المتجهات

vectors

مقدمة في المتجهات

introduction to vectors

الكميات القياسية والكميات المتجهة:

- كمية قياسية (عددية):

هي التي تتحدد بالمقدار والوحدة فقط، مثل: الطول، الزمن

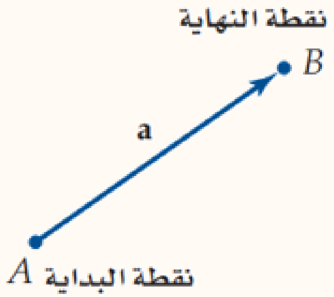
- كمية متجهة

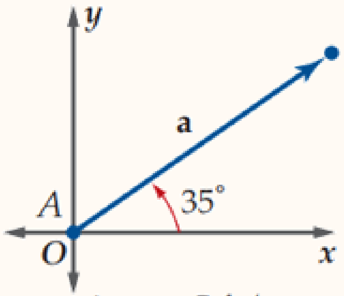
الكميات المتجهة هي التي تتحدد بالمقدار والاتجاه و نقطة التأثير، مثل: الوزن(الثقل) - القوة - السرعة - العجلة

يمكن تمثيل المتجه هندسيا بقطعة مستقيمة لها اتجاه (**قطعة مستقيمة متجهة**)، أو سهم يظهر كلا من المقدار والاتجاه. ويمثل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها **نقطة البداية** A، **ونقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز AB

أما **طول المتجه** فهو عبارة عن طول القطعة المستقيمة التي تمثله، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو $1\ cm=5\ ft$

يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبر عن اتجاه المتجه بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x) فمثلا: اتجاه المتجه a هو 35°.

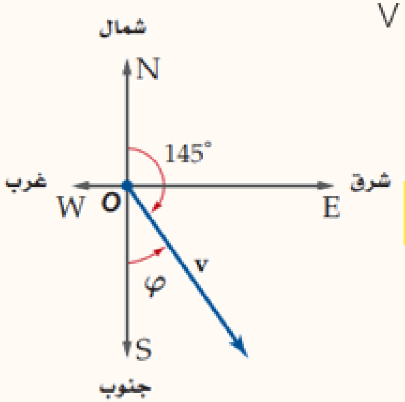




1 cm = 5 ft/sec

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين 0° و 90° شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال - جنوب). فمثلا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه v في الشكل المجاور هي 35° جنوب شرق، وتكتب S35°E.

كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءا من الشمال. ويقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلا يكتب الاتجاه الذي يحدد زاوية قياسها 25° من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة 025°.

