الوحدة 1

المتتاليات والمتسلسلات

مع تطوّر الحواسيب والأجهزة الإلكترونية، ومع فورة التواصل الرقمي عبر الإنترنت عمومًا ومواقع التواصل الاجتماعي خصوصًا، تطوّرت وحدات الذاكرة في الأجهزة الإلكترونية من هواتف وغيرها لاستيعاب الوسائط المتعدّدة التي تستلزم حفظ المعلومات وتخزينها وإرسالها أو تلقّيها، لا سيّما الأجهزة التي تستعمل الرقاقات الإلكترونية. وقد طال هذا التطوّر مختلف أنواع الذاكرات الرقمية الدائمة منها والمؤقتة. إلا أنّ جميع أنواع الذاكرات، على اختلاف وحدات قياسها، تتألف من 2^n وحدة تخزين، حيث n عدد طبيعي.
هذه الأعداد $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$ تشكّل تتاليًا عدديًا يسمح بالتعرّف إلى القيم الدقيقة لسعة وحدات التخزين الرقمية. على سبيل المثال، 1 ميغابايت تساوي 2^{10} كيلوبايت، أي 1 024 كيلوبايت، وليس 1 000 كيلوبايت كما يعتقد كثيرون.

1.1 المتتاليات Sequences

ما ستتعلّمه
- تعريف المتتاليات
- الصيغة الارتدادية للمتتالية

ولماذا ...
تنشأ عن معالجة الكثير من المسائل العلميّة أنماط ذات أعدادٍ تُقدّم على نحو التتالي والتتابع. ولذلك، فإنّ دراسة هذه الأنماط يؤدي إلى نتائج رياضيّة ذات أهميّة علميّة كبيرة.

معايير الدرس
11A.1.1
11A.1.4
11A.1.9

المصطلحات
متتالية	sequence
الحد	term
الحد الأول	first term
رتبة الحد	order of term
متتالية منتهية	finite sequence
متتالية غير منتهية	infinite sequence
الحد العام	general term
صيغة ارتدادية	recursive formula

تعريف المتتاليات
إحدى أكثر الطرق شيوعًا لدراسة الأنماط في الرياضيات هي النظر إلى التتالي المرتّب للأعداد، لنتأمل النمط الهندسي في الأشكال التالية:

1 2 3 4 5 6

يتضمّن كل شكل مثلَي عدد النقاط التي في الشكل الذي يسبقه، ففي الشكل الأول نقطة واحدة وفي الشكل الثاني نقطتان وفي الشكل الثالث 4 نقاط وفي الرابع 8 نقاط. وهكذا ...
إن هذه الأعداد مرتّبة بعضها وراء بعض إلى حد معيّن أو إلى اللانهاية على النحو ... ,1, 2, 4, 8، تسمى **متتالية**. كل عدد في المتتالية يسمّى **حدًا**. العدد الأول في المتتالية يسمى **الحد الأول**، وترتيب حدّ ما في المتتالية يسمّى **رتبة الحد**.

هذه بعض الأمثلة على المتتاليات:

1. $5, 10, 15, 20, 25$
2. $2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n, ...$
3. $\left\{\frac{1}{n}\,;\, n = 1, 2, 3, ...\right\}$
4. $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$, (والتي تُختصر أحيانًا بالرمز $\{a_n\}$)

أولى هذه المتتاليات هي **متتالية منتهية** لأن لها عددًا محدودًا من الحدود، والثلاث الأخرى هي **متتاليات غير منتهية**، لأنه ليس لأي منها عدد محدود من الحدود. لاحظ أن في المتتاليتين (2) و (3) بإمكاننا إعطاء قاعدة تُعرّف العدد الذي ترتيبه n في المتتالية بدلالة n. وتُسمى هذه القاعدة **الحد العام** للمتتالية أما في المتتالية (4) فلا توجد قاعدة.
يمكننا استخدام صيغة الترميز (a_n) لتحديد الحد العام لمتتالية غير منتهية. بهذا المعنى، يمكن اعتبار المتتالية غير المنتهية دالّة تنتج عددًا وحيدًا (a_n) لكل عدد طبيعي n.

تعريف المتتالية
المتتالية $\{a_n\}$ هي دالة مجالها الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها، ومداها مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

قيم المجال لدالة المتتالية المنتهية هي أرقام الحدود $1, 2, 3, 4, ..., n$ وقيم المدى يرمز لها كما يلي: $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$

الحد الأول
قد يكون الحد الأول لبعض المتتاليات a_0 بدلًا من a_1 حينما يكون ذلك أكثر تناسبًا مع معطيات هذه المتتالية.

الهدف
سيتمكن الطلاب من التعبير عن المتتاليات باستعمال الحد العام أو الصيغة الارتدادية. كما سيتمكنون من حل مسائل من واقع الحياة باستعمال المتتاليات.

إرشاد
الأعداد الطبيعية هي ... ,1, 2, 3 ويرمز إليها بالمجموعة N. وتُكتب: $N = \{1, 2, 3, ...\}$

مثال 1 إيجاد حدود متتالية باستعمال الحد العام

لتكن المتتالية $\{a_n\}$ حيث $a_n = n^2 - 1$ لكل $n \geq 1$

A. هل هذه المتتالية منتهية؟ وضّح إجابتك.

B. أوجد الحدود الستة الأولى من المتتالية $\{a_n\}$ والحد رقم 100

C. مثّل المتتالية $\{a_n\}$ بيانيًّا.

الحل

A. المتتالية $\{a_n\}$ ليست منتهية، لأنّ رُتب حدودها هي مجموعة غير منتهية من الأعداد الطبيعية.

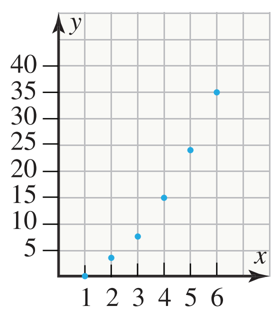
B. الحدّ العام للمتتالية هو $a_n = n^2 - 1$
عوّض $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ في الحدّ العام لتحصل على الحدود الستة الأولى:
$a_1 = 1^2 - 1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 8$, $a_4 = 15$, $a_5 = 24$, $a_6 = 35$

عوّض 100 لتحصل على الحد رقم 100

$a_{100} = 9\,999$

C. لتمثيل المتتالية بيانيًا، عيّن على المستوى الإحداثي النقاط الست التالية:

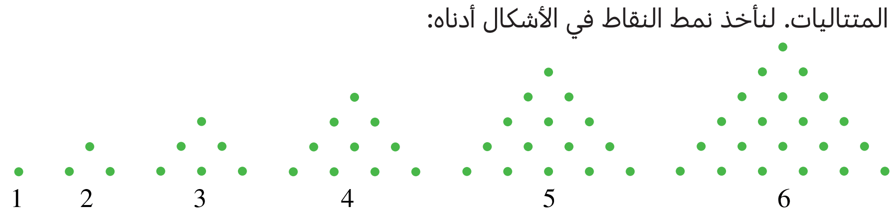
$(1, 0), (2, 3), (3, 8), (4, 15), (5, 24), (6, 35)$



حاول أن تحل التمرين 1

الصيغة الارتدادية للمتتالية

تُعدّ صيغة الحد العام الأسهل في التعامل معها، ولكن هناك طرق أخرى للتعبير عن المتتاليات. لنأخذ نمط النقاط في الأشكال أدناه:



الشكل (1) يمثّل نقطة واحدة، الشكل (2) يمثّل 3 نقاط، الشكل (3) يمثّل 6 نقاط، .....
نلاحظ أن أعداد النقاط في الأشكال على الترتيب هي متتالية فيها:

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 10, a_5 = 15, a_6 = 21$$

دليل الدرس

1. تعريف المتتاليات المنتهية وغير المنتهية. إيجاد قيم حدود المتتاليات باستعمال الحد العام
2. الصيغة الارتدادية للمتتاليات. إيجاد قيم حدود المتتاليات باستعمال الصيغة الارتدادية
3. التعرف على متتالية فيبوناتشي. حل مسائل من واقع الحياة تتضمن المتتاليات

تحفيز

اطلب من الطلاب إيجاد الحد الذي رتبته 100 في المتتالية ... ,16 ,13 ,10 ,7 **(304)**

ملاحظة تعليمية

قد يواجه الطلاب بعض الصعوبات في تحويل قيم المتتالية إلى أزواج مرتبة من النقاط من أجل تمثيل المتتالية بيانيًا. لذا من المفيد أن تطلب منهم أن يتدربوا أولًا على متتالية يكون الإحداثي x للنقطة هو رتبة الحد فيها، والإحداثي y هو قيمة الحد.

سؤال للتفكر

س: لمعرفة قيمة أحد حدود المتتالية $a_n = n^2 - 1$، هل نحتاج إلى معرفة قيم الحدود التي قبله؟
نموذج إجابة:
كلا، لأن بإمكاننا إيجاد قيمة أي حد في المتتالية بتعويض رقم رتبته في صيغة الحد العام.

كذلك نلاحظ أن:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 3 = 1 + 2 = a_1 + 2$$
$$a_3 = 6 = 3 + 3 = a_2 + 3$$
$$a_4 = 10 = 6 + 4 = a_3 + 4$$

يمكن استنتاج العلاقة بين هذه الأعداد كما يلي:

$$a_1 = 1 \ , \ a_n = a_{n-1} + n \ \ , n \geq 2$$

بعد تعيين قيمة الحد الأول للمتتالية، تمكّنا من تحديد الحدود التالية ارتداديًا واستنتاج صيغة تربطها بالحدود السابقة. وتسمى هذه الصيغة **بالصيغة الارتدادية** للمتتالية.

الصيغة الارتدادية للمتتالية

هي تعبير عن المتتالية يربط الحدّ a_n بحدّ أو أكثر من الحدود التي تسبقه، بمعلومية قيمة الحدّ الأول أو قيم أكثر من حدّ.

تنبيه

عند كتابة تعريف الصيغة الارتدادية لمتتالية، قد يكتب الطلاب عبارة الصيغة الارتدادية فقط، من دون الانتباه إلى كتابة قيمة الحد الأول.

يمكن معرفة قيمة كل من حدود المتتالية باستعمال الصيغة الارتدادية.

مثال 2 إيجاد حدود المتتالية باستعمال الصيغة الارتدادية

A. أوجد الحدود الستة الأولى والحدّ الذي رتبته 100 للمتتالية التالية المعرّفة بالصيغة الارتدادية.

$$\boldsymbol{b_1 = 3 \ \ , b_n = b_{n-1} + 2 \ \ , \ \ n \geq 2}$$

B. أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية.

$$\boldsymbol{\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \quad , \ n \geq 2 \end{cases}}$$

إرشاد

إن العلاقة بين a_n و a_{n+1} تمثّل العلاقة بين أي حدّين متتاليين، بالتالي فهي نفسها العلاقة بين a_{n-1} و a_n.

سؤال للتفكر

س: هل أي متتالية $\{a_n\}$ صيغتها الارتدادية $a_n = a_{n-1} + 2$ مساوية للمتتالية $\{b_n\}$؟

نموذج إجابة:

كلا، إلا إذا كان $a_1 = b_1 = 3$.

الحل

A. أوجد حدًّا واحدًا في كلّ مرّة. ابدأ بالحدّ $b_1 = 3$ ومن ثمّ أوجد كلًّا من الحدود اللاحقة بإضافة العدد 2 إلى قيمة الحد الذي يسبقه مباشرة.

$$b_1 = 3$$
$$b_2 = b_1 + 2 = 5$$
$$b_3 = b_2 + 2 = 7$$
$$b_4 = b_3 + 2 = 9$$
$$b_5 = b_4 + 2 = 11$$
$$b_6 = b_5 + 2 = 13$$

(تابع)

الحدّ المئة يقع بعد 99 حدًّا من الحدّ الأول، ما يعني أن بإمكاننا معرفة قيمته مباشرةً بإضافة العدد 2، 99 مرة، إلى العدد 3

$$b_{100} = 3 + 99 \times 2 = 201$$

B. $a_1 = 1$

$a_2 = 3$

$a_3 = 2a_2 - a_1$

$= 2 \times 3 - 1$

$= 5$

$a_4 = 2a_3 - a_2$

$= 2 \times 5 - 3$

$= 7$

$a_5 = 2a_4 - a_3$

$= 2 \times 7 - 5$

$= 9$

حاول أن تحل التمرين 2

الحد العام

الحدّ الذي رتبته n يقع بعد $n - 1$ حدًّا من الحدّ الأول، ما يعني أن بإمكاننا معرفة قيمته مباشرةً بإضافة العدد 2، $(n - 1)$ مرة، إلى العدد 3 ، إذن يُمكن إيجاد الحد العام للمتتالية في الفرع A على الشكل:

$b_n = 3 + 2(n - 1)$

مثال 3 الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي

A. إذا كانت ... 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, الحدود الأولى من متتالية فيبوناتشي، أوجد الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية.

B. استعمل الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي لإيجاد a_{12}.

الحل

A. نأخذ:

$$a_1 = a_2 = 1 \ , a_3 = 2 \ , a_4 = 3 \ , a_5 = 5 \ , a_6 = 8 \ , a_7 = 13 \ , a_8 = 21$$

نلاحظ ما يلي:

$$a_3 = a_2 + a_1$$

$$a_4 = a_3 + a_2$$

$$a_5 = a_4 + a_3$$

$$a_6 = a_5 + a_4$$

$$a_7 = a_6 + a_5$$

$$a_8 = a_7 + a_6$$

(تابع)

متتالية فيبوناتشي

يمكن لمتتالية فيبوناتشي تفسير العديد من أنماط النموّ الطبيعية للنباتات والحيوانات.

كما أنها تعطي تفسيرات واضحة للعديد من الأنماط الحلزونية في الطبيعة كحلزونات الأعاصير وبذور دوار الشمس. وكذلك فإن نسب حدودها المتتالية تعطي قيمًا تقريبية هامة للنسبة الذهبية φ التي تفسّر العديد من أنماط الأبعاد ولا سيّما في جسم الإنسان.

الحد العام لمتتالية فيبوناتشي

رغم أن الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ بسيطةٌ للغاية إلّا أنّ الحد العام لها $b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ يبدو معقدًا.

أي أن كل حد من هذه المتتالية ينتج عن مجموع الحدين السابقين بدءًا من الحد الثالث ومنه نستنتج أن الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي هي:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,,\ n \geq 3 \end{cases}$$

.B عوّض $n = 9$ في الصيغة الارتدادية $\quad a_9 = a_8 + a_7$

عوّض $a_7 = 13$ و $a_8 = 21$ $\quad = 21 + 13$

بسّط $\quad = 34$

إذن، $a_9 = 34$

عوّض $n = 10$ في الصيغة الارتدادية $\quad a_{10} = a_9 + a_8$

عوّض $a_8 = 21$ و $a_9 = 34$ $\quad = 34 + 21$

بسّط $\quad = 55$

إذن، $a_{10} = 55$

عوّض $n = 11$ في الصيغة الارتدادية $\quad a_{11} = a_{10} + a_9$

عوّض $a_9 = 34\,,\ a_{10} = 55$ $\quad = 55 + 34$

بسّط $\quad = 89$

إذن، $a_{11} = 89$

عوّض $n = 12$ في الصيغة الارتدادية $\quad a_{12} = a_{11} + a_{10}$

عوّض $a_{10} = 55\,,\ a_{11} = 89$ $\quad = 89 + 55$

بسّط $\quad = 144$

إذن، $a_{12} = 144$

حاول أن تحل التمرين 3

يمكن الإستفادة من المتتاليات، ولا سيّما في صيغها الارتدادية، في دراسة العديد من الأنماط المالية والتجارية، كتغيّر الأسعار وقيم الأرصدة المصرفية والاستثمارات وكذلك في احتساب الأقساط وقيّم الديون المتبقية في عمليات التقسيط، وفي ما يلي مثال على إحدى هذه الأنماط.

مثال 4 الشراء بالتقسيط

اشترى خالد سيارة فدفع من ثمنها مبلغًا وبقي من الثمن QR 80 000 على أن يدفعه في صورة أقساط شهرية. إذا كانت الصيغة $a_n = 1.005\, a_{n-1} - 2\,500$, $n \geq 2$ تمثّل المبلغ المتبقي من ثمن السيارة بعد n دفعة، أوجد قيمة المبلغ الذي سوف يبقى من ثمنها بعد تسديد 5 دفعات، مقربًا إلى أقرب ريال.

الحل

المبلغ المتبقي من ثمن السيارة بعد الدفعة الأولى يساوي QR 80 000

إذن، الحد الأول من المتتالية a_n هو $a_1 = 80\,000$

عوّض $n = 2$	$a_2 = 1.005a_1 - 2\,500$
عوّض $a_1 = 80\,000$	$= (1.005)(80\,000) - 2\,500$
بسّط	$= 77\,900$

إذن، $a_2 = \text{QR } 77\,900$

عوّض $n = 3$	$a_3 = 1.005a_2 - 2\,500$
عوّض $a_2 = 77\,900$	$= (1.005)(77\,900) - 2\,500$
بسّط	$= 75\,789.5$

إذن، $a_3 = \text{QR } 75\,789.5$

عوّض $n = 4$	$a_4 = 1.005a_3 - 2\,500$
عوّض $a_3 = 75\,789.5$	$= (1.005)(75\,789.5) - 2\,500$
بسّط	$= 73\,668.4475$

إذن، $a_4 = \text{QR } 73\,668.445$

عوّض $n = 5$	$a_5 = 1.005a_4 - 2\,500$
عوّض $a_4 = 73\,668.4475$	$= (1.005)(73\,668.4475) - 2\,500$
بسّط	$= 71\,536.78974$

إذن، $a_5 = \text{QR } 71\,536.78974$

وبالتالي، المبلغ المتبقي من ثمن السيارة بعد تسديد 5 دفعات هو QR 71 537 تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 4

سؤال للتفكر

س: كيف نعرف عدد الحدود التي يجب إيجاد قيمها؟

نموذج إجابة:

a_n تمثل المبلغ الباقي بعد n دفعة، وبالتالي يجب إيجاد a_5 التي تمثّل المبلغ الباقي بعد 5 دفعات. وبما أن الصيغة الارتدادية هي الحد a_n بدلالة الحد الذي يسبقه a_{n-1}، كان علينا إيجاد a_4، وصولًا إلى a_2، الذي نجده بدلالة a_1، الذي تمثّل قيمته المبلغ الأصلي المتبقي.

مراجعة سريعة 1.1

في التمارين 1-6، أوجد الحد الذي يلي مباشرة آخر حد مبيّن في المتتالية:

1. $2, 5, 8, 11, \ldots$ 14
2. $5, 10, 15, 20, 25, \ldots$ 30
3. $4, 7, 12, 19, \ldots$ 28
4. $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \ldots$ $\frac{11}{36}$
5. $1, \frac{-1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$ $\frac{-1}{243}$
6. $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ 16

في التمارين 7-10، أوجد قيمة الحد a_{10}

7. $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\frac{10}{11}$
8. $a_n = 5\left(2^{n-1}\right)$ 2 560
9. $a_9 = 17, a_n = 32 - a_{n-1}$ 15
10. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ $\frac{100}{1\,024} = \frac{25}{256}$

الدرس 1.1 التمارين

1. لتكن $a_n = \frac{4}{2^n}$ المتتالية لكل $n \geq 1$
   a. هل هذه المتتالية منتهية؟ وضّح إجابتك.
   b. أوجد الحدود الأربعة الأولى.
   c. مثّل دالة المتتالية بيانيًا في المستوى الإحداثي.
2. إذا كانت $a_n = a_{n-1} + 2$ لكل $n \geq 2$ ، $a_1 = -1$ أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية.
3. a. إذا كانت $2, 3, 5, 8, 12, 17$ الحدود الأولى من المتتالية $\{a_n\}$، أوجد الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية.
   b. استعمل الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية لتوجد a_{10}.
4. أراد منصور إيداع QR 30 000 في أحد المصارف على أن تضاف قيمة الفائدة إلى المبلغ الأصلي a_0 في نهاية كل سنة. إذا كانت الصيغة $a_n = 1.06a_{n-1} - 250$ لكل $n \geq 2$، تمثّل جملة المبلغ بعد n سنة، أوجد جملة المبلغ بعد مرور 4 سنوات.

في التمارين 5-7، أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية باستعمال الحد العام.

5. $a_n = 2n - 5$ $a_1 = -3, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 5$
6. $a_n = 4 \times 2^{-n}$ $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{8}$
7. $a_n = 4 \times (n+2)$ $a_1 = 12, a_2 = 16, a_3 = 20, a_4 = 24, a_5 = 28$

8. أوجد الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2\,a_{n-1} + 1 \,,\, n \geq 2 \end{cases}$$ $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7$

في التمارين 9-11، أوجد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية.

9. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \,,\, n \geq 2 \end{cases}$ $a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, a_5 = 19$
10. $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2\,u_n + 1} \,,\, n \geq 1 \end{cases}$ $u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = \frac{3}{7}, u_4 = \frac{21}{13}, u_5 = \frac{39}{55}$
11. $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = b_{n-1} + 3n \,,\, n \geq 2 \end{cases}$ $b_1 = 2, b_2 = 8, b_3 = 17, b_4 = 29, b_5 = 44$

12. أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية. ماذا تلاحظ؟
   a. $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \,,\, n \geq 2 \end{cases}$ $a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 9, a_4 = 11, a_5 = 13$
   b. $b_n = 2n + 3$ $b_1 = 5, b_2 = 7, b_3 = 9, b_4 = 11, b_5 = 13$
   المتتالية $\{a_n\}$ هي نفس المتتالية $\{b_n\}$
13. أوجد تعريفًا ممكنًا بالصيغة الارتدادية للمتتالية: $1, 5, 9, 13, \ldots$ باحتساب الفرق بين كل حدٍ والحد الذي يسبقه مباشرة. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 4, n \geq 2 \end{cases}$
14. أوجد تعريفًا ممكنًا بالصيغة الارتدادية للمتتالية: $18, 15, 12, 9, \ldots$ باحتساب الفرق بين كل حدٍ والحد الذي يسبقه مباشرة. $\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_n = a_{n-1} - 3, n \geq 2 \end{cases}$

15. أوجد تعريفًا ممكنًا بالصيغة الإرتدادية للمتتالية:

$\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{48}, \frac{1}{192}$ $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_n = \frac{1}{4} a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

باحتساب النسبة بين كل حدٍ والحد الذي يسبقه مباشرة.

