعتبار المبرر الذي قدمته مها مبررًا غير مباشرٍ؟ نعم.
- أيُّ الطريقتين أسهل في موقفٍ كهذا؛ الطريقة التي قدّمت بها مها المبرِّر، أم حساب سعر القطعة قبل التخفيض؟ ولماذا؟ الطريقة التي قدمت بها مها المبرِّر؛ لأن حساب سعر القطعة قبل التخفيض يستلزم إجراء عمليةٍ حسابيةٍ أصعب.

مصادر الدرس 4-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم، ص (243, 247)	• تنويع التعليم، ص (243, 247)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (30)	• كتاب التمارين، ص (30)	• كتاب التمارين، ص (30)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (21) • تدريبات المهارات، ص (23) • تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

يمكن أن تُستعمل البراهين غير المباشرة لإثبات صحّة المفاهيم الجبريّة.

قراءة الرياضيات

التناقض التناقض مبدأ في المنطق ينصُّ على أنه لا يمكن تحقق الافتراض ونفيه في آنٍ واحد.

مثال 2 كتابة برهان جبري غير مباشر

اكتب برهانًا غير مباشر لتبين أنه: إذا كان $-3x + 4 > 16$ ، فإن $x < -4$

المعطيات: $-3x + 4 > 16$

المطلوب: إثبات أن $x < -4$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: نفي $x < -4$ هو $x \geq -4$ ؛ لذا افترض أن $x \geq -4$ صحيحة.

الخطوة 2:

$x \geq -4$	افترض
$-3x \leq 12$	اضرب الطرفين بـ -3
$-3x + 4 \leq 12 + 4$	اجمع 4 للطرفين
$-3x + 4 \leq 16$	بسّط

ولكن $-3x + 4 > 16$ معطى

الخطوة 3: الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعلومة المعطاة $-3x + 4 > 16$ ؛ لذا فالافتراض بأن $x \geq -4$ يجب أن يكون خطأً، وأن النتيجة الأصليّة $x < -4$ هي الصحيحة.

تحقق من فهمك

اكتب برهانًا غير مباشر لكلٍّ من العبارتين الآتيتين: **(2A, 2B) انظر ملحق الإجابات**

2A) إذا كانت $7x > 56$ ، فإنّ $x > 8$

2B) إذا كان $-c$ موجبًا ، فإنّ c سالبٌ.

ويمكنك أن تستعمل البرهان غير المباشر في المواقف الحياتية اليوميّة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال البرهان الجبري غير المباشر

تسوق: اشترى فهد قميصين بأكثر من 60 ريالًا، وبعد عدّة أسابيع سأله صديقه حامدٌ عن ثمن كل قميص، ولكن فهدًا لم يتذكر ثمن كل قميص. استعمل البرهان غير المباشر لتبين أن أحد القميصين على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالًا.

المعطيات: ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالًا.

$x + y > 60$ ، حيث x ثمن القميص الأول، وy ثمن القميص الثاني.

المطلوب: إثبات أن قميصًا واحدًا على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالًا؛ أي أن $x > 30$ أو $y > 30$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن ثمن كلٍّ من القميصين لا يزيد على 30 ريالًا، أي أنّ $x \leq 30 , y \leq 30$

الخطوة 2: إذا كانت $x \leq 30 , y \leq 30$ ، فإنّ $x + y \leq 30 + 30$ ؛ أي أن $x + y \leq 60$. وهذا تناقض، لأن ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالًا.

الخطوة 3: بما أن الافتراض أدّى إلى تناقض مع حقيقة معلومة، فإن الافتراض بأن $x \leq 30 , y \leq 30$ افتراض خطأ. لذا يجب أن يكون ثمن أحد القميصين على الأقل أكثر من 30 ريالًا.

تحقق من فهمك انظر ملحق الإجابات

3) **رحلة:** قطع رياض أكثر من 360 كيلومترًا في رحلة، وتوقّف في أثناء سفره مرتين فقط. استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن رياضًا قطع أكثر من 120 كيلومترًا في إحدى مراحل رحلته الثلاث على الأقل.

البرهان الجبري غير المباشر

الأمثلة 1-4 تبيّن خطوات كتابة برهان غير مباشر، ويجب أن يكون الطلاب قادرين على صياغة الافتراضات للبراهين غير المباشرة واستعمالها.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

a) $\overline{EF}$ ليست عمودًا منصّفًا. $\overline{EF}$ عمودٌ منصّف.

b) $3x = 4y + 1$ ‏ $3x \neq 4y + 1$

c) إذا كانت B نقطة منتصف $\overline{LH}$ و $LH = 26$ فإنّ $\overline{BH}$ تطابق $\overline{LB}$. $\overline{BH}$ لا تطابق $\overline{LB}$.

2 اكتب برهانًا غير مباشر؛ لتبيّن أنّه إذا كان $-2x + 11 < 7$ فإنّ $x > 2$.

المعطيات: $-2x+11 < 7$

المطلوب: إثبات أن $x > 2$

الخطوة 1: نفي $x > 2$ هو $x \leq 2$ ، لذا افترض أن $x \leq 2$ صحيحة.

الخطوة 2:

$x \leq 2$	افترض
$-2x \geq -4$	اضرب الطرفين بـ -2
$-2x+11 \geq -4+11$	اجمع 11 للطرفين
$-2x+11 \geq 7$	بسّط
ولكن $-2x+11 < 7$	مُعطًى

الخطوة 3:

الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعلومةِ المعطاة: $-2x+11 < 7$ ؛ لذا فالافتراض بأن $x \leq 2$ ، يجب أن يكون خطأً، وأن النتيجة الأصلية $x > 2$ هي الصحيحة.

تنبيه!

التناقضات يمكن أن يُستعمل البرهان بالتناقض فقط إذا وُجد فرض يفترض أنّه صحيح.

المحتوى الرياضي

قراءة: حل المسائل اللفظية يعتمد على فهم الطلاب الكلمات الأساسية التي تُشير إلى نوع المعرفة الرياضية اللازمة للحل. حلّل النص لتحدّد الوضع الحقيقي في كل برهان غير مباشر.

تُستعمل البراهين غير المباشرة عادة لإثبات مفاهيم في نظرية الأعداد، ويكون من المفيد في هذه البراهين تذكّر أنّه يمكنك تمثيل العدد الزوجي على الصورة $2k$، والعدد الفردي على الصورة $2k + 1$ حيث k، عدد صحيح.

إرشادات للدراسة

نظرية الأعداد هي فرع من فروع الرياضيات تختص بدراسة الأعداد وخصائصها والعمليات عليها وتصنيفها إلى: زوجي، فردي، أولي، غير أولي...، وتثبت النظريات والحقائق لهذه الأعداد.

مثال 4 براهين غير مباشرة في نظرية الأعداد

اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $x + 2$ عددًا زوجيًا، فإنّ x عدد زوجي.

المعطيات: $x + 2$ عدد زوجي.

المطلوب: x عدد زوجي.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ x عدد فردي، وهذا يعني أن $x = 2k + 1$، حيث k عدد صحيح.

الخطوة 2: $x + 2 = (2k + 1) + 2$ عوّض

$= (2k + 2) + 1$ خاصيّة الإبدال

$= 2(k + 1) + 1$ خاصيّة التوزيع

والآن حدّد ما إذا كان $2(k + 1) + 1$ عددًا زوجيًا أو فرديًا. بما أن k عدد صحيح، فإنّ $k + 1$ عدد صحيح أيضًا. افترض أن m تساوي $k + 1$، فيكون:

$2(k + 1) + 1 = 2m + 1$ عوّض

إذن $x + 2$ يمكن أن يُمثَّل بـ $2m + 1$، حيث m عدد صحيح، ولكن هذا التمثيل يعني أنّ $x + 2$ عدد فردي. وهذا يتناقض مع العبارة المعطاة $x + 2$ عدد زوجي.

الخطوة 3: بما أنّ افتراض x عدد فردي أدّى إلى تناقضٍ مع العبارة المعطاة، فإنّ النتيجة الأصليّة x عدد زوجي يجب أن تكون صحيحةً.

تحقق من فهمك انظر ملحق الإجابات

4) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه "إذا كان مربع عدد صحيح فرديًّا، فإنّ العدد الصحيح فرديٌّ".

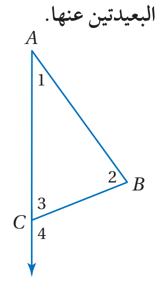
البرهان غير المباشر في الهندسة: يمكن أن يستعمل التبرير غير المباشر لإثبات صحة عبارات في الهندسة، مثل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة.

تنبيه!

البرهان بالتناقض مقابل المثال المضاد البرهان بالتناقض وإعطاء مثال مضاد أمران مختلفان؛ إذ يُستعمل المثال المضاد لإثبات خطأ تخمين أو افتراض، ولا يمكن استعماله لإثبات صحة التخمين أو الافتراض.

مثال 5 برهان هندسي

أثبت أنّ قياس الزاوية الخارجيّة لمثلث يكون أكبر من قياس كلٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.



ارسم شكلًا توضيحيًّا، ثم عيّن عليه المعطيات والمطلوب.

المعطيات: $\angle 4$ زاوية خارجية لـ $\triangle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle 4 > m\angle 2$، وأن $m\angle 4 > m\angle 1$.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $m\angle 4 \ngtr m\angle 1$، أو $m\angle 4 \ngtr m\angle 2$.

أيْ أنّ $m\angle 4 \leq m\angle 1$، أو $m\angle 4 \leq m\angle 2$.

مثالان إضافيان

3 تعليم: دفع سامر مبلغًا أقل من 156 ريالًا ثمنًا لثلاث سلع متساوية في أسعارها، متضمنةً 15 ريالاً تبرعًا لصندوق خيري. استعمل البرهان غير المباشر لتبيِّن أن سعر السلعة الواحدة أقل من 47 ريالًا.

المعطيات: دفع سامر 156 ريالًا.

المطلوب: إثبات أن سلعة واحدة على الأقل سعرها أقل من 47 ريالًا.

أي أنّه إذا كان $3x + 15 < 156$ فإن $x < 47$

الخطوة 1: افترض أن $x \geq 47$

الخطوة 2:

$47 + 47 + 47 + 15 \geq 156$

وهذا يناقض معلومة أنّ الثمن الكلي كان أقل من 156 ريالًا.

الخطوة 3: بما أن افتراض أن $x \geq 47$ أدى إلى تناقض مع العبارة المعطاة، فإن النتيجة الأصلية $x < 47$ يجب أن تكون صحيحة.

4 اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنّه إذا كان x عددًا أوليًّا لا يساوي 3 فإن $\frac{x}{3}$ ليس عددًا صحيحًا.

المعطيات: x عدد أولي لا يساوي 3

المطلوب: $\frac{x}{3}$ ليس عددًا صحيحًا.

الخطوة 1: افرض أنّ $\frac{x}{3}$ عدد صحيح، وهذا يعني أنّ: $\frac{x}{3} = n$ حيث n عدد صحيح.

الخطوة 2: $\frac{x}{3} = n$ (من الفرض)

$x = 3n$ (خاصية الضرب)

وهذا يناقض كون x عددًا أوليًّا لأنّ x يقبل القسمة على n و $n \neq 1$ لأن $x \neq 3$

الخطوة 3: بما أن افتراض $\frac{x}{3}$ عدد صحيح أدى إلى تناقض مع العبارة المعطاة، فإن النتيجة الأصلية $\frac{x}{3}$ ليس عددًا صحيحًا يجب أن تكون صحيحة.

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيّون: أخبر الطلاب الذين اعتادوا أن يحلّوا معادلات ومتباينات وربّما جرّبوا حل مسائل جبريّة كخطوة في كتابة براهين غير مباشرة بأن هذه الطريقة (مع كونها صحيحة)، إلّا أنها لا توضِّح البرهان غير المباشر. وعليهم تجنُّب الإجابة عن أسئلة الدرس كمسائل جبرية.

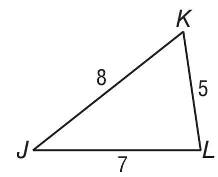
البرهان غير المباشر في الهندسة

المثال 5 يبيّن كيفية استعمال التبرير غير المباشر في المسائل الهندسية.

مثال إضافي

5 **المعطيات:** أطوال أضلاع $\triangle JKL$ مبينة في الشكل أدناه.

المطلوب: إثبات أن $m\angle K < m\angle L$



الخطوة 1: افترض أنّ $m\angle K \geq m\angle L$.

الخطوة 2: من العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه نَجد أنَّ: $JL \geq JK$ وهذا يناقض أطوال الأضلاع المعطاة.

الخطوة 3: إذن الفرض $m\angle K \geq m\angle L$ خاطئ. إذن $m\angle K < m\angle L$.

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي: قم بإعداد تسجيلٍ مرئيٍّ تبيِّن فيه كيف تكتب برهانًا بالتناقض، ثم حمّله على موقع المدرسة الإلكتروني. قد يكون هذا العمل مفيدًا للطلاب الذين يواجهون صعوبةً في فهم طريقة كتابة البرهان بالتناقض، إذ يمكنهم مشاهدة التسجيل عدة مراتٍ خارج وقت الحصص الصفية.

الخطوة 2: تحتاج فقط إلى بيان أن الافتراض $m\angle 4 \leq m\angle 1$ يؤدي إلى تناقضٍ، وبالمثل سيؤدي الافتراض $m\angle 4 \leq m\angle 2$ إلى تناقضٍ أيضًا.

الافتراض $m\angle 4 \leq m\angle 1$ يعني أن: $m\angle 4 = m\angle 1$ أو $m\angle 4 < m\angle 1$.

الحالة 1: $m\angle 4 = m\angle 1$

$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$ نظرية الزاوية الخارجيّة

$m\angle 4 = m\angle 4 + m\angle 2$ عوّض

$0 = m\angle 2$ اطرح $m\angle 4$ من كلا الطرفين.

وهذا يناقض حقيقة أن قياس الزاوية أكبر من 0؛ لذا فإن $m\angle 4 \neq m\angle 1$.

الحالة 2: $m\angle 4 < m\angle 1$

$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$ نظرية الزاوية الخارجيّة

$m\angle 4 > m\angle 1$ قياسات الزوايا موجبة

هذا يناقض الفرض بأن $m\angle 4 < m\angle 1$

الخطوة 3: في الحالتين يؤدي الافتراض إلى تناقض مع نظرية أو تعريف؛ لذا فالنتيجة الأصليّة بأنّ $m\angle 4 > m\angle 2$ وأن $m\angle 4 > m\angle 1$ يجب أن تكون صحيحة.

إرشادات للدراسة

تعرّف التناقضات

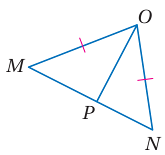
تذكّر أن التناقض في البرهان غير المباشر لا يكون دائمًا مع المعطيات أو الفرض الذي تبدأ به، بل يمكن أن يكون مع حقيقة معلومة أو تعريف كما ورد في الحالة 1 من المثال 5، حيث إن قياس أي زاوية في مثلث يجب أن يكون أكبر من 0.

تحقق من فهمك

5) اكتب برهانًا غير مباشر. انظر الهامش

المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}$, $\overline{MP} \not\cong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \not\cong \angle NOP$



تأكد

المثال 1 اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ $\overline{AB} \not\cong \overline{CD}$

2) $\triangle XYZ$ مختلف الأضلاع. $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين أو متطابق الأضلاع

3) إذا كان $4x < 24$، فإنّ $x < 6$ $x \geq 6$

4) $\angle A$ ليست زاوية قائمة. $\angle A$ زاوية قائمة

المثال 2 اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين: (5,6 انظر ملحق الإجابات

5) إذا كان $2x + 3 < 7$، فإنّ $x < 2$

6) إذا كان $3x - 4 > 8$، فإنّ $x > 4$

المثال 3

7) **كرة قدم:** سجّل فهد 13 هدفًا لصالح فريقه المدرسي في المباريات الست الأخيرة. أثبت أنّ متوسط عدد الأهداف التي سجلها في كل مباراة كان أقل من 3 انظر ملحق الإجابات

المثال 4

8) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنّه إذا كان $5x - 2$ عددًا فرديًّا، فإن x عدد فردي. انظر ملحق الإجابات

المثال 5 اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين: 9,10) انظر ملحق الإجابات

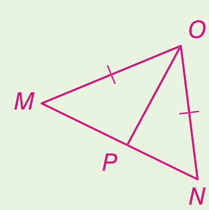
9) وتر المثلث القائم الزاوية هو أطول أضلاعه.

10) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإنّه لا يمكن أن تكونا منفرجتين معًا.

إجابة (تحقق من فهمك)

5) **المعطيات:** $\overline{MO} \cong \overline{ON}$, $\overline{MP} \not\cong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \not\cong \angle NOP$



برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $\angle MOP \cong \angle NOP$.

الخطوة 2: تعلم أن $\overline{MO} \cong \overline{ON}$ وأن $\overline{OP} \cong \overline{OP}$ بحسب خاصية الانعكاس. وإذا كانت $\angle MOP \cong \angle NOP$، فإنّ $\triangle MOP \cong \triangle NOP$ بحسب SAS. ويكون $\overline{MP} \cong \overline{NP}$؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة. وهذه النتيجة تناقض المعلومة المعطاة.

الخطوة 3: إذن الفرض خطأ، إذن $\angle MOP \not\cong \angle NOP$.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

11) إذا كان $2x > 16$ ، فإنّ $x > 8$. $x \le 8$

12) $\angle 1$, $\angle 2$ زاويتان غير متكاملتين. $\angle 1$, $\angle 2$ زاويتان متكاملتان

13) إذا تساوى ميلا مستقيمين، فإنّ المستقيمين متوازيان. المستقيمان غير متوازيين

14) العدد الفردي لا يقبل القسمة على 2. العدد الفردي يقبل القسمة على 2

المثال 2 اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي: (15,16 انظر ملحق الإجابات)

15) إذا كان $-3x + 4 < 7$ ، فإنّ $x > -1$.

16) إذا كان $-2x - 6 > 12$ ، فإنّ $x < -9$.

المثال 3

17) **ألعاب حاسوب:** اشترى منصور لعبتي حاسوب بأكثر من 400 ريال، وبعد أسابيع قليلة سأله صديقه كم تكلفة اللعبة الواحدة. فلم يتذكر منصور ذلك. استعمل التبرير غير المباشر؛ لتبين أن إحدى اللعبتين على الأقل كلّفت أكثر من 200 ريال. انظر الهامش

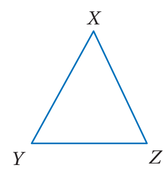
18) **جمع التبرّعات:** أقامت جمعيّة خيرية حفلة لجمع التبرعات لمساعدة الفقراء والمحتاجين، وكان سعر تذكرة الدخول للكبار 30 ريالًا، وللأطفال 12.5 ريالًا. إذا بيعت 375 تذكرة، وكان ريعها أكثر من 7300 ريال، فأثبت أنه تم بيع 150 تذكرة على الأقل للكبار. انظر الهامش

المثالان 4, 5 اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي: (19–25 انظر ملحق الإجابات)

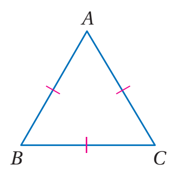
19) **المعطيات:** xy عدد صحيح فردي.
المطلوب: كلًّا من x, y عدد صحيح فردي

20) **المعطيات:** n^2 عدد زوجي.
المطلوب: n عدد زوجي.

21) **المعطيات:** $XZ > YZ$
المطلوب: $\angle X \not\cong \angle Y$



22) **المعطيات:** $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع.
المطلوب: $\triangle ABC$ متطابق الزوايا.



23) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه لا يمكن أن يكون للمثلث أكثر من زاوية قائمة.

24) اكتب برهانًا غير مباشر للنظرية 4.10.

25) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنّه إذا كان $\frac{1}{b} < 0$ ، فإن b عدد سالب.

26) **كرة سلّة:** عندما خرج عدنان من الملعب ليدخل زميل له قُبيل نهاية الشوط الأول من المباراة كان فريق مدرسته متقدّمًا بـ 28 نقطة مقابل 26 . وعندما عاد مع بداية الشوط الثاني كان الفريق المنافس متقدمًا بـ 29 نقطة مقابل 28 نقطة. استنتج أخو عدنان حين علم ذلك أنّ لاعبًا من الفريق المنافس سجّل ثلاث نقاط من رمية واحدة. أثبت صحّة أو خطأ استنتاجه باستعمال البرهان غير المباشر ومعلومات الربط مع الحياة.

انظر ملحق الإجابات

الربط مع الحياة

هناك أكثر من طريقة لتسجيل ثلاث نقاط في كرة السلة، منها التسجيل من خارج المنطقة، ومنها أن يسجّل اللاعب نقطتين ويحصل على رمية حرة نتيجة خطأ من الفريق المنافس ويسجل منها نقطة.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	11-23 ، 31 ، 33-43
ضمن المتوسط	11-23 فردي، 24-31 ، 33-43
فوق المتوسط	24-40 ، (اختياري: 41-43)

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–10 للتأكد من فهم الطلبة، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة حسب مستوياتهم.

إجابات:

17) افترض أن ثمن إحدى الألعاب x والأخرى y.

المعطيات: $x + y > 400$

المطلوب: $x > 200$ أو $y > 200$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $x \le 200$ وَ $y \le 200$.

الخطوة 2: إذا كانت $x \le 200$ و $y \le 200$، فإنّ:
$x + y \le 200 + 200$
أو $x + y \le 400$. وهذا يناقض الفرض $x + y > 400$.

الخطوة 3: بما أن الفرض $x \le 200$ و $y \le 200$ أدّى إلى تناقض مع حقيقة معلومة فإن هذا الفرض خطأ. لذلك فالنتيجة: $x > 200$ أو $y > 200$ ستكون صحيحة؛ أي أنّ ثمن لعبة واحدة من اللعبتين على الأقل أكثر من 200 ريال.

18) افترض أن x عدد تذاكر دخول الكبار التي بِيعت، وy عدد تذاكر دخول الصغار التي بِيعت.

المعطيات: $x + y = 375$
أو $y = 375 - x$ ،
$30x + 12.5y > 7300$

المطلوب: إثبات أن $x \ge 150$

الخطوة 1: افترض أنّ $x < 150$

الخطوة 2: بما أن $x < 150$ وَ x عدد صحيح، إذن $x \le 149$
ريع التذاكر =
$30x + 12.5y = 30x + 12.5(375 - x)$
$= 17.5x + 4687.5$

وبما أن $x \le 149$ باستعمال خاصيتَي الضرب والجمع للمتباينات نجد أن:
$17.5x + 4687.5 \le 17.5(149) + 4687.5$
$17.5x + 4687.5 \le 7295$
وهذا يناقض أن ريع التذاكر كان أكثر من 7300 ريال.

الخطوة 3: بما أن الافتراض أدّى إلى وقوع تناقضٍ مع معلومةٍ معطاةٍ، فإن الافتراض خطأ، و $x \ge 150$

27) **ألعاب إلكترونية:** تتضمن لعبة حاسوبية فارسًا في رحلةٍ للبحث عن الكنز، وفي نهاية الرحلة يقترب الفارس من البابين المبيَّنين أدناه.

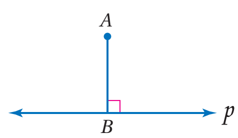
أخبر خادمٌ الفارس بأن أحد الإعلانين صحيح والآخر خطأ. استعمل التبرير غير المباشر لتحدد أيّ البابين سيختاره الفارس. وضح إجابتك. انظر الهامش

حدّد ما إذا كان إثبات كل عبارة حول أقصر مسافة بين نقطة وخط مستقيم أو مستوٍ، يمكن إثباتها باستعمال البرهان المباشر أو البرهان غير المباشر، ثم اكتب برهانًا لكلٍّ منهما.

28) **المعطيات:** $\overline{AB}$ عمودي على المستقيم p

المطلوب: $\overline{AB}$ أقصر قطعة مستقيمة من A إلى المستقيم p.

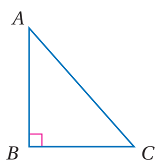
انظر ملحق الإجابات



29) **المعطيات:** ABC مثلث قائم الزاوية

المطلوب: الوتر $\overline{AC}$ أطول ضلع في المثلث

انظر الهامش



30) **نظريّة الأعداد:** في هذه المسألة ستُخمِّن علاقةً في نظرية الأعداد، وتُثبت صحة تخمينك.

a) اكتب عبارة جبرية تمثل "مجموع مكعب العدد n والعدد ثلاثة". $n^3 + 3$

b) كوّن جدولًا يعطي قيم العبارة لعشر قيم زوجية وفردية مختلفة لـ n. انظر ملحق الإجابات

c) اكتب تخمينًا حول n عندما تكون قيمة العبارة زوجيّة.

d) اكتب برهانًا غير مباشر لتخمينك. انظر ملحق الإجابات

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة يمكن إثبات صحتها باستعمال البرهان غير المباشر ثم أثبتها. انظر ملحق الإجابات

32) **تحدٍّ:** إذا كان x عددًا نسبيًّا، فإنه يمكن تمثيله بالصورة $\frac{a}{b}$، حيث a, b عددان صحيحان، و $b \neq 0$. ولا يمكن تمثيل العدد غير النسبي في صورة ناتج قسمة عددين صحيحين. اكتب برهانًا غير مباشر تبيّن فيه أن ناتج ضرب عدد نسبي لا يساوي الصفر في عدد غير نسبي، هو عدد غير نسبي.

انظر ملحق الإجابات

30c) إجابة ممكنة: يكون n عددًا فرديًّا عندما يكون $n^3 + 3$ عددًا زوجيًّا.

مراجعة المفردات

مجموعة الأعداد الصحيحة هي:
$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

إجابات:

27) الباب الأيمن، فإذا كان الإعلان على الباب الأيسر صحيحًا، فإن الإعلانين سيكونان صحيحين، إلَّا أن أحد الإعلانين خطأ، لذا يجب أن يكون الإعلان المكتوب على الباب الأيسر خطأ.

29) **برهان مباشر:**

بما أن $\overline{AB} \perp \overline{BC}$، إذن $\overline{AB}$ أقصر قطعة مستقيمة على $\overline{BC}$ إذن $AB < AC$، وبما أن $\overline{AB} \perp \overline{CB}$، إذن $\overline{CB}$ أقصر قطعةٍ مستقيمةٍ على $\overline{AB}$، وعليه تكون $CB < AC$ إذن $\overline{AC}$ أطول ضلع في المثلث.

وهذا يعني أن الوتر هو أطول ضلع في المثلث القائم.

33) اكتشف الخطأ: يحاول أسعد ورضوان أن يُثبتا العبارة التالية باستعمال البرهان غير المباشر. فهل أيٌّ منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

"إذا كان مجموع عددين زوجيًّا، فإنّ العددين زوجيّان".

رضوان	أسعد
العبارة صحيحة. إذا كانت العددان فرديين فإنّ مجموعهما يكون عددًا زوجيًا. وبما أنّ الافتراض صحيح عندما تكون النتيجة خطأ، فإنّ العبارة صحيحة.	العبارة صحيحة. إذا كان أحد العددين زوجيًا والآخر صفرًا، فإن المجموع يكون عددًا زوجيًا. وبما أنّ الافتراض صحيح حتى عندما تكون النتيجة خطأ، فإن العبارة صحيحة.

33) كلاهما على خطأ؛ إجابة ممكنة: العبارة خاطئة مثال مضاد 4=1+3، مجموع العددين عددٌ زوجيٌّ وهما عددان فرديان.

34) اكتب: اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة الموجودة في السؤال 8، واكتب برهانًا مباشرًا للمعاكس الإيجابي. كيف يرتبط البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي للعبارة بالبرهان غير المباشر للعبارة الأصلية؟
انظر ملحق الإجابات

تدريب على اختبار

35) إذا كان طولا ضلعين في مثلث 7، 12، فأيٌّ مما يأتي لا يمكن أن يكون محيط المثلث؟ **D**

A 29
B 34
C 37
D 38

36) إذا كان $a > b$، فأيٌّ مما يأتي يكون صحيحًا دائمًا؟ **A**

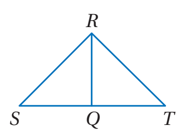
A $-a > -b$
B $3a > b$
C $a^2 < b^2$
D $a^2 < ab$

مراجعة تراكمية

37) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 3-4) انظر الهامش

المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$.

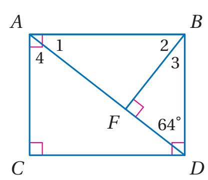
المطلوب: إثبات أنّ $m\angle SQR > m\angle SRQ$



أوجد كلًّا من القياسين الآتيين: (الدرس 2-3)

38) $m\angle 1$ **26°**

39) $m\angle 4$ **64°**



40) **هندسة إحداثية:** أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين: (الدرس 6-2)

$y = 2x + 2$
$y = 2x - 3$

$\sqrt{5} \approx 2.2$

استعد للدرس اللاحق

حُلَّ كلًّا من المتباينات الآتية:

41) $4x + 7 < 180$ **$x < 43.25$**

42) $8x - 14 < 3x + 19$ **$x < 6.6$**

43) $3x + 54 < 90$ **$x < 12$**

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلبة تفسير سبب كون الارتفاع المرسوم إلى أحد أضلاع مثلث أطول من ضلعَي المثلث الآخرين وأن يرسموا ذلك في ورقة ويسلِّموك إياها قبل خروجك من غرفة الصف.