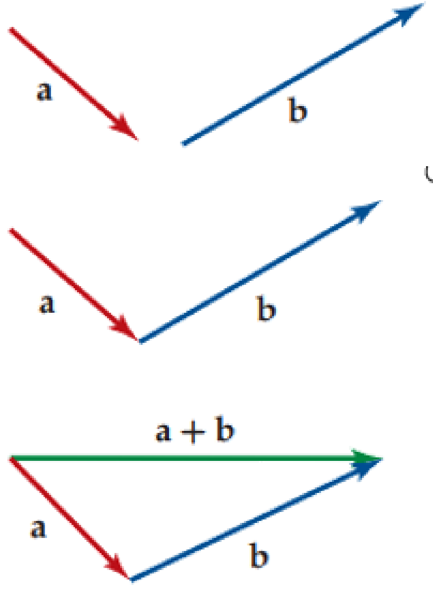


قاعدة المثلث

لإيجاد محصلة المتجهين a,b اتبع الخطوات الأتية

الخطوة١: أجر انسحابًا للمتجهة b، بحيث تلتقي نطقة بدايته مع نقطة نهاية المتجهةa

الخطوة ٢: محصلة المتجهين a,b هي المتجهة المرسوم من نقطة بداية aالى نقطة نهاية b



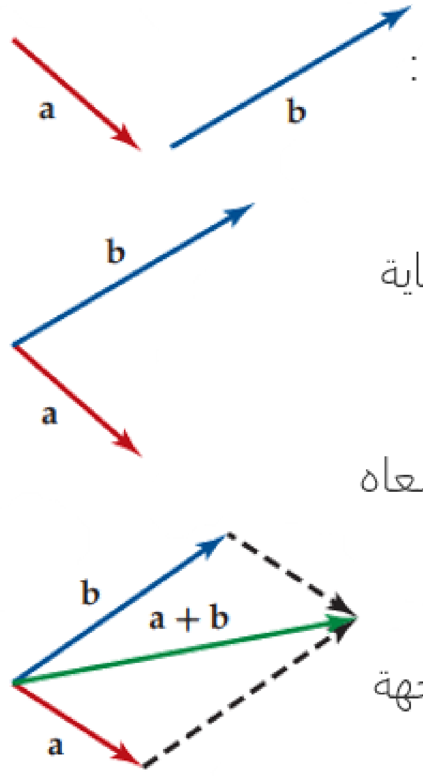
قاعدة متوازي الأضلاع

لإيجاد محصلة المتجهين a,b اتبع الخطوات الأتية :

الخطوة١: أجر انسحابًا للمتجهة b، بحيث تلتقي نطقة بدايته مع نقطة نهاية المتجهةa

الخطوة ٢: أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه a,b

الخطوة ٣: محصلة المتجهين هي تلك المتجهة الذي يُمثله قطر متوازي الأضلاع



عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**. ويرمز له بالرمز **0**، وطوله صفر ، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد.

لإيجاد $p-q$ اجمع المعكوس q الى p؛ أي ان $p+(-q)=p-q$

وكذلك يمكن **ضرب المتجه في عددٍ حقيقيّ** إذا ضُرب المتجه v في عدد حقيقي k فإن طول المتجه $k\,v$ هو $|k||v|$ ويتحدّد بإشارة k

إذا كانت $k>0$ فإن اتجاه $k\,v$ هو اتجاه v نفسه

إذا كانت $k<0$ فإن اتجاه $k\,v$ هو عكس اتجاه v.

المتجهات في المستوى الإحداثي

vectors in the coordinate plane

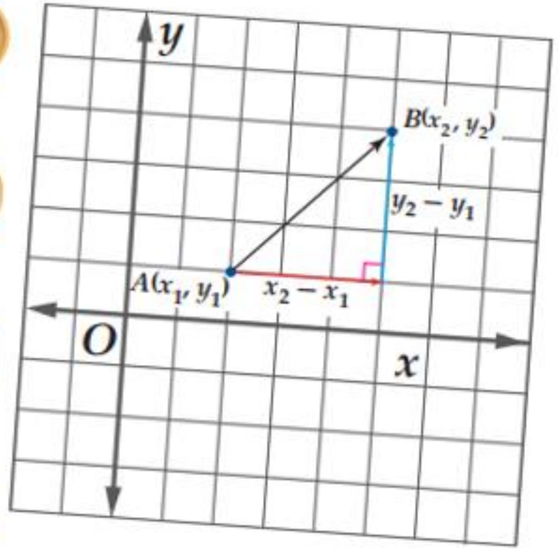
مفهوم أساسي

الصورة الاحداثية لمتجه:

الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$

الذي نقطة بداتيه $A(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي:

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



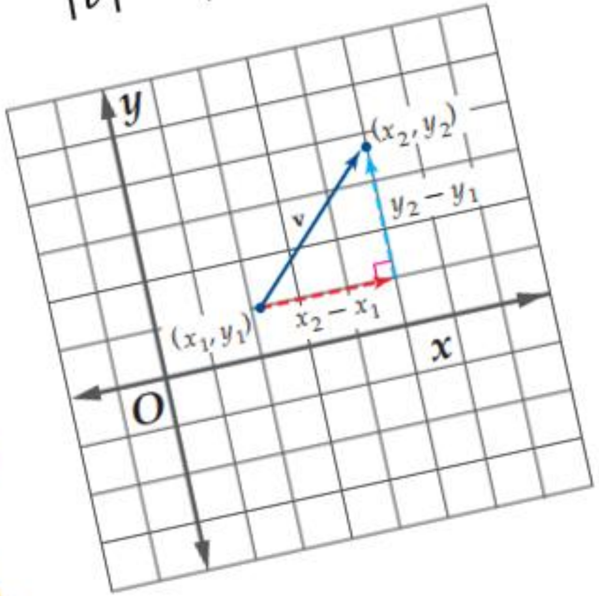
مفهوم أساسي

طول المتجه في المستوى الإحداثي:

