MATHS WITH KABIL

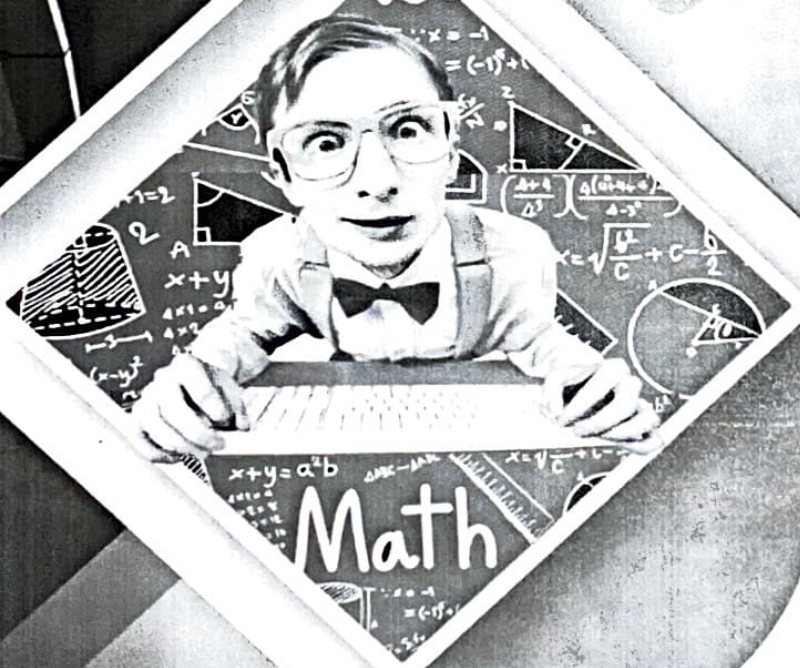
ART MEL MATHS

صف 12 متقدم

الرياضيات

الوحدة الثانية

التفاضل



Name: نموذج الإجابة

Group Number :

WINNERS MAKE GOALS , LOSERS MAKE EXCUSES.

اختر الإجابة الصحيحة لكل من الأسئلة التالية وذلك بوضع علامة × داخل المربع المجاور للإجابة الصحيحة :

a b

x لنفس الأقواس

1 أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^3 + 3x$ في الفترة $[-1, 3]$.

A -10

B -4

C 4

D 10

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-1)}{(3) - (-1)}$$

$$= \frac{[(3)^3 + 3(3)] - [(-1)^3 + 3(-1)]}{3 - (-1)} = 10$$

2 لنفترض أن أرباح شركة ما، بألاف الريالات ، من بيع x قطعة تنمذج بالدالة $H(x) = 2x^2 - 5x + 7$ أوجد متوسط معدل التغير للربح من 2 إلي 4.

A $2000\ QR$

B $4000\ QR$

C $7000\ QR$

D $14000\ QR$

$$\frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{[2(4)^2 - 5(4) + 7] - [2(2)^2 - 5(2) + 7]}{(4) - (2)}$$

$$= 7$$

3 لنفترض أن $f(x) = \sqrt[3]{x - 4}$.

عند أي من النقاط التالية تكون المشتقة $f'(x)$ غير موجودة ؟

A $a = -4$

B $a = 0$

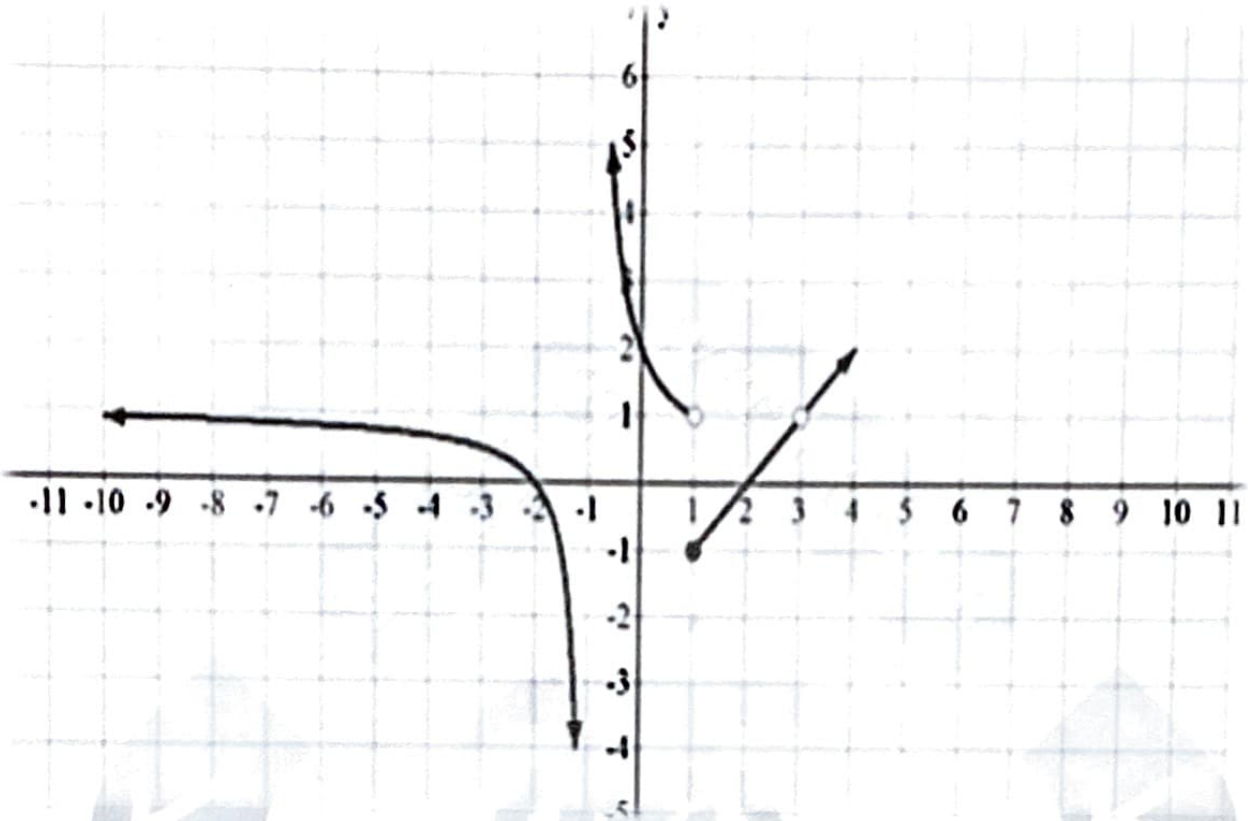
C $a = 1$

D $a = 4$

$x - 4 = 0$

$x = 4$

4 عند أي من قيم x المحددة أدناه المشتقة موجودة ؟



A $x = -1$

B $x = 1$

~~C~~ $x = 2$

D $x = 3$

5 أي من العبارات التالية تصف منحنى الدالة $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ عند النقطة $x = 0$ وصفاً صحيحاً ؟

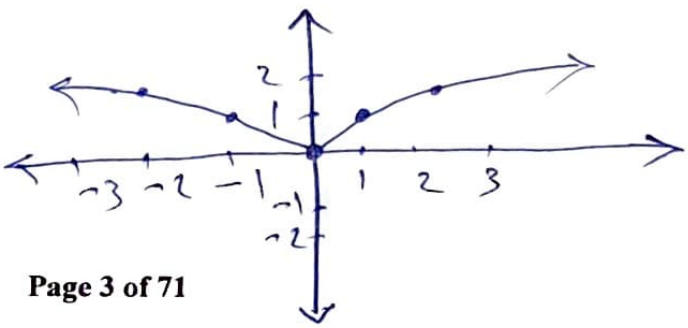
x	-2	-1	0	1	2
y	1.5	1	0	1	1.5

A له زاوية عند $x = 0$

~~B~~ له نتوء عند $x = 0$

C له مماس رأسي عند $x = 0$

D فيه عدم اتصال $x = 0$



6 أوجد ميل المماس للدالة $f(x) = 6 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ عند $x = 4$.

A $\frac{1}{16}$

B $\frac{1}{8}$

C $\frac{1}{4}$

D $\frac{1}{2}$

$f(x) = \cancel{6} - x^{-\frac{1}{2}}$ تعديل

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$ اشتقاق

$f'(4) = \frac{1}{2}(4)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{16}$ تعويض

7 أي من الآتي يستخدم في إيجاد دالة ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A $m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2xh-1} - \sqrt{2x-1}}{h}$

B $m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2x+h-1} - \sqrt{2x-1}}{h}$

C $m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2x+2h-1} - \sqrt{2x-1}}{h}$

D $m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+2h-1}}{h}$

8 إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = 2$ وكانت $f'(2) = 1$ فما قيمة (قيم) a

إذا كانت $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = a^2 - 3$.

A $a = 1$

B $a = 2$

C $a = 2 , a = -2$

D $a = 4 , a = -4$

$f'(2) = a^2 - 3$

$1 = a^2 - 3$

$a^2 = 4$

$a = 2$ $a = -2$

9 ما مشتقة الدالة $y = \sqrt[3]{x^7}$ ؟

A $\frac{dy}{dx} = x^{\frac{7}{3}}$

B $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{3} x^{\frac{4}{3}}$

C $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{3} x^{\frac{7}{3}}$

D $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}}$

$y = x^{\frac{7}{3}}$ تعديل

$y' = \frac{7}{3} x^{\frac{4}{3}}$ اشتقاق

10 قذف جسيم رأسياً إلي أعلى من نقطة على سطح الأرض

فكان ارتفاعه بالأمتار يعطى بالدالة $h(t) = 18t - 3t^2$ ، حيث t الزمن بالثواني .

أوجد سرعة الجسيم عند $t = 2$.

A $-30\ m/s$

B $-6\ m/s$

C $6\ m/s$

D $30\ m/s$

اشتق

$v(t) = 18 - 6t$

عوض

$v(2) = 18 - 6(2) = 6$

11 إذا كانت $f(x) = 4g(x) - 10x$, $f'(2) = 6$ أوجد $g'(2)$.

A -1

B 4

C 9

D 12

اشتق

$f'(x) = 4g'(x) - 10$

عوض

$f'(2) = 4g'(2) - 10$

$6 = 4g'(2) - 10$

$4g'(2) = 16$

$g'(2) = 4$

12 ما معدل التغير اللحظي لمساحة دائرة بالنسبة لنصف قطرها r عندما $r = 6$ ؟

A 8π

B 10π

C 11π

D 12π

$A = \pi r^2$

اشتق

$A' = 2\pi r$

عوض

$A'(6) = 2\pi(6) = 12\pi$

13 إذا علمت أن $f'(3) = 4$ و أن $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

أوجد قيمة $(f - g)'$ عند $x = 3$.

A -1

B $\frac{-1}{2}$

C $\frac{1}{2}$

D 1

$g'(x) = x$

$g'(3) = 3$

$(f - g)' = f' - g'$

$= 4 - 3$

$= 1$

14 إذا كان $f'(1) = 3$ و $g(x) = x^2$

أوجد قيمة $(f+g)'(1)$.

A -5

B -4

C 4

D 5

$g'(x) = 2x$

$g'(1) = 2(1) = 2$

$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1)$

$= 3 + 2 = 5$

15 إذا كانت $g'(3) = 4$ و $h'(3) = 5$ أوجد $f'(3)$

حيث $f(x) = 2g(x) - 3h(x) + 5$.