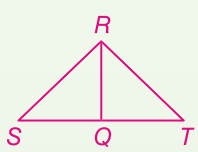
تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 33، يجب أن يعرف الطلاب أن مثالًا مضادًّا واحدًا يكفي لإثبات خطأ العبارة كما فعل رضوان، ولقد أخطأ الاثنان عندما ذكرا بأنه إذا كان الفرض صحيحًا والنتيجة خطأ فإن العبارة تكون صحيحةً.

إجابة:

37) **المعطيات:** $\overline{RQ}$ تنصّف $\angle SRT$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle SQR > m\angle SRQ$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$	1) معطى
2) $\angle SRQ \cong \angle QRT$	2) تعريف المنصف
3) $m\angle SRQ = m\angle QRT$	3) تعريف الزوايا المتطابقة
4) $m\angle SQR = m\angle T + m\angle QRT$	4) نظرية الزاوية الخارجيّة
5) $m\angle SQR > m\angle QRT$	5) تعريف المتباينة
6) $m\angle SQR > m\angle SRQ$	6) بالتعويض

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اكتب برهانًا غير مباشر للعبارة الآتية:

إذا كان قُطرا شكل رباعي متطابقين فإنه ليس معيناً.

نفترض أنه معين، والمعين قُطراه غير متطابقين، وهذا يناقض الفرض، لذا فالشكل ليس معينًا.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 4

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (21) دون

الاسم ______ التاريخ ______

4-4 تدريبات إعادة التعليم

البرهان غير المباشر

البرهان الجبري غير المباشر:

إحدى الطرق لإثبات صحّة عبارةٍ ما أو تبريرها **تبريرًا غير مباشر**، هو افتراض أنها غير صحيحة، وعندما تبيّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات أو أي حقيقةٍ أخرى كتعريف أو نظريةٍ أو مسلّمةٍ ما، فإنك تكون قد أثبتّ أن افتراضك خطأ، وأن النتيجة الأصلية صحيحة. وهذا ما يُعرف **بالبرهان غير المباشر**، أو **البرهان بالتناقض**.

خطوات كتابة برهان غير مباشر
1) افترض أن النتيجة خاطئة.
2) بيّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات، أو مع أي حقيقة أخرى، باستعمال التبرير المنطقي.
3) أشر إلى أنه بسبب افتراض خطأ النتيجة، حصلنا على عبارة غير صحيحة، ولذلك يتعيَّن أن تكون النتيجة الأصليّة صحيحةً.

ويمكن استعمال البراهين غير المباشرة في نظرية الأعداد؛ لإثبات كثير من الحقائق المرتبطة بالأعداد الزوجية (التي يُعبَّر عنها بالصورة $2k$، حيث k عدد صحيح)، والأعداد الفردية (والتي يُعبَّر عنها بالصورة $2m+1$، حيث m عدد صحيح).

مثال **اكتب برهانًا غير مباشرٍ؛ لتبيِّن أنه إذا كان $3x+5>8$، فإن $x>1$**

المعطيات: $3x + 5 > 8$

المطلوب: إثبات أن $x > 1$

الخطوة 1: افترض أن x ليست أكبر من 1. أي افترض أن: $x \le 1$.

الخطوة 2:

$x \le 1$	افتراض
$3x \le 3$	اضرب الطرفين بـ 3
$3x + 5 \le 3+5$	اجمع 5 للطرفين
$3x + 5 \le 8$	بسّط

الخطوة 3: هذا يناقض المعطيات بأنّ $3x + 5 > 8$، وعليه فإن الافتراض خطأ؛ مما يعني أنه يتعيّن أن تكون العبارة "$x > 1$" صحيحةً.

تمارين

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكلٍّ من العبارتين الآتيتين :

1) إذا كان $2x > 14$، فإنّ $x > 7$. $\boldsymbol{x \le 7}$.

2) لجميع الأعداد الحقيقيّة، إذا كان $a + b > c$، فإنّ $a > c - b$. $\boldsymbol{a \le c - b}$

3) أكمل البرهان غير المباشر الآتي:

المعطيات: n عدد صحيح ، و n^2 عدد زوجي.

المطلوب: إثبات أن n عدد زوجي.

a) افترض أن: **العدد n ليس زوجيًا؛ أي افترض أن n عدد فرديّ**

b) إذن يمكنك كتابة n في الصورة $2a + 1$، بحسب **تعريف العدد الفرديّ**

c) $n^2 = \boldsymbol{(2a+1)^2}$ بالتعويض.

d) $= (2a + 1)(2a + 1)$ تعريف القوة.

e) $= 4a^2 + 4a + 1$ بالتبسيط.

f) $= 2(2a^2 + 2a) + 1$ **خاصية التوزيع**

g) $2(2a^2 + 2a) + 1$ عدد فرديّ، وهذا يناقض المعطيات التي تنصُّ على أن n^2 عدد زوجي؛ إذن يتعيَّن أن يكون الافتراض **خطأ** ، لذلك فإن **n عدد زوجيّ** .

الصف: الأول الثانوي 21 الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (22) دون

الاسم ______ التاريخ ______

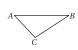
4-4 تدريبات إعادة التعليم **(تتمة)**

البرهان غير المباشر

البرهان غير المباشر في الهندسة:

عند كتابة برهانٍ غير مباشرٍ في الهندسة، افترض أن النتيجة خطأ، ثم بيّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض، والتناقض يدلّ على أنه لا يمكن أن تكون النتيجة خطأً، وعندئذٍ نستنتج أنها صحيحة.

مثال **اكتب برهانًا غير مباشرٍ؛ لتبيِّن أنه في $\triangle ABC$ إذا كان $m\angle C = 100°$ ، فإن $\angle A$ ليست قائمة.**



المعطيات: $m\angle C = 100°$

المطلوب: إثبات أنّ $\angle A$ ليست قائمة.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $\angle A$ قائمة.

الخطوة 2: بيّن أن هذا الافتراض يؤدّي إلى تناقض، فإذا كانت $\angle A$ قائمة، فإن $m\angle A = 90°$. و $m\angle C + m\angle A = 100° + 90° = 190°$؛ إذن مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC$ أكبر من $180°$.

الخطوة 3: تبيّن النتيجة أن مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC$ أكبر من $180°$، وهي تتناقض مع نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث، فالافتراض بأن $\angle A$ قائمة افتراض خطأ، وهذا يعني أن العبارة "$\angle A$ ليست قائمة" نتيجة صحيحة.

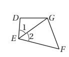
تمارين

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكلّ عبارة ممّا يأتي:

1) إذا كان $m\angle A = 90°$ ، فإنّ $m\angle B = 45°$ $\boldsymbol{m\angle B \ne 45°}$

2) إذا لم تكن $\overline{AV}$ مطابقة لـ $\overline{VE}$ ، فإنّ $\triangle AVE$ ليس متطابق الضلعين. **$\triangle AVE$ متطابق الضلعين**

3) أكمل البرهان غير المباشر الآتي:



المعطيات: $\angle 1 \cong \angle 2$ ، و $\overline{FG} \not\cong \overline{DG}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{FE} \not\cong \overline{DE}$.

a) افترض أن $\boldsymbol{\overline{DE} \cong \overline{FE}}$ افترض أن النتيجة خطأ.

b) $\overline{EG} \cong \overline{EG}$ **خاصيّة الانعكاس للتطابق**

c) $\triangle EDG \cong \triangle EFG$ **SAS**

d) $\boldsymbol{\overline{DG} \cong \overline{FG}}$ ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين

e) وهذا يناقض المعطيات؛ لذا يتعيَّن أن يكون الافتراض **خطأً**

f) إذن $\boldsymbol{\overline{FE} \not\cong \overline{DE}}$

الصف: الأول الثانوي 22 الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

تدريبات المهارات (23) دون ضمن

الاسم ______ التاريخ ______

4-4 تدريبات المهارات

البرهان غير المباشر

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكلّ عبارةٍ ممَّا يأتي:

1) $m\angle ABC < m\angle CBA$

$m\angle ABC \ge m\angle CBA$

2) $\triangle DEF \cong \triangle RST$

$\triangle DEF \not\cong \triangle RST$

3) المستقيم a عموديّ على المستقيم b.

المستقيم a ليس عموديًا على المستقيم b.

4) $\angle 5$ مكمّلة لـِ $\angle 6$

$\angle 5$ ليست مكمّلة لـِ $\angle 6$

اكتب برهانًا غير مباشر لكلٍّ ممّا يأتي:

5) **المعطيات:** $2x - 3 \ge 7$

المطلوب: إثبات أنَّ $x \ge 5$

البرهان:

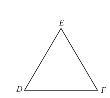
الخطوة 1: افترض أنّ $x < 5$.

الخطوة 2: إذا كانت $x < 5$ ، فإن $2x < 10$، وهذا يؤدي إلى أن $2x - 3 < 7$، وهذا يناقض المعطيات بأن $2x - 3 \ge 7$.

الخطوة 3: الافتراض $x < 5$ أدّى إلى تناقض؛ لذا فهو افتراض خطأ.

وعليه فإن النتيجة $x \ge 5$ صحيحة.

6) **المعطيات:** $\angle D \not\cong \angle F$



المطلوب: إثبات أنَّ $DE \ne EF$

البرهان:

الخطوة 1: افترض أنّ $DE = EF$.

الخطوة 2: إذا كان $DE = EF$ ، فإنّ $\overline{FE} \cong \overline{DE}$ وفق تعريف تطابق القطع المستقيمة.

ولكن إذا كانت $\overline{EF} \cong \overline{DE}$ ، فإن $\angle D \cong \angle F$ وفق نظرية المثلث المتطابق الضلعين، وهذا يناقض المعطيات بأن $\angle D \not\cong \angle F$.

الخطوة 3: الافتراض $DE = EF$ أدّى إلى تناقض، لذا فهو افتراض خطأ.

لذلك فإن النتيجة $DE \ne EF$ صحيحة.

الصف: الأول الثانوي 23 الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم ______ التاريخ ______

4-4 تدريبات حلّ المسألة

البرهان غير المباشر

1) **زوارق:** خرج خمسة وثلاثون صيادًا في رحلة صيد أسماك. فاستقلُّوا 17 زورقًا، استعمل البرهان غير المباشر لتبيّن أن زورقًا واحدًا على الأقلّ سيحمل أكثر من صيادين.

إجابة ممكنة: افترض أن عدد الصيادين الذين يحملهم كلّ زورق أقل من أو يساوي 2، وعليه فإنّ العدد الكُلّي للصيادين سيكون أقلّ من أو يساوي 34 ؛ لأن $34 = 2 \times 17$ وهذا تناقض.

2) **رحلة عمل:** سافر خالد للعمل خلال العام الماضي 15 مرةً، استعمل البرهان غير المباشر لتبين أن خالدًا سافر أكثر من مرة في شهر على الأقل.

إجابة ممكنة: افترض أن خالدًا سافر مرةً على الأكثر في كل شهرٍ من العام الماضي؛ إذن عدد المرات التي سافر فيها العام الماضي لن يتعدى 12 مرةً، وهذا يناقض المعطى؛ إذن الافتراض غير صحيح، وخالد سافر أكثر من مرةٍ خلال شهرٍ على الأقل من العام الماضي.

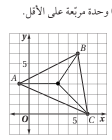
3) دفع محمد 6000 ريال؛ لشراء كمبيوتر وتلفاز، استعمل البرهان غير المباشر لتبيِّن أن ثمن أحدهما لا يقل عن 3000 ريال.

افترض أن ثمن كلٍّ منهما يقل عن 3000 ريالٍ؛
أي: $x<3000$ ، $y<3000$ ؛ إذن $x+y<6000$ وهذا يناقض أنه دفع 6000 ريالٍ؛ إذن الافتراض غير صحيح؛ أي أن النتيجة الأصلية هي أن ثمن أحدهما لا يقل عن 3000 ريالٍ صحيحةٌ.

4) **أعداد:** تتكون الأعداد: 357719, 426803, 702295 جميعها من 6 أرقام، استعمل البرهان غير المباشر لتبيِّن أن أي عدد يتكون مِّن 6 أرقام يحتوي على رقم مكرّر أو رقمين متتاليين من أرقام النظام العشري.

افترض أن الأرقام غير مكرّرة وليست متتالية، بما أن الأرقام غير متتالية، فإن أقصى عدد يمكن استخدامه من الأرقام هو 5، وبما أنه لا يُسمح بالتكرار، فإن أكبر عددٍ يمكن تكوينه من هذه الأرقام هو عدد من 5 أرقام، وهذا يناقض أن العدد من 6 أرقام.

5) **مثلثات شبكيّة:** النقطة الشبكيّة هي نقطة إحداثيّاها عددان صحيحان. والمثلث الشبكي هو مثلثٌ، رؤوسُه نقاط شبكيّة. ومن حقائق المثلثات الشبكيّة أن مساحة المثلث الشبكيّ تساوي 0.5 وحدة مربّعة على الأقل.



a) افترض أن $\triangle ABC$ يحتوي بداخله على نقطة شبكيّة، وبيّن أنه يمكنك تجزئة المثلث الشبكيّ إلى ثلاثة مثلثات شبكيّة.

إجابة ممكنة: كلّ رأسين من رؤوس $\triangle ABC$ يشكّلان مع النقطة الشبكية الداخلية مثلثًا شبكيًا، كما يتضح من الشكل أعلاه.

b) اكتب برهانًا غير مباشر يبيّن أن المثلث الشبكيّ الذي مساحته 0.5 وحدة مربّعة، لا يحتوي على نقاطٍ شبكيّةٍ بداخله. (وقوع النقطة على المثلث لا يعني أنّها بداخله).

إجابة ممكنة: إذا احتوى المثلث الشبكيّ على نقطة شبكية بداخله، فإنه يمكن تجزئته إلى 3 مثلثاتٍ شبكيّةٍ صغيرةٍ، مساحة كلٍّ منها 0.5 وحدة مربّعة على الأقل. وبذلك تكون مساحة المثلث الأصلي 1.5 وحدة مربّعة على الأقل، وهذا تناقض.

الصف: الأول الثانوي 24 الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 4

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (25) ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

4-4 التدريبات الإثرائيّة

أمثلة مضادة أُخرى

يمكنك إثبات عدم صحة بعض العبارات في الرياضيات باستعمال الأمثلة المضادة. لنأخذ العبارة الآتية:

لكل عددين a و b يكون $a - b = b - a$"،

يمكنك إثبات عدم صحتها بصورة عامة، إذا أمكن إيجاد مثالٍ واحدٍ على الأقل تكون فيه العبارة خاطئة.

افترض أن $a = 7$ و $b = 3$، وعوّض هذه القيم في المعادلة أعلاه.

$$7 - 3 \stackrel{?}{=} 3 - 7$$
$$4 \neq -4$$

وبصورة عامة لكلّ عددين a و b تكون العبارة $a - b = b - a$ خاطئة. ويمكنك صياغة الجملة السابقة بعبارة لفظية مكافئة هي: الطرح عمليّة غير إبداليّة.

إذا كانت a, b, c أيّ ثلاثة أعداد، فأثبت أن العبارة خاطئة بتقديم مثالٍ مُضادٍ في كلٍّ من الأسئلة الآتية: **الإجابات المُعطاة هي بعض الإجابات الممكنة.**

1) $a - (b - c) \stackrel{?}{=} (a - b) - c$
$$6 - (4 - 2) \stackrel{?}{=} (6 - 4) - 2$$
$$6 - 2 \stackrel{?}{=} 2 - 2$$
$$4 \neq 0$$

2) $a \div (b \div c) \stackrel{?}{=} (a \div b) \div c$
$$6 \div (4 \div 2) \stackrel{?}{=} (6 \div 4) \div 2$$
$$6 \div 2 \stackrel{?}{=} 1.5 \div 2$$
$$3 \neq 0.75$$

3) $a \div b \stackrel{?}{=} b \div a$
$$6 \div 4 \stackrel{?}{=} 4 \div 6$$
$$\frac{3}{2} \neq \frac{2}{3}$$

4) $a \div (b + c) \stackrel{?}{=} (a \div b) + (a \div c)$
$$6 \div (4 + 2) \stackrel{?}{=} (6 \div 4) + (6 \div 2)$$
$$6 \div 6 \stackrel{?}{=} 1.5 + 3$$
$$1 \neq 4.5$$

5) $a + (bc) \stackrel{?}{=} (a + b)(a + c)$
$$6 + (4 \times 2) \stackrel{?}{=} (6 + 4)(6 + 2)$$
$$6 + 8 \stackrel{?}{=} (10)(8)$$
$$14 \neq 80$$

6) $a^2 + a^2 \stackrel{?}{=} a^4$
$$6^2 + 6^2 \stackrel{?}{=} 6^4$$
$$36 + 36 \stackrel{?}{=} 1296$$
$$72 \neq 1296$$

7) اكتب عبارةً لفظيّةً مكافئةً لكلٍّ من الأسئلة 1, 2, 3.

1) عملية الطرح ليست تجميعيّة.

2) عملية القسمة ليست تجميعيّة.

3) عملية القسمة ليست إبداليّة.

8) **العبارة:** $a(b + c) = ab + ac$ تمثّل خاصيّة توزيع الضرب على الجمع، والسؤالان 4 و 5 يبينان أنّ بعض العمليات لا تتوزّع على الجمع، اكتب عبارةً لفظيةً تصف ذلك.

4) عملية القسمة لا تتوزع على الجمع.

5) عملية الجمع لا تتوزع على الضرب.

الصف: الأول الثانوي | 25 | الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

كتاب التمارين (30) دون ضمن فوق

4 - 4 البرهان غير المباشر

الفصل الرابع العلاقات في المثلث

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

1) $\overline{BD}$ تنصّف $\angle ABC$.

$\overline{BD}$ لا تنصّف $\angle ABC$.

2) $RT = TS$

$RT \neq TS$

اكتب برهانًا غير مباشر لكلٍّ من العبارتين الآتيتين:

3) **المعطيات:** $-4x + 2 < -10$

المطلوب: $x > 3$

البرهان:

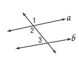
الخطوة 1 افترض أن $x \leq 3$.

الخطوة 2 إذا كانت $x \leq 3$ فإن $-4x \geq -12$، وهذا يعني أن $-4x + 2 \geq -10$ وهذا يناقض معطيات المسألة.

الخطوة 3 بما أن افتراض $x \leq 3$ أدّى إلى تناقض، إذن $x > 3$ صحيحة بالتأكيد.

4) **المعطيات:** $m\angle 2 + m\angle 3 \neq 180$

المطلوب: $a \nparallel b$



البرهان:

الخطوة 1 افترض أن $a \parallel b$.

الخطوة 2 إذا كانت $a \parallel b$ ، فإن الزاويتين الداخليتين المتحالفتين $\angle 3$, $\angle 2$ متكاملتان، أيْ أنّ $m\angle 2 + m\angle 3 = 180$. وهذا يناقض معطيات المسألة وهي : $m\angle 2 + m\angle 3 \neq 180$.

الخطوة 3 بما أن افتراض $a \parallel b$ أدى إلى تناقض، فإن هذا الافتراض خطأ؛ إذن $a \nparallel b$ صحيحة بالتأكيد.

5) **فيزياء:** تبلغ سرعة الصوت في الهواء نحو 344 m في الثانية عندما تكون درجة الحرارة 20°C، إذا علمت أن عبدالله يسكن على بعد 2 km من مركز إطلاق صفارة الإنذار، وسمع صفارة الإنذار العامة الصادرة منه بعد 5 s، فكيف يمكنك إثبات أن درجة الحرارة لم تكن 20°C عندما سمع عبدالله صوت الصفارة باستعمال البرهان غير المباشر ؟

المعطيات: سرعة الصوت في الهواء 344 m في الثانية عندما تكون درجة الحرارة 20°c، عبدالله يسكن على بعد 2 km من مركز إطلاق صفارة الإنذار، وسمع صفارة الإنذار بعد 5 s .

المطلوب: إثبات أن درجة الحرارة لا تساوي 20°c وقتها.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن درجة الحرارة كانت 20°c وقتها.

الخطوة 2: بُعد منزل عبدالله عن مركز إطلاق صفارة الإنذار $2\,km = 2000\,m$

الزمن الذي يستغرقه صوت الصفارة ليصل إلى أذن عبدالله $\frac{2000}{344} \approx 5.8 > 5$

الخطوة 3: بما أن الفرض بأن درجة الحرارة 20°c أدى إلى أن الصفارة ستستغرق زمنًا أكثر من 5 s للوصول إلى أذن عبدالله وهذا يناقض الحقيقة، إذن الفرض خاطئ. وعليه فإن درجة الحرارة لم تكن 20°c

30

1 التركيز

الهدف

استعمال تطبيق الهندسة في الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لاستكشاف خصائص المثلثات.

المواد اللازمة

- الحاسبة البيانية TI–nspire

2 التدريس

العمل فرديًّا

يمكن للطلاب العمل فرادى أو في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات. اطلب إليهم تنفيذ النشاط في أثناء إجابتهم عن الأسئلة 3–1 .

اسأل الطلاب عن كيفية ارتباط تخمينهم في السؤال 2 بما لاحظوه، ثم اسألهم كيف سيحددون الرأس A ويحركونه، بحيث يكون أقرب ما يمكن من الرأس B.

تدريب: اطلب إلى الطلاب حل السؤال 4 فرادى.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 4–1؛ لتقويم فهم الطلاب العلاقات بين أطوال أضلاع المثلث.

من المحسوس إلى المجرَّد

اطلب إلى الطلاب أن يرسموا مثلثًا على ورقة رسم بيانيٍّ. وأن يتبادلوا مثلثاتهم مع زملائهم، واطلب إليهم أن يجدوا أطوال الأضلاع، وأن يكتبوا متبايناتٍ للتعبير عن العلاقات بين الأطوال.

معمل الحاسبة البيانية: متباينة المثلث
The Triangle Inequality

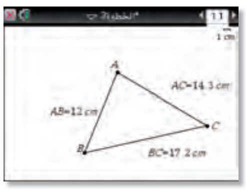
يمكنك استعمال تطبيق الهندسة في الحاسبة TI–nspire؛ لاستكشاف خصائص المثلث.

النشاط 1

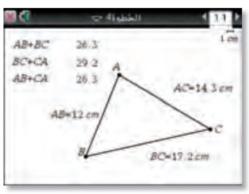
أنشئ مثلثًا، ولاحظ العلاقة بين مجموع طولَي ضلعين وطول الضلع الثالث.

الخطوة 1: أنشئ مثلثًا بالضغط على المفاتيح menu on ثم اختر 5: الأشكال الهندسية واختر منها 2: مثلث ثم ارسم المثلث واضغط esc

الخطوة 2: سمِّ رؤوس المثلث، وذلك بوضع المؤشر عند كل نقطة ثم الضغط على menu ctrl، ثم اختيار 2: التسمية، وعلى زر Shift لجعل الحروف كبيرة ثم سمِّ الرؤوس A, B, C



الخطوة 3:
- حدد طول كل ضلع من أضلاع المثلث بالضغط على menu واختر 6: القياس واختر منها 1: الطول، ولإيجاد طول كل ضلع: اضغط على رأسين في المثلث، ثم ضع المؤشر في مكان مناسب لظهور النتيجة ثم اضغط enter
- اكتب اسم الضلع بجانب الطول المقِيس بالضغط على menu ctrl، ثم اختيار 5: النص ثم اكتب اسم الضلع واضغط enter



الخطوة 4: ولحساب مجموع طول ضلعين في المثلث، اضغط menu ctrl واختر منها 5: النص، واكتب اسم ضلعين مثل: $AB + BC$، ثم ظلِّل النص $AB + BC$ واضغط menu ctrl واختر منها 5: الأشكال الهندسية، واضغط على الرقم الذي يمثل طول الضلع AB، ثم على الرقم الذي يمثل طول الضلع BC، وسيظهر مجموع الضلعين، ثم ضع المؤشر في مكانٍ مناسبٍ لظهور النتيجة ثم اضغط enter

تحليل النتائج:

1) ضع إشارة > أو < أو = داخل ◯؛ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يأتي:

$AB + BC \;>\; CA$ $\quad$ $AB + CA \;>\; BC$ $\quad$ $BC + CA \;>\; AB$

2) خمِّن العلاقة بين مجموع طولَي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث. مجموع طولَي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

3) ضع إشارة > أو < أو = داخل ◯؛ لتحصل على عبارةٍ صحيحةٍ فيما يأتي:

$|AB - BC| \;<\; CA$ $\quad$ $|AB - CA| \;<\; BC$ $\quad$ $|BC - CA| \;<\; AB$

4) كيف يمكنك استعمال ملاحظاتك؛ لتحديد مدى طول الضلع الثالث لمثلث إذا علمْتَ طولَي الضلعين الآخرين؟ انظر الهامش.

إجابة:

4) طول الضلع الثالث سيكون أقل من مجموع طولَي الضلعين الآخرين، وأكبر من القيمة المطلقة للفرق بين طولَيهما.

4-5 متباينة المثلث
The Triangle Inequality

فيما سبق:

درستُ خصائص المتباينات وتطبيقها على العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه.

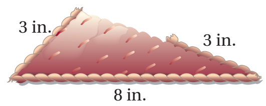
والآن:

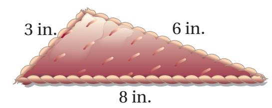
- أستعمل نظرية متباينة المثلث لأُعيِّن الأطوال التي تكوّن مثلثًا.
- أُثبت العلاقات في المثلث باستعمال نظرية متباينة المثلث.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يريد أحد المصمِّمين أن يستعمل قطع الخيوط المجدُولة والمتبقية من أحد أعماله لتزيين الوسائد المثلثة الشكل أدناه. ولتقليل الإهدار، أراد المصمّم أن يستعمل القطع دون قصها، فاختار ثلاث قطع عشوائيًّا وحاول أن يشكّل مثلثًا. والشكلان الآتيان يبيّنان اثنتين من هذه المحاولات.





متباينة المثلث: بما أن المثلث يتكون من ثلاث قطع مستقيمة، فيجب أن تتوافر علاقة خاصّة بين أطوال هذه القطع؛ كي تشكّل مثلثًا.

نظرية 4.11 نظرية متباينة المثلث

أضف إلى مطويتك

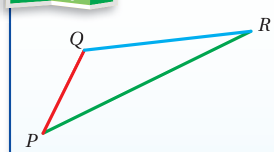
مجموع طولَي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

أمثلة

$PQ + QR > PR$

$QR + PR > PQ$

$PR + PQ > QR$



ستبرهن النظرية 4.11 في السؤال 19

ولتوضيح عدم إمكانية رسم مثلثٍ من ثلاث قطعٍ مستقيمةٍ عُلمت أطوالها، يجب بيان أن إحدى متباينات المثلث الثلاث غير صحيحة.

مثال 1 تعيين الأطوال التي تكوّن مثلثًا

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضح السبب:

a) $8\text{ in}, 15\text{ in}, 17\text{ in}$.

تحقق من صحة كل متباينة.

$8 + 15 \stackrel{?}{>} 17$ $8 + 17 \stackrel{?}{>} 15$ $15 + 17 \stackrel{?}{>} 8$

$23 > 17$ ✓ $25 > 15$ ✓ $32 > 8$ ✓

بما أنّ مجموع طولَي أيٍّ قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإنّ القطع المستقيمة التي أطوالها 17 , 15 , 8 تكوّن مثلثًا.

b) $6\text{ m}, 8\text{ m}, 14\text{ m}$

$6 + 8 \stackrel{?}{>} 14$

$14 \not> 14$ ✗

بما أن مجموع طولَي قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها 14 , 8 , 6 لا يمكن أن تكوِّن مثلثًا.

تحقق من فهمك

1A) $15\text{ cm}, 16\text{ cm}, 30\text{ cm}$ نعم؛ $15 + 16 > 30, 15 + 30 > 16, 16 + 30 > 15$

1B) $2\text{ ft}, 8\text{ ft}, 11\text{ ft}$ لا؛ $2 + 8 \not> 11$

إرشادات للدراسة

إذا كان مجموع أقصر طولين أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأطوال الثلاثة تمثل أطوال أضلاع مثلث.

4-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-4

تعرُّف خصائص المتباينات وتطبيقها على العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه.

الدرس 5-4

استعمال نظرية متباينة المثلث؛ لتعيين الأطوال التي تكوّن مثلثًا.

إثبات علاقات في المثلث باستعمال نظرية متباينة المثلث.

ما بعد الدرس 5-4

وضع تخمينات حول الزوايا والمستقيمات والمضلعات والدوائر، وتحديد صحة هذه التخمينات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

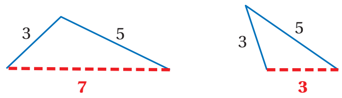
واسأل:

- ما أطوال قطع الخيوط الثلاث في كل محاولة؟ أولًا: 8in, 6in, 3in ثانيًا: 8in, 3in, 3in
- ما مجموع أقصر طولَين في كل محاولة؟ أولًا: 9in ؛ ثانيًا: 6in
- كيف تقارن هذا المجموع بطول الخيط الثالث في كل محاولة؟ في المحاولة الأولى المجموع أكبر من طول الضلع الثالث، وفي المحاولة الثانية المجموع أقل منه.
- استعمل هذه المعلومة لتضع تخمينًا حول العلاقات بين الضلعين القصيرين والضلع الثالث للمثلث. إجابة ممكنة: مجموع طولَي الضلعين القصيرين، يجب أن يكون أكبر من طول الضلع الثالث.