16. أوجد تعريفًا ممكنًا بالصيغة الارتدادية للمتتالية:

$\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{-1}{24}$ $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_n = \frac{-1}{2} a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

باحتساب النسبة بين كل حدٍ والحد الذي يسبقه.

17. لاحظ المتتالية $a_n = \frac{n+1}{n}$ هل يمكن أن يكون العدد 3 أحد حدودها؟ برّر إجابتك.

18. **الأعداد الفردية** أوجد الصيغة الارتدادية لمتتالية الأعداد الطبيعية الفردية ... ,7 ,5 ,3 ,1

$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2 \end{cases}$

19. **الأعداد الزوجية**

a. أوجد الصيغة الارتدادية لمتتالية الأعداد الطبيعية الزوجية

$2, 4, 6, 8, \ldots\ldots$ $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2 \end{cases}$

b. بيّن كيف يمكن أن تكون العلاقة $a_n = a_{n-1} + 2$ هي نفسها لمتتاليتي الأعداد الفردية والزوجية مع أنهما مختلفتان.

الحد الأول مختلف.

20. لنأخذ المتتالية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + (n+1), n \geq 1 \end{cases}$$

a. أوجد الحدود الخمسة الأولى.

b. هل هذه المتتالية معرفة بصيغة الحد العام؟ بالصيغة الارتدادية؟ برّر إجابتك.

c. المتتالية $\{b_n\}$ معرفة بدلالة المتتالية $\{a_n\}$ كما يلي:

$b_n = a_{n+1} - a_n$

أوجد صيغة الحد العام للمتتالية $\{b_n\}$.

d. استنتج أن الصيغة الارتدادية للمتتالية $\{a_n\}$ هي:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1, n \geq 2 \end{cases}$$

21. المتتالية $\{a_n\}$ معرّفة بصيغة الحد العام $a_n = \frac{n^2 + n}{2}$

a. أثبت أن $a_{n+1} = a_n + (n+1)$

b. استنتج من الفرع (a) السابق الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية.

22. ما الصيغة الارتدادية لمتتالية الأعداد الصحيحة $a_n = n$ ؟

23. $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = b_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$ هي الصيغة الارتدادية لمتتالية.

a. أوجد الحدود العشرة الأولى.

b. هل يمكن استنتاج صيغة الحد العام للمتتالية؟ وضّح إجابتك.

24. **الحصالة** حصل أحمد يوم العيد على ما مجموعه QR 140 ووضع المبلغ في حصالة جديدة. وعدته أمه بإعطائه QR 50 إضافيًا كل شهر.

هل تشكل المبالغ المتراكمة متتالية ما؟ ناقش الموضوع واكتب صيغة الحد العام والصيغة الارتدادية للمتتالية إن استطعت.

25. **نشاط جماعي** ناقش مع زملائك في الصف السؤال:

هل مفهوم زيادة الفائدة البسيطة السنوية يشكّل متتالية ما؟

26. لتكن المتتالية التالية $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ $(n \geq 1)$ حيث F_n هي أحد حدود متتالية فيبوناتشي $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$

a. أوجد الحدود العشرة الأولى من $\{a_n\}$.

b. أثبت أن $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$، حيث $n \geq 2$.

أسئلة اختبار معيارية

27. **صواب أم خطأ** يقول صالح إن المتتاليتين التاليتين متطابقتان:

$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = 2b_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases} , \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases}$$

هل هذا صواب أو خطأ؟ برّر إجابتك.

خطأ. قيمة الحد الأول في المتتاليتين ليست نفسها.

28. **صواب أم خطأ** تقول لطيفة إن الصيغة الارتدادية للمتتالية:

$2, 5, 8, 11, 14, \ldots$ هي $u_1 = 2, u_n = 4u_{n-1} - 3$

هل هذا صواب أم خطأ؟ برّر إجابتك.

خطأ $u_1 = 2, u_2 = 5,$ $u_3 = 17 \neq 8$

29. **اختيار من متعدد** إذا كانت الصيغة الارتدادية للمتتالية u_n هي $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = u_{n-1} + 4 \end{cases}$ فإن الحد الذي رتبته 100 يساوي: B

A. 204

B. 402

C. 104

D. 303

.30 **اختيار من متعدد** يبيّن الجدول التالي التكاثر المتوقع لنوع من البكتيريا بعد أعداد مختلفة من الساعات.

عدد الساعات (n)	1	2	3	4	5
عدد البكتيريا	19	38	57	76	95

الحد العام للمتتالية التي تمثل تكاثر هذا النوع من البكتيريا بمرور الزمن هو: D

A. $a_n = 19n + 19$

B. $a_n = n + 19$

C. $a_n = \frac{1}{19}n$

D. $a_n = 19n$

استكشاف

.31 **الكتابة للتعلم** هل تسلسل الأرقام الأولية يشكل متتالية؟ برّر إجابتك. نعم. لأن الأعداد الأولية يمكن أن تعرف من خلال دالة مجالها الأعداد الصحيحة الموجبة.

.32 **الكتابة للتعلم** تعلمت هند تزيين أواني الضيافة في منزلها، وصارت تزين آنيةً كل ثلاثة أيام. قررت هند أن تستمر بتزيين الأواني وتخزينها حتى موسم الأعياد لتبيعها بسعر جيّد. هل يشكل عدد الأواني المزينة متتالية؟ إذا كانت الإجابة نعم، هل هذه المتتالية منتهية أم غير منتهية؟

توسيع الأفكار

.33 **المتتالية الثابتة** المتتالية $\{a_n\}$ معرّفة بصيغتها الارتدادية حدها الأول a_1 و $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 4}{a_n - 1}$. أوجد قيمة a_1 كي تكون المتتالية ثابتة (أي إنّ قيمة a_n لا تتغير مهما تكن رتبة الحد).

.34 نعرّف المتتالية: $\mathrm{F}_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right)$

.a أوجد الحدود العشرة الأولى لهذه المتتالية وقارنها بحدود متتالية فيبوناتشي.

.b بيّن أن $\dfrac{(1 \pm \sqrt{5})^2}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$

.c استخدم نتيجة (b) لتتحقق من أن F_n تحقق تعريف الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي.

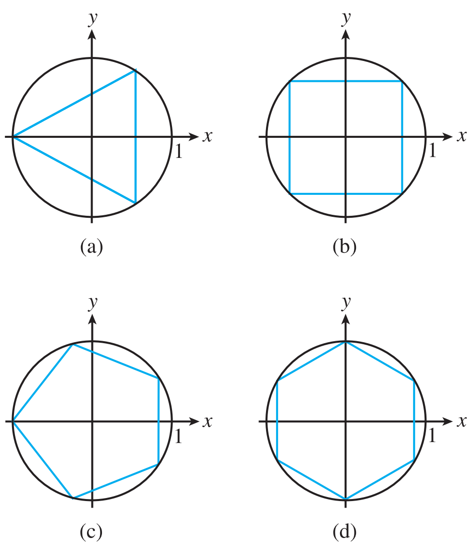
.35 المتتالية $\{a_n\}$ معرّفة بصيغتها الارتدادية:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3 \end{cases}$$

أوجد القيمة α بحيث تحقق المتتالية $b_n = a_n + \alpha$ الصيغة

$$b_{n+1} = 2b_n$$

.36 **علاقة بين الهندسة والمتتاليات** في المخطّطات التالية، تقع رؤوس المضلّعات المنتظمة على دوائر الوحدة $(r = 1)$، بحيث أنّ لكل مضلّع حرفًا متعامدًا مع الجزء الموجب من المحور x.



أثبت أنّه يمكن تمثيل محيط كل مضلّع في المخطط أعلاه بالمتتالية:

$a_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$، حيث n هو عدد أحرف المضلّع.

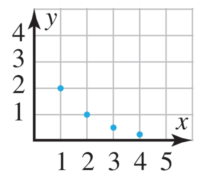
إجابات أسئلة التمارين 1.1

1. a. كلا، لأن مجالها هو ℕ

b. $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{4}$

c. لتمثيل المتتالية بيانيًا، عيّن النقاط الأربع التالية في المستوى الإحداثي:

$$(1, 2), (2, 1), \left(3, \frac{1}{2}\right), \left(4, \frac{1}{4}\right)$$



2. $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 7$

3. a. $\begin{cases} a_1 = 2, a_2 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1, n \geq 3 \end{cases}$

b. $a_{10} = 47$

4. $a_1 = 1.06a_0 - 250$
$= 1.06 \times 30\,000 - 250$
$= 31\,550$
$a_2 = 1.06a_1 - 250$
$= 33\,193$
$a_3 = 1.06a_2 - 250$
$= 34\,934.58$
$a_4 = 1.06a_3 - 250$
$= 36\,780.65$
QR 36 780.65

17. غير ممكن:

$$\frac{n+1}{n} = 3$$
$$n + 1 = 3n$$
$$n = \frac{1}{2}$$

20. a. $a_1 = 1\,, a_2 = 3\,, a_3 = 6\,, a_4 = 10, a_5 = 15$

b. غير معرفة بصيغة الحد العام ولا بالصيغة الارتدادية، لأن الحد a_{n+1} معرف بدلالة a_n و n في الوقت نفسه.

c. $b_n = n + 1$

d. $b_n = n + 1 = b_{n-1} + 1$

إذن، $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} + 1$

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1$$

الصيغة الارتدادية هي:

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1\,,\ n \geq 2 \end{cases}$$

21. a. $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2}$
$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$

$a_n + n + 1 = \frac{n^2 + n}{2} + n + 1$
$= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$
$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$

إذن، $a_{n+1} = a_n + n + 1$

b. بما أن $a_{n+1} = a_n + n + 1$، فإن: $a_n = a_{n-1} + n$

$a_{n+1} - a_n = a_n + n + 1 - a_{n-1} - n, a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1$

إذن، $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - a_{2-1} + 1, n \geq 2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 1,\ n \geq 1 \end{cases}$

23. a. $b_1 = 2, b_2 = 5, b_3 = 8, b_4 = 11, b_5 = 14$
$b_6 = 17, b_7 = 20, b_8 = 23, b_9 = 26, b_{10} = 29$

b. $b_{n+1} = 3n + 2$

عند الحد b_{n+1} نكون قد أضفنا العدد 2 إلى ثلاثة أمثال n.

24. نعم، $\begin{cases} a_1 = 140 \\ a_{n+1} = a_n + 50, n \geq 1 \end{cases}$، $a_n = 50n + 90$

25. نحصل على المتتالية $\begin{cases} a_1 \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases}$ حيث a_1 المبلغ الأصلي المودع، و r قيمة الفائدة السنوية الثابتة على المبلغ، و n عدد السنوات.

26. a. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{5}{3}, a_5 = \frac{8}{5}$
$a_6 = \frac{13}{8}, a_7 = \frac{21}{13}, a_8 = \frac{34}{21}, a_9 = \frac{55}{34}, a_{10} = \frac{89}{55}$

b. $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$

32. نعم، لأن عدد الأواني المزينة a_n بدلالة عدد الأيام n يساوي ناتج قسمة العدد n على العدد 3:

$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1, a_6 = 2, \ldots$

المتتالية a_n منتهية.

33. $a_2 = a_1$

$$\frac{2a_1 + 4}{a_1 - 1} = a_1$$
$$2a_1 + 4 = a_1^{\,2} - a_1$$
$$a_1^{\,2} - 3a_1 - 4 = 0$$
$$(a_1 + 1)(a_1 - 4) = 0$$
$a_1 = 4$ أو $a_1 = -1$

34. a. $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8$
$F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55$

الحدود كلها مطابقة لحدود متتالية فيبوناتشي.

b. $$\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2} = 3+\sqrt{5}$$

$$\frac{(1-\sqrt{5})^2}{2} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{2} = 3-\sqrt{5}$$

c. $F_n + F_{n-1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n} - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{2^n} + \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \frac{(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

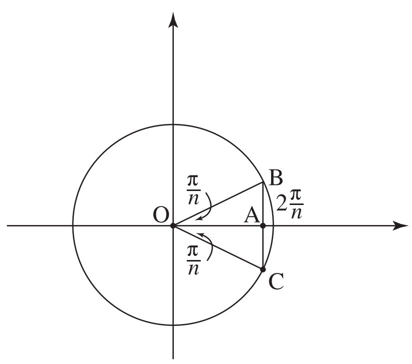
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}} \times \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2} - \frac{(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}} \times \frac{(1-\sqrt{5})^2}{2^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}}\right]$$

$$= F_{n+1}$$

35. $b_{n+1} = 2b_n$
$a_{n+1} + \alpha = 2(a_n + \alpha)$
$a_{n+1} - 2a_n = \alpha$
$\alpha = 3$

.36 يمكننا أن نلاحظ من المثلث أدناه أن طول ضلع واحد من مضلع (عدد أضلاعه n) هو $2 \sin \frac{\pi}{n}$ وبالتالي فإن محيط المضلع يساوي: $a_n = 2n \sin \frac{\pi}{n}$.



$\frac{AB}{1} = \sin \frac{\pi}{n}$
$BC = 2AB = 2 \sin \frac{\pi}{n}$

1.2 المتتاليات الحسابية Arithmetic Sequences

ما ستتعلّمه

- تعريف المتتالية الحسابية
- صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية

... ولماذا

تمثّل المتتاليات ذات الفرق الثابت نوعًا مهمًا من المتتاليات، ولها جملة من الخواص المهمة رياضيًا وتطبيقيًا حيث تستعمل في حل مسائل حياتية.

معايير الدرس

11A.1.2

11A.1.4

11A.1.9

المصطلحات

- الفرق الثابت common difference
- متتالية حسابية arithmetic sequence
- صيغة الحد العام general term formula

الهدف

سيتمكّن الطلاب من كتابة المتتاليات الحسابية في الصيغتين الصريحة والارتدادية.

دليل الدرس

1. تعريف المتتالية الحسابية
2. كتابة الحد العام للمتتالية الحسابية

تحفيز

اطلب من الطلاب إيجاد الحد الذي رتبته مئة في المتتالية $7, 10, 13, 16, \ldots$ **(304)**

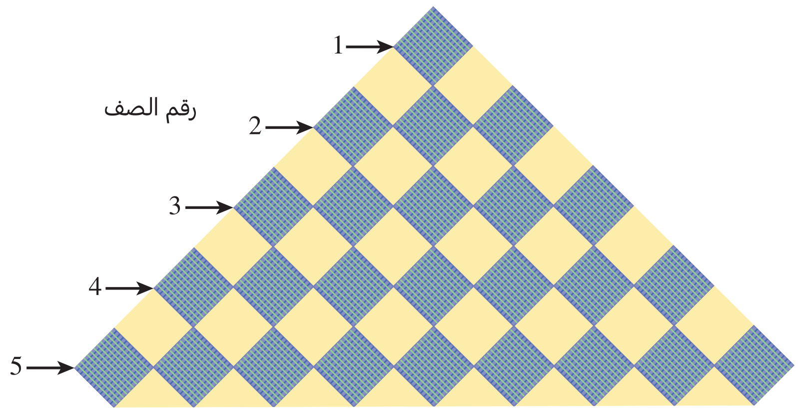
نشاط المصطلحات

عرّف المتتالية الحسابية بأنها مجموعة مرتبة من الأعداد تُكوَّن بإضافة عدد ثابت إلى كل عدد فيها للحصول على العدد الذي يليه مباشرة. قد يعتقد بعض الطلاب أن كل مجموعة من الأعداد المرتبة في نسق معين تكوّن متتالية حسابية. اطلب منهم أن يصلوا بين كل مجموعة من الأعداد أدناه والعبارة التي تصفها وصفًا صحيحًا.

متتالية غير حسابية	$2, 5, 8, 11, 14, \ldots$
متتالية حسابية	$2, 5, 3, 8, 1, \ldots$
ليست متتالية	$2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

تعريف المتتالية الحسابية

يصمّم مصمم أزياء قماشًا مزخرفًا كما في الشكل التالي:



أراد إيجاد نمط عددي يسمح له بمعرفة عدد المربعات المزخرفة مهما كان رقم الصف في قطعة القماش كبيرًا.

بما أنه من الطبيعي جدًّا إيجاد الأنماط في تتالٍ مرتّب من الأعداد، أنشأ الجدول المبيّن أدناه :

رقم الصف	1	2	3	4	5
عدد المربعات المزخرفة في الصف	1	3	5	7	9

لاحظ أنّ الفرق بين كل عدد من أعداد المربّعات المزخرفة والعدد الذي يسبقه مباشرة ثابت، أي إنّ $2 = 7 - 9 = 5 - 7 = 3 - 5 = 1 - 3$، هذا الفرق يسمّى **الفرق الثابت** ويرمز له بالرمز d.

ومتتالية الأعداد $\ldots ,1, 3, 5, 7, 9$ تسمّى **متتالية حسابية**.

لكي تحصل على الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية الحسابية، اكتب الحد a_n في صورة مجموع الحد الذي يسبقه a_{n-1} والفرق الثابت 2

يمكنك التعبير عن المتتالية في الصف الثاني من الجدول بالصيغة الارتدادية التالية:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n-1} + 2 \,,\, n \geq 2 \end{cases}$$

المتتالية الحسابية

تكون المتتالية $\{a_n\}$ متتالية حسابية إذا كان الفرق بين كل حدّ والحدّ الذي يسبقه مباشرةً ثابتًا، ويُسمى الفرق الثابت ويُرمز له بالرمز d، أي إنّ $d = a_n - a_{n-1}$

يُعبّر عن الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية: $a_n = \begin{cases} a_1 \\ a_{n-1} + d \,,\, n \geq 2 \end{cases}$

مثال 1 الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية

A. هل المتتالية ... ,4, 7, 10, 13, 16 متتالية حسابية؟ إن كانت كذلك، اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية.

B. هل المتتالية ... ,3, 5, 7, 11, 13 متتالية حسابية؟ برّر إجابتك.

الحل

A. 4, 7, 10, 13, 16, ...

بما أنّ $7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 16 - 13 = 3$، فإذن الفرق بين كل حدّ والحد الذي يسبقه مباشرة ثابت، وعليه فالمتتالية حسابية وفرقها الثابت $d = 3$.

الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية هي:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \, , n \geq 2 \end{cases}$$

B. 3, 5, 7, 11, 13, ...

أوجد الفرق بين كل حدّين متتاليين

$5 - 3 = 2$

$7 - 5 = 2$

$11 - 7 = 4$

بما أنّ الفرق ليس ثابتًا، فإنّ المتتالية ليست حسابية.

حاول أن تحل التمرين 33

يمكنك استعمال الصيغة الارتدادية لمتتالية حسابية كي توجد حدود هذه المتتالية تباعًا. وفي هذه الحالة يتم إيجاد قيمة كل حدّ بالرّجوع إلى الحدّ السابق له، وبالتالي فإن إيجاد حدّ ما من متتالية حسابية باستعمال الصيغة الارتدادية يتطلب بالضرورة معلومية الحدّ الذي يسبقه مباشرة.

أسئلة للتفكر

س: هل يمكن أن يكون أحد الحدود في متتالية حسابية أصغر من الحد الذي يسبقه مباشرة؟

نموذج إجابة:

نعم، لأن الفرق الثابت في المتتالية الحسابية قد يكون عددًا سالبًا، وفي هذه الحالة يكون كل حد من حدود المتتالية أصغر من الحد الذي يسبقه مباشرة.

س: كيف يمكنك تحديد ما إذا كان نسق ما من الأعداد يكوّن متتالية حسابية أم لا؟

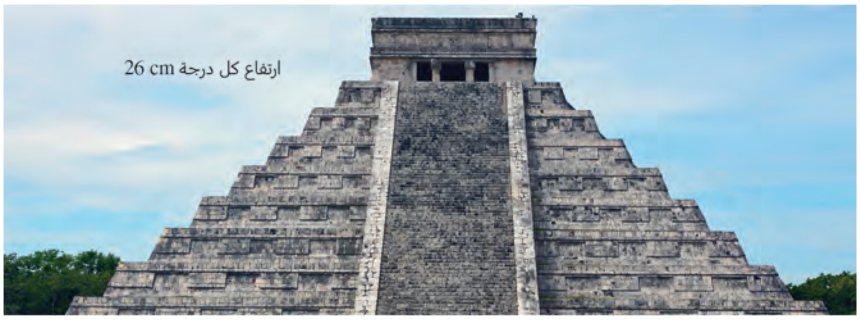
نموذج إجابة:

يكفي أن تطرح كل عدد من هذه الأعداد من العدد الذي يليه، أو تجد ناتج كل حد مطروحًا منه الحد الذي يسبقه.

فإذا كانت نواتج الطرح جميعها متساوية فهذا يعني أن الفرق ثابت وأن نسق الأعداد متتالية حسابية.

مثال 2 الهرم المدرّج

ارتفاع كل درجة في الهرم المدرّج العائد لحضارة المايا هو 26 cm، كما تشير الصورة.



تمثل المتتالية ... $a_1, a_2, a_3,$ ارتفاعات درجات الهرم عن سطح الأرض.

A. ما قيمة a_1؟

B. هل هذه المتتالية متتالية حسابية؟ إذا كانت كذلك، أوجد صيغتها الارتدادية.

C. أوجد ارتفاع الدرجة الثالثة عن سطح الأرض.

الحل

A. a_1 تمثل ارتفاع الدرجة الأولى، إذن $a_1 = 26$.

B. الفرق بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرةً هو مقدار ارتفاع درجة واحدة ويساوي 26 cm وهو الفرق الثابت d، وهذا يعني أن المتتالية متتالية حسابية.

الحد الأول منها $a_1 = 26$.