إذا كان v متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ونقطة نهايته (x_2, y_2)

فإن طول v يُعطى بالصيغة :

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



العمليات على المتجهات

جمع متجهين:

$a+b=\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين:

$a-b=\langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ

$Ka= \langle ka_1, ka_2 \rangle$

تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي،

والجمع والطرح على المتجهات،

العمليات نفسها على المصفوفات

Dot Product

مفهوم أساسي

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

يُعرف الضرب الداخلي للمتجهين $a = \langle a_1, a_2 \rangle, b = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي:

$$a \times b = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

مفهوم أساسي

المتجهان المتعامدان

يكون المتجهان غير الصفريين a,b متعامدين ، فقط إذا كان axb=0

نظريّة

خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت u,v,w متجهات، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن الخصائص الأتية صحيحة.

الخاصية الإبدالية:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

خاصية التوزيع:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$

خاصية الضرب في عدد حقيقي:

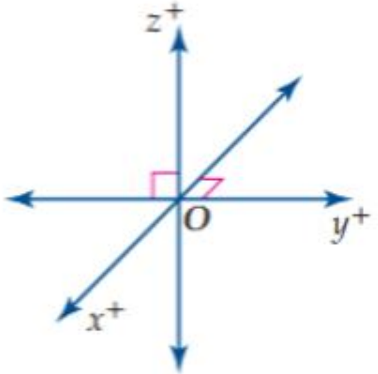
$$\mathbf{k}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{ku} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{kv}$$

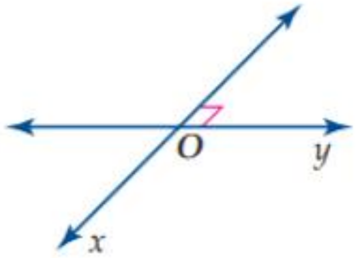
خاصية الضرب الداخلي وطول المتجه:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = |\mathbf{u}^2|$$

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

Vectors in Three-dimensional space





هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتشكل بواسطة خطي أعداد متعامدين، هما المحور x والمحورy ، اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاط في المستوى، وتحتاج إلى **نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد**، لتعيين نقطة في الفضاء، فنبدأ بالمستوى xy ونضعه بصورة تظهر عمقا للشكل ثم نضيف محورا ثالثا يسمى **المحورz** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلا من المحورين y,x ، فيكون لدينا ثلاثة مستويات هي xy,zy,xz وتقسم هذه المستويات الفضاء إلى ثماني مناطق.

مفهوم أساسي

صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

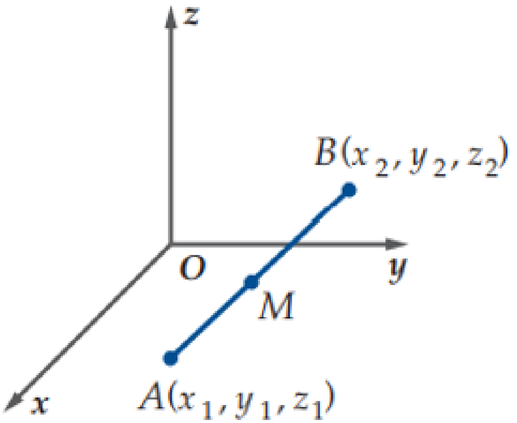
تعطى المسافة بين النقطتين

$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$ بالصيغة:

$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ$\overrightarrow{AB}$

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$



مفهوم أساسي

العمليات على المتجهات في الفضاء

جمع متجهين :

$$a + b = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

طرح متجهين:

$$a - b = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

ضرب متجهِ في عددٍ حقيقيٍّ:

$$k\,a = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$$

Dot and cross products of vectors in space

مفهوم أساسي

الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

يُعرف الضرب الداخلي للمتجهين

في الفضاء كالآتي: $A = (x_{1,}y_{1,}z_1), B = (x_2, y_2, z_2)$:

$$a \times b = \langle a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3 \rangle$$

ويكون المتجهان غير الصفريين a,b متعامدين ، إذا وفقط

كان $a \times b = 0$

مفهوم أساسي

الضرب القياسي الثلاثي

$$t = t_1 i + t_2 j + t_3 k, u = u_1 i + u_2 j + u_3 k, v_= v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$