مصادر الدرس 5-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (250)	• تنويع التعليم، ص (250, 251)	• تنويع التعليم، ص (250, 251)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (31)	• كتاب التمارين، ص (31)	• كتاب التمارين، ص (31)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات المهارات، ص (28) • تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)	• تدريبات حل المسألة، ص (29) • التدريبات الإثرائية، ص (30)

عندما يُعلم طولا ضلعين في مثلثٍ، يمكن تحديد مدى القيم الممكنة لطول الضلع الثالث باستعمال نظرية متباينة المثلث.



مثال 2 من اختبار معياري

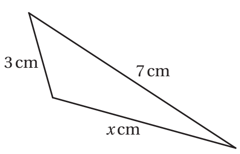
إذا كان طولا ضلعين في مثلث هما 3 cm , 7 cm ، فما أصغر عدد طبيعي يمكن أن يمثل طول الضلع الثالث؟

A 3 cm
B 4 cm
C 5 cm
D 10 cm

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب هو تحديد أصغر قيمة ممكنة لطول الضلع الثالث في مثلثٍ طولا ضلعين من أضلاعه 3 cm , 7 cm

حل فقرة الاختبار



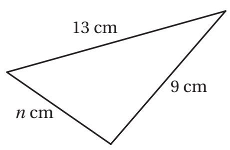
لتحديد أصغر طول ممكن من بين البدائل المعطاة، حدّد مدى القيم الممكنة لطول الضلع الثالث أولًا؛ لذا ارسم شكلًا وافترض أن طول الضلع الثالث يساوي x ، ثم اكتب متباينات المثلث الثلاث، وحل كل واحدة منها.

$3 + 7 > x$	$3 + x > 7$	$x + 7 > 3$
$10 > x$ أو $x < 10$	$x > 4$	$x > -4$

لاحظ أن $x > -4$ تكون صحيحةً دائمًا لأي قيمةٍ صحيحةٍ موجبةٍ لـ x ، وبربط المتباينتين المتبقيتين، يكون مدى القيم التي تحقق كلتا المتباينتين هو $x > 4$ وَ $x < 10$ ، والذي يمكن كتابته في الصورة $4 < x < 10$ وأقل عدد صحيح موجب بين 4 وَ 10 هو 5 ؛ لذا فالإجابة الصحيحة هي C .

تحقق من فهمك

2) في الشكل المجاور، أيُّ الأعداد الآتية لا يمكن أن يكون قيمة لـ n؟ D



A 7 **C** 10
B 13 **D** 22

إرشادات للاختبار

اختبار البدائل
إذا كان الوقت غير كافٍ يمكنك اختبار كل بديل لايجاد الإجابة الصحيحة واستبعاد البدائل الأخرى.

قراءة الرياضيات

المتباينة المركبة
تقرأ المتباينة المركبة $4 < x < 10$ على النحو التالي: تقع x بين 4 وَ 10 أو x أكبر من 4 وأقل من 10

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية : ارسم ثلاث قطع مستقيمة على السبورة، بحيث يكون مجموع طولي القطعتين القصيرتين أقل من أو يساوي طول القطعة الطويلة (لا تكتب الأطوال). اختر بعض الطلاب ليُجروا دورانًا وانسحابًا للقطع المستقيمة في محاولةٍ لتشكيل مثلثٍ، وعندما يجد الطلاب أن ذلك غير ممكن، اطلب إليهم قياس كل قطعةٍ، ودعم كل نتيجة باستعمال متباينة المثلث.

متباينة المثلث

المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية تعيين الأطوال التي تمثل أطوال أضلاع مثلثٍ، وسيستعمل الطلاب المتباينات لتحديد أطوال الأضلاع.

التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثالان إضافيان

1 حدّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثّل أطوال أضلاع مثلثٍ في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فوضح السبب.

a) $6\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 14\frac{1}{2}$

لا؛ لأنّ $6\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2} < 14\frac{1}{2}$

b) 5.1، 7.2، 6.8 نعم

2 **مثال من اختبار معياري:** في $\triangle PQR$ ، $PQ=7.2$, $QR=5.2$. أيُّ طول لا يمكن أن يكون PR؟ D

A 7 **B** 9 **C** 11 **D** 13

تنويع التعليم

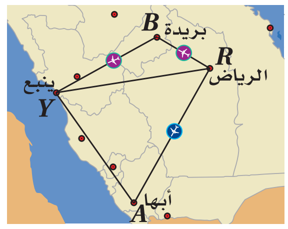
دون ضمن فوق

المتعلمون الطبيعيّون: وضّح للطلّاب أن المثلثات التي تظهر في الطبيعة تخضع للتعميمات الواردة في هذا الدرس، ثم اطلب إليهم أن يجدوا أمثلةً لاستكشاف واختبار نظرية متباينة المثلث مثل مناقير الطيور وأوراق الشجر ومجموعات النجوم وآثار أقدام الحيوانات، ... وهكذا، وأن يتحققوا من أن نظرية متباينة المثلث صحيحة حتى في الطبيعة.

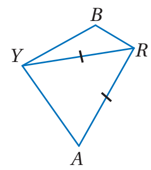
استعمال نظريّة متباينة المثلث في البراهين: يمكنك استعمال نظرية متباينة المثلث في البراهين المختلفة.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال نظرية متباينة المثلث في البرهان

طيران: المسافة الجوية من الرياض إلى ينبع تساوي المسافة الجوية من الرياض إلى أبها، أثبت أن الطيران المباشر من الرياض إلى ينبع مرورًا بمدينة بريدة يقطع مسافةً أكبر من المسافة المقطوعة عند الطيران من الرياض إلى أبها دون توقّف.



ارسم شكلًا تقريبيًّا يمثل المسألة، وضع عليه أسماء المدن، وارسم القطعة $\overline{YA}$ لتشكّل $\triangle YRA$.



المعطيات: $RY = RA$

المطلوب: $RB + BY > RA$

البرهان:

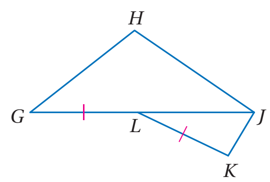
العبارات	المبررات
$RY = RA$ (1	1) معطى
$RB + BY > RY$ (2	2) نظرية متباينة المثلث
$RB + BY > RA$ (3	3) بالتعويض

الربط مع الحياة

يختلف الطيران المباشر عن الطيران من دون توقف، ففي حالة الطيران المباشر لا يغيّر المسافرون الطائرة، ولكن قد تحط الطائرة في مطار واحد أو أكثر قبل وصولها لغايتها.

تحقق من فهمك

3) اكتب برهانًا ذا عمودين. انظر الهامش



المعطيات: $GL = LK$

المطلوب: $JH + GH > JK$

1) نعم؛ $5 + 7 > 10,$ $5 + 10 > 7,$ $7 + 10 > 5$

2) لا؛ $3 + 4 \ngtr 8$

3) نعم؛ $6 + 14 > 10,$ $6 + 10 > 14,$ $10 + 14 > 6$

تأكد

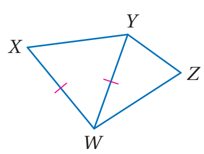
المثال 1 حدِّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فوضِّح السبب.

1) 5 cm, 7 cm, 10 cm 2) 3 in, 4 in, 8 in 3) 6 m, 14 m, 10 m

المثال 2 4) **اختيار من متعدِّد:** إذا كان طولا ضلعين في مثلث 5 m, 9 m، فما أصغر عدد صحيح يمكن أن يمثّل طول الضلع الثالث فيه؟ **A**

A 5 m B 4 m C 14 m D 6 m

المثال 3 5) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{XW} \cong \overline{YW}$

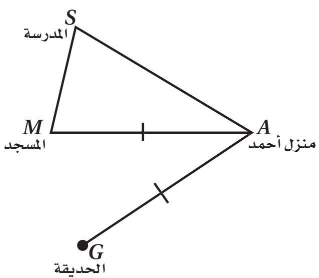
المطلوب: $YZ + ZW > XW$ انظر ملحق الإجابات

استعمال نظريّة متباينة المثلث في البراهين

المثال 3 يبيّن كيفية استعمال نظرية متباينة المثلث؛ لكتابة برهانٍ حول المسافات.

مثال إضافي

3 يظهر الرسم أدناه موقع منزل أحمد والمدرسة والمسجد والحديقة في الحي. إذا علمت أن المسافة بين منزل أحمد والمسجد تساوي المسافة بين منزل أحمد والحديقة، فأثبت أن الطريق من منزل أحمد إلى المسجد مرورًا بالمدرسة، أطول من الطريق من منزل أحمد إلى الحديقة مباشرةً.



$AS + SM > AM = AG$

إرشادات للمعلم الجديد

متباينة المثلث: بحسب مسلمة جمع القطع المستقيمة، إذا كان مجموع طولَي أي قطعتين مستقيمتين يساوي طول قطعة مستقيمة ثالثة، فإن الأطراف الثلاثة ستكون على استقامةٍ واحدةٍ، ولا يمكن أن تشكِّل القطع المستقيمة مثلثًا.

إجابة (تحقق من فهمك)

(3

العبارات	المبررات
$GL = LK$ (1	1) معطًى
$JH + GH > GJ$ (2	2) نظرية متباينة المثلث
$GJ = GL + LJ$ (3	3) مسلمة جمع القطع المستقيمة
$JH + GH > GL + LJ$ (4	4) بالتعويض
$JH + GH > LK + LJ$ (5	5) بالتعويض
$LK + LJ > JK$ (6	6) نظرية متباينة المثلث
$JH + GH > JK$ (7	7) خاصية التعدّي

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: يخطط مصمّم حدائق عامّة لحديقة جديدة ستكون على شكل مثلث، وقد أخبر المصمّم أعضاء لجنة البلدية أنّ أطوال أضلاع الحديقة هي 180 ft, 150 ft, 340 ft، وطلب أحد أعضاء اللجنة من المصمّم أن يعود إلى الموقع ويتأكد من القياسات. لماذا؟

نظرية متباينة المثلث تنصُّ على أن مجموع طولي أيّ ضلعين لمثلث أكبر من طول الضلع الثالث. ولأن $180 + 150 = 330$ وهو أقل من طول الضلع الثالث، فإن القياسات التي ذكرها المصمّم لا يمكن أن تشكل مثلثًا.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 حدد ما إذا كانت كلٌّ من القياسات الآتية تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ ممَّا يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فوضح السبب.

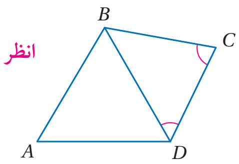
6) 4 ft, 9 ft, 15 ft **(6–9 انظر الهامش)**
7) 11 mm, 21 mm, 16 mm
8) 9.9 cm, 1.1 cm, 8.2 cm
9) $2\frac{1}{2}$ m, $1\frac{3}{4}$ m, $5\frac{1}{8}$ m

المثال 2 اكتب متباينةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلثٍ عُلم طولَا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ مما يأتي:

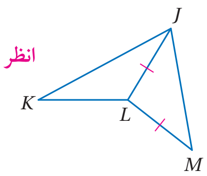
10) 4 ft, 8 ft **$4\text{ ft} < n < 12\text{ ft}$**
11) 5 m, 11 m **$6\text{ m} < n < 16\text{ m}$**
12) 2.7 cm, 4.2 cm **$1.5\text{ cm} < n < 6.9\text{ cm}$**
13) $\frac{1}{2}$ km, $3\frac{1}{4}$ km **$2\frac{3}{4}\text{ km} < n < 3\frac{3}{4}\text{ km}$**

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لكلٍّ مما يأتي:

14) **المعطيات:** $\angle BCD \cong \angle CDB$
المطلوب: $AB + AD > BC$
انظر ملحق الإجابات

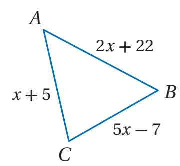


15) **المعطيات:** $\overline{JL} \cong \overline{LM}$
المطلوب: $KJ + KL > LM$
انظر ملحق الإجابات

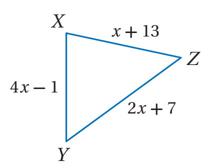


جبر: حدّد القيم الممكنة لـ x في كلٍّ من السؤالين الآتيين: **16, 17 انظر الهامش**

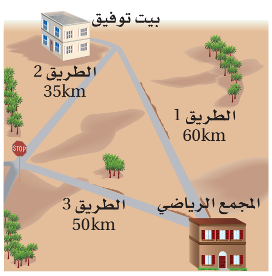
16)



17)



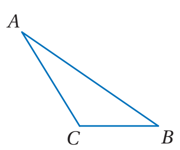
18) **قيادة:** يُريد توفيق أن يسلك المسار الأقصر من بيته إلى المجمع الرياضي، و يمكنه أن يسلك الطريق 1 أو الطريق 2 ثم الطريق 3 . **(a, b انظر الهامش)**



a) أيُّ المسارين أقصر من بيت توفيق إلى المجمع الرياضي؟ وضح إجابتك.

b) افترض أن توفيقًا يقود سيارته بسرعةٍ قريبةٍ جدًا من السرعة القُصوى المسموح بها ولا تتعداها. إذا كانت السرعة القُصوى على الطريق 1 تساوي 60 km/h، وعلى كلٍّ من الطريقين 3 ,2 تساوي 100 km/h، فأيُّ المسارَين سيستغرق وقتًا أقل؟ وضح إجابتك.

19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: $\triangle ABC$ **انظر ملحق الإجابات**
المطلوب: $AC + BC > AB$ (نظرية متباينة المثلث)
(إرشاد: ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{CD}$، على أن تكون C بين B, D ويكون $\overline{CD} \cong \overline{AC}$).



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	6-15 ، 30-42
ضمن المتوسط	7-15 فردي ، 16-28 ، 30-42
فوق المتوسط	16-39 ، (اختياري: 40-42)

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–5 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

6) لا؛ $4 + 9 \ngtr 15$

7) نعم؛ $11 + 21 > 16$ ، $11 + 16 > 21,\ 16 + 21 > 11$

8) لا؛ $1.1 + 8.2 \ngtr 9.9$

9) لا ؛ $2\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} \ngtr 5\frac{1}{8}$

16) متباينات المثلث الثلاث:

$$\begin{cases} x+5<2x+22+5x-7 \\ 2x+22<x+5+5x-7 \\ 5x-7<x+5+2x+22 \end{cases}$$

وَ ، وَ

أو

$-10<6x,\ 24<4x,\ 2x<34$

أي

$-\frac{5}{3}<x,\ 6<x,\ x<17$

إذن

$6 < x < 17$

17) متباينات المثلث الثلاث:

$$\begin{cases} 4x-1<x+13+2x+7 \\ x+13<4x-1+2x+7 \\ 2x+7<4x-1+x+13 \end{cases}$$

وَ ، وَ

أو

$x<21,\ 7<5x,\ -5<3x$

أي

$x<21,\ \frac{7}{5}<x,\ -\frac{5}{3}<x$

إذن

$\frac{7}{5} < x < 21$

18a) الطريق 1؛ إجابة ممكنة: في أيِّ مثلث يكون مجموع طولَي أيِّ ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث؛ لذلك فمجموع المسافتين على الطريق 2 والطريق 3 أكبر من المسافة على الطريق 1.

18b) الطريق 2 ثم الطريق 3؛ إجابة ممكنة: بما أنَّه يمكن لتوفيق أن يقود سيارته بسرعة 60 km/h في الساعة على الطريق 1 الذي طوله 60 km، فإنَّه يستغرق ساعةً تقريبًا للوصول إلى المجمَّع، أو أن يقود سيارته بسرعة 100 km/h على الطريق 2 ثم الطريق 3 اللَّذين مجموع طولَيهِمَا 85 km، لذلك يستغرق 0.85 من الساعة أو 51 دقيقةً تقريبًا للوصول إلى المجمع، إذن استعمال الطريق 2 ثم الطريق 3 يستغرق وقتًا أقل من الطريق 1

إذا كانت كل مجموعة تمثل أطوال أضلاع مثلث، فاكتب متباينةً تمثِّل مدى القيم الممكنة لِـ x في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

20) $x, 4, 6$ $2 < x < 10$

21) $8, x, 12$ $4 < x < 20$

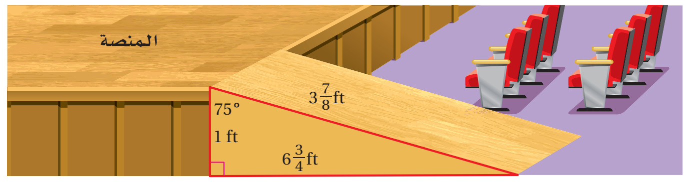
22) $x + 1, 5, 7$ $1 < x < 11$

23) $x + 2, x + 4, x + 6$ $x > 0$

الربط مع الحياة

تصمم المسارح وفق نظام هندسي دقيق يُراعى فيه إمكانية مشاهدة جميع الحضور للمنصة، وسماع الصوت بوضوح دون صدى.

24) **مسرحٌ:** يصمم عبد الرحمن وخليل منحدرًا للصعود إلى منصة المسرح، فخطَّط عبد الرحمن المنحدر كما في الشكل أدناه، ولكن خليلًا كان قلقًا بشأن القياسات ويريد أن يتحقق منها قبل البدء في قص الخشب، فهل يوجد ما يبرر هذا القلق؟ وضح إجابتك. انظر الهامش



تقدير: حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ مما يأتي، وذلك دون استعمال الآلة الحاسبة. وضِّح إجابتك. 26–25) انظر الهامش

25) $\sqrt{8}$ ft, $\sqrt{2}$ ft, $\sqrt{35}$ ft

26) $\sqrt{99}$ cm, $\sqrt{48}$ cm, $\sqrt{65}$ cm

27) حدّد ما إذا كانت النقاط $X(1, -3), Y(6, 1), Z(2, 2)$ تمثل رؤوس مثلث. وضح إجابتك.

27) نعم؛ $XY + YZ > XZ, XY + XZ > YZ, XZ + YZ > XY$

28) **تمثيلات متعدِّدة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين أضلاع مثلثين وزواياهما.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة أزواج من المثلثات في كل مثلثين منها زوجان من الأضلاع المتطابقة فقط، وضع إشارات على كل ضلعين متطابقين، وسمِّ كل زوج من المثلثات ABC, DEF، حيث $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$. انظر ملحق الإجابات

b) **جدوليًّا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك، ثم أوجد بالقياس قيمة كلٍّ من $BC, m\angle A, EF, m\angle D$، وسجّلها في الجدول.

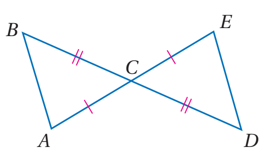
أزواج المثلثات	BC	$m\angle A$	EF	$m\angle D$
1	0.75	26	2	105
2	0.3	15	1	97
3	0.8	44	1.4	101

c) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين الزاويتين المقابلتين للضلعين غير المتطابقين في كل زوجٍ من المثلثات التي فيها زوجان من الأضلاع المتطابقة.

28c) إجابة ممكنة: قياس الزاوية التي تقابل الضلع الأطول من الضلعين غير المتطابقين أكبر من قياس الزاوية التي تقابل الضلع الأقصر منهما.

مسائل مهارات التفكير العليا

29) **تحدٍّ:** ما مدى القيم الممكنة لمحيط الشكل $ABCDE$، إذا كان $AC = 7, DC = 9$؟ وضحّ إجابتك. انظر الهامش



30) **تبرير:** ما مدى طول كلٍّ من الضلعين المتطابقين في مثلثٍ طول قاعدته 6cm؟ وضح إجابتك. انظر الهامش

تمثيلات متعدّدة: في السؤال 28، يستعمل الطلاب المخططات الهندسيّة وجدولًا ووصفًا لفظيًّا لاستقصاء العلاقة بين ضلعين وزاويتين لمثلث.

إجابات:

24) نعم؛ إجابة ممكنة: القياسات الظاهرة على الرسم لا تشكّل مثلثًا، وبحسب نظرية متباينة المثلث، مجموع طولَي أي ضلعين لمثلث يكون أكبر من طول الضلع الثالث، والأطوال في الرسم هي 1 ft, $3\frac{7}{8}$ ft, $6\frac{3}{4}$ ft، وبما أنّ $1 + 3\frac{7}{8} \ngtr 6\frac{3}{4}$، إذن هذه الأطوال لا تمثل أطوال أضلاعٍ لمثلثٍ. وعليهما أن يُعيدا حساب القياسات قبل قصِّ الخشب.

25) لا ؛ $\sqrt{8} \approx 2.9$ لأنّ $\sqrt{9} = 3$، و $\sqrt{2} \approx 1.5$ لأنّه يقع بين $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$، و $\sqrt{35} \approx 5.9$ لأن $\sqrt{36} = 6$؛ لذا فإن $2.9 + 1.5 \ngtr 5.9$

26) نعم؛ $\sqrt{99} \approx 9.9$ لأنّ $\sqrt{100} = 10$، و $\sqrt{48} \approx 6.9$ لأنّ $\sqrt{49} = 7$، و $\sqrt{65} \approx 8.1$ لأنّ $\sqrt{64} = 8$؛ لذا فإن $6.9 + 8.1 > 9.9$، و $8.1 + 9.9 > 6.9$، و $9.9 + 6.9 > 8.1$

29) المحيط أكبر من 36 وأقل من 64

إجابة ممكنة: نعلم من الشكل أنّ $\overline{DC} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AC} \cong \overline{EC}$، و $\angle ACB \cong \angle ECD$؛ لأن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان، إذن $\triangle ACB \cong \triangle ECD$، وباستعمال نظرية متباينة المثلث، تكون قيمة كلٍّ من AB, ED محصورةً بين العددين 2, 16 ؛ لذلك أصغر قيمة للمحيط أكبر من $2(2 + 7 + 9)$ أو 36؛ وأكبر قيمة للمحيط أصغر من $2(16 + 7 + 9)$ أو 64

30) يجب أن يكون طول كلٍّ من الضلعين المتطابقين أكبر من 3 cm

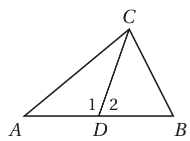
إجابة ممكنة: عند استعمال نظرية متباينة المثلث لإيجاد أصغر قيمة لطول الساق، فإن الحل يكون أكبر من 3 cm، وعند استعمالها لإيجاد أكبر قيمة لطول الساق، فإنّ المتباينة ستكون $6 > 0$، وهي صحيحة دائمًا. لذلك لا توجد قيمة عُظمَى للطول.

31) **مسألة مفتوحة:** طول أحد أضلاع مثلث 5 سم. ارسم مثلثًا يكون الضلع الذي طوله 5 سم أقصر أضلاعه، ومثلثًا آخر يكون الضلع الذي طوله 5 سم أطول أضلاعه. مضمِّنًا رسمَكَ أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه. **انظر ملحق الإجابات**

32) **اكتب:** اشرح الطريقة التي تستعملها لإيجاد أصغر قيمةٍ وأكبر قيمةٍ لطول ضلع مثلثٍ إذا علمت طولَي الضلعين الآخرين. **انظر الهامش**

تدريب على اختبار

33) إذا كانت $\overline{DC}$ قطعةً متوسطةً في $\triangle ABC$ وكان $m\angle 2 > m\angle 1$، فأي عبارة مما يأتي غير صحيحة؟ **B**



A $AD = BD$ **C** $AC > BC$

B $m\angle ADC = m\angle BCD$ **D** $m\angle 1 > m\angle B$

34) أيُّ معادلة مما يأتي تمثل العبارة:
"ناتج طرح 7 من $14w$ يساوي z"؟ **D**

A $7 - 14w = z$

B $z = 14w + 7$

C $7 - z = 14w$

D $z = 14w - 7$

مراجعة تراكمية

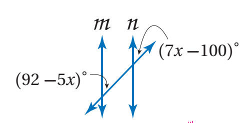
اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي: (الدرس 4-4)

35) إذا كان $4y + 17 = 41$، فإن $y = 6$ **$y < 6$ أو $y > 6$**

36) إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين، وكانت الزاويتان المتبادلتان داخليًّا متطابقتين، فإنّ المستقيمين متوازيان. **المستقيمان غير متوازيين**

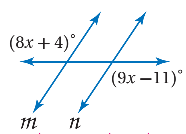
أوجد قيمة x، على أن يكون $m \parallel n$ في كلٍّ مما يأتي، واذكر المسلّمة أو النظرية التي استعملتها: (الدرس 2-2)

37)



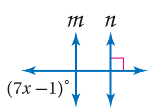
16؛ مسلّمة الزاويتين المتناظرتين

38)



15؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا

39)

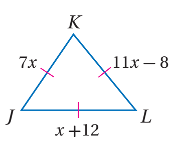


13؛ نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا

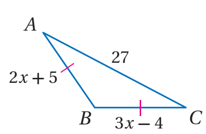
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x، وأطوال الأضلاع المجهولة في كل مثلث مما يأتي: **(40–42) انظر الهامش**

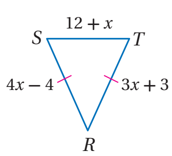
40)



41)



42)



4 التقويم

تعلّم لاحق: لتعزيز فهم الطلاب مفاهيم الدرس، اطلب إليهم إعادة كتابة النظريات والنتائج في هذا الدرس بكلماتهم الخاصّة، وتوقّع كيف ستساعدهم في الدرس اللاحق.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرسين 4–4 و 4–5 بإعطائهم:

الاختبار القصير (3)، ص (69)

إجابات

32) إجابة ممكنة: نظرية متباينة المثلث تنصُّ على أن مجموع طولَي أي ضلعين للمثلث يكون أكبر من طول الضلع الثالث للمثلث دائمًا؛ لذا يمكن كتابة ثلاث متباينات، فمثلًا للمثلث الذي أطوال أضلاعه a, b, c، يمكن كتابة:
$a + b > c,\ a + c > b,\ b + c > a$.

وعادة ما ينتج عن إحدى المتباينات عدد سالب، ولا يصحُّ استعماله عند إيجاد أكبر قيمةٍ أو أصغر قيمةٍ لطول الضلع غير المعلوم. والمتباينتان الباقيتان تعطيان القيمة التي سيكون طول الضلع أكبر منها والقيمة التي سيكون طول الضلع أصغر منها.

40) $x = 2; JK = KL = JL = 14$

41) $x = 9; AB = BC = 23$

42) $x = 7; SR = RT = 24, ST = 19$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 4

دون دون المتوسط — ضمن ضمن المتوسط — فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) دون

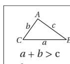
الاسم ________ التاريخ ________

4-5 تدريبات إعادة التعليم

متباينة المثلث

متباينة المثلث:

إذا أخذت ثلاثة عيدان أطوالها 1 in, 5 in, 8 in؛ وحاولت أن تكوّن منها مثلثًا، فستجد أن ذلك غير ممكن. وهذا يوضّح نظرية متباينة المثلث.

نظريّة متباينة المثلث	مجموع طولَي أيّ ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.	 $a+b>c$ $b+c>a$ $a+c>b$

مثال إذا كان طولا ضلعين في مثلثٍ 5 و8، فأوجد مدى طول الضلع الثالث.

افترض أن طول الضلع الثالث x

بناءً على نظريّة متباينة المثلث، فإن جميع المتباينات الثلاث الآتية يتعيّن أن تكون صحيحةً.

$5+8>x$ $\quad$ $8+x>5$ $\quad$ $5+x>8$

$13>x$ $\quad$ $x>-3$ $\quad$ $x>3$

إذن يتعيّن أن تكون x بين العددين 3 و13.

تمارين

حدِّد ما إذا كانت القياسات المُعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلثٍ في كلٍّ من الأسئلة الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فوضِّح السبب.

1) 6 m, 4 m, 3 m **نعم** $\quad$ 2) 6 cm, 9 cm, 15 cm **لا؛ $9+6=15$**

3) 8 cm, 8 cm, 8 cm **نعم** $\quad$ 4) 5 in, 4 in, 2 in **نعم**

5) 16 in, 8 in, 4 in **لا؛ $16>8+4$** $\quad$ 6) 3 ft, 2 ft, 5 ft, 1 ft, 5 ft **نعم**

اكتب متباينةً تمثِّل مدى طول الضلع الثالث للمثلث المُعطَى طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

7) 1 cm و 6 cm. **$5\text{ cm}<n<7\text{ cm}$** $\quad$ 8) 12 m و18 m. **$6\text{ m}<n<30\text{ m}$**

9) 1.5 ft و 5.5 ft **$4\text{ ft}<n<7\text{ ft}$** $\quad$ 10) 82 m و8 m **$74\text{ m}<n<90\text{ m}$**

11) افترض أن لديك ثلاثة أعداد موجبة مختلفة ومرتَّبة من الأصغر إلى الأكبر، ما المقارنة الوحيدة التي ستمكّنك من معرفة ما إذا كان يمكن أن تكوِّن هذه الأعداد أطوال أضلاع مثلثٍ أم لا؟

أجد مجموع العددين الصغيرين وأقارنه بالعدد الأكبر، فإذا كان مجموعهما أكبر من العدد الأكبر، فإنه يمكن أن تكون الأعداد الثلاثة أطوال أضلاع مثلث.