A -7

B -2

C 6

D 7

$f'(x) = 2g'(x) - 3h'(x)$

$f'(3) = 2g'(3) - 3h'(3)$

$= 2(4) - 3(5) = -7$

16 إذا علمت أن $f(x) = x^3 + 2ax - 4$, $f'(2) = 4$ أوجد قيمة الثابت a .

A -4

B -2

C 2

D 4

$f'(x) = 3x^2 + 2a$

$f'(2) = 3(2)^2 + 2a$

$3(2)^2 + 2a = 4$

$2a = 4 - 12$

$2a = -8$

$a = -4$

17 إذا كان $f(x) = ax^4 + 2x^3 - x$ وكان $f'(1) = -3$ أوجد قيمة الثابت a .

A $a = -2$

B $a = -\frac{1}{3}$

C $a = \frac{1}{3}$

D $a = 1$

$f'(x) = 4ax^3 + 6x^2 - 1$

$f'(1) = 4a(1)^3 + 6(1)^2 - 1$

$4a + 6 - 1 = -3$

$4a + 5 = -3$

$4a = -8$

$a = -2$

18 إذا كان $f(3) = 11$, $f(5) = 31$ أوجد متوسط معدل التغير في الفترة $[3, 5]$.

A -10

B -2

C 20

D 10

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{[f(5)] - [f(3)]}{(5)-(3)}$$

$$= \frac{(31)-(11)}{5-3} = 10$$

19 إذا كان متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[2, 5]$ يساوي 4 ،

وكان $f(5) = 20$ ، فما قيمة $f(2)$.

A -16

B -8

C 8

D 16

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 4$$

$$\frac{f(5) - f(2)}{5-2} = \frac{4}{1}$$

$$f(5) - f(2) = 12$$

$$20 - f(2) = 12$$

$$f(2) = 20 - 12$$

$$= 8$$

20 أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = e^x$ في الفترة $[0, ln\, 6]$.

A 1.79

B 1.97

C 2.79

D 3.21

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(\ln 6) - f(0)}{\ln 6 - 0}$$

$$= \frac{e^{\ln 6} - e^{0}}{\ln 6 - 0} = 2.79$$

21 يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث تكون إزاحته $s(t)$ بالأمتار عن نقطة الأصل o

تعطى بالقاعدة $s(t) = 2t^3 - t^2 + 5$ حيث الزمن $t \geq 0$ بالثواني .

أوجد سرعة الجسيم عندما $t = 2$.

A $v(2) = 20\ m\backslash s$

B $v(2) = 22\ m\backslash s$

C $v(2) = 26\ m\backslash s$

D $v(2) = 28\ m\backslash s$

$$v(t) = 6t^2 - 2t$$

$$v(2) = 6(2)^2 - 2(2)$$

$$= 20.\ m/s$$

22 يسير جسم على خط مستقيم ، و يمكن تحديد موقعه باستعمال الدالة الزمنية $s(t) = 2 + 7t - t^2$ حيث t الزمن بالثواني .

في أي من الأزمنة التالية يتحرك هذا الجسم إلي اليسار ؟

A $t = 0$

B $t = 1$

C $t = 2$

D $t = 4$

$v(t) = 7 - 2t$

نعوض بالأزمنة والذي يطلع سالب هو اليسار

$v(4) = 7 - 2(4)$

$= -1$

23 أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \frac{7}{x^4}$.

A $\frac{dy}{dx} = 4x^2$

B $\frac{dy}{dx} = 28x^2$

C $\frac{dy}{dx} = \frac{-7}{x^5}$

D $\frac{dy}{dx} = \frac{-28}{x^5}$

$y = 7x^{-4}$ عدل

$y' = -28x^{-5}$ اشتق

$y' = \frac{-28}{x^5}$

24 أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند $x = 1$ حيث $f(x) = \frac{6}{x}$.

A -6

B -3

C 3

D 6

$f(x) = 6x^{-1}$ عدل

$f'(x) = -6x^{-2}$ اشتق

$f'(1) = -6(1)^{-2} = -6$

25 أوجد مشتقة الدالة الآتية $y = \sqrt{x} + 2e^2$.

A $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

B $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

C $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{x} + 4e$

D $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 4e$

$y = x^{\frac{1}{2}} + \cancel{2e^2}$ عدل

$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ اشتق

26 أوجد المشتقة من اليمين للدالة $y = f(x)$ عند $x = 1$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & , \quad x \geq 1 \\ 4x - 1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

بما أنه توجد علاقة = لذا اشتق وعوض

$f'(x) = 4x$

$f'(1) = 4(1) = 4$

A 2

B 3

C 4

D غير موجودة

27 أوجد المشتقة من اليسار للدالة $y = f(x)$ عند $x = 1$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & , \quad x \geq 1 \\ 4x - 1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

بما أنه لا يوجد علاقة = والدالة غير متصلة

لأن النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار

إذن المشتقة من اليسار غير موجودة.

A 2

B 3

C 4

D غير موجودة

28 أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ عند $x = 1$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & , \quad x \geq 1 \\ 4x - 1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^+} 2x^2 = 2$

$\lim_{x \to 1^-} 4x - 1 = 3$

الدالة غير متصلة لأن النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار لذا المشتقة غير موجودة.

A 2

B 3

C 4

D غير موجودة

29 إذا كانت الدالة $f(x) = x^2$ أوجد $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f'(x) = 2x$

A $xh + h$

B $2xh + h$

C $2x + h$

D $2x$

30 أوجد المشتقة من اليسار للدالة $y = f(x)$ عند $x = 3$ حيث

$f(x) = |x - 3|$

- [X] -1
- [B] -2
- [C] 1
- [D] 4

* أعد التعريف أولاً لتحديد اليمين واليسار.

$-x+3$ | 3 | $x-3$

$-$ | $+$

اشتق

-1

* اشتق اليسار وعوض

$f'(3) = -1$

31 أوجد المشتقة من اليمين للدالة $y = f(x)$ عند $x = 3$ حيث

$f(x) = |x - 3|$

اشتق

1

$f'(3) = 1$

- [A] -1
- [B] -2
- [X] 1
- [D] 4

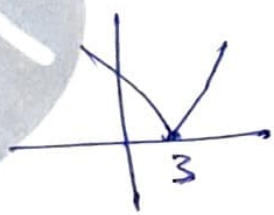
32 أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ عند $x = 3$ حيث

$f(x) = |x - 3|$

- [A] -1
- [B] -2
- [C] 1
- [X] غير موجودة

غير موجودة لأن المشتقة عند اليسار $\neq$ المشتقة عند اليمين

(دالة المطلق تكون زاوية)



33 أي الخيارات التالية لا يساوي $\frac{d}{dx}(4x^3 - 6x^{-2})$ ؟

اشتق

$= 12x^2 + 12x^{-3}$

$= 12x^2 + \frac{12}{x^3}$

- [X] $\frac{12x^2+12}{x^3}$
- [B] $\frac{12x^5+12}{x^3}$
- [C] $12x^2 + \frac{12}{x^3}$
- [D] $12x^2 + 12x^{-3}$

ميل المماس = المشتقة الأولى

$x_2\ y_2$ $x_1\ y_1$

34 إذا كان المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(1, 6)$ يمر في النقطة $(-1, -4)$ ، فإن $f'(1)$ تساوي .

A -1

B 1

C 5

D 6

$$f'(1) = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 6}{-1 - 1} = 5$$

$x_2\ y_2$ $x_1\ y_1$

35 إذا كان العمودي على منحنى الدالة f عند النقطة $(1, 2)$ يمر في النقطة $(-1, 1)$ ، أي مما يلي يساوي $f'(1)$ ؟

A -2

B $-\frac{1}{2}$

C $\frac{1}{2}$

D 2

$$\text{ميل العمودي } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 2}{-1 - 1} = \frac{1}{2}$$

$f'(1) =$ ميل المماس $= -2$ نقلب وغير الإشارة

36 أي الخيارات التالية يصف $f'(x)$ مشتقة الدالة التربيعية $f(x)$ ؟

A تربيعية

B خطية

C ثابتة

D تكعيبية

37 أي الخيارات التالية يصف $f'(x)$ مشتقة الدالة الخطية $f(x)$ ؟

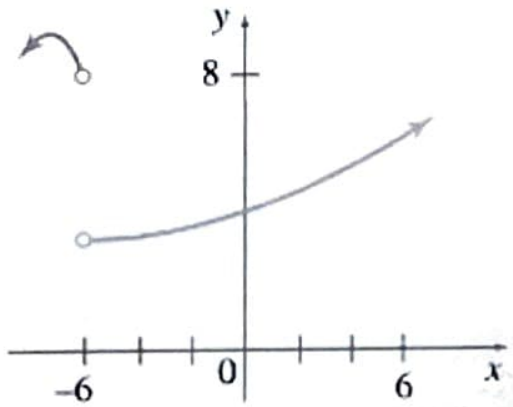
A تربيعية

B خطية

C ثابتة

D تكعيبية

38 حدد قيمة x التي عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق.



A -8

B -6

C 0

D 8

39 أوجد $D_p(3p^{\frac{5}{3}})$.

$= (3)(\frac{5}{3})p^{\frac{2}{3}}$

$= 5p^{\frac{2}{3}}$

A $p^{\frac{5}{3}}$

B $p^{\frac{2}{3}}$

C $3p^{\frac{2}{3}}$

D $5p^{\frac{2}{3}}$

40 ينتشر أحد فيروسات الانفلونزا طبقاً للقاعدة $P(t) = 50\ e^{0.5t}$ حيث P عدد الأفراد المصابين بالعدوى بعد t يوم . ما معدل انتشار الفيروس خلال اليوم الثاني لأقرب عدد صحيح ؟

اشتق وعوض

$p'(t) = (50)(0.5)\ e^{0.5t}$

$p'(2) = (50)(0.5)\ e^{0.5(2)}$

$\approx \boxed{68}$

A 41

B 68

C 118

D 136

41 معتمداً على بيان الجدول الموضح أدناه .

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	2	3	6	1

أوجد $(f \cdot g)'(1)$.

A 2

B 3

C 16

D 20

$(f \cdot g)'(1) = (f')(g) + (f)(g')$

$= (3)(6) + (2)(1)$

$= 20$

ضرب

42 أوجد دالة ميل المماس للدالة $f(x) = x \tan x$.

A $x\, sec^2 x + \tan x$

B $1 + sec^2 x$

C $x\, sec^2 x$

D $x\, tan^2 x$

$f'(x) = (1)(\tan x) + (x)(sec^2 x)$

43 إذا كان $y = \cos x$ ما ناتج $y + y''$.

A 0

B 1

C $2 \cos x$

D $\cos x + \sin x$

$y' = -\sin x$

$y'' = -\cos x$

$y + y'' = \cos x + (-\cos x) = 0$

44 أيّ من الاتي صحيح بالنسبة للدالة $y = \sin x + e^x$.

A $y = \frac{d^4y}{dx^4}$

B $y = \frac{d^2y}{dx^2}$

C $\frac{dy}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$

D $\frac{dy}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4}$

$\frac{dy}{dx} = \cos x + e^x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x + e^x$

$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x + e^x$

$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x + e^x$

اشتق 4 مرات
ثم قارن بالاجابات

45 أوجد ميل المماس للدالة $f(x) = e^{5x} - \frac{1}{2}x^2$ عند $x = 0$.

