

الشامل في الرياضيات

الصف العاشر

2022 – 2021

الوحدة الثانية: المعادلات والمتباينات
التربيعية

πr^2
 $a^2 + b^2 =$
 $2 \times 2 = 4$

اعداد

Mr: Mostafa Elnazhawy

TEL: 55320728

الصف العاشر

الوحدة الثانية

الفصل الدراسي الاول

المعادلات والمتباينات التربيعية

الوحدة

2

- 38 مشروع STEM
- 39 حل المعادلات التربيعية باستعمال التمثيلات البيانية والجداول **2-1**
- 45 حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل **2-2**
- 53 إعادة كتابة المقادير الجذرية **2-3**
- 59 حل المعادلات التربيعية باستعمال الجذور التربيعية **2-4**
- 66 إكمال المربع **2-5**
- 73 القانون العام لحل المعادلات التربيعية والمميز **2-6**
- 80 حل المعادلات النسبية **2-7**
- 88 حل أنظمة المعادلات الخطية والتربيعية **2-8**
- 95 حل المتباينات التربيعية في متغير واحد **2-9**
- 105 معادلة الدائرة في المستوى الإحداثي **2-10**



2-1

حل المعادلات التربيعية
باستعمال التمثيلات البيانية
والجداول

2-1 : حل المعادلات التربيعية باستعمال التمثيلات البيانية والجداول

2-1

حل المعادلات التربيعية
باستعمال التمثيلات البيانية
والجداول

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

دالة تربيعية

$$y = f(x) = 0 \text{ اذا كان}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

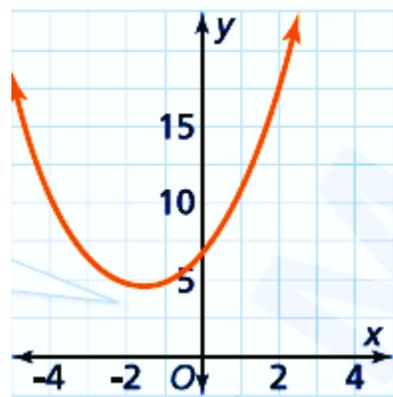
معادلة تربيعية مرافقة

اصفار الدالة: هي قيم x التي تجعل $f(x) = 0$ وهي نفس القيم التي تحقق المعادلة

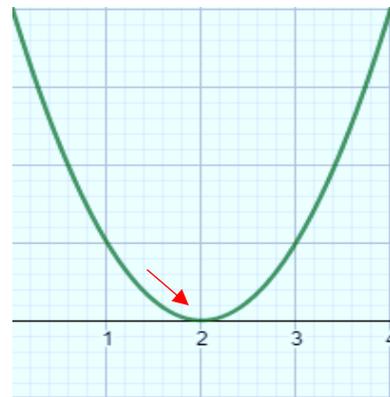
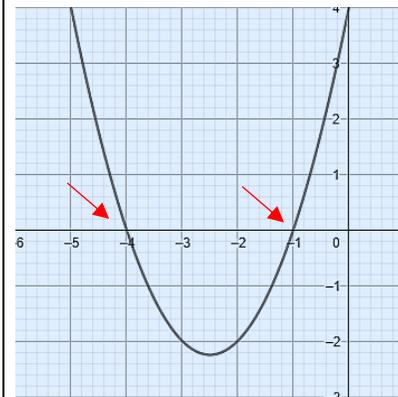
اصفار الدالة = حلول المعادلة

طرق استنتاج حل المعادلة التربيعية

الدرس في نقاط :



عدد الحلول = لا يوجد حل

عدد الحلول = 1
 $x = 2$ عدد الحلول = 2
 $x = -1$, $x = -4$

بيانيا

(تقاطع المنحنى
مع محور x)يبين الجدول ان قيم x تمثل حلول المعادلة في الحاتين التاليتين-1 عندما تكون قيمة الدالة صفر أي $y = 0$ -2 اذا تغيرت إشارة الـ y وهنا تكون الحلول تقريبية

x	y
0	6
-1	3
-2	2
-3	3
-4	6

عدد الحلول = لا يوجد
لعدم تغير الإشارة وعدم
وجود صفر لقيم y

x	y
3	-4
2	-1
1	0
0	-1
-1	-4

عدد الحلول = 1
 $x = 1$

x	y
-2	1
-1	-1
0	-1
1	1
2	5

عدد الحلول = 2
نظرا لتغير إشارة y مرتين
وتكون الحلول تقريبية

x	y
-5	4
-4	0
-3	-2
-2	-2
-1	0

عدد الحلول = 2
 $x = -4$, $x = -1$

جدول

- 1- عند رسم الدالة التربيعية نقوم بتحديد الاحداثي x لرأس المنحنى من العلاقة $x = \frac{-b}{2a}$ ثم نقوم ببناء جدول تكون فيه قيمة الرأس في المنتصف

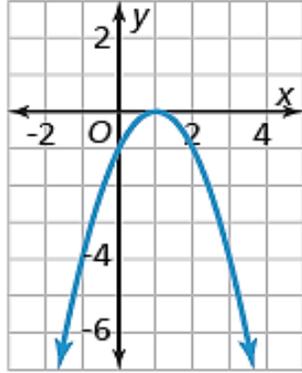
		$\frac{-b}{2a}$		
		y		

- 2- إذا كانت المعادلة على الصورة $x^2 + k = 0$ فإن المعادلة ليس لها حل
- 3- إذا كانت المعادلة على الصورة $x^2 - k = 0$ فإن المعادلة لها حلان هما $\pm\sqrt{k}$