الصف: الأول الثانوي $\quad$ 26 $\quad$ الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (27) دون

الاسم ________ التاريخ ________

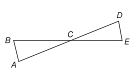
4-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

متباينة المثلث

استعمال نظرية متباينة المثلث في البراهين:

يمكنك استعمال نظرية متباينة المثلث في البراهين المختلفة.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين:



المعطيات: $\Delta ABC\cong\Delta DEC$

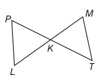
المطلوب: إثبات أنّ $AB+DE>AD-BE$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\Delta ABC\cong\Delta DEC$.	1) معطيات
2) $AB+BC>AC,\ DE+EC>CD$.	2) نظرية متباينة المثلث
3) $AB>AC-BC,\ DE>CD-EC$.	3) بالطرح
4) $AB+DE>AC-BC+CD-EC$.	4) بجمع المتباينتين في 3
5) $AB+DE>AC+CD-BC-EC$.	5) الخاصية الإبدالية
6) $AB+DE>AC+CD-(BC+EC)$.	6) خاصية التوزيع
7) $AC+CD=AD,\ BC+EC=BE$.	7) مسلمة جمع القطع المستقيمة
8) $AB+DE>AD-BE$.	8) بالتعويض

تمرين

أكمل البرهان ذا العمودين الآتي:



المعطيات: $\overline{PL}\parallel\overline{MT}$

K نقطة منتصف $\overline{PT}$

المطلوب: إثبات أنّ $PK+KM>PL$

البرهان:

العبارات	المبَررات
1) $\overline{PL}\parallel\overline{MT}$	1) **معطيات** ؟
2) $\angle P\cong\angle T$	2) **نظرية الزوايا المتبادلة داخليًا**
3) K نقطة منتصف $\overline{PT}$	3) معطيات
4) $PK=KT$	4) **تعريف نقطة منتصف قطعة مستقيمة**
5) **$\angle PKL\cong\angle MKT$**	5) نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس
6) $\triangle PKL\cong\triangle TKM$	6) **ASA** ؟
7) **$PK+KL>PL$**	7) نظرية متباينة المثلث
8) **$KL=KM$** ؟	8) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة
9) $PK+KM>PL$	9) **بالتعويض** ؟

الصف: الأول الثانوي $\quad$ 27 $\quad$ الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

تدريبات المهارات (28) دون ضمن

الاسم ________ التاريخ ________

4-5 تدريبات المهارات

متباينة المثلث

حدِّد ما إذا كانت كلٌّ من القياسات المعطاة يمكن أن تمثِّل أطوال أضلاع مثلثٍ في كلٍّ مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فوضّح السبب.

1) 2 ft ; 3 ft ; 4 ft **نعم** $\quad$ 2) 5 m ; 7 m ; 9 m **نعم**

3) 4 mm ; 8 mm ; 11 mm **نعم** $\quad$ 4) 13 in ; 13 in ; 26 in **لا؛ لأن $13+13\not>26$**

5) 9 cm ; 10 cm ; 20 cm **لا؛ لأنّ $9+10\not>20$** $\quad$ 6) 15 km ; 17 km ; 19 km **نعم**

7) 14 m ; 17 m ; 31 m **لا؛ لأن $14+17\not>31$** $\quad$ 8) 6 m ; 7 m ; 12 m **نعم**

اكتب متباينة تمثِّل مدى طول الضلع الثالث في كل مثلث عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ ممَّا يأتي:

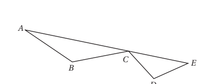
9) 5 ft ; 9 ft **$4\text{ ft}<n<14\text{ ft}$** $\quad$ 10) 7 in ; 14 in **$7\text{ in}<n<21\text{ in}$**

11) 8 m ; 13 m **$5\text{ m}<n<21\text{ m}$** $\quad$ 12) 10 mm ; 12 mm **$2\text{ mm}<n<22\text{ mm}$**

13) 12 cm ; 15 cm **$3\text{ cm}<n<27\text{ cm}$** $\quad$ 14) 15 km ; 27 km **$12\text{ km}<n<42\text{ km}$**

15) 17 cm ; 28 cm **$11\text{ cm}<n<45\text{ cm}$** $\quad$ 16) 18 ft ; 22 ft **$4\text{ ft}<n<40\text{ ft}$**

17) أكمل البرهان ذا العمودين:



المعطيات: $\triangle ABC,\ \triangle CDE$

المطلوب: إثبات أنّ: $AB+BC+CD+DE>AE$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $AB+BC>AC$ $CD+DE>CE$	1) **متباينة المثلث؟**
2) $AB+BC+CD+DE>AC+CE$	2) **خاصية الجمع للمتباينات.**
3) **$AC+CE=AE$** ؟	3) مسلمة جمع القطع المستقيمة.
4) **$AB+BC+CD+DE>AE$** ؟	4) بالتعويض.

الصف: الأول الثانوي $\quad$ 28 $\quad$ الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

تدريبات حل المسألة (29) دون ضمن فوق

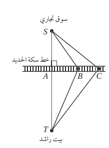
الاسم ________ التاريخ ________

4-5 تدريبات حلِّ المسألة

متباينة المثلث

1) **عيدان:** لدى فوزية 5 عيدان أطوالها: 2, 4, 6, 8, 10 سنتمترات. ما عدد المثلثات التي يمكنها تكوينها باستعمال ثلاثة عيدان في كلّ مرّةٍ؟ **3**

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن السؤال 2.



2) **طرق:** يريد راشد أن يعبُر خط سكّة الحديد؛ كي يصل إلى أقرب محلّ تجاريّ، وتوجد نقطتان يمكنه أن يعبر سكة الحديد عندهما وهما (النقطة C والنقطة B). أيّ الطريقين أطول؟ وضّح إجابتك.

الطريق عبر النقطة C أطول من الطريق عبر النقطة B،
إجابة ممكنة: لتكن S هي السوق التجاريّ، و T هي بيت راشد.
ولأن: $m\angle SAB=90^\circ$ وَ $m\angle SBA<90^\circ$،
فإنّ $m\angle SBC>90^\circ$.
ممّا يجعل $SC>SB$، وبالمثل $CT>BT$.
لذا فإن: $CT+CS>BT+BS$.

3) **تجربة علمية:** في تجربةٍ علميةٍ ما يحتاج طالب إلى ثني سلك طوله 6 cm على شكل مثلث أطوال أضلاعه أعداد طبيعية، فقرَّر الطالب تحديد النقاط التي يثني عندها السلك قبل القيام بذلك؛ حتى يحافظ على استقامة الأضلاع. فهل يمكن أن يثني الطالب السلك على بعد 1 cm من أحد طرفيه؟ ولماذا؟

لا؛ لأنه إذا قام بذلك، فإن مجموع طولَي الضلعين الآخرين سيكون 5، وبالتالي ستكون الأطوال 1 cm ، 2 cm ، 3 cm ، وهذه لا تشكِّل أطول أضلاع مثلث؛ لأن $2+1=3$ أو تكون الأطوال: 1 cm ، 4 cm ، 1 cm ، وهذه أيضًا لا تشكِّل أطوال أضلاع مثلث؛ إذن لا يمكن ثني السلك على بعد 1 cm من أحد طرفيه.

4) **مُدن:** تشكّل المدن A, B, C رؤوس مثلث على الخريطة، إذا كانت المسافة بين المدينتين A, B تساوي 395 km، وبين المدينتين B, C تساوي 147 km، فما الحدّ الأدنى للمسافة الحقيقيّة بين المدينتين A, C؟ **248 km**

5) **مثلثات:** طول أحد أضلاع مثلثٍ 2 cm، افترض أن x يمثِّل طول الضلع الثاني، و n يمثِّل طول الضلع الثالث، وافترض أن x, n عددان صحيحان موجبان، وأن: $13<n<17$ ، $14<x<17$.

اكتب جميع الأطوال الممكنة لأضلاع المثلث.

قيم n هي: 14 أو 15 أو 16، وقيم x هي 15 أو 16، والمثلثات التي يمكن عملها باستعمال هذه الأطوال هي:
2 cm , 15 cm, 14 cm أو 2 cm , 15 cm, 15 cm
أو 2 cm , 16 cm, 14 cm أو 2 cm , 16 cm, 15 cm.
أو 2 cm , 15 cm, 16 cm أو 2 cm , 16 cm, 16 cm.

الصف: الأول الثانوي $\quad$ 29 $\quad$ الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 4

دون دون المتوسط　ضمن ضمن المتوسط　فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (30) ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

4-5 التدريبات الإثرائيّة

متباينة المدى:

لإيجاد متباينةٍ تمثِّل مدى طول الضلع الثالث للمثلث المُعطى طولا ضلعين من أضلاعه، قمنا بتطبيق نظرية متباينة المثلث على الأضلاع الثلاثة، ومن ثَم أوجدنا المدى.

يمكننا إيجاد المدى بطريقةٍ أخرى.

أجب عن الأسئلة الآتية للوصول للمتباينة.

إذا كانت a, b, c أطوال أضلاع مثلث، بحيث يكون $a \le b \le c$ فأجب عما يأتي:

1) هل يمكن أن يساوي طول أحد الأضلاع الفرق بين طولَي الضلعين الآخرين؟

لا؛ لأنه إذا كان مثلًا $a = c - b$ ، فإن $a + b = c$ تناقض نظرية متباينة المثلث.

2) هل يمكن أن يكون طول ضلع أصغر من الفرق بين طولَي الضلعين الآخرين؟

لا؛ لأنه إذا كان مثلًا $a < c - b$ ، فإن $a + b < c$، وهذا يناقض نظرية متباينة المثلث.

3) استنادًا إلى السؤالين (1 ، 2) خمِّن العلاقة بين طول ضلع مثلث والفرق بين طولَي الضلعين الآخرين.

طول أي ضلع في مثلثٍ، أكبر من الفرق بين طولَي الضلعين الآخرين.

4) عبّر عن العلاقة في السؤال (3) بمتباينة بالنسبة للضلع a، مع ضمان أن يكون الفرق موجبًا.

$|b - c| < a$

5) كوّن متباينةً مركبةً تفيد في تحديد مدى طول الضلع الثالث، بالاستفادة من مجموع طولَي الضلعين الآخرين والفرق بينهما.

$|b - c| < a < b + c$

6) استعمل المتباينة المركبة التي توصَّلت لها؛ لتحديد مدى طول الضلع الثالث لكلٍّ من المثلثات المعطى طولا ضلعين من أضلاعها.

a) 3 , 4　$1 < x < 7$　　b) 7 , 9　$2 < x < 16$

c) 11 , 15　$4 < x < 26$　　d) 20 , 30　$10 < x < 50$

الصف: الأول الثانوي　30　الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

كتاب التمارين (31) دون ضمن فوق

4 - 5 متباينة المثلث

العلاقات في المثلث — الفصل الرابع

حدد ما إذا كانت كلٌّ من القياسات المعطاة تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فوضح السبب.

1) 9 in, 12 in, 18 in **نعم**　　2) 8 m, 9 m, 17 m **لا؛ لأن 17 = 9 + 8**

3) 14 cm, 14 cm, 19 cm **نعم**　　4) 23 km, 26 km, 50 km **لا؛ لأن 50 > 26 + 23**

5) 32 m, 41 m, 63 m **نعم**　　6) 2.7 cm, 3.1 cm, 4.3 cm **نعم**

7) 0.7, 1 in.4 in, 2.1 in **لا؛ لأن 2.1 = 1.4 + 0.7**　　8) 12.3 m, 13.9 m, 25.2 m **نعم**

اكتب متباينةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلثٍ عُلِمَ طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ مما يأتي :

9) 19 ft , 6 ft　**$13\text{ ft} < n < 25\text{ ft}$**　　10) 7 km , 29 km　**$22\text{ km} < n < 36\text{ km}$**

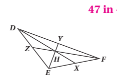
11) 13 in , 27 in　**$14\text{ in} < n < 40\text{ in}$**　　12) 18 ft , 23 ft　**$5\text{ ft} < n < 41\text{ ft}$**

13) 25 cm , 38 cm　**$13\text{ cm} < n < 63\text{ cm}$**　　14) 31 cm , 39 cm　**$8\text{ cm} < n < 70\text{ cm}$**

15) 42 m , 6 m　**$36\text{ m} < n < 48\text{ m}$**　　16) 54 in , 7 in　**$47\text{ in} < n < 61\text{ in}$**

17) **المعطيات:** النقطة H مركز $\triangle EDF$.

المطلوب: $EY + FY > DE$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) H مركز $\triangle EDF$	1) معطى
2) $\overline{EY}$ قطعة متوسطة	2) تعريف مركز المثلث
3) Y منتصف $\overline{DF}$	3) تعريف القطعة المتوسطة
4) $DY = FY$	4) تعريف نقطة المنتصف
5) $EY + DY > DE$	5) نظرية متباينة المثلث
6) $EY + FY > DE$	6) بالتعويض

18) **سياج:** لدى سفيان 4 قطع خشبيّة، ويرغب في استعمالها ليصنع نماذج مثلثة الشكل لسياج حديقة. إذا كانت أطوال القطع الخشبية هي: 8 in , 10 in , 12 in, 18 in، فما عدد نماذج السياج المختلفة التي يمكن أن يكوّنها باستعمال ثلاث قطعٍ منها دون قصِّها؟ **3**

31

4-6 المتباينات في مثلثين
Inequalities in Two Triangles

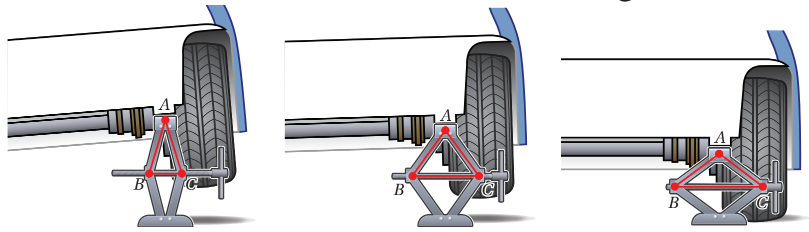
فيما سبق:
درستُ المتباينات في المثلث الواحد.

والآن:
- أطبق متباينة SAS أو عكسها؛ لإجراء مقارنات بين عناصر مثلثين.
- أثبت صحة العلاقات باستعمال متباينة SAS أو عكسها.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تُستعمل الرافعة عند تغيير إطارات السيارات، والرافعة المبيّنة أدناه واحدة من الرافعات البسيطة التي ما زالت تُستعمل حتى يومنا هذا. لاحظ أنّه عندما تُنزَّل الرافعة فإنّ ساقَي $\triangle ABC$ يظلّان متطابقين، في حين تزداد الزاوية A اتّساعًا ويزداد طول الضلع $\overline{BC}$ المقابل لـ $\angle A$.



متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS): الملاحظة في المثال أعلاه صحيحة لأي نوع من المثلثات وتوضّح النظريتين الآتيتين:

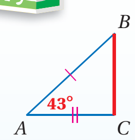
نظريتان — **المتباينات في مثلثين**

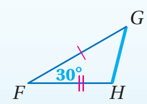
أضف إلى مطويتك

4.13 متباينة SAS

إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإنّ الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{FG}$, $\overline{AC} \cong \overline{FH}$, $m\angle A > m\angle F$ ، فإنّ $BC > GH$.

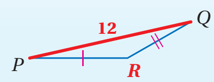


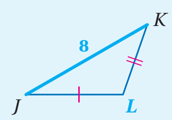


4.14 عكس متباينة SAS (SSS)

إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنّ قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول يكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان: $\overline{PR} \cong \overline{JL}$, $\overline{QR} \cong \overline{KL}$, $PQ > JK$ ، فإن $m\angle R > m\angle L$.



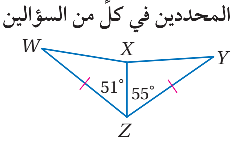


ستبرهن النظرية 4.13 في الصفحة التالية، وستبرهن النظرية 4.14 في السؤال 18

مثال 1 **استعمال متباينة SAS وعكسها**

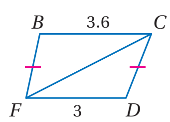
قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

a) WX, XY



في المثلثين WXZ, YXZ ،
$\overline{WZ} \cong \overline{YZ}, \overline{XZ} \cong \overline{XZ}, m\angle YZX > m\angle WZX$ ،
وبحسب متباينة SAS فإن $WX < XY$

b) $m\angle FCD, m\angle BFC$



في المثلثين BCF, DFC ،
$\overline{BF} \cong \overline{DC}, \overline{FC} \cong \overline{CF}, BC > FD$ ،
وبحسب عكس متباينة SAS فإن
$m\angle BFC > m\angle DCF$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 6-4

استعمال المتباينات لعقد مقارنات في مثلثٍ واحدٍ.

الدرس 6-4

تطبيق متباينة SAS أو عكسها؛ لإجراء مقارنات بين عناصر مثلثين.

إثبات صحة العلاقات بين مثلثين باستعمال متباينة SAS أو عكسها.

ما بعد الدرس 6-4

وضع تخمينات حول الزوايا والمستقيمات والمضلعات والدوائر، وتحديد صحة هذه التخمينات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟"

واسأل:

- هل تكون $\angle A$ أكبر عندما ترتفع السيارة أم عندما تنخفض؟ عندما تنخفض.
- هل تكون $\overline{BC}$ أطول عندما ترتفع السيارة أم عندما تنخفض؟ عندما تنخفض.
- كيف يتغيّر كلٌّ من $m\angle ABC$ و $m\angle ACB$، إذا بقي ساقا كل مثلث متطابقين دائمًا؟ يصغران عندما تنخفض السيارة.

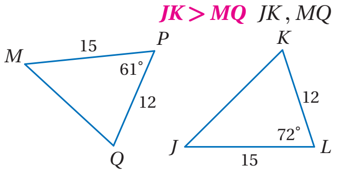
مصادر الدرس 6-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم، ص (256)	• تنويع التعليم، ص (256, 262)	• تنويع التعليم، ص (262)
كتاب التمارين	• كتاب التمارين، ص (32)	• كتاب التمارين، ص (32)	• كتاب التمارين، ص (32)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34)	• تدريبات إعادة التعليم، ص (31) • تدريبات المهارات، ص (33) • تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)	• تدريبات حل المسألة، ص (34) • التدريبات الإثرائية، ص (35)

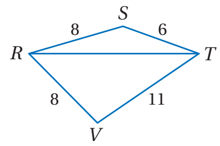
تحقق من فهمك

قارن بين القياسات المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

1A) JK , MQ $JK > MQ$



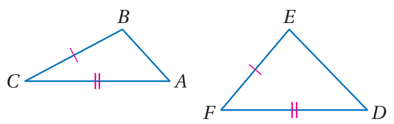
1B) $m\angle SRT$, $m\angle VRT$ $m\angle SRT < m\angle VRT$



برهان متباينة SAS

المعطيات: في المثلثين ABC, DEF ، $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $m\angle F > m\angle C$

المطلوب: $DE > AB$

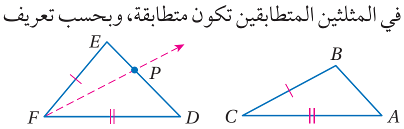


البرهان:

تعلم أنّ: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، وتعلم أيضًا أنّ: $m\angle F > m\angle C$.

ارسم نصف المستقيم FP،على أن يكون $\overline{PF} \cong \overline{BC}$ ، $m\angle DFP = m\angle C$ ، وهذا سيقودنا إلى حالتين هما :

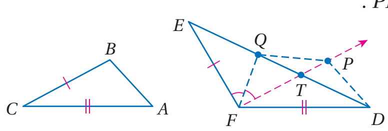
الحالة 1 P تقع على $\overline{DE}$، وعندها يكون $\triangle FPD \cong \triangle CBA$ بحسب SAS، لذا يكون $PD = BA$ ؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، وبحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة،



ومسلمة جمع قياسات القطع المستقيمة يكون $DE = EP + PD$ ؛ لذا يكون $DE > PD$ بناءً على تعريف المتباينة، وبالتعويض يكون $DE > AB$

الحالة 2 P لا تقع على $\overline{DE}$

وعندئذٍ سمِّ نقطة تقاطع $\overline{ED}$, $\overline{FP}$ بالحرف T، وارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{FQ}$ على أن تكون Q على $\overline{DE}$ ، وتكون $\angle EFQ \cong \angle QFP$ ، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين المساعدتين $\overline{PQ}$, $\overline{PD}$.



$\overline{FP} \cong \overline{BC}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	معطى
$\overline{FP} \cong \overline{EF}$	خاصية التعدّي للتطابق
$\overline{QF} \cong \overline{QF}$	خاصية الانعكاس للتطابق
$\angle EFQ \cong \angle QFP$	شرط تحديد النقطة Q
$\triangle EFQ \cong \triangle PFQ$	مسلّمة SAS
$\overline{EQ} \cong \overline{PQ}$	تطابق العناصر المتناظرة
$EQ = PQ$	تعريف التطابق
$m\angle DFP = m\angle C$	شرط تحديد النقطة P
$\triangle FPD \cong \triangle CBA$	مسلّمة SAS
$\overline{PD} \cong \overline{BA}$	تطابق العناصر المتناظرة
$PD = BA$	تعريف التطابق
$QD + PQ > PD$	متباينة المثلث
$QD + EQ > PD$	بالتعويض
$ED = QD + EQ$	مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
$ED > PD$	بالتعويض
$ED > BA$	بالتعويض

إرشادات للدراسة

متباينتا SAS, SSS

تُعرف المتباينة SAS باسم متباينة الرافعة، وعكسها يُعرف بالمتباينة SSS.

متباينة SAS

المثالان 1, 2 يبيّنان كيفية استعمال متباينة SAS وعكسها؛ لكتابة متباينة حول عناصر مثلثين.

المثال 3 يبين كيفية استعمال الجبر في العلاقات بين المثلثات.

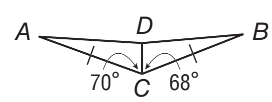
التقويم التكويني

استعمل تمارين "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلبة المفاهيم.

مثال إضافي

1 قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

a) AD و BD



في المثلثين BCD, ACD :

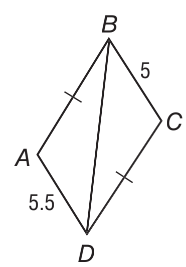
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\overline{DC} \cong \overline{DC}$

$m\angle ACD > m\angle BCD$

وبحسب متباينة SAS

$AD > BD$

b) $\angle ABD$ و $\angle BDC$



في المثلثين CBD, ABD :

$\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{BD} \cong \overline{BD}$

$AD > BC$

وبحسب عكس متباينة SAS

$m\angle ABD > m\angle BDC$

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المنطقيون: أخبر الطلاب أن نظريات المتباينات في هذا الدرس منطقيّة ، لذا يمكن للطلاب الاعتماد على مهارات التبرير لتذكُّرها. شجّع الطلاب على اختبار نظريتَي التشابه، ووضح لهم أنه يمكنهم وبسهولة تذكّر أن الضلع الأطول سيكون مقابلًا للزاوية الكبرى دائمًا، والضلع الأقصر يقابل الزاوية الصغرى دائمًا، وكلٌّ من النظريتين تتضمن مثلثين كلٌّ منهما فيه زاوية محصورة بين ضلعين متطابقين مع نظيرَيهما.

يمكنك استعمال متباينة SAS لحل مسائل من واقع الحياة.

الربط مع الحياة

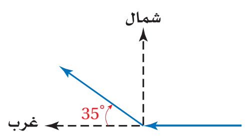
ظهرت رياضة التزلج على الجليد في منتصف القرن التاسع عشر، ونُظِّمت أولُ بطولة لها عام 1891م، وهي رياضة مشهورة في البلاد الباردة، مثل كندا والدول الاسكندنافية.

مثال 2 من واقع الحياة **استعمال متباينة SAS**

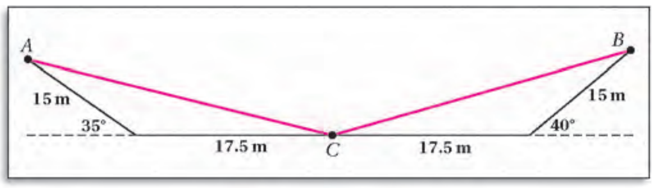
التزلُّج على الجليد: في إحدى صالات التزلُّج، انطلق اثنان من المتزلِّجين على الجليد من المكان نفسه، فقطع المتزلج A مسافة 17.5 m في اتجاه الغرب، ثم انحرف 35° في اتجاه الشمال الغربي قاطعًا 15 m ، بينما قطع المتزلِّج B مسافة 17.5 m في اتجاه الشرق، ثم انحرف 40° في اتجاه الشمال الشرقي قاطعًا 15 m ، أيُّهما كان الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضِّح إجابتك.

افهم: **المعطيات:** قطع المتزلج A مسافة 17.5 m في اتجاه الغرب، ثم انحرف 35° في اتجاه الشمال الغربي قاطعًا 15 m، والمتزلج B قطع مسافة 17.5 m في اتجاه الشرق، ثم انحرف 40° في اتجاه الشمال الشرقي قاطعًا 15 m.

المطلوب: أيُّهما كان أبعد عن مكان الانطلاق.



خطط: ارسم شكلًا لهذا الوضع.



المسار الذي اتّبعه كل متزلج وبعده عن مكان الانطلاق يشكّل مثلثًا؛ إذ قطع كلُّ متزلجٍ 17.5 m ، ثم انحرف وقطع 15 m أخرى.

استعمل أزواج الزوايا المستقيمة لإيجاد قياس الزاويتين المحصورتين، ثم طبّق متباينة SAS؛ لتقارن بين بُعدي المتزلِّجين عن مكان الانطلاق.

حل: قياس الزاوية المحصورة لمسار المتزلج A يساوي 35° − 180° أو 145° ، وقياس الزاوية المحصورة لمسار المتزلج B يساوي 40° − 180° أو 140°

بما أنّ 140° < 145° ، إذن $AC > BC$ بحسب متباينة SAS؛ لذا فالمتزلج A أبعد عن مكان الانطلاق من المتزلج B .

تحقق: المتزلج B انحرف 5° أكثر مما فعل المتزلج A في اتجاه مكان الانطلاق؛ لذا سيكون المتزلج B أقرب إلى مكان الانطلاق من المتزلج A . ✓

إرشادات لحل المسألة

رسم شكل توضيحي

ارسم شكلًا لمساعدتك على فهم المسألة اللفظية وتوضيحها بصورة صحيحة.

تحقق من فهمك

2) **التزلج على الجليد:** انطلقت مجموعتان من المتزلجين من المكان نفسه، فقطعت المجموعة A مسافة 4 mi في اتجاه الشرق، ثم انحرفت 70° في اتجاه الشمال الشرقي قاطعةً مسافة 3 mi، وقطعت المجموعة B مسافة 4 mi في اتجاه الغرب، ثم انحرفت 75° في اتجاه الشمال الغربي قاطعةً 3 mi، أي مجموعة كانت الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضح إجابتك. انظر الهامش

المحتوى الرياضي

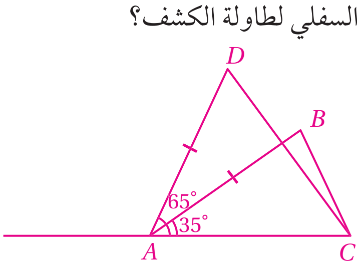
التنظيم: ضع الإشارات الدالة على التطابق على الأشكال قبل الشروع في كتابة البرهان للمساعدة على تنظيم المعلومات المعطاة كافةً، ولتسهيل عملية كتابة البرهان، حيث تساعد هذه الخطوات التنظيمية على توضيح العلاقات القائمة، وتلك التي يجب إثباتها.

تنبيه!

متباينة SAS: يجب أن تكون الزاوية محصورةً بين الضلعين المتطابقين، حتى يتسنَّى استعمال متباينة SAS أو عكسها.

مثال إضافي

2 **فحص طبيٌّ:** يستعمل الأطباء اختبار رفع الساق بشكل مستقيم لتحديد مقدار الألم الذي يشعر به المريض في ظهره، حيث يستلقي المريض على طاولة الفحص ويرفع الطبيب كلًّا من الساقين حتى يشعر المريض بألم في منطقة الظهر. يتحمل عدنان رفع الطبيب لساقه اليمنى 35° وساقه اليسرى 65° عن سطح الطاولة، أي طرف ساق لعدنان ستكون أبعد عن الطرف السفلي لطاولة الكشف؟



في المثلثين ABC, ADC

$\overline{AB} \cong \overline{AD}, \overline{AC} \cong \overline{AC}$

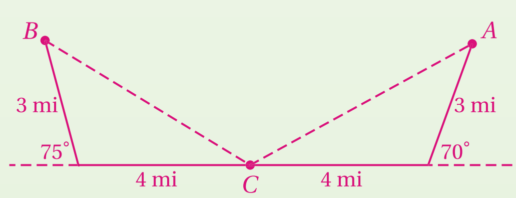
$m\angle DAC > m\angle BAC$

إذن وبحسب متباينة SAS يكون $DC > BC$

إذن طرف الساق اليسرى أبعد من طرف الساق اليمنى عن الطرف السفلي لطاولة الكشف.