إذن، الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية هي:

$$\begin{cases} a_1 = 26 \\ a_{n+1} = a_n + 26 , n \geq 1 \end{cases}$$

C. الصيغة الارتدادية $a_2 = a_1 + 26$

عوّض $a_1 = 26$ $a_2 = 26 + 26 = 52$

الصيغة الارتدادية $a_3 = a_2 + 26$

عوّض $a_2 = 52$ $a_3 = 52 + 26 = 78$

إذن، ارتفاع الدرجة الثالثة هو 78 cm

حاول أن تحل التمرين 6

تحذير

يمكن أن تعرف الصيغة $a_n = a_{n-1} + d$ أكثر من صيغة وذلك حسب قيمة a_1.

للطلاب سريعي الإنجاز

(مع المثال 2) دع الطلاب يتدرّبون على إيجاد أي حد من حدود متتالية حسابية.

س: أوجد الحد الخامس في المتتالية المعرّفة بالصيغة $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 5 \end{cases}$

نموذج إجابة:

الحد الخامس: $a_5 = 24$

س: أوجد الحد السادس في المتتالية المعرّفة بالصيغة $\begin{cases} a_1 = 17 \\ a_n = a_{n-1} - 4 \end{cases}$

نموذج إجابة:

الحد السادس: $a_6 = -3$

س: أوجد الحد الخامس في المتتالية المعرّفة بالصيغة $\begin{cases} a_1 = 23 \\ a_n = a_{n-1} + 8 \end{cases}$

نموذج إجابة:

الحد الخامس: $a_5 = 55$

صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية

عرفنا أن المتتالية الحسابية تُكتب بالصيغة الارتدادية:

$$a_n = \begin{cases} a_1 \\ a_{n-1} + d \, , n \geq 2 \end{cases}$$

حيث d هو الفرق الثابت.

إذن،

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + 1d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

نلاحظ بعد المتابعة أن **صيغة الحد العام** للمتتالية هي:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية

صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية هي:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

حيث:

a_1 : الحد الأول للمتتالية.

d : الفرق الثابت.

n : رتبة الحد.

a_n : الحد الذي رتبته n.

مثال 3 استعمال صيغة الحد العام لمتتالية حسابية

A. يوضح الجدول أدناه تكلفة استئجار دراجة هوائية. كيف يمكنك التعبير عن التكلفة باستعمال صيغة الحد العام؟

عدد أيام الاستئجار	1	2	3	4
تكلفة الاستئجار	26	38	50	62

B. ما تكلفة استئجار دراجة مدة 10 أيام؟

C. كيف يرتبط الحد العام للمتتالية الحسابية بدالة خطية؟

(تابع)

M01_MTH02_SE11_QTR_AR_ADV.indb 14 21/06/2021 4:53:20 PM

أسئلة للتفكر

س: لماذا يعدّ التعبير عن المتتاليات الحسابية بالصيغة الصريحة أكثر فعالية من التعبير عنها بالصيغة الارتدادية؟

نموذج إجابة:

لأن إيجاد أي حد في متتالية حسابية باستعمال الصيغة الارتدادية يتطلب إيجاد قيم كل الحدود التي قبله، في حين يمكنك، باستعمال الصيغة الصريحة، إيجاد قيمة الحد الذي تريد إيجاد قيمته مباشرة، من دون الحاجة إلى إيجاد قيم الحدود الأخرى.

س: كيف يمكنك استعمال الجدول لمعرفة تكلفة استئجار دراجة مدة عشرة أيام؟

نموذج إجابة:

يمكنك توسيع الجدول ليشمل الأعداد من 1 إلى 10، وتحديد التكلفة بإضافة 12 إلى العدد السابق حتى نهاية الجدول.

س: لماذا تختلف قيمة الحد الأول في المتتالية عن قيمة المقطع y للدالة الخطية التي تمثّلها؟

نموذج إجابة:

لأن الحد الأول في المتتالية هو قيمة الدالة الخطية عند $x = 1$، أما المقطع y فهو قيمتها عند $x = 0$.

الحل

.A نلاحظ في الجدول أعلاه أن الحدّ الأول $a_1 = 26$ والفرق الثابت $d = 62 - 50 = 50 - 38 = 38 - 26 = 12$، إذن المتتالية حسابيّة.

لإيجاد تكلفة استئجار دراجة هوائية مدة n من الأيام، اكتب صيغة الحد العام للمتتالية.

صيغة الحد العام	$a_n = a_1 + (n - 1)d$
عوّض $a_1 = 26, d = 12$	$= 26 + (n - 1)12$
خاصية التوزيع	$= 26 + 12n - 12$
بسّط	$= 14 + 12n$

الحد العام $a_n = 14 + 12n$ يعطي تكلفة استئجار دراجة هوائية لمدة n من الأيام.

.B استعمل الحد العام لإيجاد الحدّ العاشر في المتتالية.

	$a_n = 14 + 12n$
عوّض $n = 10$	$a_{10} = 14 + 12(10)$
	$= 134$

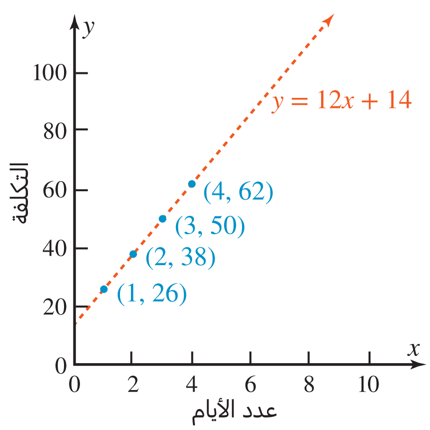
الحد العاشر في المتتالية هو 134

إذن، تكلفة استئجار دراجة مدة 10 أيام هي QR 134.

.C توضح الصيغة $a_n = 14 + 12n$ أن التكلفة، a_n، دالّة لعدد الأيام، n، التي يتم فيها استئجار الدراجة. يمكنك كتابة ذلك في صورة دالة خطية،

$$f(n) = 12n + 14 \; , \; n \in \mathbb{N}$$

وعند المقارنة بالمستقيم الذي معادلته $y = 12x + 14$ يكون الفرق الثابت للمتتالية، 12، يساوي ميل المستقيم في الرسم البياني أدناه وجميع النقاط التي تمثل حدود المتتالية تقع على الخط المستقيم.



حاول أن تحل التمرين 11

المتتالية الحسابية نموذج يصف بدقة العديد من المسائل العلمية المشتملة بطبيعتها على قوائم عددية ذات فرق ثابت، مثل الزيادة السنوية لإنتاج مؤسسة ما، أو حساب الارتفاعات في الدراسة الهندسية للمباني.

مثال 4 الصيغة العامة بمعلومية الصيغة الارتدادية

الصيغة الارتدادية لارتفاع الدرجة n عن سطح الأرض في الدرج المبيّن أدناه هي

$$a_1 = 7, a_n = a_{n-1} + 4, n \geq 2$$

A. أوجد الحد العام الذي يمثّل ارتفاع الدرجة n عن سطح الأرض.

B. ما ارتفاع الدرجة العشرين عن سطح الأرض؟

الحل

A. استعمل الصيغة الارتدادية لإيجاد معلومات عن المتتالية.

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_n = a_{n-1} + 4, n \geq 2 \end{cases}$$

$a_1 = 7, d = 4$

استعمل صيغة الحد العام $a_n = a_1 + (n-1)d$

عوّض $a_1 = 7, d = 4$ $a_n = 7 + (n-1)(4)$

بسّط $a_n = 4n + 3$

الحد العام الذي يمثل ارتفاع الدرجة n عن سطح الأرض هو $a_n = 4n + 3$

B. لإيجاد ارتفاع الدرجة العشرين عن سطح الأرض اكتب الحد العام $a_n = 4n + 3$

عوّض $n = 20$ $a_{20} = 4(20) + 3$

$= 83$

إذن، ارتفاع الدرجة العشرين عن سطح الأرض يساوي 83 in

حاول أن تحل التمرين 14

سؤال للتفكر

س: كيف يمكن إيجاد الصيغة الصريحة لمتتالية باستعمال صيغتها الارتدادية؟

نموذج إجابة:

تمكننا الصيغة الارتدادية من إيجاد قيمة الحد الأول والفرق الثابت في المتتالية.

عادات التفكير

س: وضّح كيف يمكن إيجاد قيمة أي حد من حدود متتالية باستعمال صيغتها الارتدادية.

نموذج إجابة:

(إذا كنت تعرف قيمة الحد الأول للمتتالية، يمكنك إيجاد قيمة أي حد آخر فيها باستعمال الصيغة الارتدادية. أوجد قيمة الحد الثاني بإضافة الفرق الثابت إلى قيمة الحد الأول، وكرّر هذه العملية حتى إيجاد قيمة الحد المطلوب).

تتوفّر لك أحيانًا معطيات عن حدّين أو أكثر من متتالية حسابية، كحجم الإنتاج أو زيادة عدد السكان بين عامين متتاليين أو متباعدين. هل تكفي هذه المعطيات لإيجاد الحد العام والصيغة الارتدادية لهذه المقادير إذا كانت تتبع نمطًا حسابيًا؟

مثال 5 صيغة متتالية حسابية بمعلومية حدّين منها

متتالية حسابية حدّاها الثاني والخامس هما 3 و 24 على التوالي. أوجد الحد العام لهذه المتتالية.

الحل

صيغة الحد العام $a_n = a_1 + (n-1)d$

بالتعويض بالعددين 5 و 2 عن n فإنّ

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_1 + 4d = 24 \qquad (1)$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_1 + d = 3 \qquad (2)$$

حل نظام المعادلتين بالطرح $(a_1 + 4d) - (a_1 + d) = 24 - 3$

$$3d = 21$$

$$d = 7$$

وبما أنّ $a_1 + d = 3$، فإنّ $a_1 = -4$

الحد العام للمتتالية هو:

$a_n = -4 + (n-1)7$ أو $a_n = 7n - 11$

حاول أن تحل التمرين 19

العلاقة بين حدين في متتالية حسابية

يمكننا ملاحظة أن العلاقة بين أي حدين في متتالية حسابية تشبه العلاقة بين أي حد فيها وحدّها الأول:

$a_s = a_t + (s-t)d \, , \, s \geq t$

سؤال للتفكر

س: إذا علمنا أن العددين 8 و 11 هما حدان متتاليان في متتالية حسابية، لكننا لا نعرف رتبتيهما، فهل يمكننا إيجاد الحد العام لهذه المتتالية؟

نموذج إجابة:

كلا؛ يمكن أن نعرف الفرق الثابت وهو $3 = 8 - 11$، لكننا لا نستطيع معرفة قيمة الحد الأول، وبالتالي لا يمكننا إيجاد الحد العام لأن صيغته هي:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

في العديد من المسائل الحياتية التي تتبع نمطًا حسابيًا نحتاج إلى معرفة عدد الحدود بمعلومية بعضٍ منها، كمعرفة عدد الأشهر اللازمة لإنهاء عملية تقسيط معيّنة، أو معرفة عدد الأسابيع اللازمة لنمو شجرة ما حتى ارتفاع معيّن.

مثال 6 إيجاد عدد الحدود في متتالية حسابية

أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية $6, 2, -2, ..., -194$

الحل

لدينا: $a_1 = 6, a_2 = 2, a_3 = -2, ..., a_n = -194$

الفرق الثابت $d = a_n - a_{n-1}$

عوّض $a_2 = 2$، $a_1 = 6$ $= a_2 - a_1$

احسب $= 2 - 6$

$= -4$

استعمل صيغة الحد العام $a_n = a_1 + (n-1)d$

عوّض $a_1 = 6$، $a_n = -194$، $d = -4$ $-194 = 6 + (n-1)(-4)$

بسّط $-200 = -4n + 4$

$n = 51$

إذن، عدد حدود المتتالية الحسابية 51

حاول أن تحل التمرين 21

إرشاد

إذا كانت المتتالية منتهية فإن رتبة الحد الأخير فيها تمثل عدد حدود هذه المتتالية.

سؤال للتفكر

س: إذا كان $n > m$، فهل يمكننا كتابة الحد a_n بدلالة كل من a_m و $(n-m)$ والفرق الثابت d لمتتالية حسابية؟

نموذج إجابة:

نعم،

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_m = a_1 + (m-1)d$

إذن،

$a_n - a_m = (n-m)d$

$a_n = a_m + (n-m)d$

متابعة

دع الطلاب يناقشون إيجابيات وسلبيات تمثيل المتتاليات بيانيًا.

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-30، يوضّح تعريف كل المصطلحات المتعلقة بالمتتاليات الحسابية: "الفرق الثابت"، "الحد العام"، "الصيغة الارتدادية".

التمارين 31-34، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 2, 7, 11, 13, 17, 20, 25

مراجعة سريعة 1.2

في التمرينين 1 و 2، أوجد الفرق الثابت للمتتالية الحسابية.

1. 3, 6, 9, 12, 15, ... $d = 3$

2. 45, 54, 63, 72, 81, ... $d = 9$

في التمارين 3-6، حدّد ما إذا كانت المتتالية حسابية. إذا كانت كذلك، أوجد الفرق الثابت فيها.

3. 1, 15, 29, 43, 57, ...
متتالية حسابية؛ $d = 14$

4. 1, −2, 3, −4, 5, ...
ليست متتالية حسابية.

5. 3, 6, 9, 15, 18, ...
ليست متتالية حسابية.

6. 93, 86, 79, 72, 65, ...
متتالية حسابية؛ $d = -7$

.7 أوجد الحد العام لمتتالية الأعداد الصحيحة الفردية.

1, 3, 5, 7, ... $a_n = 2n - 1;\ n \geq 1$

.8 أوجد الحد العام لمتتالية الأعداد الصحيحة الزوجية.

2, 4, 6, 8, ... $a_n = 2n;\ n \geq 1$

الدرس 1.2 التمارين

في التمارين 1-4، حدّد ما إذا كانت المتتالية حسابية. إذا كانت كذلك، أوجد الفرق الثابت وحدّها الخمسين. وإذا لم تكن كذلك، برّر السبب.

1. $a_n = 2n - 3$

2. $b_n = n + 2$

3. $\begin{cases} c_1 = -1 \\ c_n = c_{n-1} + 2 \quad , n \geq 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2 \quad , n \geq 2 \end{cases}$

.5 أوجد الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية:

1, 4, 7, 10, 13, ...

.6 أوجد الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية، ثم أوجد حدها السادس.

2, −5, −12, −19, ...

في التمرينين 7 و 8، أوجد الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية.

7. $a_n = 10 + 8n$

8. $a_n = 108 - n$

لكل متتالية حسابية في التمارين 9-12، أوجد:

.a الحد العام.

.b الحد الثامن.

.c كيف يرتبط الحد العام للمتتالية بدالة خطية.

9. −2, 2, 6, 10, ...

10. 29, 25, 21, 17, ...

11. −6, 3, 12, 21, ...

12. 10.07, 9.95, 9.83, 9.71, ...

في التمرينين 13 و 14، أوجد الحد العام والحد العاشر للمتتالية الحسابية.

13. $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 15 \quad , n \geq 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_n = a_{n-1} + 6 \quad , n \geq 2 \end{cases}$

.15 أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية:

100, 97, 94, 91, ...

.16 أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية الذي يحقق

$2, \frac{3}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{-7}{4}, \ldots$

.17 أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية الذي يحقق $a_1 = 13$ و $a_7 = -23$.

.18 أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية الذي يحقق $a_1 = 299$ و $a_5 = 300$.

.19 أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية الذي يحقق $a_5 = 6$ و $a_{14} = 42$.

.20 أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية الذي يحقق $a_3 = -40$ و $a_9 = -18$.

في التمارين 21-26، لديك أول ثلاثة حدود والحد الأخير من المتتالية الحسابية. أوجد عدد حدود المتتالية.

21. $3, 9, 15, \ldots, 525$

22. $9, 3, -3, \ldots, -201$

23. $3\frac{1}{8}, 4\frac{1}{4}, 5\frac{3}{8}, \ldots, 14\frac{3}{8}$

24. $\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2, \ldots, \frac{15}{2}$

25. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, 2\frac{5}{6}$

26. $1 - k, 1 + k, 1 + 3k, \ldots, 1 + 19k$

.27 **تصميم واجهة خشبية** يصمّم جمال واجهة خشبية تغطي أحد جدران منزله بالكامل. تتكون الواجهة من لوح خشبي ارتفاعه 90 cm، تعلوه 5 صفوف من الألواح الخشبية المتساوية بارتفاع 40 cm لكل منها. استعمل الصيغة الارتدادية للمتتاليات الحسابية لإيجاد ارتفاع الجدار.

.28 **نمو الأشجار في غابة الأمازون** يبلغ معدل نمو نوع معيّن من الأشجار في غابة الأمازون 2.3 cm في الأسبوع الواحد.
أوجد المتتالية الحسابية التي تمثّل حدودها طول إحدى هذه الأشجار على مدى أسابيع السنة القادمة على افتراض أن طولها الحالي هو 7 m، ثم أوجد الحدود الأربعة الأولى والحدين الأخيرين لهذه المتتالية.

.29 **نشاط جماعي** ضع مع زميل لك قائمة بأمثلة وتطبيقات من الحياة الواقعية تعتقد أنها تمثّل متتاليات حسابيّة.
برّر سبب كون أمثلتك وتطبيقاتك تمثّل متتاليات حسابيّة في رأيك.

.30 **سباق سيارات** اجتاز سائق سيارة سباق 10 m في الثانية الأولى من أحد السباقات. بفرض أن السائق اجتاز 50 m في كل ثانية إضافية في السباق، أوجد طول المسافة، بالمتر، التي اجتازها سائق السيارة بعد مرور 56 ثانية على بدء السباق.

أسئلة اختبار معيارية

.31 **صواب أم خطأ** إذا كان الحدان الأولان لمتتالية حسابية موجبين، فإن الحد الثالث يكون موجبًا أيضًا. برّر إجابتك.

.32 **صواب أم خطأ** المتتالية ... $-14, -10, -6, -2, 2, 6,$ متتالية حسابية. برّر إجابتك.

.33 **اختيار من متعدد** أي المتتاليات أدناه متتالية حسابية؟

A. $1, 3, 5, 7, 11, \ldots$

B. $4, 6, 9, 13, 18, \ldots$

C. $8, 15, 22, 29, 36, \ldots$

D. $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$

.34 **اختيار من متعدد** إذا كان أول حدين من متتالية حسابية هما العددان 2 و 8، فإن حدها الرابع هو:

A. 20

B. 26

C. 64

D. 128

E. 256

استكشاف

.35 **الكتابة للتعلم** في إحدى الألعاب الإلكترونية، على اللاعب أن يحقق 500 5 نقطة لينهي المرحلة الأولى. ولينتقل من أي مرحلة إلى المرحلة التي تليها مباشرةً عليه أن يحقق 250 3 نقطة إضافية. إذا أردت تمثيل المسألة بمتتالية حسابية،
ما العدد الذي يمثل a_1؟ ماذا يمثّل n؟ اكتب صيغة الحد العام والصيغة الارتدادية التي تمثل هذه الحالة.

.36 **الكتابة للتعلم** ماذا يمكنك أن تعرف عن حدود متتالية حسابية إذا كان الفرق الثابت فيها سالبًا؟

توسيع الأفكار

.37 **إيجاد موقع الحد** إذا كان الحدّ الأول لمتتالية حسابية هو -7، والفرق الثابت فيها 3، فهل العدد 803 9 أحد حدود هذه المتتالية؟ إذا كان كذلك، ما موقعه في المتتالية؟

.38 **قيمة الحد** إذا كان الحدّ الأول لمتتاليةٍ حسابيةٍ هو 689 9، والحد 100 هو 996 8، والحد 110 هو 926 8، فهل العدد 1 أحد حدود هذه المتتالية؟ إذا كان كذلك، ما موقعه فيها؟

.39 **إيجاد موقع الحد** إذا كان الحدّ الأول لمتتالية حسابية هو العدد 2، والحد 30 هو العدد 147، فهل العدد 995 أحد حدود هذه المتتالية؟ إذا كان كذلك، ما موقعه فيها؟

.40 ثلاثة أصدقاء هوايتهم المشتركة جمع الطوابع. لاحظ أحدهم أنّ أعداد الطوابع الموجودة في حوزة كل منهم تتبع نمط متتالية حسابية بفرق ثابت قدره 50 طابعًا.
أوجد عدد الطوابع لدى كل من الأصدقاء الثلاثة إذا كان مجموع ما لديهم يساوي 900 طابع.

إجابات أسئلة التمارين 1.2

1. $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 5, ... d = 2$
$a_{50} = a_1 + (n-1)d = 97$

2. $b_1 = 3, b_2 = 4, b_3 = 5, b_4 = 6, ... d = 1$
$b_{50} = b_1 + (n-1)d = 52$

3. $d = 2$
$c_{50} = c_1 + (n-1)d = 97$

.4 $u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 17, u_4 = 53, ...$
بما أن الفرق بين الحدود المتتالية ليس ثابتًا، إذن المتتالية ليست حسابية.

5. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} - 7, n \geq 2 \end{cases}$ $a_6 = -33$

7. $\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_n = a_{n-1} + 8, n \geq 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} a_1 = 107 \\ a_n = a_{n-1} - 1, n \geq 2 \end{cases}$

9. **a.** $a_n = 4n - 6$
b. $a_8 = 26$
c. $f(n) = 4n - 6, n \in \mathbb{N}$

10. **a.** $a_n = 33 - 4n$
b. $a_8 = 1$
c. $f(n) = 33 - 4n, n \in \mathbb{N}$

11. **a.** $a_n = 9n - 15$
b. $a_8 = 57$
c. $f(n) = 9n - 15, n \in \mathbb{N}$

12. **a.** $a_n = 10.19 - 0.12n$
b. $a_8 = 9.23$
c. $f(n) = 10.19 - 0.12n, n \in \mathbb{N}$

13. $a_n = 15n - 7$
$a_{10} = 143$

14. $a_n = 6n + 3$
$a_{10} = 63$

15. $a_n = 103 - 3n$

16. $a_n = 3.25 - 1.25n$

17. $a_n = 19 - 6n$

18. $a_n = 0.25n + 298.75$

19. $a_n = 4n - 14$

20. $a_n = \frac{11}{3}n - 51$

21. $n = 88$

22. $n = 36$

23. $n = 11$

24. $n = 25$

25. $n = 16$

26. $n = 11$

27. 250 cm

28. $\begin{cases} a_1 = 700 \\ a_n = a_{n-1} + 2.3; n \geq 2 \end{cases}$
$a_1 = 700$ cm, $a_2 = 702.3$ cm, $a_3 = 704.6$ cm, $a_4 = 706.9$ cm,
$a_{51} = 815$ cm, $a_{52} = 817.3$ cm

.29 نموذج إجابة: يتزايد عدد المقاعد في صالات المسارح بمقدار مقعدين من صف إلى آخر كلما ابتعدنا عن خشبة المسرح. ويشكل عدد المقاعد هذا متتالية حسابية لأن الفرق بين عدد مقاعد صفين متتاليين هو عدد ثابت.