A 0

B 1

C 4

D 5

$f'(x) = 5e^{5x} - x$

$f'(0) = 5e^{0} - 0 = 5$

46 لديك الدالة $f(x) = \cancel{ln}(x^2 + 1)$ ، أوجد $f'(x)$.

A $f'(x) = 2x$

B $f'(x) = x^2 + 1$

C $f'(x) = \frac{x}{x^2+1}$

D $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

- احذف ln
- شد خط
خط الى جوه
ما تحت
- اشتق فوق

47 إذا كان $f(2) = 1$ و $f'(2) = -2$ و $g(2) = -4$ و $g'(2) = 3$

أوجد قيمة $(f.g)'(2)$.

A -6

B -5

C 10

D 11

$(f.g)'(2) = (f')(g) + (f)(g')$

$= (-2)(-4) + (1)(-3)$

$= 11$

48 أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \tan 3x + \cancel{\sin 30^\circ}$.

A $sec^2 3x$

B $3sec^2 3x$

C $sec^2 3x + cos\ 30^\circ$

D $3sec^2 3x + cos\ 30^\circ$

$\frac{dy}{dx} = 3\sec^2 3x$

49 تنتشر الإشاعات بين عدد من الطلاب خلال t يوماً تبعاً للعلاقة $N(t) = 2e^{1.24\,t}$ حيث t الزمن بالأيام ، N عدد الطلاب .

ما معدل انتشار الإشاعات بين الطلاب عندما $t = 5$ ؟

A $611\ N.t^{-1}$

B $985\ N.t^{-1}$

C $1222\ N.t^{-1}$

D $2798\ N.t^{-1}$

$N'(t) = (2)\ (1.24)\ e^{1.24t}$

$N'(5) = (2)\ (1.24)\ e^{1.24(5)}$

$= 1222\ N.t^{-1}$

50 إذا كانت الدالة $x^2 + 4y^2 = 4$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1, -1)$.

A $-4\frac{1}{2}$

B $-\frac{1}{4}$

C $\frac{1}{4}$

D $4\frac{1}{4}$

$2x + 8yy' = 0$

$8yy' = -2x$

$y' = \frac{-2x}{8y}$

$y' = \frac{-2(1)}{8(-1)} = \frac{1}{4}$

51 إذا كانت $f'(4) = 3\ ,\ g'(4) = 5$ أوجد : $(2f + g)'(4)$.

A 8

B 11

C 13

D 16

$2f'(4) + g'(4) = 2(3) + 5$

$= 11$

52 إذا كانت $g(x) = x^2.f(x)$ ، $g'(2) = 5$ ، $f(2) = -1$ أوجد : $f'(2)$.

A $\frac{4}{9}$

B $\frac{4}{5}$

C $\frac{5}{4}$

D $\frac{9}{4}$

$g'(x) = (2x)(f(x)) + (x^2)(f'(x))$

$g'(2) = (2(2))\ f(2) + 2^2\ f'(2)$

$5 = (4)(-1) + (4)\ f'(2)$

$5 + 4 = 4\ f'(2)$

$f'(2) = \frac{9}{4}$

53 إذا كانت $y = \frac{3x+4}{4x+3}$ أوجد : $\frac{dy}{dx}$.

A $\frac{-25}{(4x+3)^2}$

B $\frac{-7}{(4x+3)^2}$

C $\frac{7}{(4x+3)^2}$

D $\frac{25}{(4x+3)^2}$

$$y = \frac{3x+4}{4x+3} \quad 3 \quad 4 \quad 12x+16$$

$$y' = \frac{(3)(4x+3) - (4)(3x+4)}{(4x+3)^2}$$

$$= \frac{\cancel{12x} + 9 \cancel{-12x} - 16}{(4x+3)^2} = \frac{-7}{(4x+3)^2}$$

54 إذا كان $f(2) = 4$ و $f'(2) = -5$ و $g(2) = 1$ و $g'(2) = 6$

أوجد قيمة $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$.

A -29

B -11

C 19

D 59

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{g(2) \cdot f'(2) - g'(2) \cdot f(2)}{[g(2)]^2}$$

$$= \frac{(1)(-5) - (6)(4)}{(1)^2} = -29$$

55 إذا كانت $f(x) = 2x$ و $g(x) = 5x$

أوجد $(fog)'(x)$.

A $10x^2$

B $10x$

C 10

D 0

$(f \circ g)(x) = 2(5x) = 10x$ * تركيب

$(f \circ g)'(x) = 10$ * اشتقاق

56 إذا كان $y = u^2$, $u = 7x + 3$, أوجد $\frac{dy}{dx}$.

A $14x + 3$

B $2(7x + 3)$

C $(7x + 3)^2$

D $14(7x + 3)$

$$\frac{dy}{du} = 2u \qquad \frac{du}{dx} = 7$$

$$\frac{dy}{dx} = (2u)(7)$$

$$= 14u$$

$$= 14(7x+3)$$

القوس

57 إذا كانت $f(x) = (x^2 - 5x)^4$, أوجد $f'(x)$.

A $4(x^2 - 5x)^3$

B $4(2x - 5)^3$

C $4(x^2 - 5x)^3(2x - 5)$

D $4(x^2 - 5x)(2x - 5)^3$

$f'(x) = (4)(2x-5)(x^2-5x)^3$

دالة حاصل

58 إذا كانت $g'(7) = 3$, $f(x) = g(x^2 + 2x - 1)$ أوجد $f'(2)$.

A 3

B 6

C 12

D 18

$f'(x) = g'(x^2+2x-1) \cdot (2x+2)$

$f'(2) = g'(2^2+2(2)-1) \cdot (2(2)+2)$

$= g'(7) \cdot 6$

$= 3 \times 6 = 18$

59 إذا كانت دالة الميل للدالة $f(x)$ هي $3x^2 - 2x + 2$ أوجد $f''(1)$.

A 0

B 3

C 4

D 6

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$

$f''(x) = 6x - 2$

$f''(1) = 6(1) - 2 = 4$

60 أوجد ميل المماس للدالة $f(x) = e^x$ عند النقطة $(0, 1)$.

A 0

B 1

C e

D غير معرفة

$f'(x) = e^x$

$f'(0) = e^0 = 1$

61 أوجد $D_x(e^{3lnx})$.

A $\frac{1}{x}$

B $\frac{3}{x}$

C 3

D $3x^2$

$= D_x(e^{\ln x^3})$

$= D_x(x^3)$

$= 3x^2$

62 أي من الدوال التالية تحقق العلاقة : $f(x) + f''(x) = 0$

A $e^x \rightarrow e^x \rightarrow e^x$

B $e^{-x} \rightarrow -e^{-x} \rightarrow e^{-x}$

C $\sin x \rightarrow \cos x \rightarrow -\sin x$

D $\tan x \rightarrow \sec^2 x$

$f(x) + f''(x)$

$= \sin x + (-\sin x)$

$= 0$

63 انظر إلي الدالة $f(x) = xe^x$ ، ما ميل الدالة المعطاة عند $x = 2$.

A e^2

B $2e^2$

C $3e^2$

D $4e^2$

$f'(x) = (1)(e^x) + (x)(e^x)$

$f'(2) = 1e^2 + 2e^2 = 3e^2$

64 اذا كان $y = (x-1)^5$ ، فأوجد $\frac{d3y}{dx^3}$ عند $x = 0$.

A $\frac{d3y}{dx^3} = 5$

B $\frac{d3y}{dx^3} = 20$

C $\frac{d3y}{dx^3} = 60$

D $\frac{d3y}{dx^3} = 120$

$y' = (5)(1)(x-1)^4$

$= 5(x-1)^4$

$y'' = (20)(1)(x-1)^3$

$= 20(x-1)^3$

$y''' = (60)(1)(x-1)^2$

$= (60)(1)(0-1)^2$

$= 60$

65 أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = 2x - \sin x + \cancel{\tan \pi}$.

$y' = 2 - \cos x$

A $\frac{dy}{dx} = 2 - \cos x$

B $\frac{dy}{dx} = 2 + \cos x$

C $\frac{dy}{dx} = 2 - \cos x + \sec^2 \pi$

D $\frac{dy}{dx} = 2 + \cos x + \sec^2 \pi$

66 أي من المتطابقات ضروري لإثبات أن $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

A $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

B $\lim_{h \to 0} \frac{e^h}{h} = 0$

C $\lim_{h \to 0} (e^{x+h} - e^x) = 1$

D $\lim_{h \to 0} e^{x+h} = 1$

67 اشتق الدالة $f(x) = 5.5e^{-2x}$.

$f'(x) = (5.5)(-2)e^{-2x}$

$= -11e^{-2x}$

A $-11e^{-3x}$

B $-11e^{-2x}$

C $-2e^{-2x}$

D $5.5e^{-2x}$

دالة حاصل

68 إذا كان $y = f(3x^4)$, $f'(3) = -2$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$.

$y' = f'(3x^4) \cdot 12x^3$

$= f'(3(1)^4) \cdot 12(1)^3$

$= f'(3) \cdot 12$

$= -2 \cdot 12$

$= -24$

A -24

B -2

C 10

D 12

قسمة

69 اشتق الدالة $f(t) = \frac{t}{t+1}$ بالنسبة للمتغير t لإيجاد $f^{\backslash}(t)$.

A 1

B $2t + 1$

C $\frac{1}{(t+1)^2}$

D $\frac{t^2-1}{(t+1)^2}$

$f(t) = \frac{t}{t+1}$

$f'(t) = \frac{(1)(t+1) - (1)(t)}{(t+1)^2}$

$= \frac{\cancel{t}+1-\cancel{t}}{(t+1)^2} = \frac{1}{(t+1)^2}$

70 إذا كان $f(x) = e^{2-2x}$ أوجد $f^{\backslash}(x)$.

A $f^{\backslash}(x) = 2e^{2-2x}$

B $f^{\backslash}(x) = -2e^{2-2x}$

C $f^{\backslash}(x) = e^{2-2x}$

D $f^{\backslash}(x) = -e^{2-2x}$

$f'(x) = -2e^{2-2x}$

71 إذا كان $\frac{dy}{dx} = x^2 - 5x + 1$, أوجد $\frac{d3y}{dx^3}$.

A 0

B 2

C $2x - 5$

D $x^2 - 5x + 1$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 5$

$\frac{d^3y}{dx^3} = 2$

72 إذا كانت $f(x) = \cancel{k} + 2kx^3 + k^2x^4$ وكانت $f^{\backslash\backslash\backslash}(0) = 24$ ، أوجد قيمة الثابت k .

A 0

B 1

C 2

D 3

$f'(x) = 6kx^2 + 4k^2x^3$

$f''(x) = 12kx + 12k^2x^2$

$f'''(x) = 12k + 24k^2x$

$f'''(0) = 12k + \cancel{24k^2(0)} = 24$

$12k = 24$

$k = 2$

حسب

73 ما مشتقة $f(x) = \frac{\tan x}{x+1}$ عند $x = 0$ ؟

A -3

B -2

C 1

D 2

$f(x) = \frac{\tan x}{x+1}$ $\quad \tan x \to \sec^2 x$, $\quad x+1 \to 1$

$f'(x) = \frac{(\sec^2 x)(x+1) - (\tan x)(1)}{(x+1)^2}$

$f'(0) = \frac{(\sec^2(0))(0+1) - (\tan 0)}{(0+1)^2} = 1$

74 إذا كانت $f(x) = ln(4x-1)^{\frac{1}{2}}$ ، أوجد $\frac{df(x)}{dx}$.