إجابة (تحقق من فهمك):

2A)



المجموعة A؛ قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي سلكته المجموعة A يساوي 70° − 180° أو 110°، وقياس الزاوية المحصورة للمسار الذي سلكته المجموعة B يساوي 75° − 180° أو 105°، وبما أنّ 105° < 110°، وبحسب متباينة SAS يكون $AC > BC$ ، أي أن المجموعة A كانت أبعد عن مكان الانطلاق من المجموعة B.

لإثبات أن الزاوية المحصورة في مثلثٍ أكبر من الزاوية المحصورة في مثلث آخر، استعمل عكس متباينة SAS في الحل.

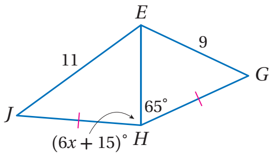
إرشادات للدراسة

استعمال حقائق إضافية

عند إيجاد مدى القيم الممكنة للمتغير x، قد تحتاج إلى استعمال إحدى الحقائق الآتية:

- قياس أي زاوية في المثلث يكون أكبر من 0 وأقل من 180 دائمًا.
- طول أي قطعة مستقيمة يكون أكبر من 0 دائمًا.

مثال 3 استعمال الجبر في العلاقات بين مثلثين



جبر: أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x.

الخطوة 1: من الشكل نعلم أن: $\overline{JH} \cong \overline{GH}$ ، $\overline{EH} \cong \overline{EH}$ ، $JE > EG$.

إذن، $m\angle JHE > m\angle EHG$ عكس متباينة SAS

$6x + 15 > 65$ عوِّض

$x > 8\frac{1}{3}$ حُل بالنسبة لـ x

الخطوة 2: استعمل حقيقة أن قياس أيّ زاوية في المثلث أقل من 180 لكتابة متباينة أخرى.

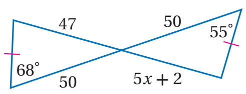
$m\angle JHE < 180°$

$6x + 15 < 180$ عوِّض

$x < 27.5$ حُل بالنسبة لـ x

الخطوة 3: اكتب المتباينتين $x > 8\frac{1}{3}$ ، $x < 27.5$ في صورة متباينة مركّبة بالشكل $8\frac{1}{3} < x < 27.5$

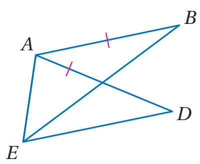
تحقق من فهمك



3) أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x. $-0.4 < x < 9$

إثبات العلاقات في مثلثين: يمكنك استعمال متباينة SAS وعكسها لإثبات صحّة العلاقات في مثلثين.

مثال 4 إثبات علاقات المثلث باستعمال متباينة SAS



اكتب برهانًا ذا عمودين.

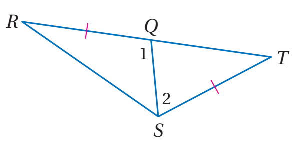
المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $EB > ED$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	1) معطى
2) $\overline{AE} \cong \overline{AE}$	2) خاصية الانعكاس
3) $m\angle EAB = m\angle EAD + m\angle DAB$	3) مسلّمة جمع قياسات الزوايا
4) $m\angle EAB > m\angle EAD$	4) تعريف المتباينة
5) $EB > ED$	5) متباينة SAS

تحقق من فهمك



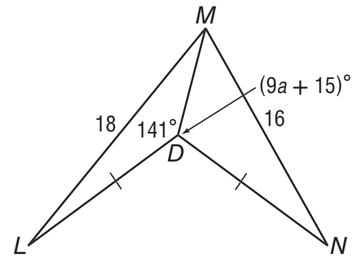
4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RS > TQ$ انظر الهامش

مثال إضافي

3 **جبر:** اكتب متباينةً تمثّل مدى القيم الممكنة لـ a.



من الشكل نعلم أن:
$\overline{LD} \cong \overline{DN}$, $\overline{DM} \cong \overline{DM}$,
$ML > MN$
إذن
$m\angle MDL > m\angle MDN$
(عكس متباينة SAS)
$141 > 9a + 15$
$14 > a$
وكذلك
$0 < m\angle MDN < 180°$
$0 < 9a + 15 < 180°$
$-\frac{5}{3} < a < \frac{165}{9}$
إذن
$-\frac{5}{3} < a < 14$

إثبات العلاقات في مثلثين

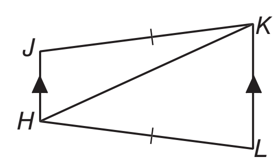
المثالان 4, 5 يبيّنان كيفية استعمال متباينة SAS وعكسها لإثبات علاقات في مثلثين.

مثال إضافي

4 اكتب برهانًا ذا عمودين:

المعطيات: $JK = HL$
$m\angle JKH + m\angle HKL < m\angle JHK + m\angle KHL$

المطلوب: $JH < KL$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $JK = HL$	1) معطى
2) $HK = HK$	2) خاصية الانعكاس
3) $m\angle JKH + m\angle HKL < m\angle JHK + m\angle KHL$	3) معطى
4) $m\angle HKL = m\angle JHK$	4) الزاويتان المتبادلتان داخليًّا متطابقتان
5) $m\angle JKH + m\angle JHK < m\angle JHK + m\angle KHL$	5) بالتعويض
6) $m\angle JKH < m\angle KHL$	6) خاصية الطرح للمتباينات
7) $JH < KL$	7) متباينة SAS

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: اعرض على الطلاب مثلثين بقياساتٍ مختلفةٍ للزوايا والأضلاع مبيّنًا عليها إشارات التطابق، واختر ضلعين للمثلثين واسأل الطلاب عن الضلع الأطول منهما. زوّد الطلاب بمفتاح إجابة للتحقق من إجاباتهم.

إجابة (تحقق من فهمك):

4) البرهان:

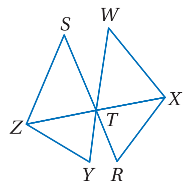
العبارات	المبررات
1) $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$	1) معطى
2) $\overline{QS} \cong \overline{QS}$	2) خاصية الانعكاس
3) $\angle 1$ زاوية خارجية بالنسبة للمثلث QST	3) تعريف الزاوية الخارجية
4) $m\angle 1 > m\angle 2$	4) قياس الزاوية الخارجية أكبر من قياس أيٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين
5) $RS > TQ$	5) متباينة SAS

مثال 5 إثبات علاقات باستعمال عكس متباينة SAS

اكتب برهانًا تسلسليًّا.

المعطيات: T نقطة منتصف $\overline{ZX}$.
$\overline{ST} \cong \overline{WT}$
$SZ > WX$

المطلوب: $m\angle XTR > m\angle ZTY$



البرهان التسلسلي:

T نقطة منتصف $\overline{ZX}$ — معطى

$\overline{ST} \cong \overline{WT}$ — معطى

$SZ > WX$ — معطى

$\overline{ZT} \cong \overline{TX}$ — نظرية نقطة المنتصف

$m\angle STZ > m\angle WTX$ — عكس نظرية الرافعة

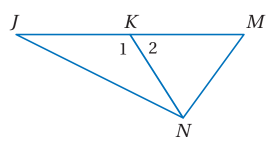
$\angle STZ \cong \angle XTR$، $\angle WTX \cong \angle ZTY$ — الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة

$m\angle STZ = m\angle XTR$، $m\angle WTX = m\angle ZTY$ — تعريف تطابق الزوايا

$m\angle XTR > m\angle ZTY$ — بالتعويض

تحقق من فهمك

5) اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{NK}$ قطعة متوسطة في $\triangle JMN$.
$JN > NM$

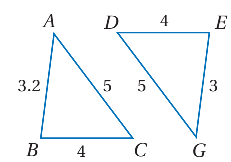
المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$ انظر الهامش

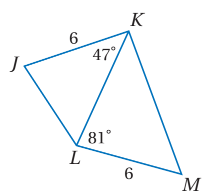
تأكد

المثال 1 قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) $m\angle ACB, m\angle GDE$ **$m\angle ACB > m\angle GDE$**

2) JL, KM **$JL < KM$**

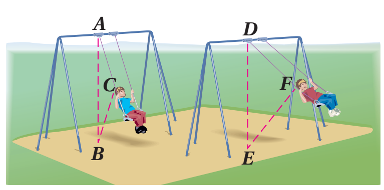




المثال 2 3) **أراجيح:** يتغيّر موضع الأرجوحة تبعًا لقوّة دفعها.

a) أي الأزواج متطابق من هذه القطع المستقيمة؟ **$\overline{AB} \cong \overline{DE}$، $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (3a**

b) أيهما أكبر: قياس $\angle A$ أم قياس $\angle D$ ؟ وضح إجابتك.
$\angle D$؛ إجابة ممكنة: بما أنّ $EF > BC$، فإن $m\angle D > m\angle A$ بحسب نظرية الرافعة.

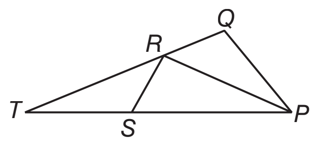


مثال إضافي

5 اكتب برهانًا تسلسليًّا:

المعطيات: $ST = PQ$
$SR = QR$
$SP > ST$

المطلوب: $m\angle SRP > m\angle PRQ$



$ST = PQ$ — معطى

$SP > ST$ — معطى

$SP > PQ$ — بالتعويض

$PR = PR$ — خاصية الانعكاس

$SR = QR$ — معطى

$m\angle SRP > m\angle PRQ$ — عكس متباينة SAS

إرشادات للمعلم الجديد

التبرير: بيّن للطلاب أنّه بإمكانهم تجزئة شكل يتكون من مثلثين أو أكثر، ورسمه من جديد؛ لتوضيح الأضلاع والزوايا المتطابقة في المثلثات.

إجابة (تحقق من فهمك):

5) **البرهان:**

العبارات	المبررات
1) $\overline{NK}$ قطعة متوسطة في $\triangle JMN$	1) معطى
2) K نقطة منتصف $\overline{JM}$	2) تعريف القطعة المتوسطة
3) $\overline{JK} \cong \overline{KM}$	3) نظرية نقطة المنتصف
4) $\overline{KN} \cong \overline{KN}$	4) خاصية الانعكاس
5) $JN > NM$	5) معطًى
6) $m\angle 1 > m\angle 2$	6) عكس متباينة SAS

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 7–1 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

(6

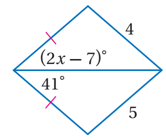
المبررات	العبارات
1) معطى	1) $\triangle YZX$ ، $\overline{YZ} \cong \overline{XW}$
2) خاصية الانعكاس	2) $\overline{ZW} \cong \overline{ZW}$
3) تعريف الزاوية الخارجيّة	3) $\angle 1$ زاوية خارجيّة لـ $\triangle YZW$.
4) قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أيٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين	4) $m\angle 1 > m\angle 2$
5) المتباينة SAS	5) $ZX > YW$

(7

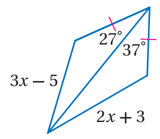
المبررات	العبارات
1) معطى	1) $\overline{AD} \cong \overline{CB}$
2) خاصية الانعكاس	2) $\overline{DB} \cong \overline{DB}$
3) معطى	3) $DC < AB$
4) عكس متباينة SAS	4) $m\angle CBD < m\angle ADB$

المثال 3 اكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كلٍّ مما يأتي :

(4 $\frac{7}{2} < x < 24$

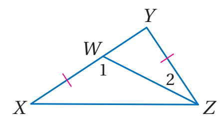


(5 $\frac{5}{3} < x < 8$

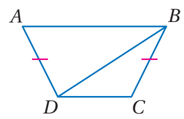


المثالان 4, 5 **برهان** اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ من السؤالين 6, 7: (6, 7) انظر الهامش

(6 **المعطيات:** $\triangle YZX$
$\overline{YZ} \cong \overline{XW}$
المطلوب: $ZX > YW$



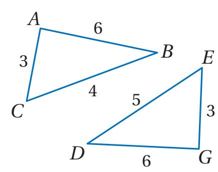
(7 **المعطيات:** $\overline{AD} \cong \overline{CB}$
$DC < AB$
المطلوب: $m\angle CBD < m\angle ADB$



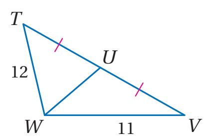
تدرب وحل المسائل

المثال 1 قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من الأسئلة الآتية :

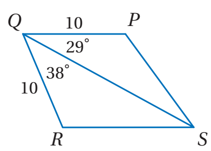
(8 $\angle BAC, \angle DGE$ — $m\angle BAC < m\angle DGE$



(9 $\angle TUW, \angle VUW$ — $m\angle TUW > m\angle VUW$



(10 PS, SR — $PS < SR$



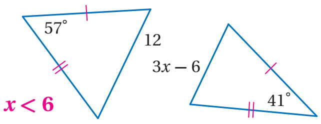
المثال 2 (11 **رحلة صيد:** أقام باسم وعثمان مخيّمًا في الصحراء، وقرّرا أن يقوما برحلة صيد، فانطلق باسم من المخيّم وسار 5 km في اتجاه الشرق، ثم انعطف 15° جهة الجنوب الشرقي وسار 2 km أخرى، وانطلق عثمان من المخيم وسار 5 km في اتجاه الغرب، ثم انعطف 35° جهة الشمال الغربي وسار 2 km أخرى.

a) أيُّهما أقرب إلى المخيّم؟ وضّح إجابتك، وارسم شكلًا توضيحيًّا . (11a, b) انظر ملحق الإجابات

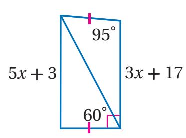
b) افترض أنّ عثمان انعطف 10° في اتجاه الجنوب الغربي بدلًا من 35° في اتجاه الشمال الغربي، فأيهما يكون أبعد عن المخيم؟ وضح إجابتك، وارسم شكلًا توضيحيًّا.

المثال 3 اكتب متباينةً تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(12 $2 < x < 6$

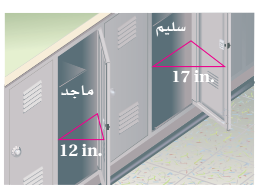


(13 $7 < x$



(14 **خزائن:** خزانَتَا سليم وماجد مفتوحتان، كما في الشكل المجاور. أيُّ بابَيْ الخزانتين يشكّل زاويةً قياسها أكبر؟ وضح إجابتك.

خزانة سليم؛ إجابة ممكنة: بما أن عرضَي البابين متساويان، وفتحتا الخزانتين متساويتان أيضًا، وبما أن 17 in > 12 in؛ إذن قياس الزاوية التي يكوّنها باب سليم أكبرُ من قياس الزاوية التي يكوّنها باب ماجد بحسب عكس متباينة SAS.



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	8-16 ، 23-33
ضمن المتوسط	9-15 فردي ، 20 ، 21 ، 23-33
فوق المتوسط	17-30 ، (اختياري: 31-33)

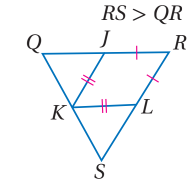
المثالان 4, 5 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (15, 16) انظر ملحق الإجابات

15) **المعطيات:** $\overline{LK} \cong \overline{JK}$, $\overline{RL} \cong \overline{RJ}$

K نقطة منتصف $\overline{QS}$.

$m\angle SKL > m\angle QKJ$

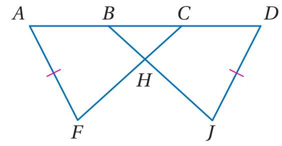
المطلوب: $RS > QR$



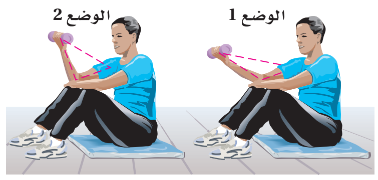
16) **المعطيات:** $\overline{AF} \cong \overline{DJ}$, $\overline{FC} \cong \overline{JB}$

$AB > DC$

المطلوب: $m\angle AFC > m\angle DJB$



17) **تمرين:** يقوم عبد الله بتمرين العضلة ذات الرأسين .



a) أيُّهما أكبر: المسافة من قبضة اليد إلى الكتف في الوضع 1، أم المسافة نفسها في الوضع 2؟ وضّح إجابتك بالقياس. انظر الهامش

b) أيُّهما أكبر: قياس الزاوية المتكونة عند المرفق في الوضع 1، أم المتكونة في الوضع 2؟ وضّح إجابتك مستعملًا القياسات التي أوجدتها في الفرع **a** وعكس متباينة SAS . انظر الهامش

الربط مع الحياة

تمارين اللياقة تزيد القوة والقدرة على التحمل، وينصح معظم خبراء اللياقة الأشخاص المبتدئين بالتدريب ثلاث جلسات في الأسبوع، بحيث تتراوح مدة الجلسة الواحدة من 20 دقيقة إلى ساعة كاملة (متضمنة فترة الإحماء والاسترخاء) على أن يفصل ما بين الجلسة والأخرى يوم واحد على الأقل.

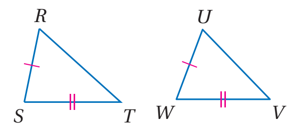
18) **برهان:** استعمل البرهان غير المباشر؛ لإثبات النظرية 4.14 (عكس متباينة SAS). انظر الهامش

المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UW}$

$\overline{ST} \cong \overline{WV}$

$RT > UV$

المطلوب: $m\angle S > m\angle W$



19) **تمثيلات متعدِّدة:** في هذه المسألة ستكتشف مجموع زوايا مضلع.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مضلعات: ثلاثي، رباعي، خماسي. وسمِّ المضلع الثلاثي ABC، والرباعي $FGHJ$، والخماسي $PQRST$. انظر ملحق الإجابات

b) **جدوليًّا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك وأكمله مستعملًا المنقلة لقياس كل زاوية.

عدد الأضلاع	قياسات الزوايا				مجموع قياسات الزوايا
3	$m\angle A$	59°	$m\angle C$	45°	180°
	$m\angle B$	76°			
4	$m\angle F$	90°	$m\angle H$	90°	360°
	$m\angle G$	90°	$m\angle J$	90°	
5	$m\angle P$	105°	$m\angle S$	116°	540°
	$m\angle Q$	100°	$m\angle T$	123°	
	$m\angle R$	96°			

c) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين عدد أضلاع المضلع ومجموع قياسات زواياه.

d) **منطقيًّا:** ما نوع التبرير الذي استعملته في الفرع **c**؟ وضِّح إجابتك.

e) **جبريًّا:** اكتب عبارةً جبريةً؛ لإيجاد مجموع قياسات زوايا مضلعٍ عدد أضلاعه n. $180°(n-2)$

19c) إجابة ممكنة: مجموع قياسات زوايا المضلع يساوي ناتج ضرب 180° في عدد أضلاع المضلع مطروحًا منها 2

19d) التبرير الاستقرائي؛ إجابة ممكنة: بما أنني استعملت نمطًا للتوصُّل إلى التخمين، إذن التبرير الذي استعملته هو التبرير الاستقرائي.

تنبيه لحل سؤال

المنقلة والمسطرة غير المدرجة

السؤال 19 يتطلب استعمال المنقلة والمسطرة غير المدرجة.

تمثيلات متعدِّدة: في السؤال 19، يستعمل الطلاب الرسوم الهندسية والجدول والوصف اللفظي والتعابير الجبرية؛ لاستقصاء خصائص المضلعات.

إجابات:

17a) الوضع 1؛ إجابة ممكنة: إذا قِسْتَ المسافة من المِرفق إلى الكف في كلا الوضعين باستعمال مسطرةٍ ستجدها أطول في الوضع 1

17b) الوضع 1؛ إجابة ممكنة: باستعمال نتيجة الفرع a ومتباينة SAS، تعلم أنّ قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول هي الأكبر، لذلك فالزاوية عند المرفق في الوضع 1 هي الأكبر.

18) **برهان غير مباشر:**

الخطوة 1: افترض أنّ $m\angle S \leq m\angle W$.

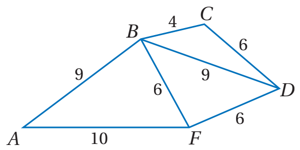
الخطوة 2: إذا كان $m\angle S \leq m\angle W$، فإن: $m\angle S = m\angle W$ أو $m\angle S < m\angle W$.

الحالة 1: إذا كان $m\angle S < m\angle W$، فإن $RT < UV$ بحسب المتباينة SAS.

الحالة 2: إذا كان $m\angle S = m\angle W$، فإن $\triangle RST \cong \triangle UWV$ بحسب SAS، ويكون $\overline{RT} \cong \overline{UV}$؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة. وعليه فإن $RT = UV$ من تعريف القطع المستقيمة المتطابقة.

الخطوة 3: الحالتان تؤدّيان إلى تناقضٍ مع المعطى $RT > UV$، لذلك فالفرض يجب أن يكون خطأً والنتيجة $m\angle S > m\angle W$، ستكون صحيحةً.

استعمل الشكل المجاور لكتابة متباينةٍ تربط بين قياس كل زوج من الزوايا في السؤالين الآتيين:

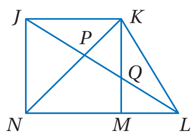


20) $m\angle BDC, m\angle FDB$ **$m\angle BDC < m\angle FDB$**

21) $m\angle ABF, m\angle FDB$ **$m\angle ABF > m\angle FDB$**

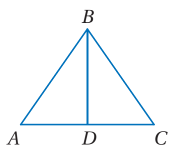
مسائل مهارات التفكير العليا

22) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، إذا كان: $\overline{KJ} \cong \overline{JN}$، $m\angle LJN > m\angle KJL$، فأيّ الزاويتين هي الأكبر: $\angle LKN$ أم $\angle LKN$؟ وضّح إجابتك.



22 و 23) انظر ملحق الإجابات

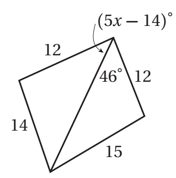
23) **تبرير:** إذا كانت $\overline{BD}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$ كما في الشكل المجاور، وكان $AB < BC$، فهل تكون $\angle BDC$ حادة دائمًا، أو أحيانًا، أو لا تكون حادّةً أبدًا؟ وضّح إجابتك.



24) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين متباينة SAS والمسلّمة SAS لتطابق المثلثات. انظر الهامش

تدريب على اختبار

25) أيٌّ متباينة مما يأتي تصف مدى القيم الممكنة لـ x؟ **C**



A $x > 6$

B $0 < x < 14$

C $2.8 < x < 12$

D $12 < x < 15$

26) إذا كان طول ضلع مربّع $x + 3$، فإن طول قطره يساوي: **B**

A $x^2 + 1$

B $x\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

C $2x + 6$

D $x^2\sqrt{2} + 6$

مراجعة تراكمية

اكتب متباينةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من الأسئلة الآتية: (الدرس 4-5)

27) 3.2 cm, 4.4 cm **$1.2\text{ cm} < n < 7.6\text{ cm}$**

28) 5 ft, 10 ft **$5\text{ ft} < n < 15\text{ ft}$**

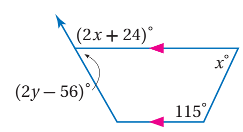
29) 3 m, 9 m **$6\text{ m} < n < 12\text{ m}$**

30) **رحلات:** سأل عليّ صديقه ماجدًا عن تكلفة الرحلة التي قام بها مع صديقه، فلم يتذكر ماجد تكلفة الشخص الواحد، ولكنّه تذكر أن التكلفة الكليّة كانت أكثر من 500 ريال. استعمل البرهان غير المباشر لتبيِّن أن تكلفة الشخص الواحد كانت أكثر من 250 ريالًا. (الدرس 4-4) انظر ملحق الإجابات

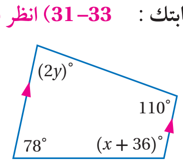
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة كلٍّ من x, y في الأسئلة الآتية، موضِّحًا إجابتك: (31–33) انظر الهامش

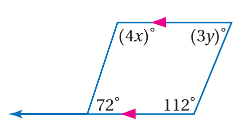
31)



32)



33)



4 التقويم

فهم الرياضيات: اختر أو اكتب أمثلةً لبراهين باستعمال متباينة SAS أو عكسها، وفي كل مثالٍ أعطِ الطلاب فرصة ليُعطوا عبارات ومبرراتها بالترتيب الصحيح لإتمام البرهان.

التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب الدرس 6–4 بإعطائهم:

الاختبار القصير (4) ، ص (69)

إجابات:

24) كلٌّ من المسلمة SAS والمتباينة SAS تتطلب أن يكون هناك زوجان من الأضلاع المتطابقة وزوج من الزوايا المحصورة، وباستعمال المسلمة SAS لتطابق المثلثات، إذا كانت الزاويتان المحصورتان متطابقتين، فإن المثلثين يكونان متطابقين، وباستعمال متباينة SAS، إذا كانت إحدى الزاويتين المحصورتين أكبر من الأخرى، فإن الضلع المقابل للزاوية الأكبر يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الأصغر في المثلث الآخر.

31) $x = 65$ بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين، $y = 41$ بحسب نظرية الزاويتين المتكاملتين.

32) $x = 66$ بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين، $y = 35$ بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين.

33) $x = 27$ بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين، $y = 22\frac{2}{3}$ بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: وزّع الطلاب مجموعات ثنائية، ثم اطلب إلى طالب من كل مجموعةٍ تصميم شكل رباعي أضلاعه مختلفة الطول. ويعيّن قياسات نصف أضلاعه وزواياه، ثم يتبادل مع زميله الأشكال ليحدِّد ما إذا كانت الأطوال غير المكتوبة أكبر من أو أصغر من الأطوال المعطاة.

مصادر المعلم للأنشطة الصفّية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 4

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (31) دون

الاسم ________ التاريخ ________

4-6 تدريبات إعادة التعليم

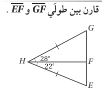
المتباينات في مثلثين

متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS):

تتضمّن النظريتان الآتيتان العلاقة بين أضلاع مثلثين وزاوية في كلٍّ منهما.

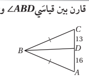
متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS)	إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول، أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإنّ الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.	$RT > AC$
عكس متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما	إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنّ قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول، أكبر من قياس الزاوية المناظرة لها في المثلث الثاني.	$m\angle M > m\angle R$

مثال 1 قارن بين طولَي $\overline{GF}$ و $\overline{EF}$.



لمّا كان ضلعان في ΔHGF مطابقين لضلعين في ΔHEF، وكان $m\angle GHF > m\angle EHF$، فإنّ $GF > FE$ وفق المتباينة SAS.

مثال 2 قارن بين قياسَي $\angle ABD$ و $\angle CBD$.



لمّا كان ضلعان في ΔABD مطابقين لضلعين في ΔCBD، و $AD > CD$، فإنّ $m\angle ABD > m\angle CBD$، وذلك وفق عكس المتباينة SAS.

تمارين

قارن بين القياسين المحدَّدين في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

1) MR و RP
$MR > RP$

2) AD و CD
$AD > CD$

3) $m\angle C$ و $m\angle Z$
$m\angle C < m\angle Z$

4) $m\angle XYW$ و $m\angle WYZ$
$m\angle XYW < m\angle WYZ$

اكتب متباينة تمثّل مدى القيم الممكنة لـ x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

5) **$x > 12.5$**

6) **$1 < x < 12$**

الصف: الأول الثانوي 31 الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

تدريبات إعادة التعليم - تتمة (32) دون

الاسم ________ التاريخ ________

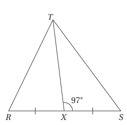
4-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المتباينات في مثلثين

إثبات العلاقات في مثلثين:

يمكنك استعمال المتباينتين SAS, SSS؛ لإثبات صحة علاقات في مثلثين.

مثال اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $RX = XS$، $m\angle SXT = 97°$

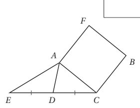
المطلوب: إثبات أنّ $ST > RT$

البرهان:

العبارات	المبَررات
1) $\angle SXT$, $\angle RXT$ متكاملتان	1) تعريف الزاويتين المتجاورتين على خط مستقيم
2) $m\angle SXT + m\angle RXT = 180°$	2) تعريف الزاويتين المتكاملتين
3) $m\angle SXT = 97°$	3) معطيات
4) $97° + m\angle RXT = 180°$	4) بالتعويض
5) $m\angle RXT = 83°$	5) خاصية الطرح
6) $m\angle SXT > m\angle RXT$	6) $97° > 83°$
7) $RX = XS$	7) معطيات
8) $TX = TX$	8) خاصية الانعكاس
9) $ST > RT$	9) المتباينة SAS

تمارين

أكمل البرهان الآتي:



المعطيات: $AFBC$ مستطيل، وَ $ED = DC, m\angle EDA > m\angle ADC$

المطلوب: إثبات أن $AE > FB$

البرهان:

العبارات	المبَررات
1) $AFBC$ مستطيل؛ $ED = DC$	1) **معطيات** ؟
2) $AD = AD$	2) **خاصيّة الانعكاس**
3) $m\angle EDA > m\angle ADC$	3) **معطيات** ؟
4) **$AE > AC$**	4) المتباينة SAS
5) **$AC = FB$**	5) الأضلاع المتقابلة في المستطيل متطابقة
6) $AE > FB$	6) بالتعويض

الصف: الأول الثانوي 32 الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

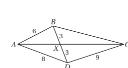
تدريبات المهارات (33) دون ضمن

الاسم ________ التاريخ ________

4-6 تدريبات المهارات

المتباينات في مثلثين

قارن بين القياسين المحدَّدين في السؤالين الآتيين:

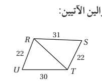


1) $m\angle BXA$ و $m\angle DXA$
$m\angle BXA < m\angle DXA$

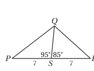
2) BC و DC
$BC > DC$

قارن بين القياسين المحدَّدين في السؤالين الآتيين:

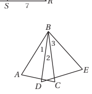
3) $m\angle STR$ و $m\angle TRU$
$m\angle STR > m\angle TRU$



4) PQ و RQ
$PQ > RQ$

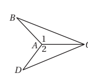


5) $\overline{BE}$, $\overline{BA}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$ أربع قطع متطابقة في الشكل المجاور، و $AC < DE$. قارن بين $m\angle1$ و $m\angle3$، وضّح إجابتك.