30. $a_n = a_1 + (n-1)d, a_n = 50n - 40$
$a_{56} = 2\ 760$ m

.31 خطأ، والدليل على ذلك المتتالية $4, 1, -2, -5, ...$

.32 صواب، لأن الفرق بين الحدود المتتالية ثابت ويساوي 4

33. C

34. A

.35 يمثّل a_1 عدد النقاط التي يجب على اللاعب أن يحققها لينهي المرحلة الأولى. يمثّل n عدد المراحل.

$\begin{cases} a_1 = 5\ 500 \\ a_n = a_{n-1} + 3\ 250, n \geq 2 \end{cases}$
$a_n = a_1 + (n-1)d$
$a_n = 5\ 500 + (n-1)3\ 250, a_n = 3\ 250\ n + 2\ 250$

.36 عندما يكون الفرق الثابت في متتالية حسابية عددًا سالبًا، تكون المتتالية متناقصة، وقيم حدودها تتناقص من حد إلى آخر.

37. $\begin{cases} a_1 = -7 \\ a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases}$
$a_n = a_1 + (n-1)d$
$9\ 803 = -7 + (n-1)3$
$n = 3\ 271$

إذن، 803 9 أحد حدود المتتالية لأن n عدد صحيح.

رتبة الحد في المتتالية هي 271 3

38. $a_n = a_1 + (n - 1)d;$

$a_{100} = a_1 + (99)d$

$8\ 996 = 9\ 689 + (99)d$

$1 = 9\ 689 + (n - 1)(-7)$

$n = 1\ 385$

إذن، العدد 1 هو أحد حدود المتتالية لأن n عدد صحيح.

رتبة الحد في هذه المتتالية هي 385 1

39. $a_n = a_1 + (n - 1)d;$

$a_{30} = 2 + 29d = 147$

$d = \frac{145}{29} = 5$

$995 = 2 + (n - 1)(5)$

$n = 199.6$

n ليس عددًا صحيحًا، إذًا، العدد 995 ليس من حدود هذه المتتالية.

.40 ليكن x = عدد الطوابع لدى الصديق الأول

إذن، $x + 50$ = عدد الطوابع لدى الصديق الثاني

و $x + 100$ = عدد الطوابع لدى الصديق الثالث

$x + (x + 50) + (x + 100) = 900$

$x = 250$

$x + 50 = 300$

$x + 100 = 350$

1.3 المتتاليات الهندسية Geometric Sequences

ما ستتعلّمه
- تعريف المتتالية الهندسية
- صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

... ولماذا
تُعد المتتاليات الهندسية نوعًا مهمًّا من المتتاليات ولها خواص رياضية ذات تطبيقات مهمة في واقع الحياة.

معايير الدرس
11A.1.3
11A.1.4
11A.1.9

المصطلحات
- متتالية هندسية geometric sequence
- نسبة ثابتة common ratio

الهدف
سيتمكن الطلاب من كتابة المتتاليات الهندسية في الصيغتين الصريحة والارتدادية.

دليل الدرس
1. تعريف المتتالية الهندسية
2. كتابة صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

تحفيز
اطلب من الطلاب إيجاد قيمة الحد العاشر في المتتالية $16, 8, 4, 2, \ldots$ $\left(\frac{1}{32}\right)$

نشاط المصطلحات
ذكّر الطلاب بالفرق بين المتتاليات الحسابية والهندسية. اشرح لهم أن في المتتاليات الهندسية، بدلًا من أن يكون الفرق بين الحدود المتتالية ثابتًا، النسبة بينها هي الثابتة. ثم اطلب منهم وصل كل مصطلح أدناه بالمتتالية التي تصفها.

متتالية هندسية $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$
متتالية حسابية $5, 10, 20, 40, 80, \ldots$

المتتالية الهندسية
قدّم أحد المتاجر لعملائه عرضين لتجميع النقاط كما يلي:

في أي يوم سيكون عدد النقاط في العرض B أكبر من عدد النقاط في العرض A؟

إن عدد النقاط في اليوم الأول وفق العرض A هو 10 نقاط وفي اليوم الثاني هو $2 \times 10 = 20$ وفي اليوم الثالث $2 \times 20 = 40$ وهكذا يمكن الحصول على المتتالية التي حدودها

$a_1 = 10, a_2 = 20, a_3 = 40, a_4 = 80, a_5 = 160, a_6 = 320, a_7 = 640, \ldots$

أما عدد النقاط في اليوم الأول وفق العرض B هو نقطة واحدة وفي اليوم الثاني هو $3 \times 1 = 3$ وفي اليوم الثالث $3 \times 3 = 9$ وهكذا يمكن الحصول على متتالية التي حدودها

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9, a_4 = 27, a_5 = 81, a_6 = 243, a_7 = 729, \ldots$

لاحظ أنه حتى اليوم السادس يكون عدد النقاط، وفق العرض A، أكبر من عدد النقاط وفق العرض B، وابتداءً من اليوم السابع يحصل العكس. ويعود ذلك إلى دور العدد الذي تضرب فيه حدود كل متتالية (2 في المتتالية A، و 3 في المتتالية B) في نمط تطور حدود هذه المتتالية.

تعتبر كل من المتتاليتين A و B أعلاه مثالًا على **المتتالية الهندسية** وهو نوع من المتتاليات يكون فيها نسبة كل حد إلى الحد الذي يسبقه تساوي مقدارًا ثابتًا يسمّى **النسبة الثابتة** ويرمز لها بالرمز r.

ففي المتتالية A تكون النسبة الثابتة هي: $r = \frac{640}{320} = \frac{320}{160} = \ldots = \frac{20}{10} = 2$

وتكون النسبة الثابتة في المتتالية B هي: $r = \frac{729}{243} = \frac{243}{81} = \ldots = \frac{3}{1} = 3$

يمكن الحصول على الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية، عن طريق كتابة الحدّ a_n في صورة ناتج ضرب الحدّ الذي يسبقه a_{n-1} في النسبة الثابتة r.

المتتالية الهندسية
تكون المتتالية $\{a_n\}$ هندسية إذا كانت النسبة بين كل حدّ والحدّ الذي يسبقه مباشرةً ثابتة وتسمّى "النسبة الثابتة" ويُرمز لها بالرمز r، أي أن $a_{n-1} \neq 0, r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية:

$$a_n = \begin{cases} a_1 \\ r \times a_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

مثال 1 الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية

A. هل المتتالية ... ,108 ,36 ,12 ,4 متتالية هندسية؟
إذا كانت كذلك، اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية ثم أوجد الحد التالي.

B. هل المتتالية ... ,25 ,16 ,9 ,4 ,1 متتالية هندسية؟ برّر إجابتك.

الحل

A. لاحظ العلاقة بين كل حدّين متتالين في المتتالية:

$$\frac{12}{4} = \frac{36}{12} = \frac{108}{36} = 3$$

إذن، النسبة بين كل حدّ والحدّ الذي يسبقه مباشرةً ثابتة.

هذه المتتالية هي متتالية هندسية، حيث $a_1 = 4$، $r = 3$

الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية هي:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 3\,a_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}$$

لإيجاد الحدّ التالي، اضرب العدد 108 في النسبة الثابتة 3:

$$108 \times 3 = 324$$

إذن، الحدّ التالي يساوي 324

B. أوجد النسبة بين كل حدّين متتالين في المتتالية:

$$\frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{9}{4} = 2.25$$

بما أنّ النسبة ليست ثابتة، فإنّ المتتالية ليست هندسية.

حاول أن تحل التمرين 1

تتبع الأعداد في أنماط متعددة متتاليات هندسية، مثل عدد متابعي مواقع التواصل الاجتماعي أو متصفحّي موقع إلكتروني معين أو عدد الخلايا المتكاثرة في مدّة معينة وغيرها. وهذا ما يمكّننا بالتالي من توقّع هذه الأعداد في وقت ما من المستقبل.

مساعدة دراسية

لاحظ أن النسبة الثابتة r في المتتالية الهندسية تؤدي دور الفرق الثابت d في المتتاليات الحسابية. ففي حين يُضاف d إلى كل حد سابق في المتتالية الحسابية، تُضرب r في كل حد سابق في المتتالية الهندسية.

أسئلة للتفكر

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين المتتالية الهندسية والمتتالية الحسابية؟

نموذج إجابة:

الحدود في كلتا المتتاليتين أعداد حقيقية، وتربط بين الحدود المتتالية في كلتيهما علاقة ثابتة. وجه الاختلاف بين المتتاليتين هو أن الفرق بين الحدود المتتالية في المتتالية الحسابية ثابت، بينما في المتتالية الهندسية النسبة بين الحدود المتتالية ثابتة.

س: إذا كان الحد السادس في المتتالية المذكورة في الجزء (A) هو 964، هل تبقى المتتالية هندسية؟

نموذج إجابة:

كلا، لأن ذلك يخل بالنسبة التي تربط بين الحدود المتتالية فيها، إذ لن تعود هذه النسبة ثابتة.

تزايد المتتالية الهندسية وتناقصها

إذا كانت القيمة المطلقة للنسبة الثابتة أكبر من 1، فإن القيم المطلقة لحدود المتتالية تتزايد. أما إذا كانت القيمة المطلقة للنسبة الثابتة أصغر من 1 وأكبر من 0، فإن القيم المطلقة لحدود المتتالية تتناقص.

مثال 2 مواقع التواصل الاجتماعي

يتضاعف عدد متابعي أحد مواقع التواصل الاجتماعي كل أسبوع.
تمثل المتتالية a_1, a_2, a_3 ... عدد متابعي الموقع كل أسبوع.

A. هل هذه المتتالية هندسية؟ إذا كانت كذلك، أوجد صيغتها الارتدادية.

B. أوجد عدد متابعي الموقع في الأسبوع الرابع.

الحل

A. بما أن عدد المتابعين يتضاعف كل أسبوع، إذن $a_n = 2a_{n-1}$ أي أنّ $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$
نلاحظ أن النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرةً ثابتة وتساوي 2
إذن، المتتالية متتالية هندسية حدها الأول $a_1 = 5$ والنسبة الثابتة لها $r = 2$.

إذن، الصيغة الارتدادية:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 2a_{n-1} \quad , \quad n \geq 2 \end{cases}$$

B. عوّض

$$a_2 = 2a_1 = 2 \times 5 = 10$$

$$a_3 = 2a_2 = 2 \times 10 = 20$$

$$a_4 = 2a_3 = 2 \times 20 = 40$$

إذن، عدد متابعي الموقع في الأسبوع الرابع هو 40 متابعًا.

حاول أن تحل التمرين 2

سؤال للتفكر

س: هل تختلف العلاقة بين a_n و a_{n-1} إذا كانت قيمة الحد الأول 2؟

نموذج إجابة:

لا تختلف العلاقة بين a_n و a_{n-1} بتغير قيمة الحد الأول، بل تبقى

$a_n = 2a_{n-1}$

عدد سكان الأرض

في مطلع العام 2019 بلغ عدد سكان الأرض 7.67 مليار نسمة تقريبًا. بالتالي، إذا بقي عدد متابعي هذا الموقع يتضاعف بنفس النسبة فسيصبح كل سكان الأرض من متابعي هذا الموقع في أقل من سنة!

صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

نعلم الآن أن لكل متتالية هندسية صيغة ارتدادية هي:

$$\begin{cases} a_1 \\ a_n = ra_{n-1} \quad , \quad n \geq 2 \end{cases}$$

حيث r هي النسبة الثابتة لها.

إذن،

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = r\,a_1$$

$$a_3 = ra_2 = r(ra_1) = r^2 a_1$$

$$a_4 = r(a_3) = r\left(r^2 a_1\right) = r^3 a_1$$

يمكننا ملاحظة أن الحد العام هو: $a_n = r^{n-1} a_1$

صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية هي:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

حيث:

a_1: الحد الأول للمتتالية.

r: النسبة الثابتة.

n: رتبة الحدّ.

a_n: الحدّ الذي رتبته n.

مثال 3 إيجاد الحدّ العام لمتتالية هندسية

لكلّ من المتتاليتين الهندسيتين، أوجد النسبة الثابتة، والحدّ العاشر، والحد العام.

A. $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$

B. $10^{-3}, 10^{-1}, 10^{1}, 10^{3}, 10^{5}, \ldots$

الحل

A. النسبة الثابتة بين حدود المتتالية هي 2،

$$a_{10} = 3 \times 2^{10-1} = 3 \times 2^9 = 1536$$

المتتالية معرّفة بالحد العام: $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

B. بتطبيق قانون الأسس،

$$\frac{10^{-1}}{10^{-3}} = 10^{-1-(-3)}$$
$$= 10^2$$

إذن النسبة الثابتة للمتتالية هي 10^2

$$a_{10} = 10^{-3} \times \left(10^2\right)^{10-1} = 10^{-3+18} = 10^{15}$$

المتتالية معرّفة بالحد العام:

$$a_n = 10^{-3} \times \left(10^2\right)^{n-1}$$

$= 10^{-3} \times 10^{2n-2}$ خاصية قوة القوة

$= 10^{-3+2n-2}$ خاصية ضرب الأسس

$= 10^{2n-5}$ بسّط

حاول أن تحل التمرين 6

أسئلة للتفكر

س: لماذا قوة النسبة الثابتة في صيغة الحد العام $n-1$ بدلًا من n؟

نموذج إجابة:

لأن عدد الخطوات من a_1 إلى a_n هو $n-1$ وليس n.

س: ما المعلومات التي توفّرها كل من الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية على حد سواء؟

نموذج إجابة:

كلتا الصيغتين تعطي قيمة الحد الأول والنسبة الثابتة.

للطلاب سريعي الإنجاز

(مع المثال 2) دع الطلاب يتدربون على إيجاد الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية للمتتاليات الهندسية.

س: أوجد الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة لكل من المتتاليتين الهندسيتين التاليتين.

.1 $2b, 8b, 32b, 128b, \ldots$

نموذج إجابة:

الصيغة الارتدادية: $\begin{cases} a_1 = 2b \\ a_n = 4a_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}$

الصيغة الصريحة: $a_n = 2b(4)^{n-1}$

.2 $2, 8b, 32b^2, 128b^3, \ldots$

نموذج إجابة:

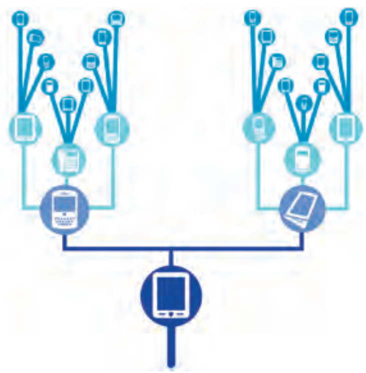
الصيغة الارتدادية: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 4ba_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}$

الصيغة الصريحة: $a_n = 2(4b)^{n-1}$

بعد التأكد من اتباع أعداد نموذج ما نمطًا هندسيًا، ومن خلال تحليل هذا النموذج، يمكننا استخدام خصائص المتتاليات الهندسية لدراسة ذلك النموذج.

مثال 4 اتصالات

أرسل أحمد إلى اثنين من أصدقائه رسالة نصية تتضمّن بعض النصائح الطبية، وكتب في آخرها: "أرسل هذه الرسالة إلى ثلاثة أشخاص آخرين لتعمّ الفائدة".
وبالفعل، أخذ كل متلقّ لهذه الرسالة يرسلها إلى ثلاثة أشخاصٍ آخرين، وهكذا...



A. أوجد الحد العام للمتتالية التي تمثّل عدد الرسائل المرسلة في كل دفعة.

B. أوجد عدد الرسائل في الدفعة الثامنة.

الحل

A. المتتالية ... ,54 ,18 ,6 ,2 هي متتالية هندسية حدها الأول هو عدد الرسائل الأولى وهو رسالتان: $a_1 = 2$ ونسبتها الثابتة هي: $r = 3$.

صيغة الحد العام $a_n = a_1 r^{n-1}$

عوّض $a_1 = 2 , r = 3$ $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

B. الحد العام $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

عوّض $n = 8$ $a_8 = 2 \times 3^{8-1}$

$= 2 \times 3^7$

$= 4\ 374$

إذن، عدد الرسائل في الدفعة الثامنة هو 4 374 رسالة.

حاول أن تحل التمرين 8

أسئلة للتفكر

س: لكتابة الصيغة الارتدادية لمتتالية هندسية، تحتاج إلى معرفة قيمة الحد الأول والنسبة الثابتة. أي من هاتين القيمتين معطاة في المسألة، وأيهما يجب استنتاجها؟
نموذج إجابة:
الحد الأول هو المعطى ويجب استنتاج النسبة الثابتة.

س: كيف يمكنك استعمال الصيغة الصريحة لمعرفة عدد الرسائل في الدفعة الثامنة؟
نموذج إجابة:
عوّض $n = 8$ في الصيغة الصريحة وبسّطها.

قد تتوافر لديك معطيات عن حدّين أو أكثر من متتالية هندسية، فهل من الممكن إيجاد حدّها العام انطلاقًا من هذه المعطيات؟ المثال التالي يوضح هذه المسألة.

مثال 5 الحد العام لمتتالية هندسية بمعلومية حدّين فيها

متتالية هندسية حدّاها الثاني والخامس هما 3 و 24 على التوالي.
أوجد الحد العام لهذه المتتالية.

الحل

صيغة الحدّ العام هي: $a_n = a_1 \times r^{n-1}$

بالتعويض بالعددين 2 و 5 عن n، فإنّ:

$$a_2 = a_1 \times r^1 = 3$$
$$a_5 = a_1 \times r^4 = 24$$

بالقسمة لدينا

$$\frac{a_1 r^4}{a_1 r^1} = \frac{24}{3}$$
$$r^3 = 8$$
$$r = 2$$

وبما أنّ $a_1 r^1 = 3$، فإنّ $a_1 = \frac{3}{2}$

الحد العام للمتتالية هو:

$$a_n = \frac{3}{2}(2)^{n-1}$$
$$= 3 \times 2^{n-2}$$

إذن الحد العام للمتتالية هو $a_n = 3(2)^{n-2}$

حاول أن تحل التمرين 10

سؤال للتفكر

س: إذا استبدلنا الحد الخامس بالحد السادس.
هل تتغير قيم حدود المتتالية كليًا؟
نموذج إجابة:
نعم، عند استبدال الحد الخامس بالحد السادس نحصل على $r^4 = 8$، أي أن $r = \pm\sqrt[4]{8}$، وهو ليس عددًا طبيعيًا. وبالتالي فإن قيم كثيرة من حدود المتتالية ستصبح أعدادًا حقيقية غير طبيعية. أما في الحالة الأولى فكل الأعداد طبيعية.

كثيرًا ما نحتاج لمعرفة عدد حدود متتالية هندسية لتحليل دلالة هذا العدد وفقًا لنموذج معين. المثال التالي يبيّن طريقة إيجاد عدد حدود متتالية هندسية.

إيجاد قيمة متغير

تربط العلاقة $a_n = a_1 r^{n-1}$ بين قيمة الحد a_n ورتبته n والحد الأول a_1 و النسبة الثابتة r، وإذا كنا نعرف ثلاثة من هذه القيم، يمكننا تحديد القيمة الرابعة.

سؤال للتفكر

س: ما القاعدة العامة التي يمكن استعمالها لحل هذا النوع من المسائل؟

نموذج إجابة:

القاعدة هي إيجاد الحد a_n بدلالة الحد a_m لأن $(m < n)$ و $n - m > 0$، ويمكن استنتاج هذه القاعدة من صيغة الحد العام:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_m = a_1 r^{m-1}$$

إذن، $$\frac{a_n}{a_m} = r^{n-m}$$

$$a_n = a_m r^{n-m}$$

متابعة

أسأل الطلاب عن الفائدة من تمثيل المتتاليات الهندسية بيانيًا.

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-17، توضّح تعريف كل المصطلحات المتعلقة بالمتتاليات الهندسية: النسبة الثابتة، الحد العام، الصيغة الارتدادية.

التمارين 18-21، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 2, 4, 6, 9, 10, 13

مثال 6 إيجاد عدد الحدود في متتالية هندسية

أوجد عدد حدود المتتالية الهندسية الآتية:

4, 12, 36, ..., 2 916

الحل

صيغة النسبة الثابتة	$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$
عوّض $n = 2$	$r = \frac{a_2}{a_1}$
عوّض $a_2 = 12$, $a_1 = 4$	$r = \frac{12}{4}$
	$r = 3$

إذن، النسبة الثابتة للمتتالية هي $r = 3$

إيجاد عدد الحدود في المتتالية الهندسية

صيغة الحد العام	$a_n = a_1 r^{n-1}$
عوّض	$2\,916 = 4\left(3^{n-1}\right)$
بسّط	$729 = 3^{n-1}$
أساس مشترك	$3^6 = 3^{n-1}$
	$6 = n - 1$
	$n = 7$

إذن، عدد حدود هذه المتتالية هو 7

حاول أن تحل التمرين 12

مراجعة سريعة 1.3

في التمارين 1-4، حدد ما إذا كانت المتتالية هندسية. إذا كانت كذلك، أوجد النسبة الثابتة لها.