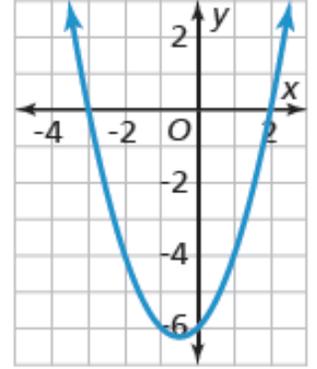
تمارين

استعمل التمثيل البياني لإيجاد حل للمعادلة

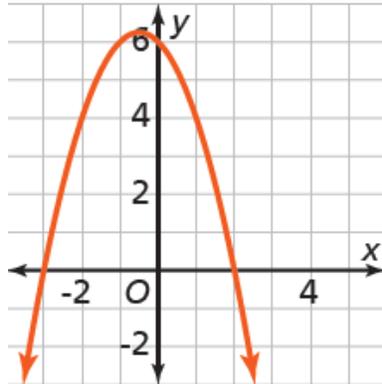
$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$



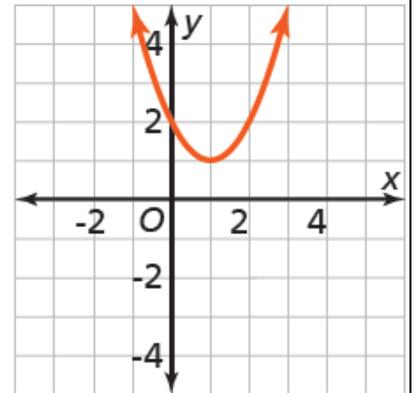
$$x^2 + x - 6 = 0$$



$$-x^2 - x + 6 = 0$$

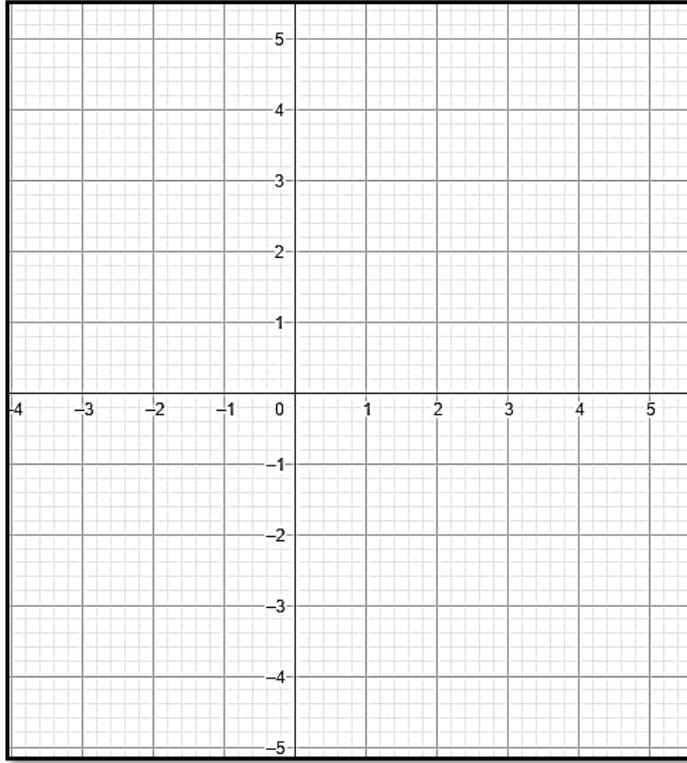


$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

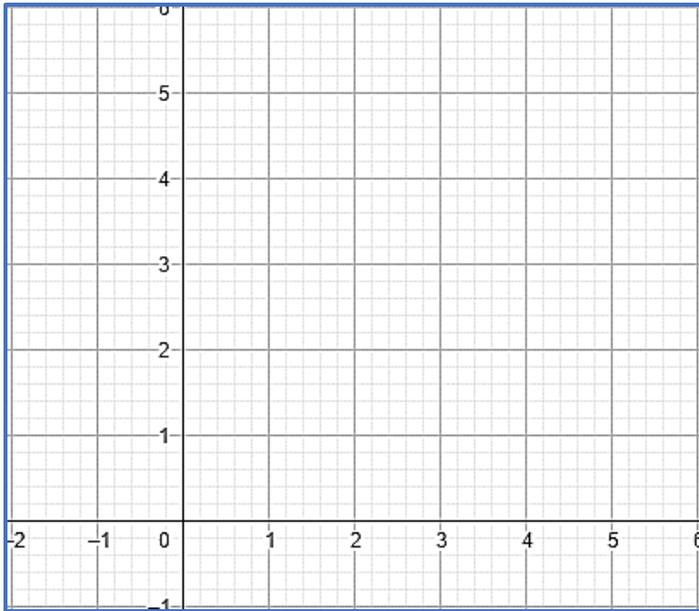


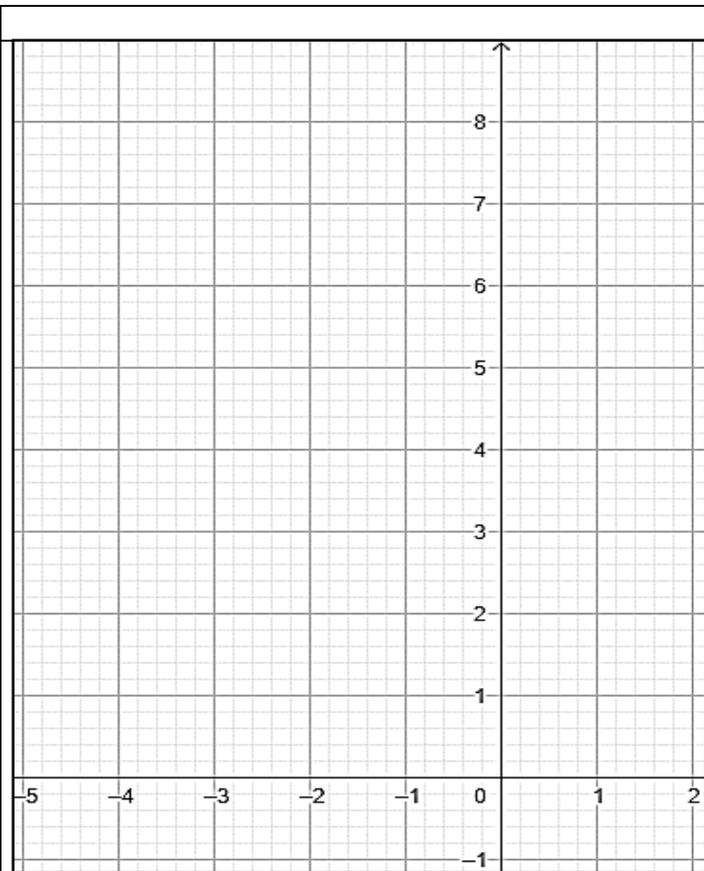
حل المعادلة التربيعية باستعمال التمثيل البياني
للدالة المرتبطة بها