$m\angle1 < m\angle3$؛ من المعلومات المعطاة وعكس المتباينة SAS
ينتج أن: $m\angle ABC < m\angle DBE$ في ΔABC و ΔDBE.
ولمّا كان: $m\angle ABC = m\angle1 + m\angle2$ وَ $m\angle DBE = m\angle3 + m\angle2$،
فإن: $m\angle1 + m\angle2 < m\angle3 + m\angle2$،
وبطرح $m\angle2$ من الطرفين نجد أن: $m\angle1 < m\angle3$.

6) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{BA} \cong \overline{DA}$
$BC > DC$

المطلوب: إثبات أن: $m\angle 1 > m\angle 2$.

البرهان:

العبارات	المبَررات
1) $\overline{BA} \cong \overline{DA}$	1) **معطيات**
2) $BC > DC$	2) **معطيات**
3) $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	3) **خاصية الانعكاس**
4) $m\angle1 > m\angle2$	4) **عكس المتباينة SAS**

الصف: الأول الثانوي 33 الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

تدريبات حل المسألة (34) دون ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

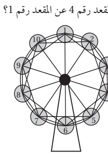
4-6 تدريبات حلّ المسألة

المتباينات في مثلثين

1) **ساعات:** طول عقرب الدقائق في ساعة كبيرة في أحد الميادين العامة 3 ft، وطول عقرب الساعات 2 ft، فهل تكون المسافة بين طرفَي العقربين أكبر عند الساعة الـ3:00 أم عند الساعة الـ8:00؟ ولماذا؟

عند الساعة 8:00؛ لأن الزاوية بين العقربين عند الساعة 8 أكبر منها عند الساعة 3، بحسب المتباينة SAS

2) **الدولاب الدوّار:** ثبّتت مقاعد دولاب دوّار عند رؤوس مضلع عشاري منتظم، فما أرقام المقاعد التي بُعدها عن المقعد رقم 1 أكبر من بُعد المقعد رقم 4 عن المقعد رقم 1؟



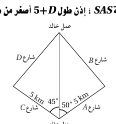
5 ,6 ,7

3) **حدائق:** أراد عمر أن ينشئ حديقتين على هيئة مثلثين مختلفين قليلًا، وكان لديه ثلاث قطع خشبية لتصميم كلٍّ من المثلثين، وقد أنهَى تصميم مثلث الحديقة الأول، ولكي يصمِّم الحديقة الثانية، عدّل ضلعين من أضلاع المثلث؛ لتصبح الزاوية بينهما أصغر ممّا كانت في المثلث الأول. وضّح كيف يغيّر هذا التعديل شكل المثلث.

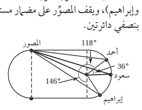
إجابة ممكنة: طول الضلع الثالث المقابل للزاوية التي صُغرت، أصبح الآن أقصر من الضلع الثالث في المثلث الأول بحسب المتباينة SAS.

4) **طرق:** عندما يتحرك خالد من منزله إلى عمله، فأمامه خياران للوصول؛ فإما أن يسلك الشارع A ثم الشارع B، أو أن يسلك الشارع C ثم الشارع D، فأيُّ الطريقين أقصر؟ ولماذا؟

أن يسلك الشارع C، ثم الشارع D؛ لأن الشارع D أقصر من الشارع B بحسب المتباينة SAS؛ إذن طول $5+D$ أصغر من طول $5+B$



5) **عدّاؤون:** يلتقط مصوّر صورًا لثلاثة عدائين (أحمد وسعود وإبراهيم)، ويقف المصوِّر على مضمار مستطيل الشكل ينتهي بنصفي دائرتين.



a) بناءً على المعلومات الواردة في الشكل أعلاه، اكتب أسماء العدّائين مرتّبة من الأقرب إلى الأبعد عن المصوّر. وضّح إجابتك.

أحمد، إبراهيم، سعود؛ لأن $146 > 118 > 36$ بحسب المتباينة SAS

b) وضّح كيف تحدّد نقطة على نصف الدائرة، يكون العدّاؤون عندها أبعد ما يمكن عن المصوّر.

مُدّ الخط المارّ بالمصور ومركز نصف الدائرة إلى حيث يقطع المضمار النصف الدائري.

الصف: الأول الثانوي 34 الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

مصادر الدرس 6 - 4

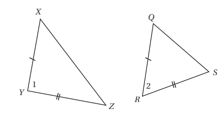
دون دون المتوسط   ضمن ضمن المتوسط   فوق فوق المتوسط

التدريبات الإثرائية (35) ضمن فوق

الاسم ________ التاريخ ________

4-6 التدريبات الإثرائيّة
نظرية الرافعة

نظرية الرافعة:
اسم يطلق على المتباينة SAS التي درستها في هذا الدرس، وقد درست أن عكس هذه النظرية أيضًا صحيح، وفي هذا النشاط، ستكتشف ما إذا كان معكوس هذه النظرية ومعاكسها الإيجابيّ صحيحًا أيضًا أم لا.



الفرض: $YZ = RS$, $XY = QR$ ؛ $m\angle 1 > m\angle 2$

النتيجة: $XZ > QS$

1) ما معكوس نظريّة الرافعة؟

إذا كان ضلعان في مثلث غير مطابقين لضلعين في مثلث آخر، أو لم يكن قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأوّل أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فلا يكون الضلع الثالث في المثلث الأوّل أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

2) هل يمكنك إيجاد مثال مضادٍّ لإثبات أن معكوس النظرية خطأ؟

لا، يبدو أن معكوس النظريّة صحيح أيضًا.

3) ما المعاكس الإيجابيّ لنظريّة الرافعة؟

إذا لم يكن الضلع الثالث في مثلث أطول من الضلع الثالث في مثلث آخر، فإن الضلعين الآخرين في المثلث الأوّل لا يطابقان الضلعين الآخرين في المثلث الثاني، أو لا يكون قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأوّل أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

4) هل يمكنك إيجاد مثال مضادٍّ لإثبات أن المعاكس الإيجابيّ للنظريّة خطأ؟

لا؛ يبدو أن المعاكس الإيجابيّ للنظريّة صحيح أيضًا.

الصف: الأول الثانوي   35   الفصل ٤ : العلاقات في المثلث

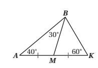
كتاب التمارين (32) دون ضمن فوق

6 - 4 المتباينات في مثلثين

الفصل الرابع
العلاقات في المثلث

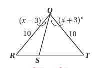
قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من الأسئلة الآتية :

1) AB , BK



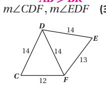
$AB > BK$

2) ST , SR



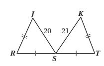
$ST > SR$

3) $m\angle CDF , m\angle EDF$



$m\angle CDF < m\angle EDF$

4) $m\angle R , m\angle T$

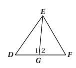


$m\angle R < m\angle T$

5) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين .

المعطيات: G نقطة منتصف $\overline{DF}$
$m\angle 1 > m\angle 2$

المطلوب: $ED > EF$



البرهان:

العبارات	المبررات
1) G منتصف $\overline{DF}$.	1) مُعطى
2) $\overline{DG} \cong \overline{FG}$	2) تعريف نقطة المنتصف
3) $\overline{EG} \cong \overline{EG}$	3) خاصية الانعكاس
4) $m\angle 1 > m\angle 2$	4) مُعطى
5) $ED > EF$	5) متباينة SAS

6) **أدوات:** استعمل سلطان زَرديَّة كما في الشكل المجاور لإصلاح كرسي. وقد لاحظ أنه عندما تؤثر قوة في المقبضين، فإن الزاوية بينهما تصغر، مما يؤدي إلى تناقص المسافة بينهما. فهل تعدّ الزرديَّة مثالًا على المتباينة SAS أم عكسها؟ **مثال على المتباينة SAS**

32

الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسيّة

قطع مستقيمة خاصّة في المثلثات: (الدرسان 2-4 ,1-4)

- القطع المستقيمة الخاصّة بالمثلثات هي الأعمدة المنصّفة ومنصفات الزوايا والقطع المتوسطة والارتفاعات.
- نقاط تقاطع المستقيمات الخاصّة في مثلث تُسمَّى نقاط التلاقي.
- نقاط التلاقي في مثلث، هي مركز الدائرة الخارجية ومركز الدائرة الداخلية ومركز المثلث ومُلتقَى الارتفاعات.

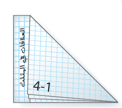
البرهان غير المباشر: (الدرس 4-4)

- كتابة برهان غير مباشر:
  1) افترض أن النتيجة غير صحيحة.
  2) بيّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض.
  3) بما أن النتيجة الخطأ تؤدي إلى عبارة غير صحيحة، فإن النتيجة الأصليّة ستكون صحيحة.

متباينات المثلث: (الدروس 6-4 ,5-4 ,3-4)

- **متباينة الزاوية الخارجية:** قياس الزاوية الخارجية لمثلث، يكون أكبر من أيٍّ من الزاويتين الداخليَّتين البعيدتين عنها.
- الزاوية الكبرى في مثلث تقابل الضلع الأطول، والزاوية الصغرى تقابل الضلع الأقصر.
- مجموع طولَي أي ضلعين في مثلث يكون أكبر من طول الضلع الثالث.
- **المتباينة SAS:** (نظرية الرافعة) إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإنّ الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.
- **المتباينة SSS:** (عكس نظرية الرافعة) إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنّ قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول يكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

المطويات منظم أفكار



تأكد من أنّ المفاهيم الأساسية قد دُوِّنت في مطويتك.

المفردات الأساسية

- العمود المنصف (ص 215)
- المستقيمات المتلاقية (ص 216)
- نقطة التلاقي (ص 216)
- مركز الدائرة الخارجية للمثلث (ص 216)
- مركز الدائرة الداخلية للمثلث (ص 219)
- القطعة المتوسطة (ص 225)
- مركز المثلث (ص 225)
- ارتفاع المثلث (ص 227)
- ملتقى ارتفاعات المثلث (ص 227)
- التبرير غير المباشر (ص 241)
- البرهان غير المباشر (ص 241)
- البرهان بالتناقض (ص 241)

اختبار المفردات

بيّن ما إذا كانت كل جملةٍ مما يأتي صحيحةً أو خاطئةً، وإذا كانت خاطئةً فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحةً:

1) مركز المثلث هو النقطة التي تتقاطع عندها الارتفاعات . خاطئة؛ ملتقى الارتفاعات
2) نقطة تلاقي القطع المتوسطة لمثلث تُسمَّى مركز الدائرة الداخلية. خاطئة؛ منصّفات الزوايا
3) نقطة التلاقي هي النقطة التي تتقاطع عندها ثلاثة خطوط أو أكثر. صحيحة
4) مركز الدائرة الخارجية لمثلث يكون على أبعادٍ متساويةٍ من رؤوس المثلث. صحيحة
5) لإيجاد مركز المثلث، ارسم منصّفات الزوايا أولًا. خاطئة؛ القطع المتوسطة
6) لتبدأ برهانًا بالتناقض، أولًا افترض أنّ ما تحاول أن تُثبته صحيح. خاطئة؛ خاطئ
7) يستعمل البرهان بالتناقض التبرير غير المباشر. صحيحة
8) القطعة المتوسطة لمثلثٍ تصل نقطة منتصف ضلع المثلث بمنتصف ضلعٍ آخر للمثلث. خاطئة؛ بالرأس المقابل لذلك الضلع
9) مركز الدائرة الداخلية لمثلث هو نقطة تقاطع عندها منصّفات زوايا المثلث. صحيحة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية: رقم الصفحة بعد كل مفردة يُشير إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة أول مرةٍ.

فإذا واجه بعض الطلبة صعوبات في حل الأسئلة 9-1، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكَّروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (71) .

المطويات منظم أفكار

اطلب إلى الطلاب أن يتصفَّحوا دروس الفصل؛ للتحقق من أنهم كتبوا في مطوياتهم أمثلةً لكل درس.

واقترح عليهم أن يُبقوا مطوياتهم في متناول أيديهم عند حل أسئلة دليل الدراسة والمراجعة.

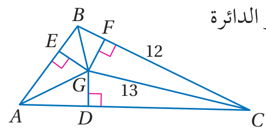
وبيّن لهم أنه يمكن أن تكون مطوياتهم أداة مراجعة سريعة استعدادًا لاختبار الفصل.

الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

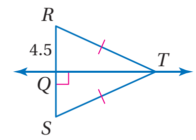
4-1 المنصفات في المثلث (ص 215-223)

10) أوجد EG إذا كانت G مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$. **5**

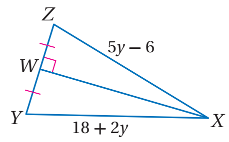


أوجد كل قياسٍ ممّا يأتي:

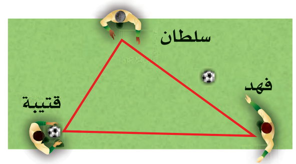
11) RS **9**



12) XZ **34**

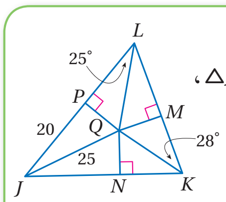


13) **كرة قدم:** يقوم قتيبة وفهد وسلطان بعملية إحماءٍ قبل بدء مباراة كرة قدم، حيث يتطلب أحد تدريبات الإحماء أن يشكّل اللاعبون الثلاثة مثلثًا، ويقف اللاعب الرابع في الوسط. أين يجب أن يقف اللاعب الرابع، بحيثُ يكون على مسافاتٍ متساويةٍ من اللاعبين الثلاثة؟ انظر الهامش.



مثال 1

إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JKL$، فأوجد كلًّا من القياسين الآتيين:



a) $m\angle QJK$

$m\angle KLP + m\angle MKN + m\angle NJP = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$2(25°) + 2(28°) + m\angle NJP = 180°$	عوّض
$106° + m\angle NJP = 180°$	بسّط
$m\angle NJP = 74°$	اطرح 106 من الطرفين

وبما أنّ $\overrightarrow{JQ}$ ينصّف $\angle NJP$، إذن $2m\angle QJK = m\angle NJP$؛ أيْ أنّ $m\angle QJK = \frac{1}{2} m\angle NJP$؛ إذن: $m\angle QJK = \frac{1}{2} \times 74° = 37°$.

b) QP

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$(QP)^2 + 20^2 = 25^2$	عوّض
$(QP)^2 + 400 = 625$	$20^2 = 400 , 25^2 = 625$
$(QP)^2 = 225$	اطرح 400 من الطرفين
$QP = 15$	بسّط

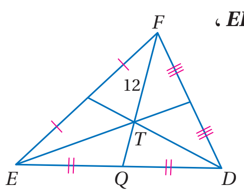
4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث (ص 225-232)

14) رؤوس $\triangle DEF$ هي $D(0, 0), E(0, 7), F(6, 3)$. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle DEF$. **(2, 3)**

15) **احتفالات:** تُريد حفصة أن تعلّق 4 مثلثات متطابقة في سقف غرفة الصف، بحيث تكون موازيةً لأرضية الغرفة. فرسمت نموذجًا لأحد المثلثات على مستوى إحداثي، فكانت إحداثيات رؤوسه هي $(0, 4), (3, 8), (6, 0)$. إذا كان كل مثلث سيُعلّق في السقف بخيطٍ، فما إحداثيات النقطة التي سيُربط الخيط عندها بالمثلث؟ **(3, 4)**

مثال 2

إذا كانت النقطة T مركز المثلث EDF، $FT = 12$، فأوجد TQ



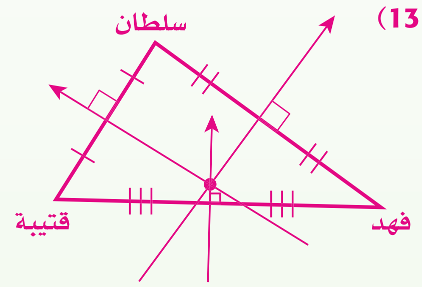
$FT = \frac{2}{3} FQ$	
$FT = \frac{2}{3}(FT + TQ)$	
$12 = \frac{2}{3}(12 + TQ)$	$FT = 12$
$12 = 8 + \frac{2}{3} TQ$	خاصية التوزيع
$4 = \frac{2}{3} TQ$	اطرح 8 من الطرفين
$6 = TQ$	اضرب الطرفين في $\frac{3}{2}$

مراجعة الدروس

مراجعة إذا لم تكن الأمثلة المعطاة كافيةً لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلُّهم على مكانٍ يراجعون فيه تلك المواضيع التي يجب مراجعتها في كتابهم المقرر.

إجابة:

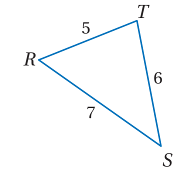
13)

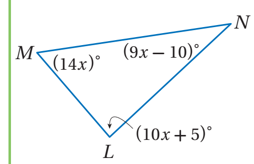


الفصل
4 دليل الدراسة والمراجعة

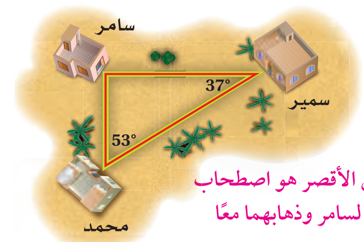
4-3 المتباينات في المثلث (ص 233-239)

اكتب زوايا كل مثلثٍ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين: **17 ,16) انظر الهامش**

16)


17)


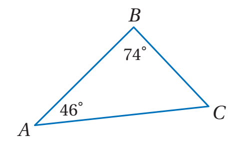
18) **جيران:** يسكن سمير ومحمد وسامر عند تقاطعات ثلاثة شوارع تشكّل المثلث المبين أدناه، إذا أرادوا الالتقاء عند أحدهم، فأي الطريقين أقصر: اصطحاب سمير لمحمد وذهابهما معًا إلى بيت سامر. أم اصطحاب محمد لسامر وذهابهما معًا إلى بيت سمير؟



الطريق الأقصر هو اصطحاب محمد لسامر وذهابهما معًا إلى بيت سمير.

مثال 3

اكتب زوايا $\triangle ABC$، مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.



a) أولًا: أوجد قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا. $m\angle C = 180° - (46° + 74°) = 60°$

لذا فالزوايا مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle A, \angle C, \angle B$.

b) والأضلاع مرتّبةً من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$.

4-4 البرهان غير المباشر (ص 241-247)

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشرٍ لكل عبارةٍ مما يأتي:

19) $m\angle A \geq m\angle B$. **$m\angle A < m\angle B$**

20) $\triangle FGH \cong \triangle MNO$. **انظر الهامش**

21) $\triangle KLM$ قائم الزاوية. **انظر الهامش**

22) إذا كان $3y < 12$، فإنّ $y < 4$. **$y \geq 4$**

23) اكتب برهانًا غير مباشر لتبين أنّه إذا كانت الزاويتان متتامّتين، فإنّه لا يمكن أن تكون أيٌّ منهما قائمةً. **24 ,23) انظر الهامش**

24) **مطالعة:** اشترى محمود كتابين بأكثر من 180 ريالًا، استعمل البرهان غير المباشر لتبيِّن أنّ ثمن أحدِهما على الأقل أكثر من 90 ريالًا.

مثال 4

اكتب الافتراض الضروري للبدء في برهان غير مباشرٍ لكل عبارةٍ مما يأتي:

a) $\overline{XY} \ncong \overline{JK}$

الافتراض هو: $\overline{XY} \cong \overline{JK}$

b) إذا كان $3x < 18$، فإن $x < 6$

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي: $x < 6$، ونفيها هو $x \geq 6$؛ لذا فالافتراض هو $x \geq 6$

c) $\angle 2$ زاوية حادّة.

الافتراض هو: $\angle 2$ ليست زاويةً حادّةً.

إجابات:

16) $\angle S, \angle R, \angle T$

17) $\angle N, \angle L, \angle M$

20) $\triangle MNO \ncong \triangle FGH$.

21) $\triangle KLM$ ليس قائم الزاوية.

23) **المعطيات:** $\angle A, \angle B$ متتامّتان

المطلوب: $\angle A$ ليست قائمةً، وكذلك $\angle B$

البرهان: افترض أنّ $m\angle A$ هو x و$m\angle B$ هو y. ومن تعريف الزوايا المتتامّة يكون $x + y = 90°$

الخطوة 1: افترض أنّ $\angle A$ زاوية قائمة. فيكون $x = 90°$

الخطوة 2: بما أنّ $x = 90°$، إذن $x + y > 90°$. وهذا تناقض لأننا نعلم أنّ $x + y = 90°$

الخطوة 3: بما أنّ الفرض بأن إحدى الزاويتين قائمة أدّى إلى تناقض، إذن هذا الفرض خطأ، لذا فالنتيجة بأن كلًا من الزاويتين ليست قائمة هي نتيجة صحيحة بالتأكيد.

24) أفترض أن ثمن أحد الكتابين هو x، وثمن الآخر هو y.

المعطيات: $x + y > 180$

المطلوب: إثبات أنّ $x > 90$ أو $y > 90$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: أفترض أن $x \leq 90$ و$y \leq 90$

الخطوة 2: إذا كانت $x \leq 90$ و $y \leq 90$، فإنّ $x + y \leq 90 + 90$، أو $x + y \leq 180$. وهذا تناقض لأننا نعلم أن $x + y > 180$

الخطوة 3: بما أنّ الفرض $x \leq 90$ و$y \leq 90$ أدّى إلى تناقضٍ مع حقيقةٍ معطاةٍ، فإن هذا الفرض خطأ، وبذلك تكون النتيجة بأن $x > 90$ أو $y > 90$ نتيجة صحيحة؛ أي أن ثمن كتابٍ واحدٍ على الأقل يزيد على 90 ريالًا.

الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 4 ص (65)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

27) افترض أن طول الضلع الثالث x، فيكون $2\,\text{ft} < x < 12\,\text{ft}$

28) افترض أن طول الضلع الثالث x، فيكون $6.5\text{ cm} < x < 14.5\text{ cm}$

29) $1 < x < 5$

4-5 متباينة المثلث (ص 254-249)

حدِّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلثٍ في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضّح السبب.

25) $5, 6, 9$ نعم

26) $3, 4, 8$ لا؛ $3 + 4 < 8$

اكتب متباينةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلثٍ عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

27) $5\,\text{ft}, 7\,\text{ft}$ انظر الهامش

28) $10.5\,\text{cm}, 4\,\text{cm}$ انظر الهامش

29) **درّاجات:** يركب خالد دراجته لزيارة صديقه وليد، وبما أن الطريق المباشر مُغلق، فقد سلك طريقًا فرعيًا طوله $2\,\text{km}$، ثم انعطف وسلك طريقًا آخر طوله $3\,\text{km}$ حتى وصل منزل وليد. إذا كانت الطرق الثلاثة تشكّل مثلثًا رأسان من رؤوسه هما منزلَا وليد وخالد، فاكتب متباينةً تمثل مدى المسافة الممكنة بين منزلَيهما. انظر الهامش

مثال 5

حدِّد ما إذا كانت القياسات $(7, 10, 9)$ يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث أم لا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضّح السبب.

اختبر كل متباينة.

$7 + 10 > 9$ $\qquad$ $7 + 9 > 10$ $\qquad$ $10 + 9 > 7$

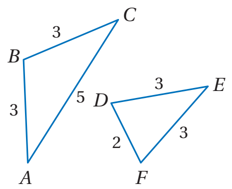
$17 > 9$ ✔ $\qquad$ $16 > 10$ ✔ $\qquad$ $19 > 7$ ✔

بما أن مجموع طولَي أيِّ ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث، إذن القطع المستقيمة التي أطوالها $7, 10, 9$ تشكِّل مثلثًا.

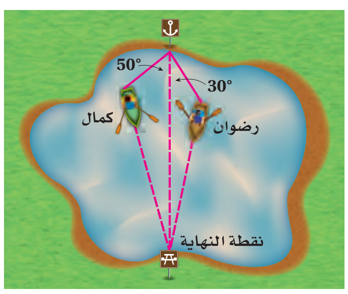
4-6 المتباينات في مثلثين (ص 261-255)

30) مستعملًا المثلثين المجاورين، قارن بين القياسين $m\angle ABC, m\angle DEF$

$m\angle ABC > m\angle DEF$



31) **تجديف:** يُجدِّف كلٌّ من رضوان وكمال في بركةٍ متَّجِهين إلى نقطةٍ محددةٍ، ولأنه ليس لهما خبرة في التجديف فقد انحرفا عن المسار مدة 4 دقائق، قطع كلٌّ منهما فيها مسافة $50\,\text{m}$، ثم استعادا مسارهما الصحيح، كما في الشكل. أيهما أقرب إلى نقطة النهاية عند هذه اللحظة؟ رضوان.



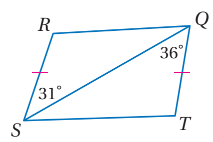
مثال 6

قارن بين كل قياسين فيما يأتي :

a) RQ, ST

بما أن: $\overline{RS} \cong \overline{TQ}, \overline{QS} \cong \overline{QS}, m\angle SQT > m\angle RSQ$

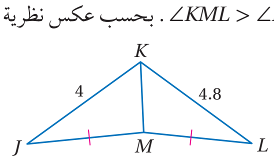
في المثلثين STQ, QRS إذن، $RQ < ST$ بحسب نظرية المفصَّلة.



b) $m\angle KML, m\angle KMJ$

بما أن: $\overline{JM} \cong \overline{LM}, \overline{KM} \cong \overline{KM}, LK > JK$،

إذن $\angle KML > \angle KMJ$. بحسب عكس نظرية المفصّلة.



266 الفصل 4 العلاقات في المثلث

المعالجة: استعمل نتائج اختبار الفصل ومخطط المعالجة؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب.
العبارة "إذا... فاختر..." في الجدول تساعدك على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصدرٍ لكل مستوى.

إجابات:

5) **المعطيات:** $5x + 7 \geq 52$

المطلوب: $x \geq 9$

الخطوة 1: افترض أن $x < 9$.

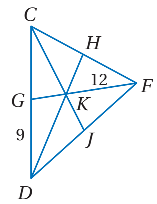
الخطوة 2:

$x < 9$	افترض
$5x < 45$	اضرب الطرفين بـ 5
$5x + 7 < 45 + 7$	اجمع 7 للطرفين
$5x + 7 < 52$	بسّط
هذا يناقض المعطى $5x + 7 \geq 52$	

الخطوة 3: أدّى الافتراض إلى تناقض مع المعلومة المعطاة $5x + 7 \geq 52$، لذا فالافتراض بأن $x < 9$ خطأ. وعليه تكون النتيجة الأصلية بأن $x \geq 9$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.

1) **حدائق:** يزرع ماجد وردًا في حوض دائري داخل منطقة مثلثة الشكل محدودة بثلاثة طرق للمشاة، أيُّ نقطة من نقاط التلاقي في المثلث سيستعملها مركزًا لأكبر دائرةٍ يمكن رسمها داخل المثلث؟ **مركز الدائرة الداخلية.**

النقطة K مركز $\triangle CDF$، $DK = 16$. أوجد كلَّ طولٍ مما يأتي:



2) KH **8**

3) CD **18**

4) FG **18**

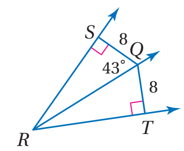
5) **برهان:** اكتب برهانًا غير مباشر.