A $\frac{2}{4x-1}$

B $\frac{-4}{4x-1}$

C $\frac{-1}{(4x-1)^{\frac{1}{2}}}$

D $\frac{1}{(4x-1)^{\frac{1}{2}}}$

حل ①

$f(x) = \frac{1}{2} \ln(4x-1)$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4x-1}$

$= \frac{2}{4x-1}$

حل ②

$f(x) = \ln(4x-1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{(\frac{1}{2})(4)(4x-1)^{-\frac{1}{2}}}{(4x-1)^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{2}{4x-1}$

75 إذا كان $f(x) = 6\cos x$ وكانت $\lim_{h\to 0} \frac{f(\frac{\pi}{2}+h) - f(\frac{\pi}{2})}{h} = 2k$

أوجد قيمة الثابت k .

A -3

B -2

C 2

D 3

$f'(\frac{\pi}{2}) = 2k$

$f'(x) = -6\sin x$

$f'(\frac{\pi}{2}) = -6\sin(\frac{\pi}{2})$

$= -6$

$2k = -6$

$k = -3$

76 أوجد $\lim_{h\to 0} \frac{ln(x+h) - ln\, x}{3h}$.

A $\ln x$

B $\frac{1}{x}$

C $\frac{1}{3x}$

D $\frac{3}{x}$

$\frac{1}{3} \lim \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$

$\frac{1}{3} D_x[\ln x]$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3x}$

77 إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x) = e^{ax}$ عند $x = 0$ هو 4 ، فما قيمة a .

A -1

B $\frac{1}{4}$

C 1

D 4

$f'(x) = a e^{ax}$

$f'(0) = a e^{0} = a$

$a = 4$

78 إذا كان $\frac{dy}{dx} = ax^3 - x^2 + 4$ ، أوجد $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$.

A $3ax^2 - 2x$

B $6ax - 2$

C $3ax - 2$

D $6a$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3ax^2 - 2x$

قوس

79 أي مما يلي يساوي $\frac{d}{dx}[x^2 + 3]^2$

A $2(x^2 + 3)$

B $2x(x^2 + 3)$

C $4x(x^2 + 3)$

D $4x(x^2 + 3)^2$

$= 2(2x)(x^2+3)^1$

$= 4x(x^2+3)$

80 أي مما يلي هو مجال $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = ln(x + 3)$ ؟

A $x < -3$

B $x > -3$

C $x \leq 3$

D $x \geq 3$

$f'(x) = \frac{1}{x+3}$ (المجال حسب الشكل هو $R-\{-3\}$)

مجال المشتقة جزء من مجال الدالة الأصلية

مجال $f(x)$ هو $x > -3$

مجال $f'(x)$ هو $x > -3$

81 أي مما يلي يعطي ميل المماس لمنحنى الدالة $y = e^{1-x}$ عند $x = 2$ ؟

A $\frac{-1}{e}$

B $\frac{1}{e}$

C $-e$

D e

$y' = -1 e^{1-x}$

$y'\Big|_{x=2} = -1 e^{1-2} = -e^{-1} = \frac{-1}{e}$

82 أوجد الدالة التي تحقق أن $f''(x) = f(x)$.

A $f(x) = e^{-x}$ $\xrightarrow{f'} -e^{-x} \longrightarrow f''\ e^{-x}$

B $f(x) = e^{2x}$ $\rightarrow 2e^{2x} \rightarrow 4e^{2x}$

C $f(x) = \sin x$ $\rightarrow \cos x \rightarrow -\sin x$

D $f(x) = \cos x$ $\rightarrow -\sin x \rightarrow -\cos x$

83 أوجد الدالة التي تحقق أن $f(x) = f'(x)$.

A $f(x) = e^{x}$ $\xrightarrow{f'} e^{x}$

B $f(x) = e^{-x}$ $\rightarrow -e^{-x}$

C $f(x) = e^{2x}$ $\rightarrow 2e^{2x}$

D $f(x) = e^{-2x}$ $\rightarrow -2e^{-2x}$

84 إذا كانت $f(x) = ln(2x^3 + 1)$ ، أوجد $f'(x)$.

$f'(x) = \dfrac{6x^2}{2x^3+1}$

A $\frac{1}{2x^3+1}$

B $\frac{6x^2}{2x^3+1}$

C $\frac{6x}{2x^3+1}$

D $\frac{6x^2+1}{2x^3+1}$

ضرب

85 أوجد y'' إذا كان $y = x \sin x$.

$y' = (1)(\sin x) + (x)(\cos x)$

ضرب

$y'' = \cos x + (1)(\cos x) + (x)(-\sin x)$

$= \cos x + \cos x - x \sin x$

$= 2\cos x - x \sin x$

A $-x \sin x$

B $x \sin x$

C $-x \sin x + 2 \cos x$

D $x \cos x + \sin x$

86 إذا كان $f(x) = 3x \cos x$ ، أوجد $f'(x)$.

$f'(x) = (3)(\cos x) + (3x)(-\sin x)$

$= 3\cos x - 3x \sin x$

A $-3 \sin x$

B $3 \cos x$

C $3 \cos x - 3x \sin x$

D $3 \cos x + 3x \sin x$

87 أي مما يلي يمثل معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = \sin x + \cos x$ عند $x = \pi$ ؟

A $y = -x + \pi - 1$

B $y = -x + \pi + 1$

C $y = x - \pi - 1$

D $y = x + \pi + 1$

$y' = \cos x - \sin x$

$y' = \cos\pi - \sin\pi$

$= -1$

$m = -1$

$x_1 = \pi$

$y_1 = \sin\pi + \cos\pi$

$= -1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 1 = -1(x - \pi)$

$y + 1 = -x + \pi$

$\boxed{y = -x + \pi - 1}$

88 أي مما يلي يمثل معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة $y = \sin x + \cos x$ عند $x = \pi$ ؟

اقلب وغير الإشارة

A $y = -x + \pi - 1$

B $y = -x + \pi + 1$

C $y = x - \pi - 1$

D $y = x + \pi + 1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 1 = 1(x - \pi)$

$y + 1 = x - \pi$

$y = x - \pi - 1$

$m = 1$

$x_1 = \pi$

$y_1 = -1$

89 يتحرك جسم في حركة وفق الدالة $s(t) = \cancel{3} + \sin t$

في أي من الأزمنة التالية تكون سرعة الجسم 0 ؟

A $t = 0$

B $t = \frac{\pi}{4}$

C $t = \frac{\pi}{2}$

D $t = \pi$

$v(t) = \cos t$

$v(t) = 0$

$\cos t = 0$

$t = \cos^{-1}(0)$

$= \frac{\pi}{2}$

90 إذا كان $y^2 = \cancel{25} + 4x^2$, أوجد $\frac{dy}{dx}$.

A $\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{y}$

B $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{y}$

C $\frac{dy}{dx} = 8x$

D $\frac{dy}{dx} = 8x - 2y$

$2yy' = 8x$

$y' = \frac{8x}{2y}$

$y' = \frac{4x}{y}$

91 أي مما يلي يساوي ميل مماس العلاقة $y^2 - x^2 = 1$ عند النقطة $(1, \sqrt{2})$.

A $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

B $-\sqrt{2}$

C $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D $\sqrt{2}$

$2yy' - 2x = 0$

$2yy' = 2x$

$y' = \frac{2x}{2y}$

$y' = \frac{x}{y}$

$y' = \frac{1}{\sqrt{2}}$

92 إذا كان $\sin y = x + 3$, أوجد دالة $\frac{dy}{dx}$.

A $\frac{dy}{dx} = 1 - \cos y$

B $\frac{dy}{dx} = \cos y$

C $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$

D $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3}{\cos y}$

$y' \cos y = 1$

$y' = \frac{1}{\cos y}$

93 إذا كان $y = \ln(\cos x)$, أوجد دالة $\frac{dy}{dx}$.

A $\frac{dy}{dx} = \sin x$

B $\frac{dy}{dx} = \cos x$

C $\frac{dy}{dx} = -\tan x$

D $\frac{dy}{dx} = \cot x$

$y' = \frac{-\sin x}{\cos x}$

$y' = -\tan x$

94 إذا كان $y = \ln(\sin x)$, أوجد دالة $\frac{dy}{dx}$.

A $\frac{dy}{dx} = \sin x$

B $\frac{dy}{dx} = \cos x$

C $\frac{dy}{dx} = -\tan x$

D $\frac{dy}{dx} = \cot x$

$y' = \frac{\cos x}{\sin x}$

$y' = \cot x$

عند الإجابة على الأسئلة التالية ، اكتب إجاباتك في المساحات المخصصة لذلك مع توضيح خطوات الحل :

1

لتكن الدالة $f(x) = x^2 - 5$.

A. أوجد باستخدام تعريف المشتقة $f'(x)$.

(وضح خطوات الحل)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \cancel{-5} \cancel{-x^2} \cancel{+5}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x+h)$$

$$= 2x + 0 = 2x$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 5$$

$$= x^2 + 2xh + h^2 - 5$$

$$f(x) = x^2 - 5$$

لا تنس تغيير الإشارات

B. أوجد $f'(4)$ و فسرها .

(وضح خطوات الحل)

$$f'(4) = 2(4) = 8$$

ميل المماس عند النقطة $(4, 11)$ هو 8

2

لتكن الدالة $f(x) = 3x + 4$.

A. أوجد باستخدام تعريف المشتقة $f'(x)$.

(وضح خطوات الحل)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = 3(x+h)+4$$
$$= 3x+3h+4$$
$$f(x) = 3x+4$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3x}+3h\cancel{+4}\cancel{-3x}\cancel{-4}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3 = 3$$

B. أوجد $f'(2)$ و فسرها .

(وضح خطوات الحل)

$f'(2) = 3$

ميل المماس عند النقطة $(2, 10)$ هو 3

لتكن الدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

A. أوجد باستخدام تعريف المشتقة $f'(x)$.

(وضح خطوات الحل)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x+h) = \sqrt{x+h}$

$f(x) = \sqrt{x}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

B. أوجد $f'(9)$ و فسرها .

(وضح خطوات الحل)

$$f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

ميل المماس عند النقطة $(9, 3)$ هو $\frac{1}{6}$

A. أوجد ميل المماس للدالة $y = \frac{x^2+3}{2x}$ عند $x = 1$.

(وضح خطوات الحل)

$$y = \frac{x^2+3}{2x} \quad \begin{matrix} \to 2x \\ \to 2 \end{matrix}$$

$$y' = \frac{(2x)(2x) - (2)(x^2+3)}{(2x)^2}$$

$2x^2+6$ تغيير الاشارات

$$= \frac{4x^2 - 2x^2 - 6}{(2x)^2}$$

$$= \frac{2x^2-6}{(2x)^2}$$

ميل المماس $\left| y' \right|_{x=1} = \frac{2(1)^2-6}{(2(1))^2} = -1$

B. أوجد معادلة العمودي عند $x = 1$.

(وضح خطوات الحل)

(اقلب وغير الاشارة)