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

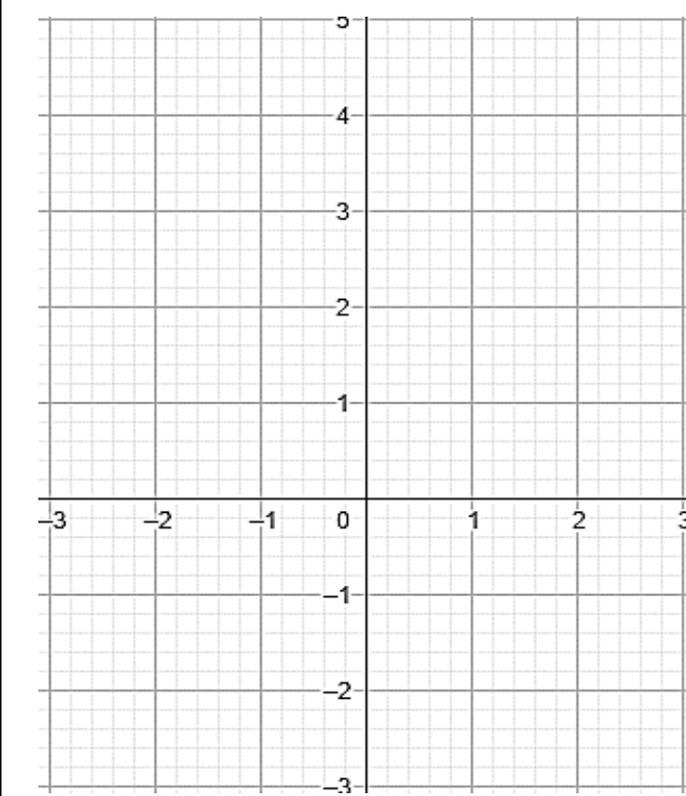


$$x^2 - 4x + 4 = 0$$





$$x^2 + 3x + 7 = 0$$



$$x^2 - 2 = 0$$

أوجد حلول كل معادلة تربيعية باستعمال الجدول قَرِّب الحلول التقريبية إلى أقرب جزء من عشرة

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x^2 + 4x + 6 = 0$$



ضرب خالد كرة جولف موضوعة على

محملة. تنمذج الدالة

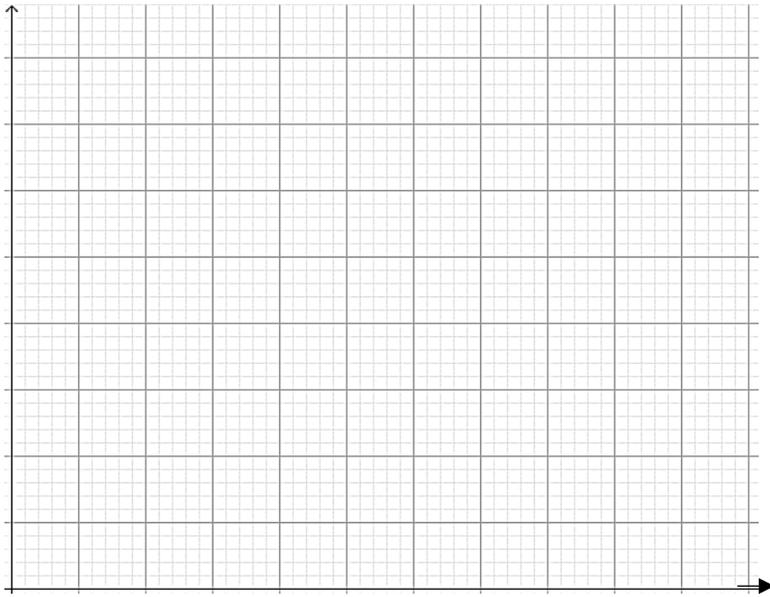
$$f(x) = -5x^2 + 25x + 1$$

ارتفاع الكرة، حيث x عدد الثواني

بعد ضربها.

أوجد الزمن الذي استغرقته الكرة

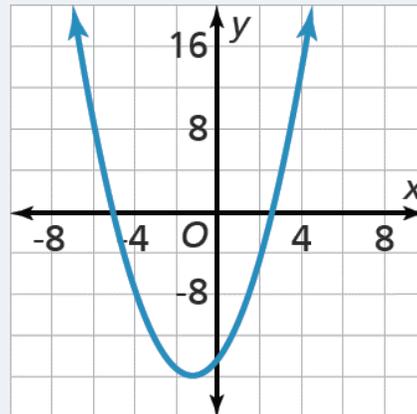
في الهواء قبل ارتطامها بالأرض.