1. $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots$ متتالية هندسية ؛ $r = 3$
2. $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ ليست متتالية هندسية.
3. $1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, \ldots$ ليست متتالية هندسية.
4. $\frac{1}{2}, 2, 8, 32, 128, \ldots$ متتالية هندسية ؛ $r = 4$

في التمارين 5-8، أوجد النسبة الثابتة للمتتالية الهندسية.

5. 9, 18, 36, 72, 144, ... $r = 2$
6. 6, 9, 13.5, 20.25, 30.375 ... $r = 1.5$
7. $-1, 3, -9, 27, -81, \ldots$ $r = -3$
8. 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6, 3.2, … $r = 2$

في التمرينين 9 و 10، أوجد الحد العام للمتتالية الهندسية.

9. $\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_n = 6a_{n-1} \quad , \quad n \geq 2 \end{cases}$ $a_n = 7 \times 6^{n-1}$

10. $\begin{cases} a_1 = 100 \\ a_n = \frac{4}{5} a_{n-1} \quad , \quad n \geq 2 \end{cases}$ $a_n = 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

في التمرينين 11 و 12، أوجد الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية.

11. $a_n = \frac{1}{5}(10)^{n-1}$ $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{5} \\ a_n = 10 \times a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

12. $a_n = \frac{2}{3}(5)^{n-1}$ $\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} \\ a_n = 5 \times a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

الدرس 1.3 التمارين

1. أوجد النسبة الثابتة والصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية:

$10, 20, 40, 80, \dots \quad r = 2, \begin{cases} a_1 = 10 \\ a_n = 2 \times a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

2. أوجد الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية التالية، ثم أوجد الحدّ الخامس فيها.

$80, -40, 20, -10, \dots \quad r = -\frac{1}{2}, \begin{cases} a_1 = 80 \\ a_n = \left(-\frac{1}{2}\right) \times a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}, a_5 = 5$

في التمارين 3-7، أوجد الحد العام للمتتالية الهندسية.

3. $3, 6, 12, 24, \dots \quad r = 2, \; a_n = 3 \times (2)^{n-1}$

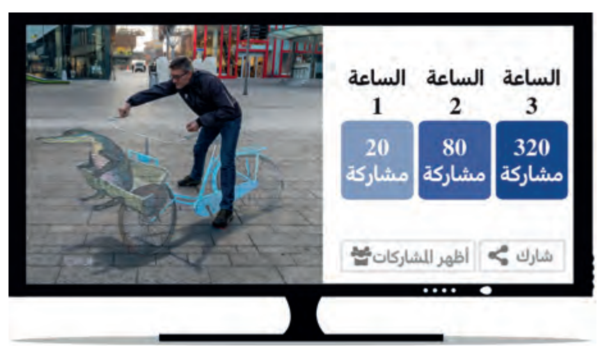
4. $5, -5, 5, -5, \dots \quad r = -1, \; a_n = 5 \times (-1)^{n-1}$

5. $4, 12, 36, 108, \dots \quad r = 3, a_n = 4 \times (3)^{n-1}$

6. $3, -6, 12, -24, \dots \quad r = -2, a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$

7. $-6, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \dots \quad r = 0.5, a_n = -6 \times (0.5)^{n-1}$

8. انتشرت على الإنترنت الخدعة البصرية المبيّنة في الصورة أدناه، وتزايد عدد مشاركات الرابط في متتالية هندسية كما هو موضّح. اكتب صيغة الحد العام لتحديد عدد مشاركات الرابط بعد مرور 8 ساعات.



9. متتالية هندسية، النسبة الثابتة لها 5 وحدّها الأول 5، أوجد الحد العام للمتتالية ثم أوجد الحد الثالث.

10. متتالية هندسية حدها الأول 3 وحدها السادس 96، أوجد الحد العام والصيغة الارتدادية لهذه المتتالية.

11. متتالية هندسية حدها الأول 7 وحدها الخامس 375 4، أوجد الحدود الثلاثة الواقعة بين هذين الحدين. اكتب جميع الإجابات الممكنة.

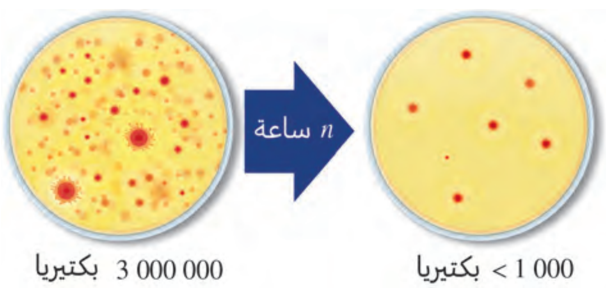
12. أوجد عدد حدود المتتالية الهندسية التالية:

$5, 10, 20, \dots\dots\dots, 640$

13. أوجد عدد حدود المتتالية الهندسية التالية:

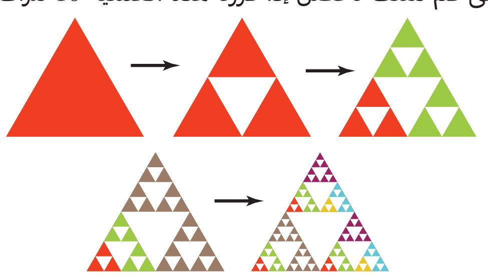
$16, 4, 1, \dots\dots\dots, \frac{1}{64}$

14. في العيّنة المبيّنة في الرسم أدناه تتناقص أعداد البكتيريا بنسبة $\frac{2}{3}$ كل ساعة. اكتب الحد العام للمتتالية الهندسية التي تمثّل التناقص في عدد البكتيريا.
بعد مرور كم ساعة يصبح عدد البكتيريا أقل من 000 1؟



15. "مثلث سايربينسكي" عبارة عن مثلث كسريات، ويُرسم بتقسيم مثلث متطابق الأضلاع إلى أربع قطع متطابقة، وقصّ القطعة المركزية لتبقى ثلاثة مثلثات أصغر منه. ثم يتم تكرار العملية على كل مثلث فنحصل على مثلثات أصغر من سابقاتها.
على كم مثلث نحصل إذا كررنا هذه العملية 10 مرات؟

$a_{10} = 19\ 683$



16. **نصف-العمر** إن نصف-العمر لمادة "ثوريوم-232" هو 14 مليار سنة.
أنشئ جدولًا يبيّن تآكل نصف-العمر لعيّنة من مادة "ثوريوم-232" من 16 جرام إلى 1 جرام.
اكتب في العمود الأول الزمن بالسنوات مبتدئًا بـ $t = 0$،
واكتب في العمود الثاني الكتلة بالجرام.
ما نوع المتتالية التي تمثّلها معطيات كل عمود؟

17. نشاط جماعي أنشئ مع زميل لك قائمة بأمثلة وتطبيقات من الحياة الواقعية تعتقدان أنها تمثّل متتاليات هندسية. برّر سبب كون أمثلتك عبارة عن متتاليات هندسية.
نموذج إجابة: استثمار مبلغ في حساب فائدة مركّبة.

أسئلة اختبار معيارية

18. صواب أم خطأ إذا كان الحدّان الأول والثاني في متتالية هندسية موجبين، يكون الحد الثالث موجبًا أيضًا. برّر إجابتك.

19. صواب أم خطأ المتتالية ... ,343 ,49 ,7 ,0 متتالية هندسية. برّر إجابتك، وماذا تستنتج؟ خطأ، لأن $\frac{a_2}{a_1}$ نسبة غير محددة.

20. اختيار من متعدد الحد العام للمتتالية الهندسية .... 360, 180, 90, 45, 22.5 هو: D

A. $a_n = \frac{1}{2}(360)^{n-1}$

B. $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1})$

C. $a_n = 360\ (a_{n-1})$

D. $a_n = 360\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

E. $a_n = 360 + \frac{1}{2}(a_{n-1})$

21. اختيار من متعدد قيمة الحد الحادي عشر في المتتالية الهندسية ... , $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$ هي: D

A. 3^4

B. 3^5

C. 3^6

D. 3^7

E. 3^8

استكشاف

22. الكتابة للتعلم ماذا تلاحظ بالنسبة لحدود متتالية هندسية حدها الأول موجب والنسبة الثابتة لها أكبر من 1؟ ماذا يحصل إذا كانت النسبة الثابتة أصغر من 1 وأكبر من 0؟ وضّح إجابتك.

23. الكتابة للتعلم اكتب متتالية هندسية لها أربعة حدود على الأقل، ثم اكتب صيغة الحد العام وصيغتها الارتدادية، ثم وضّح كيف يمكنك التحقق من أنها متتالية هندسية.

توسيع الأفكار

24. تطبيق صيغة الحد العام والصيغة الارتدادية بلغ عدد زائري مهرجان الطعام المحلي السنوي 250 1 زائرًا في السنة الأولى، ثمّ أخذ عددهم يتناقص 20% سنويًا ابتداءً من السنة الثانية.

a. أوجد أعداد زوار المهرجان في أول خمس سنوات.

b. إذا استمرت إقامة هذا المهرجان، كم سيبلغ عدد زواره في السنة العاشرة؟

25. لتكن المتتاليتان $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ المعرفتان كما يلي:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3\ ,\ n \geq 2 \end{cases}$$

و $b_n = a_n + 3$ لكل $n \geq 1$

a. هل المتتالية $\{a_n\}$ حسابية؟ هندسية؟ برّر إجابتك.

b. أوجد الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية $\{b_n\}$.

c. أثبت أن $\{b_n\}$ متتالية هندسية، ثم أوجد حدّها العام.

d. استنتج الحدّ العام للمتتالية $\{a_n\}$.

إجابات أسئلة التمارين 1.3

8. $\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_n = 4 \times a_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}$

$a_n = 20 \times 4^{n-1}$

$a_8 = 20 \times 4^7 = 327\ 680$

9. $a_n = 5 \times 5^{n-1}$

$a_3 = 5 \times 5^2 = 125$

10. $a_6 = a_1 \times r^{6-1}$

$96 = 3 \times r^5$

$r = 2$

$a_n = 3 \times 2^{n-1}$

$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}$

11. $a_5 = a_1 \times r^{5-1}$

$4\ 375 = 7 \times r^4$

$r = \pm 5$

$r = 5$

$a_2 = 5 \times a_1 = 5 \times 7 = 35$

$a_3 = 5 \times a_2 = 5 \times 35 = 175$

$a_4 = 5 \times a_3 = 5 \times 175 = 875$

أو $r = -5$

$a_2 = -5 \times a_1 = -5 \times 7 = -35$

$a_3 = -5 \times a_2 = -5 \times (-35) = 175$

$a_4 = -5 \times a_3 = -5 \times 175 = -875$

12. $r = 2$

$640 = 5 \times 2^{n-1}$

$128 = 2^{n-1}$

$n = 8$

13. $r = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{64} = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\frac{1}{1\ 024} = \frac{1}{4}^{n-1}$

$n = 6$

14. $a_n = 3\ 000\ 000 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$a_7 > 1\ 000,\ a_8 < 1\ 000$

إذن، بعد مرور 8 ساعات يصبح عدد البكتيريا أقل من 1 000

.16

كتلة بالجرام	زمن سنة
16	0
8	14
4	28
2	42
1	56

العمود الأول يمثل الزمن بمليار السنين، وهو متتالية حسابية .

العمود الثاني يمثل الكتلة بالجرامات، وهو متتالية هندسية.

.18 صواب، إذا كان الحدان الأول والثاني موجبين، تكون النسبة الثابتة موجبة. وبما أن الحد الثالث هو ناتج ضرب الحد الثاني في النسبة الثابتة، فهو إذن عدد موجب.

.22 $r > 1$: تكون المتتالية متزايدة وقيم حدودها تتزايد.

$0 < r < 1$: تكون المتتالية متناقصة وقيم حدودها تتناقص.

23. $a_1 = -6,\ a_2 = -3,\ a_3 = -\frac{3}{2},\ a_4 = -\frac{3}{4}$

$\begin{cases} a_1 = -6 \\ a_n = \frac{1}{2} \times a_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}$

$a_n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

يمكن التحقق من أنها متتالية هندسية إذا كانت نسبة كل حد إلى الحد السابق له مباشرة مقدارًا ثابتًا.

24. a. $\begin{cases} a_1 = 1\ 250 \\ a_n = (0.8) \times a_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}$

$a_1 = 1\ 250$

$a_2 = 1\ 000$

$a_3 = 800$

$a_4 = 640$

$a_5 = 512$

b. $a\ 10 \approx 168$

25. $a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_3 = 13,\ a_4 = 29,\ a_5 = 61$

.a المتتالية a_n ليست حسابية لأن الفرق بين الحدود المتتالية فيها ليس ثابتًا.

المتتالية a_n ليست هندسية لأن النسبة بين الحدود المتتالية فيها ليست ثابتة.

.b الحدود الثلاثة الأولى هي: $b_1 = 4,\ b_2 = 8,\ b_3 = 16$

.c المتتالية b_n متتالية هندسية لأن النسبة بين الحدود المتتالية فيها ثابتة وتساوي 2؛ $b_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$

.d الحد العام للمتتالية a_n هو $a_n = 2^{n+1} - 3$

1.4 رمز المجموع والمتسلسلات Sigma Notation and Series

ما ستتعلّمه

- رمز المجموع
- المتسلسلة الحسابية
- المتسلسلة الهندسية
- المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

... ولماذا

كثيرًا ما تكون بعض المسائل العلمية، لا سيما تلك التي تتعلّق بالتكاثر في علوم الأحياء، مرتبطة بجمع حدود المتتاليات.

معايير الدرس

11A.1.5
11A.1.6
11A.1.7
11A.1.8
11A.1.9

المصطلحات

- رمز المجموع sigma notation
- متسلسلة series
- متسلسلة منتهية finite series
- متسلسلة غير منتهية infinite series
- مجموع جزئي partial sum
- متسلسلة حسابية arithmetic series
- متسلسلة هندسية geometric series
- متسلسلة متقاربة convergent series
- متسلسلة متباعدة divergent series
- متسلسلة هندسية غير منتهية infinite geometric series

رمز المجموع

يتم تصميم مسرح على نحو يكون فيه عدد المقاعد في الصف الأول a_1 ومن ثمّ يزيد عدد المقاعد في كل صف لاحق مقعدين اثنين. وهكذا يكون عدد المقاعد في الصف الثاني هو $a_2 = a_1 + 2$ وفي الثالث $a_3 = a_2 + 2$ ... إلخ.

تشكل أعداد المقاعد في كل صف من صفوف المسرح متتالية، وإذا افترضنا أن عدد الصفوف في المسرح هو n، يكون عدد المقاعد الكلي في هذا المسرح هو مجموع حدود المتتالية a_1 و a_2 و ... و a_n

ويُعبر عن مجموع حدود المتتالية $\{a_n\}$ بالرموز في الصورة $\sum_{k=1}^{n} a_k$ حيث ($\sum$ ويُقرأ سيجما) هو **رمز المجموع**.

رمز المجموع

يُرمز لمجموع حدود المتتالية $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ بالرمز:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

ويُقرأ كما يلي:

مجموع الحدود a_k من $k = 1$ إلى $k = n$، حيث k هو متغير الجمع.

مثال 1 استعمال الرمز $\sum$

أوجد قيمة كل مما يلي:

A. $\sum_{i=1}^{4} (2i - 6)$

B. $\sum_{k=3}^{6} (2k^2 + 1)$

C. $\sum_{k=1}^{4} k3^k$

الحل

A. أوجد المجموع بكتابة كل حدود المتتالية.

$$a_1 = 2(1) - 6 = -4 \qquad a_3 = 2(3) - 6 = 0$$

$$a_2 = 2(2) - 6 = -2 \qquad a_4 = 2(4) - 6 = 2$$

$$\sum_{i=1}^{4} (2i - 6) = -4 - 2 + 0 + 2 = -4$$

إذن، $\sum_{i=1}^{4} (2i - 6) = -4$

(تابع)

سيجما

إن أصل شكل رمز المجموع $\sum$ هو حرف «الشين» الفينيقي الذي كان يكتب في صورة W. وفي القرن الرابع قبل الميلاد، استعمل الرمز $\sum$ في المخطوطات اليونانية وكان أكثر شبهًا بالحرف C، ثم شاع استعماله في القرون الوسطى وكان يُطلق عليه اسم «سيجما القمر» نظرًا لشكله الذي يشبه الهلال. ثم عاد ليُكتب أحيانًا مع ثلاثة خطوط متوازية صغيرة تمر من خلاله، إلى أن اتخذ شكله الحالي تدريجيًا.

خصائص رمز المجموع

لرمز المجموع خصائص تتناسب مع العمليّات الجبريّة، وينشأ عن ذلك سلاسة في استعماله في معالجة المسائل المختلفة.

1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$
2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$
3. $\sum_{k=1}^{n}Ca_k=C\times\sum_{k=1}^{n}a_k$, حيث C عدد ثابت
4. $\sum_{k=1}^{n}C=nC$, حيث C عدد ثابت

الهدف

سيتمكن الطلاب من استعمال رمز المجموع (Σ)، وإيجاد مجموع قيم بعضٍ من حدود متتالية حسابية أو هندسية. كذلك سيتمكنون من إيجاد مجموع قيم كل حدود بعض المتتاليات الهندسية.

إرشاد

حدود المتتالية قد تُسمى أحيانًا حدود المتسلسلة التي تعرّفها تلك المتتالية.

دليل الدرس

1. شرح مفهوم رمز المجموع والمتسلسلة الحسابية
2. المتسلسلة الهندسية (المنتهية وغير المنتهية)

تحفيز

دع الطلاب يخمنون مجموع حدود المتتالية

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

نشاط المصطلحات

اطلب من الطلاب أن يحاولوا فهم المصطلح "متسلسلة" وأن يربطوا بينه وبين المصطلح "متتالية".

أسئلة للتفكر

س: متى لا يكون استعمال رمز المجموع ممكنًا؟

نموذج إجابة:

عندما لا تربط بين الحدود التي يُراد جمعها قاعدة ثابتة.

س: هل يمكن إيجاد مجموع عدد غير معلوم من الحدود؟

نموذج إجابة:

كلا، لأن إيجاد مجموع الحدود يتطلب جمعها كلها، وكتابة صيغة الحد العام، ثم إجراء عملية الجمع، وهذا غير ممكن إلا بمعرفة عدد الحدود المراد جمعها.

B. رمز المجموع $\sum_{k=3}^{6}\left(2k^2+1\right)$

عوّض $=\left(2(3)^2+1\right)+\left(2(4)^2+1\right)+\left(2(5)^2+1\right)+\left(2(6)^2+1\right)$

بسّط $=19+33+51+73$

$=176$

إذن، $\sum_{k=3}^{6}\left(2k^2+1\right)=176$

C. رمز المجموع $\sum_{k=1}^{4}k3^k$

عوّض $=\left(1\times3^1\right)+\left(2\times3^2\right)+\left(3\times3^3\right)+\left(4\times3^4\right)$

بسّط $=3+18+81+324$

$=426$

إذن، $\sum_{k=1}^{4}k3^k=426$

حاول أن تحل التمرين 1

المتسلسلة هي مجموع لحدود متتالية ما ويمكننا استخدام رمز المجموع للتعبير عنها.

فإذا كانت $\{a_k\}$ متتالية فإن $a_1+a_2+\ldots+a_n$ تمثّل متسلسلة تنتج عن جمع حدود هذه المتتالية. وإذا كانت المتتالية منتهية تكون المتسلسلة المرتبطة بها والناتجة عن جمع حدودها **متسلسلة منتهية** ويعبر عنها بالرمز $\sum_{k=1}^{n}a_k$، أما إذا كانت المتتالية غير منتهية فإن مجموع كل حدودها يمكن أن يكون معرّفًا ويسمى **متسلسلة غير منتهية** ويعبر عنها بالرمز $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$

ويمكن إيجاد **المجموع الجزئي** لمتسلسلة غير منتهية بجمع أول n حد من حدود المتتالية ويرمز له بالرمز $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

المتسلسلة الحسابية


Karl Friedrich Gauß.

إحدى أشهر القصص التي تحكى في الرياضيات، هي تلك التي تتعلق بعالم الرياضيات الألماني "كارل فريدريك جاوس" (Gauss) (1777-1855) الذي ظهرت عنده مظاهر النبوغ في سنّ مبكر. في هذه القصة، يطلب المعلم من طلابه جمع كل الأعداد الطبيعية من 1 إلى 100، وبينما كان الطلاب قد بدأوا لِتوّهم بكتابة المسألة، توجّه "جاوس" إلى معلّمه وهو يحمل ورقة كتب عليها الحل ووضعها على مكتب معلمه قائلًا بأدب وثقة: "ها هي الإجابة".

بدأ المعلم مراجعة إجابات الطلاب، وكانت كلها خطأ، ثم نظر في النهاية إلى ورقة "جاوس" الموضوعة على المكتب وكانت المفاجأة أن العدد المكتوب فيها كان 5 050، وهو الإجابة الصحيحة.

نشاط استكشافي 1 نبوغ "جاوس" "Gauss"

التحدي في هذا التحقق هو إيجاد مجموع الأعداد الطبيعية من 1 إلى 100، بدون استعمال الآلة الحاسبة.

1. اكتب على ورقة مقدار الجمع $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$

2. اكتب تحته مباشرة نفس مقدار الجمع لكن بالترتيب المعكوس
$100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$

3. اجمع كل عددين مصطفين رأسيًا $(1 + 100)$ ، $(2 + 99)$،...، وتحقق من أنك تحصل على نفس القيمة مئة مرة.

4. أوجد ناتج ضرب هذه القيمة في مئة.

5. اشرح لماذا يكون نصف القيمة التي حصلنا عليها في الفرع (4) هو الإجابة الصحيحة. هل يمكنك أن تحدّد قيمة هذا النصف بدون آلة حاسبة؟

إذا كانت هذه القصة صحيحة، فإن "جاوس" قد فطن إلى الحقيقة الرياضية التي كانت معروفة قبل ذلك الزمن: إذا كتبنا حدود متتالية حسابية على سطر، وكتبنا تحته نفس الحدود بترتيب معكوس، فإن جمع كل حدين متناظرين رأسيًا يعطي نفس الناتج.

إذن، مجموع الحدود يساوي نصف هذا الناتج مضروبًا في عددها.