ميل العمودي

$m = \frac{-1}{-1} = 1$

$x_1 = 1$

$y_1 = \frac{(1)^2+3}{2(1)} = 2$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 1(x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$y = x - 1 + 2$$

$$\boxed{y = x + 1}$$

5

A. أوجد ميل المماس للدالة $y = x^2 - 3x + 2$ عند $x = 3$.

(وضح خطوات الحل)

$y' = 2x - 3$

ميل المماس $y'\big|_{x=3} = 2(3) - 3 = 3$

B. أوجد معادلة المماس عند $x = 3$.

(وضح خطوات الحل)

$m = 3$

$x_1 = 3$

$y_1 = (3)^2 - 3(3) + 2$
$= 2$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = 3(x - 3)$

$y - 2 = 3x - 9$

$y = 3x - 9 + 2$

$\boxed{y = 3x - 7}$

6

A. أوجد y' للدالة $y = \sqrt[3]{x^7}$.

(وضح خطوات الحل)

$y = x^{\frac{7}{3}}$

$y' = \frac{7}{3} x^{\frac{4}{3}}$

B. أوجد y' للدالة $y = 3\ln x + e^{-2x}$.

(وضح خطوات الحل)

$y' = 3\frac{1}{x} + (-2)e^{-2x}$

$= \frac{3}{x} - 2e^{-2x}$

7

باستعمال المشتقة من جهة واحدة ، بين أن الدالة $f(x)$ ليس لها مشتقة عند $x = 1$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad x \geq 1 \\ 2x - 1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

(وضح خطوات الحل)

ابحث الاتصال

① $f(1) = 3(1)^2 = 3$

② $\lim_{x \to 1^-} 2x - 1 = 2(1) - 1 = 1$

$\lim_{x \to 1^+} 3x^2 = 3(1)^2 = 3$

$\lim_{x \to 1} f(x)$ غير موجودة

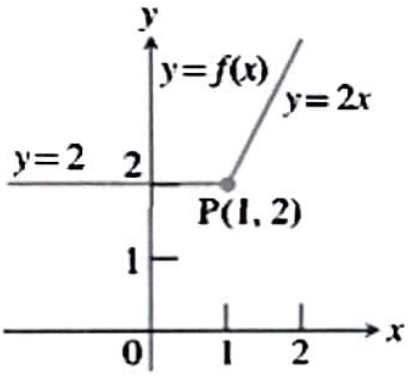
③ $f(x)$ غير متصلة عند $x=1$

المشتقة غير موجودة عند $x=1$

8

قارن بين المشتقة من جهة اليمين و المشتقة من جهة اليسار

لتبين أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند النقطة P .



$P(\overset{x}{1},\overset{y}{2})$

(وضح خطوات الحل)

$y = 2$

(1) $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2 - 2}{h}$

$= \lim_{h \to 0^-} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0^-} 0 = 0$

$y = 2x$

(2) $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2(1+h) - 2(1)}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{2} + 2h - \cancel{2}}{h}$

$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2$

لا النهاية غير موجودة عند $x = 1$

لأن (1) ≠ (2)

9

اثبت أن ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^3}$ عند أي نقطة من المنحنى عدد سالب .

(وضح خطوات الحل)

$f(x) = (2x+1)^{-3}$

$f'(x) = (-3)(2)(2x+1)^{-4}$

$= \frac{-6}{(2x+1)^4}$ → ⊖ / → ⊕

$\frac{-6}{(2x+1)^4} < 0$ دائماً

يساوي سالب (دائماً موجب)

A. أوجد $D_x(\frac{x^3+3x^2-5}{8})$.

الإجابة : $= \frac{3x^2+6x}{8}$

B. أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{x^5}$.

$y = 2x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-5}$

الإجابة : $y' = \frac{-2}{3}x^{-\frac{4}{3}} + 15x^{-6}$

$y' = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{15}{x^6}$

C. حدد قيم x التي عندها المماس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x + 1}$ أفقياً.

(وضح خطوات الحل)

$f(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = (\frac{1}{2})(3x^2 - 12x + 9)(x^3 - 6x^2 + 9x + 1)^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 0$

$= \frac{3x^2 - 12x + 9}{2\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x + 1}} = 0$

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \div 3$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 3)(x - 1) = 0$

$x = 3 \quad | \quad x = 1$

11

لنفرض أن u , v دالتان بدلالة x و هما قابلتان للاشتقاق عند $x = 0$

و أن $u(0) = 2$ ، $u'(0) = -3$ ، $v(0) = -1$ ، $v'(0) = 4$.

أوجد قيم المشتقات التالية عند $\boxed{x = 0}$

A. $\frac{d}{dx}(uv) = u'.v + u.v'$

الإجابة : $= (-3)(-1) + (2)(4) = 11$

B. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(v)(u') - (v')(u)}{(v)^2}$

الإجابة : $= \frac{(-1)(-3) - (4)(2)}{(-1)^2} = -5$

C. $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{(u)(v') - (u')(v)}{(u)^2}$

الإجابة : $= \frac{(2)(4) - (-3)(-1)}{(2)^2} = \frac{5}{4}$

D. $\frac{d}{dx}(7v - 3u) = 7v' - 3u'$

الإجابة : $= 7(4) - 3(-3) = 37$

12

أوجد ميل المماس للدالة $f(x) = \frac{2e^x}{x^2+1}$ عند $x = 0$.

(وضح خطوات الحل)

$f(x) = \frac{2e^x}{x^2+1}$ $\begin{matrix} \longrightarrow 2e^x \\ \longrightarrow 2x \end{matrix}$

$f'(x) = \frac{(2e^x)(x^2+1) - (2x)(2e^x)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{2e^x x^2 + 2e^x - 4xe^x}{(x^2+1)^2}$

$f'(0) = \frac{\cancel{2e^0(0)^2} + 2e^0 - \cancel{4(0)e^0}}{(0^2+1)^2} = \frac{2}{(1)^2} = 2$

13

تبين لشركة تصنع نوعاً من الحواسيب أن الموظف الجديد قادر على تجميع $P(d)$ حاسوب بعد d يوم من التدرب حيث $P(d) = \frac{100d^2}{3d^2+10}$.

A. أوجد دالة معدل تغير عدد الحواسيب المجمعة بدلالة زمن تدرب الموظف .

(وضح خطوات الحل)

$$P(d) = \frac{100d^2}{3d^2+10} \quad \begin{matrix} \to 200d \\ \to 6d \end{matrix}$$

$600d^3$

$$P'(d) = \frac{(200d)(3d^2+10) - (6d)(100d^2)}{(3d^2+10)^2}$$

غير اشارة

$$= \frac{\cancel{600d^3} + 2000d - \cancel{600d^3}}{(3d^2+10)^2}$$

$$= \frac{2000d}{(3d^2+10)^2}$$

B. أوجد $P'(2)$ و فسرها .

(وضح خطوات الحل)

$$P'(2) = \frac{2000(2)}{(3(2)^2+10)^2} \simeq 8$$

يزداد عدد الحواسيب المجمعة في اليوم الثالث عن اليوم الثاني بمقدار 8 حواسيب .

14

تسرب زيت من خزان على الأرض مشكلاً بقعة دائرية و أخذت تكبر بمرور الزمن وفق العلاقة $r(t) = 2t$ حيث $r(t)$ طول نصف قطر البقعة بالأقدام بعد مرور t دقيقة .

السلسلة

أوجد معدل التغير اللحظي لمساحة البقعة النفطية بدلالة الزمن ؟

(وضح خطوات الحل)

$r(t) = 2t$ | $A(r) = \pi r^2$

اشتق

$\frac{dr}{dt} = 2$ | $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

اضرب

$$\frac{dA}{dt} = (2)(2\pi r) \Rightarrow = (2)(2\pi(2t))$$

$$= 8\pi t$$

A. أوجد $\frac{d}{dx}(e^{3x} - cos(\sqrt{7}x) + ln\, x)$. اشتق

الإجابة : $= 3e^{3x} + \sqrt{7}\sin(\sqrt{7}x) + \frac{1}{x}$

B. أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = 12\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^4}$.

$y = 12x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-4}$

الإجابة :

$y' = 4x^{-\frac{2}{3}} + 8x^{-5}$

$y' = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8}{x^5}$

C. حدد قيم x التي عندها المماس لمنحنى الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$ أفقياً.

(وضح خطوات الحل)

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 0$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x - 24 = 0$ $\div 3$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

$x = 4 \mid x = -2$

الدوال المركبة

16

عندما تكون المدن تحت تأثير الانعكاس الحراري تصبح الملوثات غير قادرة على الانتشار رأسياً بل تبقى محاصرة و تنتشر أفقياً .

لنفترض أن مدخنة أحد المصانع تبدأ بتأثير الانعكاس الحراري ببعث الملوثات عند الساعة $8\ a.m$ و أن تلك الملوثات تنتشر أفقياً على شكل دائرة .

إذا كان t يمثل الزمن بالساعات منذ بدء انبعاث الملوثات ($t = 0$ يمثل الساعة 8 صباحاً)

و طول نصف قطر الدائرة بالأميال التي سببتها الملوثات المنبعثة هو $r(t) = 2t$ فإن مساحة هذه الدائرة تساوي $A = \pi r^2$.

A. أوجد $A(r(t))$ و فسرها .

(وضح خطوات الحل)

$A(r(t)) = \pi (2t)^2 = \pi 4t^2 = 4\pi t^2$

مساحة دائرة التلوث بالنسبة للزمن

B. أوجد $D_t[A(r(t))]$ و فسرها .

(وضح خطوات الحل)

$D_t[A(r(t))] = D_t[4\pi t^2]$

$= 8\pi t$

يزداد معدل مساحة دائرة التلوث بالنسبة للزمن .

A. أوجد ميل المماس للدالة $y = \frac{x^2-1}{3x+5}$ عند $x = -3$. تمرة

(وضح خطوات الحل)

$$y = \frac{x^2-1}{3x+5} \quad \begin{matrix} \to 2x \\ \to 3 \end{matrix}$$

$$y' = \frac{(2x)(3x+5) - (3)(x^2-1)}{(3x+5)^2}$$

$3x^2-3$

غير الاشارات

$$= \frac{6x^2+10x-3x^2+3}{(3x+5)^2}$$

$$= \frac{3x^2+10x+3}{(3x+5)^2}$$

$$y'\Big|_{x=-3} = \frac{3(-3)^2+10(-3)+3}{(3(-3)+5)^2} = 0$$

B. إذا كانت $f(x) = \frac{x}{4x+6}$, أوجد $f'(x)$.

(وضح خطوات الحل)

$$f(x) = \frac{x}{4x+6} \quad \begin{matrix} \to 1 \\ \to 4 \end{matrix}$$

$$f'(x) = \frac{(1)(4x+6) - (4)(x)}{(4x+6)^2}$$

$$= \frac{\cancel{4x}+6-\cancel{4x}}{(4x+6)^2}$$

$$= \frac{6}{(4x+6)^2}$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$. قسمة

A. $y = \frac{\tan x}{1+\tan x}$ $\sec^2 x$ $\sec^2 x$

(وضح خطوات الحل)

$$y' = \frac{(1+\tan x)(\sec^2 x) - (\sec^2 x)(\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec^2 x + \cancel{\sec^2 x \tan x} - \cancel{\sec^2 x \tan x}}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

B. $y = \frac{\tan x}{x-1}$ $\sec^2 x$ 1 قسمة

(وضح خطوات الحل)

$$y' = \frac{(x-1)(\sec^2 x) - (1)(\tan x)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x\sec^2 x - \sec^2 x - \tan x}{(x-1)^2}$$

19

استعمل قاعدة السلسلة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$

حيث $y = \tan u$ ، $u = 2x - x^3$. السلسلة

(وضح خطوات الحل)

$$\frac{du}{dx} = 2 - 3x^2 \quad \Big| \quad \frac{dy}{du} = \sec^2 u$$

$$\frac{dy}{dx} = (2-3x^2)(\sec^2 u)$$

$$= (2-3x^2)(\sec^2(2x-x^3))$$

20

إذا كانت $y = \sin u$ ، $u = \ln x$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ السلسلة

(وضح خطوات الحل)

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Big| \quad \frac{dy}{du} = \cos u$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\right)(\cos u)$$

$$= \frac{1}{x}\cos(\ln x)$$

21

إذا كان $t = x^2 + 3$ ، $y = 2t + 1$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$.