تدرّب على اختبار

اختبار SAT/ACT ما حلول المعادلة $x^2 + 2x - 15 = 0$

باستعمال التمثيل البياني أدناه ؟



(A) -3 , 3

(B) -5 , 3

(C) -8 , 5

(D) -16 , 0

2-2

حل المعادلات التربيعية
بالتحليل إلى العواملSolving
Quadratic Equations
by Factoring

2-2

حل المعادلات التربيعية
بالتحليل إلى العواملSolving
Quadratic Equations
by Factoring

2-2 : حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل

الدرس في نقاط

تنص خاصية ناتج الضرب الصفري على أنه لجميع الأعداد الحقيقية a و b ،
إذا كان $ab = 0$ ، فإما $a = 0$ أو $b = 0$.

مثال: إذا كان $(x - 6)(2x + 8) = 0$

فإن $(x - 6) = 0$ or $2x + 8 = 0$

ومنها $x = 6$ or $x = -\frac{8}{2} = -4$

استعمال خاصية
ناتج الضرب الصفري

الصيغة القياسية للمعادلة التربيعية هي $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$.

مثال : حل المعادلة التالية بالتحليل إلى عوامل

$$x^2 - 12x = 64$$

(1) الكتابة بالصورة القياسية

$$x^2 - 12x - 64 = 0$$

(2) تحليل المعادلة وكتابتها بصورة التحليلية

$$(x - 16)(x + 4) = 0$$

(3) استعمال خاصية ناتج الضرب الصفري للحصول على النتائج

$$(x - 16) = 0 \text{ or } (x + 4) = 0$$

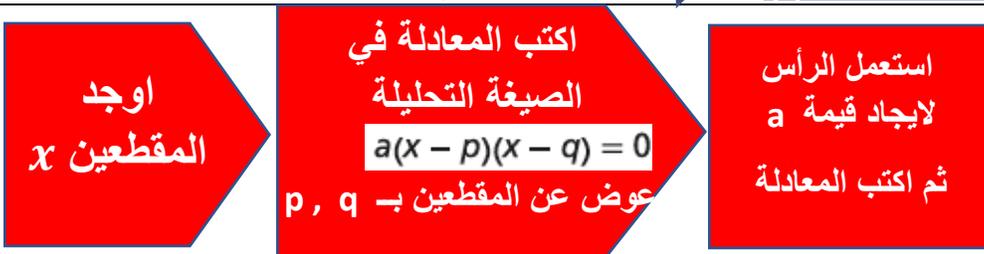
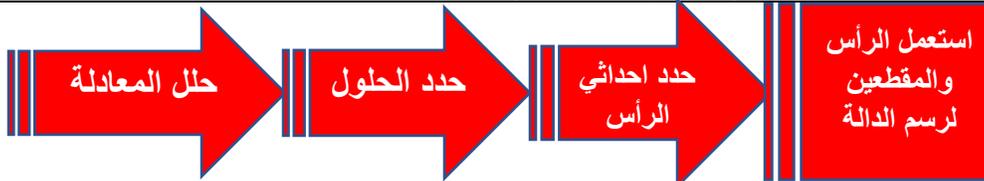
$$x = 16 \text{ or } x = -4$$