المعطيات: $5x + 7 \geq 52$ **انظر الهامش**

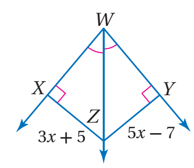
المطلوب: $x \geq 9$

أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

6) $m\angle TQR$ **$43°$**



7) XZ **23**



8) **اختيار من متعدد:** إذا كان طولا ضلعين في مثلث هما 3.1 cm و 4.6 cm، فما أصغر عددٍ صحيحٍ يمكن أن يكون طولًا للضلع الثالث؟ **B**

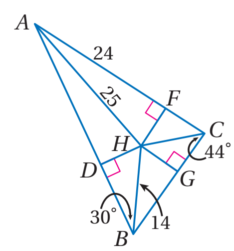
A 1.6 cm

B 2 cm

C 7.5 cm

D 8 cm

إذا كانت H مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$، فأوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:



9) DH **7**

10) BD **12 تقريبًا**

11) $m\angle HAC$ **$16°$**

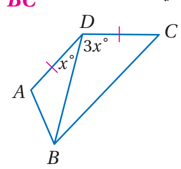
12) $m\angle DHG$ **$120°$**

13) **اختيار من متعدد:** إذا كان طولا ضلعين في مثلثٍ هما 5, 11، فأيُّ متباينةٍ مما يأتي تمثل مدى طول الضلع الثالث؟ **C**

A $6 < x < 10$ **C** $6 < x < 16$

B $5 < x < 11$ **D** $x < 5$ أو $x > 11$

14) قارن بين AB, BC في الشكل أدناه. **$AB < BC$**



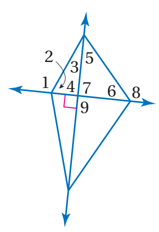
اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشرٍ لكل عبارة مما يأتي:

15) إذا كان 8 عاملًا للعدد n، فإنّ 4 عامل للعدد n. **4 ليس عاملًا للعدد n**

16) $m\angle M > m\angle N$ **$m\angle M \leq m\angle N$**

17) إذا كان $3a + 7 \leq 28$، فإنّ $a \leq 7$. **$a > 7$**

استعمل الشكل المجاور، لتحدّد أي زاوية لها أكبر قياسٍ في كلٍّ من المجموعات الآتية:



18) $\angle 1, \angle 5, \angle 6$ **$\angle 1$**

19) $\angle 9, \angle 8, \angle 3$ **$\angle 8$**

20) $\angle 4, \angle 3, \angle 2$ **$\angle 4$**

أوجد متباينةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في المثلث الذي عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

21) 10 ft, 16 ft **$6\ ft < x < 26\ ft$**

22) 23 m, 39 m **$16\ m < x < 62\ m$**

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 25% تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلبة في حل ما نسبته 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	أحد المصدرين الآتيين:
	الدروس: 6-4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 4-5, 4		تدريبات إعادة التعليم، ص (31 ,26 ,21 ,16 ,11 ,6)
	تدريبات المهارات، ص (33 ,28 ,23 ,13 ,8)		www.obeikaneducation.com
	www.obeikaneducation.com		

1 التركيز

الهدف تعلُّم طريقة استبعاد البدائل غير المعقولة؛ للمساعدة على حل أسئلة الاختيار من متعدّد.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اسأل:

- وضّح كيف يمكن أن يساعد استبعاد البدائل غير المعقولة على حل أسئلة "الاختيار من متعدّد".
  إجابة ممكنة: استبعاد البدائل غير المعقولة يقلل من عدد بدائل الإجابة، فتصبح أقرب إلى الإجابة الصحيحة.
- ما معطيات السؤال التي تستعملها لتحديد البدائل غير المنطقية؟
  إجابة ممكنة: في أثناء قراءتك السؤال، يجب أن تحدِّد المطلوب بدقةٍ، وما إذا كان عددًا صحيحًا أو كسرًا عشريًّا أو قياس زاوية، وتحدد وحدته.
- اذكر بعض الأمثلة من هذا الفصل، يمكنك استبعاد الإجابات العدديّة الكبيرة جدًّا أو الصغيرة جدًّا منها؟
  إجابة ممكنة: عند حل مسألةٍ المطلوب فيها هو قياس زاوية مثلث، فإنه يجب حذف البدائل التي يكون فيها قياس الزاوية أكبر من 180°، والبدائل التي تجعل مجموع قياسات زوايا المثلث أكبر من 180° .

الفصل 4 الإعداد للاختبارات

استبعاد البدائل غير المعقولة

يمكنك استبعاد البدائل غير المعقولة؛ لتحدّد الإجابة الصحيحة عند حل أسئلة الاختيار من متعددٍ.

طرائق استبعاد البدائل غير المعقولة

الخطوة 1

اقرأ نَصَّ السؤال بعناية؛ لتحدّد المطلوب إيجاده بالضبط.

- ما المطلوب حلّه؟
- هل الجواب عدد صحيح أم كسر اعتيادي أم كسر عشري؟
- هل تحتاج إلى استعمال رسمٍ أو جدولٍ؟
- ما وحدات القياس المطلوبة للإجابة (إن وُجدت)؟

الخطوة 2

تفحَّص كل بديل بعناية وقدِّر معقوليته.

- استبعد أي بديل يبدو أنّه غير صحيح.
- استبعد أي بديل ليس ضمن الصيغة المناسبة للإجابة الصحيحة.
- استبعد أي بديل لا يتضمن وحدات القياس الصحيحة.

الخطوة 3

حل السؤال، واختر الإجابة الصحيحة من بين البدائل المتبقية، ثم تحقق من إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة، وحدّد المطلوب، ثم استعمل المعطيات في حلّها.

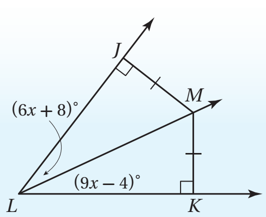
ما قياس $\angle KLM$؟

A 32°

B 44°

C 78°

D 94°



اقرأ السؤال وادرس الشكل بعناية. المثلث KLM قائم الزاوية. وبما أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي $180°$ ، فإن $m\angle KLM + m\angle LMK$ يجب أن يساوي $90°$ ، وإلا زاد المجموع على $180°$ ، وبما أن البديل D هو قياس لزاوية منفرجة، فإنّه يُستبعد لعدم معقوليته؛ وعليه فالجواب الصحيح يكون A أو B أو C .

حل المسألة. بحسب عكس نظرية منصّف الزاوية التي تنصُّ على أنّه: "إذا وقعت نقطة داخل زاويةٍ، وكانت على بعدين متساويين من ضلعَيها، فإنّ هذه النقطة تقع على منصف الزاوية" ، وبما أنّ النقطة M على بُعدين متساويين من ضلعي الزاوية LJ, LK ، فإنّها تقع على منصّف $\angle JLK$ ؛ لذا $\angle JLM$ يجب أن تطابق $\angle KLM$ ؛ والآن اكتب معادلةً لإيجاد قيمة x وحلها.

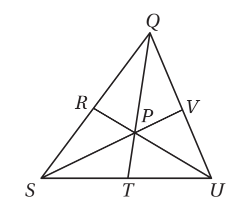
$$6x + 8 = 9x - 4$$
$$-3x = -12$$
$$x = 4$$

إذن $m\angle KLM = [9(4) - 4]° = 32°$ ، والبديل A يمثل الإجابة الصحيحة.

تمارين ومسائل

اقرأ كلّ سؤال فيما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة في نموذج الإجابة الذي زوَّدك به المعلم أو في أيِّ ورقةٍ أخرى:

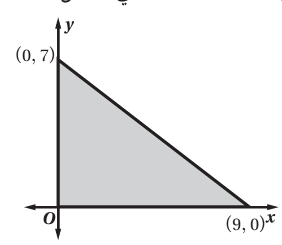
1) النقطة P مركز المثلث QUS ، إذا كان $QP = 14$ cm ، فما طول $\overline{QT}$ ؟ D



A 7 cm   C 18 cm

B 12 cm   D 21 cm

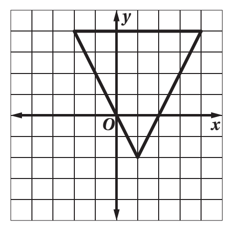
2) كم وحدةً مربعةً مساحة المثلث في الشكل أدناه؟ C



A 8   C 31.5

B 27.4   D 63

3) ما إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث أدناه؟ C



A $\left(-\frac{3}{4}, -1\right)$ C $\left(1, \frac{5}{2}\right)$

B $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$ D $\left(1, \frac{9}{4}\right)$

4) إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، وكان $m\angle A = 94°$ ، فأيٌّ مما يأتي يجب أن تكون صحيحة؟ D

A $m\angle B = 94°$

B $m\angle B = 47°$

C $AB = BC$

D $AB = AC$

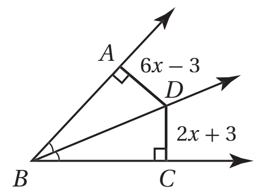
5) أيٌّ مما يأتي يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟ B

A 1.9, 3.2, 4   C 3, 7.2, 7.5

B 1.6, 3, 3.4   D 2.6, 4.5, 6

مثال إضافي

ما طول $\overline{AD}$ ؟ D



A −8

B −2

C 2

D 6

3 التقويم

استعمل التمارين 5–1؛ للتحقق من فهم الطلاب.

تشخيص أخطاء الطلبة

ارصد أخطاء الطلبة في كل سؤال، فقد تشير هذه الإجابات إلى أخطاء شائعة وأخطاء مفاهيمية.

1) A أخطأ حسابيًّا.
B أخطأ حسابيًّا.
C أخطأ حسابيًّا.
D صحيحة

2) A خمَّن.
B خمَّن.
C خمَّن.
D صحيحة

3) A صحيحة
B خمَّن.
C خمَّن.
D خمَّن.

4) A صحيحة
B خمَّن.
C خمَّن.
D عكس الترتيب

5) A نسي حالة الزاوية الحادّة.
B صحيحة
C نسي حالة الزاوية القائمة.
D خمَّن.

6) A خمَّن وفقًا للزاوية المعطاة فقط.
B تعريف غير صحيح.
C صحيحة.
D خمَّن وفق الشكل الظاهر.

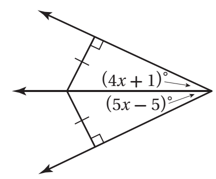
7) A أخطأ حسابيًّا.
B أخطأ حسابيًّا.
C صحيحة
D أخطأ حسابيًّا.

الفصل 4 اختبار تراكمي
للفصول 1-4

أسئلة الاختيار من متعدد

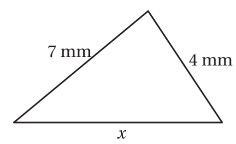
اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم حدِّد رمز الإجابة الصحيحة:

1) أوجد قيمة x. D



A 3
B 4
C 5
D 6

2) أيٌّ مما يأتي لا يمكن أن يكون قيمة لـِ x؟ D

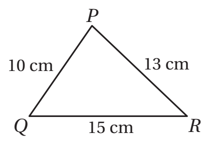


A 8 mm
B 9 mm
C 10 mm
D 11 mm

3) أيٌّ مما يأتي أفضل وصف لأقصر مسافةٍ من أحد رؤوس مثلثٍ إلى الضلع المقابل له؟ A

A ارتفاع
B عمود منصف
C قطعة متوسطة
D قطعة مستقيمة

4) ما العلاقة الصحيحة بين قياسات زوايا $\triangle PQR$؟ A

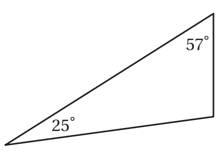


A $m\angle R < m\angle Q < m\angle P$
B $m\angle R < m\angle P < m\angle Q$
C $m\angle Q < m\angle P < m\angle R$
D $m\angle P < m\angle Q < m\angle R$

5) ما الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر للعبارة "الزاوية S ليست زاويةً منفرجةً"؟ B

A $\angle S$ زاوية قائمة
B $\angle S$ زاوية منفرجة
C $\angle S$ زاوية حادّة
D $\angle S$ ليست زاوية حادّة

6) صنِّف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه. C



A حادّ الزوايا
B متطابق الزوايا
C منفرج الزاوية
D قائم الزاوية

7) ما ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-6, -2)$، $(3, -5)$؟ C

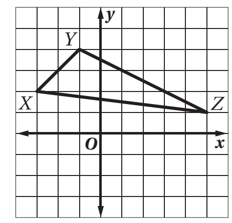
A 3
B $\frac{1}{3}$
C $-\frac{1}{3}$
D -3

أسئلة ذات إجابات قصيرة

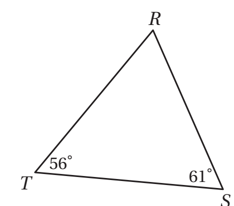
أجب عن الأسئلة الآتية:

8) إذا كان طولا ضلعين في مثلثٍ هما 15 cm , 9 cm ، فما أصغر عددٍ صحيح من السنتمترات يمكن أن يكون طولًا للضلع الثالث؟ **7**

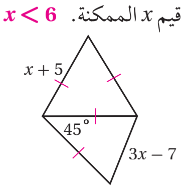
9) ما إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث أدناه؟ $\left(-\frac{2}{3}, 6\frac{2}{3}\right)$



10) اكتب أضلاع المثلث أدناه مرتّبةً تبعًا لأطوالها من الأقصر إلى الأطول: $\overline{RS}, \overline{RT}, \overline{ST}$

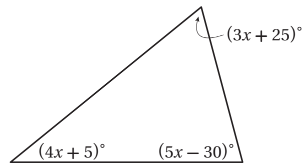


11) اكتب متباينةً تصف قيم x الممكنة. $\frac{7}{3} < x < 6$



12) خرج كلٌّ من حمزة وهاني مع فرقة الكشافة وخيّموا في الصحراء، فترك حمزةُ المخيم وسار 2 km في اتجاه الشرق. ثم انعطف 20° في اتجاه الجنوب الشرقي. وسار 4 km أخرى. وأما هاني فسار 2 km في اتجاه الغرب، ثم انعطف 30° في اتجاه الشمال الغربي ، وسار 4 km أخرى. أيُّهما أبعد عن المخيم؟ **حمزة**

13) أوجد قيمة x في المثلث أدناه. **15**



أسئلة ذات إجابات مطولة

14) إذا كانت رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(-3, 1), B(0, 2)$, $C(3, 4)$، فأجب عن الأسئلة التالية مبيِّنًا خطوات الحل:

a) ارسم هذا المثلث في المستوى الإحداثي. **انظر الهامش**

b) أوجد أطوال أضلاعه (قرِّب إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ).

c) صنِّفِ المثلث من حيث أضلاعه وزواياه.

d) قارن بين $m\angle A, m\angle C$.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟														
إذا لم تستطع الإجابة عن ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس...	4-1	4-5	4-2	4-3	4-4	3-1	2-3	4-5	4-2	4-3	4-6	4-6	3-2	3-1, 4-3

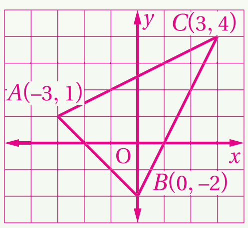
التقويم التكويني

يمكنك تحديد مدى تقدُّم الطلاب في الفصل 3 من خلال:

- اختبار تراكمي: ص (270, 271)
- اختبار تراكمي: ص (81–83)

إجابات

14a)



14b) $AB \approx 4.2, BC \approx 6.7, AC \approx 6.7$

14c) $\triangle ABC$ حاد الزوايا ومتطابق الضلعين

14d) $m\angle C < m\angle A$؛ لأن طول الضلع المقابل للزاوية C في المثلث، أقصر من طول الضلع المقابل للزاوية A

الدرس 1-4 ، ص (222) :

27) البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$ (معطى)

2) $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة)

3) $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (SSS)

4) $\angle ACD \cong \angle BCD$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) $\overline{CE} \cong \overline{CE}$ (خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة)

6) $\triangle CEA \cong \triangle CEB$ (SAS)

7) $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

8) E نقطة منتصف $\overline{AB}$ (نظرية نقطة المنتصف)

9) $\angle CEA \cong \angle CEB$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

10) $\angle CEA$ و $\angle CEB$ متجاورتان على مستقيمٍ (تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيمٍ)

11) $\angle CEA$ و $\angle CEB$ متكاملتان (نظرية الزاويتين المتجاورتين على مستقيمٍ)

12) $m\angle CEA + m\angle CEB = 180$ (تعريف التكامل)

13) $m\angle CEA + m\angle CEA = 180$ (بالتعويض)

14) $2m\angle CEA = 180$ (بالتعويض)

15) $m\angle CEA = 90$ (خاصيّة القسمة)

16) $\angle CEA$ و $\angle CEB$ قائمتان (تعريف الزاوية القائمة)

17) $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (تعريف المستقيمين المتعامدين)

18) $\overline{CD}$ عمود منصّف لـ $\overline{AB}$ (تعريف العمود المنصّف)

19) C و D واقعتان على العمود المنصّف لـ $\overline{AB}$ (أيُّ نقطتين يمرُّ بهما مستقيمٌ واحد فقط)

28) البرهان:

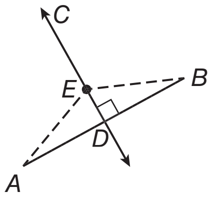
العبارات (المبررات)

1) $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ منصفات لزوايا $\triangle ABC$ ، $\overline{KP} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{KQ} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{KR} \perp \overline{AC}$ (معطيات)

2) $KP = KQ$، $KQ = KR$، $KP = KR$ (كل نقطة على منصِّف الزاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعَي الزاوية)

3) $KP = KQ = KR$ (خاصيّة التعدّي)

29) المعطيات: $\overleftrightarrow{CD}$ عمود منصّف لِـ $\overline{AB}$.

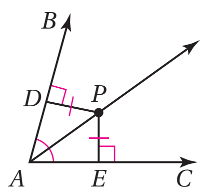


E نقطة على $\overline{CD}$.

المطلوب: $EA = EB$

البرهان: $\overline{CD}$عمود منصِّف لِـ $\overline{AB}$، ومن تعريف المنصِّف، فإن D نقطة منتصف $\overline{AB}$، لذلك $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ بحسب نظرية نقطة المنتصف. $\angle CDA$, $\angle CDB$ قائمتان بحسب تعريف العمود، وبما أنّ جميع الزوايا القائمة متطابقة إذن $\angle CDA \cong \angle CDB$، وبما أنّ E نقطة على $\overline{CD}$، فإنّ $\angle EDA$, $\angle EDB$ قائمتان ومتطابقتان. وحسب خاصيّة الانعكاس، $\overline{ED} \cong \overline{ED}$ ؛ إذن $\triangle EDA \cong \triangle EDB$ بحسب SAS. وتكون $\overline{EA} \cong \overline{EB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة، ومن تعريف التطابق ينتج أن $EA = EB$

30) المعطيات:



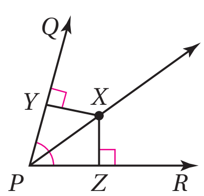
P نقطة داخل $\angle BAC$.

بُعد النقطة P عن $\overline{AB}$ يساوي بُعدها عن $\overline{AC}$.

المطلوب: $\overrightarrow{AP}$ منصف لِـ$\angle BAC$.

البرهان: النقطة P تقع داخل الزاوية BAC للمثلث BAC ، و$PD = PE$. ومن تعريف التطابق $\overline{PD} \cong \overline{EP}$ ؛ وبما أن PD هي بُعد النقطة P عن $\overline{AB}$ فإن: $\overline{PD} \perp \overline{AB}$ ، وبالمثل PE هي بُعد النقطة P عن $\overline{AC}$، فإن: $\overline{PE} \perp \overline{AC}$؛ لأن المسافة من نقطةٍ إلى مستقيمٍ تُقاس على القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من النقطة وبذلك تكون الزاويتان $\angle ADP$ و $\angle AEP$ قائمتين بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين، والمثلثان ADP و AEP قائما الزاوية بحسب تعريف المثلث القائم الزاوية. وبحسب خاصيّة الانعكاس $\overline{AP} \cong \overline{AP}$ ، إذن المثلثان ADP, AEP متطابقان بحسب HL. $\angle DAP \cong \angle EAP$؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، و $\overrightarrow{AP}$ منصِّف لِـ$\angle BAC$ بحسب تعريف منصِّف الزاوية.

32) المعطيات: $\overrightarrow{PX}$ تنصّف $\angle QPR$.



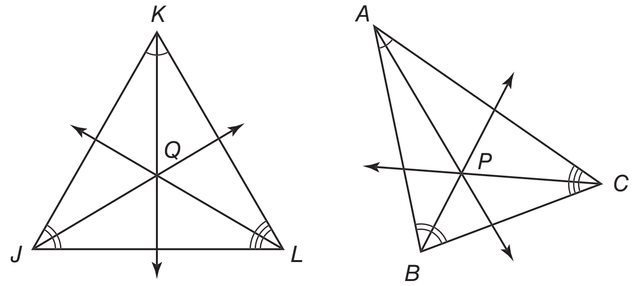
$\overline{XY} \perp \overline{PQ}$, $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$

المطلوب: إثبات أنّ $XY = XZ$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{PX}$ تنصّف$\angle QPR$، $\overline{XY} \perp \overline{PQ}$, $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$	1) معطيات
2) $\angle YPX \cong \angle ZPX$	2) تعريف منصّف الزاوية
3) $\angle PYX$, $\angle PZX$ قائمتان	3) تعريف التعامد
4) $\angle PYX \cong \angle PZX$	4) الزوايا القائمة متطابقة
5) $\overline{PX} \cong \overline{PX}$	5) خاصيّة الانعكاس
6) $\triangle PYX \cong \triangle PZX$	6) AAS
7) $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$	7) العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة
8) $XY = XZ$	8) تعريف تطابق القطع المستقيمة

36) صحيحة أحيانًا؛ إذا كان المثلث متطابق الأضلاع، فإنّ هذه العبارة تكون صحيحة؛ لأن منصفات زوايا المثلث المتطابق الأضلاع هي الأعمدة المنصّفة لأضلاعه في الوقت نفسه. ولكن إذا كان المثلث متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع فإنّ العبارة تكون خاطئة.

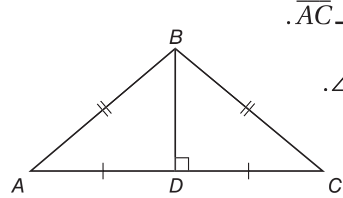


$JQ = KQ = LQ$ $\qquad$ $AP \neq BP \neq CP$

37) صحيحة دائمًا؛

المعطيات: $\triangle ABC$ متطابق الضلعين فيه $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ؛ $\overline{BD}$ عمود منصّف لـ $\overline{AC}$.

المطلوب: $\overline{BD}$ منصّف لـ $\angle ABC$.



البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC$ متطابق الضلعين فيه $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	1) معطى
2) $\overline{BD}$ عمود منصّف لـ $\overline{AC}$	2) معطى
3) D نقطة منتصف $\overline{AC}$	3) تعريف منصّف القطعة المستقيمة
4) $\overline{AD} \cong \overline{DC}$	4) نظرية نقطة المنتصف
5) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	5) خاصية الانعكاس
6) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$	6) SSS
7) $\angle ABD \cong \angle CBD$	7) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة
8) $\overline{BD}$ منصف لـ $\angle ABC$	8) تعريف منصّف الزاوية

الدرس 4-2 ، ص (231) :

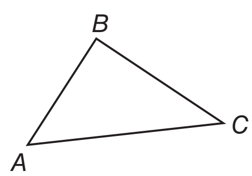
22) **البرهان:** من تعريف منصّف الزاوية، تعلم أن $\angle XYW \cong \angle ZYW$ ، كما أن $\overline{YW} \cong \overline{YW}$ بحسب خاصية الانعكاس؛ لذلك وبحسب SAS يكون $\triangle XYW \cong \triangle ZYW$.
إذن $\overline{XW} \cong \overline{ZW}$ ؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، وبحسب نظرية نقطة المنتصف تكون W نقطة منتصف $\overline{XZ}$، ومن تعريف القطعة المتوسطة تكون $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.

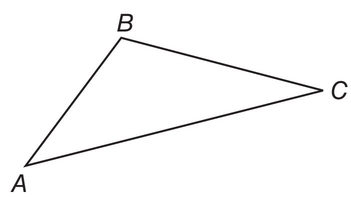
23) **البرهان:**

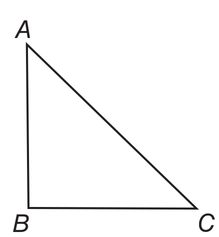
العبارات	المبررات
1) $\overline{XR}, \overline{YS}, \overline{ZQ}$ قطع متوسطة لـ $\triangle XYZ$	1) معطيات
2) $XP = \frac{2}{3} XR$	2) نظرية مركز المثلث
3) $XR = XP + PR$	3) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
4) $XP = \frac{2}{3}(XP + PR)$	4) بالتعويض
5) $XP = \frac{2}{3}XP + \frac{2}{3}PR$	5) خاصية التوزيع
6) $\frac{1}{3}XP = \frac{2}{3}PR$	6) خاصية الطرح
7) $XP = 2PR$	7) خاصية الضرب
8) $\frac{XP}{PR} = 2$	8) خاصية القسمة

الدرس 4-3 ، ص (239) :

32a)







32b) إجابة ممكنة:

المثلث	AB	BC	$AB + BC$	CA
الحادّ	2	2.4	4.4	3.2
المنفرج	2.6	3.4	6.0	5.0
القائم	2.7	2.8	5.5	3.9

32c) إجابة ممكنة:

المثلث	BC	CA	$BC + CA$	AB
الحادّ	2.4	3.2	5.6	2
المنفرج	3.4	5.0	8.4	2.6
القائم	2.8	3.9	6.7	2.7

المثلث	AB	CA	$AB + CA$	BC
الحادّ	2	3.2	5.2	2.4
المنفرج	2.6	5.0	7.6	3.4
القائم	2.7	3.9	6.5	2.8

32d) $AB + BC > CA\,,\ BC + CA > AB\,,\ AB + CA > BC$

32e) إجابة ممكنة: مجموع طولَي أيِّ ضلعين في أي مثلثٍ يكون أكبر من طول الضلع الثالث.

33) أحيانًا؛ إجابة ممكنة: إذا كان قياسا زاويتَي القاعدة أقل من $60°$، فإنّ الضلع الأطول سيكون هو القاعدة، وإذا كان قياسَا زاويتَي القاعدة أكبر من $60°$، فإن الضلع الأقصر سيكون هو القاعدة.

34) $m\angle 1, m\angle 2 = m\angle 5,$

$m\angle 4, m\angle 6, m\angle 3$

إجابة ممكنة: بما أنّ الضلع المقابل لـ $\angle 5$ هو أقصر ضلعٍ في المثلث الذي يحويها و $m\angle 2 = m\angle 5$، فإن كَلًّا من $m\angle 4$ و $m\angle 6$ أكبر من $m\angle 2$ و $m\angle 5$، وبما أنّ الضلع المقابل لـ $\angle 2$ أطول من الضلع المقابل لـ $\angle 1$، فإنّ $m\angle 1$ أقل من $m\angle 2, m\angle 5$. وبما أن $m\angle 1$ أقل من $m\angle 4$، إذَن $m\angle 3$ أكبر من $m\angle 6$.

الدرس 4-4 (تحقق من فهمك)، ص (242, 243):

2A) **المعطيات:** $7x > 56$

المطلوب: $x > 8$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $x < 8$ أو $x = 8$

الخطوة 2:

x	4	5	6	7	8
$7x$	28	35	42	49	56

عندما تكون $x < 8$، فإنّ $7x < 56$، وعندما تكون $x = 8$، فإنّ $7x = 56$

الخطوة 3: الفرض في الحالتين يؤدي إلى تناقضٍ مع المعلومة المعطاة وهي $7x > 56$؛ لذا فالفرض بأن $x \leq 8$ فرض خطأ، والنتيجة الأصلية بأنّ $x > 8$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.

2B) **المعطيات:** $-c > 0$

المطلوب: إثبات أن $c < 0$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $c > 0$ أو $c = 0$

الخطوة 2:

c	0	1	2	3	4
$-c$	0	-1	-2	-3	-4

إذا كانت $c > 0$، فإن $-c < 0$؛ وإذا كانت $c = 0$، فإنّ $-c = 0$

الخطوة 3: الفرض في الحالتين يؤدي إلى تناقضٍ مع المعلومة المعطاة $-c > 0$؛ لذا فالفرض بأن $c \geq 0$ فرض خطأ، والنتيجة الأصليّة بأنّ $c < 0$ نتيجة صحيحة، وبما أنّ $c < 0$ صحيحة، فإنّ c عدد سالب بالتأكيد.

3) افترض أنّ x هي المسافة المقطوعة في المرحلة الأولى من رحلته، و y هي المسافة المقطوعة في المرحلة الثانية، و z هي المسافة المقطوعة في المرحلة الثالثة.

المعطيات: $x + y + z > 360$

المطلوب: $x > 120$ أو $y > 120$ أو $z > 120$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ: $x \leq 120, y \leq 120, z \leq 120$

الخطوة 2: إذا كانت: $x \leq 120, y \leq 120, z \leq 120$، فإنّ $x + y + z \leq 120 + 120 + 120$ أو $x + y + z \leq 360$

الخطوة 3: وهذا يناقض العبارة المعطاة، لذلك فالفرض خطأ و $x > 120$ أو $y > 120$ أو $z > 120$؛ أي أنّه قطع أكثر من 120 km في مرحلةٍ واحدةٍ من رحلته على الأقل.

4) **المعطيات:** x^2 عدد صحيح فردي.

المطلوب: x عدد فردي.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ x عدد زوجيّ، وهذا يعني أن $x = 2k$، حيث k عدد صحيح.

الخطوة 2:

$x^2 = (2k)^2$	بالتعويض عن الفرض بالمعطيات
$= 4k^2$	بالتبسيط
$= (2 \cdot 2)k^2$	بالتحليل
$= 2(2k^2)$	خاصية التجميع للضرب

وبما أن k عدد صحيح، فإنّ $2k^2$ عدد صحيح أيضًا، وليكن m يمثّل العدد الصحيح $2k^2$، فإنه يمكن تمثيل x^2 بالعدد $2m$، حيث m عدد صحيح، وهذا يعني أنّ x^2 عدد زوجي، ولكن هذا يناقض العبارة المعطاة بأنّ x^2 عدد فردي.