المتسلسلة الحسابية هي جمع لحدود متتالية حسابية $\{a_n\}$: بحيث يكون مجموعها الجزئي هو:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية

إذا كانت المتسلسلة الحسابية معرّفة من خلال المتتالية الحسابية $\{a_n\}$ فإن مجموعها الجزئي $\sum_{i=1}^{n} a_i$ يُعطى بالصيغة:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

أو $$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$$

حيث

n: عدد حدود المتسلسلة

d: الفرق الثابت

a_1: الحد الأول

a_n: الحد الأخير

للطلاب الذين يعانون من صعوبات

(مع المثال 1) قد يجد بعض الطلاب صعوبة في فهم رمز المجموع وكيفية استعماله. دعهم يتدربون على ذلك من خلال كتابة مجاميع باستعمال الرمز (Σ).

اكتب مجموع كل من المتتاليات التالية حتى الحد n.

1. $a_1 = 5, d = 3, n = 5$ $\left[\sum_{i=1}^{5} (3i + 2)\right]$

2. $a_1 = 8, d = -2, n = 13$ $\left[\sum_{i=1}^{13} (10 - 2i)\right]$

3. $a_1 = 15, d = 4, n = 10$ $\left[\sum_{i=1}^{10} (11 + 4i)\right]$

توسيع الاستكشاف

دع الطلاب يعيدون كتابة المتتالية $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$ والمتتالية $100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$ باستعمال رمز المجموع. ثم ناقشهم في الخصائص التالية:

1. $\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$

2. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

وعلاقة ذلك بعبقرية عالم الرياضيات "جاوس".

البرهان

يمكننا بناء المتتالية بالتقدم ابتداءً من الحد a_1 وزيادة d في كل مرة، كما باستطاعتنا بناؤها بالتراجع انطلاقًا من الحدّ a_n ونقصان d في كل مرة.

هكذا نحصل على صيغتين للمجموع الذي نحن بصدد إيجاده:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-1)d)$$

وعند الجمع رأسيًا، نحصل على:

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)$$

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k = n(a_1 + a_n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

وبتعويض $a_1 + (n-1)d$ عن a_n، نحصل على الصيغة البديلة:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

يمكن إيجاد مجموع متسلسلة حسابية باستعمال إحدى هاتين الصيغتين.

مثال 2 جمع حدود متتالية حسابية

يتألف الصف الأمامي من القسم الجانبي في أحد الملاعب الرياضية من 8 مقاعد. وكل صف من الصفوف التي تليه يتألف من مقعدين أكثر من الصف الذي يسبقه مباشرةً. إذا كان الصف الأخير يتألف من 24 مقعدًا، فما عدد المقاعد التي يتألف منها هذا القسم؟

الحل

أعداد المقاعد في الصفوف تشكّل متتالية حسابية، حيث:

$$a_1 = 8 \ , \ a_n = 24 \ , \ d = 2$$

لإيجاد عدد المقاعد نجد عدد الصفوف n والتي تمثّل عدد حدود المتتالية،

وذلك بالتعويض في $a_n = a_1 + (n - 1)d$ نجد أنّ:

$$24 = 8 + (n-1)(2)$$
$$16 = (n-1)(2)$$
$$8 = n - 1$$
$$n = 9$$

(تابع)

أسئلة للتفكر

س: ما المعلومات المعطاة التي تتيح لك إيجاد عدد المقاعد؟

نموذج إجابة:

عدد المقاعد في الصف الأول a_1، وعدد المقاعد في الصف الأخير a_n، والفرق الثابت d، حيث يمكن إيجاد عدد الصفوف باستعمال هذه المعطيات، ثم إيجاد عدد المقاعد.

س: ما المعلومات التي تحتاج إلى معرفتها لإيجاد عدد المقاعد؟

نموذج إجابة:

تحتاج إلى معرفة عدد المقاعد في الصف الأول وعددها في الصف الأخير والفرق الثابت، أو إلى عدد المقاعد في الصف الأول والفرق الثابت وعدد الصفوف.

طبّق صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

عوّض $S_9 = \frac{9}{2}(8 + 24)$

$S_9 = 144$

إذن، العدد الإجمالي للمقاعد في القسم يساوي 144 مقعدًا.

حاول أن تحل التمرين 10

يمكن إيجاد عدد حدود متسلسلة حسابية إذا تجاوز مجموعها قيمة معطاة.

مثال 3 إيجاد رتبة الحدّ في متسلسلة حسابية

إذا كان: $\sum_{k=1}^{n}(4k+4)$ المجموع الجزئي لمتسلسلة حسابية، أوجد رتبة الحدّ الذي عنده يكون قد تجاوز مجموع حدودها العدد 465

الحل

أوجد الحدّين a_1 و a_2 بتعويض $k = 1$ و $k = 2$ على التوالي في الحدّ العام للمتسلسلة $4k + 4$

$a_1 = 4(1) + 4 = 8$

$a_2 = 4(2) + 4 = 12$

الفرق الثابت : $d = 12 - 8 = 4$

إذن، $d = 4$

صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

عوّض $d = 4, a_1 = 8, S_n = 465$ $465 = \frac{n}{2}[2 \times 8 + (n-1)4]$

بسّط $930 = n[16 + 4n - 4]$

اجمع $930 = n[12 + 4n]$

بسّط $4n^2 + 12n - 930 = 0$

أوجد مميّز المعادلة التربيعية $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 15\,024$

أوجد حلّي المعادلة $n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

بالتعويض $n_1 \approx -16.8$ و $n_2 \approx 13.8$

بما أنّ قيمة n صحيحة وموجبة، فإذن عدد الحدود 14

حاول أن تحل التمرين 15

سؤال للتفكر

س: كيف تعرف أن $\sum_{k=1}^{n}(4k+4)$ متسلسلة حسابية؟

نموذج إجابة:

المتتالية $a_n = 4n + 4$ متتالية حسابية لأن

$a_{n+1} - a_n = 4(n+1) + 4 - (4n+4) = 4$

وهي قيمة ثابتة.

المتسلسلة الهندسية

المتسلسلة الهندسية هي جمع حدود متتالية هندسية $\{a_n\}$: بحيث يكون مجموعها الجزئي هو:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

نشاط استكشافي 2 إيجاد ناتج الجمع لحدود متتالية هندسية

هدفك في هذا النشاط الاستكشافي هو إيجاد مجموع حدود المتتالية الهندسية: $1, 3, 9, 27, 81, 243$، دون استعمال الآلة الحاسبة.

1. اكتب المجموع $S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243$ بدون حساب الناتج.

2. اكتب المجموع السابق مضروبًا في النسبة الثابتة 3

3. اطرح $3S - S$ من خلال طرح الحدود المتساوية.

4. أوجد قيمة S. هل يمكنك استنتاج قاعدة عامة؟

لقد كان بإمكاننا أن نجد المجموع في الاستكشاف السابق بطريقةٍ اعتياديّة، أي بطريقةٍ متدرّجة، غير أنّنا نلاحظ أنّ ضرب مجموع حدود المتتالية في النسبة الثابتة ينتج عنه جمع آخر يشبه المجموع الأصلي، يفترق عنه بحدٍّ او حدّين، وهذا ما يجعلنا قادرين على إيجاد قاعدة ثابتة لهذا الجمع تمكّننا من الحصول على قيمته مهما ازداد عدد الحدود الّتي نجمعها.

صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية

إذا كانت المتسلسلة الهندسية معرّفة من خلال المتتالية الهندسية $\{a_n\}$ فإن مجموعها الجزئي $\sum_{i=1}^{n} a_i$ يُعطى بالصيغة:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

حيث a_1 الحد الأول للمتتالية الهندسية و r النسبة الثابتة للمتتالية الهندسية $r \neq 1$، و n عدد حدود المتسلسلة الهندسية.

يمكن أيضًا كتابة صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية كما يلي:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

إرشاد

إذا كانت $r = 1$، فإنّ جميع حدود المتتالية الهندسية تكون مساوية لحدّها الأول a_1، وبالتالي فإنّ مجموع أول n حد من حدود المتتالية يكون $S_n = na_1$.

البرهان

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$r S_n = r a_1 + r a_2 + \ldots + r a_n$$
$$= a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1}$$
$$r S_n - S_n = (a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$
$$= a_{n+1} - a_1$$
$$S_n(r-1) = a_1 r^n - a_1$$
$$S_n = a_1 \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$
$$= a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}, r \neq 1$$

مثال 4 مجموع حدود متتالية هندسية

أوجد مجموع حدود المتتالية الهندسية: $4, \frac{-4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{-4}{27}, \ldots, 4\left(\frac{-1}{3}\right)^{10}$

الحل

يمكننا ملاحظة أن $a_1 = 4$ وأن $r = \frac{-1}{3}$

صيغة الحدّ العام	$a_n = a_1 \times r^{n-1}$
عوّض $r = -\frac{1}{3}$	$a_n = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
بما أنّ الحدّ الذي رتبته n هو	$4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
فإذن،	$4\left(-\frac{1}{3}\right)^{10} = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
وبالتالي	$10 = n - 1$
مما يعني أنّ	$n = 11$

بتطبيق صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية، نجد أن:

$$S_{11} = \frac{4\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{11}\right)}{1 - \left(\frac{-1}{3}\right)} \approx 3.000016935$$

حاول أن تحل التمرين 17

سؤال للتفكر

نلاحظ أن S_n عدد موجب. هل ثمة عدد m بحيث يكون S_n عددًا سالبًا؟

نموذج إجابة:

كلا، لاحظ أن

$$S_m = \frac{4\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^m\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}, m \geq 1$$

بما أن القيمة المطلقة للعدد $\left(-\frac{1}{3}\right)^m$ أصغر من واحد وأكبر من صفر، فإن S_m عدد موجب لكل $m \geq 1$.

يمكننا استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية لإيجاد قيمة متغير فيها.

مثال 5 إيجاد قيمة متغير في متسلسلة هندسية

A. إذا كان S_n المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية معرّفة من خلال المتتالية $\{a_n\}$ و $S_{10} = 73\ 810$ والنسبة الثابتة لها $r = -3$، أوجد الحد الأول للمتتالية a_1.

B. متسلسلة هندسية منتهية مجموع حدودها 699 050 وحدّها الأول 2 وحدّها الأخير 524 288، أوجد النسبة الثابتة لها.

الحل

A. صيغة المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

عوّض $r = -3$, $n = 10$ $S_{10} = \dfrac{a_1\left(1-(-3)^{10}\right)}{1-(-3)}$

احسب $73\ 810 = \dfrac{a_1(1-59\ 049)}{4}$

بسّط $73\ 810 = -14\ 762\ a_1$

حل المعادلة $a_1 = -5$

إذن، الحد الأول للمتسلسلة الهندسية $a_1 = -5$

B. صيغة المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية $S_n = \dfrac{a_1 - a_n r}{1-r}$

عوّض $n = 10$ $S_{10} = \dfrac{a_1 - a_{10} r}{1-r}$

عوّض $S_{10} = 699\ 050$, $a_{10} = 524\ 288$, $a_1 = 2$ $699\ 050 = \dfrac{2 - 524\ 288 \times r}{1-r}$

بالقسمة على العدد 2 $349\ 525 = \dfrac{1 - 262\ 144 \times r}{1-r}$

بالضرب التبادلي $349\ 525(1-r) = 1 - 262\ 144r$

بسّط $349\ 524 = 87\ 381r$

بالقسمة $r = \dfrac{349\ 524}{87\ 381}$

حل المعادلة $r = 4$

إذن، النسبة الثابتة $r = 4$

حاول أن تحل التمرين 24

سؤال للتفكر

س: هل تحتاج إلى معرفة مجموع الحدود العشرة الأولى لإيجاد النسبة الثابتة؟

نموذج إجابة:

كلا، لكننا في هذه الحالة سنكون مضطرين إلى إيجاد النسبة الثابتة باستعمال الحد الأول $a_1 = 2$ والحد العاشر $a_{10} = 524\ 288$ وذلك باستعمال القاعدة

$$a_{10} = a_1 r^9$$

$$r^9 = \frac{a_{10}}{a_1}$$

$$r = \sqrt[9]{\frac{a_{10}}{a_1}} = \sqrt[9]{\frac{524\ 288}{2}}$$

$$r = \sqrt[9]{262\ 144}$$

وسنكون مضطرين كذلك إلى استعمال الحاسبة لمعرفة أن $r = 4$

أما بمعرفة مجموع الحدود العشرة، فإن المعادلة التي تعطي قيمة r تصبح جبرية بدلاً من أن تكون معادلة أسيّة نحتاج إلى استعمال الحاسبة لحلها.

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

إذا أردنا إيجاد مجموع أول n حد من متسلسلة هندسية حدها الأول $a_1 = 3$ والنسبة الثابتة لها $r = \frac{2}{3}$

نستعمل صيغة المجموع الجزئي $\sum_{k=1}^{n} 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 3 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}$

نلاحظ أنه كلما كبرت قيمة n، اقتربت القيمة $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ من الصفر وبالتالي يقترب المجموع من العدد $3 \times \frac{1-0}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 9$

هذه الحقيقة نعبّر عنها كما يلي: $\sum_{k=1}^{\infty} 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 9$

إذا كان المجموع $\sum_{k=1}^{n} a_k$ يقترب من قيمة S كلما كبرت قيمة n، فإننا نعبّر عن القيمة S بما يلي:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ونسميها مجموع متسلسلة غير منتهية، وتكون **المتسلسلة متقاربة**.

وفي غير تلك الحالة تكون **المتسلسلة متباعدة**.

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد صيغة مجموع **متسلسة هندسية غير منتهية** حدها الأول a_1 ونسبتها الثابتة r كما يلي:

صيغة المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية هي

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

عندما تكون $|r| < 1$، تقترب قيمة r^n من الصفر كلما كبرت قيمة n.

ويكون لدينا إذن:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-r}$$

في هذه الحالة تكون المتسلسلة الهندسية متقاربة.

عندما تكون $|r| > 1$، فإن قيمة $|r^n|$ تكبر إلى ما لا نهاية

في هذه الحالة تكون المتسلسلة الهندسية متباعدة.

مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

تكون المتسلسلة الهندسية $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}, a \neq 0$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت $|r| < 1$.

ويكون مجموعها

$$S = \frac{a}{1-r}$$

a : الحد الأول

r : النسبة الثابتة

سؤال للتفكر

س: كيف يمكننا أن نثبت تجريبيًا أن $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$

نموذج إجابة:

يكفي أن نأخذ ورقة بيضاء، ولنفترض أن مساحتها تساوي 1، ونقسمها إلى نصفين متساويين ونكتب على أحدهما $\frac{1}{2}$، ثم نقسم النصف الآخر إلى نصفين متساويين ونكتب على أحدهما $\frac{1}{4}$، ونتابع هذه العملية عدة مرات.

نقوم، بعد ذلك، بتجميع هذه القصاصات لإعادة تكوين الورقة الأصلية قبل تقسيمها، وعندئذ سنلاحظ أن الورقة (التي مساحتها تساوي 1) تساوي مجموع كل أجزائها، أي أن

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

وبالتالي فإن $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$

مثال 6 إيجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية متقاربة

لكل مما يلي بيّن ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة، ثم أوجد مجموعها إذا كانت متقاربة.

A. $\sum_{k=1}^{\infty} 3(0.75)^{k-1}$

B. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{5}\right)^{k-1}$

C. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k}$

الحل

A. هذه المتسلسلة غير المنتهية هي مجموع حدود متتالية هندسية حدّها الأول $a = 3$ ونسبتها الثابتة $r = 0.75$

بما أنّ $|r| = 0.75 < 1$، فإن المتسلسلة هي متسلسلة هندسية غير منتهية ومتقاربة، إذن:

مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a}{1-r}$

عوّض $\sum_{k=1}^{\infty} 3(0.75)^{k-1} = \frac{3}{1-0.75}$

بسّط $= 12$

إذن، مجموع هذه المتسلسلة يساوي 12

B. هذه المتسلسلة غير المنتهية هي مجموع حدود متتالية هندسية حدّها الأول $a_1 = 1$ ونسبتها الثابتة $r = \frac{-4}{5}$

بما أنّ $|r| = \left|\frac{-4}{5}\right| = \frac{4}{5} < 1$ ، فإن المتسلسلة هي متسلسلة هندسية غير منتهية ومتقاربة. إذن،

مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a}{1-r}$

عوّض $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{5}\right)^{k-1} = \frac{1}{1-\left(\frac{-4}{5}\right)}$

بسّط $= \frac{5}{9}$

إذن، مجموع هذه المتسلسلة يساوي $\frac{5}{9}$

(تابع)

C. هذه المتسلسلة غير المنتهية هي مجموع حدود متتالية هندسية حدّها الأول $a_1 = \frac{\pi}{2}$ ونسبتها الثابتة $r = \frac{\pi}{2}$

بما أنّ $|r| = \frac{\pi}{2} > 1$. إذن المتسلسلة متباعدة.

إذن، مجموع هذه المتسلسلة يكبر إلى المالانهاية.

حاول أن تحل التمرين 27

يمكننا استعمال المتسلسلات الهندسية غير المنتهية لإعادة كتابة الأعداد العشرية الدورية في صورة كسور اعتيادية.

مثال 7 كتابة كسر عشري دوري في صورة كسر اعتيادي

A. **اكتب ... $0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001$ في صورة كسر اعتيادي.**

B. **اكتب ...0.583333 في صورة كسر اعتيادي.**

C. **اكتب ...0.234234234 في صورة كسر اعتيادي.**

الحل

A. يشكّل المجموع متسلسلة هندسية لامتناهية حدها الأول $a = 0.1$ والنسبة الثابتة فيها هي $r = 0.1 = \frac{1}{10} < 1$.

بما أن $|r| = \frac{1}{10}$، نستعمل صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}$$

B. نعيد كتابة هذا العدد كما يلي:

$$0.58333\ldots = 0.58 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + 0.000003 + \ldots.$$

$$= \frac{58}{100} + (0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \ldots)$$

المجموع بين القوسين هو لحدود متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الأول $a = 0.003$ والنسبة الثابتة لها $r = \frac{0.0003}{0.003} = \frac{1}{10}$

بما أن $|r| = \frac{1}{10} < 1$ فإننا نستعمل صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة:

صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة $S = \frac{a}{1-r}$

(تابع)

إرشاد

يمكن كتابة الكسر العشري الدوري ...0.234234 بطريقة النقاط $0.\dot{2}3\dot{4}$ أو بالشرطة $0.\overline{234}$ حيث يتم وضع شرطة للدلالة على الأرقام الدّورية.

سؤال للتفكر

س: هل يمكنك إيجاد الكسر الاعتيادي المكافئ للعدد الكسري ... 2.342342342؟

نموذج إجابة:

نعم، هذا العدد يساوي ... 10×0.2342342342

أي أنه يساوي $\frac{260}{111} = 10 \times \frac{26}{111}$

متابعة

أسأل الطلاب ما إذا كانت هناك متسلسلة حسابية غير منتهية متقاربة؟

نموذج إجابة:

فقط عندما تكون قيم كل حدودها 0، أي أن الحد الأول 0 والفرق الثابت 0 أيضًا.

ملاحظات على التمارين

التمارين 8-15، تبيّن وتشرح المفاهيم المتعلقة بالمتسلسلات الحسابية.

التمارين من 16-34، تبيّن وتشرح المفاهيم المتعلقة بالمتسلسلات الهندسية، والمتسلسلات الهندسية غير المنتهية المتقاربة وما يتعلق بها من إيجاد صورة الكسر الاعتيادي لعدد معين.

التمارين 42-45، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 1, 8, 10, 15, 19, 22, 29, 34

عوّض $a = 0.003$ ، $r = \frac{1}{10}$ $\quad S = \frac{0.003}{1 - \frac{1}{10}}$

احسب $\quad S = \frac{0.003 \times 10}{9}$

بسّط $\quad = \frac{1}{300}$

إذن، الكسر الاعتيادي للعدد ... 0.58333 يساوي: $\frac{58}{100} + \frac{1}{300} = \frac{175}{300} = \frac{7}{12}$

أي $0.58333\ ... = \frac{7}{12}$

C. يمكن كتابة هذا العدد في صورة مقدار جمع:

$$0.234 + 0.000234 + 0.000000234 + ...$$

$$= \frac{234}{1\,000} + \frac{234}{1\,000^2} + \frac{234}{1\,000^3} + ...$$

$$= \frac{234}{1\,000}\left(1 + \frac{1}{1\,000} + \frac{1}{1\,000^2} ...\right)$$

يشكّل المجموع بين القوسين متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الأول $a = 1$
والنسبة الثابتة لها $r = \frac{1}{1\,000}$

بما أن $|r| = \frac{1}{1\,000}$ فإننا نستعمل صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة:

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

$$= \frac{234}{1\,000}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1\,000}}\right) = \frac{234}{1\,000} \times \frac{1\,000}{999} = \frac{234}{999} = \frac{26}{111}$$

إذن، $0.234234234... = \frac{26}{111}$

حاول أن تحل التمرين 34

مراجعة سريعة 1.4

في التمارين 1-5، اكتب المجموع باستعمال رمز المجموع، على افتراض أن النمط يستمر بنفس الطريقة.

1. $-7 - 1 + 5 + 11 + ... + 53 + (6n - 13)$ $\quad \sum_{i=1}^{n} 6i - 13$

2. $2 + 5 + 8 + 11 + ... + 29 + (3n - 1)$ $\quad \sum_{i=1}^{n} 3i - 1$

3. $1 + 4 + 9 + ... + (n + 1)^2$ $\quad \sum_{i=0}^{n} (i + 1)^2$

4. $1 + 8 + 27 + ... + (n + 1)^3$ $\quad \sum_{i=0}^{n} (i + 1)^3$

5. $6 - 12 + 24 - 48 + ... + 6(-2)^{n-1}$ $\quad \sum_{i=1}^{n} 6(-2)^{i-1}$

في التمارين 6-8، أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية.

6. $-7, -3, 1, 5, 9, 13$ $\quad S_6 = 18$

7. $-8, -1, 6, 13, 20, 27$ $\quad S_6 = 57$

8. $8, 3, -2, -7, -12, -17$ $\quad S_6 = -27$

في التمرينين 9 و 10، أوجد مجموع حدود المتتالية الهندسية.