ملاحظة : يمكن الرجوع لملازم الصف التاسع فصل ثان حيث يوجد عدد هائل من التمارين

عند حل المعادلة
بالتحليل
اكتب المعادلة التربيعية
بالصيغة القياسية

استعمال الصيغة
التحليلية
لتمثيل دالة تربيعية بيانيا

كتابة الصيغة التحليلية
من التمثيل البياني



تمارين

حل كل معادلة مما يلي

$$(x - 10)(x + 20) = 0$$

$$(3x + 4)(x - 4) = 0$$

$$3(x + 2)(x - 2) = 0$$

$$(2x - 5)(7x + 2) = 0$$

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

$$(3x - 8)^2 = 0$$

$$(2x - 1)(x + 3) = 0$$

$$(2x + 3)(3x - 1) = 0$$

حل كل معادلة بالتحويل إلى العوامل

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$2x^2 + 3x = 5$$

$$5x^2 + 16x = -3$$

$$x^2 + 18x + 32 = 0$$

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$x^2 + 9x = -20$$

حل كل معادلة بالتحويل إلى العوامل

$$x^2 + 16x + 64 = 0$$

$$x^2 + 2x = -1$$

$$2x^2 + x = 15$$

$$x^2 - 8x = 9$$

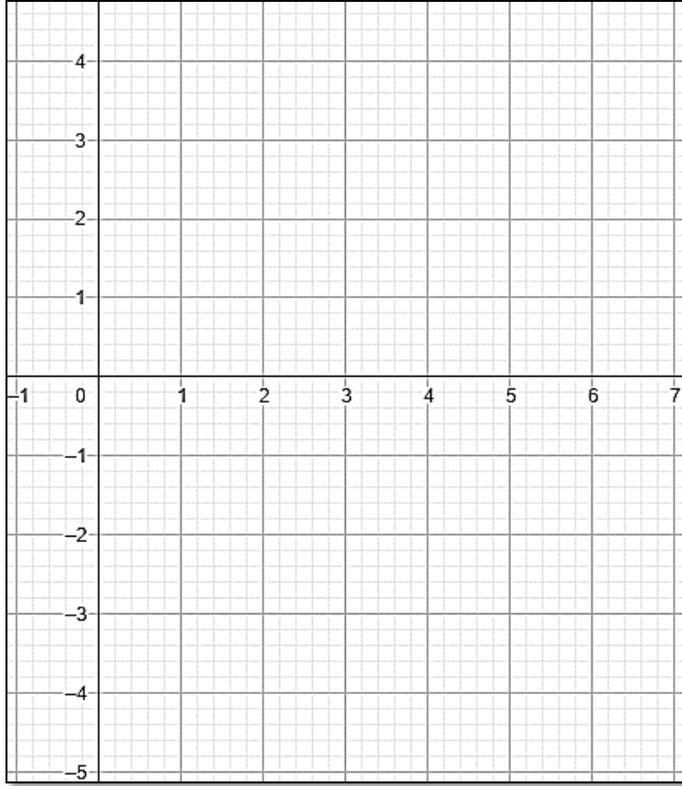
$$2x^2 + 8x + 6 = 0$$

$$5x^2 - 19x = -18$$

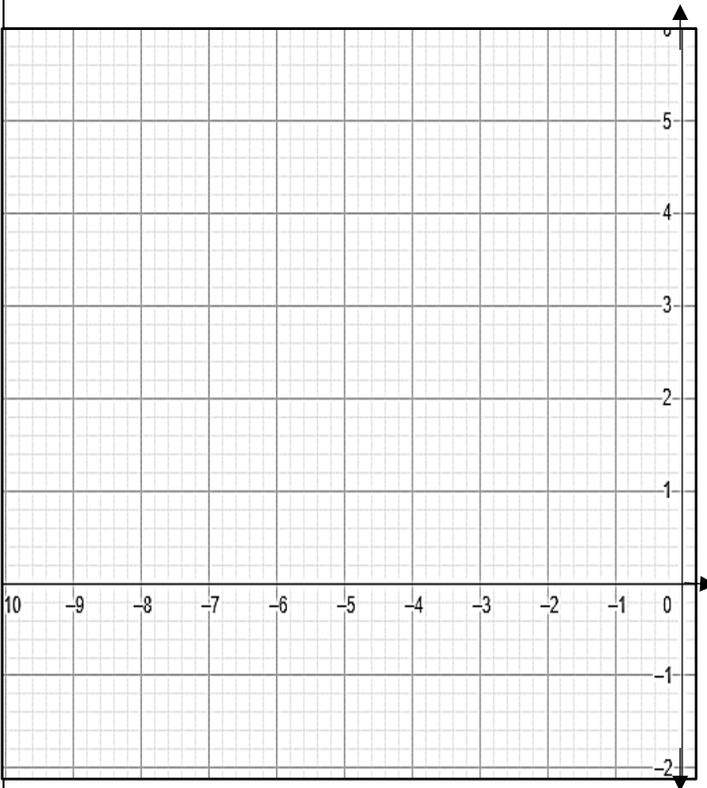
$$x^2 + 2x - 3 = 5$$

حلل الدالة المرتبطة بالمعادلة إلى العوامل، وأوجد إحداثيات الرأس ثم مثل الدالة بيانياً

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

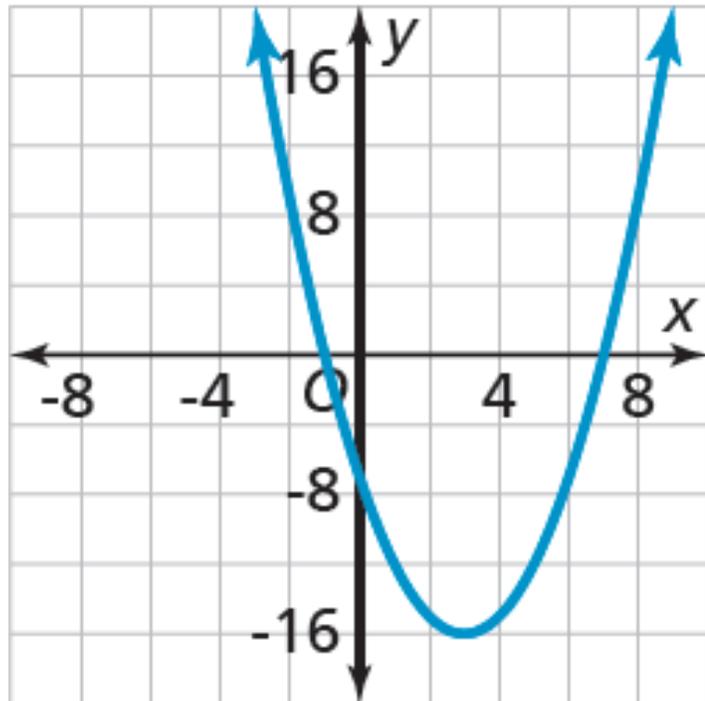
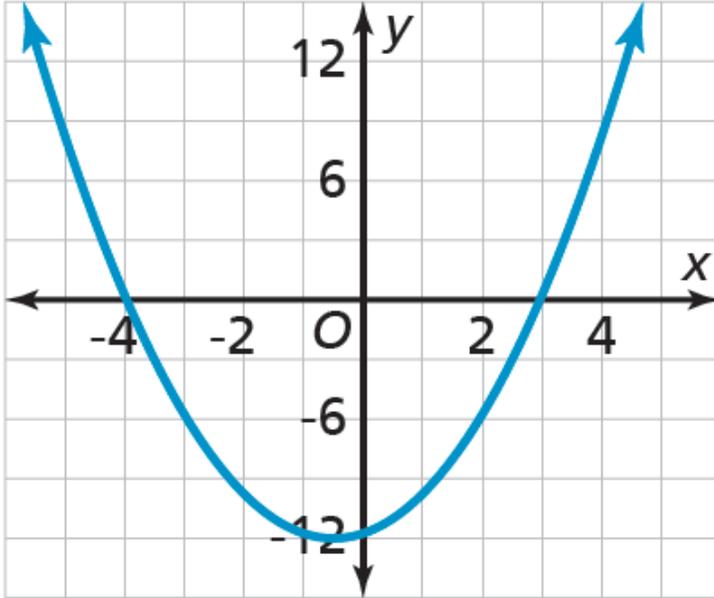


$$x^2 + 16x + 63 = 0$$



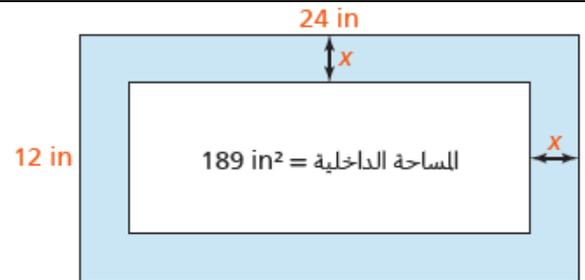
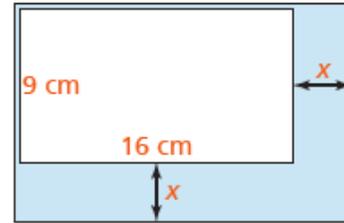
اكتب الصيغة التحليلية للدالة التربيعية