المسألة

(وضح خطوات الحل)

$$\frac{dy}{dt} = 2 \qquad \frac{dt}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = (2)(2x)$$

$$= 4x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 4(1) = 4$$

22

إذا كان $y = u^3 - 2u + 1$ حيث $u = \sqrt{x}$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 9$.

المسألة

(وضح خطوات الحل)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \frac{dy}{du} = 3u^2 - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(3u^2 - 2)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(3(\sqrt{x})^2 - 2)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(3x - 2)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=9} = \left(\frac{1}{2\sqrt{9}}\right)(3(9) - 2) = \frac{25}{6}$$

23

المسألة

إذا كان $u = x^2 + 1$ حيث $y = \sqrt{u}$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

(وضح خطوات الحل)

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \Big| \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)(2x)$$

$$= \left(\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right)(\cancel{2}x)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

24

المسألة

إذا كان $y = 2u - u^3$ و $u = \frac{1}{2}x^2 + 7x$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$.

(وضح خطوات الحل)

$$\frac{du}{dx} = x + 7 \quad \Big| \quad \frac{dy}{du} = 2 - 3u^2$$

$$\frac{dy}{dx} = (x+7)(2 - 3u^2)$$

$$= (x+7)\left(2 - 3\left(\tfrac{1}{2}x^2 + 7x\right)^2\right)$$

$$= 2(x+7) - 3(x+7)\left(\tfrac{1}{2}x^2 + 7x\right)^2$$

25

لنفترض أن قيم الدالة f و قيم مشتقتها الأولى عند $x = 0$ و $x = 1$ معطاة في الجدول التالي :

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	9	-2
1	-3	4

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يلي ، عند قيمة x المعطاة .

دالة حاصل

A. $f(\sqrt{x})$ عند $x = 1$.

الإجابة : $f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

قسمة

B. $\frac{f(x)}{2+x}$ عند $x = 0$.

$f'(x)$

1

الإجابة : $\frac{(2+x)(f'(x)) - f(x)}{(2+x)^2}$

$= \frac{(2+0)(f'(0)) - f(0)}{(2+0)^2} = \frac{2f'(0) - f(0)}{(2)^2}$

$= \frac{2(-2) - (9)}{4} = \frac{-13}{4}$

26

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $y = x \ln x$ عند $x = e$.

ضرب

(وضح خطوات الحل)

$y' = (1)(\ln x) + (x)\left(\frac{1}{x}\right)$

$y' = \ln x + 1$

$y'\Big|_{x=e} = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2$

لنفترض أن قيم الدالتان g و f و قيم مشتقيتهما عند $x = 3$ و $x = 2$ معطاة في الجدول التالي :

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1	3
3	3	−4	5	−7

في ما يلي ، أوجد قيمة المشتقة في كل مما يلي عند قيمة x المعطاة .

A. $2f(x)$ عند $x = 2$.

الإجابة : $2f'(x) = 2f'(2) = 2(1) = 2$

B. $f(x) + g(x)$ عند $x = 3$.

$f'(x) + g'(x) = f'(3) + g'(3) = (5) + (-7)$

الإجابة : $= -2$

C. $f(x) \cdot g(x)$ عند $x = 3$.

$[f(x) \cdot g(x)]' = f' \cdot g + f \cdot g'$

الإجابة : $= (5)(-4) + (3)(-7) = -41$

D. $\frac{f(x)}{g(x)}$ عند $x = 2$.

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

الإجابة :

$= \frac{(2)(1) - (3)(8)}{(2)^2} = -5.5$

E. $\sqrt{f(x)}$ عند $x = 2$.

الإجابة : $[\sqrt{f(x)}]' = [(f(x))^{\frac{1}{2}}]'$ قانون

$= \left(\frac{1}{2}\right)[f'(x)][f(x)]^{-\frac{1}{2}}$

$= \left(\frac{1}{2}\right) f'(2) [f(2)]^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}(1)(8)^{-\frac{1}{2}} = 0.177$

يحتوي الجدول أدناه على مجموعة من قيم الدالتين g و f و قيم مشتقتيهما عند بعض النقاط .

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	1	3
$f'(x)$	-6	-7	-8	-7
$g(x)$	2	3	4	1
$g'(x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$

استعمل الجدول لإيجاد القيم المطلوبة أدناه .

A. $D_x[f(g(x))]$ عند $x = 1$.

$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$

الإجابة : $= f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(2) \cdot \frac{2}{7}$

$= (-7) \cdot \frac{2}{7} = -2$

B. $D_x[f(g(x))]$ عند $x = 2$.

$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$

الإجابة : $= f'(g(2)) \cdot g'(2) = f'(3) \cdot \frac{3}{7}$

$= -8 \cdot \frac{3}{7} = -\frac{24}{7}$

C. $D_x[g(f(x))]$ عند $x = 1$.

$= g'(f(x)) \cdot f'(x)$

الإجابة : $= g'(f(1)) \cdot f'(1) = g'(2) \cdot -6$

$= \frac{3}{7} \cdot -6 = -\frac{18}{7}$

D. $D_x[g(f(x))]$ عند $x = 2$.

$= g'(f(x)) \, f'(x)$

الإجابة : $= g'(f(2)) \cdot f'(2) = g'(4) \cdot -7$

$= \frac{5}{7} \cdot -7 = -5$

29

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = e^{x^2+1}\sqrt{2x+3}$. ضرب

(وضح خطوات الحل)

$(2x+3)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = (2xe^{x^2+1})(\sqrt{2x+3}) + (e^{x^2+1})\left((\tfrac{1}{2})(2)(2x+3)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2x\,e^{x^2+1}\sqrt{2x+3} + \frac{e^{x^2+1}}{\sqrt{2x+3}}$$

30

في عينة من مادة مشعة (وزنها بالجرام) ، تبلغ الكمية بعد مرور t سنة $A(t) = 100e^{-0.35\,t}$.

أوجد معدل التغير اللحظي لهذه الكمية بعد مرور 3 سنوات .

(وضح خطوات الحل)

$$A'(t) = (100)(-0.35)\,e^{-0.35t}$$

$$A'(3) = (100)(-0.35)\,e^{-0.35(3)}$$

$$= -12.25$$

31

توصلت الأمم المتحدة إلي معادلة يمكن استعمالها لتقدير عدد سكان الأرض (بالملايين)و كانت كما يلي :

$$A(t) = 3100e^{0.0166\,t}$$

حيث t هو عدد السنوات منذ العام 1960 ، أوجد معدل التغير اللحظي في عدد سكان الأرض عام 2020 .

(وضح خطوات الحل)

$A'(t) = (3100)(0.0166)\ e^{0.0166t}$

$A'(60) = (3100)(0.0166)e^{0.0166(60)}$

$= 139.3$

عدد السنوات $= 2020 - 1960 = 60$

32

أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = e^{x^2} \ln x$. ضرب

(وضح خطوات الحل)

$f'(x) = (2xe^{x^2})(\ln x) + (e^{x^2})(\frac{1}{x})$

$= 2xe^{x^2} \ln x + \frac{e^{x^2}}{x}$

33

أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = (e^{3x} + \ln x)^4$. قوس

(وضح خطوات الحل)

$f'(x) = (4)(3e^{3x} + \frac{1}{x})(e^{3x} + \ln x)^3$

34

أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$.

قسمة

(وضح خطوات الحل)

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} \to \frac{2x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{(x)\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) - \ln(x^2+1)}{(x)^2}$$

35

في أية نقطة على منحنى الدالة $y = e^x + 1$ يكون المماس موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = 2x - 1$ ؟

(وضح خطوات الحل)

الميل هو

$y' = 2$ $\qquad$ $y' = e^x$

$e^x = 2$ $\qquad$ نأخذ ln للطرفين

$\ln e^x = \ln 2$

$\boxed{x = \ln 2}$ $\qquad$ $y = e^{\ln 2} + 1 = 3$

النقطة $(\ln 2, 3)$

36

في أية نقطة على منحنى الدالة $y = 2e^x - 1$ يكون المماس متعامداً مع المستقيم الذي معادلته $y = -4x - 1$ ؟

(وضح خطوات الحل)

$y' = 2e^x$ $\qquad$ $y' = -4$ ميل العمودي

ميل المماس $\frac{1}{4}$

$\frac{\cancel{2}e^x}{\cancel{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{2}$ $\qquad$ $e^x = \frac{1}{8}$

$x = \ln\left(\frac{1}{8}\right)$

$y = 2e^{\ln\left(\frac{1}{8}\right)} - 1 = \frac{-3}{4}$

النقطة $\left(\ln\left(\frac{1}{8}\right), \frac{-3}{4}\right)$

37

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

A. $y = \sin 5x$

الإجابة : $y' = 5\cos(5x)$

B. $y = 5\sin(9x^2 + 2) + \cancel{\cos\frac{\pi}{3}}$

الإجابة : $y' = (5)(18x)\cos(9x^2+2)$

$= 90x\cos(9x^2+2)$

C. $y = \cos 3x$

الإجابة : $y' = -3\sin(3x)$

D. $\tan(x^2 + \sin x)$

الإجابة : $(2x+\cos x)\sec^2(x^2+\sin x)$

38

أوجد مشتقة الدالة $y = \sin^4 x$.

(وضح خطوات الحل)

$y = [\sin x]^4$

$y' = (4)(\cos x)(\sin x)^3$

$= 4\cos x \sin^3 x$

39

أوجد مشتقة الدالة $y = cos^3(4x)$.

(وضح خطوات الحل)

$y = [\cos(4x)]^3$

$y' = (3)(-4\sin(4x))(\cos(4x))^2$

$= -12 \sin(4x) \cos^2(4x)$

40

الحسابة على نظام Rad

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $y = tan\, x$ عند $x = 0$.

(وضح خطوات الحل)

$y' = \sec^2 x$

$y'\Big|_{x=0} = \sec^2(0) = \dfrac{1}{\cos^2(0)} = 1$

41

الحسابة على نظام Rad

يتحرك جسم و يتم تحديد موقعه باستعمال المعادلة $x(t) = cos(t^2 + 1)$

عند أي زمن $t \geq 0$ على المحور x .

أوجد السرعة اللحظية (المتجهة) لهذا الجسم عند $t = 2$.

(وضح خطوات الحل)

$v(t) = -2t \sin(t^2+1)$

$v(2) = -2(2) \sin(2^2+1)$

$= 3.8$

42

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للعلاقة $x^2 - y^2 = 49$.