9. $3, 6, 12, 24, 48, 96$ $\quad S_6 = 189$

10. $5, 15, 45, 135, 405, 1\,215$ $\quad S_6 = 1\,820$

الدرس 1.4 التمارين

في التمارين 1-7، أوجد قيمة المجموع.

1. $\sum_{k=1}^{6}(3k-1)$ $S_6=57$

2. $\sum_{k=1}^{3}\left(2k^2-1\right)$ $S_3=25$

3. $\sum_{k=1}^{4}\frac{k}{k^2+1}$ $S_4=\frac{122}{85}$

4. $\sum_{i=3}^{6}\frac{i(i+1)}{2}$ $S_6=52$

5. $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k(k+1)}$ $S_5=\frac{5}{6}$

6. $\sum_{k=1}^{3}\frac{2k}{k+3}$ $S_3=2.3$

7. $\sum_{k=4}^{6}\frac{2k-6}{k}$ $S_6=2.3$

في التمرينين 8 و 9، أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية، بدلالة عدد الحدود وقيم a_1 و a_n المعطاة:

8. عشرة حدود، $a_{10}=31,\ a_1=4$ $S_{10}=\frac{10}{2}(4+31)=175$

9. خمسة عشر حدًّا، $a_{15}=129,\ a_1=17$ $S_{15}=\frac{15}{2}(17+129)=1\,095$

في التمارين 10-13، أوجد مجموع حدود كل من المتتاليات الحسابية.

10. $1, 2, 3, 4, \dots, 80$ $n=80,\ S_{80}=\frac{80}{2}(1+80)=3\,240$

11. $2, 4, 6, 8, \dots, 70$ $n=35,\ S_{35}=\frac{35}{2}(2+70)=1\,260$

12. $117, 110, 103, \dots, 33$ $n=13,\ S_{13}=\frac{13}{2}(117+33)=975$

13. $111, 108, 105, \dots, 27$ $n=29,\ S_{29}=\frac{29}{2}(111+27)=2\,001$

14. في المتسلسلة التالية: $17+20+23+\dots$
أوجد رتبة الحد الذي عنده يكون المجموع الجزئي قد تجاوز العدد 678

15. في المتسلسلة التالية: $-18-11-4\dots$
أوجد رتبة الحد الذي عنده يكون المجموع الجزئي قد تجاوز العدد 2 335

في التمارين 16-19، أوجد مجموع حدود المتتالية الهندسية.

16. $3, 6, 12, \dots, 12\,288$ $S_{13}=24\,573$

17. $5, 15, 45, \dots, 98\,415$ $S_{10}=147\,620$

18. $42, 7, \frac{7}{6}, \dots, 42\left(\frac{1}{6}\right)^{8}$ $S_9\approx 50.4$

19. $42, -7, \frac{7}{6}, \dots, 42\left(-\frac{1}{6}\right)^{8}$ $S_9\approx 36$

في التمارين 20-23، حدّد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية، ثم أوجد مجموع الحدود n الأولى من المتتالية .

20. $2, 5, 8, \dots, n=10$ متتالية حسابية، $S_{10}=155$

21. $14, 8, 2, \dots, n=9$ متتالية حسابية، $S_9=-90$

22. $4, -2, 1, \frac{-1}{2}, \dots, n=12$ متتالية هندسية، $S_{12}\approx 2.7$

23. $6, -3, \frac{3}{2}, \frac{-3}{4}, \dots, n=11$ متتالية هندسية، $S_{11}\approx 4$

24. إذا كان S_n المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية و $S_{15}=43\,692$ والنسبة الثابتة لها $r=-2$، أوجد حدّها الأول a_1. $a_1=4$

25. متسلسلة هندسية منتهية مجموع حدودها 65 535 وحدّها الأول 3 وحدّها الأخير 49 152، أوجد النسبة الثابتة لها. $r=4$

في التمارين 26-31، حدّد ما إذا كانت المتسلسلة الهندسيّة متقاربة. إذا كانت كذلك، أوجد مجموعها.

26. $6+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\dots$ $r=\frac{1}{2}<1,\ S=\frac{a}{1-r}=12$

27. $4+\frac{4}{3}+\frac{4}{9}+\frac{4}{27}+\cdots$ $r=\frac{1}{3}<1,\ S=\frac{a}{1-r}=6$

28. $\frac{1}{64}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\cdots$ متسلسلة متباعدة، $r=2>1$

29. $\frac{1}{48}+\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+\frac{9}{16}+\cdots$ متسلسلة متباعدة، $r=3>1$

30. $\sum_{j=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{4}\right)^{j}$ $r=\frac{1}{4}<1,\ S=\frac{a}{1-r}=1$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ $r=\frac{2}{3}<1,\ S=\frac{a}{1-r}=10$

في التمارين 32-34، اكتب الكسر العشري الدوري في صورة كسر اعتيادي.

32. $0.\overline{52}$

33. $0.4\overline{53}$

34. $3.01\overline{37}$

35. يريد المهندس أحمد بناء الدرج المؤدي إلى البناء الرئيسي لإحدى المدارس. يتألف الدرج من عشر درجات. يلزم لبناء الدرجة العليا 8 قطع إسمنتية، ولبناء الدرجة السفلى 80 قطعة إسمنتية. إذا كانت أعداد هذه القطع الإسمنتية تشكل متتالية حسابية، أوجد مجموع عدد القطع الإسمنتية التي يحتاج إليها المهندس أحمد لبناء الدرج.

36. مجموع الحدود العشرة الأولى لمتتالية حسابية يساوي 210، ومجموع حدودها العشرة الثانية يساوي 610، أوجد حدها الأول وفرقها الثابت.

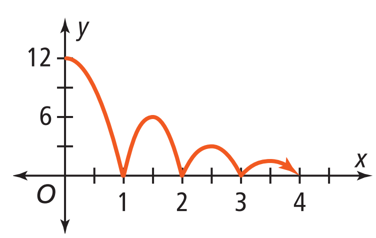
37. **فرقة الاستعراض** تبدأ فرقة الاستعراض المدرسية استعراضها بتشكيل مجسم هرمي الشكل. يقف أحد أعضاء الفرقة في رأس الهرم، وخمسة آخرون في الصف الثالث.

a. اكتب صيغة المجموع الجزئي للمتسلسلة الحسابية التي تعبر عن تزايد عدد الواقفين في صفوف الاستعراض، من صف إلى الصف الذي يليه مباشرة.

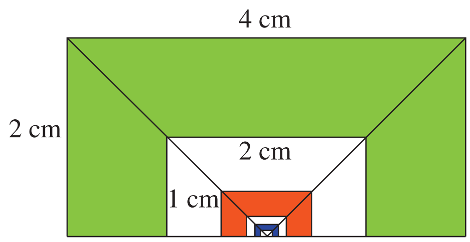
b. إذا كان عدد صفوف الشكل الهرمي ثمانية صفوف، أوجد مجموع عدد المشاركين في هذا الاستعراض.

38. **في المختبر** في أحد الاختبارات العلمية، تشكل أعداد البكتيريا المتكاثرة من يوم إلى آخر متتاليةً هندسية. إذا كان عدد البكتيريا في اليوم الأول 100، وأصبح عددها في اليوم الثامن 12 800 أوجد عدد البكتيريا في اليوم الرابع.

39. **الكرة** يُسقط ماهر كرة مطاطية من ارتفاع 12 ft، وكانت في كل مرة تصطدم فيها الكرة بالأرض ترتد إلى 50% من الارتفاع السابق. أوجد مجموع المسافات الرأسية التي ستقطعها نزولًا و صعودًا عند ارتطامها بسطح الأرض للمرة الرابعة، ثم أوجد إجمالي المسافات الرأسية المقطوعة في ارتداداتها حتى يتوقف ارتداد الكرة.



40. رُسم مستطيل أبعاده 4 في 2 ثم رُسم في داخله مستطيل آخر أبعاده 2 في 1 كما هو مبين في الشكل أدناه. تم تكرار هذا الإجراء عددًا من المرّات ثم تمّ تلوين قسم من كل مستطيل كما هو مبيّن في الشكل أدناه. (وذلك بتلوين المستطيل الأول وترك الذي يليه وهكذا.)



a. أوجد المساحة الإجمالية للمناطق الملونة في الشكل.

b. إذا تمّ تكرار هذا الإجراء عددًا غير منتهٍ من المرات، أوجد المساحة الإجمالية للمناطق الملونة.

41. **تربية النحل** يربي إبراهيم النحل في بستانه. كان عدد النحلات في الأسبوع الأول من فصل الربيع 175 نحلة، وفي الأسبوع الثاني 203، وفي الأسبوع الثالث 231، وفي الأسبوع الرابع 259 نحلة. لنفترض أن تعداد النحل سيستمر ازديادًا بنفس الوتيرة في فصل الربيع.

a. اكتب الحد العام لهذه المتتالية.

b. إذا كانت كتلة النحلة الواحدة 1.5 جرامًا، أوجد كتلة كل النحلات في نهاية الأسبوع الثاني عشر.

c. عندما يصل عدد النحلات إلى 1 015، تصبح خلية النحل غير كافية لها مجتمعةً. بعد مرور كم أسبوع سيضطر إبراهيم لتوسعة خلية النحل؟ برّر إجابتك.

أسئلة اختبار معيارية

.42 **صواب أم خطأ** في المتتالية $\{a_n\}$ والتي تمثّل الأعداد الفردية:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2,\ n \geq 2 \end{cases}$$

المجموع لأول 31 حد فيها $S_n = 961$. برّر إجابتك.

.43 **صواب أم خطأ** إن مجموع الأعداد الكلية، التي هي من مضاعفات العدد 3 والواقعة بين 1 و 500 يساوي 583 41، برّر إجابتك.

.44 **اختيار من متعدد** $3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3} + \ldots + 3^{-n} + \ldots =$ A

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{2}$

.45 **اختيار من متعدد** إذا كانت $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = 4$

فإنّ قيمة x تساوي: D

A. 0.2

B. 0.25

C. 0.4

D. 0.8

استكشاف

.46 **الكتابة للتعلم** قرر مجلس إدارة إحدى المدارس أن يشتري هذه السنة 90 حاسوبًا محمولًا ليستعملها الطلاب، كما قرر أن يشتري كل سنة 40 حاسوبًا محمولًا جديدًا. قرر المجلس أيضًا وجوب أن يكون كل طالب في المدرسة قد حصل على حاسوبه الخاص مع انقضاء السنوات العشر القادمة. إذا كان عدد طلاب هذه المدرسة 500، هل هدف المجلس قابل للتحقيق؟

.47 **الكتابة للتعلم** إذا كانت $\{b_n\}$ و $\{a_n\}$ متتاليتين هندسيّتين، هل يكون: $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$؟

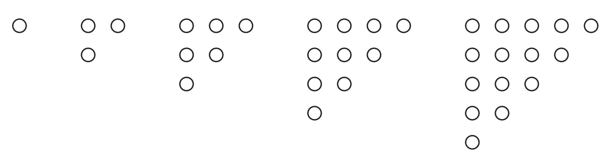
توسيع الأفكار

.48 **متتالية ومتسلسلة فيبوناتشي** أكمل الجدول أدناه، حيث F_n هو الحدّ الذي رتبته n من متتالية فيبوناتشي، و S_n هو المجموع الجزئي الذي رتبته n من متسلسلة فيبوناتشي.
ضع تخمينًا بالاعتماد على المؤشر العددي في الجدول.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F_k$$

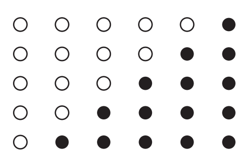
n	F_n	S_n	$F_{n+2} - 1$
1	1		
2	1		
3	2		
4			
5			
6			
7			
8			
9			

.49 **الأعداد المثلثية** الأعداد التي تُكتب في الصورة $1 + 3 + \cdots + n$ تسمّى أعدادًا مثلثية لأنها تسمح بإيجاد الأعداد في المصفوفات المثلثية كما في الشكل أدناه:



1 3 6 10 15

a. اشرح لماذا يوضح الرّسم أدناه أنّ العدد المثلثي الذي رتبته n يمكن كتابته بالصيغة $\frac{n(n+1)}{2}$



b. أثبت الصيغة السابقة جبريًا باستعمال مجموع المتتالية الحسابية المنتهية.

إجابات أسئلة التمارين 1.4

14. $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right) = 678$

$1.5n^2 + 15.5n - 678 = 0$

$n_1 \approx -27.04$ و $n_2 \approx 16.71$

بما أن قيمة n صحيحة وموجبة، فإن عدد الحدود 17

15. $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right) = 2\,335$

$3.5n^2 - 21.5n - 2\,335 = 0$

$n_1 \approx -22.94$ و $n_2 \approx 29.08$

بما أن قيمة n صحيحة وموجبة، فإن عدد الحدود 30

32. $0.\overline{52} = 0.52 + 0.0052 + 0.000052 + \ldots$

$0.\overline{52} = \frac{52}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\right)$

$0.\overline{52} = \frac{52}{100}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^{i-1}\right) = \frac{52}{100} \times \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{52}{99}$

33. $0.4\overline{53} = 0.4 + 0.053 + 0.00053 + 0.0000053 + \ldots$

$0.4\overline{53} = \frac{4}{10} + \frac{53}{1\,000}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \ldots\right)$

$0.4\overline{53} = \frac{4}{10} + \frac{53}{1\,000}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^{i-1}\right) = \frac{4}{10} + \frac{53}{1\,000} \times \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{449}{990}$

34. $3.01\overline{37} = 3 + 0.01 + 0.0037 + 0.000037 + \ldots$

$3.01\overline{37} = 3 + \frac{1}{100} + \frac{37}{10000}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\right)$

$3.01\overline{37} = 3 + \frac{1}{100} + \frac{37}{10\,000}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^{i-1}\right)$

$= 3 + \frac{1}{100} + \frac{37}{10\,000} \times \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{29\,836}{9\,900} = \frac{7\,459}{2\,475}$

35. $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{10}{2}(8 + 80) = 440$

لبناء الدرج يحتاج المهندس إلى 440 قطعة إسمنتية.

36. $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

$S_{10} = 5(2a_1 + 9d)$

$42 = 2a_1 + 9d \quad (1)$

$S_{20} - S_{10} = 610$

$S_{20} = 210 + 610 = 820$

$S_{20} = 10(2a_1 + 19d)$

$82 = 2a_1 + 19d \quad (2)$

بحل المعادلتين (1) و (2) نحصل على قيمة كل من d و a_1

$d = 4,\ a_1 = 3$

37. **a.** $a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_3 = a_1 + (3-1)d$

$5 = 1 + 2d$

$2 = d$

$S_n = n^2$

b. $S_8 = 8^2 = 64$

38. $a_n = a_1 \times r^{n-1}$

$12\,800 = 100 \times r^7$

$128 = r^7$

$2 = r$

$a_4 = 800$

39. مجموع المسافات الرأسية التي ستقطعها نزولًا وصعودًا عند ارتطامها بسطح الأرض للمرة الرابعة هو:

$12 + 2 \times (6 + 3 + 1.5) = 33$

إجمالي المسافات الرأسية المقطوعة حتى يتوقف ارتداد الكرة هو: $S = 12 + 2 \times \frac{a}{1-r} = 12 + 2 \times \frac{6}{1-\frac{1}{2}} = 36$

أي 36 ft

40. a. المساحة الإجمالية للمناطق الملونة تشكل متسلسلة هندسية

$$\sum_{i=1}^{n} 8 \times \left(-\tfrac{1}{4}\right)^{i-1}$$

حسب الشكل، المساحة الإجمالية الملونة تساوي

$S_6 = \frac{a_1 - a_6 r}{1 - r} = \frac{8 - \left(-\frac{1}{128}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}$ أي $6.4\ cm^2$ تقريبًا.

b. المتسلسلة الهندسية التي تمثّل المساحة الإجمالية هي متسلسلة متقاربة، وذلك لأن $|r| < 1$ وبالتالي فإن $S = \frac{a}{1 - r} = 6.4$

41. a. إنها متتالية حسابية حدّها العام $a_n = 147 + 28n$.

b. في نهاية الأسبوع الثاني عشر يكون عدد النحلات $a_{12} = 483$.

وبالتالي فإن كتلة كل النحلات تساوي $483 \times 1.5 = 724.5$

أي 724.5 جرام.

c. $175 + (n - 1)28 = 1\,015$، وهذا يعني أن إبراهيم سيضطر لتوسعة القفير في نهاية الأسبوع 31

42. صواب؛ مجموع حدود المتتالية الحسابية $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$

إذا كانت $n = 31$ يساوي $S_{31} = \frac{31}{2}(2 + 30 \times 2) = 961$

43. صواب، الحد الأول يساوي 3 والحد الأخير يساوي 498:

$a_n = 3 + 3(n - 1),\ 498 = 3n,\ n = 166$

إذن مجموع الأعداد الكلية بين 1 و 500 التي هي مضاعفات العدد 3:

$S_{166} = \frac{166}{2}(3 + 498) = 41\,583$

46. $\begin{cases} a_1 = 90 \\ a_n = a_{n-1} + 40,\ n \geq 2 \end{cases}$

$a_{10} = 450$

الهدف غير قابل للتحقيق لأن $450 < 500$

47. إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية هندسية النسبة الثابتة فيها هي r

وكانت $\{b_n\}$ متتالية هندسية النسبة الثابتة فيها هي R

فإن المتتالية $\{a_n b_n\}$ متتالية هندسية النسبة الثابتة فيها هي $r \times R$

وبالتالي:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \frac{a_1 b_1 - a_n b_n rR}{1 - rR}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{b_1 - b_n R}{1 - R}$$

نستنتج من ذلك أن

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \frac{a_1 b_1 - a_n b_n rR}{1 - rR} \neq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

48.

n	F_n	S_n	$F_{n+2} - 1$
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	4	4
4	3	7	7
5	5	12	12
6	8	20	20
7	13	33	33
8	21	54	54
9	34	88	88

نستنتج أن $S_n = F_{n+2} - 1$

49. a. نلاحظ أن عدد الأعمدة هو $n + 1$ وعدد الصفوف هو n، وبالتالي فإن عدد النقاط هو $n(n + 1)$، وبما أن العدد المثلثي هو عدد النقط البيضاء فقط فهذا يعني أن $\frac{n(n + 1)}{2}$

b. الأعداد الصحيحة تكّون متتالية حسابية، والأعداد المثلثية هي جمع لحدود متتالية الأعداد الصحيحة، أي أن:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n - 1)d\right) = \frac{n}{2}\left(2 \times 1 + (n - 1) \times 1\right) = \frac{n(n + 1)}{2}$$

الوحدة 1 مراجعة الوحدة

في التمرينين 1 و 2، أوجد الحدود الست الأولى والحد الأربعين من المتتالية.

1. $a_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1}$

2. $b_k = \frac{(-2)^k}{k + 1}$

في التمارين 3-7، أوجد الحدود الست الأولى والحد الثاني عشر من المتتالية.

3. $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases}$

4. متتالية حسابية فيها $a_1 = -5$ و $d = 1.5$

5. متتالية هندسية فيها $a_1 = 3$ و $r = \frac{1}{3}$

6. $\begin{cases} v_1 = -3 \\ v_2 = 1 \\ v_k = v_{k-2} + v_{k-1}, k \geq 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} w_1 = -3 \\ w_2 = 2 \\ w_k = w_{k-2} + w_{k-1}, k \geq 3 \end{cases}$

في التمارين 8-11، المتتاليات هي إمّا حسابية وإمّا هندسية. أوجد الحد العام. حدّد الفرق الثابت أو النسبة الثابتة.

8. $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

9. $10, 12, 14.4, 17.28$

10. $\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, \ldots$

11. $\begin{cases} a_1 = -11 \\ a_n = a_{n-1} + 4.5, n \geq 2 \end{cases}$

12. الحدّان الرابع والتاسع من متتالية هندسية هما -192 و $196\,608$ على التوالي. أوجد حدها العام.

13. الحدّ الرابع من متتالية حسابية هو 17 والحدّ السابع هو 5 أمثال الحدّ الثاني. أوجد حدها العام.

في التمرينين 14 و 15، أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية.

14. $13, 9, 5, 1, -3, -7, -11$

15. $2.5, -0.5, -3.5, \ldots, -75.5$

في التمرينين 16 و 17، أوجد مجموع حدود المتتالية الهندسية.

16. $4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8},$

17. $2, 6, 18, \ldots, 39\,366$

في التمرينين 18 و 19، أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابية أو الهندسية.

18. $2\,187, 729, 243, \ldots$

19. $94, 91, 88, \ldots$

في التمرينين 20 و 21، مثّل المتتالية بيانيًّا.

20. $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

21. $a_n = 2n^2 - 1$

22. **فائدة** يضع جاسم مبلغ $150 نهاية كل شهر في حساب مصرفي يعود عليه بفائدة مركبة شهرية 8%
في نهاية السنة العاشرة يكون رصيده في الحساب، بالدولار:

$$150\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^0 + 150\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^1 + \cdots + 150\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{119}$$

استعمل صيغة مجموع حدود متتالية هندسية منتهية لإيجاد الرصيد.

في التمارين 23-26، حدّد ما إذا كانت المتسلسلة الهندسية متقاربة. إذا كانت كذلك، أوجد مجموعها.

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3^n}{5^n}\right)$

24. $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^i$

25. $\sum_{k=0}^{\infty} 5\left(\frac{6}{5}\right)^k$

26. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-3n}$

في التمارين 27-32، اكتب الكسر العشري الدوري في صورة كسر اعتيادي.