راجع خطوات الحل (الدرس في نقاط)



اكتب معادلة لتمثيل مساحة المنطقة المظلمة ، ثم أوجد قيمة x

المساحة الكلية: 198 cm^2



الدرس في نقاط

العدد	أوجد الجذر إذا كان العدد مربع كامل	تعريف المربع الكامل :
25		هو العدد الذي ينتج من حاصل ضرب عدد ما في نفسه
64		مثل : $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, $4 \times 4 = 16$
81		تعريف الجذر التربيعي (\sqrt{x}) :
144		الجذر التربيعي للعدد x هو العدد الذي مربعه $= x$
125		مثل :
169		$\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{49} = 7$
45		
15		

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$



ملاحظة : يمكن استخدام الحاسبة لتبسيط الجذر

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

$$\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{5 \times 3} = \sqrt{15}$$

$$\sqrt{7} \times \sqrt{2} = \sqrt{7 \times 2} = \sqrt{14}$$

ملاحظات

إذا كان تحت الجذر متغير

$$\sqrt{x^{10}} = x^{10 \div 2} = x^5 \quad \text{إذا كان الاس عدد زوجي}$$

إذا كان الاس عدد فردي

$$\sqrt{x^9} = x^{(9-1) \div 2} \sqrt{x} = x^4 \sqrt{x}$$

دائما

$$\sqrt{x^{15}} = x^{(15-1) \div 2} \sqrt{x} = x^7 \sqrt{x}$$

لإدخال عدد تحت الجذر نقوم بتربيع العدد

$$2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \times 5} = \sqrt{20}$$

$$3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \times 7} = \sqrt{63}$$

$$5\sqrt{8} = \sqrt{5^2 \times 8} = \sqrt{200}$$

خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية
(هذه الخاصية تستخدم في الجهتين)

حلل كل مجذور إلى عوامله باستعمال خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية

$\sqrt{80}$	$\sqrt{200}$
$\sqrt{210}$	$\sqrt{250}$
$\sqrt{108}$	$8\sqrt{8}$
$2\sqrt{21}$	$\sqrt{x^7}$
$\sqrt{40x^4}$	$\sqrt{11x^5}$
$\sqrt{98x^8}$	$\sqrt{200x^3}$
$\sqrt{32x^4 y^3}$	$4x\sqrt{\frac{1}{4}x^6}$

قارن بين كل زوج من المقادير الجذرية

$\sqrt{108}$ و $6\sqrt{3}$	$4\sqrt{5}$ و $2\sqrt{21}$
$42\sqrt{40}$ و $40\sqrt{42}$	$3\sqrt{18}$ و $\sqrt{68}$
$3\sqrt{15}$ و $\sqrt{96}$	$\sqrt{30}$ و $\frac{1}{2}\sqrt{120}$
$2\sqrt{50}$ و $\sqrt{72}$	$\sqrt{119}$ و $5\sqrt{28}$
$\sqrt{36}$ و $3\sqrt{6}$	$6\sqrt{2}$ و $\sqrt{72}$

اكتب المقدار بحيث لا يتضمن المجذور مربعات كاملة عدا العدد 1، إن أمكن

$$(\sqrt{12x})(\sqrt{3x})$$

$$(\sqrt{2x^9})(\sqrt{26x^6})$$

$$(\sqrt{27m})(\sqrt{6m^{20}})$$

$$(\sqrt{2x^3})(\sqrt{25x^2y})$$

$$(\sqrt{9x^9})(\sqrt{18x^3})$$

$$(\sqrt{32x})(\sqrt{72x^{18}})$$

$$\sqrt{100x^8}$$

$$4x^2y\sqrt{2x^4y^6}$$

2-4

حل المعادلات التربيعية
باستعمال الجذور التربيعية

2-4 : حل المعادلات التربيعية باستعمال الجذور التربيعية

2-4

حل المعادلات التربيعية
باستعمال الجذور التربيعية

الدرس في نقاط

لحل معادلة تربيعية باستعمال الجذور التربيعية: اعزل المتغير، ثم خذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة.

حل المعادلات ذات الصورة $x^2 = a$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$x^2 = a \longrightarrow x = \pm \sqrt{a}$$

مثال :

$$x^2 = 25 \longrightarrow x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$$

ملاحظة : الجذر التربيعي للعدد السالب غير موجود مثل

$$\sqrt{-9} , \sqrt{-36}$$

حل المعادلات التي على الصورة $ax^2 = c$ نقسم على معامل الـ x ثم نوجد الجذر التربيعي

$$a x^2 = c \longrightarrow x^2 = \frac{c}{a} \longrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$$

مثال :

$$7 x^2 = 112 \quad x^2 = \frac{112}{7} \quad x = \pm \sqrt{\frac{112}{7}} = \pm 4$$

حل المعادلات ذات الصورة $ax^2 + b = c$

$$3x^2 - 5 = 22$$

مثال : حل المعادلة $3x^2 - 5 = 22$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = 9$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