(وضح خطوات الحل)

$$2x - 2yy' = 0$$

$$-2yy' = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{-2y}$$

$$\boxed{y' = \frac{x}{y}}$$

43

ضرب

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للعلاقة $\boxed{3xy} + 2y^2 = 10$.

مشتقة $(3xy)$

(وضح خطوات الحل)

$$(3)(y) + (3x)(y') + 4yy' = 0$$

$$3y + 3xy' + 4yy' = 0$$

$$3xy' + 4yy' = -3y$$

$$y'(3x + 4y) = -3y$$

$$y' = \frac{-3y}{3x + 4y}$$

44

اثبت أن $\frac{dy}{dx}$ معرفة عند كل نقاط منحنى العلاقة $2y = x^2 + \sin y$.

(وضح خطوات الحل)

$2y' = 2x + y' \cos y$

$2y' - y' \cos y = 2x$

$y'(2 - \cos y) = 2x$

$y' = \frac{2x}{2 - \cos y}$

$2 - \cos y = 0$

$\cos y = 2$

$y = \cos^{-1}(2)$

Math error

الدالة معرفة عند جميع نقاط المنحنى .

45

يحسب موقع جسيم يتحرك على خط إحداثي من خلال الدالة $s = \sqrt{1 + 4t}$ ، حيث s بالأمتار و t بالثواني .

أوجد السرعة اللحظية للجسيم بعد $t = 6\ sec$.

(وضح خطوات الحل)

$s = (1 + 4t)^{\frac{1}{2}}$

$v = (\frac{1}{2})(4)(1 + 4t)^{-\frac{1}{2}}$

$v(6) = (\frac{1}{2})(4)(1 + 4(6))^{-\frac{1}{2}}$

$= \boxed{\frac{2}{5}} = \boxed{0.4}$ m/s

46

قذفت كرة رأسياً من نقطة على سطح الأرض فكان ارتفاعها $s(t)$ بالأمتار

يعطى بالقاعدة $s(t) = 80\,t - 16t^2$ حيث الزمن $t \geq 0$.

A. أوجد السرعة الابتدائية للكرة .

(وضح خطوات الحل)

عوض عن $t=0$

$V(t) = 80 - 32t$

$V(0) = 80 - 32(0) = 80$ m/sec

B. احسب أقصى ارتفاع للكرة .

(وضح خطوات الحل)

$V = 0 \qquad 80 - 32t = 0$

$80 = 32t$

$t = 2.5$ sec زمن أقصى ارتفاع

$S(2.5) = 80(2.5) - 16(2.5)^2 = \boxed{100}$ m

47

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = 4\,ln\sqrt{x^2 - 3x + 1}$.

(وضح خطوات الحل)

حل ①

$y = 4\,\ln(x^2 - 3x + 1)^{\frac{1}{2}}$

$y = 2\,\ln(x^2 - 3x + 1)$

$y' = 2\,\frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1}$

$= \frac{4x - 6}{x^2 - 3x + 1}$

حل ②

$y = 4\,\ln(x^2 - 3x + 1)^{\frac{1}{2}}$

$y' = 2\,\frac{(\frac{1}{2})(2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2 - 3x + 1)^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{2(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 1)}$

48

يمكن تقدير طول أحد الأسماك بالمعادلة التالية $L = 52.1(1 - e^{-0.15t})$
حيث L هو طول السمكة بالسنتيمتر و t هو عمر السمكة بالسنوات .

A. قدر طول سمكة عمرها 3 سنوات .

(وضح خطوات الحل)

$$L(3) = 52.1(1 - e^{-0.15(3)})$$
$$= \boxed{18.88}$$

B. أوجد سرعة ازدياد طول السمكة عند 3 سنوات .

(وضح خطوات الحل)

$$L = \cancel{52.1} - 52.1e^{-0.15t}$$
$$L' = (-52.1)(-0.15)e^{-0.15t}$$
$$L'(3) = (-52.1)(-0.15)e^{-0.15(3)}$$
$$= 4.98$$

49

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = 2x^2 + 3$ في الفترة $[1, 5]$

(وضح خطوات الحل)

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$= \frac{f(5) - f(1)}{(5) - (1)}$$
$$= \frac{[2(5)^2 + 3] - [2(1)^2 + 3]}{(5) - (1)} = \boxed{12}$$

50

إذا كان $y = 2sinx + 3cosx$

اثبت أن $y'' + y = 0$

(وضح خطوات الحل)

$y' = 2\cos x - 3\sin x$

$y'' = -2\sin x - 3\cos x$

$y'' + y = \cancel{-2\sin x} \cancel{-3\cos x} \cancel{+2\sin x} \cancel{+3\cos x}$

$= 0$

51

A. إذا كان $g(x) = 2x + 1$ ، $f(x) = x^3 + 2$

أوجد $(fog)'(x)$.

(وضح خطوات الحل)

$(fog)(x) = (2x+1)^3 + 2$ تركيب

$(fog)'(x) = (3)(2)(2x+1)^2$ اشتق

$= 6(2x+1)^2$

B. إذا كانت $g(x) = 3x\sqrt{2x+1}$ أوجد $g'(4)$.

(وضح خطوات الحل)

$g'(x) = (3)(\sqrt{2x+1}) + (3x)(\cancel{\tfrac{1}{2}})(\cancel{2})(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$= 3\sqrt{2x+1} + \dfrac{3x}{\sqrt{2x+1}}$

إذا كان منحنى الدالة $x^2 + xy + y^2 = 7$.

A. أوجد نقطتي تقاطع المنحنى مع المحور x .

(وضح خطوات الحل)

نضع $y=0$

$x^2 + x(0) + (0)^2 = 7$

$x^2 = 7$ بأخذ $\sqrt{\ }$

$x = \sqrt{7}$, $y = 0$; $x = -\sqrt{7}$, $y = 0$

$(\sqrt{7}, 0)$ $(-\sqrt{7}, 0)$

B. اثبت أن مماسي المنحنى عند هاتين النقطتين متوازيان .

(وضح خطوات الحل)

$2x + (1)(y) + (x)(y') + 2yy' = 0$ (اشتق) ميل المماس

$2x + y + xy' + 2yy' = 0$

$2x + y + y'(x + 2y) = 0$

$y'(x + 2y) = -2x - y$

$y' = \dfrac{-2x - y}{x + 2y}$

عند $(\sqrt{7}, 0)$

$m = \dfrac{-2(\sqrt{7}) - 0}{\sqrt{7} + 2(0)} = -2$

عند $(-\sqrt{7}, 0)$

$m = \dfrac{-2(-\sqrt{7}) - 0}{-\sqrt{7} + 2(0)} = -2$

الميل متساوي فإن المماسين متوازيين

C. أوجد الميل المشترك لهذين المماسين .

الإجابة : الميل المشترك هو -2

53

معادلة الطلب لمنتج معين هي $5p^2 + 4q^2 = 1000$

A. أوجد و فسر $\frac{dq}{dp}$.

(وضح خطوات الحل)

$$10p + 8q\frac{dq}{dp} = 0$$

$$8q\frac{dq}{dp} = -10p$$

$$\frac{dq}{dp} = \frac{-10p}{8q}$$

$$\frac{dq}{dp} = \frac{-5p}{4q}$$

معدل تغير الطلب بدلالة سعر الوحدة

وهو يتناقص بمقدار $\frac{5p}{4q}$ عند زيادة السعر.

B. أوجد و فسر $\frac{dp}{dq}$.

(وضح خطوات الحل)

$$10p\frac{dp}{dq} + 8q = 0$$

$$10p\frac{dp}{dq} = -8q$$

$$\frac{dp}{dq} = \frac{-8q}{10p} = \frac{-4q}{5p}$$

معدل تغير سعر الوحدة بدلالة الطلب

54

أوجد ميل المماس للدالة $y = 2\sqrt{3}\,sinx - 2\,cosx$ عند $x = \frac{\pi}{6}$

(وضح خطوات الحل)

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 2\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 4$$

55

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للعلاقة $x^2y - 2x = 3$ عند النقطة $(1, 5)$.

(وضح خطوات الحل)

$$(2x)(y) + (x^2)(y') - 2 = 0$$

$$x^2y' = 2 - 2xy$$

$$y' = \frac{2 - 2xy}{x^2}$$

$$y'\Big|_{(1,5)} = \frac{2 - 2(1)(5)}{(1)^2} = -8$$

56

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y^3 = 3x^2 - y - 9$ عند $(\sqrt{3}, 0)$.

(وضح خطوات الحل)

$$3y^2y' = 6x - y'$$

$$3y^2y' + y' = 6x$$

$$y'(3y^2 + 1) = 6x$$

$$y' = \frac{6x}{3y^2 + 1}$$

$$y'\Big|_{(\sqrt{3},0)} = \frac{6\sqrt{3}}{3(0)^2 + 1}$$

$$= 6\sqrt{3}$$

57

لتكن الدالة $y = 5e^{2x}$ ، اثبت أن : $y'' = 4y$.

(وضح خطوات الحل)

$y' = (5)(2)e^{2x}$

$y' = 10e^{2x}$

$y'' = (10)(2)e^{2x}$

$y'' = 20e^{2x}$

نعوض :

$y'' = 4y$

58

إذا كان $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 13$ أوجد

A. $\frac{dy}{dx}$.

(وضح خطوات الحل)

$2(1)(x-1)^1 + (2)(y-1)^1 = 0$

$2x - 2 + 2y'(y-1) = 0$

$2y'(y-1) = -2x + 2$

$y' = \frac{-2x+2}{2(y-1)}$

B. ميل المنحنى y عند النقطة $(3,4)$.

(وضح خطوات الحل)

$y'\Big|_{(3,4)} = \frac{-2(3)+2}{2(4-1)} = \frac{-2}{3}$

أوجد المشتقة الثانية لكل من الدوال التالية .

A. $f(x) = (x^3 + 1)^3$ قوس

(وضح خطوات الحل)

$f'(x) = (3)(3x^2)(x^3+1)^2$

$f'(x) = 9x^2(x^3+1)^2$ ضرب

$f''(x) = (18x)(x^3+1)^2 + (9x^2)((2)(3x^2)(x^3+1)^1)$

$= 18x(x^3+1)^2 + 54x^4(x^3+1)$

B. $f(x) = 4x(lnx)$ ضرب

(وضح خطوات الحل)

$f'(x) = (4)(\ln x) + (4x)(\frac{1}{x})$

$f'(x) = 4\ln x + \cancel{4}$

$f''(x) = 4 \cdot \frac{1}{x}$

$= \frac{4}{x}$

C. $f(x) = \frac{x}{e^x}$ $x \to 1$, $e^x \to e^x$ قسمة

$f'(x) = \frac{(e^x)(1) - (e^x)(x)}{(e^x)^2}$ قسمة

$= \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$ $1-x \to -1$, $e^x \to e^x$

$f''(x) = \frac{(-1)(e^x) - (e^x)(1-x)}{(e^x)^2}$

$= \frac{-e^x - e^x + xe^x}{(e^x)^2} = \frac{-2e^x + xe^x}{(e^x)^2}$

$= \frac{e^x(-2+x)}{(e^x)^2} = \frac{-2+x}{e^x}$

60

إذا كان $y = \sqrt[3]{x^2 + 5}$ أوجد

A. $\frac{dy}{dx}$.

(وضح خطوات الحل)

$$y = (x^2+5)^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{3}(2x)(x^2+5)^{-\frac{2}{3}}$$

B. ميل المنحنى y عند $x = 2$.

(وضح خطوات الحل)

$$y'\Big|_{x=2} = \left(\frac{1}{3}\right)(2(2))(2^2+5)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \boxed{0.308}$$

61

أوجد ميل المماس للدالة $h(x) = \frac{x}{1+\sin x}$ عند $x = \frac{\pi}{2}$.