27. $0.\overline{768}$

28. $0.\overline{51}$

29. $0.79\overline{1}$

30. $4.0\overline{28}$

31. $0.4\overline{67}$

32. $2.\overline{853}$

الوحدة 1 الإجابات

1. $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 5, a_{40} = 39$

2. $b_1 = -1, b_2 = \frac{4}{3}, b_3 = -2, b_4 = \frac{16}{5}, b_5 = -\frac{16}{3}, b_6 = \frac{64}{7},$
$b_{40} = 26\,817\,356\,775$

3. $a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 11, a_6 = 14, a_{12} = 32$

4. $a_1 = -5, a_2 = -3.5, a_3 = -2, a_4 = -0.5, a_5 = 1, a_6 = 2.5,$
$a_{12} = 11.5$

5. $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{9}, a_5 = \frac{1}{27}, a_6 = \frac{1}{81}, a_{12} = \frac{1}{59\,049}$

6. $v_1 = -3, v_2 = 1, v_3 = -2, v_4 = -1, v_5 = -3, v_6 = -4, v_{12} = -76$

7. $w_1 = -3, w_2 = 2, w_3 = -1, w_4 = 1, w_5 = 0, w_6 = 1, w_{12} = 13$

.8 متتالية هندسية. النسبة الثابتة: $r = -1$
الحد العام: $a_n = 1 \times (-1)^{n-1}$

.9 متتالية هندسية. النسبة الثابتة: $r = 1.2$
الحد العام: $a_n = 10 \times (1.2)^{n-1}$

.10 متتالية هندسية. النسبة الثابتة: $r = -2$
الحد العام: $a_n = \frac{1}{8} \times (-2)^{n-1}$

.11 متتالية حسابية. الفرق الثابت: $d = 4.5$
الحد العام: $a_n = 4.5n - 15.5$

12. $a_9 = a_4 \times (r)^{9-5}, r = -4, a_1 = 3, a_n = 3 \times (-4)^{n-1}$

13. $a_7 = a_4 + 3d, a_7 = a_2 + 5d, a_7 = 5a_2 = 17 + 3d,$

$5a_2 = a_2 + 5d, d = \frac{4}{5} a_2$

$d = \frac{68}{13}, a_1 = \frac{17}{13}, a_n = \frac{68}{13}n - \frac{51}{13}$

14. $n = 7, S_7 = \frac{7}{2}((13 + -11)) = 7$

15. $a_n = a_1 + (n-1)d$

$-75.5 = 2.5 + (n-1)(-3)$

$n = 27$

$S_{27} = \frac{27}{2}(2(2.5) + (26)(-3)) = -985.5$

16. $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$

$S_6 = \frac{4 - \left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2.625$

17. $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$

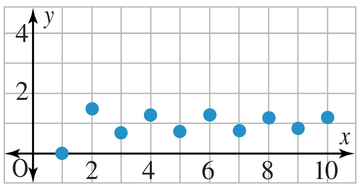
$S_{10} = \frac{2 - (39366)(3)}{1 - 3} = 59\,048$

18. $a_{10} = 2187 \times \frac{1}{3}^{9} = \frac{1}{9}$

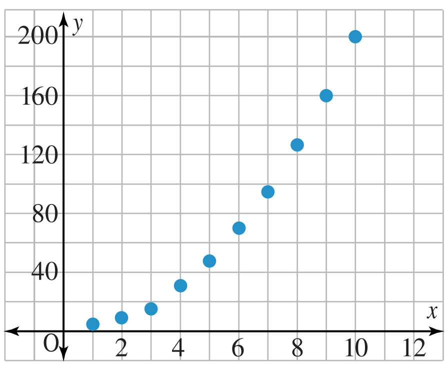
$S_{10} = \frac{a_1 - a_{10} r}{1 - r} = \frac{2187 - \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \approx 3280.44$

19. $S_{10} = \frac{10}{2}(2 \times 94 + 9 \times (-3)) = 805$

20.



21.



22. $S_{120} = \frac{150 - 150\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{119}\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)}{1 - \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)} = \$\,27\,441.9$

.23 المتسلسلة متقاربة، $S = \frac{3}{2}$

.24 المتسلسلة الهندسية متقاربة لأن $|r| = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 1$، $S \approx 1.36$

.25 المتسلسلة الهندسية متباعدة لأن $|r| = \left(\frac{6}{5}\right) > 1$

.26 المتسلسلة الهندسية متقاربة لأن $|r| = \left(\frac{1}{8}\right) < 1$، $S = \frac{8}{7}$

27. $0.\overline{768} = 0.768 + 0.000768 + 0.000000768 + \ldots$

$0.\overline{768} = \frac{768}{1000}\left(1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000000} + \ldots\right)$

$0.\overline{768} = \frac{768}{1000}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1000}^{i-1}\right) = \frac{768}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{768}{999} = \frac{256}{333}$

28. $0.\overline{51} = 0.51 + 0.0051 + 0.000051 + \ldots$

$0.\overline{51} = \frac{51}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\right)$

$0.\overline{51} = \frac{51}{100}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{100}^{i-1}\right) = \frac{51}{100} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$

الوحدة 1 الإجابات

29. $0.79\overline{1} = 0.79 + 0.001 + 0.0001 + \ldots$

$$0.79\overline{1} = 0.79 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \ldots$$

$$0.79\overline{1} = 0.79 + \frac{1}{1000}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10}^{i-1}\right)$$

$$= 0.79 + \frac{1}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{712}{900} = \frac{178}{225}$$

30. $4.0\overline{28} = 4 + 0.028 + 0.00028 + 0.0000028 + \ldots$

$$4.0\overline{28} = 4 + \frac{28}{1000} + \frac{28}{100000} + \frac{28}{10000000} + \ldots$$

$$= 4 + \frac{28}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{3988}{990} = \frac{1994}{495}$$

31. $0.4\overline{67} = 0.4 + 0.067 + 0.00067 + \ldots$

$$0.4\overline{67} = 0.4 + \frac{67}{1000} + \frac{67}{100000} + \ldots$$

$$= 0.4 + \frac{67}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{463}{990}$$

32. $2.\overline{853} = 2 + 0.853 + 0.000853 + 0.000000853 + \ldots$

$$2.\overline{853} = \frac{853}{1000}\left(1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000000} + \ldots\right)$$

$$0.\overline{853} = 2 + \frac{853}{1000}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1000}^{i-1}\right)$$

$$= 2 + \frac{853}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{2851}{999}$$

الوحدة 1 تقويم

.1 أوجد الحدود الست الأولى والحد الثاني عشر من المتتالية:

$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_k = 2b_{k-1}, k \geq 2 \end{cases}$$

في التمرينين 2 و 3 المتتاليات هي إمّا حسابية وإمّا هندسية.
أوجد الحد العام. حدّد الفرق الثابت أو النسبة الثابتة.

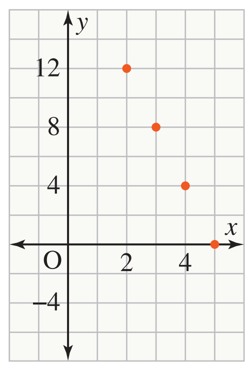
2. $-5, -1, 3, 7, \ldots$

3. $\begin{cases} b_1 = 7 \\ b_n = \frac{1}{4} b_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

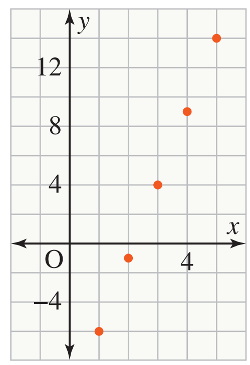
في التمارين 4-6، أوجد الصيغة الارتدادية وصيغة الحد العام لكل متتالية حسابية.

4. $-15, -6, 3, 12, 21, \ldots$

5.



6.



في التمرينين 7 و 8، أوجد الصيغة الارتدادية وصيغة الحد العام لكل متتالية هندسية.

7. $1, -3, 9, -27, \ldots$

8. $24, 8, \frac{8}{3}, \frac{8}{9}, \ldots$

في التمارين 9-11، أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية.

.9 10 حدود، $a_1 = 4, a_{10} = 31$

.10 15 حدًّا، $a_1 = 17, a_{15} = 129$

11. $\sum_{n=1}^{12} \left(\frac{n}{2} - 9\right)$

في التمارين 12-14، أوجد مجموع حدود المتتالية الهندسية.

12. $8 + 16 + 32 + \ldots + 1\,024$

13. $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{80}$

14. $4 - 12 + 36 - \ldots + 2\,916$

في التمارين 15-17، حدد ما إذا كانت المتسلسلة الهندسية متقاربة. إذا كانت كذلك، أوجد مجموعها.

15. $\sum_{k=1}^{\infty} 3(0.5)^k$

16. $\sum_{k=0}^{\infty} 2\left(\frac{-3}{5}\right)^k$

17. $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sqrt{2}\right)^j$

.18 اكتب ...0.425425425 في صورة كسر اعتيادي.

.19 اكتب ...0.735555 في صورة كسر اعتيادي.

.20 مجموع حدود متسلسلة هندسية 31.75، إذا كان حدّها الأول 16، ونسبتها الثابتة 0.5، فكم عدد حدود هذه المتسلسلة؟

.21 يزداد عدد المقاعد في إحدى قاعات المحاضرات مع ابتعاد الصف عن المنصّة. إذا كان عدد المقاعد في الصف الأول 24 مقعدًا، وفي الصف الثاني 29 مقعدًا، وفي الصف الثالث 34 مقعدًا، وكان العدد الكلي للصفوف في القاعة 35 صفًّا، أوجد عدد المقاعد الكلي فيها.

الوحدة 1 الإجابات

1. $b_1 = 5, b_2 = 10, b_3 = 20, b_4 = 40, b_5 = 80, b_6 = 160, b_{12} = 10\ 240$

.2 متتالية حسابية. الفرق الثابت: $d = 4$
الحد العام: $a_n = 4n - 9$

.3 متتالية هندسية. النسبة الثابتة: $r = \frac{1}{4}$
الحد العام: $b_n = 7 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

4. $\begin{cases} a_1 = -15 \\ a_n = a_{n-1} + 9, n \geq 2 \end{cases}$

$a_n = 9n - 24$

5. $\begin{cases} a_1 = 16 \\ a_n = a_{n-1} - 4, n \geq 2 \end{cases}$

$a_n = 16 + (n-1)(-4)$

6. $\begin{cases} a_1 = -6 \\ a_n = a_{n-1} + 5, n \geq 2 \end{cases}$

$a_n = 5n - 11$

7. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = -3a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

$a_n = 1 \times (-3)^{n-1}$

8. $\begin{cases} a_1 = 24 \\ a_n = \frac{1}{3}a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

$a_n = 24 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

9. $S_{10} = \frac{10}{2}(4 + 31) = 175$

10. $S_{15} = \frac{15}{2}(17 + 129) = 1\ 095$

11. $S_{12} = \frac{12}{2}(-8.5 - 3) = -69$

12. $S_8 = \frac{8 - 1024(2)}{1 - 2} = 2\ 040$

13. $S_5 = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{80}\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{80}$

14. $S_7 = \frac{4 - 2916(-3)}{1 - (-3)} = 2\ 188$

.15 المتسلسلة الهندسية متقاربة لأن $|r| = 0.5 < 1$، $S = 3$

.16 المتسلسلة الهندسية متقاربة لأن $|r| = \frac{3}{5} < 1$، $S = \frac{5}{4}$

.17 المتسلسلة الهندسية متباعدة لأن $|r| = \sqrt{2} > 1$

18. $0.\overline{425} = 0.425 + 0.000425 + 0.000000425 + \ldots$

$0.\overline{425} = \frac{425}{1000}\left(1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000000} + \ldots\right)$

$0.\overline{425} = \frac{425}{1000}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1000}^{i-1}\right) = \frac{425}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{425}{999}$

19. $0.73\overline{5} = 0.73 + 0.005 + 0.0005 + \ldots$

$0.73\overline{5} = 0.73 + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \ldots$

$0.73\overline{5} = 0.73 + \frac{5}{1000}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10}^{i-1}\right) = 0.73 + \frac{5}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$

$= \frac{662}{900} = \frac{331}{450}$

20. $S_n = \frac{16 - a_n(0.5)}{1 - 0.5} = 31.75, a_n = \frac{1}{4}$

$a_n = a_1 r^{n-1}, \frac{1}{4} = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$n = 7$

21. $S_{35} = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)\right)d$

$S_{35} = \frac{35}{2}(2 \times 24 + 34 \times 5) = 3\ 815$

الوحدة 1 المشروع

نمذجة النمو السكاني باستعمال المتتاليات

في هذا المشروع، سوف تستعمل الصيغ الارتدادية والمتتاليات المتعلقة بها كي تكتشف الاتجاهات في المجتمعات الانسانية والحيوانية. في الحقيقة، سوف تستعمل بعض تقنيات النمذجة التي يستعملها الديموغرافيون وعلماء الحياة البرية.

استكشافات

1. تعداد سكان دولة قطر المتتالية الحسابية هي المرادف المنفصل للدالة الخطية. كل من المتتالية الحسابية والدالة الخطية تفترض وجود معدل تغيُّر جمعي ثابت.

a. بحسب تقرير إحصائي صادر عن الأمم المتحدة، فإنّ العدد الرسمي لسكان دولة قطر كان 0.474 مليون نسمة في العام 1990، و 1.759 مليون نسمة في العام 2010.
كم كان معدّل التغيّر السنوي في عدد السكان من العام 1990 إلى العام 2010؟

b. التعداد الرسمي لسكان دولة قطر كان 0.591 مليون نسمة في العام 2000. لنفترض أنّ $\{p_n\}$ متتالية حسابية تمثّل تعداد السكان في قطر (بالملايين) بعد n سنة من العام 2000. تَحقّق من أنّ $p_0 = 0.591$. هذا هو **الشرط الابتدائي** (الحد الأول) للمتتالية.

c. استعمل إجابتك على الجزء (a) لكتابة صيغة ارتدادية للمتتالية $\{p_n\}$.

d. اكتب صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية $\{p_n\}$ مفترضًا أنّ $p_0 = 0.591$.

e. استعمل المعلومات من الأجزاء (b), (c), (d) لتقدير عدد سكان دولة قطر في الأعوام 2010, 2015, 2020.

2. تعداد سكان العالم يوضح الجدول التالي تقدير مكتب التعداد السكاني في الولايات المتحدة للأعداد الرئيسية لسكان العالم. لنفترض أن $\{w_n\}$ متتالية هندسية تمثّل تعداد السكان في العالم (بالمليارات) بعد n سنة من العام 1959. استعمل $w_0 = 3.00$ كشرط ابتدائي للمتتالية.

السنة	تعداد السكان (بالمليارات)
1959	3
1974	4
1987	5
1999	6
2012	7

a. بافتراض نسبة نمو سنوي في عدد سكان العالم مقدارها 1.62%، اكتب صيغة ارتدادية للمتتالية $\{w_n\}$.

b. اكتب الحد العام للمتتالية الهندسية $\{w_n\}$ في الجزء (a).

c. استعمل الصيغة من الجزء (b) لتقدير عدد سكان العالم في الأعوام 2010, 2015, 2020.

d. نسبة النمو السنوي الفعلي في عدد سكان العالم تراجعت من 2.22% سنة 1963 إلى 1.09% سنة 2013، لذا فإن متتالية هندسية جديدة يمكن أن تكون أكثر ملاءمةً من المتتالية السابقة في تقدير أعداد السكّان في السنوات الأخيرة.
استعمل المعطيات في الجدول والمتتالية الهندسية الجديدة لتقدير عدد سكان العالم في الأعوام 2010, 2015, 2020

3. **تعداد أسماك الخيشوم الأزرق** يوجد 100 1 سمكة خيشوم أزرق في بحيرة تاواغا حاليًا (السنة 0). كل عام، تتناقص أعداد هذه الأسماك بنسبة 25% بفعل تأثيرَيْ الموت والصيد، وفي نهاية كل عام، يتم إضافة 800 سمكة خيشوم أزرق إلى البحيرة. لنفترض أنّ $\{b_n\}$ هي متتالية تمثّل عدد أسماك الخيشوم الأزرق في البحيرة بعد n سنة قادمة.

a. اكتب صيغة ارتدادية للمتتالية $\{b_n\}$.

b. مثّل بيانيًا المتتالية $\{b_n\}$ كمتغير مع الوقت (أي كدالة بقيمة الوقت n).

c. أثبت أنّ المتتالية $a_n = 3\,200 - b_n$ هي متتالية هندسية محدّدًا نسبتها الثابتة وحدّها الأول.

d. أوجد الحد العام للمتتالية $\{a_n\}$ ثم أثبت أنّ $b_n = 3\,200 - 2\,100\,(0.75)^n$

e. كم يصبح عدد أسماك الخيشوم الأزرق في البحيرة على المدى الطويل؟

4. **نموذج تعداد المفترس - الفريسة** في البريّة، ترتبط أعداد الأنواع المفترسة، كالثعالب، بأنواع الفرائس، كالأرانب، فتكون أعدادهما مرتبطة في ما بينها.

لنفترض أنّ أعداد الأرانب في الوقت n هو u_n

$$u_n = u_{n-1}(1 + a - bv_{n-1})$$

لنفترض أنّ أعداد الثعالب في الوقت n هو v_n

$$v_n = v_{n-1}(1 + cu_{n-1} - d)$$

حيث

a: نسبة تزايد أعداد الأرانب في حال عدم وجود ثعالب: 0.047

b: نسبة قتل الثعالب للأرانب: 0.0011

c: نسبة تزايد أعداد الثعالب في حال وجود أرانب: 0.00019

d: نسبة موت الثعالب في حال عدم وجود أرانب: 0.032

لنفترض أنّ الشروط الابتدائية هي أرانب $u_0 = 288$ وثعالب $v_0 = 63$

a. مثّل المتتاليتين $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ بدلالة الوقت n وذلك على نفس المستوى الإحداثي.

b. مثّل العلاقة $\{v_n\}$ مقابل $\{u_n\}$ على نفس المستوى الإحداثي.

c. اكتب بعض الجمل لتصف ما توصّلت إليه. هل تعتقد أنّ أيًّا من النوعين سيندثر؟ لمَ، ولمَ لا؟ إذا اندثر نوع الثعالب فماذا سيحلّ بأعداد الأرانب؟ اشرح معتمدًا على النموذج.

الوحدة 1 المشروع

1. a. $\frac{1.759 - 0.474}{2010 - 1990} = 0.06425$

إذن، معدل التغير السنوي في عدد السكان يساوي 64 250 نسمة سنويًّا.

b. بما أن n يساوي عدد السنوات المنقضية منذ العام 2000، فإن $n = 0$ أي أن p_0 يمثل عدد السكان في ذلك العام.

إذن، $p_0 = 0.591$

c. $p_n = p_{n-1} + 0.06425$

d. $p_n = 0.06425n + 0.5910$

e. $p_{2010} = 0.06425(10) + 0.5910 = 1.2335$

$p_{2015} = 0.06425(15) + 0.5910 = 1.55475$

$p_{2020} = 0.06425(20) + 0.5910 = 1.876$

إذن عدد سكان دولة قطر في الأعوام 2010 و 2015 و 2020 هو على الترتيب: 500 233 1 و 750 554 1 و 000 876 1 نسمة.

2. a. $w_n = w_{n-1} + 0.0162w_{n-1} = 1.0162\,w_{n-1}$

b. $w_n = w_0\,(1.0162)^n = 3.00 \times (1.0162)^n$

c. $w_{51} = 3.00 \times (1.0162)^{51} \approx 6.8086$

$w_{56} = 3.00 \times (1.0162)^{56} \approx 7.3783$

$w_{61} = 3.00 \times (1.0162)^{61} \approx 7.9956$

إذن، عدد سكان العالم في الأعوام 2010 و 2015 و 2020 هو على الترتيب:

6.8086 و 7.3783 و 7.9956 مليار نسمة تقريبًا.

d. $w_4 = 3.00 \times (1.0162)^4 \approx 3.20$، عدد السكان في سنة 1963

بما أن النسبة تراجعت من 2.22% عام 1963 إلى 1.09% عام 2013

أي أن نسبة التراجع $\frac{2.22 - 1.09}{50}\% = 0.0226\%$ في السنة الواحدة.

تساوي النسبة التقريبية عام 2010:

$2.22\% - 47 \times 0.0226 = 1.1578\%$

$w_{47} = 3.2 \times (1.01578)^{47} \approx 6.68$

$w_5 = 6.68 \times (1.0109)^5 \approx 7.05$

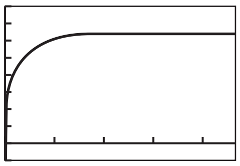
$w_{10} = 6.68 \times (1.0109)^{10} \approx 7.45$

إذن عدد سكان العالم في الأعوام 2010، 2015 و 2020 هو على الترتيب:

6.68، 7.05 و 7.45 مليار نسمة تقريبًا.

3. a. $b_n = (100\% - 25\%)\,b_{n-1} + 800 = 0.75b_{n-1} + 800$

b.



[0, 47] في [−500, 4000]

c. $a_n = 3\,200 - b_n$ أي أن $a_{n-1} = 3\,200 - b_{n-1}$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3\,200 - b_n}{3\,200 - b_{n-1}} = \frac{3\,200 - (0.75\,b_{n-1} + 800)}{3\,200 - b_{n-1}} = \frac{2\,400 - 0.75\,b_{n-1}}{3\,200 - b_{n-1}}$$

$$= \frac{0.75\,(3\,200 - b_{n-1})}{3\,200 - b_{n-1}} = 0.75$$

إذن المتتالية $a_n = 3\,200 - b_n$ متتالية هندسية نسبتها الثابتة 0.75

وحدّها الأول $a_0 = 3\,200 - b_0 = 3\,200 - 1\,100 = 2\,100$

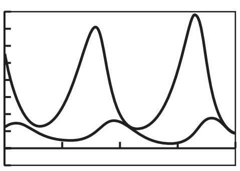
d. $a_n = 2100\,(0.75)^n$

بما أن $a_n = 3\,200 - b_n$

فإن $b_n = 3\,200 - a_n = 3\,200 - 2100\,(0.75)^n$

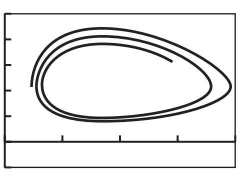
e. عندما $n \to \infty$، $(0.75)^n \to 0$، إذن يصبح عدد الأسماك على المدى البعيد 3 200

4. a.



[0, 400] في [−50, 4 000]

b.



[0, 400] في [−20, 100]

c. قد تتنوع الإجابات.