حل كل معادلة مما يلي

$$x^2 = 400$$

$$x^2 = -25$$

$$x^2 = 256$$

$$x^2 = 144$$

$$x^2 = -20$$

$$x^2 = 0.25$$

$$12x^2 = 300$$

$$0.1x^2 = 100$$

$$-36x^2 = -36$$

$$-\frac{1}{2}x^2 = -36$$

حل كل معادلة مما يلي

$$x^2 + 65 = 90$$

$$x^2 - 65 = 90$$

$$3x^2 + 8 = 56$$

$$3x^2 - 8 = 56$$

$$\frac{4x^2 + 10}{2} = 5$$

$$\frac{8x^2 - 40}{4} = 470$$

$$-4x^2 - 1 = 48$$

$$-4x^2 + 50 = 1$$

حل كل معادلة مما يلي

$$2x^2 - 7 = 38$$

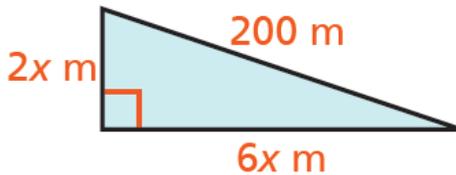
$$2x^2 + 7 = 31$$

$$3x^2 + 2x^2 = 150$$

$$3x^2 + 18 = 5x^2$$

$$6x^2 + 2x^2 = 80$$

$$6x^2 + (2x)^2 = 80$$

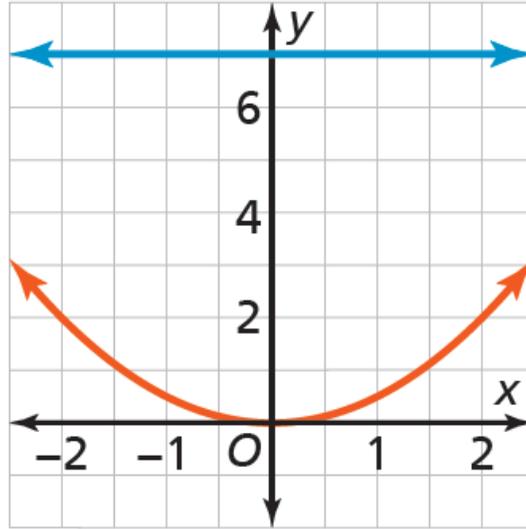
اوجد قيمة x 

تدرّب على اختبار

حلّ المعادلة $2900 - 5x^2 = 840$ هما:

+ _____ و - _____

فكّر وثابر في الحل أين يتقاطع القطع المكافئ مع المستقيم في الرسم البياني أدناه؟ ما المعادلة التي حلتها لإيجاد نقطة التقاطع؟



2-5

إكمال المربع

2-5

إكمال المربع

2-5 : اكمال المربع

الدرس في نقاط

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 \leftarrow \text{صورة المربع الكامل للمقدار}$$

متى يكون المقدار مربع كامل

ما قيمة c التي تجعل المقدار $x^2 + 6x + c$ مربعًا كاملًا؟

$$c = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \text{إذا كانت}$$

كيف نحل معادلة بإكمال المربع

حل المعادلة $x^2 + bx + c = 0$ بإكمال المربع1 (اكتب المعادلة في الصورة $ax^2 + bx = d$)2 (اضع $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ للطرفين)3 (نحصل على الصورة $ax^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = d + \left(\frac{b}{2}\right)^2$)

4 (ومنها نكتب صورة المربع الكامل ونكمل الحل بأخذ الجذر التربيعي للطرفين ثم عزل المتغير)

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = d + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

استعمال إكمال المربع لكتابة دالة تربيعية بصيغة الرأس

تذكر أن صيغة الرأس للدالة التربيعية هي $y = a(x - h)^2 + k$ ، حيث النقطة (h, k) هي نقطةالرأس. يُعد إكمال المربع مفيذاً من أجل تحديد $(x - h)^2$.

تمارين

أوجد قيمة c التي تجعل المقدار مربعًا كاملاً في كل ما يلي. اكتب كل مقدار في صورة مربع ثنائية الحد

$$x^2 + 16x + c$$

$$x^2 + 22x + c$$

$$p^2 - 30p + c$$

$$k^2 - 5k + c$$

$$g^2 + 17g + c$$

$$q^2 - 48q + c$$

$$x^2 + 26x + c$$

$$x^2 + 2x + c$$

حل كل معادلة بإكمال المربع

$$x^2 + 8x = -1$$

$$x^2 - 4x = 7$$

$$x^2 + 6x = 144$$

$$x^2 - 4x = 30$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$x^2 + 14x + 19 = 0$$

حل كل معادلة بإكمال المربع

$$2x^2 - 24x - 4 = 0$$

$$4w^2 + 12w - 44 = 0$$

$$3r^2 + 18r = 21$$

$$2v^2 - 10v - 20 = 8$$

$$5n^2 - 3n - 15 = 0$$

$$m^2 + 16m = -59$$

اكتب الدالة بصيغة الرأس، ثم حدّد الرأس.

$$y = x^2 + 4x - 3$$

$$y = x^2 + 12x + 27$$

$$y = x^2 - 6x + 12$$

$$y = x^2 - 14x - 1$$

$$y = x^2 + 4x - 5$$

$$y = x^2 + 8x - 15$$

اكتب الدالة بصيغة الرأس، ثم حدّد الرأس.

$$y = 5x^2 - 10x + 7$$

$$y = 3x^2 - 6x - 2$$

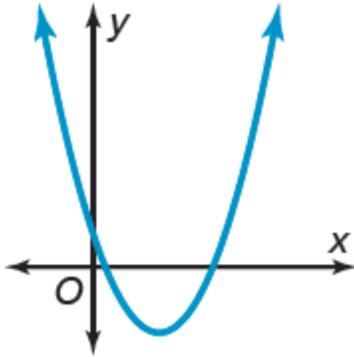
$$y = 2x^2 - 20x + 35$$

$$y = -x^2 - 8x - 7$$

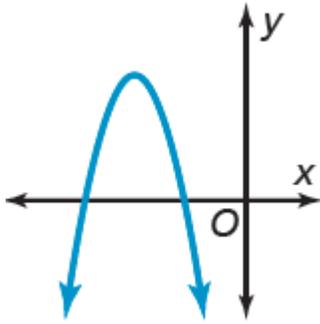
$$y = -4x^2 + 16x + 5$$

$$y = x^2 - 2x + 3$$

اكتب الدالة بصيغة الرأس. حدّد فيما إذا كان التمثيل البياني يمثل الدالة أم لا.