الخطوة 3: بما أنّ الفرض: x عدد زوجي أدّى إلى تناقض مع المعطيات، فإنّ النتيجة الأصليّة بأن x عدد فردي صحيحة بالتأكيد.

الدرس 4-4، ص (244-247):

5) **المعطيات:** $2x+3<7$

المطلوب: $x<2$

برهان غير المباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $x \geq 2$ صحيحة.

الخطوة 2:

$x \geq 2$	افترض
$2x \geq 4$	اضرب الطرفين بـ 2
$3x+3 \geq 7$	اجمع 3 للطرفين
هذا يناقض المعطى $2x+3<7$	

الخطوة 3: الفرض يؤدي إلى تناقض مع المعلومة المعطاة بأنّ $2x+3<7$، لذا فالفرض بأن $x \geq 2$ فرض خطأ، والنتيجة الأصلية بأن $x<2$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.

6) **المعطيات:** $3x-4>8$

المطلوب: $x>4$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $x \leq 4$ صحيحة.

الخطوة 2:

$x \leq 4$	افترض
$3x \leq 12$	اضرب الطرفين بـ 3
$3x-4 \leq 8$	اطرح 4 من الطرفين
هذا يناقض المعطى $3x-4>8$	

الخطوة 3: الفرض يؤدي إلى تناقضٍ مع المعلومة المعطاة بأنّ $3x-4>8$؛ لذا فالفرض بأن $x \leq 4$ فرض خطأ، والنتيجة الأصلية بأن $x>4$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.

7) افترض أن المتوسط يساوي a هدفًا

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ متوسط عدد الأهداف التي سجَّلها فهدٌ في كل مباراة كان أكبر من أو يساوي 3؛ أي أن $a \geq 3$

الخطوة 2:

الحالة 1	الحالة 2
$a=3$	$a>3$
$\frac{13}{6} \stackrel{?}{=} 3$	$\frac{13}{6} \stackrel{?}{>} 3$
$2.2 \neq 3$	$2.2 \not> 3$

الخطوة 3: النتائج ليست صحيحة، لذلك فالفرض خطأ، إذن فمتوسط عدد الأهداف التي سجَّلها فهدٌ في كل مباراة أقل من 3 أهداف.

8) **المعطيات:** $5x-2$ عدد فردي.

المطلوب: x عدد فردي.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ x عدد ليس فرديًّا؛ أي افترض أن x عدد زوجي.

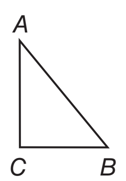
الخطوة 2: ليكن $x=2k$، حيث k عدد صحيح.

$5x-2=5(2k)-2$	بالتعويض عن الفرض بالمعطيات
$=10k-2$	خاصية الضرب
$=2(5k-1)$	خاصية التوزيع

وبما أنّ k عدد صحيح، إذن $5k-1$ عدد صحيح أيضًا. افترض أن p يمثل العدد $5k-1$، فيمكن تمثيل $5x-2$ بـ $2p$، حيث p عدد صحيح. وهذا يعني أنّ $5x-2$ عدد صحيح زوجي، ولكن هذا يناقض المعطيات بأنّ $5x-2$ عدد فردي.

الخطوة 3: بما أنّ الفرض بأنّ x عدد زوجي أدّى إلى تناقض مع المعطيات، فإن النتيجة الأصلية بأنّ x عدد فردي نتيجة صحيحة.

9) **المعطيات:** ABC مثلث قائم الزاوية؛ $\angle C$ زاوية قائمة.



المطلوب: $AB>BC, AB>AC$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ وتر المثلث القائم الزاوية ليس الضلع الأطول. أي أن: $AB \leq BC$ و $AB \leq AC$.

الخطوة 2: إذا كان $AB \le BC$، فإنّ $m\angle C \le m\angle A$. وبما أنّ $m\angle C = 90°$، فإنّ $m\angle A \ge 90°$ إذن $m\angle C + m\angle A \ge 180°$. وبالتبرير نفسه $m\angle C + m\angle B \ge 180°$.

الخطوة 3: كلا العلاقتين تناقضان حقيقة أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$؛ لذا فالوتر هو أطول أضلاع المثلث القائم الزاوية.

10) **المعطيات:** $\angle A$ و $\angle B$ متكاملتان.

المطلوب: $\angle A$ و $\angle B$ لا يمكن أن تكونا منفرجتين معًا.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $\angle A$ و $\angle B$ كلاهما زاوية منفرجة.

الخطوة 2: من تعريف الزاوية المنفرجة، $m\angle A > 90°$ و $m\angle B > 90°$ لذلك $m\angle A + m\angle B > 180°$.

الخطوة 3: وهذا يناقض المعلومة المعطاة بأن $m\angle A + m\angle B = 180°$. لذلك فالنتيجة الأصلية بأن $\angle A$ و $\angle B$ لا يمكن أن تكونا منفرجتين معًا صحيحة بالتأكيد

15) **المعطيات:** $-3x + 4 < 7$

المطلوب: $x > -1$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $x \le -1$ صحيحة.

الخطوة 2:

$x \le -1$	افترض
$-3x \ge 3$	اضرب الطرفين بـ -3
$-3x + 4 \ge 7$	اجمع 4 للطرفين

هذا يناقض المعطى $-3x + 4 < 7$

الخطوة 3: الفرض يؤدي إلى تناقضٍ مع المعلومة المعطاة بأنّ $-3x + 4 < 7$؛ لذا فالفرض بأن $x \le -1$ فرض خطأ، والنتيجة الأصلية بأن $x > -1$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.

16) **المعطيات:** $-2x - 6 > 12$

المطلوب: $x < -9$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $x \ge -9$ صحيحة.

الخطوة 2:

$x \ge -9$	افترض
$-2x \le 18$	اضرب الطرفين بـ -2
$-2x - 6 \le 12$	اطرح 6 من الطرفين

هذا يناقض المعطى $-2x - 6 > 12$

الخطوة 3: الفرض يؤدي إلى تناقضٍ مع المعلومة المعطاة بأنّ $-2x - 6 > 12$؛ لذا فالفرض بأن $x \ge -9$ فرض خطأ. والنتيجة الأصلية بأن $x < -9$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.

19) **برهان غير مباشر:**

الخطوة 1: افترض أنّ x و y عددان ليسا فرديين معًا؛ أي افترض أنّ x أو y عدد زوجيّ.

الخطوة 2: تحتاج فقط إلى بيان أنّ الفرض: x عدد زوجي يؤدي إلى تناقض؛ لأنّ البرهان عند افتراض أنّ y عدد زوجي يتبع التبرير نفسه؛ لذا افترض أنّ x عدد زوجي وأنّ y عدد فردي، وهذا يعني أنّ $x = 2k$ و $y = 2m + 1$، حيث k و m عددان صحيحان.

$xy = (2k)(2m + 1)$	بالتعويض عن الفرض بالمعطيات
$= 4km + 2k$	خاصيّة التوزيع
$= 2(2km + k)$	خاصيّة التوزيع

بما أنّ k و m عددان صحيحان، فإنّ $2km + k$ عدد صحيح أيضًا.
ليكن p يمثل العدد $2km + k$؛ لذا فإنه يمكن أن يمثل العدد xy بـ $2p$، حيث p عدد صحيح، وهذا يعني أنّ xy عدد زوجي، ولكنّ هذا يناقض المعطيات بأنّ xy عدد فردي.

الخطوة 3: بما أنّ الفرض: x عدد زوجي و y عدد فردي يؤدي إلى تناقض مع المعطيات، إذن النتيجة الأصلية بأنّ كلًّا من x و y عدد صحيح فردي نتيجة صحيحة بالتأكيد.

20) **الخطوة 1:** افترض أن n عدد فردي، وهذا يعني أن $n = 2k+1$، حيث k عدد صحيح.

الخطوة 2: $n^2 = (2k+1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

بما أن k عدد صحيح، إذن $2k^2 + 2k$ عدد صحيح أيضًا.
افترض أن $m = 2k^2 + 2k$
إذن $n^2 = 2m + 1$ إذن n^2 عدد فردي وهذا يتناقض مع العبارة المعطاة: n^2 عدد زوجي.

الخطوة 3: بما أن افتراض أن n عدد فردي أدّى إلى تناقض مع العبارة المعطاة، فإنّ النتيجة الأصلية وهي أن n عدد زوجي، يجب أن تكون صحيحةً.

21) برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $\angle X \cong \angle Y$.

الخطوة 2: $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$ بحسب عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين.

الخطوة 3: وهذا يناقض المعلومة المعطاة بأنّ $XZ > YZ$؛ لذلك فالفرض بأنّ $\angle X \cong \angle Y$ فرض خطأ، لذا فالنتيجة الأصلية بأنّ $\angle X \not\cong \angle Y$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.

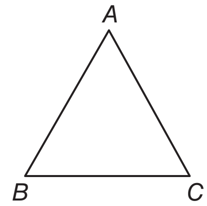
22) برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $\triangle ABC$ ليس متطابق الزوايا.

الخطوة 2: إذا كانت $m\angle B > m\angle C$. فإنّ $\overline{AC} > \overline{AB}$ بحسب العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه.

الخطوة 3: يناقض هذا المعلومة المعطاة بأنّ $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع؛ لذا فإن الفرض بأنّ $\triangle ABC$ ليس متطابق الزوايا فرض خطأ، والنتيجة الأصليّة بأنّ $\triangle ABC$ متطابق الزوايا نتيجة صحيحة بالتأكيد.

23) المعطيات: $\triangle ABC$



المطلوب: $\triangle ABC$ لا يمكن أن يكون له أكثر من زاوية قائمة واحدة.

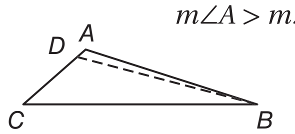
برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ للمثلث ABC أكثر من زاوية قائمة.

الخطوة 2: إذا كانت $\angle B$ و $\angle C$ زاويتين قائمتين، فإنّ $m\angle B + m\angle C = 180°$. لكن $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$؛ لأن مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$. وبالتعويض: $m\angle A + 180° = 180°$، إذن $m\angle A = 0°$.

الخطوة 3: يناقض هذا المعلومة المعطاة بأنّ $\triangle ABC$ مثلث. لذلك فالفرض بأنّ للمثلث ABC أكثر من زاوية قائمة خطأ والنتيجة الأصليّة بأنّه لا يمكن أن يكون للمثلث ABC أكثر من زاوية قائمة نتيجة صحيحة.

24) المعطيات: ABC مثلث فيه: $m\angle A > m\angle ABC$



المطلوب: $BC > AC$

برهان:

افترض أنّ $BC \ngtr AC$، فحسب خاصية المقارنة يكون $BC = AC$ أو $BC < AC$.

الحالة 1: إذا كان $BC = AC$، فإنّ $\angle ABC \cong \angle A$ بحسب نظرية المثلث المتطابق الضلعين (إذا كان ضلعان لمثلث ما متطابقين، فإنّ الزاويتين المقابلتين لهما تكونان متطابقتين)، لكن $\angle ABC \cong \angle A$ تناقض العبارة المعطاة بأنّ $m\angle A > m\angle ABC$، إذن $BC \neq AC$.

الحالة 2: إذا كان $BC < AC$، فإنّه توجد نقطة D بين A و C، بحيث يكون $\overline{DC} \cong \overline{BC}$، ارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{BD}$، بما أنّ $DC = BC$، فإنّ $\angle BDC \cong \angle DBC$ بحسب نظرية المثلث المتطابق الضلعين، ولأن $\angle BDC$ زاوية خارجيّة لـِ $\triangle BAD$ وبحسب نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة (قياس الزاوية الخارجيّة لمثلث يكون أكبر من قياس كلٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها) يكون $m\angle BDC > m\angle A$، وبحسب مسلّمة جمع الزوايا يكون $m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$؛ إذن وبحسب تعريف المتباينة يكون $m\angle ABC > m\angle DBC$. وبالتعويض وخاصية التعدّي للمتباينة يكون $m\angle ABC > m\angle A$، ولكن هذا يناقض العبارة المعطاة بأنّ $m\angle A > m\angle ABC$، وفي الحالتين وصلنا إلى تناقضٍ، فالفرض خطأ. لذلك $BC > AC$.

25) المعطيات: $\frac{1}{b} < 0$

المطلوب: b عدد سالب.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $b > 0$، وأن $b \neq 0$؛ لأن ذلك سيجعل $\frac{1}{b}$ غير معرَّف.

الخطوة 2: بما أنّ $b > 0$، فإن $\frac{1}{b} > 0$؛ لأن ناتج قسمة عددٍ موجبٍ على عددٍ موجبٍ يكون عددًا موجبًا.

الخطوة 3: لكن $\frac{1}{b} > 0$ يناقض المعطيات، لذلك فالفرض خطأ إذن b عدد سالب بالتأكيد.

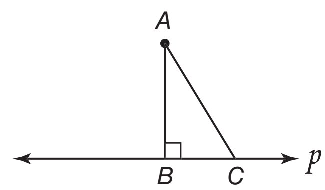
26) إجابة ممكنة: نعلم أنّ الفريق الآخر سجّل 3 نقاط، ويعتقد أخو عدنان أنّهم سجّلوا ثلاث نقاطٍ من رميةٍ واحدةٍ، ونعلم أيضًا أنه يمكن للاعب أن يسجّل 3 نقاطٍ بتسجيل نقطتين والحصول على رميةٍ حرةٍ نتيجة خطأ الفريق المنافس.

الخطوة 1: افترض أن لاعبًا من الفريق المنافس سجّل نقطتين من رميةٍ وحصل على رميةٍ حرّةٍ.

الخطوة 2: بما أن عدد نقاط الفريق المنافس كان 26 نقطة قبل أن يخرج عدنان من الملعب، فإن عدد نقاطهم بعد تسجيل نقطتين وحصولهم على رمية حرّة سيكون 3 + 26 أو 29

الخطوة 3: بما أن عدد النقاط صحيح عندما افترضنا أن الفريق المنافس سجل نقطتين من رمية وحصل على رمية حرّة، فإنّ افتراض أخو عدنان قد يكون غير صحيح، فالفريق المنافس يمكن أن يكون قد حصل على ثلاث نقاطٍ من رميةٍ واحدةٍ من خارج منطقة الهدف أو على نقطتين ورمية حرّة.

(28



المعطيات: $\overline{AB} \perp p$

المطلوب: $\overline{AB}$ أقصر قطعة مستقيمة من A إلى p.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $\overline{AB}$ ليست أقصر قطعة مستقيمة من A إلى p.

الخطوة 2: بما أنّ $\overline{AB}$ ليست أقصر قطعة مستقيمة، من A إلى p، فإنه توجد نقطة C على p، بحيث تكون $\overline{AC}$ أقصر قطعة مستقيمة، وبما أنّ $\triangle ABC$ قائم الزاوية ووتره هو $\overline{AC}$، فإنّ $\overline{AC}$ أطول ضلع لـ$\triangle ABC$؛ لأنه يقابل أكبر زاوية في $\triangle ABC$ بحسب متباينة زاوية – ضلع في المثلث.

الخطوة 3: يناقض هذا الفرض أنّ $\overline{AC}$ أقصر ضلع، لذلك فالفرض خطأ والصحيح هو أنّ $\overline{AB}$ أقصر بالتأكيد.

(30b إجابة ممكنة:

n	$n^3 + 3$
2	11
3	30
10	1003
11	1334
24	13827
25	15628
100	1000003
101	1030304
526	145531579
527	146363186

(30d المعطيات: $n^3 + 3$ عدد زوجي.

المطلوب: n عدد فردي

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن n عدد زوجي وليكن $n = 2k$، حيث k عدد صحيح.

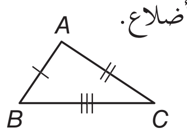
الخطوة 2:

$n^3 + 3 = (2k)^3 + 3$	بالتعويض عن الفرض في المعطيات
$= 8k^3 + 3$	بالتبسيط
$= (8k^3 + 2) + 1$	بكتابة 3 في صورة 1 + 2 وتجميع أول حدّين
$= 2(4k^3 + 1) + 1$	خاصيّة التوزيع

وبما أنّ k عدد صحيح، فإنّ $4k^3 + 1$ عدد صحيح أيضًا؛ لذا فإن $n^3 + 3$ عدد فرديّ.

الخطوة 3: وهذا يناقض الفرض بأنّ $n^3 + 3$ عدد زوجي؛ لذا فإن الفرض خطأ والنتيجة بأنّ n عدد فردي نتيجة صحيحة.

(31 إجابة ممكنة: في الشكل المجاور $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع.



المعطيات: $\triangle ABC$ فيه $AB \neq BC$؛ $BC \neq AC; AB \neq AC$

المطلوب: $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $\triangle ABC$ ليس مختلف الأضلاع.

الحالة 1: $\triangle ABC$ متطابق الضلعين.

الخطوة 2: إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، فإنّ $AB = BC$، أو $BC = AC$، أو $AB = AC$

الخطوة 3: يناقض هذا المعطيات، إذن $\triangle ABC$ ليس متطابق الضلعين.

الحالة 2: $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع.

ولكي يكون المثلث متطابقَ الأضلاع، يجب أن يكون متطابق الضلعين أيضًا، وفي الحالة الأولى أُثْبِت أنّ $\triangle ABC$ ليس متطابق الضلعين، إذن فالمثلث ABC ليس متطابق الأضلاع؛ لذا $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع.

(32 المعطيات: x عدد نسبيٌّ لا يساوي الصفر و y عدد غير نسبيٍّ.

المطلوب: xy عدد غير نسبي.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: بما أنّ x عدد نسبي لا يساوي الصفر، فإنّ

$x = \frac{a}{b}$، حيث a و b عددان صحيحان، حيث $a \neq 0, b \neq 0$.

وبالتعويض $xy = \frac{a}{b} \cdot y = \frac{ay}{b}$

افترض أنّ xy عدد نسبي، فيكون $xy = \frac{c}{d}$، حيث c و d عددان صحيحان، $d \neq 0$.

الخطوة 2:

$xy = \frac{ay}{b}$	x عدد نسبي.
$\frac{c}{d} = \frac{ay}{b}$	بتعويض الفرض
$cb = ayd$	بضرب كلا الطرفين في db.
$\frac{cb}{ad} = y$	بقسمة كلا الطرفين على ad.
	حيث $a\,d \neq 0$؛
	لأن $d \neq 0$ وَ $a \neq 0$

بما أنّ a, b, c, d أعدادٌ صحيحة و $d \neq 0$، و $a \neq 0$، فإن $\frac{cb}{ad}$ هو ناتج قسمة عددين صحيحين؛ أي أن y عدد نسبي.

الخطوة 3: بما أن الفرض: xy عدد نسبي، أدّى إلى تناقض مع المعطيات، فإن النتيجة الأصليّة بأنّ xy عدد غير نسبي نتيجة صحيحة.

34) إذا لم يكن x عددًا فرديًّا، فإنّ $5x - 2$ ليس عددًا فرديًّا، إجابة ممكنة: إذا لم يكن x عددًا فرديًّا، فإنّه زوجيّ، وإذا كان x عددًا زوجيًّا فإن $5x$ عدد زوجي؛ لأنّ حاصل ضرب أيّ عدد في عدد زوجي يكون عددًا زوجيًّا، و $5x - 2$ عدد زوجي أيضًا؛ لأن ناتج طرح 2 من أي عدد زوجي يكون عددًا زوجيًّا أيضًا؛ لذا فالعبارة "إذا لم يكن x عددًا فرديًّا، فإن $5x - 2$ ليس عددًا فرديًّا" عبارة صحيحة. البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي للعبارة والبرهان غير المباشر للعبارة نفسها يبدآن بالفرضيات نفسها ويتوصَّلان إلى النتائج نفسها.

الدرس 5-4، ص (251-254):

5)

العبارات	المبررات
1) $\overline{XW} \cong \overline{YW}$	1) معطى
2) $XW = YW$	2) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة
3) $YZ + ZW > YW$	3) نظرية متباينة المثلث
4) $YZ + ZW > XW$	4) بالتعويض

14)

العبارات	المبررات
1) $\angle BCD \cong \angle CDB$	1) معطى
2) $\overline{BC} \cong \overline{BD}$	2) عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين
3) $BC = BD$	3) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة
4) $AB + AD > BD$	4) نظرية متباينة المثلث
5) $AB + AD > BC$	5) بالتعويض

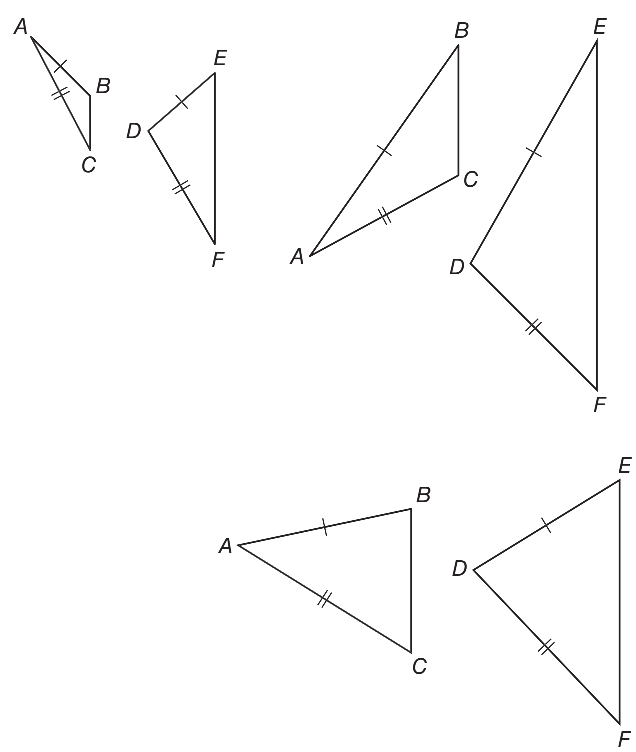
15)

العبارات	المبررات
1) $\overline{JL} \cong \overline{LM}$	1) معطى
2) $JL = LM$	2) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة
3) $KJ + KL > JL$	3) نظرية متباينة المثلث
4) $KJ + KL > LM$	4) بالتعويض

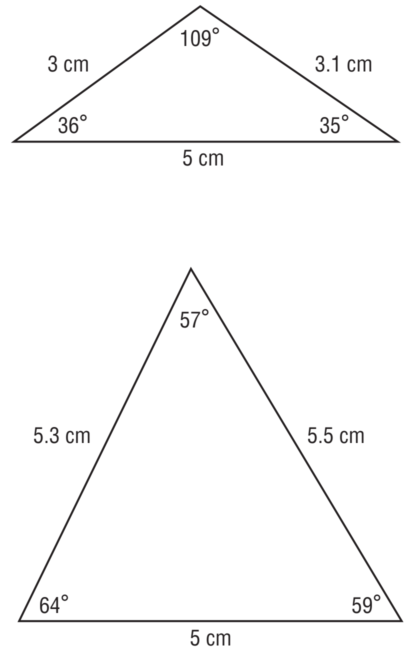
19) ارسم $\overline{CD}$ بحيث تقع C بين B و D و $\overline{CD} \cong \overline{AC}$. (استعمل المسطرة)

العبارات	المبررات
1) $CD = AC$	1) تعريف تطابق القطع المستقيمة
2) $\angle CAD \cong \angle ADC$	2) نظرية المثلث المتطابق الضلعين
3) $m\angle CAD = m\angle ADC$	3) تعريف الزاويتين المتطابقتين
4) $m\angle BAC + m\angle CAD = m\angle BAD$	4) مسلمة جمع قياسات الزوايا
5) $m\angle BAC + m\angle ADC = m\angle BAD$	5) بالتعويض
6) $m\angle ADC < m\angle BAD$	6) تعريف المتباينة
7) $AB < BD$	7) علاقة الزوايا والأضلاع في المثلث
8) $BD = BC + CD$	8) مسلمة جمع القطع المستقيمة
9) $AB < BC + CD$	9) بالتعويض من الخطوة 8 في الخطوة 7
10) $AB < BC + AC$	10) بالتعويض من الخطوة 1 في الخطوة 9

28a)

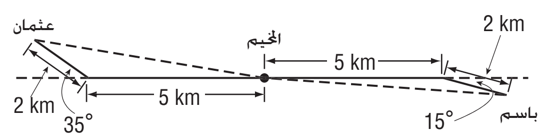


31)

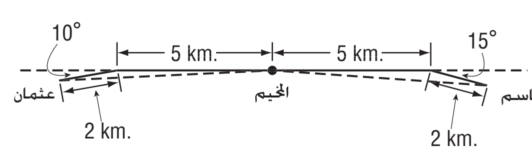


الدرس 6-4 ، ص (262-260) :

11a) عثمان؛ إجابة ممكنة: انعطف باسم °15 جنوبًا، لذلك فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بُعده عن المخيم يُساوي °15 − °180 أو °165، أمّا عثمان فقد انعطف °35 شمالًا، لذا فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بُعده عن المخيم يساوي °35 − °180 أو °145، وبحسب متباينة SAS : بما أن °165 < °145، فإنّ عثمان يكون أقرب إلى المخيم.



11b) عثمان؛ إجابة ممكنة: انعطف باسم °15 جنوبًا، لذلك فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بُعده عن المخيم يُساوي °15 − °180 أو °165، أمّا عثمان فقد انعطف °10 جنوبًا، لذا فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بُعده عن المخيم يساوي °10 − °180 أو °170، وبحسب متباينة SAS : بما أن °165 < °170، فإنّ عثمان يكون أبعد عن المخيم.



15) برهان:

العبارات (المبررات)

1) $\overline{RL} \cong \overline{RJ}$، $\overline{LK} \cong \overline{JK}$، K نقطة منتصف $\overline{QS}$، $m\angle SKL > m\angle QKJ$ (معطيات)

2) $SK = QK$ (تعريف نقطة المنتصف)

3) $SL > QJ$ (متباينة SAS)

4) $RL = RJ$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة)

5) $SL + RL > RL + QJ$ (خاصيّة الجمع)

6) $SL + RL > RJ + QJ$ (بالتعويض)

7) $RS = SL + RL$، $QR = RJ + QJ$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

8) $RS > QR$ (بالتعويض)

16) برهان:

العبارات (المبررات)

1) $\overline{AF} \cong \overline{DJ}, \overline{FC} \cong \overline{JB}, AB > DC$ (معطيات)

2) $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (خاصية الانعكاس)

3) $BC = BC$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة)

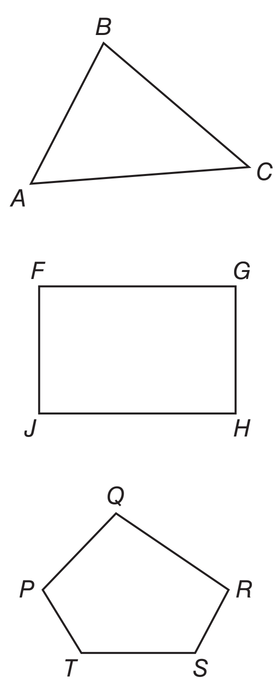
4) $AB + BC = AC$، $DC + CB = DB$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

5) $AB + BC > DC + CB$ (خاصية الجمع)

6) $AC > DB$ (بالتعويض)

7) $m\angle AFC > m\angle DJB$ (عكس متباينة SAS)

19a)



22) في المثلثين JKL, JNL، معطى أنّ: $m\angle LJN > m\angle KJL$ ، $\overline{KJ} \cong \overline{JN}$ ، $\overline{JL} \cong \overline{JL}$ ، ولذلك، وبحسب متباينة SAS يكون $LN > LK$، وفي $\triangle LKN$، $LN > LK$ ، وهذا يعني أن $m\angle LKN > m\angle LNK$.

23) لا تكون حادة أبدًا؛ من عكس متباينة SAS، $m\angle ADB < m\angle BDC$،
وبما أن $\angle ADB$ ، $\angle BDC$ متجاورتان على مستقيم فإن:
$m\angle ADB + m\angle BDC = 180°$؛ ولأن $m\angle BDC > m\angle ADB$، فإنه
يجب أن يكون $m\angle BDC$ أكبر من $90°$، و $m\angle ADB$ أصغر من $90°$.
ولذلك، وبحسب تعريف الزاوية المنفرجة والزاوية الحادّة تكون $\angle BDC$
زاوية منفرجة دائمًا و $\angle ADB$ زاوية حادّة دائمًا.

30) افترض أن تكلفة رحلة ماجد هي x، وتكلفة رحلة صديقه هي y.

المعطيات: $x + y > 500$

المطلوب: $x > 250$ أو $y > 250$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ $x \leq 250$ و $y \leq 250$

الخطوة 2: إذا كانت $x \leq 250$ و $y \leq 250$،
فإن $x + y \leq 250 + 250$ أو $x + y \leq 500$ ، وهذا يناقض الفرض بأن
$x + y > 500$

الخطوة 3:

بما أن الفرض: $x \leq 250$ و $y \leq 250$
أدّى إلى تناقضٍ مع حقيقةٍ معلومةٍ، إذن هو افتراض خطأ، لذا فالنتيجة:
$x > 250$ أو $y > 250$ نتيجة صحيحة، إذن تكلفة رحلة أحدهما كانت
أكثر من 250 ريالًا.

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم