قوانين الوحدة الثانية ... التفاضل

الوحدة الثانية : التفاضل .... الصف: الثاني عشر العلمي ... الفصل الأول 3-11-2020

متوسط معدل التغير

متوسط معدل التغير للدالة f بالنسبة للمتغير x عندما تتغير قيمة x من a إلى b هو:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وتُقرأ $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ "دلتا f على دلتا x".

معدل التغير اللحظي

معدل التغير اللحظي للدالة f عند $x = a$ هو:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

وهذا فقط إذا كانت هذه النهاية موجودة.

المماس

المماس لمنحنى الدالة $y = f(x)$ عند النقطة $(a, f(a))$ هو الخط الذي يمر بهذه النقطة وميله

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

لكن في حال كانت النهاية غير موجودة، لا يكون ثمة مماس للمنحنى عند هذه النقطة.

ميل المنحنى

يُسمّى ميل مماس المنحنى عند نقطة ما بميل المنحنى عند هذه النقطة وهو يعبّر عن معدّل التغيّر اللحظي للمتغيّر y بالنسبة للمتغيّر x. إنه يمثّل اتجاه المنحنى عند هذه النقطة.

تعريف مشتقة الدالة f

مشتقة الدالة f عند x تعرف كما يلي:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

إذا كانت النهاية موجودة.

خطوات إيجاد $f'(x)$ باستعمال التعريف

1. أوجد $f(x+h)$.
2. أوجد وبسط $f(x+h) - f(x)$.
3. اقسم على h لتحصل على $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
4. أوجد $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

معادلة المماس لمنحنى الدالة

معادلة المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(x_1, f(x_1))$ هي:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

وذلك إذا كانت $f'(x_1)$ موجودة.

الاتصال والاشتقاق عند نقطة

إذا كانت مشتقة الدالة f موجودة عند $x = a$، فإن الدالة تكون متصلة عند $x = a$.

وجود المشتقة

تكون للدالة مشتقة عند نقطة معيّنة إذا كانت الدالة تحقق الشروط الثلاثة التالية:

1. متصلة عند هذه النقطة.
2. انسيابية (أي يمكن رسم مماس وحيد لها عند هذه النقطة).
3. أن لا يكون مماس منحنى الدالة في هذه النقطة خطًا رأسيًا.

لا تكون مشتقة الدالة f موجودة عند نقطة معيّنة في أي من الحالات التالية:

1. f غير متصلة عند هذه النقطة.
2. تمثل النقطة زاوية في منحنى الدالة.
3. للدالة مماس رأسي عند هذه النقطة.

رموز المشتقة

يمكن التعبير عن مشتقة الدالة $y = f(x)$ بالطرق التالية:

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad D_x[f(x)]$$

قاعدة مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت $f(x) = k$ حيث k هو عدد حقيقي ثابت، فإن:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[k] = 0$$

أي إن، مشتقة العدد الثابت تساوي الصفر.

قاعدة مشتقة دالة القوة

إذا كانت $f(x) = x^n$ حيث n عدد حقيقي، فإن:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

أي أنه للحصول على مشتقة الدالة $f(x) = x^n$ نضرب في الأس n ونطرح من الأس واحدًا.

قاعدة الضرب في عدد ثابت

إذا كانت $g'(x)$ هي مشتقة $g(x)$، فإن مشتقة الدالة $f(x) = kg(x)$ ، حيث k هو عدد حقيقي ثابت، هي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[kg(x)] = kg'(x)$$

أي أن مشتقة ضرب عدد ثابت في دالة تساوي ناتج ضرب العدد الثابت في مشتقة الدالة.

قاعدة مشتقة المجموع أو الفرق

إذا كانت $f(x) = u(x) \pm v(x)$ ، و $u'(x)$ مشتقة $u(x)$ و $v'(x)$ مشتقة $v(x)$، فإن:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[u(x) \pm v(x)] = u'(x) \pm v'(x)$$

مشتقة مجموع دالتين هي مجموع مشتقتي هاتين الدالتين، ومشتقة الفرق بين دالتين هي الفرق بين مشتقتي هاتين الدالتين.

قاعدة مشتقة ضرب دالتين

إذا كانت $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ وكانت $u'(x)$ و $v'(x)$ موجودتين، فإن:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$$

مشتقة ناتج ضرب دالتين هي مجموع ناتج ضرب الدالة الأولى في مشتقة الدالة الثانية، وناتج ضرب الدالة الثانية في مشتقة الدالة الأولى.

قاعدة مشتقة قسمة دالتين

إذا كانت $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$، حيث $v(x) \neq 0$، وكانت مشتقتا الدالتين u و v موجودتين ومعرّفتين، فإن مشتقة الدالة f هي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

اذن، مشتقة قسمة دالتين هي ناتج ضرب المقام في مشتقة البسط مطروحًا منه ناتج ضرب البسط في مشتقة المقام وقسمة الناتج الكلي على مربع المقام.

قاعدة السلسلة

إذا كانت y دالة للمتغير u، $y = f(u)$، و u دالة للمتغير x، $u = g(x)$،
فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مشتقات الدوال المركّبة

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $u = g(x)$ و g دالة قابلة للاشتقاق عند x، تكون مشتقة الدالة المركبة $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ كما يلي:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

قاعدة السلسلة للقوة

عندما تكون الدالة $y = [g(x)]^n$ حيث n عدد حقيقي و $g(x)$ قابلة للاشتقاق، يمكننا كتابة قاعدة السلسلة كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

مشتقة دالة الأس الطبيعي

مشتقة دالة الأس الطبيعي $f(x) = e^x$ هي نفسها:

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

مشتقة $e^{g(x)}$

$$\frac{d}{dx}[e^{g(x)}] = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

إذن، مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي هي مقلوب x.

مشتقة $\ln[g(x)]$

$$\frac{d}{dx}[\ln(g(x))] = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

مشتقة $\sin x$

$$D_x[\sin x] = \cos x$$

باستعمال قاعدة السلسلة، يمكننا كتابة القاعدة العامة التالية:

$$D_x[\sin (g(x))] = \cos [g(x)] \cdot g'(x)$$

مشتقة $\cos x$

$$D_x[\cos x] = -\sin x$$

باستعمال قاعدة السلسلة، يمكننا كتابة القاعدة العامة التالية:

$$D_x[\cos (g(x))] = -\sin (g(x)) \cdot g'(x)$$

مشتقة $\tan x$

$$D_x[\tan x] = \sec^2 x$$

باستعمال قاعدة السلسلة، يمكننا كتابة القاعدة العامة التالية:

$$D_x[\tan(g(x))] = \sec^2 [g(x)] \cdot g'(x)$$

خطوات الاشتقاق الضمني

1. اشتقاق طرفَي المعادلة بالنسبة للمتغير x.
2. تجميع كل الحدود التي تتضمّن $\frac{dy}{dx}$ في أحد طرفَي المعادلة.
3. إخراج $\frac{dy}{dx}$ كعامل مشترك.
4. إيجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x و y.

المشتقات من الرتب العليا

إذا كانت $y = f(x)$ فإن مشتقتها الثانية تُكتب بأحد الرموز التالية:

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad D_x^2[f(x)]$$

تُكتب المشتقة الثالثة بطريقة مشابهة.

وبشكل عام المشتقة من الرتبة n حيث $n \geq 4$ للدالة f هي:

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right), \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad D_x^n[f(x)]$$