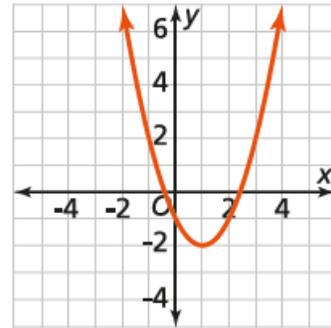
$$y = x^2 + 6x + 3$$



$$f(x) = -x^2 - 10x - 21$$

روابط في الرياضيات استعمل التمثيل البياني للدالة

$f(x) = x^2 - 2x - 1$ لتقدير حلول الدالة $f(x) = 5$. ثم أوجد الحلول الدقيقة.



2-6

القانون العام لحل المعادلات
التربيعية والمميز

2-6

القانون العام لحل المعادلات
التربيعية والمميز

القانون العام لحل المعادلات التربيعية والمميز

الدرس في نقاط

القانون العام لحل معادلة تربيعية في الصورة القياسية

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال : حل المعادلة باستعمال القانون العام $2x^2 - 3x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \approx 1.78$$

أو

$$x = \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \approx -0.28$$

تحديد عدد حلول المعادلة التربيعية

يسمى المقدار $b^2 - 4ac$ المميز ويرمز له بالرمز Δ .إذا كان $b^2 - 4ac > 0$ ، يكون للمعادلة حلان حقيقيان.إذا كان $b^2 - 4ac = 0$ ، يكون للمعادلة حل واحد حقيقي.إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ ، لا تكون للمعادلة حلول حقيقية.

* حلول المعادلة التربيعية تسمى جذور

* عدد جذور المعادلة التربيعية

0 أو 1 أو 2

تمارين

حدّد a, b, c في كل من المعادلات التربيعية التالية

المعادلة	a	b	c
$4x^2 + 2x - 1 = 0$			
$-x^2 + 31x + 7 = 0$			
$2x^2 - 10x - 3 = 0$			
$x^2 + x - 1 = 0$			
$x^2 - 16 = 0$			
$x^2 - 5x = 0$			
$x^2 + 7 = 0$			

حدّد عدد الحلول الحقيقية لمعادلة تربيعية
قيمة مميزها معطاة كما يلي

8	-3
0	1

حلّ كلّاً من المعادلات التالية باستعمال القانون العام , قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مائة

$$x^2 + 19x - 7 = 0$$

$$-2x^2 + 12x - 5 = 0$$

$$3x^2 + 18x - 27 = 0$$

حلّ كلّاً من المعادلات التالية باستعمال القانون العام , قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مائة

$$-7x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$-x^2 + 9x + 5 = -3$$

$$-2x^2 + 4x + 9 = -3$$

حلّ كلّاً من المعادلات التالية باستعمال القانون العام , قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مائة

$$x^2 - 2x = 24$$

$$21 - 4x = x^2$$

استعمل المميّز لتحديد عدد الجذور الحقيقية لكل معادلة

$$3x^2 - 9x - 16 = 0$$

$$-4x^2 + 7x - 11 = 0$$

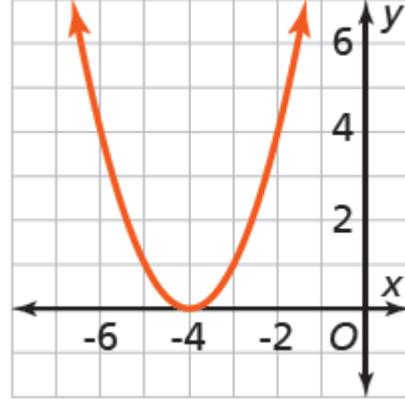
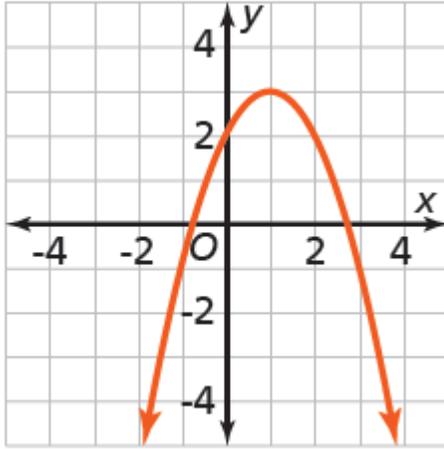
$$2x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$5x^2 - 20x + 20 = 0$$

$$2x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$5x^2 - 20x + 20 = 0$$

حدّد عدد الجذور للمعادلة التربيعية المرتبطة بالمعادلة التربيعية الممثلة بيانيًا ؟
ثم حدّد ما إذا كان المميّز أكبر من أو يساوي أو أقل من الصفر ؟



تدرّب على اختبار

اختبار SAT/ACT ما مميّز المعادلة $x^2 - x - 3 = 0$ ؟

- Ⓐ -11
- Ⓑ 0
- Ⓒ 11
- Ⓓ 13
- Ⓔ -13

لا توجد للمعادلة التربيعية أي حلول حقيقية. اختر نعم أو لا
لتحديد ما إذا كان كل منها يمثل قيمة محتملة للمميّز.

Δ	نعم	لا
-4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

✿ الى اللقاء مع الجزء الثاني ✿

Mostafa Elnazhawy