(وضح خطوات الحل)

$$h(x) = \frac{x \to 1}{1+\sin x \to \cos x}$$

$$h'(x) = \frac{(1)(1+\sin x) - (x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{1+\sin x - x\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}{\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

62

A. أوجد مشتقة الدالة $h(x) = ln\sqrt{4-3x^2}$.

(وضح خطوات الحل)

حل ①

$h(x) = \ln(4-3x^2)^{\frac{1}{2}}$

$h(x) = \frac{1}{2}\ln(4-3x^2)$

$h'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{-\cancel{6}x}{4-3x^2}$

$= \frac{-3x}{4-3x^2}$

حل ②

$h(x) = \ln\sqrt{4-3x^2}$

$h'(x) = \frac{(\frac{1}{2})(-6x)(4-3x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{4-3x^2}}$

$= \frac{-3x}{4-3x^2}$

B. إذا كانت $y^3 - x = 4y$ اثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2-4}$

(وضح خطوات الحل)

$3y^2y' - 1 = 4y'$

$3y^2y' - 4y' = 1$

$y'(3y^2-4) = 1$

$y' = \frac{1}{3y^2-4}$

63

أوجد ميل المماس للمنحنى $y = x^2 . e^{x^2}$ عند $x = 1$.

(وضح خطوات الحل)

$y' = (2x)(e^{x^2}) + (x^2)(2xe^{x^2})$

$y'|_{x=1} = 2(1)e^1 + (1)^2(2(1)e^1)$

$= 2e + 2e = 4e$

64

إذا كانت $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

A. أوجد $\frac{dy}{dx}$.

(وضح خطوات الحل)

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

B. أوجد $\frac{d2y}{dx^2}$.

(وضح خطوات الحل)

$$y'' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

65

برهن أن منحنى الدالة $y = cos\ x$ له مماس أفقي عند $x = 0$.

(وضح خطوات الحل)

$$y' = -\sin x$$

$$y'\Big|_{x=0} = -\sin(0) = 0$$

له مماس أفقي عند $x=0$

A. أوجد ميل المماس للدالة $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$ عند $x = \frac{\pi}{3}$.

(وضح خطوات الحل)

$$y = \frac{\cos x}{1-\sin x} \quad \begin{matrix} \to -\sin x \\ \to -\cos x \end{matrix}$$

$$y' = \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - (-\cos x)(\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x + 1}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$$

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{1-\sin\frac{\pi}{3}} = 4+2\sqrt{3}$$

B. إذا كانت $f(x) = x^2 \sin x$, أوجد $f'(\frac{\pi}{2})$.

ضرب

(وضح خطوات الحل)

$$f'(x) = (2x)(\sin x) + (x^2)(\cos x)$$

$$f'(\tfrac{\pi}{2}) = (2\cdot\tfrac{\pi}{2})(\sin\tfrac{\pi}{2}) + (\tfrac{\pi}{2})^2(\cos\tfrac{\pi}{2})$$

$$= \pi + 0$$

$$= \pi$$

A. أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $y = \sin x + 3$ عند $x = \pi$.

(وضح خطوات الحل)

$y' = \cos x$

$y' = \cos \pi = -1$

B. أوجد معادلة المماس عند $x = \pi$.

(وضح خطوات الحل)

$y'|_{x=\pi} = \cos \pi = -1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = -1(x - \pi)$

$y - 3 = -x + \pi$

$y = -x + \pi + 3$

$m = -1$

$x_1 = \pi$

$y_1 = \sin \pi + 3$

$= 3$

C. أوجد معادلة العمودي عند $x = \pi$.

(وضح خطوات الحل)

ميل العمودي

$m = 1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 1(x - \pi)$

$y - 3 = x - \pi$

$y = x - \pi + 3$

68

أوجد النقاط على منحنى الدالة $y = \tan x$ ، $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم $y = 2x$.

(وضح خطوات الحل)

$y' = \sec^2 x$

$\sec^2 x = 2$

$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{1}$

$y' = 2$

$2\cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = \frac{\pi}{4}$ $x = -\frac{\pi}{4}$

$\cos x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ مرفوض

$(\frac{\pi}{4}, 1)$ $(-\frac{\pi}{4}, -1)$

69

$f'(x) = 0$

حدد النقاط الواقعة على منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 3x$ بحيث المماس عندها أفقي .

(وضح خطوات الحل)

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$x = 1$ $x = -1$

$y = -2$ $y = 2$

$(1, -2)$

$(-1, 2)$

70

إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق ، وكانت $f'(8) = -5$ ، أوجد $\frac{d}{dx}[f(x^3)]$ عند $x = 2$.

(وضح خطوات الحل)

$f'(x^3) \cdot 3x^2 = f'(2^3) \cdot 3(2)^2$

$= f'(8) \cdot 12$

$= -5 \times 12 = -60$

71

إذا كانت $x.y^2 = 5$ ، اثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3y}{4x^2}$.

(وضح خطوات الحل)

$$(1)(y^2) + (x)(2yy') = 0$$

$$2xyy' = -y^2$$

$$y' = \frac{-y^2}{2xy}$$

$$\boxed{y' = \frac{-y}{2x}}$$

قسمة

$$y'' = \frac{(2x)(-y') - (2)(-y)}{(2x)^2}$$

$$= \frac{2x\left(-\frac{-y}{2x}\right) + 2y}{(2x)^2}$$

$$= \frac{y + 2y}{(2x)^2} = \frac{3y}{4x^2}$$

72

إذا كانت $y = (x^3 + 2)^7$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

(وضح خطوات الحل)

$$y' = (7)(3x^2)(x^3+2)^6$$

$$= 21x^2(x^3+2)^6$$

73

إذا كان $y = e^{ax}$ فأوجد قيمة a التي تحقق المعادلة $y'' - 5y' + 6y = 0$.

(وضح خطوات الحل)

$y' = ae^{ax}$

$y'' = a^2 e^{ax}$

$a^2 e^{ax} - 5a e^{ax} + 6 e^{ax} = 0$

$\cancel{e^{ax}} (a^2 - 5a + 6) = 0$

$(a-3)(a-2) = 0$

$a = 3 \quad a = 2$

74

إذا علمت أن $y = \tan x$ ، فاثبت أن $y'' = 2y\,y'$.

(وضح خطوات الحل)

حل (1)

$y' = \sec^2 x$

$y' = \tan^2 x + 1$

$y' = (\tan x)^2 + 1$

$y'' = 2(\sec^2 x)(\tan x)$

$= 2\,y'\,y$ #

حل (2)

$y' = \sec^2 x$

$y' = \tan^2 x + 1$

$y' = y^2 + 1$

$y'' = 2yy'$

75

يتحرك جسيم بحيث تكون إزاحته عن نقطة الأصل O تعطى بالقاعدة $d(t) = m\,t^3 + 2t + 1$

أوجد قيمة m إذا كان تسارع الجسيم بعد ثانيتين $24\ m/s^2$.

(وضح خطوات الحل)

$v(t) = 3mt^2 + 2$

$v(2) = 24$

$3m(2)^2 + 2 = 24$

$12m + 2 = 24$

$12m = 22$

$m = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$

يمكن تحديد موقع جسم ما يتحرك على محور x عند أي زمن $t \geq 0$ بالمعادلة التالية :

$$x(t) = t^3 - 12t + 5$$

A. أوجد سرعة الجسم المتجهة لكل زمن t .

الإجابة : $v(t) = 3t^2 - 12$

B. أوجد تسارع الجسم لكل زمن t .

الإجابة : $a(t) = 6t$

C. أوجد قيم t عندما يكون الجسم في وضعية السكون . السرعة تنعدم

(وضح خطوات الحل)

$v = 0$

$3t^2 - 12 = 0$

$3t^2 = 12$

$t^2 = 4$

$t = 2$

$t = -2$ مرفوض

D. أوجد سرعة الجسم عندما يكون تسارعه يساوي الصفر .

(وضح خطوات الحل)

$a = 0$

$6t = 0$

$t = 0$

$v(0) = 3(0)^2 - 12 = -12$

E. هل يتحرك هذا الجسم نحو نقطة الأصل أم بعيداً عنها عند $t = 3$ ؟

الإجابة : $v(3) = 3(3)^2 - 12$

$= 15 > 0$

يتحرك مبتعداً عن نقطة الأصل لأن السرعة موجبة

77

لنفترض أن كرة تسقط من وضعية السكون من ارتفاع معين فوق سطح الأرض (بالسنتيمترات) استعمل الصيغة $s = 490t^2$ للإجابة عن الأسئلة التالية .

A. ما الزمن الذي تستغرقه الكرة لقطع أول $160\ cm$ أثناء سقوطها ؟

(وضح خطوات الحل)

$s = 160$

$490t^2 = 160$

$t^2 = \frac{160}{490}$

$t^2 = \frac{16}{49}$

$t = \frac{4}{7}$

B. أوجد سرعة الكرة لحظة اجتيازها $160\ cm$.

(وضح خطوات الحل)

$v'(t) = 980t$

$v(\frac{4}{7}) = 980(\frac{4}{7}) = 560$

C. أوجد تسارع الكرة لحظة اجتيازها $160\ cm$.

(وضح خطوات الحل)

$a(t) = 980$

78

يتحرك جسم في خط مستقيم حسب الدالة $d(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t$ حيث d تمثل الإزاحة بالأمتار خلال t ثانية .

A. أوجد السرعة بدلالة الزمن .

الإجابة : $v(t) = t^2 - 6t + 5$

B. أوجد التسارع بدلالة الزمن .

الإجابة : $a(t) = 2t - 6$

C. احسب التسارع عندما تنعدم السرعة .

(وضح خطوات الحل)

$v = 0$

$t^2 - 6t + 5 = 0$

$(t-5)(t-1) = 0$

$t = 5 \mid t = 1$

$a(5) = 2(5) - 6 = 4$

$a(1) = 2(1) - 6 = -4$

قذف جسم إلي أعلى من نقطة على سطح الأرض ، إذا كان ارتفاع الجسم d بالأمتار يعطى بالدالة $d(t) = 30\,t - 5t^2$ حيث t الزمن بالثواني ، فأوجد كلاً مما يلي :

A. السرعة الابتدائية للجسم .

(وضح خطوات الحل)

$v(t) = 30 - 10t$

$v(0) = 30$

B. أقصى ارتفاع للجسم.

(وضح خطوات الحل)

$v = 0$ $\quad 30 - 10t = 0$

$30 = 10t$

$\boxed{t = 3}$

$d(3) = 30(3) - 5(3)^2$

$= 45$

C. الزمن الذي يحتاجه الجسم حتى يعود إلي سطح الأرض .

(وضح خطوات الحل)

$S = 0$

$30t - 5t^2 = 0$

$t(30 - 5t) = 0$

$t = 0 \mid 30 - 5t = 0$

$30 = 5t$

$t = 6$